Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

6 марта 2020 г.

Диссипация и дисперсия численного решения

Определим диссипацию и диспесиию для дифференциального волнового уравнения. Возьмем решение в виде:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(i(\omega t - kx)\right),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.
Подставив это решение в волновое уравнение, получим зависимость $\omega = \omega(k)$, которая называется **дисперсионным соотношением**.
Если ω – комплексное число, волна затухает!

$$\exp\left((-Im\omega)t\right) = \exp\left(-\gamma t\right).$$

Фазовая и групповая скорость

Фазовая скорость – это скорость, с которой движется фаза или отдельной гармоники:

$$\frac{Re\omega}{k} = c_f.$$

Групповая скорость – это скорость волнового пакета, состоящего из гармонических волн с близкими волновыми числами (Передача энергии осуществляется с групповой скоростью!):

$$\frac{d}{dk}Re\omega = c_g.$$

Дисперсия волн

Если фазовая/групповая скорость зависит от k, то гармоники с разными волновыми числами распространяются с разными скоростями. Такое явление называется **дисперсией**.

Пример №1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 = -c^2 k^2 \Rightarrow \omega = ck \Rightarrow \frac{Re\omega}{k} = \frac{d}{dk} Re\omega = c.$$

Точное решение – волна без дисперсии и затухания.

Пример №2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow i\omega - ick = -\mu k^2 \Rightarrow \omega(k) = ck + i\mu k^2.$$

Точное решение – затухающая недиспергирующая волна.