# Численные методы в физике

**Губкин А.С.**

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

6 октября 2015 г.

# Дифференциальные приближения

Попробуем оценить невязку между волновым уравнением:

$$u_t + au_x = 0,$$

и разностной схемой, аппроксимирующей его:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} = 0,$$

# Дифференциальные приближения

Для этого используем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Тейлора в точках $(x_{i-1},t_i)$ и $(x_i,t_{i+1})$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + u_t\triangle t + \frac{u_{tt}}{2}\triangle t^2 + \frac{u_{ttt}}{6}\triangle t^3 + O(\triangle t^4),$$
$$u_{i-1}^n = u_i^n - u_x\triangle x + \frac{u_{xx}}{2}\triangle x^2 - \frac{u_{xxx}}{6}\triangle x^3 + O(\triangle x^4).$$

Теперь подставим эти разложения в исходную схему.

# Дифференциальные приближения

После несложных преобразований волновое уравнение приводится к виду:

$$u_t + au_x = \frac{a\triangle x}{2}(1-\sigma)u_{xx} - \frac{a\triangle x^2}{6}(2\sigma^2 - 3\sigma + 1)u_{xxx} +$$
$$+ O(\triangle x^3, \triangle x^2\triangle t, \triangle x\triangle t^2, \triangle t^3).$$

Это уравнение называется **дифференциальным приближением** (**модифициро**
**уравнением**) для разностной схемы.

# Дифференциальные приближения

В левой части последнего равенства записано исходное волновое уравнение, а в правой – погрешность аппроксимации, которая обычно отлична от нуля. Таким образом, при использовании метода конечных разностей **решается** на самом деле **модифицированное уравнение**, а не исходное уравнение в частных производ производных.

# Численное решение (явный метод Эйлера)

# Численное решение (неявный метод Эйлера)

# Схема Лакса

$$u_t + au_x = 0,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\triangle t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} = 0.$$

Дифференциальное приближение для схемы Лакса имеет вид:

$$u_t + au_x = \frac{a\triangle x}{2}\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)u_{xx} + \frac{a\triangle x^2}{3}(1-\sigma^2)u_{xxx} + \ldots$$

# Численное решение (Схема Лакса)

# Метод с перешагиванием (метод «чехарда»)

$$u_t + au_x = 0,$$
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\triangle t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} = 0.$$

Дифференциальное приближение для метода «чехарда» имеет вид:

$$u_t + au_x = \frac{a\triangle x^2}{6}\left(\sigma^2 - 1\right)u_{xxx} - \frac{a\triangle x^4}{120}(9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 1)u_{xxxxx} + \dots$$

НТПМ ТюмФ

# Численное решение (метод «чехарда»)

# Метод Лакса – Вендроффа

$$u_t + au_x = 0,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\triangle t}{2\triangle x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)+$$

$$+\frac{a^2\triangle t^2}{2\triangle x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Дифференциальное приближение для метода Лакса – Вендроффа имеет вид:

$$u_t + au_x = -\frac{a\triangle x^2}{6}\left(1-\sigma^2\right)u_{xxx} - \frac{a\triangle x^3}{8}\sigma(1-\sigma^2)u_{xxxx} + \ldots$$

# Численное решение (одношаговый метод Лакса – Вендроффа)

# Численное решение (двухшаговый метод Лакса – Вендроффа)

# Метод Мак - Кормака (разности против потока)

$$u_t + a u_x = 0,$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \triangle t}{\triangle x}(u_i^n - u_{i-1}^n),$$

$$u_i^{n+1} = \left[ u_i^n + \bar{u}_i^{n+1} - \frac{a \triangle t}{\triangle x}(\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1}) \right.$$

$$\left. - \frac{a \triangle t}{2 \triangle x}(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \right].$$

# Метод Мак - Кормака (разности против потока)

Дифференциальное приближение для метода Мак - Кормака имеет вид:

$$u_t + au_x = \frac{a\triangle x^2}{6}(1-\sigma)(2-\sigma)u_{xxx} -$$
$$- \frac{\triangle x^4}{8\triangle t}\sigma(1-\sigma)^2(2-\sigma)u_{xxxx} + \ldots$$

# Численное решение (метод Мак - Кормака)

# Численное решение (метод Мак - Кормака с разностями против потока)

# Диссипация и дисперсия численного решения

Определим диссипацию и диспесиию для дифференциального волнового уравнения. Возьмем решение в виде:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(i(\omega t - kx)\right),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.
Подставив это решение в волновое уравнение, получим зависимость $\omega = \omega(k)$, которая называется **дисперсионным соотношением**.
Если $\omega$ – комплексное число, волна затухает!

$$\exp\left((-Im\omega)t\right) = \exp\left(-\gamma t\right).$$

# Фазовая и групповая скорость

**Фазовая скорость** – это скорость, с которой движется фаза или отдельной гармоники:

$$\frac{Re\omega}{k} = c_f.$$

**Групповая скорость** – это скорость волнового пакета, состоящего из гармонических волн с близкими волновыми числами (Передача энергии осуществляется с групповой скоростью!):

$$\frac{d}{dk} Re\omega = c_g.$$

# Дисперсия волн

Если фазовая/групповая скорость зависит от $k$, то гармоники с разными волновыми числами распространяются с разными скоростями. Такое явление называется **дисперсией**.

# Пример №1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 = -c^2 k^2 \Rightarrow \omega = ck \Rightarrow \frac{Re\omega}{k} = \frac{d}{dk} Re\omega = c.$$

Точное решение – волна без дисперсии и затухания.

# Пример №2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow i\omega - ick = -\mu k^2 \Rightarrow \omega(k) = ck + i\mu k^2.$$

Точное решение – затухающая недиспергирующая волна.

# Диссипация и дисперсия сеточного решения

Анализ диссипации и дисперсии сеточного решения можно проводить на решении

$$u_i^n = u^* \exp\left(i(\omega t_n - k x_i)\right),$$

После подстановки этого решения в ррзностную схему, получим некоторое соотношение вида $\omega = \omega(k, \triangle t, \triangle x)$.

# Пример

Метод с перешагиванием (метод «чехарда»):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\triangle t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} = 0.$$

Подставим решение:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u^* \exp\left(i(\omega(t_n + \triangle t) - kx_i)\right),\\
u_i^{n-1} &= u^* \exp\left(i(\omega(t_n - \triangle t) - kx_i)\right),\\
u_{i+1}^n &= u^* \exp\left(i(\omega t_n - k(x_i + \triangle x))\right),\\
u_{i-1}^n &= u^* \exp\left(i(\omega t_n - k(x_i - \triangle x))\right).
\end{aligned}$$

# Дак вот оно что!

Теперь можно объяснить возникновение осцилляций в приближенном решении. Любое гладкое решение можно представить в виде ряда Фурье по пространственным гармоникам:

$$u(x,t) = u_1(t)u_2(x) \approx u_1(t)\sum_{n=0}^{N}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\right).$$

Возникает дисперсия приближенного решения и гармоники с разными значениями $n$ распространяются с разными скоростями. Возникает пространственное разделение этих гармоник, и появляются осцилляции, отсутствующие в точном решении.

# Вывод

При численном решении волновых задач возникает затухание и дисперсия сеточного решения, что связано с формой разностных уравнений. Затухание прводит к уменьшению амплитуды, дисперсия – искажает форму волны.