# Методические рекомендации к численному решению модельных уравнений математической физики

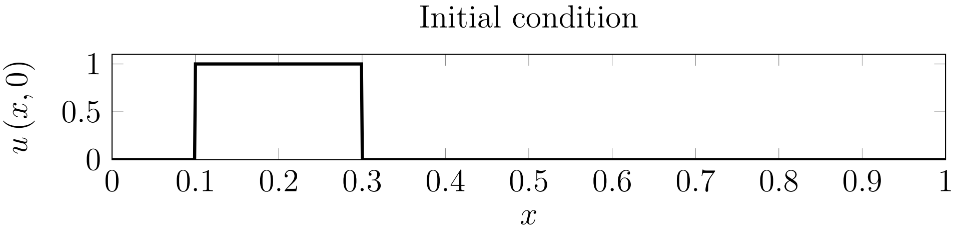
Gubkin A.S.

11 февраля 2020 г.

## Задача №0

Решить численно задачу Коши для одномерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u\left(x,0\right) = \begin{cases} 1,\ 0.1 \leqslant x \leqslant 0.3, \\ 0,\ x < 0.1, x > 0.3. \end{cases}, \end{cases} \quad (1)$$




Введем равномерную сетку по пространству и времени с шагом $\triangle x$ и $\triangle t$ соответственно и аппроксимируем частные производные следующими аналогами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x}, \quad (2)$$

получим дискретный аналог

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} = 0, \quad (3)$$

где $a$ - скорость распространения волны. При численном решении удобно положить $a = 1$.

### Замечание!!!

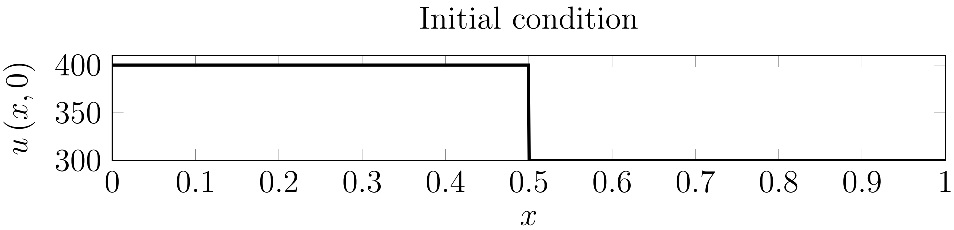
Предложенный метод является условно устойчивыми, т.е. устойчивый процесс вычисления можно получить при соблюдении определенных условий. В данном случае шаги по времени и координате должны удовлетворять следующему условию:

$$Co = a\frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1. \quad (4)$$

# Задача №1

Решать начально-краевую задачу для одномерного уравнения диффузии:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u\left(0,t\right) = 400, \\ u\left(1,t\right) = 300, \\ u\left(x,0\right) = \begin{cases} 400,\ x \leqslant 0.5, \\ 300,\ x > 0.5. \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$




где $u$ – искомая функция, которая может принимать различный физический смысл: температура, давление, концентрация и т.д., $a$ - коэффициент температуропроводности / пьезопроводности / диффузии и т.д.

Введем равномерную сетку по пространству и времени с шагом $\triangle x$ и $\triangle t$ соответственно и аппроксимируем частные производные следующими аналогами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\triangle x^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $n$ – временной индекс, $j$ – пространственный индекс.

Подставим эти аппроксимации в уравнение и получим конечноразностный аналог исходного уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = a\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\triangle x^2}. \tag{7}$$

Этот конечноразностный аналог не позволяет явно выразить значение $u$ на верхнем временном слое, т.к. схема неявная. Поэтому для нахождения $u_j^{n+1}$ нужно привлекать дополнительные алгоритмы для решения системы линейных алгебраических уравнений (далее СЛАУ).
СЛАУ назывется уравнение вида

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}, \tag{8}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов СЛАУ или просто матрица СЛАУ, $\vec{\mathbf{x}}$ – вектор искомых величин (в данном случае вектор, состоящий из значений искомой функции в узлах сетки), $\vec{\mathbf{b}}$ – вектор свободных членов.

В алгебраической форме СЛАУ из $N$ уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \dots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}. \tag{9}$$

Составим матрицу $\mathbf{A}$ и вектор $\vec{\mathbf{b}}$ для нашего конечноразностного аналога на $n+1$-ом временном слое. Предположим, что пространство разбито на $N$ отрезков одинакового размера, перепишем конечноразностное уравнение:

$$-a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + 2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_j^{n+1} - a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j+1}^{n+1} = u_j^n. \tag{10}$$

Теперь, записывая последовательно каждое уравнение для $j = 1 \div N-1$ получим СЛАУ:

$$\begin{cases} \left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_1^{n+1} - a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_2^{n+1} & = u_1^n + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_0^{n+1} \\ -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_1^{n+1} + \left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_2^{n+1} - a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_3^{n+1} & = u_2^n \\ -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_2^{n+1} + \left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_3^{n+1} - a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_4^{n+1} & = u_3^n \\ -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_3^{n+1} + \left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_4^{n+1} - a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_5^{n+1} & = u_4^n \\ \dots \\ -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{N-2}^{n+1} + \left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)u_{N-1}^{n+1} & = u_{N-1}^n + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_N^{n+1}. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ и вектор свободных членов $\vec{\mathbf{b}}$ будут

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} & 1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} u_1^n + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_0^{n+1} \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_N^{n+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Для решения СЛАУ существует множество методов, прямых и итерационных. Автор данного методического пособия настоятельно рекомендует пользоваться итерационными методами, к примеру такими как метод Якоби или метод Гаусса-Зейделя.

Для решения СЛАУ методом Якоби или Гаусса-Зейделя перепишем ее в эквивалентной форе:

$$\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{x}}-\mathbf{E}\cdot\vec{\mathbf{x}}-\mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}, \tag{14}$$

где $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ – диагональная, верхняя треугольная и нижняя треугольная матрицы соответственно:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{NN} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1N} \\ 0 & e_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e_{N-1\,N} \\ 0 & \cdots & 0 & e_{NN} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} f_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ f_{N1} & \cdots & f_{N\,N-1} & f_{NN} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Предположим, что мы имеем некотрое $k$-е приблежение к точному решению $\vec{\mathbf{x}}$, тогда

$$\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{E}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}\neq\vec{\mathbf{b}}, \tag{18}$$

но мы можем потребовать выполнения равенства заменив одно из вхождений $\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ на $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}$, тем самым получив итерационное сотношение. К примеру метод Якоби можно получить, заменив $\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ на $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ при матрице $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}-\mathbf{E}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}=\vec{\mathbf{b}}. \tag{19}$$

Выразим $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}$, получим:

$$\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}+\mathbf{D}^{-1}\cdot\vec{\mathbf{b}}. \tag{20}$$

Метод Гаусса-Зейделя можно получить, заменив $\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ на $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ при матрице $\mathbf{F}$:

$$\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}=\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{E}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{F}^{-1}\cdot\vec{\mathbf{b}}. \tag{21}$$

Обратный метод Гаусса-Зейделя получим, заменив $\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ на $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ при матрице $\mathbf{E}$:

$$\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}=\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k)}-\mathbf{E}^{-1}\cdot\vec{\mathbf{b}}. \tag{22}$$

## Замечания!!!

Для исходной задачи хранить матрицы $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ не обязательно и даже вредно. Поскольку структура матрицы $\mathbf{A}$ трехдиагональная, то можно явно использовать коэффициенты матриц в итерационном соотношении. К примеру для метода Якоби итерационное соотношение будет иметь вид:

$$u_j^{n+1\,(k+1)}=\frac{1}{\left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)}\left(a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j+1}^{n+1\,(k)}+a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j-1}^{n+1\,(k)}+u_j^n\right),\ j=1\div(N-1), \tag{23}$$

для метода Гаусса-Зейделя:

$$u_j^{n+1\,(k+1)} = \frac{1}{\left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)}\left(a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j+1}^{n+1\,(k)} + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j-1}^{n+1\,(k+1)} + u_j^n\right),\ j = 1 \div (N-1), \quad (24)$$

для обратного метода Гаусса-Зейделя:

$$u_j^{n+1\,(k+1)} = \frac{1}{\left(1+2a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}\right)}\left(a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j+1}^{n+1\,(k+1)} + a\frac{\triangle t}{\triangle x^2}u_{j-1}^{n+1\,(k)} + u_j^n\right),\ j = (N-1) \div 1. \quad (25)$$

Данные итерационные соотношения "крутятся"в цикле **do - while** до тех пор пока не будет достигнуто одно из условий:

$$\frac{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \vec{\mathbf{x}}^{(k)}\right\|}{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)} + \vec{\mathbf{x}}^{(k)}\right\|} \leqslant \varepsilon, \quad (26)$$

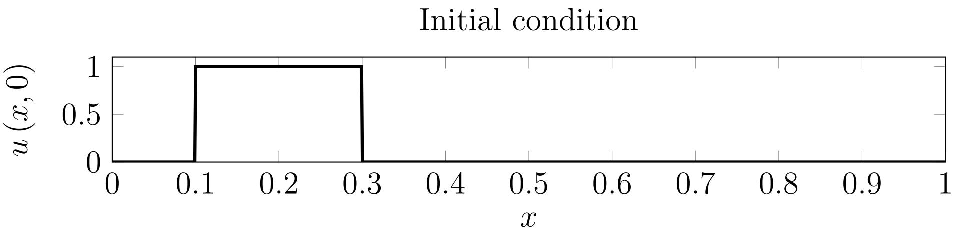
$$\frac{\left\|\vec{\mathbf{r}}^{(k+1)}\right\|}{\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}\right\|} \leqslant \varepsilon, \quad (27)$$

где $\left\|\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N-1}\left(u_j^{n+1\,(k+1)}\right)^2}$ – модуль вектора решения, $\left\|\vec{\mathbf{r}}^{(k+1)}\right\| = \left\|\mathbf{A}\cdot\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \vec{\mathbf{b}}\right\|$ – невязка приблеженного решения на $(k+1)$-й итерации.

# Задача №2

Решить численно задачу Коши для одномерного гиперболического закона сохранения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \\ u\left(x, 0\right) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ 0.1 \leqslant x \leqslant 0.3, \\ 0,\ x \leqslant 0.1, x \geqslant 0.3. \end{array} \right., \end{array} \right. \tag{28}$$




где $u$ – сохраняемая величина, $f\left(u\right)$ – поток величины $u$.

Для данной задачи положим $f\left(u\right) = \frac{u^2}{2}$, тогда уравнение будет называться невязким уравнением Бюргерса.

Введем равномерную сетку по пространству с шагом $\triangle x$ и проинтегрируем исходное уравнение по ячейке $\triangle x \times \triangle t$:

$$\iint\limits_{\triangle x \times \triangle t} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx + \iint\limits_{\triangle x \times \triangle t} \frac{\partial f\left(u\right)}{\partial x} dt dx = 0, \tag{29}$$

получим дискретный аналог

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\triangle x} = 0, \tag{30}$$

где $u_i^n$ – среднее значение величины $u$ в $i$-й ячейке, $f_{i+\frac{1}{2}}$ и $f_{i-\frac{1}{2}}$ – численные потоки величины $u$ на правой и левой грянях $i$-й ячейки соответственно.

Существует множество подходов вычисления численного потока на гранях ячеек. Один из таких подходов заключается в явном вычислении численного потока через известные на данном временном слое величины. Такой подход называется метод потоков (англ. **flux method**).

Простейший метод в рамках данного подхода:

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right) - \frac{\triangle x}{2\triangle t}\left(u_{i+1} - u_i\right), \\ f_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i-1}\right) - \frac{\triangle x}{2\triangle t}\left(u_i - u_{i-1}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

называется методом **Лакса-Фридрихса** (Lax-Friedrichs, 1954).

Метод **Лакса-Вендрофа** (Lax-Wendroff, 1960)

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right) - \frac{1}{2}a^2_{i+\frac{1}{2}}\frac{\triangle t}{\triangle x}\left(u_{i+1} - u_i\right),$$
$$f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i-1}\right) - \frac{1}{2}a^2_{i-\frac{1}{2}}\frac{\triangle t}{\triangle x}\left(u_i - u_{i-1}\right), \qquad (32)$$

где величины $a_{i+\frac{1}{2}}$ и $a_{i-\frac{1}{2}}$ вычисляются следующим образом

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_{i+1}-f_i}{u_{i+1}-u_i},\ u_{i+1} \neq u_i \\ f'\left(u_i\right),\ u_{i+1} = u_i \end{cases},$$
$$a_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_i-f_{i-1}}{u_i-u_{i-1}},\ u_i \neq u_{i-1} \\ f'\left(u_{i-1}\right),\ u_i = u_{i-1} \end{cases}. \qquad (33)$$

Схема **upwind**

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_i,\ a_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_{i+1},\ a_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases},$$
$$f_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_{i-1},\ a_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_i,\ a_{i-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}. \qquad (34)$$

очень проста в реализации, имеет хорошую устойчивость и даёт приемлемый результат.

## Замечание!!!

Все рассмотренные выше схемы являются условно устойчивыми, т.е. устойчивый процесс вычисления можно получить при соблюдении определенных условий. В данном случае шаги по времени и координате должны удовлетворять следующему условию:

$$Co = \max_i |a_i| \frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1,\ a_i = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_i} \qquad (35)$$

# Задача №3

Решить численно задачу Коши для одномерного гиперболического закона сохранения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{u^2+\frac{1}{4}(1-u^2)^2}\right) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{4},\ x \le 0, \\ 0,\ x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{36}$$

Данная задача отличается от передыдущей только видом функции потока $f(u) = \frac{u^2}{u^2+\frac{1}{4}(1-u^2)^2}$, поэтому решать ее следует так же как аналогичную задачу для уравнения Бюргерса.

Данное уравнение возникает в задаче двухфазной фильтрации несжимаемых флюидов без учета капиллярных сил.

Запишем уравнения неразрывности для каждой фазы

$$ms_{1t} + w_{1x} = 0,$$

$$ms_{2t} + w_{2x} = 0,$$

где $s_{1,2}$ – насыщенность, $m$ – пористость.

Скорости фильтрации $w_{1,2}$ подчиняются уравнению Дарси

$$w_1 = \frac{Q_1}{S} = -k\frac{k_1(s)}{\mu_1}p_x,$$

$$w_2 = \frac{Q_2}{S} = -k\frac{k_2(s)}{\mu_2}p_x,$$

где $Q_{1,2}$ – объемные расходы через сечение $S$, $k$ – абсолютная проницаемость, $k_{1,2}$ – относительные фазовые прроицаемости, $\mu_{1,2}$ – динамические вязкости, $p_x$ – градиент давления.

Предполагается, что $s = s_1$ (либо $s = s_2$).

Для двухфазного течения $s_1$ и $s_2$ связаны очевидным соотношением

$$s_1 + s_2 = 1.$$

Складывая уравнения неразрывности, получим

$$(w_1 + w_2)_x = 0,$$

откуда найдем интеграл

$$w_1 + w_2 = w(t) \text{ или } Q_1 + Q_2 = Q(t).$$

Исключим градиент давления

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{k_1(s)}{\frac{\mu_1}{\mu_2}k_2(s)}.$$

Используя соотношение $w_1 + w_2 = w(t)$, получим

$$\frac{w_1}{w(t)} = \frac{k_1(s)}{k_1(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_2(s)} = f(s) \text{ - функция Баклея-Леверетта.}$$

Поэтому

$$w_1 = f(s)w(t) \text{ и } w_2 = (1 - f(s))w(t).$$

Подставим последнее соотношение для $w_1$ в уравнение неразрывности для первой фазы, получим

$$ms_t + w(t)f(s)_x = 0.$$

Для случая, когда $w(t)/m = 1$

$$s_t + f(s)_x = 0,$$

что с точностью до обозначений совпадает с исходным уравнением.

## Замечание!!!

Рекомендуется использовать схему **upwind**.

## Задача №4

IMPES

## Задача №5

Решить численно задачу Коши для одномерных уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\rho u^2 + p\right)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho e}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\rho e + p\right) u}{\partial x} = 0, \\ p = (\gamma - 1)\,\rho\varepsilon, \\ \rho = \begin{cases} 1, \ x \le 0.5 \\ 0.125, \ x > 0.5 \end{cases}, \\ u = \begin{cases} 0, \ x \le x_0 \\ 0, \ x > x_0 \end{cases}, \\ p = \begin{cases} 1, \ x \le x_0 \\ 0.1, \ x > x_0 \end{cases}. \end{cases} \tag{37}$$

Здесь $\rho$ – это плотность, $u$ – скорость движения газа, $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$ – полная энергия единицы массы, $\varepsilon$ – удельная внутрення энергия, $p$ – давление, $\gamma$ – показатель адиабаты (для воздуха равен 1.4).

Преобозначим консервативные переменные и варазим функции потока и уравнение состояния через них:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= s_1 \\ \rho u &= s_2 \\ \rho e &= s_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial t} + \dfrac{\partial s_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{s_2^2}{s_1} + p\right) = 0 \\ \dfrac{\partial s_3}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(s_3 + p\right)\dfrac{s_2}{s_1}\right) = 0 \\ p = (\gamma - 1)\left(s_3 - \dfrac{s_2^2}{2 s_1}\right) \end{cases}, \tag{38}$$

или в векторнойформе:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{\mathbf{s}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}\right)}{\partial x} = 0, \\ &\vec{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}\right) = \begin{pmatrix} s_2 \\ \frac{s_2^2}{s_1} + p \\ \left(s_3 + p\right)\frac{s_2}{s_1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

Автор данного пособия рекомендует решать данную систему двухшаговым методом Лакса-Вендрофа поскольку это позволит избежать вычисления якобиана:

**первый шаг**

$$\vec{\mathbf{s}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i+1}^{n} + \vec{\mathbf{s}}_{i}^{n}\right) - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i+1}^{n}\right) - \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n}\right)\right),$$
$$\vec{\mathbf{s}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n} + \vec{\mathbf{s}}_{i-1}^{n}\right) - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n}\right) - \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i-1}^{n}\right)\right), \tag{40}$$

**второй шаг**

$$\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n+1} = \vec{\mathbf{s}}_{i}^{n} - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right). \tag{41}$$

## Замечания!!!

Так как порядок схемы Лакса-Вендрофа второй, то в решении обязательно появятся дисперсионные высокочастотные составляющие, которые могут привести к "разваливанию"решения. Чтобы решить это проблему, на втором шаге необходимо ввести член с искусственной вязкостью:

$$\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n+1} = \vec{\mathbf{s}}_{i}^{n} - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{s}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right) + \mu_a\left(\vec{\mathbf{s}}_{i+1}^{n} - 2\vec{\mathbf{s}}_{i}^{n} + \vec{\mathbf{s}}_{i-1}^{n}\right). \tag{42}$$

Искусственная вязкость $\mu_a$ подбирается экспериментально из серии расчетов.

Схема Лакса-Вендрофа является условно устойчивой, поэтому шаг по времени должен удовлетворять условию устойчивости:

$$Co = \max_i\left\{\left|u_i - c_i\right|, \left|u_i\right|, \left|u_i + c_i\right|\right\}\frac{\triangle t}{\triangle x} \le 1,\ c_i = \sqrt{\gamma\frac{p_i}{\rho_i}}. \tag{43}$$