

# Численные методы в физике

**Губкин А.С.**

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

16 февраля 2020 г.



Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным, интегральным или к интегро - дифференциальным уравнениям, аналитическое решение которых, в большинстве случаев, получить невозможно.

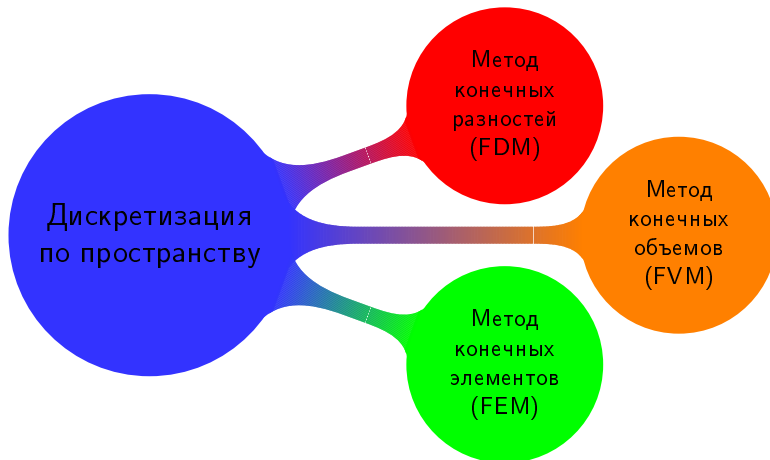
В этом случае на помощь исследователю приходят различные численные методы, которые позволяют получить **приближенное решение** рассматриваемой задачи.

**Вычислительная математика** – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с производством разнообразных вычислений. В более узком понимании вычислительная математика – **теория численных методов** решения типовых математических задач. Современная вычислительная математика включает в круг своих проблем изучение особенностей вычисления с применением компьютеров.

1917 г. Первая попытка Л.Ф. Ричардсона предсказать погоду путем численного решения (вручную!) уравнения в частных производных.

«Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке  $n/18$  пенсов, где  $n$  – число цифр, с которыми производятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались.»

# Основные способы пространственной дискретизации

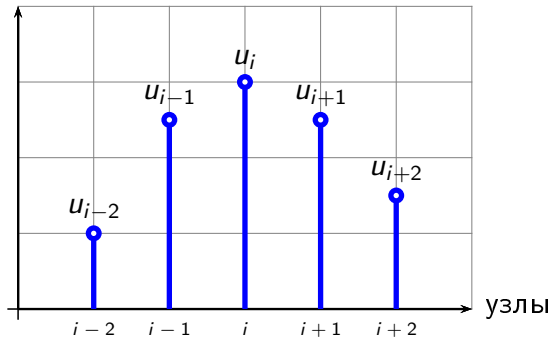


# Метод конечных разностей (Finite Difference Method)

Искомые величины – значения переменных в узлах конечноразностной сетки:

$$\omega_{h,\tau} = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N_h}; t^n = n\tau, n = \overline{0, N_t} \right\}$$

$u$



## Пример дискретизации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}; \end{array} \right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

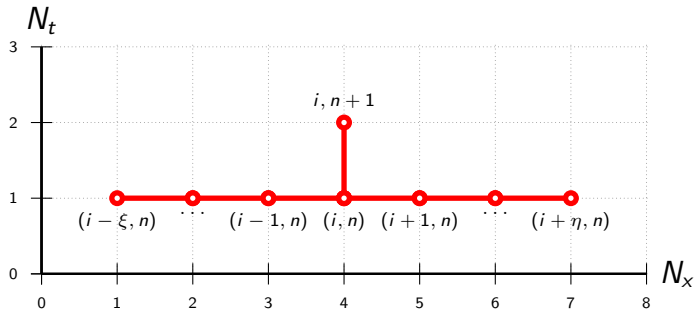
# Шаблон разностной схемы

## Определение

**Шаблон** – это мнемоническая диаграмма, которая указывает способ образования разностной схемы, показывая точки разностной сетки, участвующие в аппроксимации.

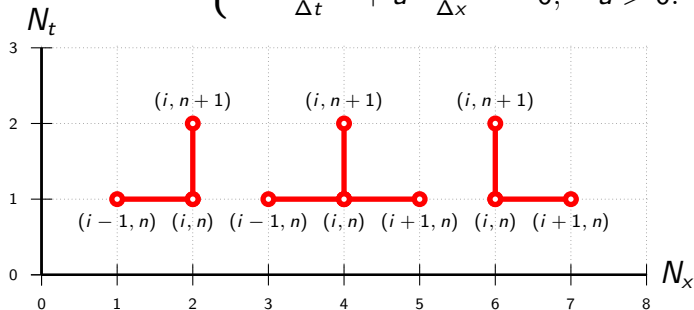


## Шаблон в общем одномерном случае



# Пример шаблона

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, & a > 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, & a < 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, & a > 0. \end{cases}$$



После дискретизации получаем систему алгебраических уравнений (как правило линейных - СЛАУ), которая затем решается на ЭВМ. Говорят, что такая система алгебраических уравнений **согласуется** с исходным дифференциальным уравнением в частных производных, если в пределе, при стремлении размеров ячеек сетки к нулю, система алгебраических уравнений эквивалентна дифференциальному уравнению в каждом узле разностной сетки.

Пусть дана система уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \hat{L}u,$$

где в общем случае  $\hat{L}$  – нелинейный оператор.  
После дискретизации имеем:

$$u^{n+1} = \hat{T}(\Delta t, \Delta x)u^n,$$

где  $\hat{T}$  – оператор перехода.

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \equiv \frac{\hat{\mathbf{T}}(\Delta t, \Delta x) \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_e}{\Delta t}$$

Разностная схема **аппроксимирует уравнение** (или согласована с уравнением), если:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \left( \frac{\hat{\mathbf{T}}(\Delta t, \Delta x) - \mathbf{I}}{\Delta t} - \hat{\mathbf{L}} \right) \mathbf{u}_e \right\| = 0, \quad \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \rightarrow \beta.$$

# Аппроксимация

Пусть  $u_e(x, t)$  – точное решение. Тогда локальная ошибка аппроксимации записывается как:

$$LTE = u_e^{n+1} - \hat{\mathbf{T}} u_e^n = O \left( \Delta t \sum_{p,q \geq 0, p+q=l} \Delta t^p \Delta x^q \right).$$

В этом случае порядок локальной ошибки аппроксимации равен  $l + 1$ , а порядок схемы  $l$ .

## Пример

Схема с разностями против потока для линейного уравнения переноса  $u_t + au_x = 0$ :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$\left( \hat{\mathbf{T}} u_e^n \right)_j = u_{e,j}^n - \sigma \left( u_{e,j}^n - u_{e,j-1}^n \right), \quad \sigma = a \Delta t / \Delta x,$$

$$\begin{aligned} LTE &= u_e^{n+1} - \hat{\mathbf{T}} u_e^n = (u_{e,t} + au_{e,x}) \Delta t + \\ &+ O(\Delta t \Delta x + \Delta t^2) = \Delta t O(\Delta x + \Delta t). \end{aligned}$$

Обозначим вектор ошибки, появляющейся на  $n$ -м шагу, через  $\varepsilon^n = u^n - u_e^n$ .

Матрица перехода  $G$  определяется как  $\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n$ .

Для линейного уравнения матрица перехода  $G$  эквивалентна оператору перехода  $\hat{T}$ .

В общем случае:

$$G = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \hat{T} \mathbf{u} \right), \quad G_{\mu\nu} = \frac{\partial u_{\mu}^{n+1}}{\partial u_{\nu}^n}.$$



# Устойчивость

## Условие устойчивости

Метод устойчив, если  $\| \varepsilon^{n+1} \| = \| u^{n+1} - u_e^{n+1} \|$  может быть ограничена  $\| \varepsilon^n \|$ , умноженной на константу, независящую как от  $u^n$ , так и от  $u_e^n$ :

$$\| \varepsilon^{n+1} \| \leq (1 + K \Delta t) \| \varepsilon^n \| .$$

**Должно быть  $K = 0$ !**

Если уравнение перехода приведено к диагональному виду  $\varepsilon_\mu^{n+1} = g_\mu \varepsilon_\mu^n$ , тогда для устойчивости надо потребовать, чтобы норма каждого собственного вектора ошибки не возрастала, откуда получаем:

$$|g_\mu| = \sqrt{g_\mu g_\mu^*} < 1 \text{ для всех } \mu.$$

## Анализ устойчивости по фон Нейману

Пусть оператор перехода  $\hat{T}(\Delta t, \Delta x)$  равен постоянной величине. Тогда можно рассмотреть устойчивость фурье-моды зависимой переменной  $u_j^n = \hat{u}_j^n e^{ikx_j}$  и потребовать ограниченности ее амплитуды. Для устойчивости множитель перехода  $g$  (или для системы уравнений собственные значения матрицы перехода  $g_\mu$ ) должен не превосходить по модулю единицу  $|g| \leq 1$ , для всех фурье-мод.

## Пример №1

Разности против потока:

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad \sigma = a\Delta t / \Delta x,$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \sigma (\hat{u}_k^n - e^{-ik\Delta x} \hat{u}_k^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 1 - \sigma + \sigma e^{-ik\Delta x}$$

$$\Rightarrow |g| = \left( (1 - \sigma + \sigma \cos k\Delta x)^2 + \sigma^2 \sin^2 k\Delta x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Условие устойчивости:  $\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

## Пример №2

Разности по потоку:

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0,$$

## Пример №2

Разности по потоку:

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad \sigma = a\Delta t / \Delta x,$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \sigma (e^{ik\Delta x} \hat{u}_k^n - \hat{u}_k^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 1 + \sigma - \sigma e^{ik\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g| = \left( (1 + \sigma - \sigma \cos k\Delta x)^2 + \sigma^2 \sin^2 k\Delta x \right)^{\frac{1}{2}} > 1.$$

Схема всегда неустойчива!

## Пример №3

Центральные разности:

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

## Пример №3

Центральные разности:

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma/2 (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad \sigma = a\Delta t/\Delta x,$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \sigma/2 (e^{ik\Delta x} \hat{u}_k^n - e^{-ik\Delta x} \hat{u}_k^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 1 - i\sigma/2 \sin k\Delta x \Rightarrow |g| = (1 + \sigma^2/4 \sin^2 k\Delta x)^{\frac{1}{2}} > 1.$$

Схема всегда неустойчива!

## Пример №4

Схема Лакса:

$$u_t + au_x = 0,$$
$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow$$



## Пример №4

Схема Лакса:

$$u_t + au_x = 0,$$
$$\frac{u_i^{n+1} - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \cos k\Delta x - i\sigma \sin k\Delta x$$

$$\Rightarrow |g| = (\cos^2 k\Delta x + \sigma^2 \sin^2 k\Delta x)^{\frac{1}{2}}.$$

Схема устойчива при:  $\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

## Пример №5

Метод с перешагиванием (метод «чехарда»):

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g &= \pm(1 - \sigma^2 \sin^2 k\Delta x)^{\frac{1}{2}} - i\sigma \sin k\Delta x \\ \Rightarrow |g| &= 1.\end{aligned}$$

Схема устойчива при:  $\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

## Пример №6

Метод Лакса – Вендроффа:

$$u_t + au_x = 0,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) +$$

$$+ \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 1 - \sigma^2(1 - \cos k\Delta x) - i\sigma \sin k\Delta x$$

$$\Rightarrow |g| = (1 - \sigma^2(1 - \cos k\Delta x))^2 + \sigma^2 \sin^2 k\Delta x)^{\frac{1}{2}}.$$

Схема устойчива при:  $\sigma = a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

## Пример №7

Метод Мак-Кормака (разности против потока):

$$u_t + au_x = 0,$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n),$$

$$u_i^{n+1} = \left[ u_i^n + \bar{u}_i^{n+1} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \right] \Rightarrow$$

## Пример №7

$$\Rightarrow g = 1 - 2\sigma \left[ \sigma + 2(1 - \sigma) \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right] \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} - \\ - i\sigma \sin k\Delta x \left[ 1 + 2(1 - \sigma) \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right].$$

Схема устойчива при:  $\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$ .