

Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

18 февраля 2021 г.



Введение

Рассмотрим одномерный гиперболический закон сохранения:

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Будем рассматривать два потока $f(u)$: $\frac{u^2}{2}$, $\frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{4}(1-u^2)^2}$ - поток уравнения Бюргерса и поток уравнения Баклея - Леверетта соответственно.

Введение



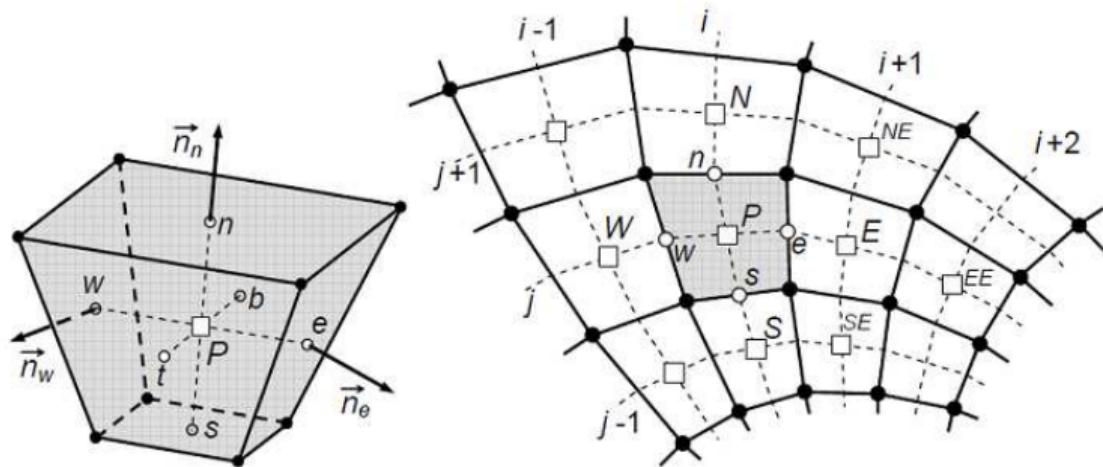
Метод контрольного объема/МКО (Finite Volume Method/FVM)

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{s}) = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{s}) = 0 &\Rightarrow \int_{V_i} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} dV + \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{s}) dV = 0 \Rightarrow \\ v_i \frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \int_{\sigma_i} \vec{f}(\vec{s}) \cdot \vec{n} d\sigma &= 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \frac{1}{v_i} \sum_{\sigma_i} \tilde{f}(\tilde{\vec{s}}) \cdot \vec{\sigma}_i = 0.\end{aligned}$$

Схема к методу контрольного объема

$$\frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \frac{1}{v_i} \sum_{\sigma_i} \tilde{f}(\tilde{\vec{s}}) \cdot \vec{\sigma}_i = 0.$$



МКО в случае одной пространственной переменной

В случае одной пространственной переменной предыдущее уравнение примет вид:

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

где $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $f_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{i-\xi}^n \dots u_{i+\eta}^n)$ - численный поток, ξ и η - определяют шаблон разностной схемы.

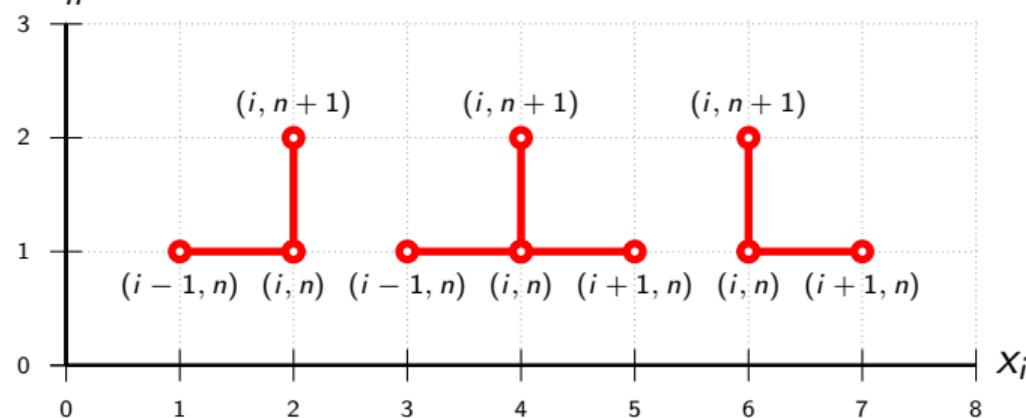
Шаблон разностной схемы

Определение

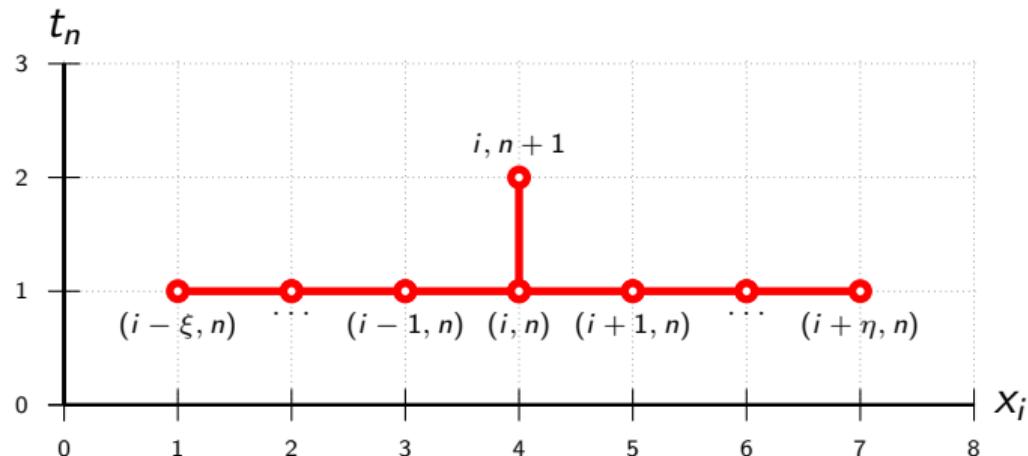
Шаблон – это мнемоническая диаграмма, которая указывает способ образования разностной схемы, показывая точки разностной сетки, участвующие в аппроксимации.

Пример шаблона

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, & a > 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, & a > 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, & a > 0. \end{cases}$$

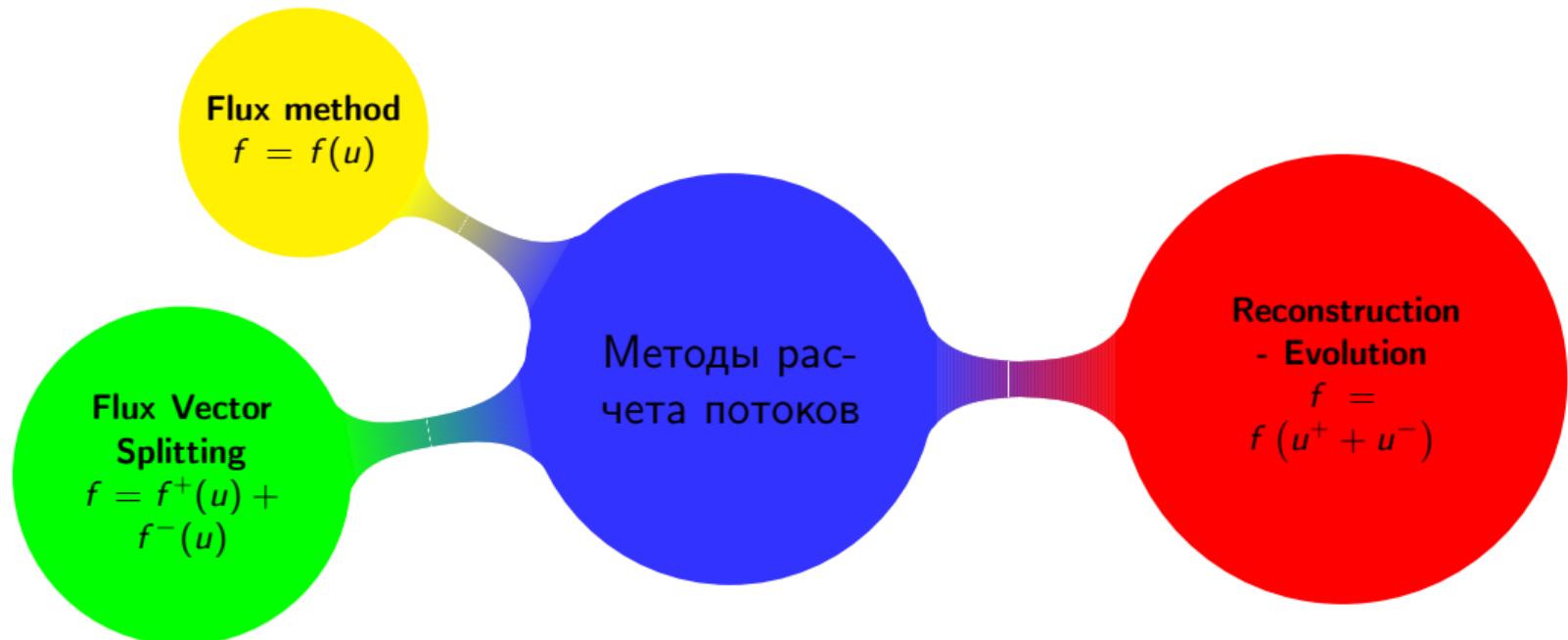


Шаблон в общем одномерном случае



Дискретизация по пространству

Различные версии метода контрольного объема отличаются способом вычисления потоков:



Методы расчета потоков

Простейший способ вычисления потока как полусуммы соответствующих величин на гранях контрольного объема:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_i),$$

приводит к неустойчивости разностной схемы.

Монотонность схемы

Условие монотонности схемы для уравнения

$$u_t + f(u)_x = 0$$

заключается в том, что для двух заданных начальных данных, таких, что одно везде больше другого: $u(x, 0) \geq w(x, 0)$, в последующие моменты времени это свойство сохраняется: $u(x, t) \geq w(x, t)$.

Монотонность схемы

Для конечно-разностной схемы

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-m}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n)$$

условие монотонности имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial u_{i+j}^n} \geq 0, \quad j \in [-m, m].$$

Теорема Годунова

Теорема (Годунов С.К.)

Для того чтобы разностная схема вида

$$u_i^{n+1} = \sum_j a_j u_j^n$$

переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a_j были неотрицательными.

Монотонность схемы

Из условий

$$\sum_j a_j = 1, \quad a_j \geq 0$$

вытекает, что

$$\max_i |u_i^{n+1}| \leq |a_j| \max_j |u_j^n|$$

так как $|a_j| \leq 1$, то получаем условие устойчивости монотонных схем

$$\sum_i |u_i^{n+1}| \leq \sum_j |u_j^n|.$$

Следствие

Следствие (Годунов С.К.)

Среди линейных разностных схем второго порядка точности для уравнения $u_t + u_x$ **нет схем**, удовлетворяющих условию монотонности.

Пример

Рассмотрим семейство трехточечных явных схем для линейного уравнения переноса:

$$u_i^{n+1} = au_{i-1}^n + bu_i^n + cu_{i+1}^n.$$

Это соотношение можно переписать в форме, гарантирующем консервативность:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{2} [\varepsilon_{i+1/2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \varepsilon_{i-1/2}(u_i^n + u_{i-1}^n)] + \\ &+ [\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n + u_{i-1}^n)]. \end{aligned}$$

Пример

Тогда коэффициенты будут:

$$a = \nu_{i-1/2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1/2},$$

$$b = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1/2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1/2} - \nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2},$$

$$c = \nu_{i+1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1/2}.$$

Метод Лакса - Фридрихса (Lax - Friedrichs)

Одним из первых разностных методов предназначенных для дискретизации гиперболического закона сохранения (уравнения Эйлера) был метод Лакса - Фридрихса (1954):

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_i) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i),$$

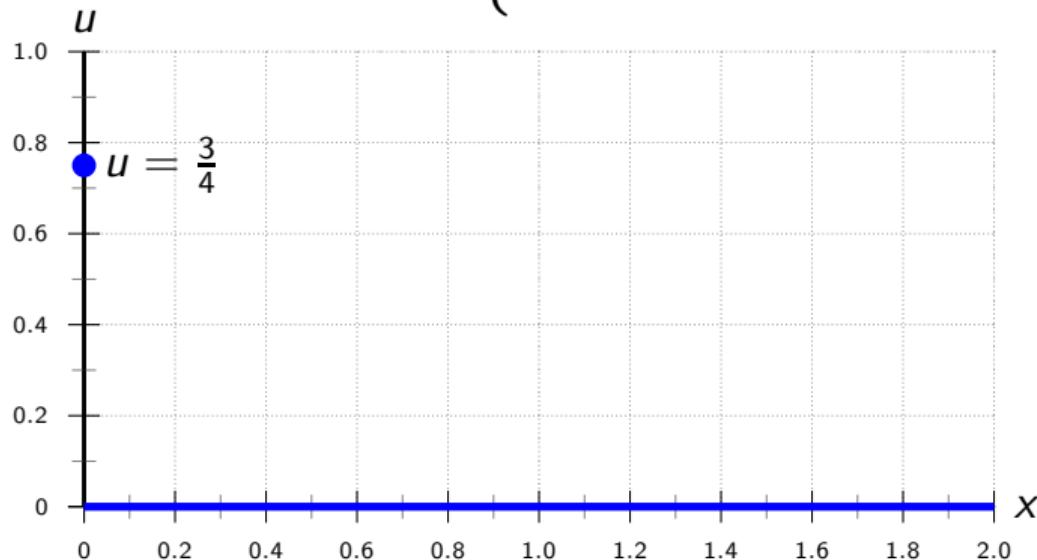
$$f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i-1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_i - u_{i-1}).$$

Метод Лакса - Фридрихса оказался слишком диффузонным и широкого распространения не получил.



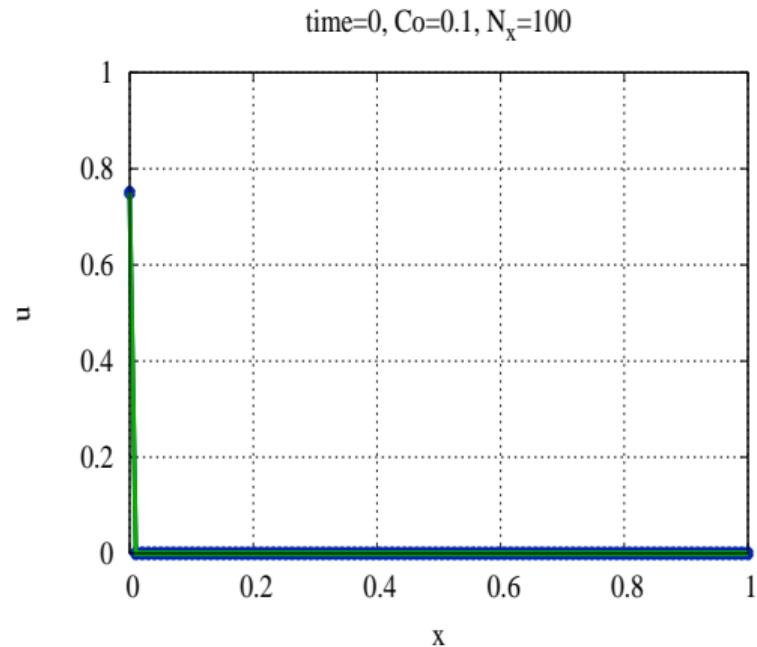
Начальное условие

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{3}{4} & x = 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

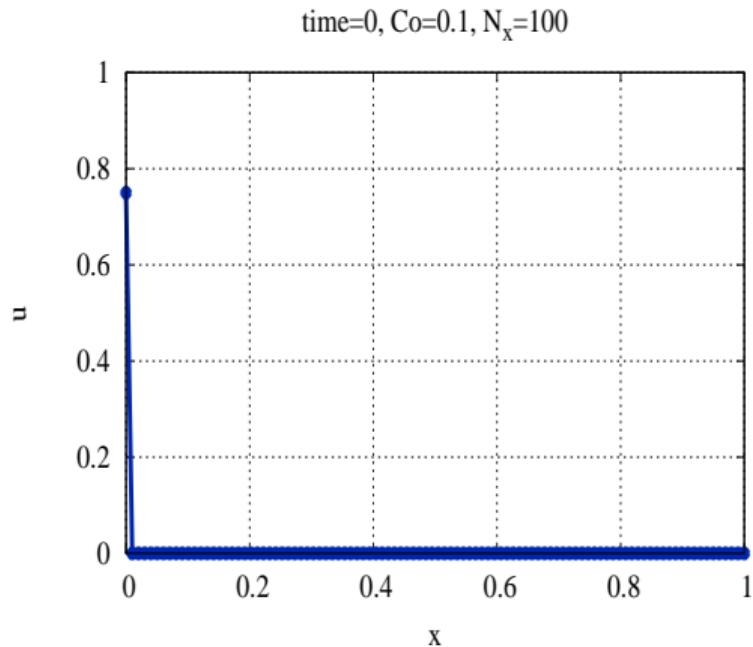


Метод Лакса - Фридрихса

уравнение Бюргерса



уравнение Баклея - Леверетта



Метод Лакса - Вендрофа (Lax - Wendroff)

Метод Лакса - Вендрофа (1960) имеет второй порядок точности по пространству. Поток расчитывается следующим образом:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1} - u_i),$$

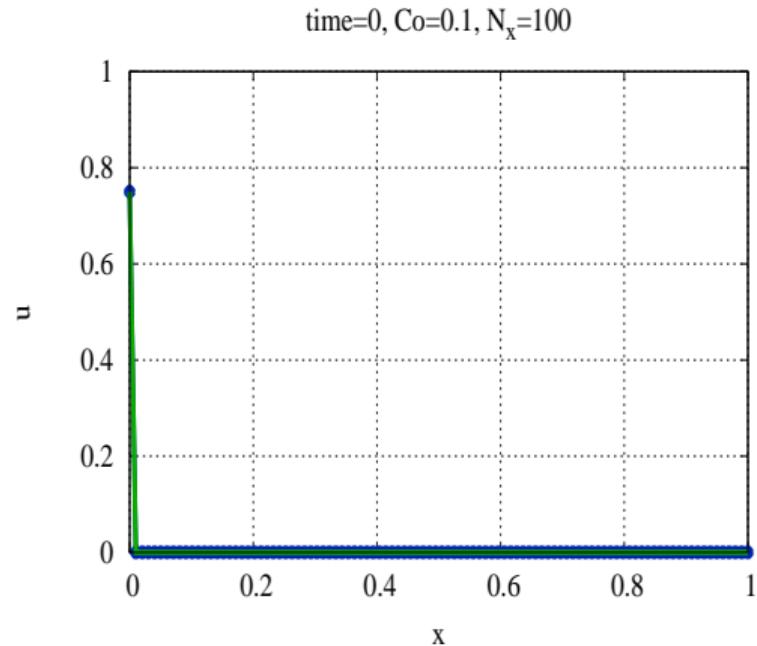
где $a_{i+1/2}$ расчитывается как

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1} - u_i}, & u_{i+1} \neq u_i \\ f'(u_i), & u_{i+1} = u_i. \end{cases}$$

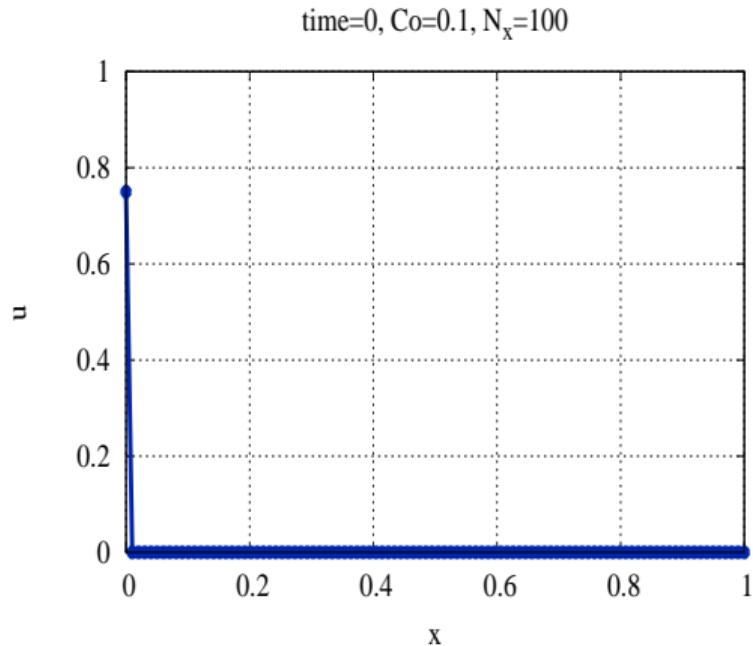
Метод Лакса - Вендрофа приводит к нефизическим осцилляциям решения.

Метод Лакса - Вендрофа

уравнение Бюргерса



уравнение Баклея - Леверетта



Двухшаговый метод Лакса - Вендрофа

Чтобы избежать вычисления якобиана $\frac{f_{i+1}-f_i}{u_{i+1}-u_i}$, $\frac{f_i-f_{i-1}}{u_i-u_{i-1}}$ используется двухшаговая процедура, предложенная Рихтмаером (Richtmyer):

Первый шаг:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)),$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)).$$

Второй шаг:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})).$$

Искусственная вязкость

Введение искусственной вязкости приводит к затуханию высокочастотных компонентов решения в процессе вычислений, что можно использовать для подавления нефизических осцилляций разностного решения. Включение вязкости можно осуществить с помощью специальных членов.

Метод искусственной вязкости для метода Лакса - Вендрофа

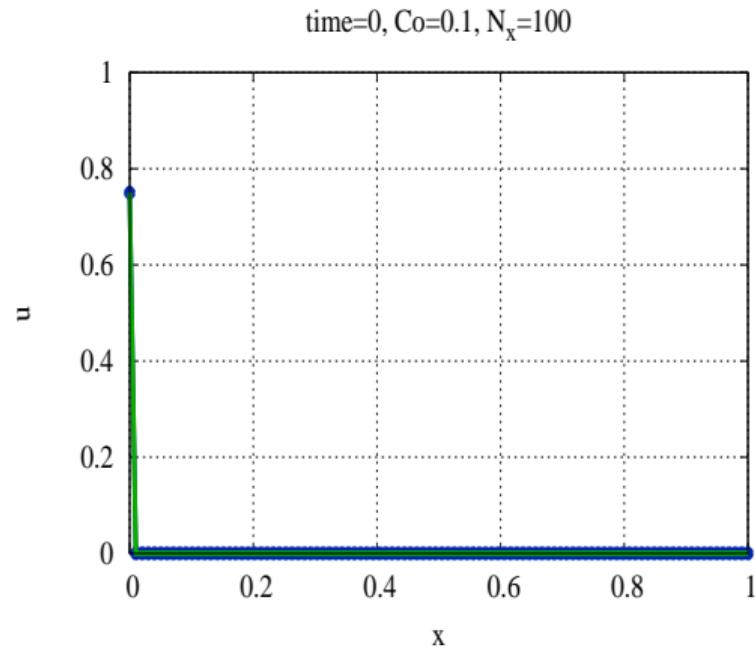
$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \right) + \\ & + \mu_a \Delta t (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \end{aligned}$$

Введение искусственной вязкости имеет смысл только для схем второго и выше порядков аппроксимации.

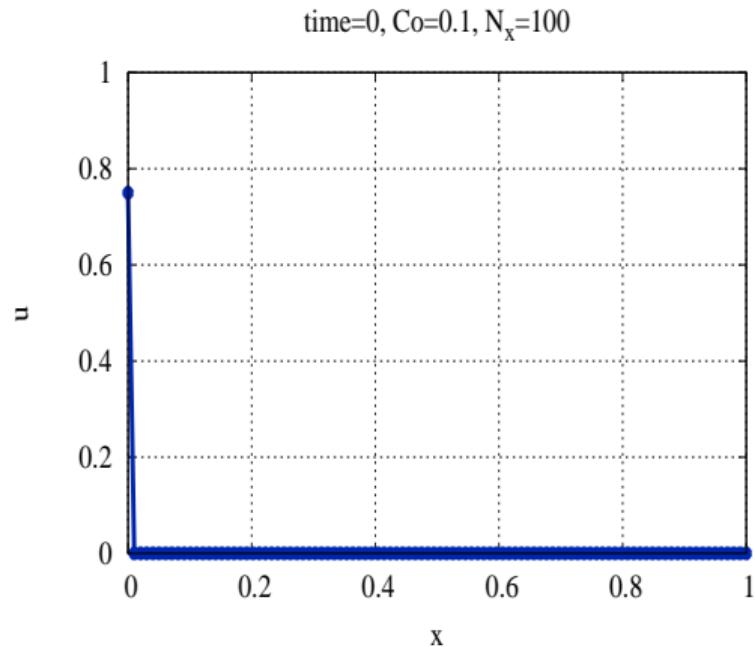
Введение искусственной вязкости иногда бывает необходимым для получения устойчивого процесса вычислений.

Метод Лакса - Вендрофа с искусственной вязкостью

уравнение Бюргерса



уравнение Баклея - Леверетта



Upwind scheme

In computational physics, upwind schemes denote a class of numerical discretization methods for solving hyperbolic partial differential equations. Upwind schemes use an adaptive or solution - sensitive finite difference stencil to numerically simulate the direction of propagation of information in a flow field. The upwind schemes attempt to discretize hyperbolic partial differential equations by using differencing biased in the direction determined by the sign of the characteristic speeds.

[Wikipedia](#)

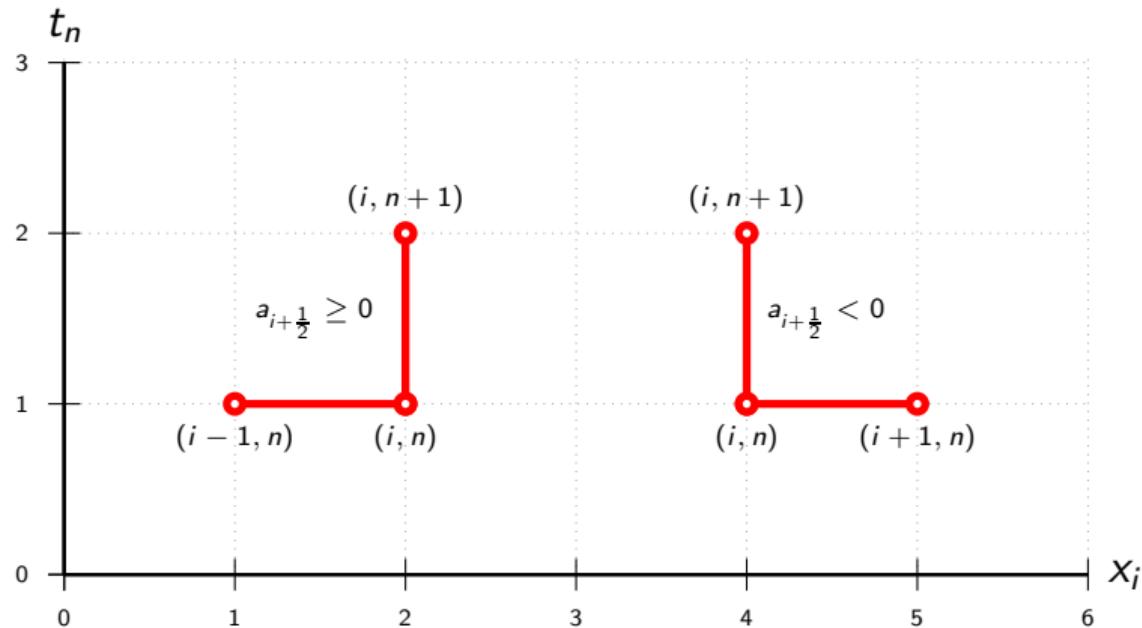
First - order upwind scheme

Численный поток рассчитывается следующим образом:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_i, & a_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_{i+1}, & a_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases},$$

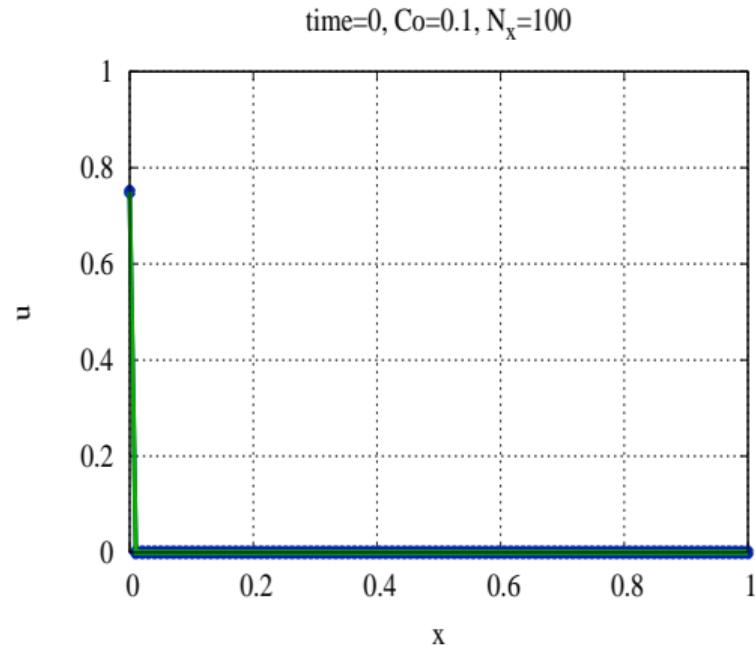
$$f_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_{i-1}, & a_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_i, & a_{i-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases},$$

First - order upwind scheme stencil

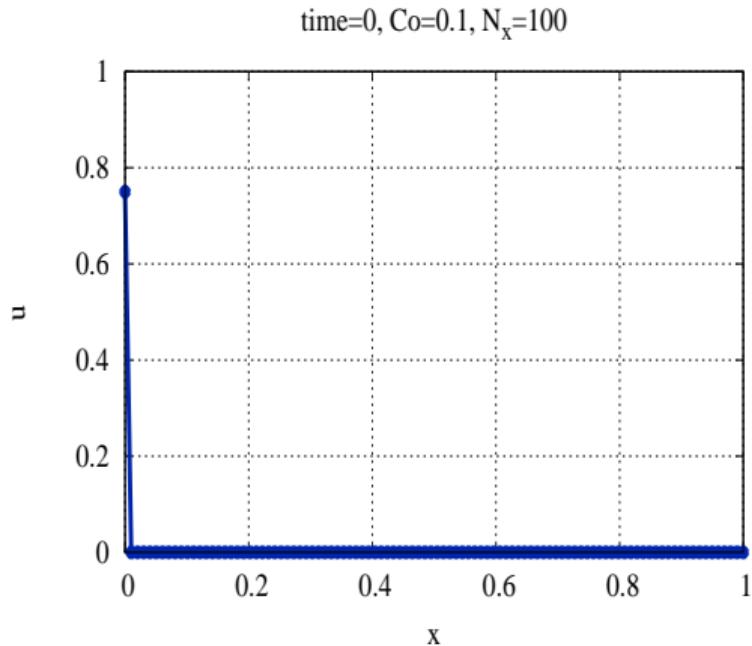


First - order upwind scheme

уравнение Бюргерса



уравнение Баклея - Леверетта



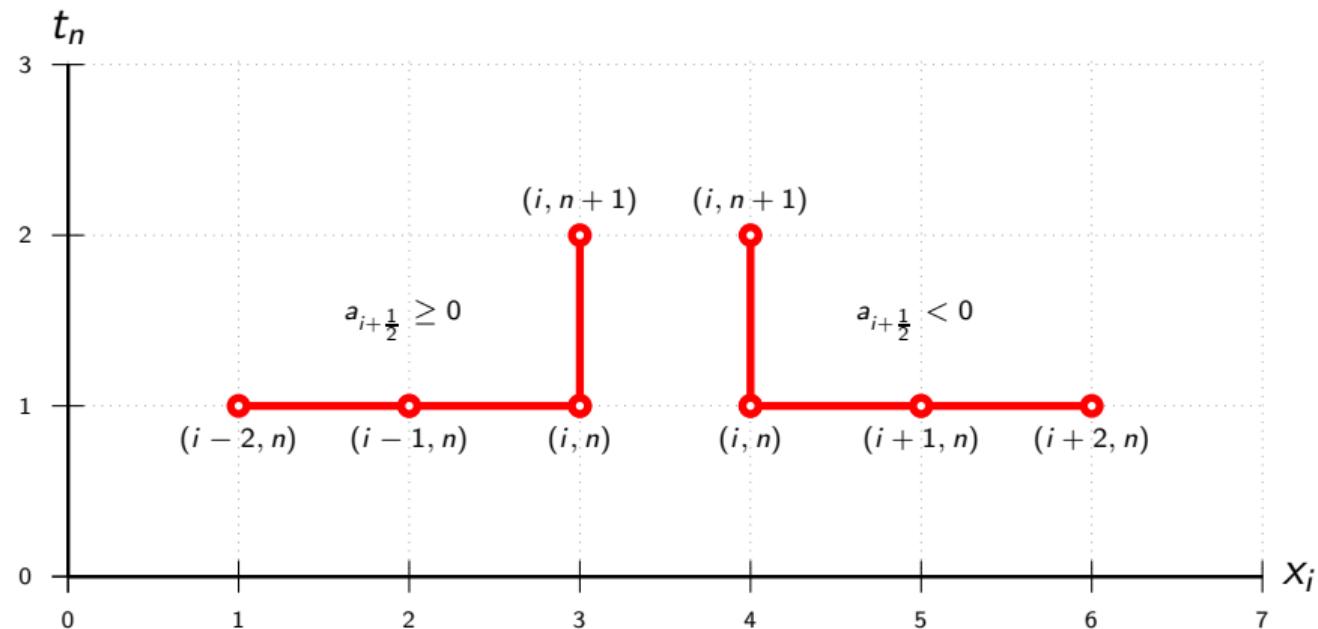
Warming-Beam scheme

Численный поток расчитывается следующим образом:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (-f_{i+2} + 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}) - a_{i+\frac{1}{2}}^2 \frac{\Delta x}{4\Delta t} (u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1}) \\ - \frac{s_{i+\frac{1}{2}}}{4} (-f_{i+2} + 3f_{i+1} - 3f_i + f_{i-1}) - s_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^2 \frac{\Delta x}{4\Delta t} (u_{i+2} - u_{i+1} - u_i + u_{i-1}).$$

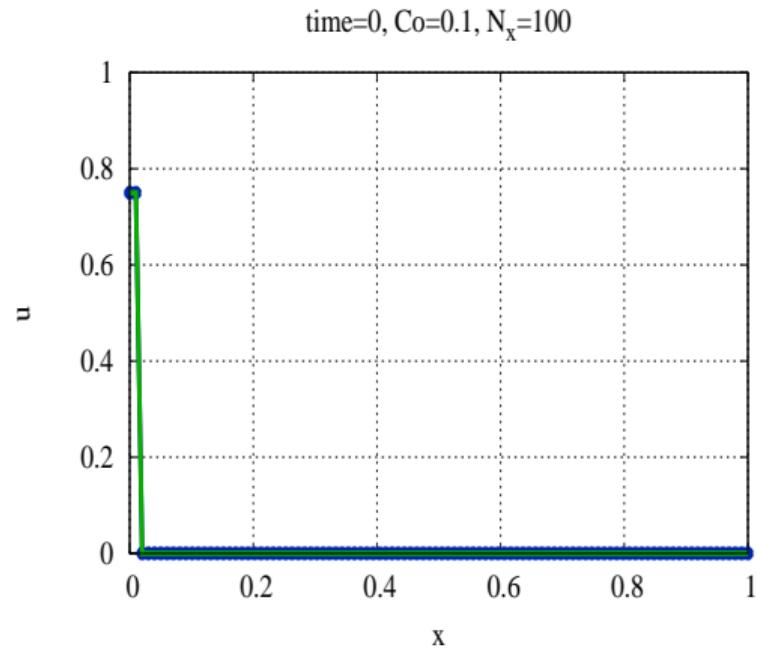
$$s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{|a_{i+\frac{1}{2}}|}.$$

Warming-Beam scheme stencil



Warming-Beam scheme

уравнение Бюргерса



уравнение Баклея - Леверетта

