

# Вариант №1

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = 2x - y, \quad D\{y = x, y = x^2, x = 1, x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = x + \frac{1}{3x - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса:

$$w_t + ww_x = aw_{xx}.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

# Вариант №2

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = x - y, \quad D\{y = 2x - 1, y = 2 - x^2, x = -3, x = 1\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2, \quad a, b = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = e^x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$$w_t = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

# Вариант №3

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -25. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2), \quad a = \text{const.}$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = x + 2y, \quad D\{y = x, y = 2x, x = 2, x = 3\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$xy' - y = x \tan\left(\frac{y}{x}\right); \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.



$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$$w_t + aw_x = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + 2e^{2y}u_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

# Вариант №4

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -18. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти точки условного экстремума следующей функции:

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ если } x^2 + y^2 = 1; A, B, C = \text{const}$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = y \ln x, \quad D\{y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}, x = 1, x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()`.

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^5 + y^5 = xy^2, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit\_plot*).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - y'e^y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного волнового уравнения:

$$w_{tt} = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + (1 + y)^2 u_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

# 1 Приложение

## 1.1 Задание №2

Необходимые условия экстремума функции  $f(x, y, \dots)$  в точке  $A$  заключаются в выполнении в этой точке равенств:  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , .... При этом функция двух переменных  $z = f(x, y)$  имеет в данной точке максимум, если  $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  или  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ , и минимум, если  $\Delta > 0$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  или  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$  (при условии непрерывности частных производных).

## 1.2 Задание №7

Если функция  $f(x)$  задана на сегменте  $[-l, l]$ , где  $l$  – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Задания взяты из книг:

1. Н. А. Давдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу
2. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2.
3. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е издание.