Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

6 октября 2015 г.

Литература

- Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Том 1,2 (1990).
- Зализняк В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений. - М.: Издательство Юрайт, 2012. - 356 с.
- Формалев В.Ф., Ревезников Д.Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2004. - 400 с.
- Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике (2-е изд.). - М.: Наука, 1978. - 688 с.
- Жуков М.Ю. Квазилинейные гиперболические уравнения: Учебно-методическое пособие. - Ростов-на-Дону, 2008. - 52 с.
- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 656 с.
- Лейбович С., Сибасс А. (ред.) Нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.

и др.

Введение

Многие физические проблемы сводятся к решению **уравнений в частных производных**, поэтому необходимо знать физические особенности решений этих уравнений. Для решения конкретных задач необходимо уметь определять тип дифференциального уравнения в частных производных и знать его основные математические особенности.

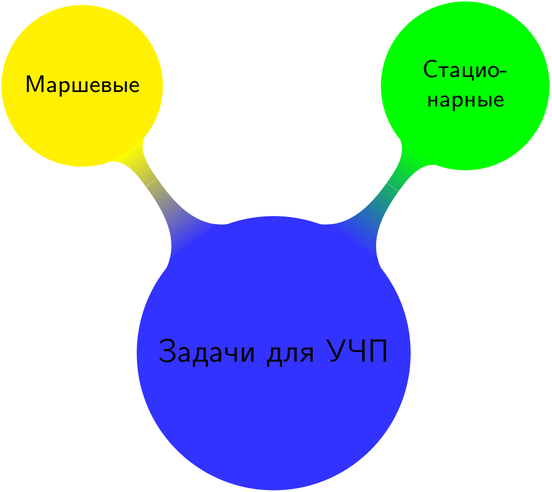
Уравнение в частных производных

Уравнением в частных производных относительно функции $u\left(\vec{x}\right)$ называется уравнение вида:

$$f\left(\vec{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{x} \partial \vec{x}}, \ldots\right) = 0.$$

Физическая классификация уравнений

- **нестационарные течения невязкой/вязкой жидкости;**
- **стационарные сверхзвуковые течения невязкого/вязкого газа;**
- **пограничный слой;**
- **нестационарное распространение тепла, и т.д.**



- **стационарные течения невязкой/вязкой жидкости;**
- **стационарные сверхзвуковые течения невязкого/вязкого газа;**
- **стационарные задачи теплопроводности, и т.д.**

Маршевые задачи

Маршевой или **эволюционной** (или задачей распространения) называется задача, в которой требуется найти решение уравнения в частных производных в **незамкнутой области** при заданных граничных и начальных условиях. Решение таких задач должно быть найдено последовательным движением в маршевом направлении. Такие задачи описываются уравнениями в частных производных **гиперболического** или **параболического** типа.

Стационарные

Задача называется **стационарной**, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границе этой области

Физически стационарная задача описывает установившийся процесс, а математически сводится к решению задачи с граничными условиями (краевой задачи) для уравнения в частных производных.

Иногда стационарные задачи называют **детерминированными**, так как решение в любой внутренней точке области определяется условиями, заданными на ее границе.

Уравнения характерные для маршевых задач

Волновое уравнение:

$$a(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \left(b(\vec{x})\vec{\nabla} u\right) - c(\vec{x})u + f(\vec{x}, t).$$

Уравнение теплопроводности (диффузии):

$$a(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(b(\vec{x})\vec{\nabla} u\right) - c(\vec{x})u + f(\vec{x}, t).$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения Максвелла:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho(\vec{x}), \ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения газо-гидродинамики (уравнения Эйлера):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0, \\
&\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p\mathbf{I}) = \vec{F}, \\
&\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\rho E + p)) = \vec{F} \cdot \vec{u}.
\end{aligned}
$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения Навье-Стокса:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0,\\
&\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} \otimes \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau + \vec{F},\\
&\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho E \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \cdot \vec{u} - \vec{q}) + \vec{F} \cdot \vec{u}.
\end{aligned}
$$

Уравнения характерные для стационарных задач

Волновое уравнение и уравнение диффузии:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(b(\vec{x}) \vec{\nabla} u \right) - c(\vec{x}) u + f(\vec{x}, t) = 0.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u_0 + \frac{\omega^2}{c^2} u_0 = -\frac{f_0(\vec{x})}{c^2}.$$

Уравнения электростатики и магнитостатики:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho(\vec{x}), \ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}.$$

Постановка основных задач для уравнений математической физики

Различают три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных:

- **задача Коши** для нестационарных уравнений: задаются начальные условия, граничные условия отсутствуют;
- **краевая задача** для стационарных уравнений: задаются граничные условия, начальные условия отсутствуют;
- **смешаная задача** для нестационарных уравнений: задаются и начальные, и граничные условия.

Задача Коши

- Для волнового уравнения второго порядка:

$$u(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}), \left. \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = f_1(\vec{x}).$$

- Для уравнений диффузии и Шредингера:

$$u(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}).$$

- Для системы уравнений первого порядка:

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{f}_0(\vec{x}).$$

Краевая задача для стационарных уравнений

Для уравнения

$$\vec{\nabla} \cdot \left(b(\vec{x}) \vec{\nabla} u \right) - c(\vec{x}) u + f(\vec{x}, t) = 0,$$

граничное условие будет иметь вид:

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \bigg|_s = g_0.$$

Краевая задача для стационарных уравнений

Часто встречаются следующие типы граничных условий:

- Граничное условие первого рода ($\alpha = 1,\ \beta = 0$):

$$u\big|_S = g_0.$$

- Граничное условие второго рода ($\alpha = 0,\ \beta = 1$):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_S = g_0.$$

- Граничное условие третьего рода ($\alpha \geq 0,\ \beta = 1$):

$$\left.\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\right|_S = g_0.$$

Математическая классификация уравнений

Уравнение в частных производных второго порядка, записанное в общем виде, обычно используют для пояснения математической классификации уравнений в частных производных. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y).$$

Здесь a, b, c, d, e, f – функции от x, y, т. е. рассматривается лишь линейное уравнение.

Математическая классификация уравнений

Определим теперь **канонические** формы записи уравнений в частных производных различных типов.
Известно, что предыдущее уравнение может быть трех различных типов в зависимости от знака определителя:

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

- гиперболическим: $\triangle > 0$;
- параболическим: $\triangle = 0$;
- эллиптическим: $\triangle < 0$.

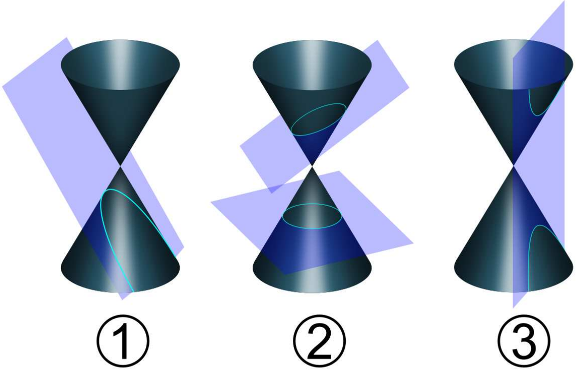
Геометрическая аналогия

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$B^2 - 4AC = 0$

$B^2 - 4AC < 0$

$B^2 - 4AC > 0$



Каноническая форма уравнения

- Каноническая форма уравнения гиперболического типа:

$$\phi_{\xi\xi} - \phi_{\eta\eta} = h_1(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta).$$

- Каноническая форма уравнения параболического типа:

$$\phi_{\xi\xi} = h_2(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta).$$

- Каноническая форма уравнения эллиптического типа:

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = h_3(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta).$$

Системы уравнений

При изучении физических процессов обычно приходится решать **системы уравнений в частных производных**, так как редко удается описать сложный физический процесс одним уравнением в частных производных. Но даже в тех случаях, когда физический процесс описывается одним уравнением в частных производных высокого порядка, это уравнение можно заменить системой уравнений первого порядка.

Пример №1

В волновом уравнении $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ сделаем замену:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$w = c\frac{\partial u}{\partial x},$$

тогда уравнение расщипится на систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Пример №2

Запишем уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Это известные уравнения Коши – Римана, широко используемые в теории конформных отображений.

Системы уравнений в частных производных первого порядка

Так как многие задачи математической физики сводятся к решению **систем уравнений в частных производных первого порядка**, то для корректной постановки задач необходимо уметь определять **тип системы уравнений** в частных производных. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{r} = 0.$$

Условие гиперболичности системы уравнений в частных производных первого порядка

Системы уравнений в частных производных первого порядка называется **гиперболической** по (x, t), если все **собственные значения** матрицы **A вещественны и различны.**
То же самое можно сказать о поведении системы уравнений по (y, t) в зависимости от собственных значений матрицы **B**.

Пример №3

В качестве примера рассмотрим систему уравнений из примера №1, записанную в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0,$$

где

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример №3

Собственные значения λ матрицы $\mathbf{A}$ определяются из решения уравнения:

$$\det\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0.$$

В нашем случае:

$$\begin{Vmatrix} -\lambda & -c \\ -c & -\lambda \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm c.$$

Система гиперболическая!

Условие эллиптичности системы уравнений в частных производных первого порядка

Системы уравнений в частных производных первого порядка называется **эллиптической** по (x, t), если все **собственные значения** матрицы $\mathbf{A}$ **комплексные**.
То же самое можно сказать о поведении системы уравнений по (y, t) в зависимости от собственных значений матрицы $\mathbf{B}$.

Пример №4

В качестве примера рассмотрим систему уравнений Коши – Римана из примера №2, записанную в виде:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \vec{w}}{\partial y} = 0,$$

где

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример №4

Собственные значения λ матрицы **A** равны:

$$\left\|\begin{matrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Система эллиптическая!

Замечание №1

Система уравнений в частных производных первого порядка может оказаться **эллиптической** по (y, t) и **гиперболической** по (x, t) в зависимости от собственных значений матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$. Это связано с тем, что тип системы уравнений в частных производных первого порядка по (x, t) и по (y, t) определяется независимо.

Замечание №2

Что делать, когда часть собственных чисел вещественные, а часть комплексные?
Система уравнений с таким характеристическим уравнением смешанная и может обладать свойствами, характерными одновременно для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений.
Понять основные свойства решений систем уравнений смешанного типа обычно помогает знание описываемых ими физических процессов.