Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

26 ноября 2020 г.

Введение

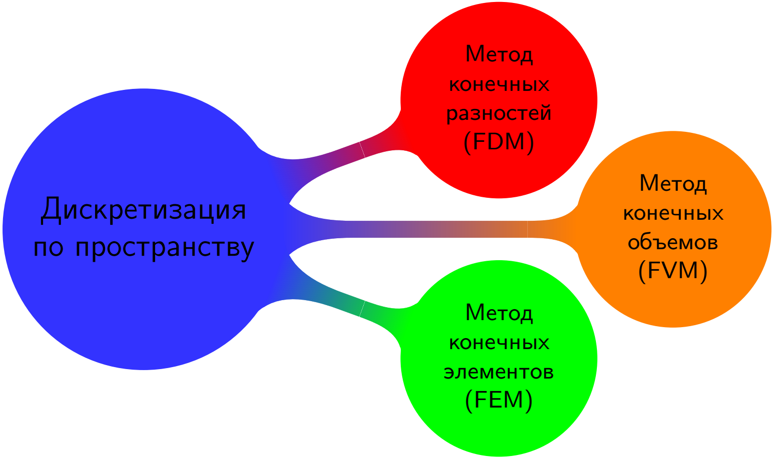
Математическое описанее многих физических процессов приводит к дифференциальным, интегральным или к интегро - дифференциальным уравнениям, аналитическое решение которых, в большинстве случаев, получить невозможно.
В этом случае на помощь исследователю приходят различные **численные методы**, которые позволяют получить **приближенное решение** рассматриваемой задачи.

Вычислительная математика – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с производством разнообразных вычислений. В более узком понимании вычислительная математика – **теория численных методов** решения типовых математических задач. Современная вычислительная математика включает в круг своих проблем изучение особенностей вычисления с применением компьютеров.

Немного истории

1917 г. Первая попытка Л.Ф. Ричардсона предсказать погоду путем численного решения (вручную!) уравнения в частных производных.
«Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке $n/18$ пенсов, где n – число цифр, с которыми производятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались.»

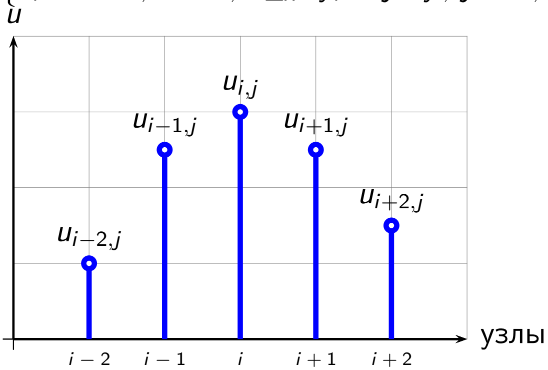
Основные способы пространственной дискретизации



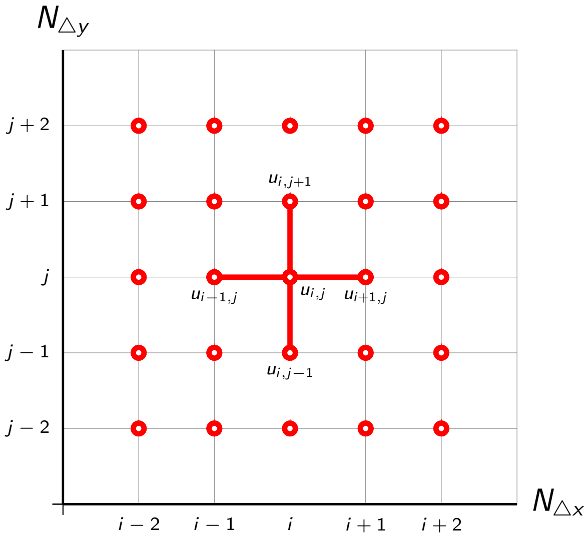
Метод конечных разностей (Finite Difference Method)

Искомые величины – значения переменных в узлах конечноразностной сетки:

$$\omega_{\triangle x,\,\triangle y} = \left\{ x_i = i\triangle x,\ i = \overline{0, N_{\triangle x}};\ y_i = j\triangle y,\ j = \overline{0, N_{\triangle y}} \right\}$$



Конечно-разностная сетка



Теорема Лагранжа о среднем значении

Теорема о конечном приращении утверждает, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то найдётся такая точка $c \in (a; b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Аппроксимация производной

Производной функции $u(x, y)$ по x в точке x_0, y_0 называется предел

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u\left(x_0 + \triangle x, y_0\right) - u\left(x_0, y_0\right)}{\triangle x}.$$

Если $\triangle x$ будет мало, но конечно, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \approx \frac{u\left(x_0 + \triangle x, y_0\right) - u\left(x_0, y_0\right)}{\triangle x}.$$

Это следует из теоремы о конечном приращении.

Точность разностной аппроксимации

Проверить точность разностной аппроксимации производной можно, разложив функцию u в ряд Тейлора или по формуле Тейлора с остаточным членом. Выразим $u\left(x_0+\triangle x, y_0\right)$ через значения функции и ее производных в точке (x_0, y_0):

$$u\left(x_0+\triangle x, y_0\right)=u\left(x_0, y_0\right)+\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} \triangle x}+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_0} \frac{(\triangle x)^2}{2!}+\ldots+$$

$$+\left.\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right|_{x_0} \frac{(\triangle x)^{n-1}}{(n-1)!}+\left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{\xi} \frac{(\triangle x)^n}{(n)!}, \quad x_0 \leq \xi \leq x_0+\triangle x.$$

Точность разностной аппроксимации

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} = \frac{u\left(x_0 + \triangle x, y_0\right) - u\left(x_0, y_0\right)}{\triangle x} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_0} \frac{\triangle x}{2!} - \dots .$$

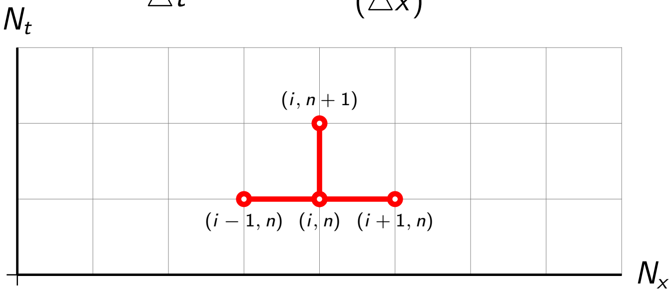
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\triangle x} + O\left(\triangle x\right).$$

Погрешностью аппроксимации называется разность значений частной производной и ее конечно-разностного аналога.

Пример дискретизации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2}.$$



Шаблон разностной схемы

Определение

Шаблон – это мнемоническая диаграмма, которая указывает способ образования разностной схемы, показывая точки разностной сетки, участвующие в аппроксимации.

Погрешность дискретизации

Пусть u_e – точное решение исходного уравнения. Подставим в него следующие разложения:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{(u_e)_i^{n+1} - (u_e)_i^n}{\triangle\ t} - \left.\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2}\right|_{n,i} \frac{\triangle t}{2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} = \frac{(u_e)_{i+1}^n - 2\,(u_e)_i^n + (u_e)_{i-1}^n}{(\triangle x)^2} + \left.\frac{\partial^4 u_e}{\partial x^4}\right|_{n,i} \frac{(\triangle x)^2}{12} + \ldots,$$

тогда

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} = \frac{(u_e)_i^{n+1} - (u_e)_i^n}{\triangle t} - \frac{(u_e)_{i+1}^n - 2\,(u_e)_i^n + (u_e)_{i-1}^n}{(\triangle x)^2}$$

$$- \left.\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2}\right|_{n,i} \frac{\triangle t}{2} + \left.\frac{\partial^4 u_e}{\partial x^4}\right|_{n,i} \frac{(\triangle x)^2}{12} + \ldots.$$

Ошибки

$$
\left|
\begin{array}{c|c|c}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} = \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2} & \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} = \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2} + \text{ЭВМ} \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
u = u_e(x, t) & u_i^n = (u_e)_i^n + O(\triangle x) & u_i^n = (u_e)_i^n + O(\triangle x) + \varepsilon
\end{array}
\right|
$$

Согласованность

После дискретизации получаем систему алгебраических уравнений (как правило линейных - СЛАУ), которая затем решается на ЭВМ. Говорят, что такая система алгебраических уравнений **согласуется** с исходным дифференциальным уравнением в частных производных, если в пределе, при стремлении размеров ячеек сетки к нулю, система алгебраических уравнний эквивалентна дифференциальному уравнению в каждом узле разностной сетки.

Согласованность

Пусть дана система уравнений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{u},$$

где в общем случае $\hat{\mathbf{L}}$ – нелинейный оператор.
После дискретизации имеем:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{T}}(\triangle t, \triangle x)\mathbf{u}^{n},$$

где $\hat{\mathbf{T}}$ – дискретный оператор (перехода/эволюционный).

Согласованность

Пусть $\mathbf{u}_e$ – точное решение исходной системы.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\triangle t} \equiv \frac{\hat{\mathbf{T}}(\triangle t, \triangle x)\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_e}{\triangle t}$$

Говорят, что численная схема **аппроксимирует уравнение** (или согласована с уравнением), если:

$$\lim_{\triangle t \to 0} \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\hat{\mathbf{T}}(\triangle t, \triangle x) - \mathbf{I}}{\triangle t} \right) \mathbf{u}_e = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{u}_e, \quad \left(\frac{\triangle t}{\triangle x} \right) \to \beta.$$

Пример

Условие безусловно выполняется, если погрешность аппроксимации убывает при измельчении сетки, т. е. если погрешность аппроксимации имеет порядок $O\left(\triangle x, \triangle t\right)$ и т.д. Однако если порядок погрешности аппроксимации равен, например, $O\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)$, то схема будет согласованной лишь в том случае, когда измельчение сетки проводится в соответствии с условием $O\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right) \to 0$.

Пример

В качестве примера рассмотрим схему Дюфорта – Франкела [DuFort, Frankel, 1953] для уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\triangle t} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2}.$$

Главный член погрешности аппроксимации этой схемы, вычисленный с использованием ряда Тейлора, равен

$$\left.\frac{\partial^4 u_e}{\partial x^4}\right|_{n,i} \frac{(\triangle x)^2}{12} - \left.\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2}\right|_{n,i} \left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)^2 - \left.\frac{\partial^3 u_e}{\partial x^3}\right|_{n,i} \frac{(\triangle x)^2}{6}.$$

Пример

При $\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right) \to \beta$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Гиперболическое уравнение!

Сокращенная запись производных

Когда порядок производных не очень большой, то для сокращения записи довольно часто используют следующие обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u_{xt}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = u_{xx}, \ldots .$$

Пример

Схема с разностями против потока для линейного уравнения переноса:

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} = 0.$$

Подставим вместо u_i^{n+1} и u_{i-1}^n их выражения в виде ряда Тейлора:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + u_t\triangle t + \frac{u_{tt}}{2}\triangle t^2 + \frac{u_{ttt}}{6}\triangle t^3 + O(\triangle t^4),$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - u_x\triangle x + \frac{u_{xx}}{2}\triangle x^2 - \frac{u_{xxx}}{6}\triangle x^3 + O(\triangle x^4).$$

Главный член погрешности аппроксимации этой схемы $\left(\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right) \to \beta\right)$:

$$-\frac{u_{tt}}{2}\triangle t + a\frac{u_{xx}}{2}\triangle x \to 0$$

Аппроксимация

Под порядком аппроксимации понимают показатель степени главного члена погрешности аппроксимации.
Локальная ошибка аппроксимации записывается как:

$$u_e^{n+1} - \hat{\mathrm{T}} u_e^n = O\left(\triangle t \sum_{p,q \geq 0, p+q=l} \triangle t^p \triangle x^q\right),$$

где $u_e(x,t)$ – точное решение.
В этом случае порядок локальной ошибки аппроксимации равен $l+1$, а порядок схемы l.

Устойчивость

Обозначим вектор ошибки, появляющейся на n - м шагу, через $\varepsilon^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_e^n$.
Матрица перехода G определяется как $\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n$.
Для линейного уравнения матрица перехода G эквивалентна оператору перехода $\hat{\mathbf{T}}$.
В общем случае:

$$G = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{u}\right), \; G_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu^{n+1}}{\partial u_\nu^n}.$$

Устойчивость

Условие устойчивости

Метод устойчив, если $\| \varepsilon^{n+1} \| = \| u^{n+1} - u_e^{n+1} \|$ может быть ограничена величиной $\| \varepsilon^n \|$, умноженной на константу, независящую как от u^n, так и от u_e^n:

$$\| \varepsilon^{n+1} \| \leq (1 + K \triangle t) \| \varepsilon^n \| .$$

Должно быть K = 0!

Устойчивость

Если уравнение перехода приведено к диагональному виду $\varepsilon_\mu^{n+1} = g_\mu \varepsilon_\mu^n$, тогда для устойчивости надо потребовать, чтобы норма каждого собственного вектора ошибки не возрастала,

$$\| \varepsilon^{n+1} \| \leq \| \varepsilon^n \|,$$

откуда получаем:

$$|g_\mu| = \sqrt{g_\mu g_\mu^*} < 1 \text{ для всех } \mu.$$

Анализ устойчивости по фон Нейману

Пусть оператор перехода $\hat{\mathbf{T}}(\triangle t, \triangle x)$ равен постоянной величине. Тогда можно рассмотреть устойчивость фурье-моды зависимой переменной

$$u_i^n = \hat{u}^n e^{ikx_i} = \hat{u}^n \left(\cos\left(kx_i\right) + i\sin\left(kx_i\right)\right)$$

и потребовать ограниченности ее амплитуды.
Для устойчивости множитель перехода g (или для системы уравнений собственные значения матрицы перехода g_μ) должен не превосходит по модулю единицу $|g| \leq 1$, для всех фурье-мод.

Пример №1

Разности против потока:

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} = 0;$$

$$\boxed{u_i^n = \hat{u}^n e^{ikx_i}} \rightarrow \boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)};$$

$$\hat{u}^{n+1}e^{ikx_i} = \hat{u}^n e^{ikx_i} - \sigma\left(\hat{u}^n e^{ikx_i} - \hat{u}^n e^{ikx_{i-1}}\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \sigma\left(\hat{u}^n - \hat{u}^n e^{-ik\triangle x}\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = \left(1 - \sigma + \sigma e^{-ik\triangle x}\right)\hat{u}^n \Rightarrow \boxed{g = 1 - \sigma + \sigma e^{-ik\triangle x}}.$$

$$|g| = \sqrt{(1 - \sigma + \sigma\cos(k\triangle x))^2 + \sigma^2\sin^2(k\triangle x)} =$$

$$= \sqrt{(1-\sigma)^2 + 2(1-\sigma)\sigma\cos(k\triangle x) + \sigma^2}.$$

Схема устойчива при $\sigma = a\frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1$.

Пример №2

Разности по потоку:

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\triangle x} = 0;$$

$$\boxed{u_i^n = \hat{u}^n e^{ikx_i}} \to \boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)};$$

$$\hat{u}^{n+1} e^{ikx_i} = \hat{u}^n e^{ikx_i} - \sigma\left(\hat{u}^n e^{ikx_{i+1}} - \hat{u}^n e^{ikx_i}\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \sigma\left(e^{ik\triangle x}\hat{u}^n - \hat{u}^n\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = \left(1 + \sigma - \sigma e^{ik\triangle x}\right)\hat{u}^n \Rightarrow \boxed{g = 1 + \sigma - \sigma e^{ik\triangle x}}.$$

$$|g| = \sqrt{\left(1 + \sigma - \sigma\cos\left(k\triangle x\right)\right)^2 + \sigma^2\sin^2\left(k\triangle x\right)} =$$

$$= \sqrt{(1+\sigma)^2 - 2\left(1+\sigma\right)\sigma\cos\left(k\triangle x\right) + \sigma^2} > 1.$$

Схема всегда неустойчива!

Пример №3

Центральные разности:

$$u_t + a u_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} = 0;$$

$$\boxed{u_i^n = \hat{u}^n e^{ikx_i}} \rightarrow \boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma/2\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)};$$

$$\hat{u}^{n+1} e^{ikx_i} = \hat{u}^n e^{ikx_i} - \sigma/2\left(\hat{u}^n e^{ikx_{i+1}} - \hat{u}^n e^{ikx_{i-1}}\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \sigma/2\left(e^{ik\triangle x}\hat{u}^n - e^{-ik\triangle x}\hat{u}^n\right);$$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - i\sigma\sin(k\triangle x))\,\hat{u}^n \Rightarrow \boxed{g = 1 - i\sigma\sin(k\triangle x)}.$$

$$|g| = \sqrt{1 + \sigma^2\sin^2(k\triangle x)} > 1.$$

Схема всегда неустойчива!

Пример №4

Рассмотрим систему:

$$\left\{\begin{aligned} v_t + a w_x &= 0 \\ w_t + a v_x &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\triangle t} + a\frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{\triangle x} &= 0 \\ \frac{w_i^{n+1}-w_i^n}{\triangle t} + a\frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\triangle x} &= 0 \end{aligned}\right. ;$$

$$\mathbf{s}_t + \mathbf{A}\mathbf{s}_x = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{s}_i^{n+1} - \mathbf{s}_i^n}{\triangle t} + \mathbf{A}\frac{\mathbf{s}_i^n - \mathbf{s}_{i-1}^n}{\triangle x} = 0, \;\; \mathbf{s}_i^n = \begin{bmatrix} v_i^n \\ w_i^n \end{bmatrix} \;\; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\mathbf{s}_i^n = \begin{bmatrix} v_i^n \\ w_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}^n \\ \hat{w}^n \end{bmatrix} e^{ikx_i} = \hat{\mathbf{s}}^n e^{ikx_i}} \to \boxed{\begin{aligned} &\mathbf{s}_i^{n+1} = \mathbf{s}_i^n - \Sigma\left(\mathbf{s}_i^n - \mathbf{s}_{i-1}^n\right), \\ &\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}};$$

Пример №4

$$\hat{\mathbf{s}}^{n+1} e^{ikx_i} = \hat{\mathbf{s}}^{n} e^{ikx_i} - \Sigma \left(\hat{\mathbf{s}}^{n} e^{ikx_i} - \hat{\mathbf{s}}^{n} e^{ikx_{i-1}} \right);$$

$$\hat{\mathbf{s}}^{n+1} = \hat{\mathbf{s}}^{n} - \Sigma \left(\hat{\mathbf{s}}^{n} - \hat{\mathbf{s}}^{n} e^{-ik\triangle x} \right);$$

$$\hat{\mathbf{s}}^{n+1} = \boxed{\left(\mathbf{I} - \Sigma \left(1 - e^{-ik\triangle x} \right) \right)} \hat{\mathbf{s}}^{n};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma \left(1 - e^{-ik\triangle x} \right) \\ -\sigma \left(1 - e^{-ik\triangle x} \right) & 1 \end{bmatrix};$$

$$\det \left| \mathbf{G} - g\mathbf{I} \right| = 0 \Rightarrow (1-g)^2 - \sigma^2 \left(1 - e^{-ik\triangle x} \right)^2 = 0;$$

$$g_{1,2} = 1 \mp \sigma \pm \sigma e^{-ik\triangle x};$$

Схема всегда неустойчива!

Пример №5. Метод Лакса – Вендроффа (1960)

$$\mathbf{s}_t + \mathbf{A}\mathbf{s}_x = 0,\ \mathbf{s} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{s}\left(x, t + \triangle t\right) = \mathbf{s}\left(x, t\right) + \triangle t \mathbf{s}_t\left(x, t\right) + \frac{\left(\triangle t\right)^2}{2}\mathbf{s}_{tt}\left(x, t\right) + \ldots;$$

$$\mathbf{s}_t + \mathbf{A}\mathbf{s}_x = 0 \Rightarrow \mathbf{s}_t = -\mathbf{A}\mathbf{s}_x,\ \mathbf{s}_{tt} = -\left(\mathbf{A}\mathbf{s}_x\right)_t = \mathbf{A}^2\mathbf{s}_{xx};$$

$$\mathbf{s}\left(x, t + \triangle t\right) \approx \mathbf{s}\left(x, t\right) - \triangle t \mathbf{A}\mathbf{s}_x\left(x, t\right) + \frac{\left(\triangle t\right)^2}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{s}_{xx}\left(x, t\right);$$

$$\mathbf{s}_i^{n+1} = \mathbf{s}_i^n - \frac{1}{2}\Sigma\left(\mathbf{s}_{i+1}^n - \mathbf{s}_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2\left(\mathbf{s}_{i+1}^n - 2\mathbf{s}_i^n + \mathbf{s}_{i-1}^n\right)$$

Пример №5. Метод Лакса – Вендроффа (1960)

$$\boxed{\mathbf{s}_i^n = \hat{\mathbf{s}}^n e^{ikx_i}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{s}_i^{n+1} = \mathbf{s}_i^n - \dfrac{\triangle t}{2\triangle x}\mathbf{A}\left(\mathbf{s}_{i+1}^n - \mathbf{s}_{i-1}^n\right) + \\ + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\triangle t}{\triangle x}\right)^2 \mathbf{A}^2\left(\mathbf{s}_{i+1}^n - 2\mathbf{s}_i^n + \mathbf{s}_{i-1}^n\right) \end{array}};$$

$$\hat{\mathbf{s}}^{n+1} = \boxed{\left(\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Sigma}\sin(k\triangle x) - \boldsymbol{\Sigma}^2(1-\cos(k\triangle x))\right)}\hat{\mathbf{s}}^n;$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1-\sigma^2(1-\cos(k\triangle x)) & -i\sigma\sin(k\triangle x) \\ -i\sigma\sin(k\triangle x) & 1-\sigma^2(1-\cos(k\triangle x)) \end{bmatrix};$$

$$\det|\mathbf{G} - g\mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \left(1-\sigma^2(1-\cos(k\triangle x)) - g\right)^2 + \sigma^2\sin^2(k\triangle x) = 0;$$

$$g_{1,2} = 1-\sigma^2(1-\cos(k\triangle x)) \pm i\sigma\sin(k\triangle x);$$

Схема устойчива при $\sigma = a\frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1$.