Вариант №1

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `l eigenvalues()` `(из пакета` *`eigen`*`)`. Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` `(из пакета` *`eigen`*`)`, `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` `(из пакета` *`draw`*`)`.

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = 2x - y, \qquad D\{y = x,\ y = x^2,\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = x + \frac{1}{3x - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^3 + y^3 = 3axy,\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1); \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = -1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10–и членов разложения.

$$f(x) = x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса:

$$w_t + ww_x = aw_{xx}.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Вариант №2

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `l eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x - y, \qquad D\{y = 2x - 1,\ y = 2 - x^2,\ x = -3,\ x = 1\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *`implicit_plot`*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$(x - a)^2 \left(x^2 + y^2\right) = b^2x^2,\ a, b = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *`implicit_plot`*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = e^x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейнго уравнения теплопроводности:

$$w_t = (ww_x)_x \,.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Вариант №3

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -25. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `l eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2 - z^2\right), \; a = const.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x + 2y, \qquad D\{y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$xy' - y = x\tan\left(\frac{y}{x}\right); \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейнго уравнения теплопроводности:

$$w_t + a w_x = (w w_x)_x\,.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + 2e^{2y} u_{yy} + y u_y = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Вариант №4

Подготовил: *Губкин А.С*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -18. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `.`, `eigenvalues()`, `eigenvectors()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`. Необходимо уметь задавать переменные и функции в **Maxima**.

Задание №2

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №3

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = y\ln x, \qquad D\{y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()`.

Задание №4

Исследовать на максимум и минимум функцию двух переменных. Построить график.

$$z = 3\ln x + xy^2 - y^3.$$

Необходимые условия экстремума функции $f(x, y, \ldots)$ в точке A заключаются в выполнении в этой точке равенств: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ... При этом функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет в данной точке максимум, если $\triangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, и минимум, если $\triangle > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (при условии непрерывности частных производных).

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `solve()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot3d()`. Необходимо уметь задавать переменные и функции в **Maxima**.

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Исследование рекомендуется проводить по следующий схеме:

1. Установить точки разразрыва. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
2. Найти точки максимума и минимума функции, вычислить значение функции в этих точках.
3. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции в этих точках.
4. Найти асимптоты графика функции. Вычислить предельные значения функции в точках, граничных для ее области существования.
5. Построить график функции.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`. Необходимо уметь задавать переменные и функции в **Maxima**.

Задание №6

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - y'e^y = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №7

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \qquad a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx, \qquad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №8

Найти решение типа бегущей волны нелинейного волнового уравнения:

$$w_{tt} = (w w_x)_x \, .$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`. Необходимо уметь задавать переменные и функции в **Maxima**.

1 Приложение

1.1 Задание №2

Необходимые условия экстремума функции $f(x, y, \ldots)$ в точке A заключаются в выполнении в этой точке равенств: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\ldots$. При этом функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет в данной точке максимум, если $\triangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, и минимум, если $\triangle > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (при условии непрерывности частных производных).

1.2 Задание №7

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx, \qquad b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx.$$

Задания взяты из книг:

1. Н. А. Давдов, П. П. Коровкин, В. Н, Никольский. Сборник задач по математическому анализу

2. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2.

3. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е издание.