Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

23 октября 2020 г.

Уравнение Бюргерса и Баклея - Леверетта

Будем рассматривать уравнение Бюргерса и Баклея - Леверетта. Соответствующи потоки:

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2,$$

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{4}(1 - u^2)^2}.$$

Уравнение Бюргерса и Баклея - Леверетта

Уравнение Бюргерса в консервативной форме:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0.$$

Уравнение Баклея - Леверетта в консервативной форме:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{4}(1-u^2)^2}\right)_x = 0.$$

Пояснение к задаче Баклея - Леверетта

Уравнение Дарси для каждой фазы в дифференциальной форме:

$$w_1 = \frac{Q_1}{S} = -k\frac{k_1(s)}{\mu_1}p_x,$$

$$w_2 = \frac{Q_2}{S} = -k\frac{k_2(s)}{\mu_2}p_x.$$

Предполагается, что $s = s_1$ (либо $s = s_2$).
Для двухфазного течения s_1 и s_2 связаны очевидным соотношением

$$s_1 + s_2 = 1.$$

Пояснение к задаче Баклея - Леверетта

Уравнение неразрывности для каждой фазы:

$$ms_{1t} + w_{1x} = 0,$$

$$ms_{2t} + w_{2x} = 0.$$

Складывая уравнения неразрывности, получим:

$$(w_1 + w_2)_x = 0,$$

откуда найдем интеграл:

$$w_1 + w_2 = w(t) \text{ или } Q_1 + Q_2 = Q(t).$$

Пояснение к задаче Баклея - Леверетта

Исключим градиент давления:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{k_1(s)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} k_2(s)}.$$

Используя соотношение $w_1 + w_2 = w(t)$, получим

$$\frac{w_1}{w(t)} = \frac{k_1(s)}{k_1(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_2(s)} = f(s) \text{ - функция Баклея-Леверетта.}$$

Поэтому

$$w_1 = f(s)w(t) \text{ и } w_2 = (1 - f(s))w(t).$$

Пояснение к задаче Баклея - Леверетта

Подставим последнее соотношение для w_1 в уравнение неразрывности для первой фазы, получим:

$$ms_t + w(t)f(s)_x = 0.$$

Для случая, когда $w(t)/m = 1$

$$s_t + f(s)_x = 0.$$

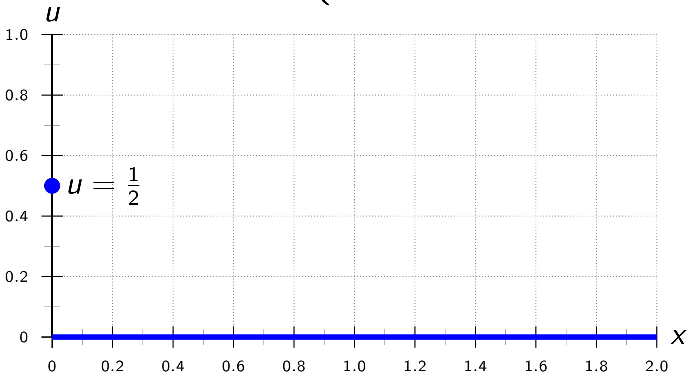
Уравнение Бюргерса

Рассмотрим аналитическое решение уравнения Бюргерса для различных начальных условий:

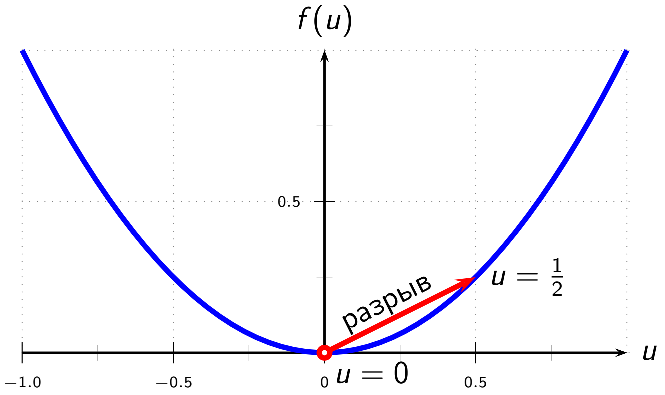
$$
\begin{aligned}
& u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \\
& f(u) = \frac{1}{2}u^2, \\
& a(u) = u, \\
& \frac{dx}{dt} = a(u), \\
& x(t) = u_0(t - t_0) + x_0.
\end{aligned}
$$

Начальное условие №1

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0, \\ 0 & x \geq 0. \end{cases}$$



Поток уравнения Бюргерса и начальное условие



Харатеристики

Характеристики будут иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow \begin{cases} u = u_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ для } t > 0 \; x > 0, \\ 0 \text{ для } x > 0 \; t > 0, \end{cases} \\ x(t) = u_0 t + x_0 \text{ - начинаются на оси } \; x, \\ x(t) = u_0 (t - t_0) \text{ - начинаются на оси } \; t. \end{cases}$$

До того момента пока они не пересекутся!

Харатеристики

Интегрируя предыдущее уравнение, получим:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - t_0) \text{ для } t > 0 \; x > 0, \\ x_0 \text{ для } x > 0 \; t > 0. \end{cases}$$

Скорость распространения скачка

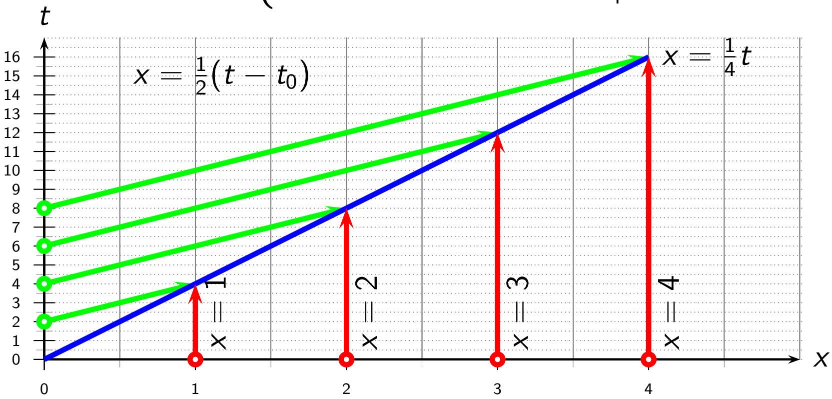
Расчитаем скорость распространения скачка с помощью соотношения Ренкина - Гюгонио:

$$S = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{4}.$$

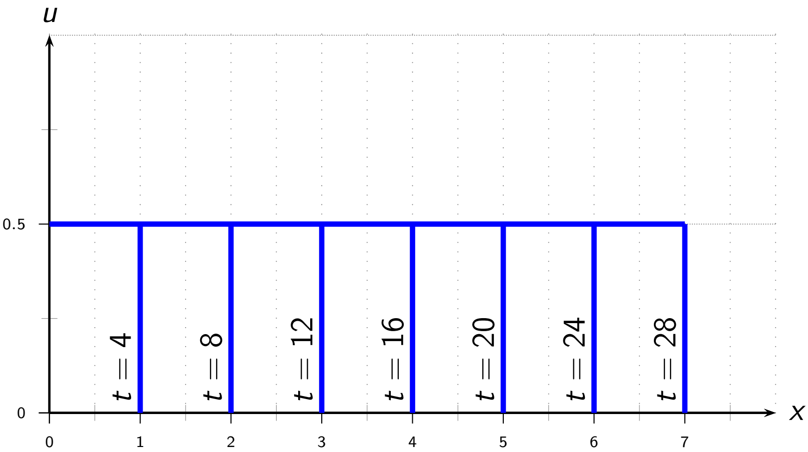
Аналитическое решение

Таким образом решение будет иметь следующий вид:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0, \quad x > \frac{1}{4}t, \\ 0, & t > 0, \quad x < \frac{1}{4}t. \end{cases}$$

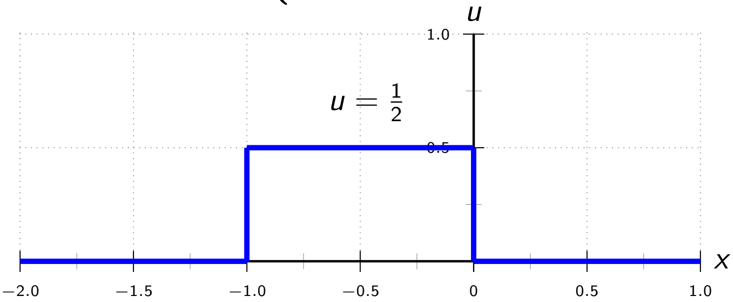


Аналитическое решение

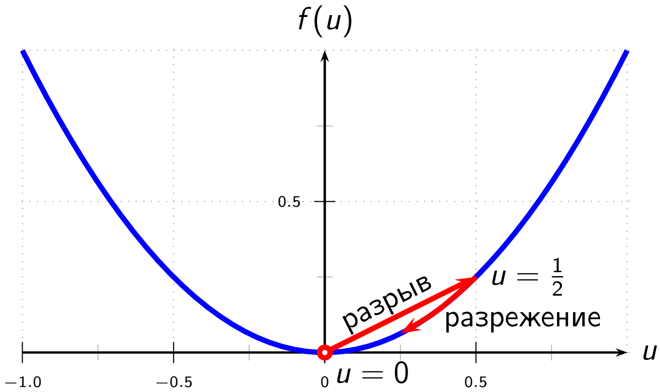


Начальное условие №2

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{1}{2} & -1 < x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$



Поток уравнения Бюргерса и начальное условие



Харатеристики

Уравнение характеристик будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = u_0 = \begin{cases} 0 & x_0 < -1, \\ \frac{1}{2} & -1 < x_0 < 0, \\ 0 & x_0 > 0, \end{cases}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 0 \quad (u = 0) & t > 0 \quad x < -1, \\ \frac{1}{2} \quad (u = \frac{1}{2}) & t > 0 \quad -1 < x < 0, \\ 0 \quad (u = 0) & t > 0 \quad x > 0. \end{cases}$$

пока они не пересекутся.

Харатеристики

Интегрируя предыдущее уравнение, получим:

$$x = \begin{cases} x_0 & t > 0 \quad x < -1, \\ \frac{1}{2}(t - t_0) & t > 0 \quad -1 < x < 0, \\ x_0 & t > 0 \quad x > 0. \end{cases}$$

Скорость распространения скачка

Расчитаем скорость распространения скачка с помощью соотношения Ренкина - Гюгонио:

$$S = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, разрыв движется из точки $x = 0$ со скоростью $S = \frac{1}{4}$.
Траектория движения скачка $x_s(t)$ будет иметь вид:

$$x_s(t) = 0 + \frac{1}{4}t = \frac{1}{4}t.$$

Веер волн разрежения

Чтобы удовлетворить энтропийному условию нужно заполнить "вакуум"между двумя семействами характеристик веером волн разрежения, который задается следующим уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = A = \frac{x+1}{t},$$

следовательно

$$x + 1 = At, \qquad 0 \leq A \leq \frac{1}{2}.$$

Веер волн разрежения

Волна разрежения с наклоном $A = \frac{1}{2}$ достигнет разрыв в момент времени:

$$-1 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}t \Rightarrow t = 4.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой траекторию движения "хвоста"волны разрежения со значением наклона $u = \frac{1}{2}$ из точки $x = -1$, а правая - траектория движения разрыва.

Аналитическое решение для $t \le 4$

$u = 0$ для $x < -1$ и справа от траектории движения разрыва $x_s(t)$.
$u = \frac{1}{2}$ в области $\frac{1}{2}t - 1 < x < \frac{1}{4}t$.
Таким образом, для промежутка времени $0 \le t \le 4$ решение будет иметь следующий вид

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{t} & \quad -1 < x < \frac{t}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} - 1 < x < \frac{1}{4}t \\ 0 & \frac{1}{4}t > x \end{cases}.$$

Траектория скачка для $t \geq 4$

Рассмотрим траекторию движения скачка когда он пересечется с волной разрежения ($t \geq 4$). Для этого приравняем скорость движения скачка к средней скорости слева и справа от него:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{2}(u_L + u_R) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{t} + 0\right).$$

Таким образом, уравнение траектории скачка для $t \geq 4$:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{x+1}{2t}.$$

Траектория скачка для $t \geq 4$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\int \frac{dx_s}{x_s + 1} = \int \frac{dt}{2t},$$

$$\ln(x_s + 1) = \frac{1}{2}\ln(t) + \ln B,$$

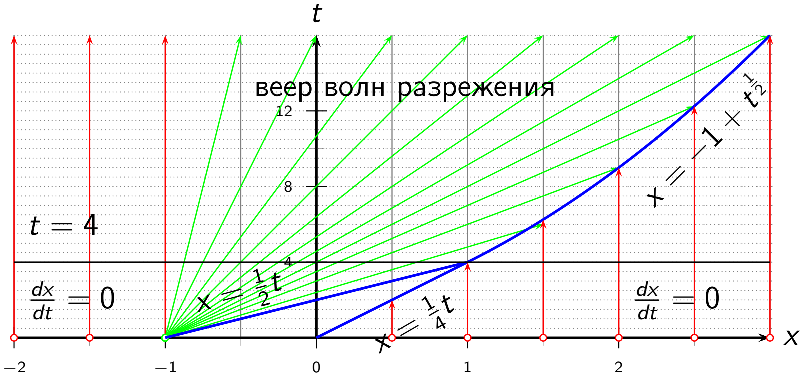
$$x_s + 1 = Bt^{\frac{1}{2}}.$$

Траектория скачка для $t \geq 4$

Найдем константу B: мы знаем, что в момент времени $t = 4$ траектория движения скачка имеет координату $x = 1$, таким образм, $1 + 1 = B4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow B = 1$.
Окончательно траектория движения скачка для $t \geq 4$, будет иметь вид:

$$x_s = -1 + t^{\frac{1}{2}}.$$

Аналитическое решение на характеристической плоскости



Уравнение Баклея - Леверетта

Рассмотрим уравнение Баклея - Леверетта в консервативной форме:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{4}(1-u^2)^2} \right)_x = 0.$$

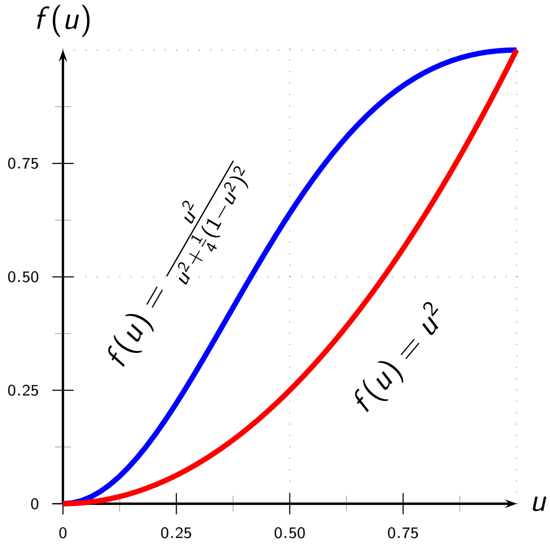
Скорость распространения возмущений:

$$a(u) = f'(u) = \frac{(5u^2 - 2u + 1)8u - 4u^2(10u - 2)}{(5u^2 - 2u + 1)^2} =$$

$$= \frac{8u - 8u^2}{(5u^2 - 2u + 1)^2}.$$

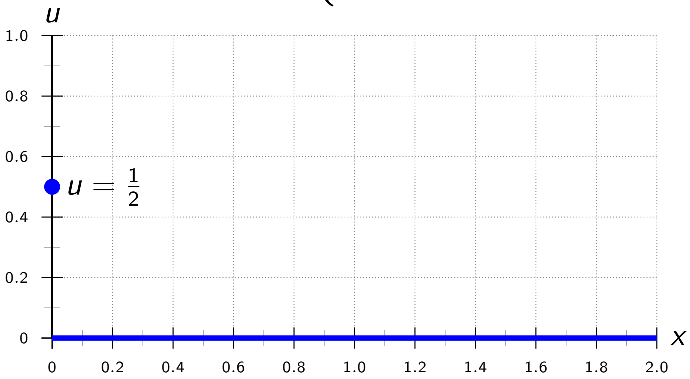
Схема к задаче Баклея - Леверетта

Поток уравнения Баклея - Леверетта

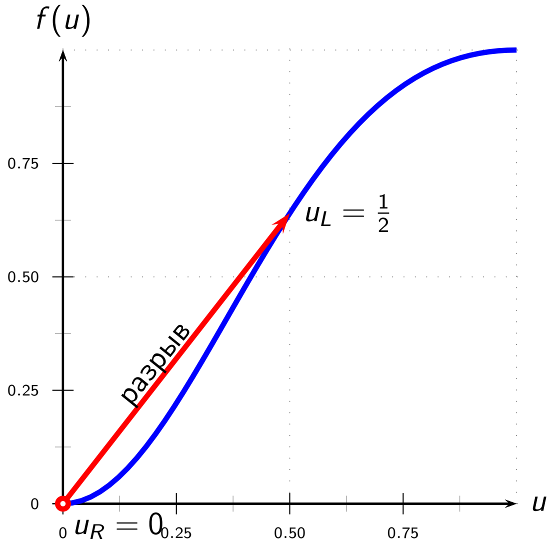


Начальное условие №1

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$



Поток уравнения Баклея - Леверетта и начальное условие



Характеристики

Уравнение характеристик будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = a(u_0) = \frac{8u_0 - 8u_0^2}{(5u_0^2 - 2u_0 + 1)^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим характеристики:

$$x = \left(\frac{8u_0 - 8u_0^2}{(5u_0^2 - 2u_0 + 1)^2}\right) t + x_0.$$

Подставляя начальное условие $u_0 = \frac{1}{2}$, получим:

$$x = \frac{32}{25} t + x_0.$$

Характеристики

Окончательно, характеристики будут иметь вид:

$$x = \begin{cases} \frac{32}{25}t + x_0 \text{ для } t > 0\; x > 0 \text{ (берут начало на оси) } t, \\ x_0 \text{ для } x > 0\; t > 0 \text{ (берут начало на оси) } x. \end{cases}$$

Скорость распространения разрыва

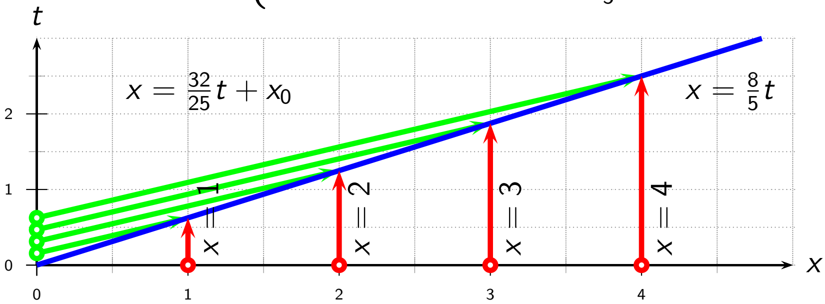
Расчитаем скорость распространения разрыва с помощью соотношения Ренкина - Гюгонио:

$$S=\frac{[f]}{[u]}=\frac{f(u_L)-f(u_R)}{u_L-u_R}=\frac{\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{8}{5}.$$

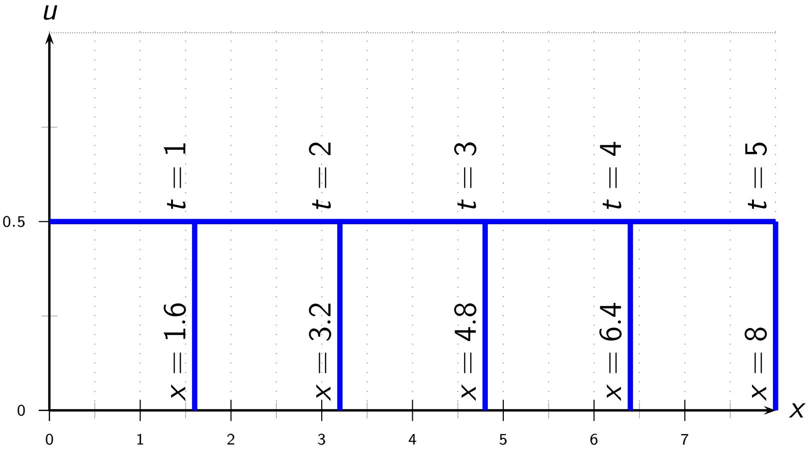
Аналитическое решение на характеристической плоскости

Таким образом решение будет иметь следующий вид:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0, \quad x > \frac{8}{5}t, \\ 0, & t > 0, \quad x < \frac{8}{5}t. \end{cases}$$

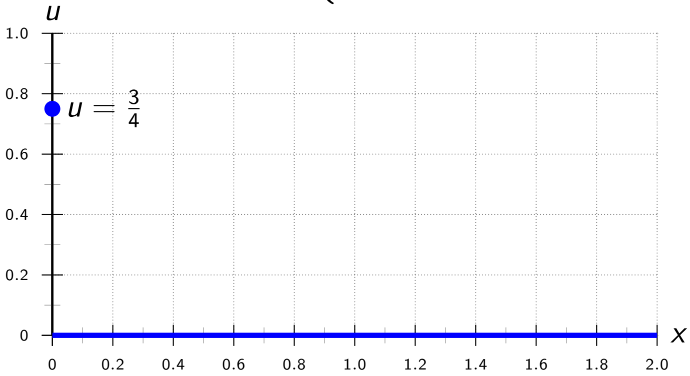


Аналитическое решение

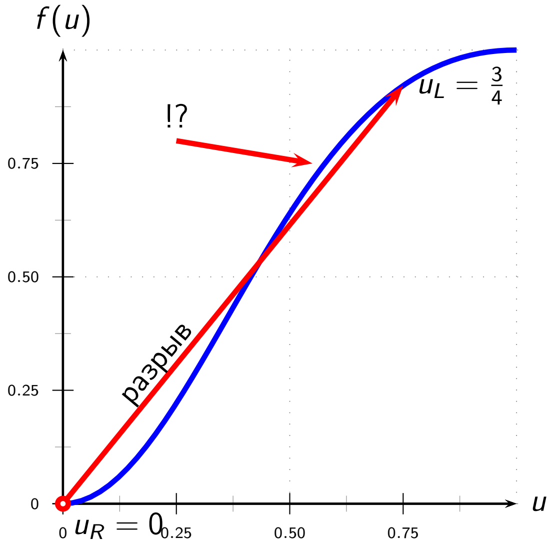


Начальное условие №2

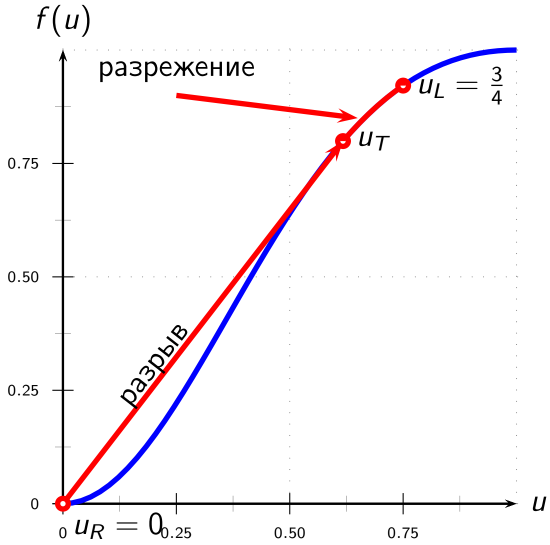
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{4} & x = 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$



Поток уравнения Баклея - Леверетта и начальное условие



Поток уравнения Баклея - Леверетта и начальное условие



Волна разрежения

В данном случае в решение будет присутствовать волна разрежения, поскольку нельзя соединить точки $(0,0)$ и $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ одной линией и удовлетворить условию энтропии.
Поэтому нужно найти точку $(u_T, f(u_T))$ в которой наклон касательной к кривой $f(u)$ будет совпадать с наклоном прямой, соединящей точки $(0,0)$ и $(u_T, f(u_T))$:

$$f'(u_T) = \frac{f(u_T) - 0}{u_T - 0}.$$

Волна разрежения

Получим следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{8u_T - 8u_T^2}{\left(5u_T^2 - 2u_T + 1\right)^2} = \frac{u_T}{u_T^2 + \frac{1}{4}\left(1 - u_T^2\right)^2}.$$

Его решение можно получить, например, с помощью метода Ньютона:

$$F\left(u_T\right) = \frac{8u_T - 8u_T^2}{\left(5u_T^2 - 2u_T + 1\right)^2} - \frac{u_T}{u_T^2 + \frac{1}{4}\left(1 - u_T^2\right)^2},$$

$$u_T^{(n+1)} = u_T^{(n)} - \frac{F\left(u_T^{(n)}\right)}{F'\left(u_T^{(n)}\right)} \Rightarrow u_T \approx 0.617403.$$

Аналитическое решение на характеристической плоскости