Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

23 октября 2020 г.

Введение

Рассмотрим одномерный гиперболический закон сохранения:

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Будем рассматривать два потока $f(u)$: $\frac{u^2}{2}$, $\frac{u^2}{u^2+\frac{1}{4}(1-u^2)^2}$ - поток уравнения Бюргерса и поток уравнения Баклея - Леверетта соответственно.

Введение

Методы выделения разрывов:

- ⊕ очень точно определяются положение и величина разрыва;
- ⊖ сложное программирование/реализация;
- ⊖ в задачах со сложной динамикой возникают проблемы с сеткой.

Схемы сквозного счета:

- ⊕ относитльно простая реализация;
- ⊕ применимы для широкого класса задач;
- ⊖ численная диссипация приводит к "размазыванию"разрывов;
- ⊖ численная дисперсия приводит к появленю осцилляций вблизи разрывов.

Метод контрольного объема/МКО (Finite Volume Method/FVM)

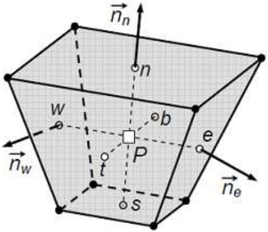
$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot f(\vec{s}) = 0.$$

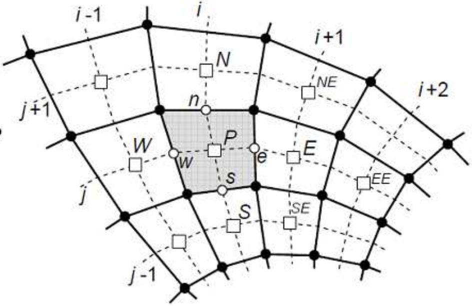
$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot f(\vec{s}) = 0 \Rightarrow \int_{v_i} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} dv + \int_{v_i} \vec{\nabla} \cdot f(\vec{s}) dv = 0 \Rightarrow$$

$$v_i \frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \int_{\sigma_i} f(\vec{s}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \frac{1}{v_i} \sum_{\sigma_i} \tilde{f}(\tilde{\vec{s}}) \cdot \vec{\sigma}_i = 0.$$

Схема к методу контрольного объема

$$\frac{d\tilde{\vec{s}}_i}{dt} + \frac{1}{v_i}\sum_{\sigma_i} \tilde{f}(\tilde{\vec{s}})\cdot\vec{\sigma}_i = 0.$$





МКО в случае одной пространственной переменной

В случае одной пространственной переменной предыдущее уравнение примет вид:

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i}\left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0,$$

где $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(u^n_{i-\xi} \dots u^n_{i+\eta}\right)$ - численный поток, ξ и η - определяют шаблон разностной схемы.

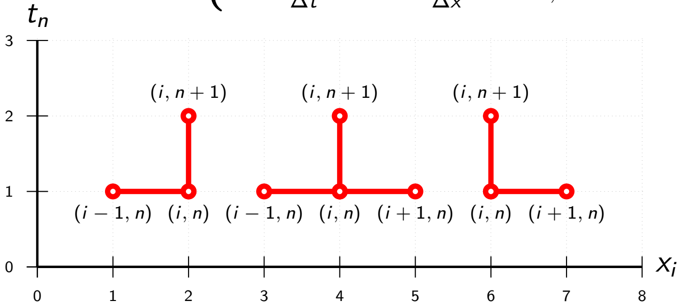
Шаблон разностной схемы

Определение

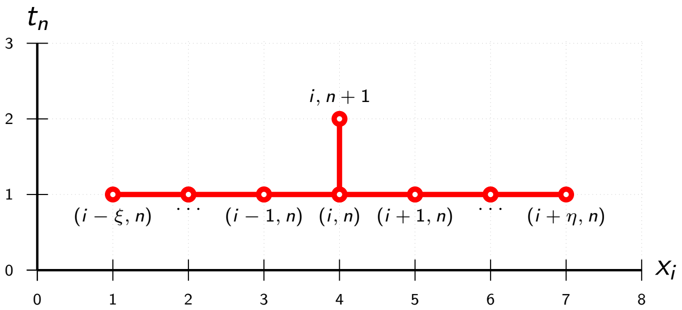
Шаблон – это мнемоническая диаграмма, которая указывает способ образования разностной схемы, показывая точки разностной сетки, участвующие в аппроксимации.

Пример шаблона

$$u_t + a u_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad a > 0, \\ \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad a > 0, \\ \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \quad a > 0. \end{cases}$$

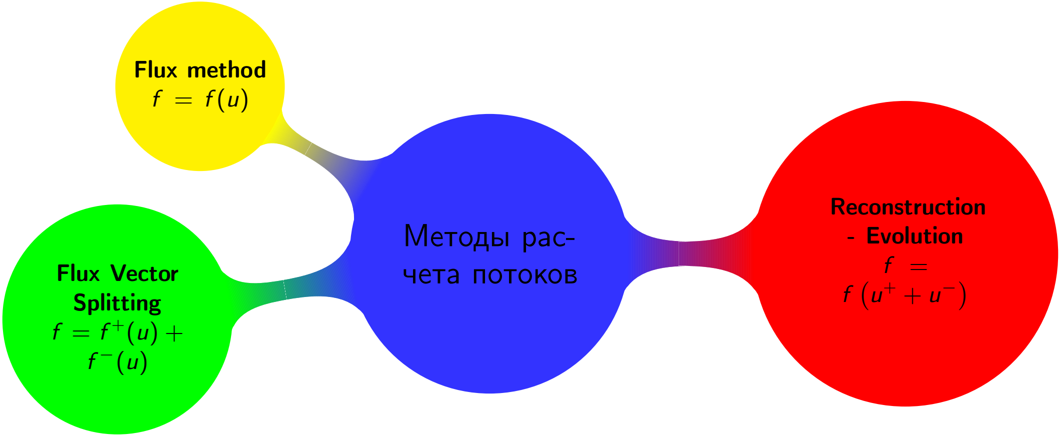


Шаблон в общем одномерном случае



Дискретизация по пространству

Различные версии метода контрольного объема отличаются способом вычисления потоков:



Методы расчета потоков

Простейший способ вычисления потока как полусуммы соответствующих величин на гранях контрольного объема:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right),$$

приводит к нейстойчивости разностной схемы.

Монотонность схемы

Условие монотонности схемы для уравнения

$$u_t + f(u)_x = 0$$

заключается в том, что для двух заданных начальных данных, таких, что одно везде больше другого: $u(x,0) \geq w(x,0)$, в последующие моменты времени это свойство сохраняется: $u(x,t) \geq w(x,t)$.

Монотонность схемы

Для конечно-разностной схемы

$$u_i^{n+1} = H\left(u_{i-m}^n, \cdots, u_i^n, \cdots, u_{i+m}^n\right)$$

условие монотонности имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial u_{i+j}^n} \geq 0, \; j \in [-m, m].$$

Теорема Годунова

Теорема (Годунов С.К.)

Для того чтобы разностная схема вида

$$u_i^{n+1} = \sum_j a_j u_j^n$$

переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a_j были неотрицательными.

Монотонность схемы

Из условий

$$\sum_j a_j = 1, \; a_j \geq 0$$

вытекает, что

$$\max_i \left| u_i^{n+1} \right| \leq |a_j| \max_j \left| u_j^n \right|$$

так как $|a_j| \leq 1$, то получаем условие устойчивости монотонных схем

$$\sum_i \left| u_i^{n+1} \right| \leq \sum_j \left| u_j^n \right| .$$

Следствие

Следствие (Годунов С.К.)

*Среди линейных разностных схем второго порядка точности для уравнения $u_t + u_x$ **нет схем**, удовлетворяющих условию монотонности.*

Пример

Рассмотрим семейство трехточечных явных схем для линейного уравнения переноса:

$$u_i^{n+1} = au_{i-1}^n + bu_i^n + cu_{i+1}^n.$$

Это соотношение можно переписать в форме, гарантирующем консервативность:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{i+1/2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \varepsilon_{i-1/2}(u_i^n + u_{i-1}^n)\right] + \\ + \left[\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n + u_{i-1}^n)\right].$$

Пример

Тогда коэффициенты будут:

$$a = \nu_{i-1/2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1/2},$$
$$b = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1/2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1/2} - \nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2},$$
$$c = \nu_{i+1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1/2}.$$

Метод Лакса - Фридрихса (Lax - Friedrichs)

Одним из первых разностных методов предназначеных для дискретизации гиперболического закона сохранения (уравнения Эйлера) был метод Лакса - Фридрихса (1954):

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right),$$

$$f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i-1}\right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(u_i - u_{i-1}\right).$$

Метод Лакса - Фридрихса оказался слишком диффузонным и широкого распространения не получил.

Начальное условие

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{4} & x = 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$