Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

3 мая 2020 г.

Линейные волны, распространяющиеся без затухания

Рассмотрим далее общие свойства линейных волн, распространяющихся в одномерном пространстве без диссипации. В этом случае независимыми переменными являются t и x. Волновая система может описываться одной или более зависимыми переменными; рассмотрим пока одну переменную и обозначим ее u.

(Иногда употребялют оборот волны с диссипацией и дисперсией – с точки зрения физики это не верно)

Фаза и фазовая скорость

Рассмотрим волновое изменение зависимой переменной $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t) = u_0 \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\right\} = u_0 \cos(\theta).$$

θ – фаза, линейная по независимым переменным

$$\theta = kx - \omega t + \alpha,$$

k – волновое число, ω – круговая частота.
Фаза будет оставаться постоянной для наблюдателя, который движется со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c.$$

Действительно

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\omega + \frac{\omega}{k}k = 0.$$

Дисперсионное соотношение

В общем случае для распространяющихся волн существует функциональное соотношение $f(\omega, k)$, связывающее частоту и волновое число. Обычно это соотношение имеет вид зависимости частоты от волнового числа k:

$$\omega = W(k).$$

Соотношение такого типа обычно называют дисперсионным соотношением или уравнением.

Тогда **фазовая скорость** также зависит от волнового числа:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{W(k)}{k}.$$

В случае, когда фазовая скорость не зависит от волнового числа (или от частоты), говорят, что волна распространяется без дисперсии. В таком случае функция W имеет простой вид:

$$W(k) = ck.$$

Интеграл Фурье

Пусть задано начальное распределение $u(x,0)$. Если это начальное распределение не гармонично, то его можно представить с помощью интеграла Фурье как суперпозицию синусоидальных функций.

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(p,0)\, e^{ipx}\, dp,$$

$$\bar{u}(p,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x,0)\, e^{-ipx}\, dx.$$

Дисперсия

Поскольку система предполагается линейной, каждая из гармонических компонент изменяется как $e^{i\theta}$ с частотой $W(k) = ck$. Полное решение в любой последующий момент времени t может быть получено путем обратного преобразования Фурье.
В бездисперсионном случае этот процесс вновь приводит к начальному распределению, смещенному на расстояние ct. То есть, решение можно выразить в виде

$$u(x,t) = u(x - ct, 0).$$

Если же волна распространяется с дисперсией, то рассуждения теряют силу. В этом случае каждая компонента Фурье распространяется со своей скоростью.

Групповая скорость

Производная от правой части дисперсионного соотношения имеет размерность скорости

$$C\left(k\right)=\frac{dW}{dk}.$$

Это величина называется **групповой скорость**.

Интерпретация групповой скорости

Выберем некоторое значение k и соответствующее ему значение $\omega = W(k)$ как исходные величины и допустим, что кволновому числу добавляется малое возмущение $\pm\triangle k$. Соответствующее возмущенное значение частоты может быть аппроксимировано первыми двумя членами ряда Тейлора:

$$\omega + \triangle\omega = W(k + \triangle k) \approx \omega + C\triangle k.$$

$$\omega - \triangle\omega = W(k - \triangle k) \approx \omega - C\triangle k.$$

Соответствующие фазы

$$\theta_+ = (k + \triangle k)\,x - (\omega + \triangle\omega)\,t = \theta + \triangle k\,(x - Ct)\,.$$

$$\theta_- = (k - \triangle k)\,x - (\omega - \triangle\omega)\,t = \theta - \triangle k\,(x - Ct)\,.$$

Интерпретация групповой скорости

Решение, соответствующее этим двум фазам

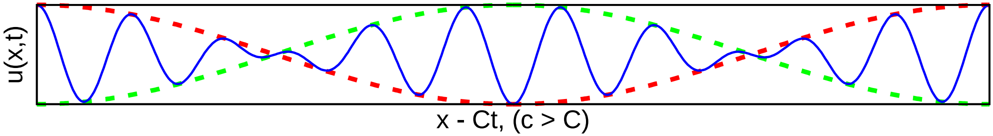
$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_+(x,t) + u_-(x,t) = u_0\left(\cos(\theta_+) + \cos(\theta_-)\right) = \\ &= u_0\left(\cos(\theta + \triangle k(x - Ct)) + \cos(\theta - \triangle k(x - Ct))\right) = \\ &= 2u_0 \cos(\theta) \cos(\triangle k(x - Ct)). \end{aligned}$$

Его можно рассматривать как волну с исходными волновым числом и частотой, модулированную по амплитуде множителем $\cos(\triangle k(x - Ct))$. Другими словами, происходят биения, соответствующие медленным изменениям амплитуды. Колебания ограничены двумя кривыми

$$2u_0 \cos(\triangle k(x - Ct)),$$

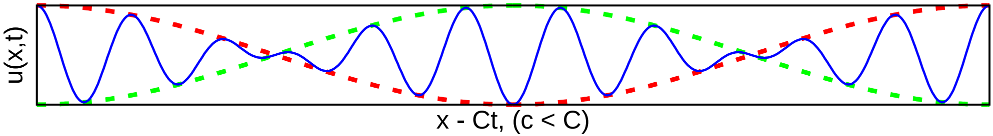
которые являются огибающими решения.

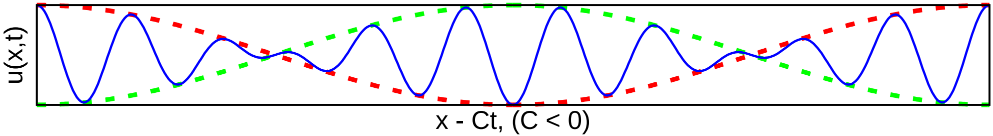
Интерпретация групповой скорости



Огибающая движется в пространстве со скоростью C. Каждый участок огибающей длиной $\pi/\triangle k$ можно интерпретировать как группу (пакет) волн, а скорость C – как скорость этой группы.

Интерпретация групповой скорости





В дисперсионном случае групповая скорость отличается от фазовой и может быть как больше, так и меньше фазовой скорости (и даже иметь обратный знак).

Пример №1

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ &u_{tt} = -\omega^2 u \\ &u_{xx} = -k^2 u \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}};$$

$$-\omega^2 = -a^2 k^2;$$

$$\omega = W(k) = ak;$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{dW}{dk} = a.$$

Точное решение – волна без дисперсии.

Пример №2

$$\boxed{\begin{aligned} & u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ & u_t = i\omega u \\ & u_x = -iku \\ & u_{xx} = -k^2 u \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{u_t + a u_x = \mu u_{xx}};$$

$$i\omega - iak = -\mu k^2 \Rightarrow \omega = W(k) = ak + \boxed{i\mu k^2};$$

$$c = \frac{\omega}{k} = a + \boxed{i\mu k}, \ C = \frac{dW}{dk} = a + 2i\mu k;$$

Пример №2

$$\omega = ak + i\mu k^2 \Rightarrow u\left(x, t\right) = u_0 e^{i(\omega t - kx)};$$

$$u\left(x, t\right) = u_0 e^{i\left(\left(ak + i\mu k^2\right)t - kx\right)} = e^{-\mu k^2 t} e^{i(akt - kx)} = e^{\mathbb{I}\mathrm{m}\{\omega\} t} e^{i(\mathbb{R}\mathrm{e}\{\omega\} t - kx)}.$$

$\mathbb{I}\mathrm{m}\{\omega\} = \beta$ – коэффициент затухания.

Точное решение – затухающая волна без дисперсии.

Пример №3. Уравнение КдВ

$$\boxed{\begin{aligned} & u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ & u_t = i\omega u \\ & u_x = -iku \\ & u_{xxx} = ik^2 u \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{u_t + au_x + \beta u_{xxx} = 0};$$

$$i\omega - iak + i\beta k^3 = 0 \Rightarrow \omega = W(k) = ak - \boxed{\beta k^3};$$

$$c = \frac{\omega}{k} = a - \boxed{\beta k^2}, \; C = \frac{dW}{dk} = a - \boxed{3\beta k^2};$$

Точное решение – волна с дисперсией.