Вариант №1

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = 2x - y, \qquad D\{y = x,\ y = x^2,\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^3 + y^3 = 3axy,\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = -1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10–и членов разложения.

$$f(x) = x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Вариант №2

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x - y, \qquad D\{y = 2x - 1,\ y = 2 - x^2,\ x = -3,\ x = 1\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \ln\frac{1-x}{1+x}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$(x-a)^2\left(x^2+y^2\right) = b^2x^2,\ a,b = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = e^x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Вариант №3

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -25. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 + y^2 - z^2\right), \ a = const.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x + 2y, \qquad D\{y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$xy' - y = x\tan\left(\frac{y}{x}\right); \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10–и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Вариант №4

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти точки условного экстремума следующей функции:

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ если } x^2 + y^2 = 1; \; A, B, C = const$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = y\ln x, \qquad D\{y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()`.

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^5 + y^5 = xy^2,\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравния. Построить график частного решения.

$$y'' - y'e^y = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

1 Теория

1.1 Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если $n = 2$, то

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Если $n = 3$, то

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

у которой $a_{ik} = a_{ki}$, называется матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий определитель - определителем этой квадратичной формы.

Так как A - симметрическая матрица, то корни λ_i характеристического уравнения

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

являются действительными числами.

Пусть $\vec{u}_i$ нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам λ_i. Векторы исходной системы координат - $\vec{e}_i$.

Матрица

$$B = [\vec{e}_i \cdot \vec{u}_j]$$

является матрицей перехода от базиса $\vec{e}_i$ к базису $\vec{u}_i$. Матрица A в новой системе координат

$$\tilde{A} = BAB^T$$

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$\vec{x} = \tilde{A}\tilde{\vec{x}}$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$, получаем квадратичную форму

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = a_{11}\tilde{x}_1^2 + a_{22}\tilde{x}_2^2 + a_{33}\tilde{x}_2^2$$

не содержащую членов с произведениями $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_2\tilde{x}_3$.

Принято говорить, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью преобразования $\tilde{A}$.

1.2 Экстремум функции нескольких переменных

Определение экстремума. Пусть функция $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки P_0. Если или $f(P_0) > f(P)$, или $f(P_0) < f(P)$ при $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, то говорят, что функция $f(P)$ имеет строгий *экстремум* (соответственно *максимум* или *минимум*) в точке P_0.

Необходимое условие экстремума. Дифференцируемая функция $f(P)$ может достигать экстремума лишь в *стационарной* точке P_0, т.е. такой, что $df(P_0) = 0$. Следовательно, точки экстремума функции $f(P)$ удовлетворяют системе уравнений $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Достаточное условие экстремума. Функция $f(P)$ в точке P_0 имеет:

- *максимум*, если $df(P_0)\,,\ d^2f(P_0) < 0$, при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.
- *минимум*, если $df(P_0)\,,\ d^2f(P_0) > 0$, при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

Исследование знака второго дифференциала $d^2f(P_0)$ может быть проведено путем приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y в стационарной точке $(x_0, y_0)\,(df(x_0, y_0) = 0)$ при условии, что $D = AC - B^2$, где $A = f''_{xx}(x_0, y_0)\,, B = f''_{xy}(x_0, y_0)\,, C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ имеем:

1. *минимум*, если $D > 0,\ A > 0\ (C > 0)$;
2. *максимум*, если $D > 0,\ A < 0\ (C < 0)$;
3. *отсутствие экстремума*, если $D < 0$.

Условный экстремум. Задача определния экстремума функции $f\left(P\right)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ при наличии ряда соотношений $\varphi_i\left(P\right)\ \ (i=1,\ldots,m;\ m<n)$ сводится к нахождению обычного экстремума для *функции Лагранжа*

$$L\left(P\right)=f\left(P\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i\left(P\right),$$

где $\lambda_i\ \ (i=1,\ldots,m)$ – постоянные множители. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в простейшем случае решается на основании исследования знака второго дифференциала $d^2L\left(P_0\right)$ в стационарной точке (P_0) функции $L\left(P\right)$ при условии, что переменные $dx_1,\ldots,dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0\ \ (i=1,\ldots,m).$$

Абсоютный экстремум. Функция $f\left(P\right)$, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

1.3 Исследование функций

1.3.1 Схема элементарного исследования графика функции

1. Область определения;
2. Область значений;
3. Четность, нечетность функции;
4. Характерные точки:
   (a) точки пересечения графика с осями;
   (b) предельные значения функции;
   (c) экстремальные значения;
   (d) точки перегиба др.
5. Асимптоты;
6. Построение графика.

Экстремум:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_i^0 \Rightarrow f''(x_i^0) < 0 - \max$, $f''(x_i^0) > 0 - \min$; если не обращающаяся в нуль первая производная четного порядка, то при $f^{(2k)}(x_i^0) > 0 - \min$ и $f^{(2k)}(x_i^0) < 0 - \max$; если $f^{(2k+1)}(x_i^0) \neq 0$, то перегиб.

Точка перегиба:

Если $f''(x_i^0) > 0$, то функция локально выпукла вниз, если $f''(x_i^0) < 0$, то локально вверх.

Асимптоты:

Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b,$$

вертикальную асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, или $x \to a + 0$, или $x \to a - 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty,$$

наклонную асимптоту $y = kx + b$, если

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ или } k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - k_1 x\right] \text{ или } b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - k_2 x\right].$$

1.3.2 Графики неявно заданных функций

Пусть функция $y = y\left(x\right)$ определяется неявно уравнением $F\left(x, y\right) = 0$.

Общие свойства:

1. Если $F\left(x, y\right) = F\left(-x, y\right)$, то кривая симметрична относительно **OY**;
2. Если $F\left(x, y\right) = F\left(x, -y\right)$, то кривая симметрична относительно **OX**;
3. Если $F\left(x, y\right) = F\left(-x, -y\right)$, то кривая симметрична относительно $(0, 0)$;
4. Если $F\left(x, y\right) = F\left(y, x\right)$, то кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$;
5. График $F\left(x + a, y\right) = 0$ получается из путем переноса последнего на $|a|$ по оси **OX**;

6. График $F(x, y + b) = 0$ получается из путем переноса последнего на $|b|$ по оси **OY**;

7. График $F\left(\frac{x}{p}, y\right)$ получается из $F(x, y)$ путем растяжения в p раз по оси **OX**;

8. График $F\left(x, \frac{y}{q}\right)$ получается из $F(x, y)$ путем растяжения в q раз по оси **OY**;

Точки пересечения кривой $F(x, y)$ с осями координат

1. С осью **OX**:

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases};$$

2. С осью **OY**:

$$\begin{cases} F(0, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Асимптоты кривой $F(x, y)$

1. Горизонтальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x, если этот коэффициент постоянен, то горизонтальных асимптот нет;

2. Вертикальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени y, если он постоянен, то вертикальных асимптот нет;

3. Наклонная асимптота: заменяем y в уравнении $F(x, y)$ на $y = kx + b$, затем в уравнении приравниваем два коэффициента при старших степенях x. Решаем полученную систему и находим k и b.

Особые точки кривой $F(x, y)$

Точка кривой $M(x_0, y_0)$ называется особой, если ее координаты одновременно удовлетворяют трем равенствам:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F_x(x_0, y_0) = 0 \\ F_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Угловой коэффициент касательной в особой точке (угол входа)

$$k = -\frac{F_x}{F_y}$$

неопределенный.

Предположим, что в особой точке $M(x_0, y_0)$ $|F_{xx}| + |F_{xy}| + |F_{yy}| \neq 0$ т.е. не все частные производные второго порядка обращаются в нуль. Тогда $M(x_0, y_0)$ – двойная точка.

Введем характеристику двойной точки.

$$\triangle = F_{xy}^2(x_0, y_0) - F_{xx}(x_0, y_0) F_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда:

1. $\triangle > 0$ – кривая имеет узловую точку;
2. $\triangle < 0$ – изолированная точка;
3. $\triangle = 0$ – тогда точка $M(x_0, y_0)$ может быть:
   (a) точкой возврата первого рода;
   (b) точкой возврата второго рода;
   (c) изолированной точкой;
   (d) точкой самокасания.

Точки экстремума

Для определения точек подозрительных на экстремум нужно воспользоваться представлением для углового коэффициента:

$$k = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Теперь, чтобы найти на кривой точку, где касательная параллельна **OX**, надо решить систему

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Пусть (x_1, y_1) – ее корни, причем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $M(x_1, y_1)$ для кривой $F(x_0, y_0) = 0$ будет:

- точкой $Y_{\max}$, если $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) > 0$;
- точкой $Y_{\min}$, если $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) < 0$.

Если требуется найти точки на кривой, где касательная параллельна **OY**, нужно решить систему

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ F_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Точка $M(x_2, y_2)$ на кривой $F(x,y) = 0$ будет:

- точкой $X_{\max}$, если $F_{yy}(x_2, y_2)\, F_y(x_2, y_2) > 0$;
- точкой $X_{\min}$, если $F_{yy}(x_2, y_2)\, F_y(x_2, y_2) < 0$.

Точки перегиба

Если уравнение $F(x,y) = 0$ нельзя явно разрешить относительно y, то найти точки перегиба очень трудно.

Для алгебраической кривой $F(x,y) = 0$ точки перегиба ее находятся в местах пересечения кривой и ее гессианы:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0 \end{cases}.$$

1.4 Ряд Фурье

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле (см., к примеру, википедию) указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \qquad a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx, \qquad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Список литературы

[1] Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии

[2] Н.А. Давдов, П.П. Коровкин, В.Н, Никольский. Сборник задач по математическому анализу

[3] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1,2.

[4] Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13–е издание.

[5] Маркушевич А.И. Замечательные кривые М. : Наука, 1975.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.

[7] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии.