

# Вариант №1

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = 2x - y, \quad D\{y = x, y = x^2, x = 1, x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = x + \frac{1}{3x - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса:

$$w_t + ww_x = aw_{xx}.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u \left( \rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

С уравнением состояния

$$p = \rho e (\gamma - 1). \quad (2)$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №12

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений теории мелкой воды:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_x = \mathbf{S}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Функция  $b(x, y)$  описывает профиль дна.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

# Вариант №2

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = x - y, \quad D\{y = 2x - 1, y = 2 - x^2, x = -3, x = 1\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2, \quad a, b = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = e^x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$$w_t = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \\ \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right)_t + \left( u \left( \rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \right)_x = 0 \\ p = \rho e (\gamma - 1) \end{array} \right. \quad (5)$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.



# Вариант №3

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -25. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$ :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2), \quad a = \text{const}.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = x + 2y, \quad D\{y = x, y = 2x, x = 2, x = 3\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета `implicit_plot`).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$xy' - y = x \tan\left(\frac{y}{x}\right); \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$$w_t + aw_x = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \\ \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right)_t + \left( u \left( \rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \right)_x = 0 \\ p = \rho e (\gamma - 1) \end{cases} \quad (6)$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

# Вариант №4

Подготовил: Губкин А.С.  
E-mail: alexshtil@gmail.com

## Задание №1

Решить СЛАУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Найти собственные числа матрицы  $A$ .

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -18. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

## Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

## Задание №3

Найти точки условного экстремума следующей функции:

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ если } x^2 + y^2 = 1; A, B, C = \text{const}$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

## Задание №4

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и построить область  $D$ .

$$f(x, y) = y \ln x, \quad D\{y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}, x = 1, x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()`.

## Задание №5

Исследовать функцию:

$$y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

## Задание №6

Исследовать неявно заданную функцию:

$$x^5 + y^5 = xy^2, \quad a = \text{const} > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit\_plot*).

## Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - y'e^y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

## Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T$ , заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

## Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного волнового уравнения:

$$w_{tt} = (ww_x)_x.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x, t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$(x - y) u_{xx} + (xy - y^2 - x + y) u_{xy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

## Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \\ \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right)_t + \left( u \left( \rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) \right)_x = 0 \\ p = \rho e (\gamma - 1) \end{cases} \quad (7)$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

# Теория

## Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если  $n = 2$ , то

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad (8)$$

Если  $n = 3$ , то

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (9)$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

у которой  $a_{ik} = a_{ki}$ , называется матрицей квадратичной формы  $f(x_1, x_2, x_3)$ , а соответствующий определитель - определителем этой квадратичной формы.

Так как  $\mathbf{A}$  - симметрическая матрица, то корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (11)$$

являются действительными числами.

Пусть  $\mathbf{u}_i$  нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам  $\lambda_i$ . Векторы исходной системы координат -  $\mathbf{e}_i$ .

Матрица

$$\mathbf{B} = [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_j] \quad (12)$$

является матрицей перехода от базиса  $\mathbf{e}_i$  к базису  $\mathbf{u}_i$ . Матрица  $\mathbf{A}$  в новой системе координат

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \quad (13)$$

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \quad (14)$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму  $f(x_1, x_2, x_3)$ , получаем квадратичную форму

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = a_{11}\tilde{x}_1^2 + a_{22}\tilde{x}_2^2 + a_{33}\tilde{x}_3^2 \quad (15)$$

не содержащую членов с произведениями  $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{x}_1\tilde{x}_3$ ,  $\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ .

Принято говорить, что квадратичная форма  $f(x_1, x_2, x_3)$  приведена к каноническому виду с помощью преобразования  $\tilde{\mathbf{A}}$ .



# Экстремум функции нескольких переменных

## Определение экстремума

Пусть функция  $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$  определена в окрестности точки  $P_0$ . Если или  $f(P_0) > f(P)$ , или  $f(P_0) < f(P)$  при  $0 < \rho(P_0, P) < \delta$ , то говорят, что функция  $f(P)$  имеет строгий *экстремум* (соответственно *максимум* или *минимум*) в точке  $P_0$ .

## Необходимое условие экстремума

Дифференцируемая функция  $f(P)$  может достигать экстремума лишь в *стационарной* точке  $P_0$ , т.е. такой, что  $df(P_0) = 0$ . Следовательно, точки экстремума функции  $f(P)$  удовлетворяют системе уравнений  $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

## Достаточное условие экстремума

Функция  $f(P)$  в точке  $P_0$  имеет:

- *максимум*, если  $df(P_0) = 0$ ,  $d^2f(P_0) < 0$ , при  $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$ .
- *минимум*, если  $df(P_0) = 0$ ,  $d^2f(P_0) > 0$ , при  $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$ .

Исследование знака второго дифференциала  $d^2f(P_0)$  может быть проведено путем приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функции  $f(x, y)$  двух независимых переменных  $x$  и  $y$  в стационарной точке  $(x_0, y_0)$  ( $df(x_0, y_0) = 0$ ) при условии, что  $D = AC - B^2$ , где  $A = f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = f_{yy}(x_0, y_0)$  имеем:

1. *минимум*, если  $D > 0$ ,  $A > 0$  ( $C > 0$ );
2. *максимум*, если  $D > 0$ ,  $A < 0$  ( $C < 0$ );
3. *отсутствие экстремума*, если  $D < 0$ .

## Условный экстремум

Задача определения экстремума функции  $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$  при наличии ряда соотношений  $\varphi_i(P)$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $m < n$ ) сводится к нахождению обычного экстремума для *функции Лагранжа*

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P), \quad (16)$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – постоянные множители. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в простейшем случае решается на основании исследования знака второго дифференциала  $d^2L(P_0)$  в стационарной точке  $(P_0)$  функции  $L(P)$  при условии, что переменные  $dx_1, \dots, dx_n$  связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (17)$$

### **Абсолютный экстремум**

Функция  $f(P)$ , дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

# Исследование функций

## Схема элементарного исследования графика функции

1. Область определения;
2. Область значений;
3. Четность, нечетность функции;
4. Характерные точки:
  - (а) точки пересечения графика с осями;
  - (б) предельные значения функции;
  - (с) экстремальные значения;
  - (д) точки перегиба др.
5. Асимптоты;
6. Построение графика.

**Экстремум**  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_i^0 \Rightarrow f''(x_i^0) < 0 - \max, f''(x_i^0) > 0 - \min$ ; если не обращающаяся в нуль первая производная четного порядка, то при  $f^{(2k)}(x_i^0) > 0 - \min$  и  $f^{(2k)}(x_i^0) < 0 - \max$ ; если  $f^{(2k+1)}(x_i^0) \neq 0$ , то перегиб.

**Точка перегиба** Если  $f''(x_i^0) > 0$ , то функция локально выпукла вниз, если  $f''(x_i^0) < 0$ , то локально вверх.

**Асимптоты** Кривая  $y = f(x)$  имеет горизонтальную асимптоту  $y = b$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b, \quad (18)$$

вертикальную асимптоту  $x = a$ , если при  $x \rightarrow a$ , или  $x \rightarrow a + 0$ , или  $x \rightarrow a - 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty, \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty, \quad (21)$$

наклонную асимптоту  $y = kx + b$ , если

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ или } k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (22)$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] \text{ или } b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x]. \quad (23)$$

## Графики неявно заданных функций

Пусть функция  $y = y(x)$  определяется неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ .

### Общие свойства

1. Если  $F(x, y) = F(-x, y)$ , то кривая симметрична относительно **OY**;
2. Если  $F(x, y) = F(x, -y)$ , то кривая симметрична относительно **OX**;
3. Если  $F(x, y) = F(-x, -y)$ , то кривая симметрична относительно  $(0, 0)$ ;
4. Если  $F(x, y) = F(y, x)$ , то кривая симметрична относительно биссектрисы  $y = x$ ;
5. График  $F(x + a, y) = 0$  получается из путем переноса последнего на  $|a|$  по оси **OX**;
6. График  $F(x, y + b) = 0$  получается из путем переноса последнего на  $|b|$  по оси **OY**;
7. График  $F\left(\frac{x}{p}, y\right)$  получается из  $F(x, y)$  путем растяжения в  $p$  раз по оси **OX**;
8. График  $F\left(x, \frac{y}{q}\right)$  получается из  $F(x, y)$  путем растяжения в  $q$  раз по оси **OY**;

### Точки пересечения кривой $F(x, y)$ с осями координат

1. С осью **OX**:

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}; \quad (24)$$

2. С осью **OY**:

$$\begin{cases} F(0, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

### Асимптоты кривой $F(x, y)$

1. Горизонтальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени  $x$ , если этот коэффициент постоянен, то горизонтальных асимптот нет;
2. Вертикальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени  $y$ , если он постоянен, то вертикальных асимптот нет;
3. Наклонная асимптота: заменяем  $y$  в уравнении  $F(x, y)$  на  $y = kx + b$ , затем в уравнении приравниваем два коэффициента при старших степенях  $x$ . Решаем полученную систему и находим  $k$  и  $b$ .

**Особые точки кривой  $F(x, y)$**  Точка кривой  $M(x_0, y_0)$  называется особой, если ее координаты одновременно удовлетворяют трем равенствам:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F_x(x_0, y_0) = 0 \\ F_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Угловым коэффициентом касательной в особой точке (угол входа)

$$k = -\frac{F_x}{F_y} \quad (27)$$

неопределенный.

Предположим, что в особой точке  $M(x_0, y_0)$   $|F_{xx}| + |F_{xy}| + |F_{yy}| \neq 0$  т.е. не все частные производные второго порядка обращаются в нуль. Тогда  $M(x_0, y_0)$  – двойная точка.

Введем характеристику двойной точки.

$$\Delta = F_{xy}^2(x_0, y_0) - F_{xx}(x_0, y_0) F_{yy}(x_0, y_0). \quad (28)$$

Тогда:

1.  $\Delta > 0$  – кривая имеет узловую точку;
2.  $\Delta < 0$  – изолированная точка;
3.  $\Delta = 0$  – тогда точка  $M(x_0, y_0)$  может быть:
  - (а) точкой возврата первого рода;
  - (б) точкой возврата второго рода;
  - (с) изолированной точкой;
  - (д) точкой самокасания.

**Точки экстремума** Для определения точек подозрительных на экстремум нужно воспользоваться представлением для углового коэффициента:

$$k = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (29)$$

Теперь, чтобы найти на кривой точку, где касательная параллельна **OX**, надо решить систему

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (30)$$

Пусть  $(x_1, y_1)$  – ее корни, причем  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , тогда  $M(x_1, y_1)$  для кривой  $F(x_0, y_0) = 0$  будет:

- точкой  $Y_{\max}$ , если  $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) > 0$ ;
- точкой  $Y_{\min}$ , если  $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) < 0$ .

Если требуется найти точки на кривой, где касательная параллельна **OY**, нужно решить систему

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (31)$$

Точка  $M(x_2, y_2)$  на кривой  $F(x, y) = 0$  будет:

- точкой  $X_{\max}$ , если  $F_{yy}(x_2, y_2) F_x(x_2, y_2) > 0$ ;
- точкой  $X_{\min}$ , если  $F_{yy}(x_2, y_2) F_x(x_2, y_2) < 0$ .

**Точки перегиба** Если уравнение  $F(x, y) = 0$  нельзя явно разрешить относительно  $y$ , то найти точки перегиба очень трудно.

Для алгебраической кривой  $F(x, y) = 0$  точки перегиба ее находятся в местах пересечения кривой и ее гессианы:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0 \end{cases}. \quad (32)$$

## Ряд Фурье

Если функция  $f(x)$  задана на сегменте  $[-l, l]$ , где  $l$  – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле (см., к примеру, википедию) указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right), \quad (33)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (34)$$

## Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A(x, y) u_{xx} + 2B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (35)$$

Уравнению соответствует квадратичная форма

$$f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2. \quad (36)$$

Дифференциальное уравнение принадлежит:

1. гиперболическому типу, если  $B^2 - AC > 0$  (квадратичная форма знакопеременная);
2. параболическому типу, если  $B^2 - AC = 0$  (квадратичная форма знакопостоянная)
3. эллиптическому типу, если  $B^2 - AC < 0$  (квадратичная форма знакоопределенная)

Введем вместо  $(x, y)$  новые независимые переменные  $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ , причем якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0 \quad (37)$$

в области  $D$ .

Функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  можно выбрать так, чтобы исходное уравнение приняло наиболее простой вид.

### $B^2 - AC > 0$

В рассматриваемой области исходное уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  можно найти как интегралы следующих дифференциальных уравнений

$$A \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left( B + \sqrt{B^2 - AC} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad (38)$$

$$A \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left( B - \sqrt{B^2 - AC} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0. \quad (39)$$



Для интегрирования этих уравнений необходимо проинтегрировать соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}. \quad (40)$$

Теперь положим

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y). \quad (41)$$

В новых переменных уравнение примет седующий вид:

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (42)$$

## $B^2 - AC = 0$

В рассматриваемой области уравнение принадлежит параболическому типу.

Первая переменная находится из уравнения:

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \xi = \varphi(x, y). \quad (43)$$

Вторую переменную можно найти из условия невырожденности преобразования

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = f(x, y) \neq 0. \quad (44)$$

В новых переменных уравнение примет седующий вид:

$$u_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (45)$$

## $B^2 - AC < 0$

В рассматриваемой области принадлежит эллиптическому типу.

Первая переменная находится из уравнения:

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left( B + i\sqrt{AC - B^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \xi = \varphi(x, y). \quad (46)$$

Вторую полагаем комплексно сопряженной первой

$$\eta = \varphi^*(x, y). \quad (47)$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad (48)$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta. \quad (49)$$

В новых переменных уравнение примет следующий вид:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F_3(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (50)$$

## Список литературы

- [1] Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии
- [2] Н.А. Давдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу
- [3] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1,2.
- [4] Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е издание.
- [5] А.И. Маркушевич. Замечательные кривые М. : Наука, 1975.
- [6] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
- [7] П.К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии.