Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

6 октября 2015 г.

Литература

- Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Том 1,2 (1990).
- Зализняк В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений. - М.: Издательство Юрайт, 2012. - 356 с.
- Формалев В.Ф., Ревезников Д.Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, - 2004. - 400 с.
- Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике (2-е изд.). - М.: Наука, 1978. - 688 с.
- Жуков М.Ю. Квазилинейные гиперболические уравнения: Учебно-методическое пособие. - Ростов-на-Дону, 2008. - 52 с.
- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 656 с.
- Лейбович С., Сибасс А. (ред.) Нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.

и др.

Введение

Многие физические проблемы сводятся к решению **уравнений в частных производных**, поэтому необходимо знать физические особенности решений этих уравнений. Для решения конкретных задач необходимо уметь определять тип дифференциального уравнения в частных производных и знать его основные математические особенности.

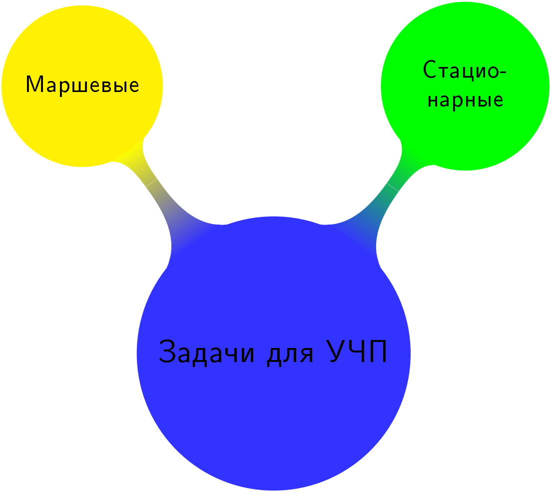
Уравнение в частных производных

Уравнением в частных производных относительно функции $u\left(\mathbf{x}\right)$ называется уравнение вида:

$$f\left(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} u, \ldots\right) = 0.$$

Физическая классификация уравнений

- нестационарные течения невязкой/вязкой жидкости;
- стационарные сверхзвуковые течения невязкого/вязкого газа;
- пограничный слой;
- нестационарное распространение тепла, и т.д.



- стационарные течения невязкой/вязкой жидкости;
- стационарные сверхзвуковые течения невязкого/вязкого газа;
- стационарные задачи теплопроводности, и т.д.

Маршевые задачи

Маршевой или **эволюционной** (или задачей распространения) называется задача, в которой требуется найти решение уравнения в частных производных в **незамкнутой области** при заданных граничных и начальных условиях. Решение таких задач должно быть найдено последовательным движением в маршевом направлении. Такие задачи описываются уравнениями в частных производных **гиперболического** или **параболического** типа.

Стационарные

Задача называется **стационарной**, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границе этой области

Физически стационарная задача описывает установившийся процесс, а математически сводится к решению задачи с граничными условиями (краевой задачи) для уравнения в частных производных.

Иногда стационарные задачи называют **детерминированными**, так как решение в любой внутренней точке области определяется условиями, заданными на ее границе.

Уравнения характерные для маршевых задач

Волновое уравнение:

$$a(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(b(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla} u) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t).$$

Уравнение теплопроводности (диффузии):

$$a(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(b(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla} u) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t).$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{x}), \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения газо-гидродинамики (уравнения Эйлера):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \\
&\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}) = \mathbf{F}, \\
&\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u}\,(\rho E + p)) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Уравнения характерные для маршевых задач

Уравнения Навье-Стокса:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} = 0,\\
&\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F},\\
&\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho E \mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Уравнения характерные для стационарных задач

Волновое уравнение и уравнение диффузии:

$$\nabla \cdot (b(\mathbf{x})\nabla u) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u_0 + \frac{\omega^2}{c^2} u_0 = -\frac{f_0(\mathbf{x})}{c^2}.$$

Уравнения электростатики и магнитостатики:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{x}), \ \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Постановка основных задач для уравнений математической физики

Различают три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных:

- **задача Коши** для нестационарных уравнений: задаются начальные условия, граничные условия отсутствуют;
- **краевая задача** для стационарных уравнений: задаются граничные условия, начальные условия отсутствуют;
- **смешаная задача** для нестационарных уравнений: задаются и начальные, и граничные условия.

Задача Коши

- Для волнового уравнения второго порядка:

$$u(\mathbf{x},0)=f_0(\mathbf{x}),\ \left.\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=f_1(\mathbf{x}).$$

- Для уравнений диффузии и Шредингера:

$$u(\mathbf{x},0)=f_0(\mathbf{x}).$$

- Для системы уравнений первого порядка:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{f}_0(\mathbf{x}).$$

Краевая задача для стационарных уравнений

Для уравнения

$$\nabla \cdot (b(\mathbf{x})\nabla u) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t) = 0,$$

граничное условие будет иметь вид:

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right|_s = g_0.$$

Краевая задача для стационарных уравнений

Часто встречаются следующие типы граничных условий:

- Граничное условие первого рода ($\alpha = 1,\ \beta = 0$):

$$u\big|_S = g_0.$$

- Граничное условие второго рода ($\alpha = 0,\ \beta = 1$):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = g_0.$$

- Граничное условие третьего рода ($\alpha \geq 0,\ \beta = 1$):

$$\left.\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right|_S = g_0.$$

Математическая классификация уравнений

Уравнение в частных производных второго порядка, записанное в общем виде, обычно используют для пояснения математической классификации уравнений в частных производных. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\phi}{\partial x} + e\frac{\partial\phi}{\partial y} + f\phi = g\left(x, y\right).$$

Здесь a, b, c, d, e, f – функции от x, y, т. е. рассматривается лишь линейное уравнение.

Математическая классификация уравнений

Определим теперь **канонические** формы записи уравнений в частных производных различных типов.
Известно, что предыдущее уравнение может быть трех различных типов в зависимости от знака определителя:

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

- гиперболическим: $\triangle > 0$;
- параболическим: $\triangle = 0$;
- эллиптическим: $\triangle < 0$.

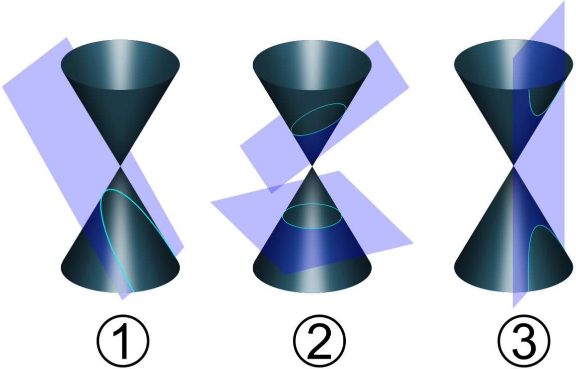
Геометрическая аналогия

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$B^2 - 4AC < 0$$

$$B^2 - 4AC > 0$$



Каноническая форма уравнения

- Каноническая форма уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} = h_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \phi, \xi, \eta\right), \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} = h_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \phi, \xi, \eta\right).$$

- Каноническая форма уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} = h_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \phi, \xi, \eta\right).$$

- Каноническая форма уравнения эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} = h_3\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \phi, \xi, \eta\right).$$

Системы уравнений

При изучении физических процессов обычно приходится решать **системы уравнений в частных производных**, так как редко удается описать сложный физический процесс одним уравнением в частных производных. Но даже в тех случаях, когда физический процесс описывается одним уравнением в частных производных высокого порядка, это уравнение можно заменить системой уравнений первого порядка.

Пример №1

Заменим волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ системой двух уравнений первого порядка. Обозначим

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$w = -a \frac{\partial u}{\partial x},$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Подставляя вместо w и v их выражение через u, видим, что функция u удовлетворяет волновому уравнению.

Пример №2

Запишем уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Это известные уравнения Коши – Римана, широко используемые в теории конформных отображений.

Системы уравнений в частных производных первого порядка

Так как многие задачи математической физики сводятся к решению систем уравнений в частных производных первого порядка, то для корректной постановки задач необходимо уметь определять **тип системы уравнений в частных производных**. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + \mathbf{r} = 0.$$

Условие гиперболичности системы уравнений в частных производных первого порядка

Системы уравнений в частных производных первого порядка называется **гиперболической** по (x, t), если все **собственные значения** матрицы **вещественны и различны**.
То же самое можно сказать о поведении системы уравнений по (y, t) в зависимости от собственных значений матрицы $\mathbf{B}$.

Пример №3

В качестве примера рассмотрим систему уравнений из примера №1, записанную в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = 0,$$

где

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример №3

Собственные значения λ матрицы $\mathbf{A}$ определяются из решения уравнения:

$$\det\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0.$$

В нашем случае:

$$\left\|\begin{matrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm a.$$

Система гиперболическая!

Условие эллиптичности системы уравнений в частных производных первого порядка

Системы уравнений в частных производных первого порядка называется **эллиптической** по (x, t), если все **собственные значения** матрицы **комплексные**.
То же самое можно сказать о поведении системы уравнений по (y, t) в зависимости от собственных значений матрицы $\mathbf{B}$.

Пример №4

В качестве примера рассмотрим систему уравнений Коши – Римана из примера №2, записанную в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = 0,$$

где

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример №4

Собственные значения λ матрицы $\mathbf{A}$ равны:

$$\left\|\begin{matrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Система эллиптическая!

Замечание №1

Система уравнений в частных производных первого порядка может оказаться **эллиптической** по (y, t) и **гиперболической** по (x, t) в зависимости от собственных значений матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$. Это связано с тем, что тип системы уравнений в частных производных первого порядка по (x, t) и по (y, t) определяется независимо.

Замечание №2

Система уравнений, у которой часть собственных чисел вещественные, а часть комплексные, является смешанной и может обладать свойствами, характерными одновременно для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений.
Понять основные свойства решений систем уравнений смешанного типа обычно помогает знание описываемых ими физических процессов.