Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

10 мая 2020 г.

Введение

Законы сохранения первоначально возникают в интегральной форме, так как прямой физический смысл имеет функция множества, а не точки. Однако в классе гладких функций интегральная форма эквивалентна дифференциальным уравнениям поля.

Функции множества

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\int_1^2 x dx = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^3 x dx = \frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2}1^2 = 4$$

Законы сохранения и уравнения поля

$$\left[\int_\Omega \mathbf{s}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n}dSdt + \int_{t_1}^{t_2}\oint_{\partial\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}dt = 0.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},\ \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix},\ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Законы сохранения и уравнения поля

Это уравнение утверждает, что изменение функции множества

$$\Sigma(\Omega, t) = \int_{\Omega} \mathbf{s}_t(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

на интервале времени от t_1 до t_2 уравновешено потоком величины $\mathbf{A}$ через $\partial\Omega$ и действием источников $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ в области Ω в течение того же времени. В основе физики сплошных сред, типичные компоненты функции Π – это масса, импульс, момент импульса, энергия, электрический заряд и т. д.

Законы сохранения и уравнения поля

Законы сохранения дополняются исходными предположениями, которые определяют природу среды. Состояние системы описывается вектором состояния $\mathbf{u}$, так что величины $\mathbf{s}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{A}$ зависят от $\mathbf{u}$ через известные дифференцируемые определяющие уравнения

$$\mathbf{s}$$

Система гиперболических законов сохранения

Системой гиперболических законов сохранения называется система вида:

$$\vec{u}_t + \vec{\nabla} \cdot f\left(\vec{u}\right) = 0,$$

где u – вектор сохраняемых величин, $f\left(\vec{u}\right)$ – тензор потока.
Такая запись уравнений в частных производных называется **консервативной** или **дивергентной**.
Такие системы законов сохранения встречается в нефтяной отрасли, газовой динамике, теории мелкой воды и т.д.

Уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера можно представить в виде системы гиперболических законов сохранения:

$$\vec{u}_t + \vec{\nabla} \cdot f(\vec{u}) = \vec{q},$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{bmatrix}, \; f(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v}\vec{v} + p\mathbf{I} \\ \vec{v}(\rho E + p) \end{bmatrix}, \; \vec{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{F} \\ \vec{F} \cdot \vec{v} \end{bmatrix}.$$

Одна особенность

Одной из особенностей нелинейных дифференциальных уравнений является то, что начальное условие, будучи гладким, может приводить к появлению разрывов в решении. Например ударные волны в газовой динамике.

Характеристики

Стандартным методом решения гиперболических уравнений является **метод характеристик**.

Чтобы ввести понятие характеристики, перепишем скалярный гиперболический закон сохранения в **недивергентной** форме:

$$u_t + f(u)_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Теперь, характеристиками будут линии в пространстве (x, t), которые определяются с помощью уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} = a(u).$$

Характеристики

Видно, что при таком определении u будет константой вдоль характеристики, $u = u_0$:

$$u_t + f(u)_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0.$$

Характеристики

Таким образом, уравнение характеристик будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = a(u_0).$$

Характеристики будут задаваться линиями:

$$x(t) = a(u_0)(t - t_0) + x_0.$$

Значение переменной u_0 переносится вдоль этой линии.

Метод характеристик

Пусть дана задача Коши для скалярного гипреболическоoo уравнения:

$$u_t + f(u)_x = 0, \; u(x) = \eta(x).$$

Решение строится следующим образом: из произвольной точки x_0 на оси x выпускаем характеристику. Коэффициент наклона характеристики, выходящей из точки x_0, есть $a_0 = a(u_0) = a(u(x_0))$, так что уравнение характеристики: $x - x_0 = a_0 t$.

Метод характеристик

Таким образом, чтобы найти u в точке (x, t) следует определить характеристику, которая приходит в эту точку из точки x_0, из которой эта характеристика выходит, и так как u_0 постоянна на характеристике, то решение будет:

$$u(x,t) = \eta(x_0) = \eta(x - a(u)t).$$

Метод характеристик

Такое построение решения не является удовлетворительным, так как характеристики могут пересекаться и по ним в одну и ту же точку будут переноситься различные значения u, так что решение становится многозначным. Чтобы устранить эту многозначность в решение вводят разрывы, на которых должны выполняться дополнительные условия.

Пример

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Бюргерса:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \\ u(x,0) = \sin(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

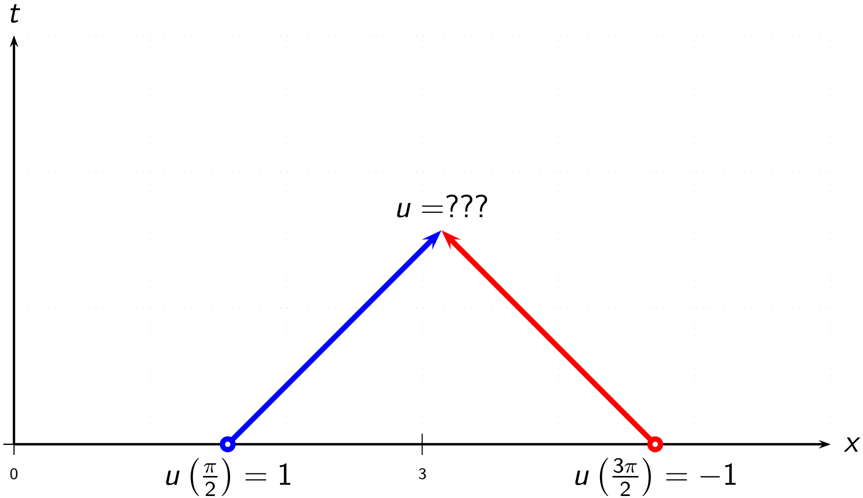
Пример

В данном случае наклон характеристик есть

$$a(u) = u.$$

В начальный момент времени в точке $x = \pi/2$, $u(\pi/2) = \ 1$, тогда как в точке $x = 3\pi/2$, $u(3\pi/2) = -1$.

Нарушение гладкости решения



Соотношения Рэнкина - Гюгонио

Рассмотрим разрыв решения. Пусть траектория движения разрыва суть $x(t)$, его скорость $s = x'(t) = \frac{dx}{dt}$, значение u слева от разрыва обозначим u_L, справа от разрыва – u_R. Интегральную форму закона сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)),$$

можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{x(t)} u(x,t)dx + \int_{x(t)}^b u(x,t)dx\right) = f(u(a,t)) - f(u(b,t)).$$

Соотношения Рэнкина - Гюгонио

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\int_a^{x(t)} u_t dx + u(x(t) - \varepsilon, t)x'(t) +$$

$$+ \int_{x(t)}^{b} u_t dx - u(x(t) + \varepsilon, t)x'(t) =$$

$$= f(u(a,t)) - f(u(b,t)).$$

Соотношения Рэнкина - Гюгонио

Подставив $u_t = -f_x$ и выполняя интегрирование, получаем

$$f(u(t,a)) - f(u(t,x(t)-\varepsilon)) + u(t,x(t)-\varepsilon)x'(t) +$$
$$f(u(t,x(t)+\varepsilon)) - f(u(t,b)) - u(t,x(t)+\varepsilon)x'(t) =$$
$$= f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Окончательно получаем

$$s(u_L - u_R) = f(u_L) - f(u_R).$$

Обобщенное решение

Решение, содержащее разрывы, не является классическим в том смысле, что не имеет непрерывных производных по каждой из переменных. Решения такого типа называются **обобщенными**. Обобщенное решение задачи Коши для нелинейных уравнений не является единственным.

Пример

Сделанное утверждение проиллюстрируем следующим примером. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$
\begin{cases}
u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \\
u(x,0) = \eta(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}
\end{cases}
$$

причем $u_L < u_R$.

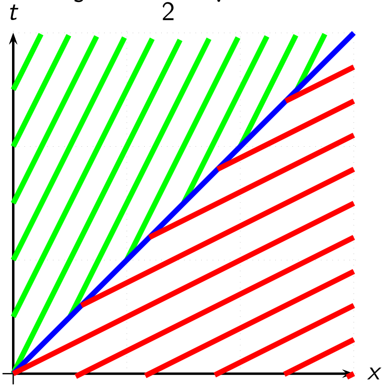
Два решения

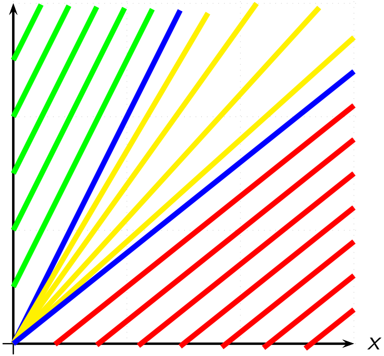
Можно указать два обобщенных решения этой задачи:

$$u(x,t) = \eta(x - st),$$

$$s = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t \\ \frac{x}{t}, & u_L t < x < u_R t \\ u_R, & x > u_R t. \end{cases}$$





Энтропийное условие

Чтобы выделить единственное решение, необходимо наложить на него дополнительные требования: **возрастание (убывание) энтропии на скачке**.

Энтропийное условие указывает на то, что реализуется только то состояние, в котором характеристики входят в разрыв и не могут выходить из разрыва.

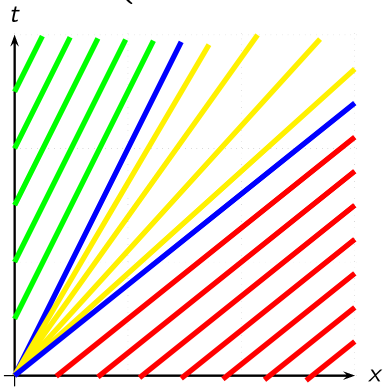
Алгебраически энтропийное условие может быть записано следующим образом:

$$a(u_L) = f'(u_L) \geq \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \geq f'(u_R) = a(u_R).$$

Решение

Таким образом, решением будет функция:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, \ x < u_L t \\ \frac{x}{t}, \ u_L t < x < u_R t \\ u_R, \ x > u_R t. \end{cases}$$



Энтропийное условие. Пояснение

Точка разрыва переменных есть идеализация, описывающая область резких градиентов решения. На самом деле в этой области становятся существенными слагаемые, которыми в областях гладкости можно пренебречь: часто они имеют диффузионный вид. С учетом этого замечания введем малую диффузию:

$$u_t + f(u)_x = (\nu u_x)_x \,.$$

Нас интересует предельное поведение решений этого уравнения при $\nu \to 0$. Этот предел (если он существует) мы обьявляем решением уравнения без вязкости.

Энтропийное условие. Пояснение

Пусть $E(u)$ - произвольная функция, определенная при всех u. Умножим исходное уравнение на $E_u(u)$ и после несложных преобразований получим:

$$E_u u_t + E_u f(u)_u u_x = E_u \left(\nu u_x\right)_x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_t + \frac{\partial}{\partial x}\int E_u f_u du = \left(\nu E_u u_x\right)_x - \nu E_{uu}\left(u_x\right)^2.$$

Энтропийное условие. Пояснение

Интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, получаем

$$-sE|_{-\infty}^{\infty} + (F - \nu E_u u_x)|_{-\infty}^{\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty} \nu E_{uu} (u_x)^2 \, dx,$$

где $F = \int E_u f_u du$ – поток величины E.

Энтропийное условие. Пояснение

Вне разрыва член $\nu E_u u_x \to 0$ при $\nu \to 0$. Кроме того, $(\cdot)|_{-\infty}^{\infty} = -[\cdot]$, так что последнее соотношение примет вид:

$$-s[E] + [F] = -\int_{-\infty}^{\infty} \nu E_{uu} \left(u_x\right)^2 dx.$$

Энтропийное условие. Пояснение

Если функция $E(u)$ такая, что $s_{uu} < 0$, то в пределе получаем неравенство

$$-s[E] + [F] \leq 0.$$

В этом случае $E(u)$ называется **энтропией**. Для скалярного уравнения таких функций существует бесконечно много.

Энтропийное условие. Пояснение

Смысл неравенства $s[E] \geq [F]$ следующий: скорость приращения энтропии $s[E]$ не меньше, чем ее подвод извне $[F]$. На разрывах за счет действия «диссипативных» процессов рост энтропии превышает ее подвод. Это обстоятельство можно записать так

$$E_t + F_x \geq 0.$$

Таким образом, на обобщенное решение уравнения можно наложить дополнительное условие **возрастания энтропии**.
Замечание: если под энтропией понимать функцию, такую что $E_{uu} > 0$, то следует говорить об убывании энтропии на разрыве.