

Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

23 октября 2020 г.



При решении инженерных задач по расчёту установок и физических процессов необходимо использовать **сложные геометрические объекты**, геометрию которых приходится описывать различными типами сеток: треугольниками и четырёхугольниками в двумерном случае; тетраэдрами, призмами, пирамидами и шестигранниками в пространственном случае.

Метод контрольного объема

Для численного решения уравнений в частных производных, в таких случаях, необходимо строить аппроксимации специального вида, существенно отличные от конечных разностей. Один из наиболее наглядных и эффективных способов аппроксимации это **метод контрольных объемов**, который основан на формуле Гаусса – Остроградского:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$

Метод контрольного объема

Важное достоинство **метода контрольных объемов** является выполнение как **локальных** так и **глобального законов сохранения**. Выполнение таких законов чрезвычайно важно, например, в задачах гидромеханики.

Сеточные генераторы

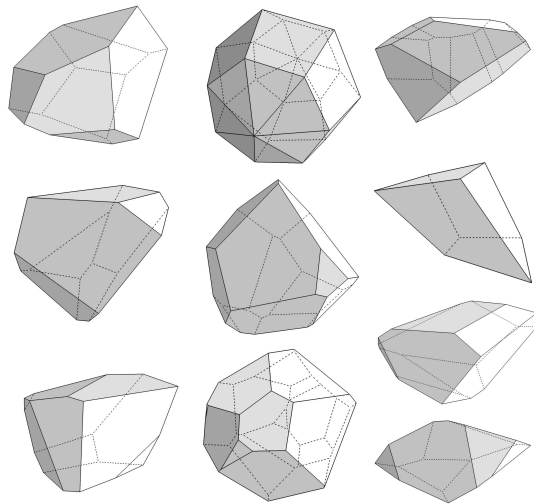
Для создания таких сеток на физических областях используются **сеточные генераторы**, в которые в качестве начальных условий передаются геометрическое описание расчётной области, густота сетки. Подобласти сетки, соответствующие различным физическим свойствам размечаются различными константами.

Численная сетка

Определение

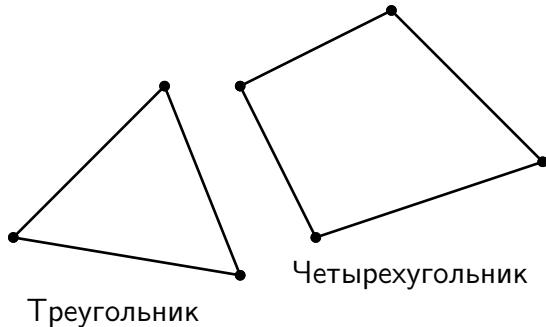
Численная сетка – дискретное представление геометрической области, в которой решается задача.

Сеточные элементы



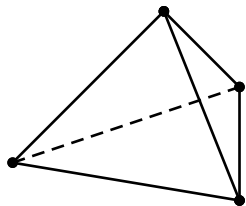
Основные типы сеточных элементов

Двумерные элементы:

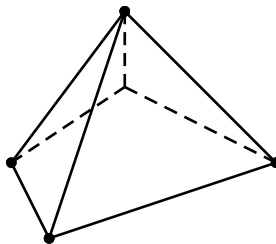


Основные типы сеточных элементов

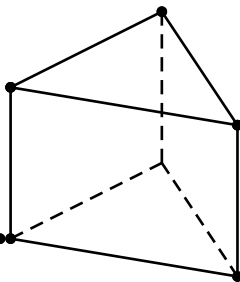
Трёхмерные элементы:



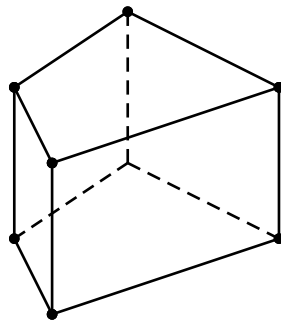
Тетраэдр



Пирамида



Призма

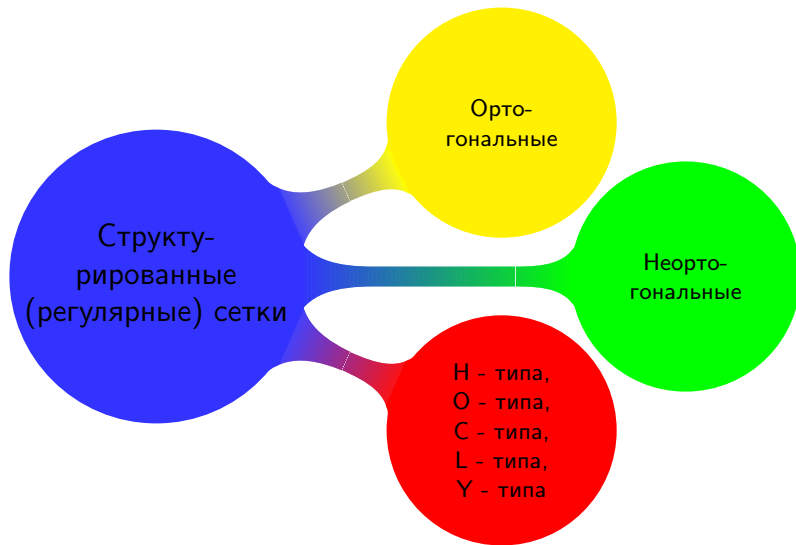


Шестигранник

Общая классификация сеток



Структурированные сетки



Свойства регулярных сеток

- ▶ Структурированные (регулярные) состоят из **семейств линий**, таких что члены одного семейства **не пересекаются** между собой и **пересекают** любую линию из другого семейства **только один раз**.
- ▶ В структурированных сетках **положение любой точки** сетки (или контрольного объема) в области **уникально определяется набором двух** (в $2D$) **или трех** (в $3D$) **индексов**, например, (i, j, k) .
- ▶ Логически эквивалентна декартовой сетке.

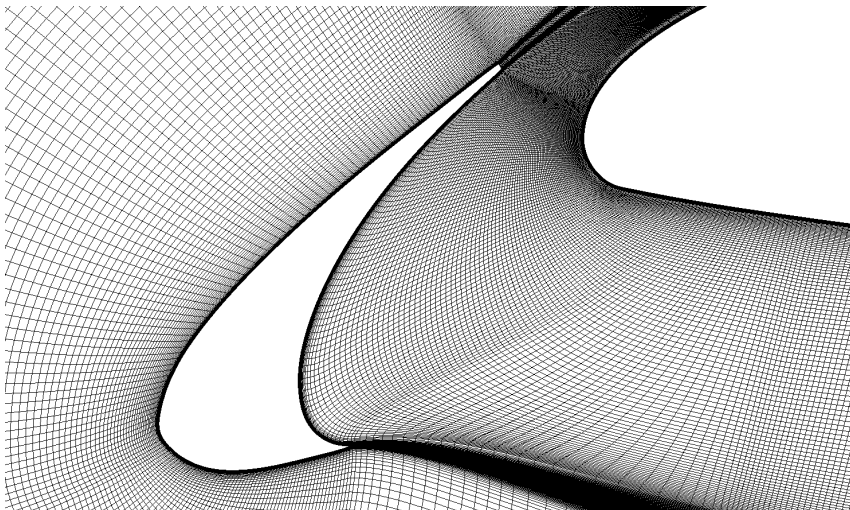
Достоинства регулярных сеток

- + **Простота описания:** один из индексов каждой соседней точки P отличается на 1 от соответствующего индекса точки P .
- + При дискретизации уравнений в ч. п. результирующая **матрица системы алгебраических уравнений** обладает **регулярной структурой**, что может использоваться при разработке метода решения.

Недостатки регулярных сеток

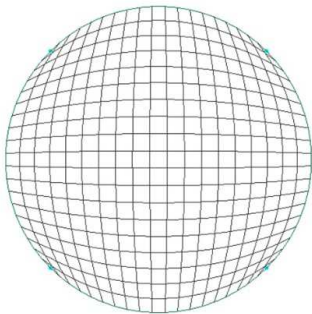
- Применение только в простых геометриях расчетной области.
- Измельчение сетки в одной области влечет слишком мелкую сетку в других областях решения и бесполезную трату ресурсов. Длинные узкие ячейки могут плохо влиять на сходимость.

Пример структурированной сетки

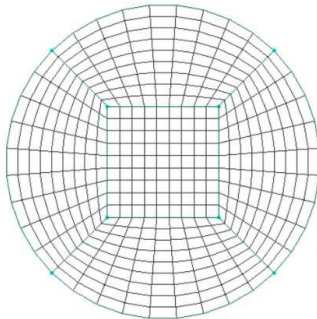


Сетка H - типа

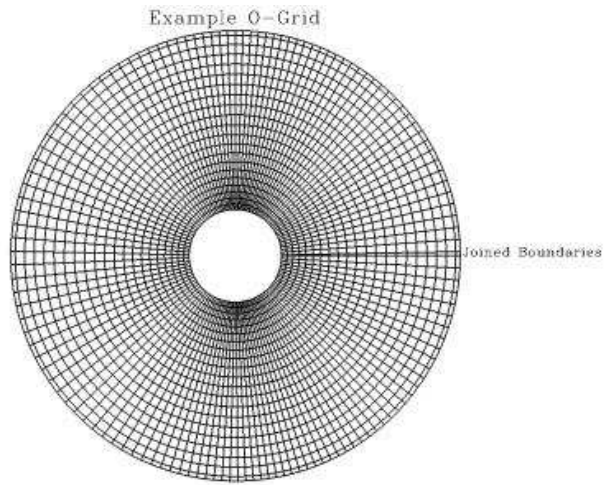
Typical H Grid Method
(1 domain)



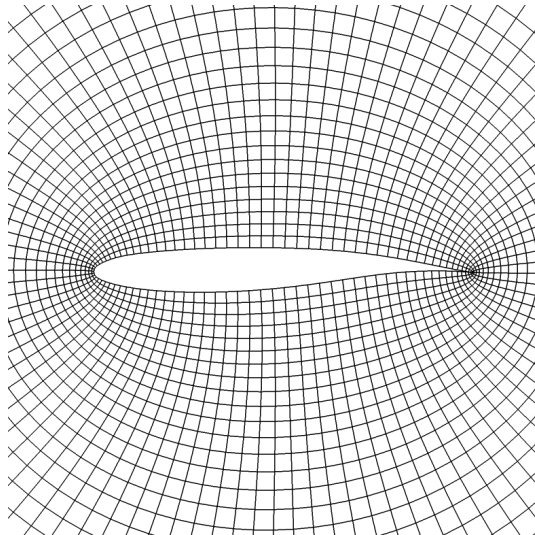
Improved Quality
O-H Grid Method
"Butterfly Topology"
(5 domains)



Сетка O - типа

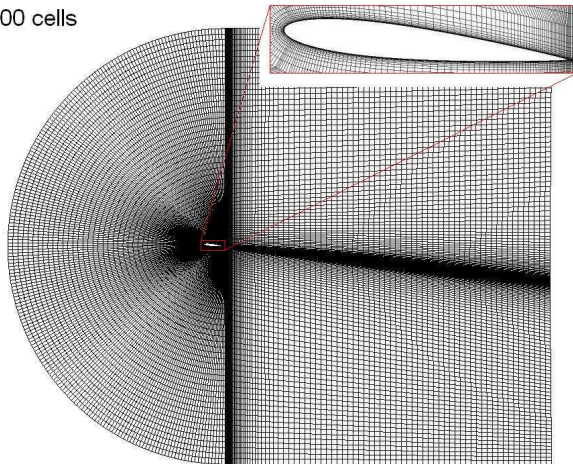


Сетка О - типа

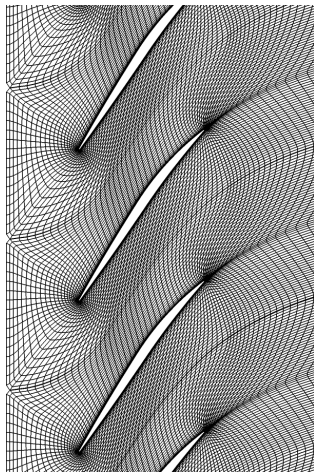
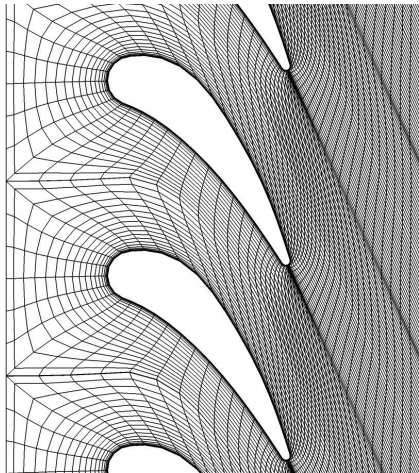


Сетка С - типа

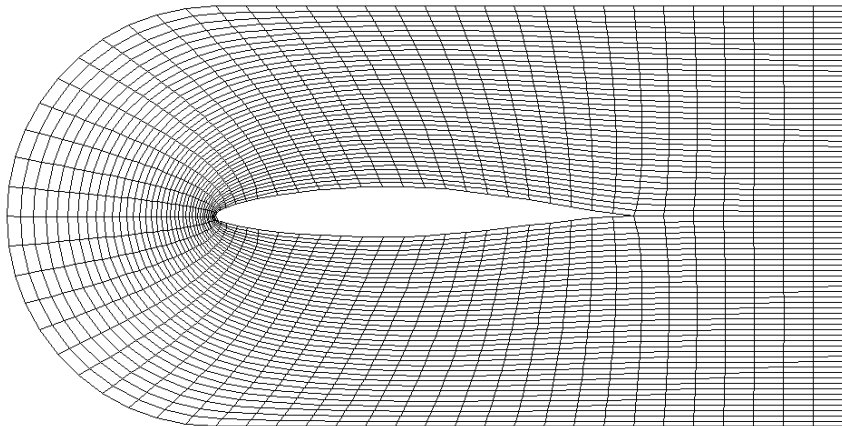
30,000 cells



Сетка С - типа



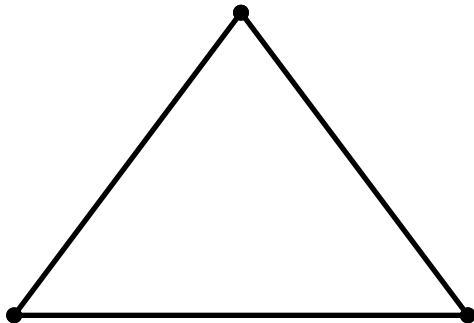
Сетка С - типа



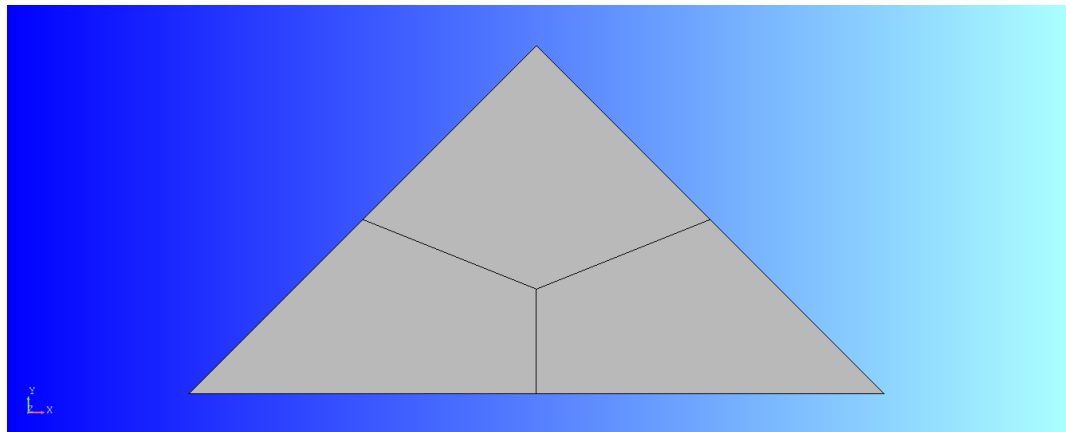
Сетка С - типа



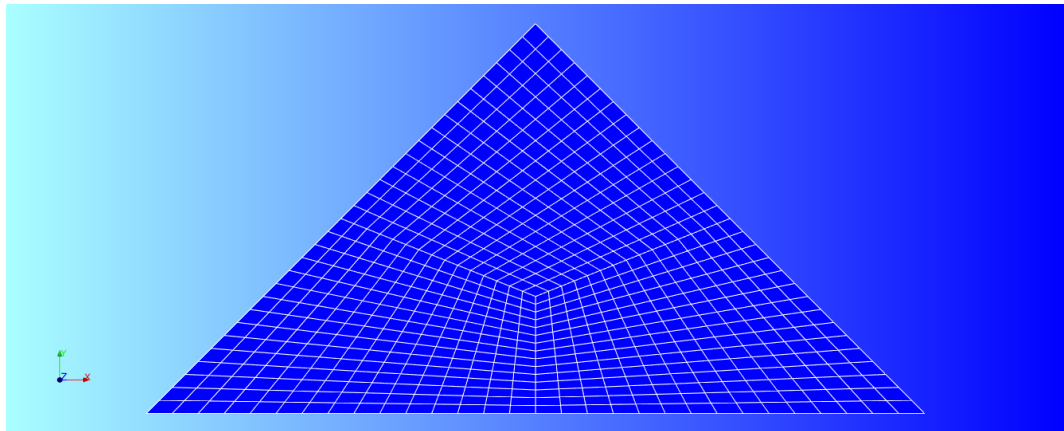
Как построить структурированную сетку для треугольника?



Сетка Y - типа



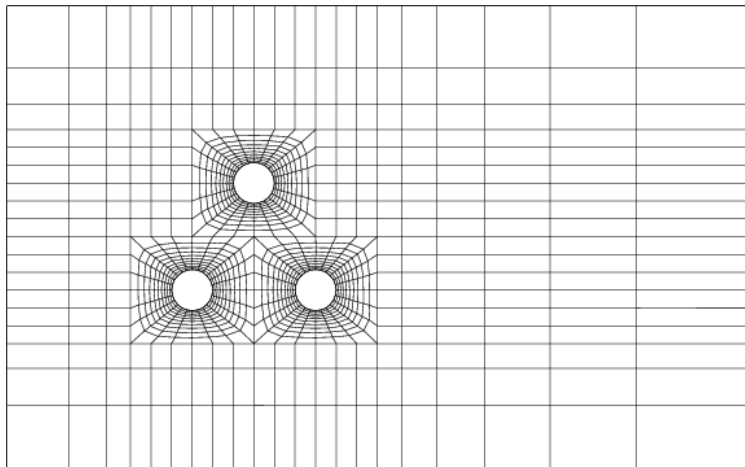
Сетка Y - типа



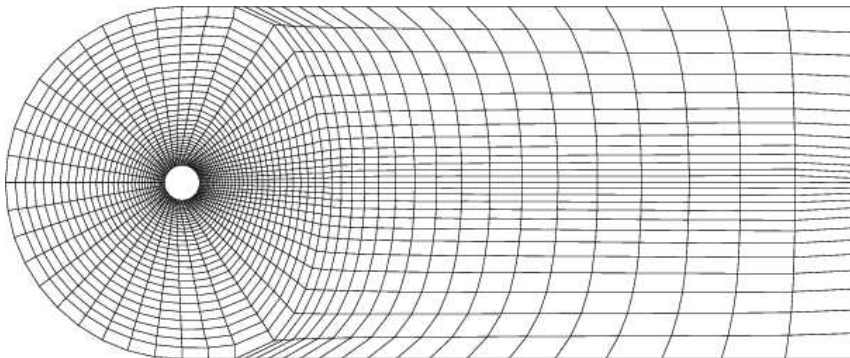
Блочно – структурированные сетки



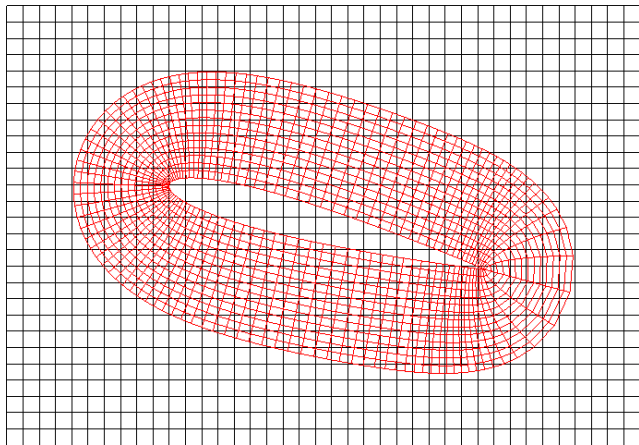
Блочно-структурированные сетки. Н - О тип



Блочно-структурированные сетки. Н - О тип



Композитные сетки



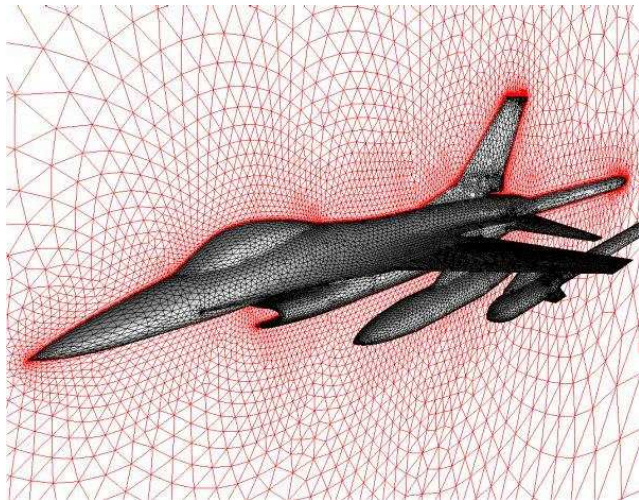
Композитные сетки

Композитные сетки или химеры или погруженные сетки – блочно - структурированные сетки с перекрывающимися блоками.

Достоинство: можно использовать для двигающихся тел.

Недостаток: на границах трудно соблюдать консервативность численных методов.

Неструктурированные сетки



Достоинства и недостатки неструктурированных сеток

- + Подходит для областей произвольных геометрий.
- + Нет ограничений на форму и количество соседних элементов.
- + Возможность локального измельчения.
 - Нерегулярность структуры данных, соответственно более сложные и медленные алгоритмы решения.

Сетка для моделирования подземной гидродинамики

