Численные методы в физике

Губкин А.С.

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень

23 марта 2020 г.

Линейные волны, распространяющиеся без затухания

Рассмотрим далее общие свойства линейных волн, распространяющихся в одномерном пространстве без диссипации. В этом случае независимыми переменными являются t и x. Волновая система может описываться одной или более зависимыми переменными; рассмотрим пока одну переменную и обозначим ее u.
(Иногда употребляют оборот волны с диссипацией и дисперсией – с точки зрения физики это не верно)

Фаза и фазовая скорость

Рассмотрим волновое изменение зависимой переменной $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t) = u_0 \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\right\} = u_0 \cos(\theta).$$

θ – фаза, линейная по независимым переменным

$$\theta = kx - \omega t + \alpha,$$

k – волновое число, ω – круговая частота.
Фаза будет оставаться постоянной для наблюдателя, который движется со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c.$$

Действительно

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\omega + \frac{\omega}{k}k = 0.$$

Дисперсионное соотношение

В общем случае для распространяющихся волн существует функциональное соотношение $f(\omega, k)$, связывающее частоту и волновое число. Обычно это соотношение имеет вид зависимости частоты от волнового числа k:

$$\omega = W(k).$$

Соотношение такого типа обычно называют дисперсионным соотношением или уравнением.

Тогда **фазовая скорость** также зависит от волнового числа:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{W(k)}{k}.$$

В случае, когда фазовая скорость не зависит от волнового числа (или от частоты), говорят, что волна распространяется без дисперсии. В таком случае функция W имеет простой вид:

$$W(k) = ck.$$

Интеграл Фурье

Пусть задано начальное распределение $u(x,0)$. Если это начальное распределение не гармонично, то его можно представить с помощью интеграла Фурье как суперпозицию синусоидальных функций.

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(p,0)\, e^{ipx} dp,$$

$$\bar{u}(p,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x,0)\, e^{-ipx} dx.$$

Дисперсия

Поскольку система предполагается линейной, каждая из гармонических компонент изменяется как $e^{i\theta}$ с частотой $W(k) = ck$. Полное решение в любой последующий момент времени t может быть получено путем обратного преобразования Фурье.
В бездисперсионном случае этот процесс вновь приводит к начальному распределению, смещенному на расстояние ct. То есть, решение можно выразить в виде

$$u(x,t) = u(x - ct, 0) .$$

Если же волна распространяется с дисперсией, то рассуждения теряют силу. В этом случае каждая компонента Фурье распространяется со своей скоростью.

Групповая скорость

Производная от правой части дисперсионного соотношения имеет размерность скорости

$$C\left(k\right) = \frac{dW}{dk}.$$

Это величина называется **групповой скорость**.

Интерпретация групповой скорости

Выберем некоторое значение k и соответствующее ему значение $\omega = W(k)$ как исходные величины и допустим, что кволновому числу добавляется малое возмущение $\pm\triangle k$. Соответствующее возмущенное значение частоты может быть аппроксимировано первыми двумя членами ряда Тейлора:

$$\omega + \triangle\omega = W(k + \triangle k) \approx \omega + C\triangle k.$$

$$\omega - \triangle\omega = W(k - \triangle k) \approx \omega - C\triangle k.$$

Соответствующие фазы

$$\theta_+ = (k + \triangle k)\,x - (\omega + \triangle\omega)\,t = \theta + \triangle k\,(x - Ct)\,.$$

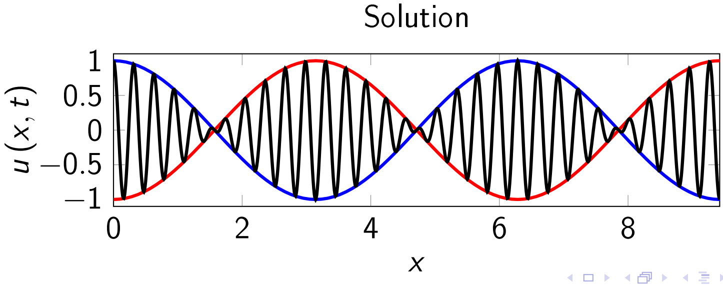
$$\theta_- = (k - \triangle k)\,x - (\omega - \triangle\omega)\,t = \theta - \triangle k\,(x - Ct)\,.$$

Интерпретация групповой скорости

Решение, соответствующее этим двум фазам

$$u(x,t) = u_+(x,t) + u_-(x,t) = u_0\left(\cos(\theta_+) + \cos(\theta_-)\right) =$$
$$= u_0\left(\cos(\theta + \triangle k(x - Ct)) + \cos(\theta - \triangle k(x - Ct))\right) =$$
$$= 2u_0 \cos(\theta)\cos(\triangle k(x - Ct)).$$

Его можно рассматривать как волну с исходными волновым числом и частотой, модулированную по амплитуде множителем $\cos(\triangle k(x - Ct))$.



Интерпретация групповой скорости

Диссипация и дисперсия численного решения

Определим диссипацию и диспесиию для дифференциального волнового уравнения. Возьмем решение в виде:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(i(\omega t - kx)\right),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.
Подставив это решение в волновое уравнение, получим зависимость $\omega = \omega(k)$, которая называется **дисперсионным соотношением**.
Если ω – комплексное число, волна затухает!

$$\exp\left((-Im\omega)t\right) = \exp\left(-\gamma t\right).$$

Фазовая и групповая скорость

Фазовая скорость – это скорость, с которой движется фаза или отдельной гармоники:

$$\frac{Re\omega}{k} = c_f.$$

Групповая скорость – это скорость волнового пакета, состоящего из гармонических волн с близкими волновыми числами (Передача энергии осуществляется с групповой скоростью!):

$$\frac{d}{dk}Re\omega = c_g.$$

Дисперсия волн

Если фазовая/групповая скорость зависит от k, то гармоники с разными волновыми числами распространяются с разными скоростями. Такое явление называется **дисперсией**.

Пример №1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 = -c^2 k^2 \Rightarrow \omega = ck \Rightarrow \frac{Re\omega}{k} = \frac{d}{dk} Re\omega = c.$$

Точное решение – волна без дисперсии и затухания.

Пример №2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow i\omega - ick = -\mu k^2 \Rightarrow \omega(k) = ck + i\mu k^2.$$

Точное решение – затухающая недиспергирующая волна.