Вариант №1

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = 2x - y, \qquad D\{y = x,\ y = x^2,\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` `(из пакета` *`implicit_plot`*`)`.

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = x + \frac{1}{3x - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^3 + y^3 = 3axy,\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` `(из пакета` *`implicit_plot`*`)`.

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1); \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = -1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10–и членов разложения.

$$f(x) = x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса:

$$w_t + ww_x = aw_{xx}.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0,\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p\right) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

С уравнением состояния

$$p = \rho e \left(\gamma - 1\right). \tag{2}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Задание №12

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений теории мелкой воды:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{S}, \tag{3}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix},\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Функция $b\left(x, y\right)$ описывает профиль дна.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Вариант №2

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x - y, \qquad D\{y = 2x - 1,\; y = 2 - x^2,\; x = -3,\; x = 1\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$(x - a)^2 \left(x^2 + y^2\right) = b^2x^2,\; a, b = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = e^x; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейнго уравнения теплопроводности:

$$w_t = (ww_x)_x \, .$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0, \; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) \end{bmatrix}, \; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p\right) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

С уравнением состояния

$$p = \rho e \left(\gamma - 1\right). \tag{6}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Задание №12

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений теории мелкой воды:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{S}, \tag{7}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix},\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Функция $b\left(x, y\right)$ описывает профиль дна.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Вариант №3

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -25. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 + y^2 - z^2\right), \; a = const.$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = x + 2y, \qquad D\{y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравния. Построить график частного решения.

$$xy' - y = x\tan\left(\frac{y}{x}\right); \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейнго уравнения теплопроводности:

$$w_t + aw_x = (ww_x)_x\,.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0,\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p\right) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

С уравнением состояния

$$p = \rho e\left(\gamma - 1\right). \tag{10}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Задание №12

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений теории мелкой воды:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{S}, \tag{11}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Функция $b\left(x, y\right)$ описывает профиль дна.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Вариант №4

Подготовил: *Губкин А.С.*
E-mail: *alexshtil@gmail.com*

Задание №1

Решить СЛАУ $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Найти собственные числа матрицы A.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -18. \end{cases}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `solve()`, `invert()`, `transpose()`, `.`, `^^`, `eigenvalues()` (из пакета *eigen*). Уметь задавать переменные и функции в **Maxima**. Уметь работать с массивами.

Задание №2

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `matrix()`, `ratcoeff()`, `.`, `eigenvalues()`, `uniteigenvectors()` (из пакета *eigen*), `transpose()`, `fullrats` `subst()`.

Задание №3

Найти точки условного экстремума следующей функции:

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ если } x^2 + y^2 = 1; \ A, B, C = const$$

Построить график.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `define()`, `diff()`, `solve()`, `rhs()`, `subst()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `draw3d()` (из пакета *draw*).

Задание №4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и построить область D.

$$f(x,y) = y\ln x, \qquad D\{y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 2\}.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `implicit_plot()`.

Задание №5

Исследовать фунцию:

$$y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`.

Задание №6

Исследовать неявно заданную фунцию:

$$x^5 + y^5 = axy^2,\ a = const > 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `limit()`, `diff()`, `solve()`, `subst()`, `denom()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wximplicit_plot()` (из пакета *implicit_plot*).

Задание №7

Найти общее и частное решение обыкновенного дифференциального уравнения. Построить график частного решения.

$$y'' - y'e^y = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `diff()`, `ode2()`, `ic1()`, `ic2()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `wxplot2d()`, `implicit_plot()`.

Задание №8

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте. Привести первые 10 членов разложения. Построить графики исходной функции и первых 10-и членов разложения.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi; \quad [-\pi, \pi].$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `integrate()`, `sum()`, `if`, `wxplot2d()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`.

Задание №9

Найти решение типа бегущей волны нелинейного волнового уравнения:

$$w_{tt} = (ww_x)_x\,.$$

Решениями типа бегущей волны называются решения вида:

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t.$$

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой этого выражения в исходное уравнение.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №10

Привести к каноническому виду уравнение:

$$(x - y)\, u_{xx} + \left(xy - y^2 - x + y\right) u_{xy} = 0.$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`, `ode2()`.

Задание №11

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений Эйлера:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0,\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2} + p\right) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

С уравнением состояния

$$p = \rho e\,(\gamma - 1)\,. \tag{14}$$

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Задание №12

Найти собственные числа и собственные векторы уравнений теории мелкой воды:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{S}, \tag{15}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix},\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Функция $b\left(x, y\right)$ описывает профиль дна.

Необходимы знания по функциям **Maxima**: `depends()`, `diff()`, `ratsimp()`, `fullratsimp()`, `subst()`.

Теория

Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если $n = 2$, то

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \tag{17}$$

Если $n = 3$, то

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{18}$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

у которой $a_{ik} = a_{ki}$, называется матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий определитель - определителем этой квадратичной формы.

Так как $\mathbf{A}$ - симметрическая матрица, то корни λ_i характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{20}$$

являются действительными числами.

Пусть $\mathbf{u}_i$ нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам λ_i. Векторы исходной системы координат - $\mathbf{e}_i$.

Матрица

$$\mathbf{B} = [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_j] \tag{21}$$

является матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{u}_i$. Матрица $\mathbf{A}$ в новой системе координат

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T \tag{22}$$

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \tag{23}$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$, получаем квадратичную форму

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = a_{11}\tilde{x}_1^2 + a_{22}\tilde{x}_2^2 + a_{33}\tilde{x}_2^2 \tag{24}$$

не содержащую членов с произведениями $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_2\tilde{x}_3$.

Принято говорить, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью преобразования $\tilde{\mathbf{A}}$.

Экстремум функции нескольких переменных

Определение экстремума

Пусть функция $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки P_0. Если или $f(P_0) > f(P)$, или $f(P_0) < f(P)$ при $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, то говорят, что функция $f(P)$ имеет строгий *экстремум* (соответственно *максимум* или *минимум*) в точке P_0.

Необходимое условие экстремума

Дифференцируемая функция $f(P)$ может достигать экстремума лишь в *стационарной* точке P_0, т.е. такой, что $df(P_0) = 0$. Следовательно, точки экстремума функции $f(P)$ удовлетворяют системе уравнений $f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$.

Достаточное условие экстремума

Функция $f(P)$ в точке P_0 имеет:

- *максимум*, если $df(P_0)\,,\ d^2f(P_0) < 0$, при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.
- *минимум*, если $df(P_0)\,,\ d^2f(P_0) > 0$, при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

Исследование знака второго дифференциала $d^2f(P_0)$ может быть проведено путем приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y в стационарной точке $(x_0, y_0)\,(df(x_0, y_0) = 0)$ при условии, что $D = AC - B^2$, где $A = f_{xx}(x_0, y_0)\,, B = f_{xy}(x_0, y_0)\,, C = f_{yy}(x_0, y_0)$ имеем:

1. *минимум*, если $D > 0,\ A > 0\ (C > 0)$;
2. *максимум*, если $D > 0,\ A < 0\ (C < 0)$;
3. *отсутствие экстремума*, если $D < 0$.

Условный экстремум

Задача определния экстремума функции $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ при наличии ряда соотношений $\varphi_i(P)\ \ (i = 1, \ldots, m;\ m < n)$ сводится к нахождению обычного экстремума для *функции Лагранжа*

$$L\left(P\right)=f\left(P\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i\left(P\right), \tag{25}$$

где λ_i $(i=1,\ldots,m)$ – постоянные множители. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в простейшем случае решается на основании исследования знака второго дифференциала $d^2L\left(P_0\right)$ в стационарной точке (P_0) функции $L\left(P\right)$ при условии, что переменные $dx_1,\ldots,dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0\ \left(i=1,\ldots,m\right). \tag{26}$$

Абсоютный экстремум

Функция $f\left(P\right)$, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Исследование функций

Схема элементарного исследования графика функции

1. Область определения;
2. Область значений;
3. Четность, нечетность функции;
4. Характерные точки:
   (a) точки пересечения графика с осями;
   (b) предельные значения функции;
   (c) экстремальные значения;
   (d) точки перегиба др.
5. Асимптоты;
6. Построение графика.

Экстремум $f'(x) = 0 \Rightarrow x_i^0 \Rightarrow f''(x_i^0) < 0 - \max$, $f''(x_i^0) > 0 - \min$; если не обращающаяся в нуль первая производная четного порядка, то при $f^{(2k)}(x_i^0) > 0 - \min$ и $f^{(2k)}(x_i^0) < 0 - \max$; если $f^{(2k+1)}(x_i^0) \neq 0$, то перегиб.

Точка перегиба Если $f''(x_i^0) > 0$, то функция локально выпукла вниз, если $f''(x_i^0) < 0$, то локально вверх.

Асимптоты Кривая $y = f\,(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\,(x) = b, \tag{27}$$

вертикальную асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, или $x \to a + 0$, или $x \to a - 0$

$$\lim_{x\to a} f\,(x) = \pm\infty, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to a+0} f\,(x) = \pm\infty, \tag{29}$$

$$\lim_{x\to a-0} f\,(x)) = \pm\infty, \tag{30}$$

наклонную асимптоту $y = kx + b$, если

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ или } k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{31}$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] \text{ или } b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x]\,. \tag{32}$$

Графики неявно заданных функций

Пусть функция $y = y(x)$ определяется неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Общие свойства

1. Если $F(x, y) = F(-x, y)$, то кривая симметрична относительно **OY**;
2. Если $F(x, y) = F(x, -y)$, то кривая симметрична относительно **OX**;
3. Если $F(x, y) = F(-x, -y)$, то кривая симметрична относительно $(0, 0)$;
4. Если $F(x, y) = F(y, x)$, то кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$;
5. График $F(x + a, y) = 0$ получается из путем переноса последнего на $|a|$ по оси **OX**;
6. График $F(x, y + b) = 0$ получается из путем переноса последнего на $|b|$ по оси **OY**;
7. График $F\left(\frac{x}{p}, y\right)$ получается из $F(x, y)$ путем растяжения в p раз по оси **OX**;
8. График $F\left(x, \frac{y}{q}\right)$ получается из $F(x, y)$ путем растяжения в q раз по оси **OY**;

Точки пересечения кривой $F(x, y)$ с осями координат

1. С осью **OX**:

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}; \tag{33}$$

2. С осью **OY**:

$$\begin{cases} F(0, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{34}$$

Асимптоты кривой $F(x, y)$

1. Горизонтальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x, если этот коэффициент постоянен, то горизонтальных асимптот нет;

2. Вертикальная асимптота: приравниваем нулю коэффициент при старшей степени y, если он постоянен, то вертикальных асимптот нет;

3. Наклонная асимптота: заменяем y в уравнении $F(x, y)$ на $y = kx + b$, затем в уравнении приравниваем два коэффициента при старших степенях x. Решаем полученную систему и находим k и b.

Особые точки кривой $F(x, y)$ Точка кривой $M(x_0, y_0)$ называется особой, если ее координаты одновременно удовлетворяют трем равенствам:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F_x(x_0, y_0) = 0 \, . \\ F_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Угловой коэффициент касательной в особой точке (угол входа)

$$k = -\frac{F_x}{F_y} \tag{36}$$

неопределенный.

Предположим, что в особой точке $M(x_0, y_0)$ $|F_{xx}| + |F_{xy}| + |F_{yy}| \neq 0$ т.е. не все частные производные второго порядка обращаются в нуль. Тогда $M(x_0, y_0)$ – двойная точка.

Введем характеристику двойной точки.

$$\triangle = F_{xy}^2(x_0, y_0) - F_{xx}(x_0, y_0) F_{yy}(x_0, y_0) \, . \tag{37}$$

Тогда:

1. $\triangle > 0$ – кривая имеет узловую точку;

2. $\triangle < 0$ – изолированная точка;

3. $\triangle = 0$ – тогда точка $M(x_0, y_0)$ может быть:

   (a) точкой возврата первого рода;
   (b) точкой возврата второго рода;
   (c) изолированной точкой;
   (d) точкой самокасания.

Точки экстремума Для определения точек подозрительных на экстремум нужно воспользоваться представлением для углового коэффициента:

$$k = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{38}$$

Теперь, чтобы найти на кривой точку, где касательная параллельна **OX**, надо решить систему

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_x(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{39}$$

Пусть (x_1, y_1) – ее корни, причем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $M(x_1, y_1)$ для кривой $F(x_0, y_0) = 0$ будет:

- точкой $Y_{\max}$, если $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) > 0$;
- точкой $Y_{\min}$, если $F_{xx}(x_1, y_1) F_y(x_1, y_1) < 0$.

Если требуется найти точки на кривой, где касательная параллельна **OY**, нужно решить систему

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{40}$$

Точка $M(x_2, y_2)$ на кривой $F(x, y) = 0$ будет:

- точкой $X_{\max}$, если $F_{yy}(x_2, y_2) F_y(x_2, y_2) > 0$;
- точкой $X_{\min}$, если $F_{yy}(x_2, y_2) F_y(x_2, y_2) < 0$.

Точки перегиба Если уравнение $F(x, y) = 0$ нельзя явно разрешить относительно y, то найти точки перегиба очень трудно.

Для алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ точки перегиба ее находятся в местах пересечения кривой и ее гессианы:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2 = 0 \end{cases}. \tag{41}$$

Ряд Фурье

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле (см., к примеру, википедию) указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l} \right), \tag{42}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\ a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx,\ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{43}$$

Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A\left(x,y\right)u_{xx}+2B\left(x,y\right)u_{xy}+C\left(x,y\right)u_{yy}+F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0. \tag{44}$$

Уравнению соответствует квадратичная форма

$$f\left(t_1,t_2\right)=At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2. \tag{45}$$

Дифференциальное уравнение принадлежит:

1. гиперболическому типу, если $B^2-AC>0$ (квадратичная форма знакопеременная);
2. параболическому типу, если $B^2-AC=0$ (квадратичная форма знакопостоянная)
3. эллиптическому типу, если $B^2-AC<0$ (квадратичная форма знакоопределенная)

Введем вместо (x,y) новые независимые переменные $(\xi\left(x,y\right),\eta\left(x,y\right))$, причем якобиан

$$\frac{D\left(\xi,\eta\right)}{D\left(x,y\right)}\neq 0 \tag{46}$$

в области D.

Функции $\xi\left(x,y\right)$ и $\eta\left(x,y\right)$ можно выбрать так, чтобы исходное уравнение приняло наиболее простой вид.

$\mathbf{B^2-AC>0}$

В рассматриваемой области исходное уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Функции $\xi\left(x,y\right)$ и $\eta\left(x,y\right)$ можно найти как интегралы следующих дифференциальных уравнений

$$A\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0, \tag{47}$$

$$A\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0. \tag{48}$$

Для интегрирования этих уравнений необходимо проинтегрировать соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \ \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}. \tag{49}$$

Теперь положим

$$\xi = \varphi_1 \left(x, y\right), \eta = \varphi_2 \left(x, y\right). \tag{50}$$

В новыйх переменных уравнение примет седующий вид:

$$u_{\xi\eta} = F_1 \left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right). \tag{51}$$

$\mathbf{B^2 - AC = 0}$

В рассматриваемой области уравнение принадлежит параболическому типу.

Первая переменная находится из уравнения:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \xi = \varphi \left(x, y\right). \tag{52}$$

Вторую переменную можно найти из условия невырожденности преобразования

$$\frac{D\left(\xi, \eta\right)}{D\left(x, y\right)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = f\left(x, y\right) \neq 0. \tag{53}$$

В новыйх переменных уравнение примет седующий вид:

$$u_{\eta\eta} = F_2 \left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right). \tag{54}$$

$\mathbf{B^2 - AC < 0}$

В рассматриваемой области принадлежит эллиптическому типу.

Первая переменная находится из уравнения:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(B + i\sqrt{AC - B^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \xi = \varphi \left(x, y\right). \tag{55}$$

Вторую полагаем комплесно сопряженной первой

$$\eta = \varphi^* \left(x, y\right). \tag{56}$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введемновые переменные α и β, равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2},\ \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \tag{57}$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta,\ \eta = \alpha - i\beta. \tag{58}$$

В новыйх переменных уравнение примет седующий вид:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F_3\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right). \tag{59}$$

Гиперболические системы уравнений

Пусть дана система уравнений в частных производных

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{c},\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nm} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \tag{60}$$

которую, зная определяющие уравнения $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$, можно записать в следующей форме

$$\tilde{A}\mathbf{u}_t + \sum_{j=1}^{m} \tilde{B}_j \mathbf{u}_{x_j} = \mathbf{c}, \tag{61}$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}_j$ - квадратные матрицы размерности $(n \times n)$.

Если матрица $\tilde{A}$ не сингулярна, то систему можно записать в следующей форме

$$\mathbf{u}_t + \sum_{j=1}^{m} \tilde{A}_j \mathbf{u}_{x_j} = \mathbf{b}, \tag{62}$$

Система (62) называется гиперболической в точке $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ если задача на собственные числа и на собственные векторы для матрицы $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{A}_j$

$$(\mathbf{P} - \lambda_k \mathbf{I}) \cdot \mathbf{r}^k = 0 \tag{63}$$

имеет решение, причем все собственные числа λ_k вещественны и из правых собственных векторов $\mathbf{r}^k$ можно составить базис в $\mathbf{E}^n(\mathbf{u})$.

Список литературы

[1] Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии

[2] Н.А. Давдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу

[3] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1,2.

[4] Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13–е издание.

[5] А.И. Маркушевич. Замечательные кривые М. : Наука, 1975.

[6] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления.

[7] П.К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии.