Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Теоретическая постановка задачи для задания по алгоритму имитации отжига

Выполнил:
Студент 421 группы
Гудис Александр Вячеславович

Москва, 2025

Прикладная задача

Дано N независимых работ, для каждой работы задано время выполнения. Требуется построить расписание выполнения работ без прерываний на M процессорах. На расписании должно достигаться минимальное значение *критерия K1*.

Критерий K1: разбалансированность расписания.

Формальная постановка задачи

Дано:

- N – количество работ.
- M – количество процессоров.
- $P = \{p_i\}$ – множество работ, где $p_i = \{N_i, W_i\}$ и $i = \overline{1, N}$. N_i – номер i-й работы, W_i – её время выполнения.
- $PU = \{m_j\}$ – множество процессоров, где m_j – j-й процессор, и $j = \overline{1, M}$.

Расписание

Расписанием является булева матрица $HP \in B^{N \times M}$, в которой $hm_{ij} \in \{0, 1\}$, где $i \in \overline{1, N}$, а $j \in \overline{1, M}$. Значение $hm_{ij} = 1$ означает, что работа с номером i выполняется на процессоре с номером j, а $hm_{ij} = 0$ — что работа с номером i не выполняется на процессоре с номером j.

Требуется

Построить расписание $HP^{N \times M}$, при котором будет минимизирован критерий. При этом все задания будут выполнены на множестве процессоров PU без прерываний, с учётом ограниченных ресурсов, и не будет пересечений в использовании процессоров, т.е.

$$\forall i \in \overline{1, N} \ \exists! \ j \in \overline{1, M} : hm_{ij} = 1$$

что эквивалентно системе условий:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} hp_{ij} = N, \\ \forall i \in \overline{1, N} \quad \sum_{j=1}^{M} hm_{ij} = 1. \end{cases}$$

Минимизируемый критерий:
Критерий разбалансированности расписания:

$$K_1 = T_{\max} - T_{\min},$$

где

$$T_{\max} = \max_{j=1..M} T_j, \quad T_{\min} = \min_{j=1..M} T_j.$$

Требуется:
Найти такое корректное расписание S^*, что

$$S^* = \arg\min_{S \in \Omega} K_1(S),$$

где Ω — множество всех корректных расписаний.

Исследование последовательного алгоритма

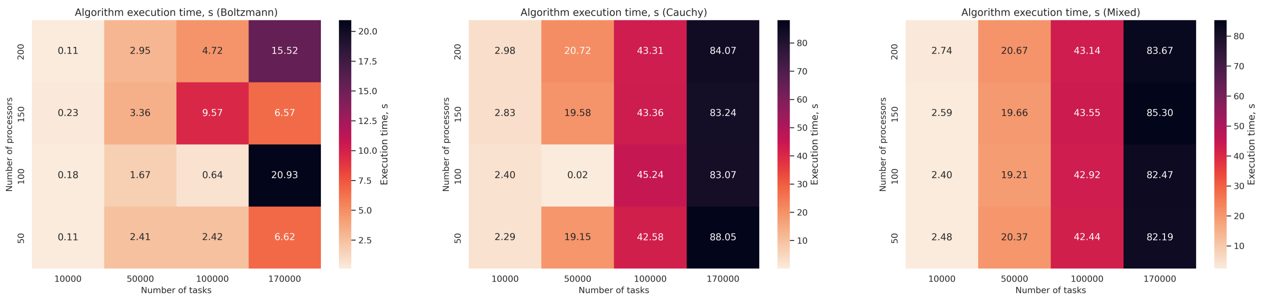


Рис. 1: Время выполнения алгоритмов

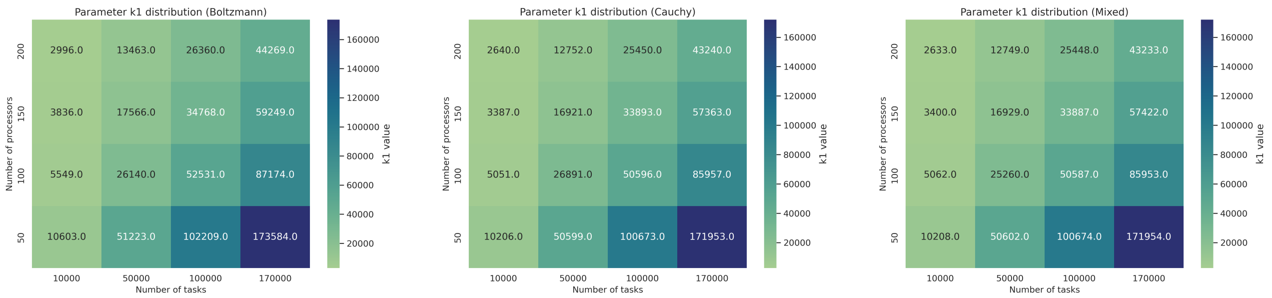


Рис. 2: Значения критерия для алгоритмов

Анализ времени выполнения

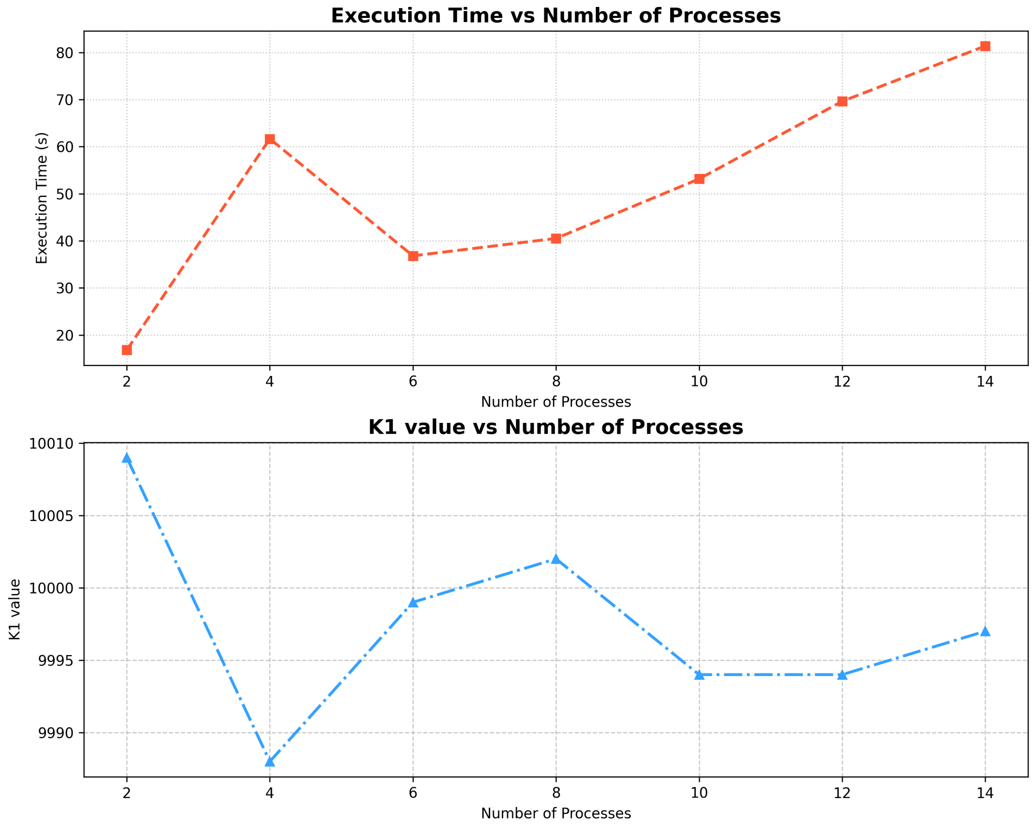
- **Превышение порога 1 минуты:**
  - Конфигурации с 170 000 задач (все варианты процессоров)
  - 100 000 задач с 150–200 процессорами (законы Коши и смешанный)
- **Максимальное время:** 88.05 с (170 000 задач, 50 процессоров, закон Коши)
- **Ранжирование законов охлаждения по времени:**
  1. Закон Коши (наибольшее время)
  2. Смешанный закон
  3. Закон Больцмана (в 4–5 раз быстрее)

Анализ качества решений (критерий K1)

- **Лучшее качество:** Законы Коши и смешанный показывают сопоставимые результаты
- **Преимущество:** На 1–3% лучше по сравнению с законом Больцмана
- **Пример:** Для 170 000 задач на 200 процессорах:
  - Коши/смешанный: $K1 \approx 43\,240$
  - Больцман: $K1 \approx 44\,269$ (+2.4%)

Вывод по результатам исследования последовательного алгоритма: Закон Коши обеспечивает наилучшее качество расписаний ценой увеличения времени выполнения, что оправдывает его использование в параллельной реализации для обработки больших объемов данных.

Исследование параллельного алгоритма



Итог: Анализ данных, полученных при 10 000 задачах и 50 процессорах (усреднение по 5 запускам), показывает, что параллельная реализация демонстрирует значительное увеличение времени выполнения по сравнению с последовательной версией. Несмотря на это, наблюдается также и небольшой прирост производительности.