

P1.- La escalinata de la catedral de Girona

A la catedral de Sta. María de Gracia de Girona se accede por una espléndida escalinata barroca del siglo XVII. El conjunto formado por las escaleras, la fachada de la catedral y los edificios que la rodean es de obligada visita turística y conforma un monumental espacio donde se celebran con frecuencia distintos eventos culturales y deportivos. El lugar ha servido incluso de escenario de películas y series de televisión como Juego de Tronos.



En este problema vamos a estudiar el movimiento de una pequeña pelota que cae rebotando escaleras abajo. ¿Quién no ha visto alguna vez el fenómeno? Si la pelota es muy elástica como las de ping-pong, los rebotes son cada vez más altos (cada uno medido desde su escalón) y cada rebote se salta más escalones. Pero si es de tipo plástico, rebota poco en cada escalón hasta que acaba rodando unos cuantos escalones más y se para. Entre estos dos extremos caben muchas posibilidades dependiendo del grado de elasticidad del choque con el suelo, de las dimensiones de los peldaños y de las condiciones iniciales (posición y velocidad de la pelota). Un caso especial consiste en que la pelota haga exactamente un rebote en cada escalón indefinidamente, como sugiere el esquema de la figura 1.

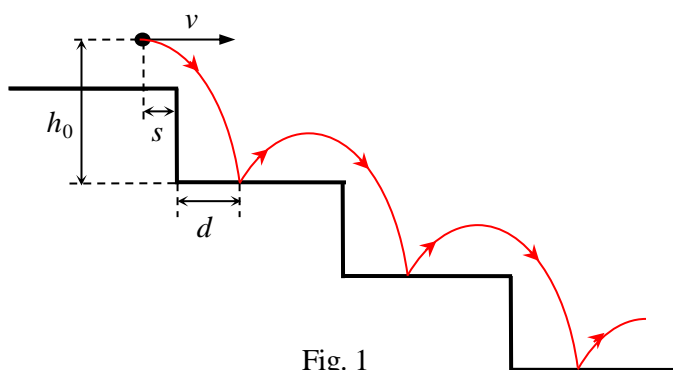


Fig. 1

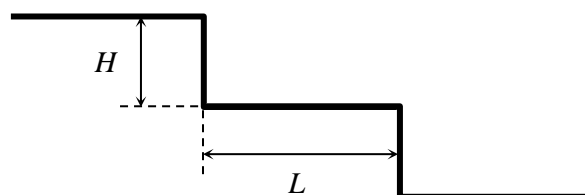


Fig. 2

La escalinata está compuesta por un total de 90 escalones distribuidos en tres tramos (el primero de 33 escalones, el intermedio de 28 y el último de 29) que están separados por dos rellanos. Cada escalón tiene una *huella* (anchura) L y una *contrahuella* o *tabica* (altura) H , como se indica¹ en la figura 2.

Por simplicidad, supondremos que las dimensiones de la pelota son despreciables frente a las de los escalones. Además, consideraremos que la componente horizontal de la velocidad de la pelota, v , no se modifica durante el vuelo entre sucesivos rebotes ni en los propios botes, es decir $v = \text{cte}$.

¹ Los escalones reales tienen un sobrevuelo sobre la tabica que, por simplicidad, no tendremos en cuenta.

Sin embargo, la componente vertical de la velocidad, u , cambia de sentido en cada bote y reduce su módulo en un factor ε , denominado *coeficiente de restitución*, que caracteriza la elasticidad del choque:

$$u_1 = -\varepsilon u_0 \quad (1)$$

donde los subíndices 0 y 1 se refieren al instante inmediatamente anterior y posterior al bote, respectivamente.

1. Suelo plano

Antes de considerar la caída por la escalera, suponga que lanzamos la pelota desde una altura h_0 con velocidad horizontal v sobre un suelo plano (por ejemplo, uno de los rellanos de la escalinata).

Determine (en función de h_0 , v , g y ε), respecto al suelo plano:

- La altura h_1 que alcanzará la pelota después del primer bote y la altura h_n que alcanzará tras el n -ésimo rebote.
- La distancia horizontal x_n recorrida entre el n -ésimo rebote y el siguiente.

2. Caída indefinida

Vamos ahora a estudiar las condiciones iniciales necesarias para que la pelota descienda por una escalera, supuesta infinita, para que haga exactamente un rebote en cada escalón indefinidamente (figura 1).

En los siguientes apartados, exprese sus resultados analíticos en función de L , H , ε y g . Para cálculos numéricos, considere $L = 44$ cm, $H = 16$ cm, $\varepsilon = 3/4$ y $g = 9,8$ m/s².

Determine analíticamente y calcule:

- La altura inicial h_0 desde la que debe lanzarse horizontalmente la pelota.
- La velocidad horizontal v con que debe lanzarse la pelota.
- La distancia d entre el punto de impacto y la tabica de cada escalón cuando la pelota se lanza justo sobre el borde del primer escalón ($s = 0$).

3. Un tramo de la escalinata

Pasamos a considerar uno de los tramos de la escalera de la catedral de Girona, en concreto el primero de ellos, que tiene 33 escalones. Estudiamos el descenso de la pelota, con la condición anterior de un bote por escalón, desde el punto de lanzamiento hasta la altura máxima tras el primer rebote sobre el rellano inferior. Calcule:

- El tiempo total, t_{total} , invertido en el descenso indicado.
- La energía mecánica de la pelota disipada por unidad de masa, $\Delta E/m$, en el descenso indicado.

Los apartados c) a e) se referían a una escalera infinita, lo que requiere unas condiciones precisas de lanzamiento. La escalera que nos ocupa es finita, lo que admite cierta imprecisión o tolerancia. Supongamos $s = 0$ y que incrementamos la velocidad v calculada en el apartado d) en una cantidad Δv .

- Determine el máximo aumento relativo que puede tener la velocidad inicial de lanzamiento, $\Delta v_{\text{max}} / v$, para que la pelota no se salte ningún peldaño en el descenso del tramo completo.

Por ambientar un poco el final del problema, nos introducimos en el mundo de ficción de Juego de Tronos. Uno de los personajes situados en el primer rellano golpea con el pie la pelota y ésta llega rodando por el suelo hasta el borde del primer escalón con la velocidad inicial v de los apartados anteriores.

- Haga un dibujo aproximado de la trayectoria en el descenso por los primeros escalones.

P1.- SOLUCIÓN

1. Debe conservarse la energía mecánica, suma de cinética más potencial gravitatoria, tanto antes (descenso) como después (ascenso) del choque con el suelo:

$$\begin{cases} mgh_0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(u_0^2 + v^2) \\ mgh_1 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(u_1^2 + v^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2gh_0 = u_0^2 \\ 2gh_1 = u_1^2 \end{cases} \quad (2)$$

- a) Teniendo en cuenta la relación entre velocidades verticales antes y después del choque, dada en la ecuación (1) del enunciado, es inmediato obtener las alturas pedidas:

$$2gh_1 = u_1^2 = \varepsilon^2 u_0^2 = \varepsilon^2 2gh_0 \rightarrow \boxed{h_1 = \varepsilon^2 h_0} \quad (3)$$

Aplicando la misma idea al rebote enésimo, y a los anteriores:

$$h_n = \varepsilon^2 h_{n-1} = \varepsilon^2 (\varepsilon^2 h_{n-2}) = \dots = (\varepsilon^2)^n h_0 \rightarrow \boxed{h_n = \varepsilon^{2n} h_0}$$

- b) Entre bote y bote, la pelota sigue una trayectoria parabólica, composición de un movimiento horizontal con velocidad constante v y un movimiento vertical con aceleración constante g dirigida hacia abajo. De la ecuación (1) sabemos que las velocidades verticales de la pelota, en valor absoluto, justo antes, u_{n-1} , y justo después, u_n , del bote n cumplen:

$$u_n = \varepsilon u_{n-1} = \dots = \varepsilon^n u_0$$

donde la velocidad vertical justo antes del primer bote, ecuación (2), es $u_0 = \sqrt{2gh_0}$

El alcance horizontal de una trayectoria parabólica es

$$x = \frac{2vu}{g}$$

donde v y u son las velocidades iniciales horizontal y vertical, respectivamente.

Por tanto, la distancia horizontal recorrida entre bote enésimo y el siguiente resulta:

$$x_n = \frac{2vu_n}{g} \rightarrow \boxed{x_n = 2v \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \varepsilon^n} \quad (4)$$

2. La condición impuesta de descenso indefinido exige un movimiento periódico. Ello implica que: 1) la altura máxima alcanzada sobre un escalón tras el bote debe ser la misma para todos los botes, y 2) la pelota debe desplazarse en horizontal entre bote y bote una distancia igual a la huella de un escalón.
- c) La pelota cae desde una altura h_0 sobre la huella de un escalón, bota y asciende hasta la altura h_1 dada en (3), respecto al nivel de ese escalón. Pero respecto al siguiente escalón, situado una distancia H por debajo, la altura debe ser h_0 . Por tanto, debe cumplirse:

$$h_0 = h_1 + H = \varepsilon^2 h_0 + H \rightarrow \boxed{h_0 = \frac{H}{1 - \varepsilon^2}}, \quad \boxed{h_0 = 36,6 \text{ cm}}$$

- d) Como el movimiento es periódico, el desplazamiento horizontal entre bote y bote es igual a la suma de la distancia horizontal recorrida en un descenso (desde h_0) y la distancia horizontal recorrida en un ascenso (hasta $h_0 - H$). Teniendo en cuenta que las trayectorias son parabólicas, estas distancias son:

$$x_d = \sqrt{\frac{2h_0 v^2}{g}}, \quad x_a = \sqrt{\frac{2(h_0 - H)v^2}{g}} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon^2 h_0)v^2}{g}} = \varepsilon x_d$$

La suma de ambas debe coincidir exactamente con la anchura de la huella:

$$L = x_d + x_a = v \sqrt{\frac{2h_0}{g}} (1 + \varepsilon) = v \sqrt{\frac{2H(1 + \varepsilon)}{g(1 - \varepsilon)}}$$

Por tanto, la velocidad con que debe lanzarse la pelota es

$$v = L \sqrt{\frac{g(1 - \varepsilon)}{2H(1 + \varepsilon)}}, \quad \boxed{v = 0,92 \text{ m/s}}$$

- e) Si la pelota se lanza sobre el borde del primer escalón ($s = 0$), la distancia d pedida es el desplazamiento horizontal de la pelota durante un descenso, es decir:

$$d = x_d = v \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = L \sqrt{\frac{g(1 - \varepsilon)}{2H(1 + \varepsilon)}} \sqrt{\frac{2H}{g(1 - \varepsilon^2)}} \rightarrow \boxed{d = \frac{L}{1 + \varepsilon}}, \quad \boxed{d = 25,1 \text{ cm}}$$

Nota: Si $s \neq 0$ sigue ocurriendo el movimiento periódico descrito siempre que el lanzamiento se haga desde una posición inicial, tanto a la izquierda como a la derecha del borde del escalón, tal que $s \leq L - d_{s=0} = 18,9 \text{ cm}$.

3. Descenso del tramo de 33 escalones.

- f) Los puntos extremos del movimiento indicado delimitan un número entero de rebotes, 33, por lo que el tiempo pedido es el de 33 veces el tiempo de vuelo de cada uno. Pero es también el tiempo invertido en recorrer la distancia horizontal de 33 anchuras de escalón con la velocidad inicial v :

$$t_{\text{total}} = \frac{33L}{v} \rightarrow \boxed{t_{\text{total}} = 15,8 \text{ s}}$$

- g) La velocidad de la pelota es la misma (velocidad vertical nula y velocidad horizontal v) en los puntos inicial y final del descenso descrito. Por tanto, la energía cinética no cambia. Sin embargo, entre esos mismos puntos la pelota desciende una altura $33H$, de forma que la pérdida de energía potencial gravitatoria en todo el tramo es $33mgH$. La energía mecánica perdida, por unidad de masa, es

$$\Delta E / m = 33gH, \quad \boxed{\Delta E / m = 51,7 \text{ J/kg}}$$

Al mismo resultado se llega considerando la pérdida de energía cinética en cada bote:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 (1 - \varepsilon^2) = mg h_0 (1 - \varepsilon^2) = mgH$$

- h) Al variar la velocidad horizontal, $v' = v \pm \Delta v$, la distancia d a la tabica de cada escalón ya no permanece constante, sino que va aumentando o disminuyendo paulatinamente y llegará un momento en que la pelota se saltará uno de los peldaños o bien dará dos botes en un mismo peldaño.

En los sucesivos rebotes, el punto de impacto en cada escalón se va desplazando hacia adelante o hacia atrás, respecto al anterior, una distancia

$$\Delta d = \pm \Delta v T$$

donde $T = L/v$ es el tiempo de vuelo entre bote y bote. El enunciado pregunta sólo por un aumento de la velocidad, aunque veremos que el resultado es el mismo si planteamos una disminución.

El máximo aumento de velocidad para que la pelota no se salte ningún escalón de los 33 que forman el tramo, corresponde a la situación en que ésta rebota justo en el borde del último peldaño tras recorrer en horizontal 32 huellas, es decir:

$$32\Delta d_{\max} = L - d$$

$$\Delta v_{\max} = \frac{\Delta d_{\max}}{T} = \frac{L-d}{32T} = \frac{L-L/(1+\varepsilon)}{32L/v} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta v_{\max}}{v} = \frac{1}{32} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta v_{\max}}{v} = 0,0134 \quad (1,34\%)$$

De forma similar, la máxima disminución de la velocidad para que la pelota no llegue a rebotar dos veces en un mismo escalón vendrá impuesta por la condición:

$$32\Delta d_{\max} = s_{\max} = v \sqrt{\frac{2(h_0 - H)}{g}}$$

$$\Delta v_{\max} = \frac{\Delta d_{\max}}{T} = \frac{1}{32} \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} v \sqrt{\frac{2(h_0 - H)}{g}} \rightarrow \frac{\Delta v_{\max}}{v} = \frac{1}{32} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Nota: De gran interés es también estudiar la tolerancia a las condiciones iniciales de la altura, es decir, la variación máxima de h_0 para que la pelota no se salte escalones ni rebote más de una vez en ninguno.

- i) Si proyectamos la trayectoria estudiada anteriormente ($h_0 = 36,6$ cm, $d = 25,1$ cm) sobre un escalón ficticio levantado 20,6 cm, podemos dibujar la nueva trayectoria cuando la pelota llega por el suelo (figura 3). Teniendo en cuenta que $h_1 = (3/4)^2 h_0$, el dibujo aproximado de la trayectoria nos lleva a concluir que la pelota dará 2 botes en la primera huella antes de caer al siguiente escalón. Como no se pide trayectoria exacta, se admiten soluciones aproximadas, a condición de que muestren alturas y distancias horizontales decrecientes, y más de un rebote en algún escalón. Cabe esperar que la altura decreciente tienda al valor h_0 , lo que significaría que la sucesión de rebotes tendería asintóticamente a la condición propia de escalera infinita. Es un problema digno de atención, en general, y relativamente complicado por la discontinuidad impuesta por la escalera.

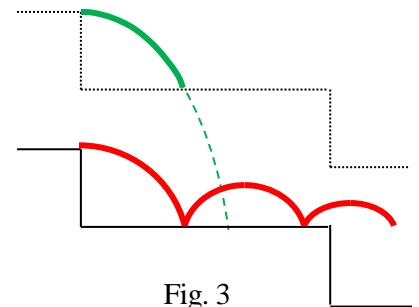


Fig. 3

P2.- El silbo gomero

Al hablar emitimos los fonemas de las palabras que nos permiten comunicarnos. Pero también podemos recurrir a otros sonidos, por ejemplo los silbidos (o silbos). De hecho, en España, el llamado *silbo gomero* es una lengua silbada¹ que se habla entre los pastores de la escarpada isla de La Gomera. Desciende de los habitantes originales de las Islas Canarias (los "guanches"), quienes inventaron un sistema basado en silbos para poder hablar a largas distancias entre los barrancos y montañas propios de la región. El hecho de silbar para comunicarse no es exclusivo de esta isla, se emplea en otras partes del mundo como en Nepal, en algunos pueblos del sur de México y en el Pirineo francés.

Una ventaja de los silbidos es que pueden llegar a grandes distancias. Un mensaje hablado se escucha y entiende como mucho a unos cien metros, mientras que los silbadores pueden comunicarse a varios kilómetros. Por eso, los lugares donde se utiliza este sistema suelen ser zonas montañosas donde las comunicaciones son difíciles y la densidad de población es baja.

Las lenguas silbadas replican la lengua madre sustituyendo los fonemas por sonidos tonales. O sea, que el silbo gomero es español, pero silbado. En el silbo gomero las vocales se distinguen por el tono o frecuencia del sonido emitido: aproximadamente 1500 Hz para los fonemas {/a/, /o/, /u/}, en torno a 2100 Hz para la /e/, y unos 2500 Hz para la /i/. El rango de frecuencias para las consonantes varía de 1 a 4 kHz. Para silbar las consonantes, además de cambiar el tono, se hacen modulaciones de la amplitud del sonido.

Los silbadores tienen una depurada técnica. Cogen aire en la boca (la caja de resonancia) y lo expulsan mientras tensan los labios, las mandíbulas y el cuello. Suelen colocar uno o dos dedos entre los dientes. Con la lengua y la laringe regulan la presión del aire para controlar la amplitud, la duración y la frecuencia del sonido.

En definitiva, el silbo gomero tiene un importante valor antropológico y lingüístico, y muchas de sus características son también de gran interés para la física.

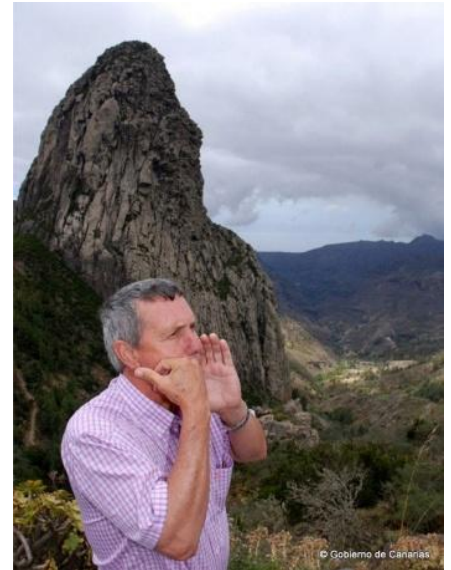
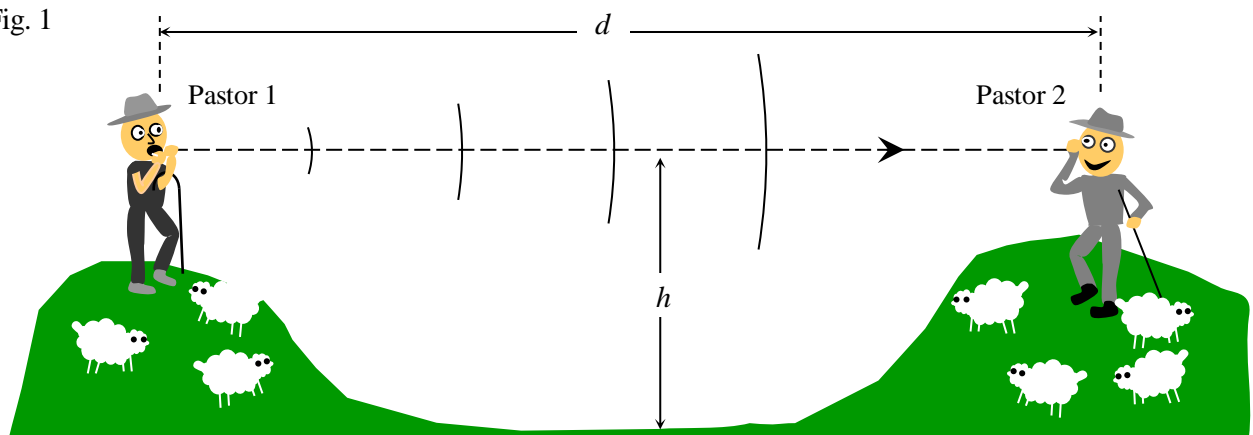


Fig. 1



Imagine que dos pastores de La Gomera quieren comunicarse silbando (figura 1). Están situados sobre colinas a una misma altura h sobre el fondo del valle que les separa, y la distancia entre ambos es d .

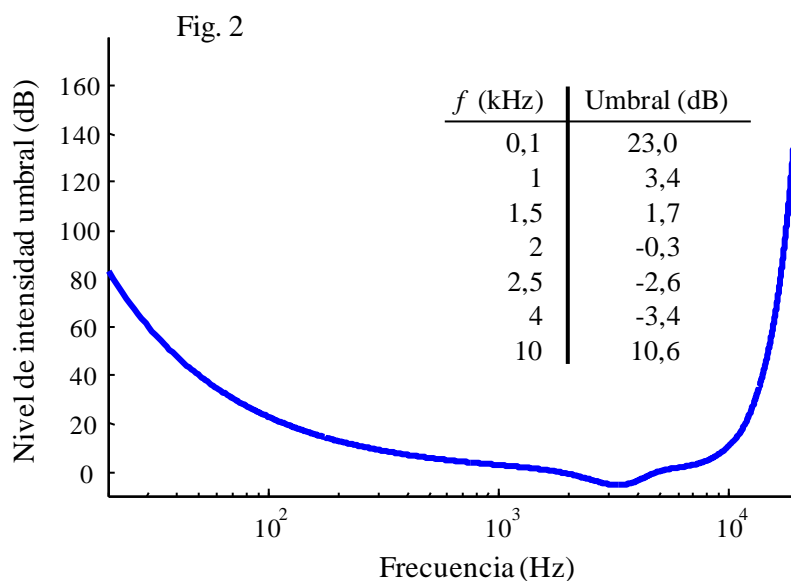
¹ El silbo gomero está reconocido por las Naciones Unidas como un lenguaje de la Unión Europea.

Admitiremos, por simplicidad, que las ondas sonoras emitidas están uniformemente repartidas en todas las direcciones del espacio (foco emisor puntual de ondas esféricas). Supondremos unas condiciones atmosféricas estables y que la velocidad del sonido en el aire es $v = 343$ m/s.

Considere, por ahora, únicamente el sonido que viaja en línea recta entre los pastores, es decir, no tenga en cuenta la reflexión del sonido en el fondo del valle. Tampoco considere, de momento, ningún tipo de disipación acústica.

El pastor 1 silba un mensaje con una potencia de 5 W (utilice este valor para todo el problema), y sus sonidos cubren un espectro de frecuencias centrado en $f_0 = 2,5$ kHz, con un rango que va desde 1 a 4 kHz (ambos valores incluidos).

La figura 2 muestra el nivel de intensidad acústica² umbral (mínimo audible) del oído humano en función de la frecuencia.



- a) Indique razonadamente qué frecuencia de las silbadas por el pastor podría escucharse más lejos. Calcule la distancia máxima, d_{\max} , a la que el pastor 2 podría llegar a oír la frecuencia central f_0 .

Al resolver el apartado anterior habrá obtenido una distancia enorme, muy poco realista. Para mejorar el modelo es necesario considerar que la energía sonora se disipa mientras se propaga, transformándose en calor debido a la fricción entre las moléculas vibrantes del aire. Considere en los siguientes apartados que la intensidad sonora se atenúa exponencialmente con la distancia recorrida r en un factor $e^{-\alpha r}$, donde α es el llamado *coeficiente de atenuación* del aire³.

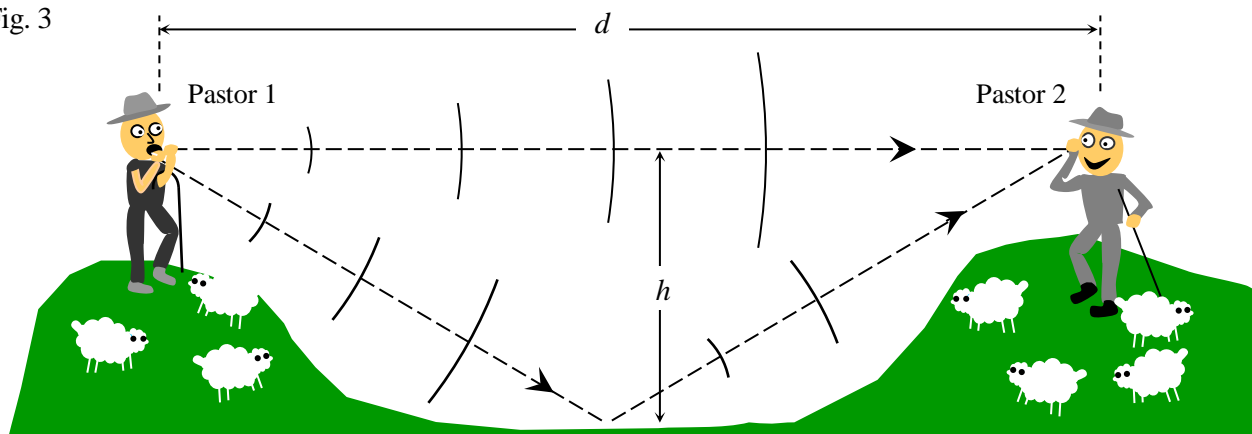
- b) Si, en unas determinadas condiciones atmosféricas, la distancia máxima real a la que el pastor 2 puede oír un silbido de 2,5 kHz es $d_{\max} = 4,0$ km, ¿cuál es el coeficiente de atenuación del aire?

Considere ahora que al pastor 2 llega el sonido directo y también el reflejado especularmente en el fondo del valle, como se esquematiza en la figura 3. Suponga que el factor de reflexión (fracción de energía reflejada) de la onda sonora en el suelo es del 50%.

² Como sabrá, el nivel de intensidad acústica, expresado en decibelios (dB), se define como $\beta = 10 \log_{10}(I / I_0)$ donde I es la intensidad del sonido (en W/m²) e $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

³ Este coeficiente depende de la temperatura, la presión atmosférica, la densidad y la humedad del aire.

Fig. 3



- c) Para $d = 4,0$ km, $h = 100$ m y $f = 2,5$ kHz, calcule la intensidad I_r del sonido reflejado en el suelo que llega al pastor 2. Calcule también la intensidad total, suma de la que llega por los dos caminos. Exprese su resultado en W/m^2 .

En el apartado anterior ha calculado la intensidad total recibida por el pastor como suma de las intensidades que le llegan por los dos caminos. Esta idea es correcta si el sonido tiene un espectro en frecuencias amplio. Pero si las ondas emitidas son armónicas, es decir, si el sonido presenta una única frecuencia, aparecen fenómenos interferenciales⁴ y la intensidad total ya no puede obtenerse como simple suma de las dos intensidades.

Considere ahora que el pastor 1 silba la vocal /i/ con una frecuencia pura muy próxima al valor central $f_0 = 2,5$ kHz.

- d) Con los mismos valores de d y h que en el apartado anterior, determine la frecuencia más próxima a f_0 con la que el pastor debe silbar la /i/ para que se produzca una interferencia constructiva de las dos ondas que llegan al pastor 2.
- e) Calcule la intensidad total del sonido recibido por el pastor 2 a esta frecuencia.

Finalmente, vamos a estudiar cómo escucha la conversación de los dos pastores un ciclista que se desplaza de un pastor hacia el otro en el fondo del valle. Suponga que, aproximadamente, el sonido llega al ciclista en la misma dirección en que éste se desplaza. El pastor 1 silba “beber” y, en respuesta, el pastor 2 silba “vivir”. La vocal /e/ se ha emitido a 2,1 kHz y la vocal /i/ a 2,5 kHz. El ciclista es hablante del silbo gomero y es capaz de discriminar frecuencias separadas como mínimo un intervalo $\Delta f = 100$ Hz.

- f) Calcule las frecuencias de las vocales que escucha el ciclista cuando se desplaza hacia el pastor 1 a una velocidad de 40 km/h. ¿Qué velocidad máxima podría llevar para poder distinguir las dos palabras silbadas por los pastores?

⁴ Damos por supuesto que las condiciones atmosféricas son perfectamente estables y que no existe ningún tipo de perturbación que induzca variaciones aleatorias de las fases en las ondas.

P2.- SOLUCIÓN

- a) El pastor 1 emite sonidos en el intervalo [1, 4] kHz. De la gráfica de la figura 2 sabemos que el umbral de audición para 1 kHz es $\beta_u = 3,4$ dB, y para 4 kHz es $\beta_u = -3,4$ dB. Cuanto más pequeño es el umbral más lejos se oirá el sonido, de forma que (sin absorción) se escucharía más lejos la frecuencia de 4 kHz.

Del nivel de intensidad umbral para 2,5 kHz obtenemos la intensidad umbral:

$$\beta_u = -2,6 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{I_u}{I_0} \rightarrow I_u = 5,5 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$$

$$I_u = \frac{P}{4\pi d_{\max}^2} \rightarrow \boxed{d_{\max} = 850 \text{ km}}$$

- b) La intensidad atenuada por el factor $e^{-\alpha r}$ es

$$I_u = \frac{P}{4\pi d_{\max}^2} e^{-\alpha d_{\max}}$$

Para 2,5 kHz la intensidad umbral es la calculada en el apartado anterior: $I_u = 5,5 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$

Para la distancia $d_{\max} = 4,0$ km, despejamos el coeficiente de atenuación:

$$\alpha = -\frac{1}{d_{\max}} \ln \left(\frac{4\pi d_{\max}^2 I_u}{P} \right) \rightarrow \boxed{\alpha = 2,7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}} \quad \text{Ver notas}^{5,6}.$$

- c) La distancia recorrida por el camino con reflexión es

$$d_r = 2\sqrt{h^2 + (d/2)^2} = 4005 \text{ m}$$

La intensidad del sonido reflejado en el suelo, con un factor de reflexión 0,5, cuando llega al pastor 2 es

$$I_r = 0,5 \frac{P}{4\pi d_r^2} e^{-\alpha d_r} \rightarrow \boxed{I_r = 2,7 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2}$$

La intensidad total, suma de las intensidades directa y reflejada, queda:

$$\boxed{I_{\text{tot}} = I_u + I_r = 8,2 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2}$$

- d) Cuando una onda armónica recorre una distancia x , su cambio de fase es kx , donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de ondas y λ la longitud de onda. Por tanto, el desfase δ (diferencia de fase) entre las dos ondas cuando llegan al pastor 2 será

$$\delta = k \Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d$$

donde $\Delta d = d_r - d$ es la diferencia de distancias recorridas por las dos ondas.

La interferencia constructiva se dará cuando las ondas se superpongan en fase, es decir cuando el desfase sea un múltiplo entero de 2π :

$$\delta = 2m\pi \rightarrow \Delta d = m\lambda$$

⁵ El resultado está de acuerdo con los valores del coeficiente del aire en condiciones típicas.

⁶ Contrariamente a como se obtuvo en el apartado anterior, al tener en cuenta la absorción del aire la frecuencia más alta de 4 kHz (aunque somos más sensibles a ella) es la que peor se escucha (sólo hasta aproximadamente 1,3 km). Ello es debido a que el coeficiente de atenuación del aire es mucho mayor (unas 5 veces más) que para 1 kHz.

La diferencia de distancias recorridas es $\Delta d = 5 \text{ m}$.

La longitud de onda para la frecuencia exacta de 2,5 kHz es

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_0} = \frac{343}{2500} = 0,1372 \text{ m}$$

Para esta longitud de onda:

$$\Delta d / \lambda_0 = 36,44$$

Como este cociente no es un número entero, la interferencia no será constructiva a esta frecuencia. La frecuencia más próxima a f_0 para la que habrá interferencia constructiva corresponde a $m = 36$, es decir a una longitud de onda

$$\lambda = \frac{\Delta d}{36} = 0,1389 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \boxed{f = 2470 \text{ Hz}} \quad \text{Ver nota}^7.$$

- e) Cuando dos ondas interfieren constructivamente, la amplitud total es igual a la suma de amplitudes.

No es necesario conocer la expresión que relaciona la intensidad de una onda sonora con su amplitud. Basta saber que, en cualquier onda, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud: $I = K A^2$. Entonces:

$$A_{\text{tot}} = A_u + A_r = \sqrt{I_u / K} + \sqrt{I_r / K}$$

$$I_{\text{tot}} = K A_{\text{tot}}^2 \quad \rightarrow \quad I_{\text{tot}} = I_u + I_r + 2\sqrt{I_u I_r}$$

$$\boxed{I_{\text{tot}} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}$$

- f) El pastor 1 silba la vocal /e/ de frecuencia $f_1 = 2100 \text{ Hz}$, y el pastor 2 silba la vocal /i/ de frecuencia $f_2 = 2500 \text{ Hz}$.

Como $d \gg h$, podemos suponer que, aproximadamente, el sonido llega al ciclista en la misma dirección en que éste se desplaza.

Se produce efecto Doppler debido a que el ciclista, que hace de receptor, está en movimiento. Las fuentes del sonido (los dos pastores) están en reposo. El ciclista se acerca al pastor 1 y se aleja del pastor 2, a una velocidad $v_c = 40 \text{ km/h} = 11,1 \text{ m/s}$. Por efecto Doppler, el ciclista escuchará las frecuencias:

$$f'_1 = \frac{v + v_c}{v} f_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{f'_1 = 2168 \text{ Hz}}$$

$$f'_2 = \frac{v - v_c}{v} f_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{f'_2 = 2419 \text{ Hz}}$$

En general, a velocidad v_c , el ciclista escucha frecuencias separadas un intervalo

$$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = (f_2 - f_1) - \frac{v_c}{v} (f_1 + f_2)$$

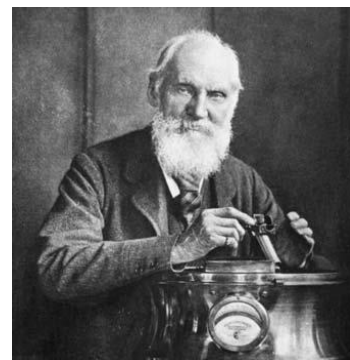
Para que pueda distinguir las dos palabras, debe cumplirse $\Delta f' \geq \Delta f = 100 \text{ Hz}$. Operando en el límite de la igualdad se obtiene la velocidad máxima:

$$v_{\text{max}} = \frac{f_2 - f_1 - 100}{f_1 + f_2} v \quad \rightarrow \quad \boxed{v_{\text{max}} = 22,4 \text{ m/s} = 80,5 \text{ km/h}}$$

⁷ Estos resultados numéricos sólo tienen sentido si los valores de d , h y v son exactos. Además, se ha supuesto que las condiciones atmosféricas son perfectamente estables y que, por tanto, las ondas son coherentes.

P3.- Lord Kelvin, un surtido de física

William Thomson, Lord Kelvin (1824 - 1907), fue un físico e inventor británico que contribuyó decisivamente a modernizar la física en el siglo XIX. Destacó en el campo de la termodinámica, donde ayudó a entender la conservación de la energía y la equivalencia entre calor y trabajo, estableció la escala absoluta de temperatura (escala Kelvin), calculó el cero absoluto, y formuló la segunda ley de la termodinámica. También sobresalió en electromagnetismo, al fundar la termoelectricidad y realizar diseños e inventos que permitieron desarrollar la telegrafía.



Luminosidad, edad y temperatura del Sol

Un gran reto científico del siglo XIX fue explicar el brillo de las estrellas y estimar su edad. Kelvin estudió la luminosidad y la edad del Sol. En astronomía, se llama *luminosidad* a la potencia emitida en todas direcciones por un cuerpo celeste.

En los siguientes apartados tenga en cuenta estos datos para el Sol: luminosidad $L_{\odot} = 3,85 \times 10^{26} \text{ W}$, radio $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$, masa $M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Para explicar la luminosidad solar, Kelvin consideró primero la hipótesis del "bombardeo de meteoritos". Supuso que la energía que emite el Sol proviene de la energía cinética de una supuesta lluvia de meteoritos que impactarían regularmente contra él a una velocidad igual a la velocidad de escape del Sol.

- a) Obtenga una expresión (en función de L_{\odot} , R_{\odot} , M_{\odot} y G) para la masa de meteoritos que debería llegar al Sol por unidad de tiempo para mantener su luminosidad. Calcule la masa total en 1 año.

Tras descartar la hipótesis anterior Kelvin desarrolló, junto a Hermann von Helmholtz, la teoría que en astrofísica se conoce como "contracción de Kelvin-Helmholtz", según la cual la fuente de energía de las estrellas es su autoenergía gravitatoria. Se llama *autoenergía gravitatoria* de un cuerpo a la energía de los campos gravitatorios generados por las propias masas que componen dicho cuerpo¹.

- b) Demuestre que la autoenergía gravitatoria de una esfera homogénea de masa M y radio R es $U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$. Calcule el valor de la autoenergía gravitatoria del Sol, U_{\odot} .

(Ayuda: Tome una cáscara esférica de radio r y espesor dr , y calcule la energía potencial dU de dicha cáscara en el campo gravitatorio que crea la masa esférica interior. Integre² de $r = 0$ a $r = R$).

Según el mecanismo de Kelvin-Helmholtz, el Sol se contrajo hasta su estado actual partiendo de una nube inicial con sus partes infinitamente separadas y en reposo (temperatura en el cero absoluto). En una contracción gravitacional se cumple que la mitad de la autoenergía potencial perdida (entre el estado inicial y el actual) se convierte en radiación y la otra mitad en calor (aumentando la temperatura del cuerpo).

- c) Calcule, a partir de U_{\odot} y de L_{\odot} , la edad del Sol que estimó Kelvin. Expresé su resultado en millones de años.

¹ Es equivalente al trabajo necesario para formar el cuerpo a partir de sus partes, inicialmente separadas entre sí una distancia infinita.

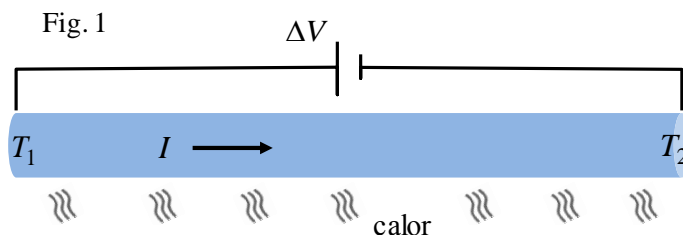
² $\int r^n dr = \frac{r^{n+1}}{(n+1)}$, para $n \neq -1$.

- d) Calcule la temperatura T_{\odot} del Sol que estimó Kelvin sabiendo que tomó para el calor específico del Sol un valor igual a 10 veces el del agua. Dato: $c_{\text{agua}} = 4,187 \text{ J/(g K)}$.

Termoelectricidad: efectos Joule y Thomson

Kelvin sentó las bases de la termoelectricidad al explicar distintos fenómenos de producción de electricidad a partir de calor y viceversa (efectos Seebeck y Peltier). Descubrió además el efecto Thomson (que lleva su apellido), el cual consiste en lo siguiente (figura 1):

Si circula una corriente eléctrica por un conductor homogéneo cuyos extremos se mantienen a temperaturas distintas, se produce absorción o liberación de calor a lo largo del conductor, que se suma a la liberación de calor por efecto Joule.



Si consideramos un cable (de conductividad térmica despreciable) homogéneo y cilíndrico de longitud L y sección A , la potencia calorífica (emitida o absorbida) por unidad de volumen \mathcal{V} es

$$\frac{P}{\mathcal{V}} = \underbrace{\rho J^2}_{\text{Joule}} - \underbrace{\tau \frac{J}{L} \Delta T}_{\text{Thomson}} \quad (1)$$

donde ρ es la resistividad³ del material, J es la intensidad de corriente por unidad de área, ΔT es la diferencia de temperatura entre los extremos del conductor, y τ es el coeficiente de Thomson. En la ecuación anterior, J y ΔT tienen el mismo signo si la corriente circula del extremo frío al caliente.

- e) Determine (en función de τ y ΔT) la diferencia de potencial ΔV que debe aplicarse al cable para que no emita ni absorba calor.

Sea un cable cilíndrico homogéneo de 3 cm de largo y 5 mm de radio, cuyos extremos se fijan a temperaturas de 273 K y 300 K. Circula una corriente de 2 A del extremo caliente al frío. El cable es de material semiconductor de óxido de zinc de resistividad $\rho = 10^{-5} \Omega \text{m}$ y coeficiente de Thomson $\tau = 1,50 \times 10^{-4} \text{ V/K}$.

- f) Calcule el calor liberado en el cable en 10 minutos por efecto Joule, por efecto Thomson y el total.

Un galvanómetro para el telégrafo

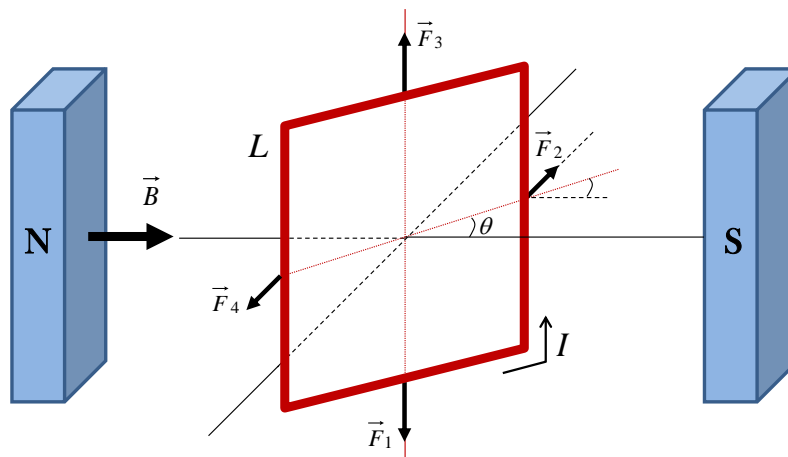
Kelvin inventó el galvanómetro de espejo, un detector de corriente de alta sensibilidad gracias al cual pudo empezar a funcionar, en 1866, el primer cable telegráfico transatlántico entre Nueva York y Londres.

En la figura 2 se muestra una espira cuadrada de lado L por la que circula una corriente I , en el seno de un campo magnético \vec{B} uniforme. La espira puede girar respecto a un eje vertical que pasa por su centro. El plano de la espira está girado un ángulo θ respecto a la dirección del campo magnético.

- g) Determine el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre la espira (en función de L , I , B y θ). Justifique que si el campo magnético es radial, como el de la figura 3b, el momento no depende del ángulo.

³ La resistividad de un conductor filiforme es $\rho = RA/L$, donde R es la resistencia.

Fig. 2



El galvanómetro de Kelvin consta de un espejito imantado que cuelga de un hilo de seda. El espejo se coloca en el interior de una bobina por la que circula corriente. El campo magnético creado por la bobina hace girar el espejo (como lo haría con una brújula), de manera que la deflexión de un rayo de luz incidente sobre el espejo indica el paso de la corriente.

Por simplicidad, supondremos que la bobina está suspendida del hilo. El hilo lleva adosado un espejo sin imán (figura 3a) y tiene una constante de torsión⁴ k . La bobina consta de N espiras cuadradas de lado L (como las estudiadas en el apartado anterior), y se encuentra dentro de una zona de campo magnético radial (figura 3b). Al pasar la corriente, la bobina queda en equilibrio para un cierto ángulo ϕ para el cual el momento de las fuerzas producidas por el campo iguala al momento torsional del hilo.

Fig. 3a

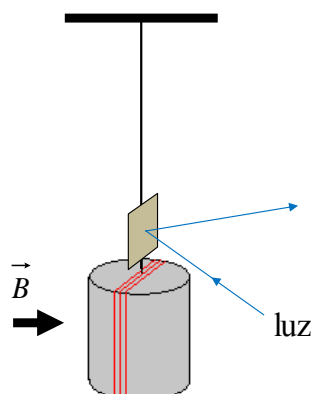
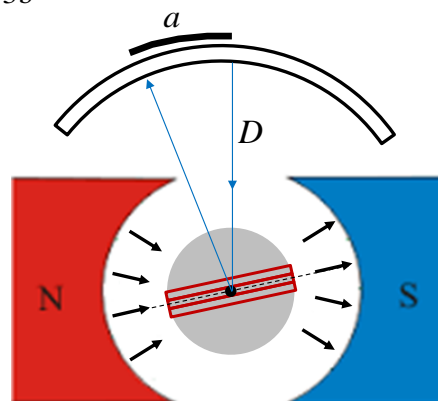


Fig. 3b



- h) Determine (en función N , L , B , k y ϕ) la intensidad I que pasa por el galvanómetro.
- i) Para una intensidad I la bobina ha rotado un ángulo ϕ respecto a la posición de corriente nula, y el punto de impacto de la luz reflejada en el espejo se desplaza una distancia a sobre una escala circular de radio D (figura 3b). Determine a en función de ϕ y D . ¿Podemos graduar la escala de forma lineal para medir la intensidad?

Finalmente, nos planteamos aumentar la sensibilidad del galvanómetro sin variar el peso total de la bobina ni las características del hilo. Se define la sensibilidad como el cociente ϕ/I .

- j) Razone si construiría el instrumento con una espira menos (y, por tanto, con un tamaño de las espiras algo mayor) o con una espira más.

⁴ De forma análoga a la ley de Hooke, el momento M de una fuerza aplicado sobre una varilla, un hilo, etc., produce una torsión con desplazamiento angular ϕ proporcional al momento: $M = k\phi$, donde k es la constante de torsión.

P3.- SOLUCIÓN

Luminosidad, edad y temperatura del Sol

- a) La energía cinética de una masa total m de meteoritos viajando a la velocidad de escape v_e , es

$$E_c = \frac{1}{2} m v_e^2, \text{ donde la velocidad de escape del Sol es } v_e = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}}$$

La hipótesis de los meteoritos implica que $L_\odot = E_c / t$, de manera que:

$$L_\odot = \frac{1}{2} m \frac{2GM_\odot}{R_\odot} \frac{1}{t} \rightarrow \boxed{\frac{m}{t} = \frac{R_\odot L_\odot}{GM_\odot}}$$

En 1 año llegaría al Sol una masa⁵ $\boxed{m = 6,4 \times 10^{22} \text{ kg}}$

- b) La masa esférica interior (entre 0 y r) y la masa infinitesimal de una corteza de espesor dr son

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r^3 \quad \text{y} \quad dm = 4\pi r^2 dr \rho = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$$

donde ρ es la densidad constante de la esfera supuestamente homogénea.

La energía potencial de la cáscara infinitesimal es

$$dU = -G \frac{m(r)}{r} dm = -G \frac{3M^2}{R^6} r^4 dr$$

Al realizar la integral queda demostrado el resultado propuesto:

$$U = -G \frac{M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \boxed{-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}}$$

A partir de los datos del Sol se obtiene: $\boxed{U_\odot = -2,3 \times 10^{41} \text{ J}}$

- c) La autoenergía potencial perdida es la diferencia entre la inicial y la actual:

$$U_{R=\infty} - U_\odot = 0 - U_\odot = -U_\odot = |U_\odot|$$

En la contracción de Kelvin-Helmholtz, la mitad de la misma se convierte en radiación:

$$\frac{|U_\odot|}{2} = L_\odot t$$

Así, la edad del Sol estimada por Kelvin fue⁶

$$t = \frac{1}{2} \frac{|U_\odot|}{L_\odot} = 2,96 \times 10^{14} \text{ s} \rightarrow \boxed{t = 9,4 \text{ millones de años}}$$

- d) De forma análoga al apartado anterior, la mitad de $|U_\odot|$ se habría convertido en calor aumentando la temperatura del Sol desde el cero absoluto (estado inicial) hasta T_\odot :

⁵ Esta masa equivale a un 1% de la masa de la Tierra. Ello implicaría un incremento detectable de la masa del Sol (por ejemplo, al cambiar los períodos orbitales en el Sistema Solar) que, sin embargo, no se observa. Esta hipótesis del bombardeo de meteoritos fue abandonada.

⁶ En la época, los geólogos habían estimado la edad del Sol en al menos 1000 millones de años, lo que llevó a una controversia con los físicos. Hoy sabemos que su edad es de unos 4500 millones de años. En el siglo XIX, las reacciones nucleares no se conocían y la mejor explicación para la luminosidad de las estrellas fue el mecanismo que hemos descrito.

$$Q = \frac{|U_{\odot}|}{2} = M_{\odot} c_{\odot} \Delta T = M_{\odot} c_{\odot} (T_{\odot} - 0)$$

El calor específico supuesto por Kelvin es $c_{\odot} = 10 c_{\text{agua}} = 41870 \text{ J/(kg K)}$

La temperatura estimada⁷ es

$$T_{\odot} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\odot}|}{M_{\odot} c_{\odot}} = \boxed{1,4 \times 10^6 \text{ K}}$$

Termoelectricidad: efectos Joule y Thomson

- e) Como la densidad de corriente es $J = I/A$ y el volumen del cable es $V = AL$, reescribimos la ecuación (1) de los efectos Joule-Thomson:

$$\frac{P}{V} = \rho J^2 - \tau \frac{J}{L} \Delta T \rightarrow \frac{P}{AL} = R \frac{A}{L} \frac{I^2}{A^2} - \tau \frac{I}{A} \frac{\Delta T}{L} \rightarrow P = RI^2 - \tau I \Delta T$$

Si hacemos uso de la ley de Ohm, podemos escribir

$$P = I \Delta V - \tau I \Delta T$$

Para que el cable no absorba ni emita calor:

$$P = 0 \rightarrow I \Delta V = \tau I \Delta T \rightarrow \boxed{\Delta V = \tau \Delta T}$$

- f) La resistencia vale $R = \rho L/A = 3,8197 \times 10^{-3} \Omega$

La potencia por efecto Joule es: $P_J = RI^2 = 1,5279 \times 10^{-2} \text{ W}$

La potencia por efecto Thomson es: $P_T = -\tau I \Delta T = 8,1 \times 10^{-3} \text{ W}$

En $t = 10 \text{ min}$, el calor liberado es:

$$\text{Joule } Q_J = 9,167 \text{ J} = \boxed{9,2 \text{ J}}; \text{ Thomson } Q_T = 4,860 \text{ J} = \boxed{4,9 \text{ J}}, \text{ total } Q = 14,027 \text{ J} = \boxed{14,0 \text{ J}}$$

Ver notas^{8 9 10}.

Un galvanómetro para el telégrafo

- g) Cada lado de la espira es una corriente rectilínea que, al estar dentro de un campo magnético, experimenta una fuerza perpendicular a la corriente y al campo dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = I L \vec{u}_l \times \vec{B}$$

donde \vec{u}_l es un vector unitario en el sentido de la corriente.

⁷ Esta estimación es para la temperatura media. Hoy sabemos que la temperatura del Sol oscila entre los 6000 °C de su superficie y unos 15 millones de grados en el núcleo.

⁸ Los materiales termoelectricos deben tener baja conductividad térmica (para que no exista flujo de calor entre los extremos) y baja resistividad eléctrica (para minimizar el calor emitido por efecto Joule). Esta combinación se da en los materiales semiconductores.

⁹ Los datos de resistividad y el coeficiente de Thomson del óxido de zinc oscilan en un amplio rango dependiendo de las impurezas del material. Hemos utilizado unos valores típicos.

¹⁰ El calor por efecto Joule es irreversible, ya que no depende del sentido de la corriente, y siempre es calor generado. Sin embargo, el calor por efecto Thomson es reversible, pues depende del sentido de la corriente, y puede ser absorbido o cedido dependiendo del sentido relativo de la corriente y el gradiente de temperatura.

Las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_3 sobre los lados horizontales no ejercen momento porque son paralelas al eje de giro.

Las fuerzas sobre los lados verticales son iguales en módulo:

$$F_2 = F_4 = I L B$$

no dependen del ángulo θ porque $\vec{B} \perp \vec{u}_l$.

El momento que ejercen estas dos fuerzas es $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, con $r = L/2$ y donde el ángulo que forma \vec{r} y \vec{F} es $90^\circ - \theta$. Los dos momentos son iguales y tienen sentidos opuestos:

$$M_2 = M_4 = \frac{L}{2} I L B \sin(90 - \theta) = \frac{L}{2} I L B \cos \theta$$

Por tanto, el momento resultante de las fuerzas sobre la espira es:

$$M = M_2 + M_4 = I L^2 B \cos \theta$$

Si los imanes son circulares como en la figura 3b, el campo magnético es radial, es decir, está siempre en el plano de la espira aunque ésta rote. Entonces, las fuerzas \vec{F}_2 y \vec{F}_4 actúan siempre perpendicularmente a la espira (y son perpendiculares a \vec{r}).

Por tanto: $M = I L^2 B$

h) Como hay N espiras iguales, el momento resultante sobre toda la bobina será

$$M = N I L^2 B$$

Este momento crea una torsión sobre el hilo opuesta a la torsión recuperadora del propio hilo, que es proporcional al ángulo girado. Entonces, en la posición de equilibrio donde el galvanómetro marca la lectura se tendrá

$$N I L^2 B = k \phi \quad \rightarrow \quad I = \frac{k \phi}{N L^2 B}$$

i) La intensidad de corriente es proporcional al ángulo girado. Si la bobina/espejo rota un ángulo ϕ , el rayo de luz reflejado se desvía un ángulo 2ϕ .

En definitiva, el segmento circular sobre la escala es $a = 2D\phi$

El segmento a sobre la escala es proporcional a ϕ y, por tanto, es proporcional a la intensidad, lo que significa que sí podemos graduar de forma lineal la escala.

j) La sensibilidad es proporcional al número de espiras y al área de las espiras:

$$\phi / I = N L^2 B / k$$

Como no variamos el peso total de la bobina ni el grosor del cable, su longitud total $\ell = 4NL$ es constante. Entonces, la sensibilidad es proporcional a ℓ^2 / N . Por tanto, interesa utilizar una espira menos siendo el resto de espiras algo mayores.

Ver nota¹¹.

¹¹ El galvanómetro de Kelvin es de gran sensibilidad. El espejito imantado colgado del hilo de seda responde a variaciones muy pequeñas del campo magnético que crea la bobina cuando pasan por ella incluso corrientes insignificantes. Gracias a esta sensibilidad se pudo detectar señales pese a las pérdidas en hilos telegráficos de gran longitud.