Entrenamiento selectivo 2014, Olimpiada Mexicana de Física.
Tarea # 1 enviar 24 enero

Problema 1

1.1 Un proyectil se lanza desde el suelo ($x = 0, y = 0$) con una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$, la componente x de la velocidad inicial es $v_{xi} = 12.0$ m/s, mientras que la componente inicial en la dirección y es $v_{yi} = 49.0$ m/s. Realiza las siguientes tareas:

1.1a) Encuentra el alcance horizontal R del proyectil. Esta es la distancia entre el punto de lanzamiento y el punto en el cuál el proyectil golpea el piso.

1.1b) Encuentra la altura máxima del proyectil H.

1.1c) Haz un diagrama, lo más cercano a escala, de la trayectoria del proyectil (calcula la posición del proyectil para varios tiempos).

1.1d) ¿En qué instante de tiempo se encuentra el proyectil a la distancia D más lejana desde el punto de lanzamiento?

Sugerencia: Recuerde que el máximo (o mínimo) de una función $f(x)$, se encuentra a partir de la ecuación:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = 0 \tag{1}$$

lo que significa que debes derivar la función $f(x)$, evaluarla en x_0 e igualarla a cero. El valor x_0 es precisamente el valor máximo o mínimo de la función. Investiga por tu cuenta la manera en la cual se discrimina entre si el valor x_0 es máximo o mínimo.

1.2 En la figura 1 se muestra el interior de un condensador de placas paralelas (la placa superior esta con polaridad positiva) que esta conectado a una diferencia de potencial $\Delta V = 3 \times 10^4$ V, la separación entre las placas es $d = 1$ cm. En la placa inferior se encuentra una fuente de partículas α (las partículas α son núcleos de Helio, es decir que están formadas por 2 protones y 2 neutrones) y por la pequeña apertura (*Slit S*) emergen dos partículas α a la misma velocidad $v_0 = 6 \times 10^6$ m/s pero a diferentes ángulos $\theta_1 = 45° + 1°$ y $\theta_2 = 45° - 1°$, ambas partículas describen trayectorias parabólicas que se proyectan en un mismo punto P de la placa inferior como se muestra en la figura. Responde las siguientes preguntas (desprecia la gravedad):

Corrección:

Con los datos que se proporcionan la altura máxima de ambas partículas es mayor a 1cm, que es la distancia entre las placas del condensador. Corregimos a través del potencial y aumentamos al valor $\Delta V = 5 \times 10^5$ V.

1.2a) Demuestra que las dos partículas α son proyectadas sobre la placa inferior sobre un mismo punto P.

1.2b) Calcula el valor del alcance R al que son proyectadas las partículas en la placa inferior.

1.2c) Calcula el valor de $h_1 - h_2$, donde h_1 y h_2 corresponden a la altura máxima de la partícula con ángulo de salida θ_1 y θ_2 respectivamente.

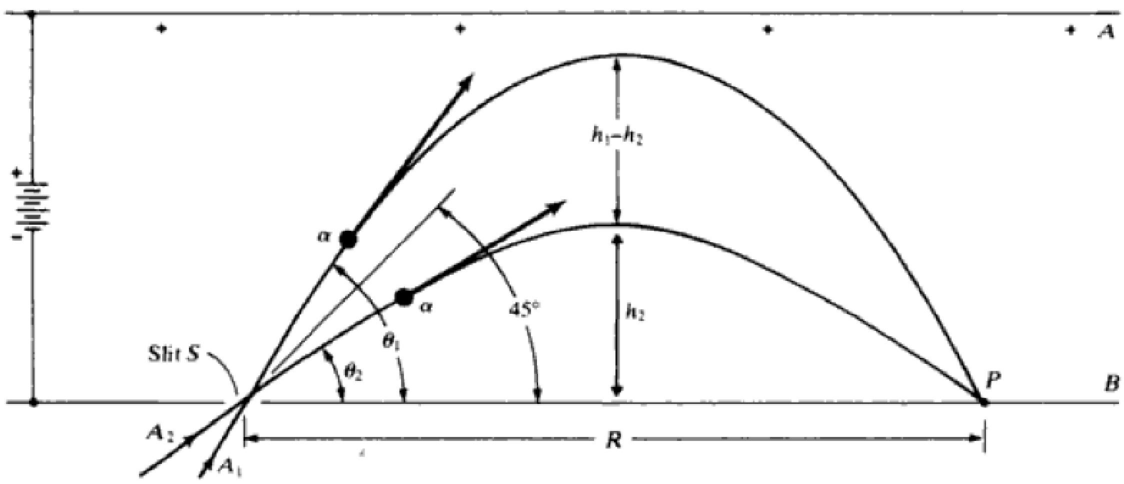


Figura 1:

Solución

La partícula α describe un tiro parabólico debido a la fuerza eléctrica que ejercen las placas del condensador. Sea a la aceleración de la partícula α en la dirección vertical debido al potencial eléctrico que ejercen las placas del condensador:

$$F = ma = q_\alpha E, \quad E = \frac{V}{d}, \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{V}{d} = 2.39 \times 10^{15}\,\mathrm{m/s^2} \tag{2}$$

usando la expresión para el alcance en un tiro parabólico:

$$R = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{a} \tag{3}$$

notamos que los ángulos $\theta_1 + \theta_2 = 90°$ (ángulos complementarios), por lo tanto $\sin\theta_1 \cos\theta_2 = \sin\theta_2 \cos\theta_1$ -¿puedes demostrarlo?- y por lo tanto el alcance es el mismo para ambos ángulos y las partículas se proyectan en un mismo punto. Esta propiedad permite enfocar un haz de partículas en un mismo punto, todas las partículas que emergen con una grado más o menos respecto de 45° son enfocadas en un mismo punto.

El alcance:

$$R = \frac{2v_0^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1}{a} = 0.015\,\mathrm{m} = 1.5\,\mathrm{cm} \tag{4}$$

de la formula de la altura máxima del tiro parabólico, se obtiene:

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2a} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{V}{d}} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2}\frac{m_\alpha d}{q_\alpha V} \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} h_1 = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta_1}{2a} = 0.00389\,\mathrm{m} \\ h_1 = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta_1}{2a} = 0.00362\,\mathrm{m} \end{array}, \qquad h_1 - h_2 = 0.00027 = 2.7\,\mu\mathrm{m} \tag{6}$$

Problema 2

La intensidad del campo magnético producido por un cable de longitud l que conduce una corriente i a la distancia r desde el cable (ver figura) esta dado por la siguiente expresión:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{r}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \tag{7}$$

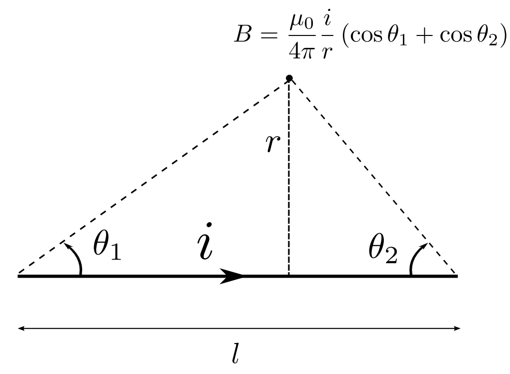


Figura 2: Campo magnético para un cable finito

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ NA^{-2} es la permeabilidad del vacío.

Considera ahora un cable en forma de polígono regular de n lados y radio a por el que se conduce una corriente i. Encuentra la expresión del campo magnético en el centro del polígono, debes considerar que esta expresión debe depender del número de lados n, del radio a y la corriente i.

Por otra parte se sabe que en el centro de una espira circular de radio a por la que circula una corriente eléctrica i se genera un campo magnético de intensidad:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a} \tag{8}$$

¿Con la expresión que encontraste para el campo magnético en el centro del polígono regular de n lados y radio a puedes verificar la expresión anterior, que límite debes tomar?

Solución

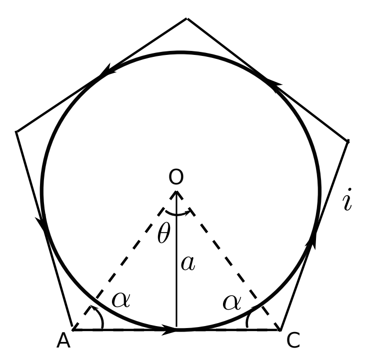


Figura 3: Campo magnético para un cable finito

Sea un polígono de n lados circunscrito al circulo de radio a, entonces de acuerdo a la figura se tiene que:

$$\theta = \frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{n} \tag{9}$$

El campo magnético debido al segmento AC, de acuerdo a la expresión (7), en el centro del circulo es:

$$B_{AC} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{a}(\cos\alpha + \cos\alpha) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\cos\alpha \tag{10}$$

para los n lados iguales que forman el polígono, el campo total es:

$$B = n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\cos\alpha \tag{11}$$

pero tenemos que $\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, sustituyendo este resultado en la expresión anterior:

$$B = n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{12}$$

Esta es la expresión del campo magnético en términos de a, n, i

Las siguientes aproximaciones son útiles:

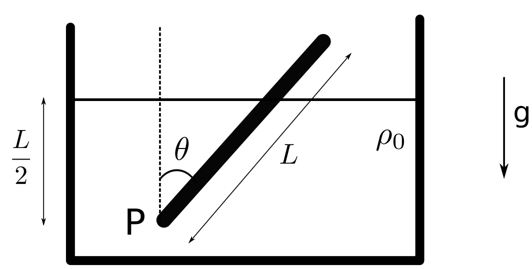
Si x es un ángulo muy pequeño ($x \ll 1$), entonces $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$

Entonces, cuando el número de lados es muy grande n es muy grande y el ángulo π/n es muy pequeño. Utilizando la aproximación del seno para ángulos muy pequeños

$$B = n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \approx n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\frac{\pi}{n} = \frac{\mu_0 i}{2a} \tag{13}$$

Problema 3

Una barra uniforme de longitud L, sección transversal de área A y densidad ρ esta sumergida parcialmente en agua (densidad $\rho_0 = 1$ gr/cm^3). Uno de los extremos de la barra esta sujeto en un punto P a una distancia $L/2$ por debajo de la superficie del líquido. Todo el sistema esta sujeto a la gravedad en la dirección vertical hacia abajo.



Cuál debe ser la densidad ρ de la barra, necesaria para que se mantenga fija a 45°. ¿Es posible que la barra se mantenga en equilibrio para cualquier valor de la densidad ρ de la barra?

Solución.

Las fuerzas que actúan sobre la barras son la gravedad y la de flotación. Respecto del punto P, el brazo de palanca de la gravedad es $\frac{L}{2}\sin\theta$ mientras que el de la fuerza de flotación es $\frac{1}{2}\frac{L}{2\cos\theta} = \frac{L}{4\cos\theta}$.

Si la barra esta en equilibrio la suma de torcas es cero. Empleando el punto P como origen:

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{\tau}_P &= 0 \\ -(mg)\frac{L}{2}\sin\theta + F_f\frac{L}{4\cos\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

la fuerza de gravedad y de flotación están dada por:

$$\begin{aligned} \text{peso} \quad & mg = (AL\rho)\, g \\ \text{fza de flotación} \quad & F_f = \left(\frac{AL}{2\cos\theta}\right)\rho_0 g \end{aligned} \tag{15}$$

(ρ la densidad de la barra) Sustituyendo en la ecuación de equilibrio de torcas, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\rho_0}{4}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \rho\sin\theta \tag{16}$$

Si el ángulo de la barra es $\pi/4$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ entonces la densidad de la barra debe ser:

$$\rho = \frac{\rho_0}{4}\frac{1}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\rho_0}{2} \tag{17}$$

De la ecuación (16) y el rango de la función coseno: $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, se obtiene que $\frac{\rho_0}{4} \leq \rho$. Pero además, para que la condición de equilibrio (14) sea valida es necesario que la barra No este sumergida completamente (en cuyo caso la barra se alinea horizontalmente), es decir el mayor ángulo posible es $\theta_m = 60^\circ$ ($\cos\theta_m = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2}$) que corresponde a una densidad $\rho = \rho_0$.

Por lo tanto, para la configuración geométrica del problemas la densidad de la barra debe estar entre los valores:

$$\frac{\rho_0}{4} \leq \rho \leq \rho_0 \tag{18}$$

Problemas de matemáticas

Una parte importante en la resolución de problemas de física implican una habilidad básica en la "talacha" matemática, por lo cual es importante ejercitar esta parte y en las tareas se incluirá siempre una parte de resolver ejercicios de álgebra, geometría, trigonometría, calculo, etc. Ya que han planteado bien un problema de física el cual les conduce a un sistema de ecuaciones, resolver una ecuación cuadrática, hacer uso de trigonometría, geometría.... o hasta una ecuación diferencial, lo demás es hacer talacha matemática de manera correcta, sin equivocarse en un signo, una potencia, etc. por lo que deben ejercitar esto y la única manera es practicando.

Problema 1(Para hacer sin el uso de calculadora)

Sin el uso de calculadora es posible calcular las funciones trigonométricas de los ángulos especificados en la tabla 1. Entonces debes completar la Tabla 1 (incluida la columna de los ángulos en unidades de radianes).

θ (grados)	θ ángulo (radianes)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°$	0	0	1	0
$45°$		$1/\sqrt{2}$		
$30°$				
$60°$				
$90°$	$\pi/2$	1	0	∞
$120°$				
$135°$				-1
$150°$	$15\pi/18$			
$180°$	π	0	-1	0
$210°$				
$225°$				
$240°$				
$270°$		-1	0	∞
$300°$				
$315°$				
$330°$				
$360°$	2π	0	1	0

Tabla 1

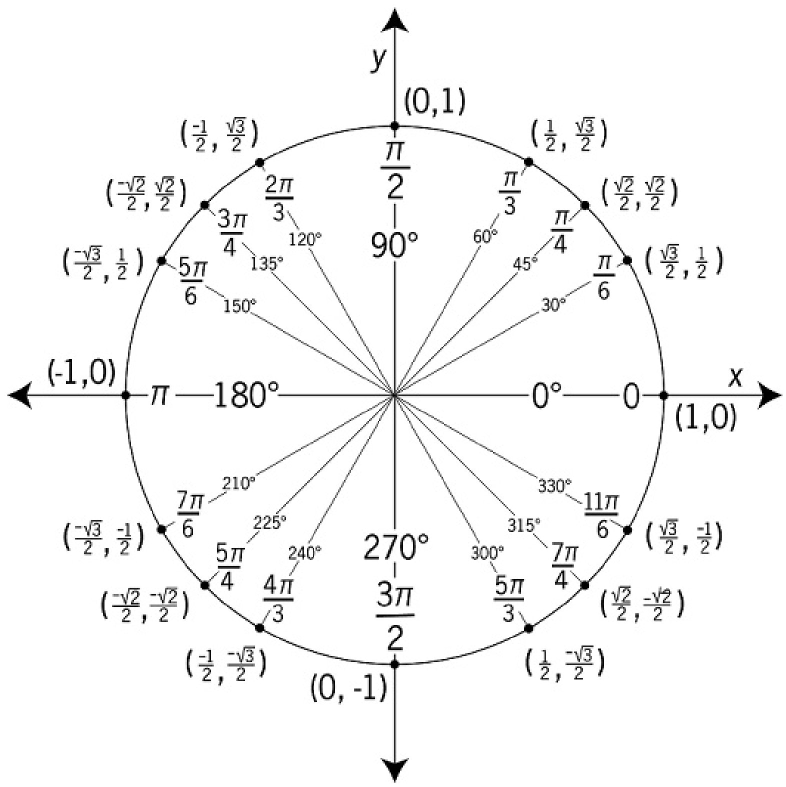
Sugerencias:

Construye un triángulo equilátero cuyos lados miden 1 unidad y un triángulo isósceles cuyo lado común mida también 1 unidad.

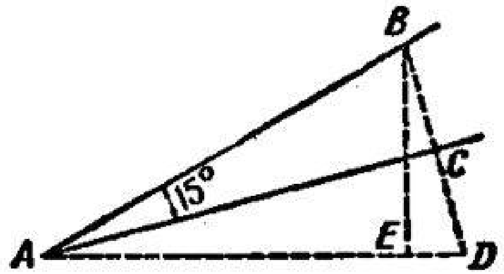
También puedes hacer uso las formulas del seno y coseno para la suma de ángulos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{19}$$

La solución esta contenida en la siguiente figura del circulo unitario, donde en la coordenada x se representa al seno y en la coordenada y al coseno del ángulo: $(\sin\theta, \cos\theta)$


y
x
(0,1)
(1,0)
(-1,0)
(0, -1)
0°
90°
180°
270°
30°
45°
60°
120°
135°
150°
210°
225°
240°
300°
315°
330°
0
π
π/2
3π/2
π/6
π/4
π/3
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
5π/3
7π/4
11π/6
(1/2, √3/2)
(√2/2, √2/2)
(√3/2, 1/2)
(-1/2, √3/2)
(-√2/2, √2/2)
(-√3/2, 1/2)
(-√3/2, -1/2)
(-√2/2, -√2/2)
(-1/2, -√3/2)
(1/2, -√3/2)
(√2/2, -√2/2)
(√3/2, -1/2)

Ahora calcula el seno de 15° -de nuevo, sin usar calculadora-, para ello emplea la siguiente figura:



donde: $\angle AEB = \pi/2$, $\angle ACB = \pi/2$, $\angle BED = \pi/2$. Además la recta AC es bisectriz del ángulo BAD.

$$\sin 15 = \frac{BC}{AB} \tag{20}$$

Del triángulo BAE, se obtiene que:

$$\sin 30 = \frac{BE}{AB}, \qquad \Rightarrow \quad BE = AB/2 \tag{21}$$

Por teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2, \qquad \Rightarrow \qquad AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \tag{22}$$

Se tiene ademas que $AB = AD$ por lo que:

$$ED = AD - AE = AB - \frac{\sqrt{3}}{2}AB = AB\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{23}$$

Por otra parte,

$$BD^2 = BE^2 + ED^2, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} BD^2 &= BE^2 + AB^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= AB^2\left[\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = AB^2\left(2 - \sqrt{3}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

finalmente, tomando en cuenta que $BC = BD/2$, entonces:

$$\sin 15 = \frac{BC}{AB} = \frac{BD/2}{AB} = \frac{1}{2}\frac{AB\sqrt{2-\sqrt{3}}}{AB} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \tag{25}$$

Problema 2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\,(x-y) + \dfrac{x-y}{3} = 3x+1 \\ x - y = 3 \end{cases}, \qquad \text{solución:} \quad x = 2,\ y = -1 \tag{26}$$

$$\begin{cases} x+y=u \\ x+z=v \\ y+z=w \end{cases}, \qquad \text{solución:} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{u+v-w}{2} \\ y &= \frac{u-v+w}{2} \\ z &= \frac{-u+v+w}{2} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{cases} x^2+xy+xz+yz=a \\ y^2+xy+xz+yz=b \\ z^2+xy+xz+yz=c \end{cases}, \qquad \text{donde: } abc \neq 0 \tag{28}$$

Solución:
Reescribimos el sistema (28) como:

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z) &= a \\ (x+y)(y+z) &= b \\ (x+z)(y+z) &= c \end{aligned} \tag{29}$$

hacemos cambio de variable:

$$\begin{aligned} x+y &= u \\ x+z &= v \\ y+z &= w \end{aligned} \tag{30}$$

con lo cual (29) se transforma en:

$$\begin{aligned} uv &= a \\ uw &= b \\ vw &= c \end{aligned} \tag{31}$$

cuya solución es:

$$(uvw)^2 = abc \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad uvw = \pm\sqrt{abc}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} u &= \pm\frac{\sqrt{abc}}{c} \\ v &= \pm\frac{\sqrt{abc}}{b} \\ w &= \pm\frac{\sqrt{abc}}{a} \end{aligned} \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

Solo queda por resolver (30), cuya solución esta dada en (27).

Problema 3

Calcula las siguientes sumas:

3a) $(1+2+3+4+5)+(10+9+8+7+6) == \frac{10(11)}{2} = 55$

3b) $(1+16)+(2+15)+(3+14)+(4+13)+(5+12)+(6+11)+(7+10)+(8+9) == \frac{16(17)}{2} = 8\,(17) = 137$

3c) $1+2+3+4+\ldots+35 = \frac{35(36)}{2} = 35 \times 18 = 630$

3d) $1+2+3+4+\ldots+1000=\frac{1000(1001)}{2}=500500\approx\frac{10^3\times10^3}{2}=5\times10^5$

3e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\dfrac{1}{1-1/2}-1=1$

Para sumar los primeros n números naturales se emplea la formula:

$$1+2+3+\ldots n=\frac{n\,(n+1)}{2} \tag{34}$$

Pueden ver este enlace con una breve explicación de la solución dada por Gauss para esta suma:

http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/100921_gauss.elp/ancdota_de_la_suma_del_1_al_100.html

La última suma se trata de una suma geométrica, en la wikipedia pueden ver como se obtiene la suma total:

http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_geométrica

Problema 4

Haz una gráfica las siguiente funciones y de sus derivadas. Para hacerlo correctamente, calcula diferentes valores de la función y haz una tabla, etiqueta tanto el eje horizontal como el vertical, emplea una escala adecuada que te permita apreciar el comportamiento global de la función (usa unidades de radianes para las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente).

4a) $x(t)=5+2t+\frac{1}{2}t^2$

4b) $z\,(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

4c) $y\,(x)=\sin\,(x)$

4d) $y\,(x)=x\sin\,(x)$

4e) $y\,(x)=\tan\,(x)$

4f) Realiza la gráfica de la siguiente función y responde los incisos que siguen:

$$f\,(x)=\frac{\sin\,(x)}{x} \tag{35}$$

- **i)** Calcula los valores (x están en radianes): $f\,(0.2)$, $f\,(0.1)$, $f\,(0.01)$
- **ii)** Cuál es el valor de la función en $x=0$, (puedes hacer una estimación)
- **iii)** Calcula la derivada de la función: $\dfrac{d}{dx}f\,(x)=$
- **iv)** Esboza el cuadrado de la función: $[f\,(x)]^2=\left[\dfrac{\sin\,(x)}{x}\right]^2$