Tarea 9

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**
Fecha de entrega: 25 mayo 2015

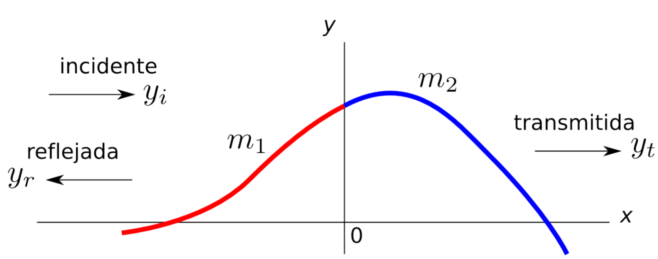
Problema 27, Reflexión de ondas en una cuerda.

Se tienen dos cuerdas de diferente densidad unidas en un punto ($x = 0$), la cuerda que se extiende a la izquierda del eje x ($x \leq 0$) tiene densidad lineal de masa m_1, por otra parte la cuerda que extiende a la derecha del eje x ($x \geq 0$) tiene densidad lineal de masa m_2. Una onda incidente que viaja en el sentido positivo del eje x, a través de la cuerda de la izquierda, es reflejada y transmitida en el punto de unión de ambas cuerdas. La onda transmitida se propaga a través de la cuerda de la derecha y en el mismo sentido que la onda incidente, mientras que la onda reflejada se propaga en sentido contrario de la onda incidente sobre la cuerda de la izquierda (ver figura).

Sea:

$$\begin{aligned} \text{onda incidente:} \quad & y_i(x,t) = A_i \sin(\omega t - k_1 x) \qquad & x \leq 0 \\ \text{onda reflejada:} \quad & y_r(x,t) = A_t \sin(\omega t + k_1 x) \qquad & x \leq 0 \\ \text{onda transmitida:} \quad & y_t(x,t) = A_r \sin(\omega t - k_2 x) \qquad & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde A_i, A_r, A_t corresponde a las amplitudes de las onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente. Nota que la frecuencia de oscilación ω de las ondas es la misma en ambas cuerdas (o medios), sin embargo la velocidad de propagación es diferente $v_1 = \omega/k_1$, $v_2 = \omega/k_2$ (la velocidad de una onda que se propaga en una cuerda esta dada por $v = \sqrt{T/m}$, donde T es la tensión y m la densidad lineal de masa).



El problema consiste en determinar los coeficientes de reflexión y transmisión definidos de la siguiente manera:

$$R \equiv \frac{A_r}{A_i} \qquad T \equiv \frac{A_t}{A_i} \tag{2}$$

Para ellos considera las siguientes dos propiedades físicas que deben satisfacer las cuerdas en el punto de unión ($x = 0$):

1. Las dos cuerdas no se despegan, siempre se mantienen unidas.

2. Si no hay ninguna fuerza externa en el punto de unión, entonces la componente transversal de la fuerza en ambas cuerdas debe ser la misma en el punto de unión, ¿por qué? Puedes verificar que, en general, cuando una onda se propaga en una cuerda la fuerza, en la componente transversal, en cualquier punto sobre la cuerda esta dada por: $F_y = T\dfrac{dy}{dx}$, donde T es la tensión en la cuerda.

a) Determina los coeficientes de reflexión y transmisión: R y T, en términos de las velocidades de propagación de la onda en cada cuerda, v_1 y v_2.
De acuerdo a los resultados obtenidos, podrás verificar que el coeficiente de transmisión es siempre positivo. Sin embargo, el coeficiente de reflexión R puede tomar valores negativos, ¿cuando sucede esto? En esté caso significa que la onda reflejada esta desfasada un valor de π respecto de la onda incidente. Esto mismo sucede para cualquier tipo de onda, en especial para las ondas electromagnéticas -es decir, la luz- dependiendo de el cambio del índice de refracción entre dos medios, el índice de refracción, a su vez, esta relacionado con la velocidad de propagación de las ondas en el medio.

b) Determina los coeficientes de reflexión y transmisión: R y T, ahora en términos de las densidades lineales de masa de cada cuerda.

c)Ahora considera el caso donde solo esta la cuerda de la izquierda y en $x = 0$ la cuerda esta fija al origen, en $x \geq 0$ hay una pared. Considera una onda que se propaga en la cuerda y describe la situación, ¿hay un cambio de fase en la onda reflejada? Considera la misma situación pero ahora la cuerda no esta fija en $x = 0$, sino que esta libre de moverse verticalmente, ¿hay un cambio de fase?

d) Por conservación de energía y de momento (en la dirección transversal) en el punto de unión de la cuerda, determina las expresiones de las velocidades de propagación de la onda en cada cuerda: v_1 y v_2, en términos de las densidades lineales de masa m_1 y m_2. El resultado es análogo a la colisión de dos partículas de masas m_1 y m_2.

e) Considera la colisión de dos partículas 1 y 2 de masas m_1 y m_2 respectivamente, antes de la colisión la partícula 2 esta en reposo y la partícula 1 se mueve con velocidad v_1. Si ambas partículas se mueven únicamente en el eje x, determina las velocidades de ambas partícula, v_1' y v_2', después de la colisión en términos de las masas de la partículas, compara con el resultado anterior.

Problema 28, Polarización de las ondas electromagnéticas.

La polarización es una propiedad de las ondas transversales, en especial de las ondas electromagnéticas, y hace referencia al plano de vibración de la onda. En las ondas electromagnéticas por convención el plano de polarización lo define el plano que contiene al campo eléctrico $\mathbf{E}$.

En la figura (0.1) se muestra una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje z (la dirección de propagación de la onda esta determinada por el vector $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$) ; el campo eléctrico $\mathbf{E}$ oscila en la dirección del eje x mientras que el campo magnético oscila en la dirección y (en una onda electromagnética que se propaga en el vacío, el vector del campo magnético $\mathbf{B}$ siempre es perpendicular campo $\mathbf{E}$).

La onda que se muestra en la figura esta polarizada linealmente en la dirección del eje x . Cuando el vector del campo eléctrico $\mathbf{E}$ oscila siempre en la misma dirección se conoce como **polarización lineal.**

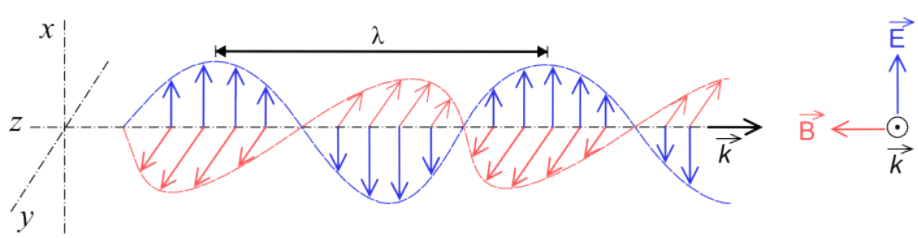


Figura 0.1: Polarización lineal de una onda electromagnética, para todo tiempo el campo eléctrico esta contenido en el plano $z\,x$.

Estado de polarización de las ondas electromagnéticas.
En general el vector del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en una onda electromagnética puede cambiar de dirección y girar sobre el plano perpendicular al de propagación de la onda y describir una circunferencia o una elipse, como se muestra en la figura siguiente:

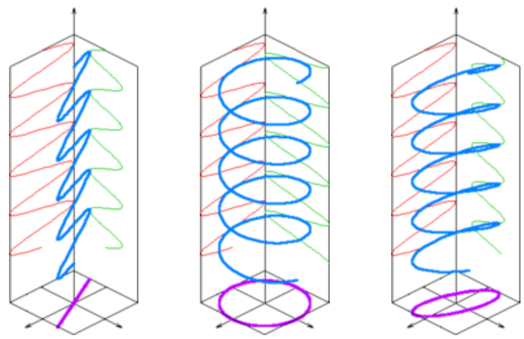


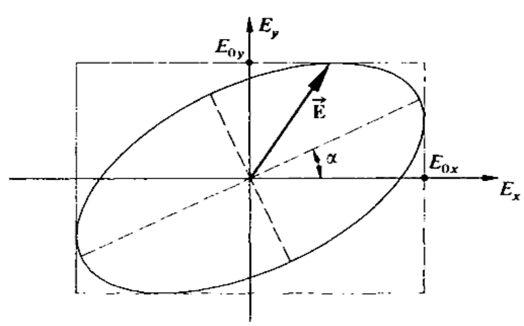
Figura 0.2: Estados de polarización de las ondas electromagnéticas, polarización lineal, circular y elíptica.

Para analizar el estado de polarización general de una onda supongamos una onda electromagnética que se propaga en la dirección z. El vector de campo eléctrico $\mathbf{E}$ esta contenido en el plano $x - y$. Cada una de sus componentes, sobre cada eje, se comporta como una onda de frecuencia ω:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\cos(kz - \omega t + \phi_1) \\ E_y &= E_{0y}\cos(kz - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \tag{3}$$

E_{0x} y E_{0y} corresponde a la amplitud de las componentes en los ejes x, y respectivamente. Supongamos que ambas componentes difieren en una fase $\Delta \equiv \phi_1 - \phi_2$. De esta manera el campo eléctrico queda determinado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} \\ |\mathbf{E}|^2 &= E_1^2\cos^2(kz - \omega t + \phi_1) + E_2^2\cos^2(kz - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \tag{4}$$



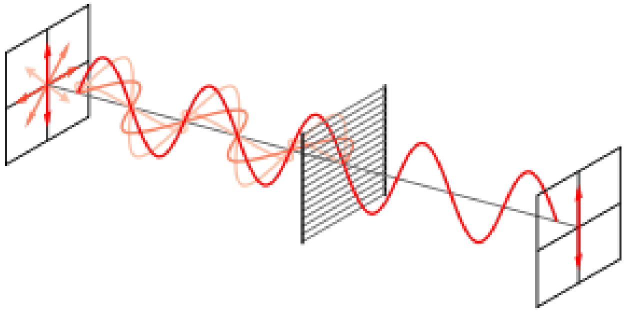
28.1 **Demuestra** a partir de las componentes del campo eléctrico (3), que el vector el campo eléctrico $\mathbf{E}$ describe una elipse rotada cuya ecuación es:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos(\phi_1 - \phi_2) + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2(\phi_1 - \phi_2) \tag{5}$$

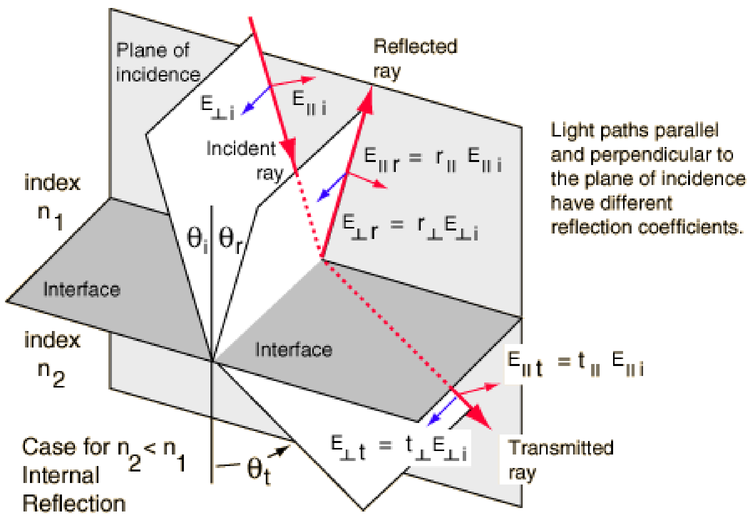
Determina el ángulo α en función de los parámetros E_{0x}, E_{0y} y $\Delta = \phi_1 - \phi_2$

28.2 **Verifica** el estado de polarización de la onda cuando $|\Delta| = 0$, π, $\pi/2$; cómo modifica las propiedades de propagación de la onda el signo de la diferencia de fase Δ, es decir que pasa cuando $\Delta < 0$ ó $\Delta > 0$.

En general las ondas electromagnéticas de una fuente de luz no están polarizadas (¿la luz de un láser esta polarizada?). Sin embargo al hacerla pasar a través de un medio que absorbe todas la componentes del campo que están fuera de un *eje óptico,* característico del material, la luz queda polarizada. Estos dispositivos se conocen como *polarizadores.*



Otra manera de obtener luz polarizada es a través de reflexión de la luz. Cuando la luz incide sobre un material, una parte de la luz es reflejada y otra transmitida, las propiedades de reflexión y transmisión de la luz en cada una de las componentes del vector del campo eléctrico están determinadas por las ecuaciones de Fresnel. Si descomponemos al vector **E** en dos componentes, una de ellas perpendicular al plano de incidencia $E_\perp$ y otra paralela al plano $E_\parallel$.



Las componentes paralela y perpendicular del campo eléctrico reflejadas y transmitidas obedece las ecuaciones de Fresnel, que se obtiene a partir de las condiciones que deben satisfacer los campos electricos en la frontera de dos medios de índice diferente, nota la analogia con el problema anterior de la onda que se propaga en una cuerda de diferente densidad. Las ecuaciones de Fresnel son las siguientes:

$$\begin{array}{c}\text{componente}\\ \text{perpendicular}\end{array}\left\{\begin{aligned} r_\perp &\equiv \left(\frac{E_{\perp r}}{E_{\perp i}}\right) = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\\ t_\perp &\equiv \left(\frac{E_{\perp t}}{E_{\perp i}}\right) = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\end{aligned}\right. \quad \begin{array}{c}\text{componente}\\ \text{paralela}\end{array}\left\{\begin{aligned} r_\parallel &\equiv \left(\frac{E_{\parallel r}}{E_{\parallel i}}\right) = \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}\\ t_\parallel &\equiv \left(\frac{E_{\parallel t}}{E_{\parallel i}}\right) = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Se definen los coeficientes de reflexión perpendicular $r_\perp$, reflexión paralela $r_\parallel$; transmisión perpendicular $t_\perp$ y transmisión paralela $t_\parallel$.

28.3 Demuestra que los coeficientes de reflexión y transmisión se puedes escribir como:

$$\begin{aligned} r_\perp &= -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)} & r_\parallel &= -\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}\\ t_\perp &= -\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)} & t_\parallel &= -\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}\end{aligned} \tag{7}$$

28.4 Determina el ángulo de incidencia θ_B (en función de los indices n_1 y n_2) para el cual la luz reflejada esta polarizada linealmente en el plano perpendicular al plano de incidencia.

28.5 Responde a las siguientes preguntas, justifica tus respuestas:

- ¿Hay un cambian de fase en las componentes transmitidas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?
- ¿Hay un cambian de fase en las componentes reflejadas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?

Problema 29, masa de fotón, masa de una estrella.

Un fotón es una partícula con la propiedad de que su masa es nula $m = 0$ y se mueve siempre a velocidad de la luz en el vacío c. En este sentido los fotones no son afectados gravitacionalmente. Sin embargo experimentalmente se observa que los fotones emitidos sobre la superficie de estrellas muy masivas tienen un corrimiento hacia el rojo en su frecuencia, esto se puede entender como si los fotones fueran atraídos gravitacionalmente por la estrella.

Para entender el corrimiento al rojo en la frecuencia de los fotones emitidos sobre la superficie de una estrella, un modelo muy simple consiste en asociarle a un fotón de frecuencia f una "masa inercial" m determinada por su energía, esta masa se puede suponer también que es igual a su "masa gravitacional". En consecuencia, un fotón emitido sobre la superficie de una estrella pierde su energía cuando se escapa del campo de gravedad de la estrella.

La energía total relativista de una partícula con de masa en reposo m_0 y que se mueve a una velocidad v esta dada por:

$$E = \gamma m_0 c^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{8}$$

donde $c = 299,792,458$ m/s, o en términos del momento de la partícula:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{9}$$

Por otro lado, la energía de un fotón en términos de su frecuencia f y en términos de su momento lineal esta dada por:

$$\begin{aligned} E &= hf \\ E &= pc \end{aligned} \tag{10}$$

de donde el momento lineal de un fotón como función de su frecuencia esta dado por:

$$p = \frac{hf}{c} \tag{11}$$

29.1 Determina la "masa gravitacional" m de un fotón de frecuencia f y demuestra que el cambio en la frecuencia del fotón cuando escapa del potencial gravitacional de la estrella esta dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\Delta f}{f_i} = -\frac{GM}{Rc^2} \tag{12}$$

Donde f_i es la frecuencia inicial del fotón, cuando se encuentra sobre la superficie de la estrella; M y R corresponde a la masa y el radio de la estrella, G es la constante gravitacional y c la velocidad de la luz en el vacío.

Si se mide el corrimiento hacia el rojo de una línea espectral conocida de una estrella muy lejana, se puede utilizar este dato para determinar la razón M/R. El conocimiento del radio de la estrella R permite entonces calcular la masa M de la estrella.

29.2 Una sonda espacial se emplea para medir la masa M y el radio R de una estrella de nuestra galaxia. Los fotones emitidos por el ion He+ en la superficie de la estrella pueden ser detectados mediante *absorción resonante* con otros iones He+ que se encuentran contenidos en una cámara de pruebas situada en la nave. Para que sean detectados por absorción resonante, la frecuencia de los fotones emitidos en la superficie estelar cuando llegan a la sonda debe ser la necesaria para que sean absorbidos por los iones contenidos en la sonda.

A medida que la nave espacial se aproxima a la estrella directamente (radialmente) se mide la velocidad relativa $v = \beta c$ de la sonda que lleva la cámara de prueba respecto de la estrella, como función de la distancia d entre la sonda y la superficie de la estrella. Los datos experimentales están recogidos en la tabla de abajo.

Utilizar los datos de la tabla para hacer un análisis gráfico (en papel milimetrico) y determinar la masa M y el radio R de la estrella. Con estos valores, calcula el cambio de frecuencia (12).

Suponer $\Delta f \ll f$, Hint: efecto Doppler.

β ($\times 10^{-5}$)	d ($\times 10^{8}$ m)
3.352	38.90
3.297	19.98
3.195	13.32
3.077	8.99
2.955	6.67

Con el fin de determinar R y M en el experimento, es usual considerar una corrección a la frecuencia debido al retroceso de los iones que emiten los fotones, este retroceso se debe al movimiento térmico [1]

29.3 Suponiendo que los átomos se encuentran inicialmente en reposo y al emitir un fotón retroceden. Encuentra la expresión de la energía hf del fotón emitido en términos de la diferencia de energía ΔE entre los niveles atómicos del átomo en reposo y la masa en reposo inicial del átomo m_0.

Problema 30, varios.

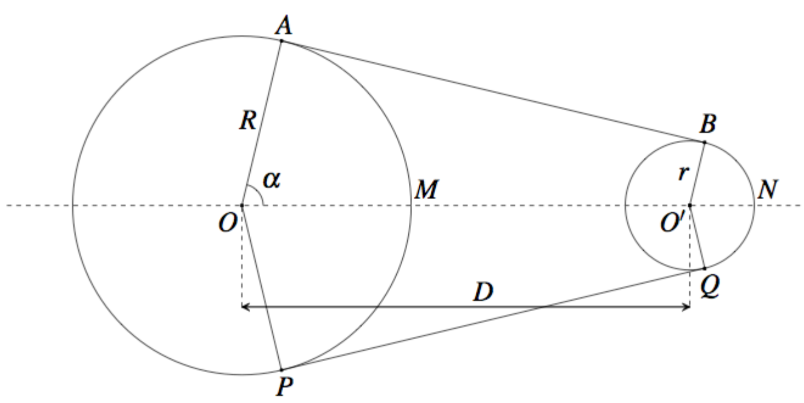
30.1 Demostrar que cuando un cuerpo en movimiento bajo una fuerza que se opone al movimiento es proporcional al cuadrado de la velocidad $F = kv^2$, entonces la velocidad del cuerpo como función del tiempo esta dada por:

$$v = v_L \frac{(v_0 + v_L)\, e^{(kv_L/m)t} + (v_0 - v_L)\, e^{-(kv_L/m)t}}{(v_0 + v_L)\, e^{(kv_L/m)t} - (v_0 - v_L)\, e^{-(kv_L/m)t}} \tag{13}$$

donde v_0 y v_L son constantes, ¿cuál es el significado de ambas constantes? (m es la masa del cuerpo)

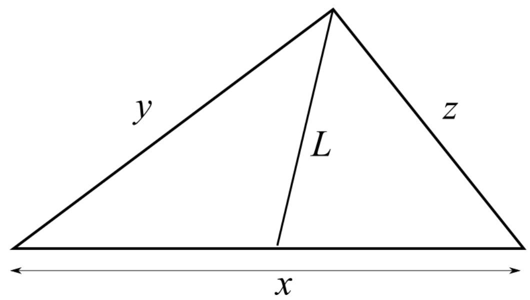
30.2 Una cadena de transmisión de torca, une dos ruedas dentadas de radios R y r. Si la distancia entre sus centros es $D > R + r$ y están sobre la horizontal.

Determina la longitud de la cadena en términos de los radios R, r, la distancia que separa sus centros D y del ángulo α de la figura.



30.3 Determina la longitud L de la bisectriz correspondiente al ángulo opuesto al lado de longitud x, en términos de los lados del triangulo x, y, z.

[1] En la practica, el movimiento térmico de los átomos no causa el desplazamiento de las lineas de emisión, sino que provoca que las lineas de emisión sean en realidad bandas y por lo cual se puede considerar que los efectos térmicos son tomados en cuenta.


y
z
L
x