Tarea 14

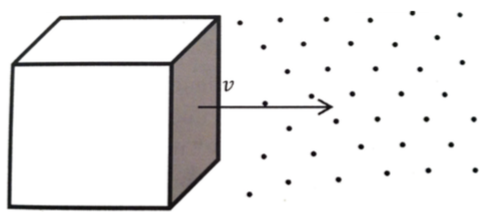
Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: viernes 23 septiembre.

Problema 56, Fuerza de arrastre.

La fuerza de arrastre se presenta en objetos que se mueven a través de un fluido. Actúa en la dirección del movimiento relativo al fluido. La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad. En muchos casos, como en el diseño de automóviles se trata de minimizar dicha fuerza, sin embargo, otros dispositivos, como los paracaídas, se diseñan maximizando la fuerza de arrastre a bajas velocidades.

El estudio teórico de la fuerza de arrastre es una empresa compleja, incluso para objetos con simetría, pues no se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones que los modelan. Sin embargo, es posible obtener información valiosa con un modelo sencillo.

Considere un modelo que consiste en un objeto macroscópico que se mueve a través de un fluido constituido por moléculas uniformemente distribuidas donde cada una está inicialmente en reposo. En este modelo la fuerza de arrastre surge exclusivamente de lascolisiones entre las moléculas y el objeto en movimiento. Dichas colisiones se suponen perfectamente elásticas.



a) Un objeto de masa M y velocidad v choca frontalmente con una única molécula de masa m inicialmente en reposo. Encuentre el cambio en la velocidad Δv en el objeto debido al choque. Exprese su resultado en función de M, m y v.

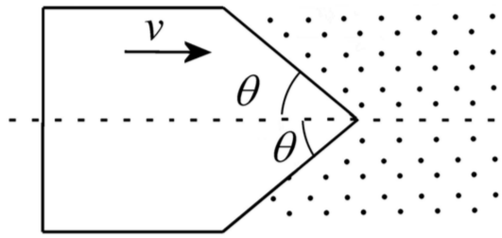
b) Un cubo de arista L se mueve a través de un fluido con densidad ρ en dirección perpendicular a una de sus caras. Demuestre que la fuerza de arrastre F_D es:

$$F_D = 2\rho A v^2 \tag{1}$$

donde v es la velocidad del cubo y A el área de una de sus caras. Considere que la masa m de cada una de las moléculas del fluido es mucho menor que M

c) Un cubo de 10.0 cm por lado se mueve en línea recta con rapidez constante de 0.600 m/s a través de un gas formado por moléculas en reposo de O_2 con densidad $\rho = 1.43\,\mathrm{kg/m^3}$. Calcule la potencia necesaria para que el cubo mantenga su velocidad constante.

d) Se quiere modificar la forma del cubo para mejorar su aerodinámica, esto es, disminuir su fuerza de arrastre en su movimiento a través del fluido. Para ello se le da forma de cuña simétrica. Para caracterizar la aerodinámica del nuevo objeto (en la figura se muestra su sección transversal), se introduce un parámetro K en la ecuación anterior.



Este parámetro depende del ángulo θ (indicado en la figura). Note que para $K = 1$, se recupera la forma de la fuerza de arrastre para el cubo. Encuentre el coeficiente K para el nuevo objeto si las partículas colisionan elásticamente sobre la superficie de la cuña y su masa es muy pequeña comparada con la del objeto, de modo que se produce una "reflexión especular" de las moléculas.

Problema 57, enfriamiento láser.

En 1997 el Premio Nobel de Física les fue concedido a Steven Chu, Claude Cohen- Tannoudji y Willian D. Philips por su contribución al desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle y Carl E. Wieman utilizaron estos métodos para obtener la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos, por lo que recibieron el Premio Nobel de Física en 2001. El fundamento de estos métodos es la técnica que se denomina *"láser cooling"*, en la cual se utiliza la colisión entre fotones (provenientes de un láser) y los átomos del gas que se pretende enfriar. El láser emite fotones con una energía tal que un fotón puede ser absorbido cuando colisiona con un átomo del gas.

Se pretende enfriar un gas de átomos de sodio (M=23 g/mol) que se encuentra a la temperatura de 300 K con un láser que emite fotones con una energía tal que un átomo de sodio, al absorber un fotón, salta del estado fundamental ($E_{fund} = -5.14$ eV) hasta el primer estado excitado ($E_{exc} = -3.04$ eV).

Puede considerar que la temperatura, T, del gas se relaciona con la energía cinética media, E_c, de los átomos de sodio a través de la expresión

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T \tag{2}$$

donde $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann

Datos: $N_A = 6.02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^-1$; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s; 1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J. Considere que los átomos son no relativistas.

(a) ¿Cuál es la velocidad media de un átomo de sodio en un gas a 300 K?

(b) Obtenga una expresión para la variación de la velocidad de un átomo de sodio cuando colisiona frontalmente con un fotón del citado láser. Calcule el valor numérico para esa variación, considerando que la energía del fotón absorbido es *exactamente igual* a la energía de la transición. ¿Cuántas colisiones de este tipo serían necesarias para detener un átomo de sodio?

(c) En realidad, como la variación de la energía cinética del átomo no es nula, la energía del fotón *no es exactamente igual* a la energía de la transición.

(c.1) Demuestre que la variación de la energía cinética del átomo asociada a la absorción del fotón en una colisión frontal se puede escribir como

$$\Delta E_c = -m\,|v_i|\,|\Delta v| + \frac{1}{2} m\,|\Delta v|^2\,, \tag{3}$$

donde las magnitudes $|v_i|$ y $|\Delta v|$ son los módulos de los vectores *velocidad inicial y variación de la velocidad del átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule la razón $\Delta E_c / E_{foton}$ para los átomos con la velocidad obtenida en (a), considerando que, en este caso, el primer término de la expresión anterior para ΔE_c es la dominante (es decir, que el segundo término del segundo miembro de esta expresión es despreciable) y que puede utilizar para la variación de la velocidad del átomo el resultado obtenido en la parte (b).

(d) La temperatura final alcanzada en un enfriamiento de este tipo está limitada inferiormente por lo que se denomina límite de retroceso (*recoil limit*) relacionado con el retroceso de los átomos en el proceso de absorción y emisión.

(d.1) Obtenga una expresión para la variación de la energía cinética de un átomo con velocidad inicial nula que absorbe un fotón y demuestre que, en este caso, la energía del fotón debe ser mayor que la energía de la transición atómica.

(d.2) Calcule la diferencia de energía cinética del apartado anterior, sabiendo que E^2_{foton}/mc^2 se puede aproximar por $E^2_{transición}/mc^2$, donde m representa la masa del átomo de sodio y $E_{fotón}$ la energía del fotón absorbido.

(d.3) Considere que el átomo que absorbió un fotón en las condiciones del apartado anterior, que quedó en estado excitado, emite un fotón en la misma dirección y en sentido opuesto al de su velocidad. Calcule la variación de la energía cinética del átomo. También en este caso puede utilizar la aproximación $\left(E'_{fotón}\right)^2/mc^2 \approx \left(E_{transición}\right)^2/mc^2$, en la que $E'_{fotón}$ es la energía del fotón emitido.

(d.4) Considerando este proceso de absorción y de emisión, calcule la ganancia de energía final del átomo y la temperatura a que corresponde. ¿Cuál es la importancia del proceso en el enfriamiento de átomos?

Problema 58, análisis de datos experimentales.

1) Campo magnético de un imán y campo magnético terrestre

El campo magnético producido por un imán cilíndrico en un punto de su eje de simetría lleva la dirección de dicho eje, y su módulo puede expresarse, en puntos alejados frente al tamaño del imán, en la forma

$$B_m = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r^n} \tag{4}$$

donde m es el llamado momento magnético del imán, que caracteriza su “potencia”, r es la distancia al centro del imán y n es un número entero positivo que queremos determinar experimentalmente.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ NA^{-2}

Procedimiento experimental

Con el montaje mostrado en la figura, la brújula A está inicialmente orientada en la dirección de la componente horizontal del campo magnético de la Tierra B_H (dirección N–S). Si se sitúa de forma perpendicular (dirección E–O) un imán B, la brújula gira hasta orientarse en la dirección del campo magnético total, suma del campo magnético terrestre B_H y del producido por el imán B.

Primera parte

En esta primera parte de la prueba experimental se va a medir la desviación angular de la brújula al acercar gradualmente el imán B y, a partir de estas medidas, se determinará cómo decrece con la distancia el campo magnético que crean.

Con la geometría del montaje mostrado en la figura, el campo B_m producido por el imán B, orientados en la dirección E-O, es perpendicular a la componente horizontal del terrestre, B_H, de forma que la brújula se orienta a un ángulo θ con la dirección N–S dado por

$$\tan\theta = \frac{B_m}{B_H}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{B_H}\frac{1}{r^n} \tag{5}$$

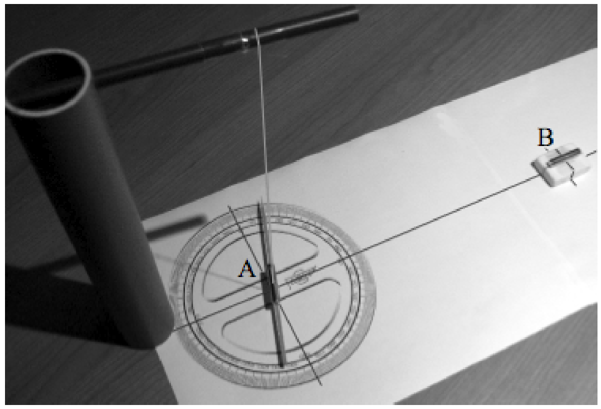
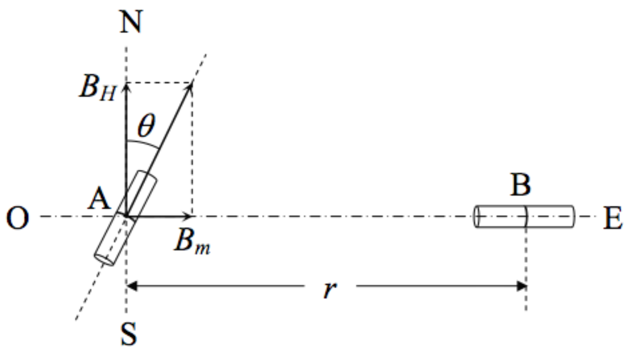


Fig. 1



En la siguiente tabla se reporta la desviación angular de la brújula para valores de r entre 20 cm y 40 cm, a intervalos de 2 cm. A partir de los valores, encontrar el valor de la potencia n.

r (m)	θ_1 (grados)	θ_2 (grados)
0.380	6	7
0.360	7	8
0.340	8	9
0.320	10	11
0.300	12	13
0.280	15	16
0.260	19	19
0.240	23	24
0.220	29	30
200	37	38

Segunda Parte

En la segunda parte, se medirá el periodo de las oscilaciones de la brújula (usando ahora el imán B como brújula) en presencia del campo terrestre, y se determinará el valor de dicho campo B_H (de su componente horizontal) y del momento magnético m de la brújula.

En presencia del campo magnético terrestre, la brújula A marca en equilibrio la dirección N–S. Si se le da un pequeño impulso angular (en el sentido de retorcer el hilo del que cuelgan los imanes), oscila en torno a la dirección de equilibrio. Este sistema constituye un péndulo de torsión. El par de fuerzas que tiende a llevar la brújula a su orientación de equilibrio se debe a la interacción entre el campo magnético de la Tierra (componente horizontal), B_H, y el momento magnético de la brújula, m. El periodo T de pequeñas oscilaciones de la brújula es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB_H}} \tag{6}$$

donde I es el momento de inercia de la brújula. Para un cilindro recto de masa M, longitud L y radio R, que gira respecto a un eje perpendicular al eje principal de simetría por el punto medio (como es nuestro caso), el valor de I se obtiene

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2 \tag{7}$$

En la siguiente tabla se reporta el tiempo y el periodo de varias mediciones que se realizaron a partir de de 10 ciclos.

No. oscilaciones	10	10	10	10	10	10
tiempo (s)	9.40	9.39	9.76	9.62	9.29	9.54
Periodo T (s)	0.940	0.939	0.976	0.962	0.929	0.954

Midiendo el periodo T y del resultado de la primera parte se obtiene la intensidad del campo magnético terrestre B_H y del momento magnético m del imán.

2) Fuerza de resistencia en un fluido.

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido con velocidad v, su movimiento se ve frenado por una fuerza, llamada de resistencia. Supongamos que esta fuerza depende de v en la forma $F = cv^\gamma$, donde c y γ son constantes que dependen de la forma y tamaño del cuerpo y de las características del fluido (densidad y viscosidad).

En este problema se va a estudiar experimentalmente la caída en el aire de uno o varios capacillos superpuestos, de manera que cambia la masa del objeto que cae, pero no su forma (aerodinámica). Como podrá comprobar, la velocidad de caída es prácticamente uniforme desde el momento en que se sueltan.

a) Las únicas fuerzas que actúan sobre los capacillos cuando caen son su peso y la resistencia del aire. Teniendo esto en cuenta, y llamando n al número de capacillos y m_0 a la masa de cada uno, obtenga una expresión analítica para la velocidad uniforme (límite) de caída, v_n. Transforme esta expresión y demuestre que la dependencia entre el logaritmo de t_n y el logaritmo de n, donde t_n es el tiempo de caída de n capacillos desde una altura h, es de la forma:

$$\ln(t_n) = -\frac{1}{\gamma}\ln(n) - \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{m_0 g}{c}\right) + \ln(h) \tag{8}$$

b) Basándose en la expresión anterior y en sus medidas experimentales de tiempos de caída, t_n, para $n = 1$, 2, 3 y 4, determine el valor de γ en este experimento.

c) Haga una estimación de la incertidumbre (margen de error) del valor de γ obtenido.

En la tabla de abajo se tabulan diez medidas de cada tiempo de caída (desde una altura $h = 2.1$ m), a partir de esos datos llena la tabla con la información marcada en cada columna.

n	tiempo de caida t_n/s										$\langle t_n \rangle$ /s	σ/s	$\ln(n)$	$\ln\langle t_n \rangle$	Δ_n
1	1.67	1.68	1.65	1.73	1.68	1.69	1.73	1.75	1.69	1.73					
2	1.25	1.31	1.30	1.29	1.23	1.33	1.30	1.25	1.32	1.25					
3	1.07	1.10	1.08	1.11	1.07	1.15	1.10	1.12	1.12	1.13					
4	0.99	1.96	1.98	1.99	1.04	1.00	1.05	1.00	0.99	0.98					

$\langle t_n \rangle$ significa promedio de t_n sobre las diez mediciones que se realizarón
σ es la desviación estandar,
$\Delta_n = \Delta[\ln(t_n)]$ es la incertidumbre en el dato $\ln(t_n)$.