Tarea avanzada IV

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: 25 de Marzo 2016

Problemas de matemáticas

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Como se vio en la tarea 5, la solución a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de primer orden son exponenciales, y cuando los coeficientes no son constantes pueden resolverse usando el método del factor integrante. Para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, de ordenes superiores, la solución también será una exponencial, o mejor dicho un conjunto de exponenciales. Pues bien, puede demostrarse que una ecuación diferencial de orden n, es decir, el máximo exponente de la derivada es n admite n soluciones linealmente independientes (es decir, una solución no puede ser generada por las otras. Y además, si se dan n condiciones iniciales, uno para cada potencia de la derivada, la solución es única.
Al tener esta información en mente, para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, basta sustituir la exponencial $e^{\lambda x}$ y resolver para todos los posibles valores de λ. Esto reduce nuestro problema a un problema algebráico. Una vez hecho esto se procede a hacer una superposición de las soluciones.
Ejemplo
Si se tiene la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dx} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

basta sustituir $e^{\lambda x}$, al hacer esto el problema se convierte a encotnrar las $\lambda' s$ tales que $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Digamos que estas soluciones son λ_1 y λ_2, entonces la solución general tendrá la forma de

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

Donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

   a) $\frac{dy}{dt} + (\sin t)y = 0$
   $C.I \;\; y(0) = \frac{3}{2}$

   b) $y\frac{dy}{dt} + (1+y^2)\, sin(t) = 0$
   $C.I \;\; y(0) = 1$

   c) $(1+e^y)\,\frac{dy}{dt} = cost$
   $C.I \;\; y(\frac{\pi}{2}) = 3$

   d) $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$

   e) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0$
   $C.I \;\; y(0) = 1\,; \; \frac{dy}{dt}(0) = 0$

   f) $2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 10y = 0$
   $C.I.y(1) = 5, y'(1) = 2$

g) $6\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + y = 0$

h) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$
$C.I. y(0) = 0, y'(0) = 2$

i) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y = 0$

Integrales

Calcular las siguientes integrales sobre sus dominios respectivos.

1. Calcular $I = \int\int\int_D \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ sobre la región
   $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big| x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

2. Calcular $I = \int\int\int_D \frac{dxdydz}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ sobre la región
   $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big| x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

   donde (a, b, c) es un punto fijo fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

Problemas de físcia

Problemas cortos

Radiación de cuerpo negro

1. La luminosidad es la medida de la energía emitida como radiación electromagnética por un cuerpo por unidad de tiempo, es decir, su potencia. Si solo el 1 % de la masa total actual del Sol puede ser transformada en energía durante su vida, estima el máximo posible de tiempo de vida del Sol, asumiendo que su luminosidad permanece constante y que la temperatura actual del Sol es $T = 5800K$.

2. Suponga un sistema de estrellas binario que se encuentre a una distancia $D = 1$ añ0s luz y que se encuentra constituido como sigue: La estrella mas grande de radio $R = 8 \times 10^8$ y la mas chica de radio $r = 4 \times 10^8$ orbitan en el plano paralelo a la linea de observación a una distancia $d = 2.2 \times 10^{10}$. Calcule la tasa de energía recibida por unidad de tiempo y unidad de area (llamada flujo) del sistema cuando este es máximo y cuando es mínimo.
   2.1 .- Del problema anterior, esboce la gráfica del flujo contra el tiempo si las masas de las estrellas son $M = 2 \times 10^{30}$ para la mas grande y $m = 2 \times 10^{29}$ para la mas chica.

3. Calcule la temperatura de la Luna debido a la radiación solar sabiendo que el albedo de la Luna es $\alpha = 0.14$ y su radio $r = 1.7374 \times 10^6 m$ y el radio del Sol $R = 7 \times 10^8$ y su temperatura $T = 5800K$. Suponga que la distancia entre el Sol y la Luna d es constante $d = 1.5 \times 10^{11} m$ y que la Luna esta en equilibrio y la energia absorbida es reemitida como radiación de cuerpo negro.

4. En la Tierra, debido a la atmósfera, la temperatura depende de la tasa con la que la energía proveniente del Sol penetra la atmósfera, y la tasa con la que sale. Encuentre una expresión de la temperatura en función de las transmitancias mencionadas %, los radios del Sol y la Tierra, la distancia entre ellos y la temperatura del Sol.

Relatividad Especial

En la relatividad, es común utilizar un tipo de unidades especiales para simplicar las expresiones. Estas unidades son conocidas como geométricas y en ellas $c = 1$ osea:

$$3 \times 10^8 s = 1m \tag{1}$$

Las transformaciones de Lorentz para un marco de referencia que se mueve respecto de otro a una velocidad v en el eje x son:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \gamma t - \gamma v x \\ \bar{x} &= -\gamma v t + \gamma x \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \end{aligned} \tag{2}$$

con:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Definimos el intervalo como

$$\Delta\, s^2 = -\Delta\, t^2 + \Delta\, x^2 + \Delta\, y^2 + \Delta\, z^2 \tag{3}$$

Problemas

1. Demuestre, mediante las transformciones de Lorentz que el intervalo es un invariante (i.e que $\Delta\, s^2 = \Delta\, \bar{s}^2$)

2. Halle la transformación de Lorentz que consiste en una transformación con velocidad v_x en la dirección x seguido de otra con velocidad v_y en la dirección y. Demuestre que la composición en el orden inverso da una transformación diferente

3. Suponga que se tiene una partícula que se mueve a velocidad constante v respecto de un marco de referencia inercial $\bar{O}$, y que éste último se mueve a velocidad de respecto de otro marco de referencia O. Demuestre que la velocidad medida de la partícula desde el marco O es:

$$v' = \frac{u+v}{1+vu} \tag{4}$$

   Tambien demuestre que si $u = 1$ entonces $u' = 1$. ¿Qué significa esto?

4. Definimos el parámetro de rapidez como:

$$\theta = tanh^{-1}(v) \tag{5}$$

   a) Demuestre que el parámetro de rapidez es aditivo

   b) Suponga que una partícula se mueve a velocidad v (en la dirección x) respecto al marco de referencia O. Ahora suponga que otra partícula se mueve a velocidad v respecto de la primera partícula, una tercera partícula se mueve a velocidad v respecto de la segunda y así sucecivamente. ¿Cuál es la velocidad de la N-partícula desde el marco de referencia O?. ¿Qué sucede cuando $N \to \infty$?

5. Una cámara distante toma una fotografía de una bala en movimiento (que tiene velocidad v) con longitud b en su marco de referencia (i.e en el marco de referencia en el que la bala se encuentra en reposo). Detrás de la bala y paralela a su çamino"se encuentra un flexómetro en reposo respecto de la cámara. La cámara se coloca de tal manera que se genera un ángulo ϕ entre la cámara y la dirección de la velocidad de la bala. ¿Cuál es la longitud apaente de la bala vista en la fotografía?

Problema Largo

Un número muy grande N de partículas puntuales movibles idénticas ($N >> 1$), cada una con masa m, son acomodadas en una cadena recta con $N + 1$ resortes idénticos de masa despreciable, cada uno con constante S. Los resortes están conectados a las partículas y al extremo hay dos partículas adicionales las cuales permanecen inmóviles (ver figura). Esta cadena servirá como un modelo de los modos de vibración de un cristal unidimensional. Cuando la cadena es puesta en movimiento, las vibraciones longitudinales de la cadena pueden ser vistas como una superposición de oscilaciones simples (llamados modos), cada uno con su propia frecuencia modal característica.

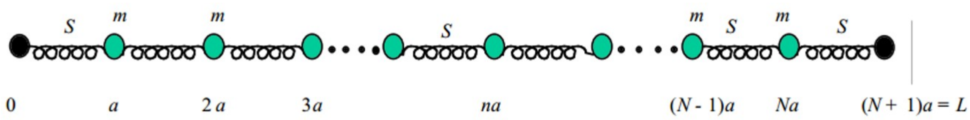

Figura 1:

1. Escriba la ecuación de movimiento de la n-ésima partícula.

   [Hint: Escriba la contracción de cada resorte en términos de la posición de la n-ésima partícula, y de sus vecinas ($n-1$,$n+1$). Luego sume ambas fuerzas.]

2. Para tratar de resolver la ecuación de movimiento, encontrada en la parte anterior, intente la solución

$$X_n(\omega) = A\sin(nka)\cos(\omega t + \alpha),$$

   donde $X_n(\omega)$ es el desplazamiento de la n-ésima partícula desde el equilibrio, ω es la frecuencia angular del modo de vibración y A, k y α son constantes; k y ω son el número de onda y la frecuencia del modo respectivamente. Para cada k, habrá una frecuencia ω correspondiente. Encuentre la dependencia de ω en k, los valores permitidos de k, y el máximo valor de ω. La vibración de la cadena es entonces una superposición de todos esos modos de vibración. Recuerde que en la frontera la función debe valer cero (pues los extremos son fijos).
   Fórmulas útiles:

$$\begin{aligned}(d/dx)\cos\alpha x &= -\alpha\sin\alpha x,\\ (d/dx)\sin\alpha x &= \alpha\cos\alpha x\\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\\ \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\end{aligned}$$

   [Hint: sustituya X_n, X_{n-1}, X_{n+1} en la ecuación anterior desarrolle y agrupe. Para encontrar los valores permitidos aplique la condición de frontera al sen$(N+1)ka$ y encuentre los valores permitidos de k]

   De acuerdo con Plank la energía de un fotón con frecuencia ω es $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Plank dividida por 2π. Einstein hizo un salto de esto asumiendo que dado un modo de vibración de un cristl con frecuencia ω también tenía esta energía. Note que un modo de vibración no es una partícula, pero es una simple configuración de oscilaciones de la cadena entera. Este modo de vibración es análogo al de un fotón y es llamado "fonón". Seguiremos discutiendo las consecuencias de esta idea en el resto del problema. Suponga que un cristal está hecho de un número muy grande ($\sim 10^{23}$) de partículas en una cadena recta.

3. Para una ω (o k) permitida podría no haber fonones; o sólo podría haber uno; o dos; o cualquier número de fonones. Entonces, tiene sentido tratar de calcular la energía promedio $\langle E(\omega)\rangle$ de un modo partícular con frecuencia ω. Sea $P_P(\omega)$ la probabilidad de que hayan p fonones con frecuencia ω. Entonces el promedio requerido es

$$\langle E(\omega)\rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_P(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_P(\omega)}$$

   Aunque los fonones son discretos, el hecho de que haya tantos de ellos (y P_p se vuelve muy pequeño para valores grandes de p) nos permite extender la suma hasta $p=\infty$, con un error despreciable. Ahora la probabilidad P_p estará dada por la fórmula de Boltzmann.

$$P_p(\omega) \propto \exp(-\frac{p\hbar\omega}{k_BT}),$$

   donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta de un cristal, la cual se considerará constante. La constante de proporcionalidad no depende de p.
   Calcule la energía promedio para fonones con frecuencia ω.

[Tal vez la siguiente fórmula le sea útil: $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = \frac{df}{dx}e^{f(x)}$]
[Hint: Sustituya $P_p(\omega)$ y observe que el denominador es la derivada del denominador, o bien use una función auxiliar o simplemente haga las series.]

4. Ahora, quisiéramos calcular la energía *total* E_T de un cristal. En la parte anterior se encontró que la energía promedio $\langle E(\omega)\rangle$ para el modo de vibración ω. Para encontrar E_T debemos multiplicar $\langle E(\omega)\rangle$ por el número de modos de un cristal por unidad de frecuencia ω y después sumar todas las contribuciones para todo el rango de frecuencias desde $\omega = 0$ hasta $\omega_m ax$. Tome un intervalo Δk en el rango de los números de onda. Para grandes valores de N y para Δk mucho más grande que el espaciado entre valores sucesivos (y permitidos) de k. ¿Cuántos modos pueden ser encontrados en un intervalo Δk?.

   [Hint: Use el resultado del inciso (2) para encontrar la separación entre los valores permitidos de y divida a Δk por ese valor para encotnrar el número total de modos.]

5. Para hacer uso de los resultados de los incisos (1) y (2), aproxime Δk por $\frac{dk}{d\omega}d\omega$ y replace cualquier suma por una integral sobre ω. (Es más conveniente usar la variable ω en lugar de k en este punto.) Escriba el número total de modos en el cristal en esta aproximación. También obtenga una expresión para E_T, no es necesario evaluarla.

   [La siguiente integral podría ser de ayuda $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$
   [Hint: Encuentre $\frac{dw}{dk}$ usando la fórmula del inciso (2), luego el diferencial del número total de modos dn quedará determinado por una función de ω y su diferencial, es decir $dn = f(\omega)d\omega$. Después, sobre todas las frecuencias, de cero a $\omega_m ax$]

6. La capacidad calorífica molar C_v de un cristal a volumen constante es experimentalmente accesible (puede medirse): $C_V = \frac{dE_T}{dT}$ (T = absolute temperature). Para el cristal en el que hemos trabajado determine la dependecia de C_V con T, para temperaturas muy altas y para temperaturas muy bajas (i.e., la dependencia es cosntante, lineal o una potencia dependiente de algún intervalo de temperatura etc.). Haga una gráfica cualitativa de C_V *vs* T, indicando las tendencias predecidas para temperaturas bajas y altas.

   [Hint: Use las aproximaciones correctas, usando la serie de Taylor. La integral resultante debe tener un valor independiente de T, pero debe ser finita!, y encuentre la proporcionalidad entre C_V y T.]

Partícula relativista

En la teoría especial de la relatividad la relación entre la energía E y el momento p de una partícula libre de masa en reposo mo es:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Cuando la citada partícula esta bajo la acción de una fuerza conservativa, la energía total de la partícula, la cual es la suma de $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ y la energía potencial, se conserva. Si la energía de la partícula es muy grande, su energía en reposo puede despreciarse (tal partícula se denomina ultrarrelativista).

1. Considerar el movimiento unidimensional de una partícula ultrarrelativista que está sometida a una fuerza central de módulo f. Suponer que la partícula está localizada en el origen de la fuerza siendo su momento inicial p_0 en el tiempo $t = 0$.Describir el movimiento de la partícula dibujando , al menos durante un periodo, x frente a t y el momento p frente a x. Especificar las coordenadas de los puntos de retorno en función de los parámetros p_0 y f. Indicar con flechas la dirección del progreso del movimiento en el diagrama (p, x). Existen intervalos muy cortos para los que la partícula no es ultrarrelativista , aunque estos deben ser ignorados.

2. Un mesón es una partícula formada por dos quarks. La masa en reposo del mesón es M y esta magnitud multiplicada por c^2 es la energía total de los dos quarks . Considerar un modelo unidimensional para el mesón en reposo, en el cual se supone que los quarks se mueven a lo largo del eje x atrayéndose entre sí con una fuerza de módulo constante f. Se admite que ellos pueden pasar uno a través del otro libremente. La masa en reposo de los quarks se desprecia. En el tiempo $t = 0$, los dos quarks se encuentran en $x = 0$.

Mostrar separadamente el movimiento de los dos quarks en los diagrmas (x, t) y (p, x) especificando los puntos de retorno en función de M y f e indicando la dirección del proceso en el diagrama (p, x) y determinar la distancia máxima entre ellos.

3. El sistema de referencia utilizado en el apartado (2) se denomina sistema S; el sistema ligado al laboratorio, referido como S', se mueve en la dirección negativa del eje X con velocidad constante $v = 0,6c$. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia se han elegido de modo que $x = 0$ en S coincide con $x' = 0$ en S' , en el tiempo $t = t' = 0$. Dibujar el movimiento de los dos quarks en un diagrama (x', t'). Especificar las coordenadas del punto de retorno en función de M, f y c y determine la máxima distancia entre los dos quarks en el sistema del laboratorio S'. Las coordenadas de una partícula observada en los sistemas S y S' están relacionadas por la transformación de Lorentz

$$x' = \gamma(x + \beta ct)$$
$$t' = \gamma(t + \beta \frac{x}{c}$$

Donde $\beta = \frac{c}{v}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ siendo v la velocidad del sistema S moviéndose con relación al sistema S'.

4. Para un mesón con masa en reposo $Mc^2 = 140MeV$ y velocidad $0,6c$ relativa al sistema del laboratorio S, determinar la energía E' en dicho sistema