Problema 1

La radiación (ondas electromagnéticas) que emite un *cuerpo negro* en equilibrio termodinámico tiene una distribución de frecuencias dada por la distribución de Planck:

$$\rho\left(\nu,\,T\right)=\frac{8\pi}{c^{3}}\frac{h\nu^{3}}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{1}$$

donde c es la velocidad de la luz, k la constante de Boltzmann y h la constante de Planck..

Esta cantidad corresponde a la energía por unidad de volumen, para una frecuencia ν dada, de la radiación electromagnética del cuerpo negro cuando se encuentra en equilibrio a la temperatura T. De tal manera la densidad de energía total del cuerpo negro queda determinada por la integral de la expresión (1) sobre todas las frecuencias posibles:

$$\frac{U}{V}=u=\int_{0}^{\infty}\rho\left(\nu,\,T\right)\,d\nu=\frac{8\pi}{c^{3}}h\left(\frac{kT}{h}\right)^{4}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{3}}{e^{x}-1}dx=\frac{4}{c}\sigma T^{4}=u\left(T\right) \tag{2}$$

donde $\sigma=\dfrac{2\pi^{5}k^{4}}{15c^{2}h^{3}}=5{,}67\times10^{-8}\ \mathrm{Js^{-1}m^{-2}K^{-4}}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y se conoce el valor de la siguiente integral:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{3}}{e^{x}-1}=\frac{\pi^{4}}{15} \tag{3}$$

La densidad de energía de la radiación de cuerpo negro solo depende de la temperatura T.

1.1 La densidad de energía de la radiación en un intervalo de frecuencias ν y $\nu+d\nu$ esta dada por la expresión:

$$\rho\left(\nu,\,T\right)d\nu \tag{4}$$

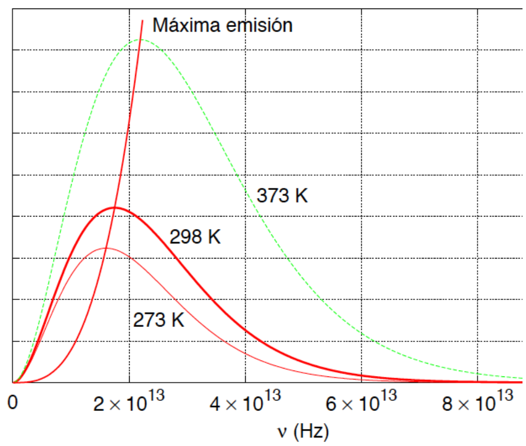
Si la longitud de onda esta relacionada con la frecuencia: $\lambda=c/\nu$, realiza un cambio de variable en la ecuación (4) para obtener su expresión en términos de la longitud de onda:

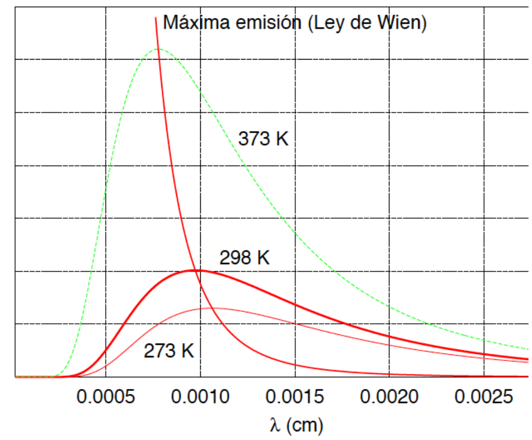
$$\rho'\left(\lambda,\,T\right)d\lambda \tag{5}$$

Solución:

$$d\nu=\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|d\lambda=\frac{c}{\lambda^{2}}d\lambda\quad\Rightarrow\quad\rho'\left(\lambda,\,T\right)d\lambda=\rho\left(\nu,\,T\right)d\nu=\frac{8\pi}{c^{3}}\frac{h\left(c/\lambda\right)^{3}}{e^{h(c/\lambda)/kT}-1}\frac{c}{\lambda^{2}}d\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^{5}}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1} \tag{6}$$

En las siguientes figuras se muestra la curva de distribución de Planck para tres diferentes temperaturas. En la figura de la izquierda esta representada la distribución de Planck en función de la frecuencia ν y en la figura de la derecha en función de la longitud de onda λ. De acuerdo al ejercicio anterior, estas curvas no son del todo iguales.





De acuerdo a las curvas de distribución de Planck, para cada temperatura T existe un valor máximo de la longitud de onda λ_{max} (o de la frecuencia ν_{max}) a la cual emite un cuerpo con esa temperatura. A la dependencia de λ_{max} con la temperatura se le conoce como ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{max} T = b \tag{7}$$

donde $b = 2{,}9 \times 10^{-3}\,\mathrm{mK}$.

1.2) A partir de la expresión que encontraste en el inciso anterior: $\rho'(\lambda, T)$, demuestra la ley de desplazamiento de Wien (7).

Para ello necesitarás resolver la siguiente ecuación:

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \tag{8}$$

En la parte final de la tarea se describe un método para calcular de manera aproximada la raíz de una ecuación trascendente.

Solución.

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}\right]_{\lambda_{max}} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad 1 - e^{x_m} = \frac{x_m}{5} \tag{9}$$

donde:

$$x = \frac{hc}{\lambda_{max} kT}, \qquad \lambda_{max} T = \frac{hc}{k}\frac{1}{x} = 2{,}9 \times 10^3\,\mathrm{m} \tag{10}$$

1.3 Obtén la expresión de la ley de Wien, en términos de la longitud de onda:

$$\nu_{max} = aT \tag{11}$$

encuentra el valor de la constante a.

Solución:

$$x = \frac{h\nu_{max}}{kT}, \qquad \nu_{max} = \left(\frac{k}{h}x\right) T = T \tag{12}$$

Fuentes:

http://en.wikipedia.org/wiki/Wien%27s_displacement_law
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/thermo/stefan.html

Problema 2

2.1) (P4.65) La presión dentro del Sol se estima que es de aproximadamente 400 millones de atmósferas. Estima la temperatura del Sol, considerando la presión del Sol se debe únicamente como resultado de la radiación.

2.2) (P4.66) La masa del Sol se estima que es del orden de 2×10^{30} kg, su radio de 7×10^{8} m y su temperatura de 5700 K.

a) Calcula la masa que el sol pierde por segundo por radiación.

b) Calcula el tiempo necesario para que la masa del Sol disminuya el 1 %

2.3) (P4.76) Estima la temperatura de la Tierra suponiendo que se encuentra en equilibrio con la radiación del Sol. El radio del Sol es

Formulas útiles:
La presión de radiación es un tercio de la densidad de la energía:

$$p_r = \frac{u}{3} \tag{13}$$

La potencia total radiada por unidad de área de un cuerpo negro que esta a temperatura T esta dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \tag{14}$$

$$p = \frac{1}{3}\rho < v^2 >$$

where ρ is the mass density. In the case of photon gas, the speed of all photons is identical being equal to c. Furthermore, from Einstein's relation

$$u = \rho c^2$$

where u is the energy density. Replacing $< v^2 >$ by c^2

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{3}\rho c^2 = \frac{u}{3}$$

4.64 Let T and T_0 be the Kelvin temperatures of the body and the surroundings. Then, by Stefan–Boltzmann law, the rate of loss of heat per unit area of the body is

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \sigma(T^4 - T_0^4)\\ &= \sigma(T - T_0)(T + T_0)(T^2 + T_0^2)\end{aligned}$$

If $(T - T_0)$ be small, $(T \approx T_0)$, and

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \sigma(T - T_0) \times 4T_0^3$$

Since T_0 is constant,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \propto (T - T_0); \qquad \text{(Newton's law of cooling).}$$

4.65 The energy density u and pressure p of radiation are related by

$$p = \frac{u}{3}$$

Furthermore, $u = 4\sigma T^4/c$

Eliminating u,

$$T = \left(\frac{3cp}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{3 \times 3 \times 10^8 \times 4 \times 10^8 \times 1.013 \times 10^5}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 2 \times 10^7\,\text{K}$$

4.66 (a) Power, $P = \sigma A T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4$

$$\begin{aligned}&= 4\pi(7 \times 10^8)^2(5.67 \times 10^{-8})(5{,}700)^4\\ &= 3.68 \times 10^{26}\,\text{W}\end{aligned}$$

Mass lost per second, $m = P/c^2 = \dfrac{3.68 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} = 4.1 \times 10^9\text{kg/s}$

(b) Time taken for the mass of sun (M) to decrease by 1% is

$$\begin{aligned}t &= \frac{M}{100} \times \frac{1}{m} = \frac{2 \times 10^{30}}{100} \times \frac{1}{4.1 \times 10^9} = 4.88 \times 10^{18}\,\text{s}\\ &= \frac{4.88 \times 10^{18}}{3.15 \times 10^7} = 1.55 \times 10^{11}\ \text{years}\end{aligned}$$

The negative sign in (3) is omitted because as λ increases v decreases.

4.76 Power radiated from the sun $= \sigma \times$ (surface area) $\times T_s^4$

$$P_s = \sigma 4\pi R_s^2 T_s^4$$

Power received by the earth,

$$P_E = \frac{\pi R_e^2}{4\pi r^2} . P_s$$

The factor πR_e^2 represents the effective (projected) area of the earth on which the sun's radiation is incident at a distance r from the sun. The factor $4\pi r^2$ is the surface area of a sphere scooped with the centre on the sun. Thus $\pi R_e^2 / 4\pi r^2$ is the fraction of the radiation intercepted by the earth's surface area.

Now power radiated by earth,

$$P_E = \sigma 4\pi R_E^2 T_E^4$$

For radiation equilibrium, power radiated by the earth=power received by the earth.

$$\sigma 4\pi R_E^2 T_E^4 = \sigma 4\pi R_s^2 T_s^4 . \frac{\pi R_E^2}{4\pi r^2}$$

$$\text{or } T_E = T_s \left(\frac{R_s}{2r} \right)^{1/2} = 5{,}800 \left[\frac{7 \times 10^8}{2 \times 1.5 \times 10^{11}} \right]^{1/2}$$

$$= 280 \text{ K} = 7^\circ\text{C}$$

Note that the calculations are approximate in that the earth and sun are not black bodies and that the contribution of heat from the interior of the earth has not been taken into account.

4.77 Power radiated by the sun, $P_s = \sigma 4\pi R_s^2 T_s^4$

Power received by 1 m^2 of earth's surface,

$$S = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T_s^4}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{(5.7 \times 10^{-8})(7 \times 10^8)^2 (5{,}800)^4}{(1.5 \times 10^{11})^2}$$

$$= 1{,}400 \text{ W/m}^2$$

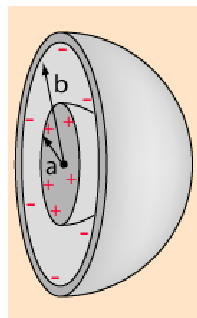
4.78 $P = 4\pi r^2 \sigma T^4$

$$= 4\pi (0.3)^2 (5.67 \times 10^{-8})(10^7)^4$$

$$= 6.4 \times 10^{20} \text{ W}$$

Problema 3

3.1) Considera dos cascarones esféricos de radio a y b ($a < b$) cada cascarón tiene carga Q y $-Q$, de tal manera que forman un capacitor. Usando la ley de Gauss encuentra el campo eléctrico en la región entre los cascarones, con ello determina la diferencia de potencial entre ambos cascarones y finalmente determina la capacitancia del capacitor esférico.



Solución

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \qquad \Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right], \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0\frac{b-a}{ab} \tag{15}$$

¿Cuál es la energía electrostática del capacitor esférico?

¿Cuál sería la capacitancia de un cascarón esférico aislado de radio R?

Solución.

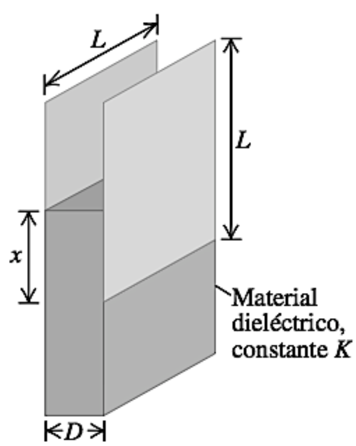
Tomamos $a \to R$, $b \to \infty$ da como resultado:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \tag{16}$$

Fuentes:

`http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/capsph.html`

3.2 Dos placas conductoras cuadradas de lado L están separados por una distancia D. Se inserta una placa dieléctrica con constante K, y dimensiones $L \times L \times D$, una distancia x en el espacio entre las placas como se muestra en la siguiente figura.



a) Calcula la capacitancia C del sistema.

b) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si se inserta la placa dieléctrica a una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, encuentra la expresión del cambio de energía dU almacenada en el capacitor.

c) Suponga ahora que antes de desplazar la placa la distancia dx, se desconecta la batería de las placas, de tal manera que la carga en las placas permanece constante. Determina la magnitud de la carga de cada placa y demuestra que cuando la placa se introduce una distancia dx en el interior del capacitor, la energía almacenada cambia solo de signo respecto de la expresión del inciso (b).

d) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre la placas dieléctrica, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado contra esta fuerza para desplazar la placa una distancia dx. De este modo, $dU = -Fdx$. Demuestra que la aplicación de esta expresión al resultado de (b) corresponde a que la fuerza eléctrica sobre la placa dieléctrica empuja a ésta hacia afuera del capacitor, en tanto que el resultado del inciso (c) corresponde que la fuerza que jala la placa dieléctrica hacia adentro del capacitor.

Formulas útiles:

Si C_0 es la capacitancia sin dieléctrico y C la capacitancia con dieléctrico, se define la constante dieléctrica K como:

$$C = KC_0, \qquad K = C/C_0 > 1 \tag{17}$$

La energía electrostática almacenada en un capacitor se puede calcular con cualquiera de las siguientes expresiones:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{18}$$

a) $C_0 = \frac{\varepsilon_0}{D}((L-x)\,L + xKL) = \frac{\varepsilon_0 L}{D}(L + (K-1)x).$

b) $\Delta U = \frac{1}{2}(\Delta C)V^2$ where $C = C_0 + \frac{\varepsilon_0 L}{D}(-dx + dxK)$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 L\,dx}{D}(K-1)\right)V^2 = \frac{(K-1)\varepsilon_0 V^2 L}{2D}dx.$$

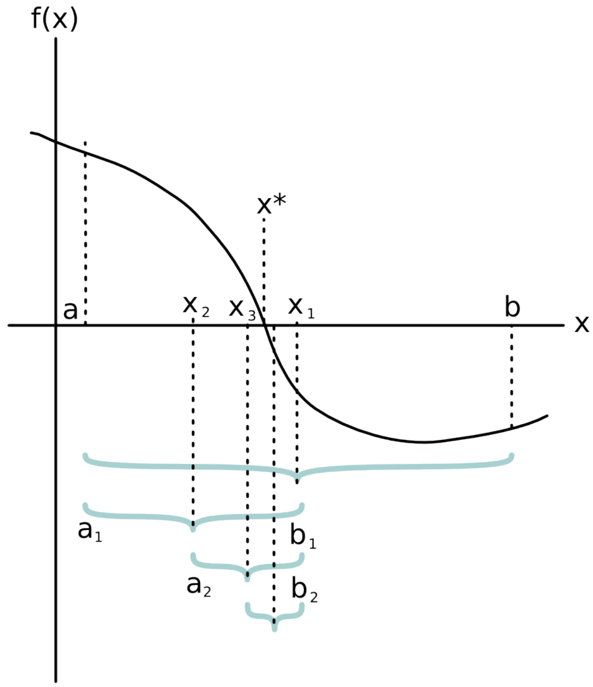
c) If the charge is kept constant on the plates, then:

$Q = \frac{\varepsilon_0 LV}{D}(L + (K-1)x)$, and $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C_0V^2\left(\frac{C}{C_0}\right)$

$$\Rightarrow U \approx \frac{C_0V^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0 L}{DC_0}(K-1)dx\right) \Rightarrow \Delta U = U - U_0 = -\frac{(K-1)\varepsilon_0 V^2 L}{2D}dx.$$

d) Since $dU = -Fdx = -\frac{(K-1)\varepsilon_0 V^2 L}{2D}dx$, then the force is in the opposite direction to the motion dx, meaning that the slab feels a force pushing it out.

Método de bisección para determinar la raíz de una ecuación.



Sea la ecuación:

$$f(x) = 0 \tag{19}$$

a la cual queremos encontrar su raíz (o raíces). Supongamos entonces que x^* es la raíz exacta de la ecuación (19). A continuación se presenta el método de bisección para obtener de manera aproximada (con una precisión ε) el valor de x^*.

1) Se escoge dos valores diferentes a y b que van a definir un intervalo $[a,\, b]$. Entonces se evalúa la función en ambos valores y calculamos su producto $f(a) \cdot f(b)$ para verificar lo siguiente:

   a) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, hay una raíz en el intervalo $[a,\, b]$ (en general puede haber un número impar de raíces).

   b) Si $f(a) \cdot f(b) > 0$, entonces hay que escoger otro par de valores hasta que $f(a) \cdot f(b) < 0$

   en la practica solo necesitamos verificar el cambio de signo de la función en ambos valores a y b para asegurar que hay una raíz en el intervalo $[a, b]$

2) Como primer aproximación para el valor de la raíz, escogemos el punto medio definido por el intervalo $[a,\, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x^* \approx x_1 \tag{20}$$

   Si $f(x_1) = 0$, entonces x_1 es la raíz exacta. Pero en general esto no sucederá por lo que se define otro nuevo intervalo a partir del valor x_1.

3) El valor x_1 divide al intervalo inicial $[a,\, b]$ en dos nuevos intervalos: $[a,\, x_1]$ y $[x_1,\, b]$. Entonces hay que verificar en cual de los dos intervalos se encuentra la raíz:

a) Si $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[a,\, x_1]$

b) Si $f(a) \cdot f(x_1) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[x_1,\, b]$

Definimos entonces el nuevo intervalo $[a_1,\, b_1]$ aquel donde se verifique que se encuentra la raíz:

$$[a_1,\, b_1] = \begin{cases} \text{caso a:} & a_1 = a,\; b_1 = x_1 \\ \text{caso b:} & a_1 = x_1,\; b_1 = b \end{cases} \tag{21}$$

4) El siguiente valor aproximado de la raíz es el punto medio definido por el nuevo intervalo $[a_1,\, b_1]$:

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad x^* \approx x_2 \tag{22}$$

Repitiendo el paso 3 y 4 sucesivamente, el numero de veces que se desee, se obtendrá un mejor valor aproximado de la raíz. Así, el valor aproximado $j{+}1$ ésima de la raíz queda determinado por el valor:

$$x_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}, \qquad x^* \approx x_{j+1} \tag{23}$$

Precisión:

Si requerimos que la precisión entre valor real de la raíz x^* y el valor aproximado x_j sea menor a un valor dado ε, en necesario realizar al menos un numero j de iteraciones (repeticiones) determinado por la siguiente expresión:

$$\frac{|b-a|}{2^{j+1}} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad j > \frac{\ln\left[\dfrac{|b-a|}{\varepsilon}\right]}{\ln(2)} - 1 \tag{24}$$

La precisión ε depende del intervalo inicial $[a,\, b]$.

Problemas

1) La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por raíz a $x^* = 0{,}61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$ realiza seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿verifica la precisión obtenida con las seis iteraciones? ¿cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor a 10^{-4}?

Solución

$$f(x) = e^x - 3x \tag{25}$$

j	a_j	b_j	$x_{j+1} = \frac{a_j+b_j}{2}$	$f(a_j)$	$f(b_j)$	$f(x_{j+1})$
0	0	1	**0.5**	1	-0.2817	0.1487
1	0.5	1	**0.75**	0.1487	-0.2817	-0.133
2	0.5	0.75	**0.625**	0.1487	-0.133	-0.00675
3	0.5	0.625	**0.5625**	0.1487	-0.00675	0.06755
4	0.5625	0.625	**0.5937**	0.06755	-0.00675	0.0295161
5	0.59375	0.625	**0.60937**	0.02952	-0.00675	0.011156
6	0.6937	0.625	**0.6172**	0.01116	-0.00675	0.002145

El valor aproximado después de seis iteraciones es:

$$x^* \approx 0{,}6172 \tag{26}$$

precisión:

$$\frac{|b-a|}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^7} = 0{,}0078 < \varepsilon \tag{27}$$

para obtener precisión de 10^{-4} es necesario hacer por lo menos $j = 13$ iteraciones.

2) Aplica el método de bisección para determinar la raíz cúbica de 17 con un error mínimo de 0.125.

Solución
Calculamos la raíz de la ecuación:

$$f(x) = x^3 - 17 \tag{28}$$

comenzamos por el intervalo [2, 3] donde es inmediato que la función cambia de signo, entonces para lograr la precisión de 0.125 es necesario realizar las siguientes iteraciones:

$$j = \frac{\ln\left[\frac{1}{0{,}125}\right]}{\ln(2)} - 1 = 2 \tag{29}$$

El valor aproximado es:

$$\sqrt[3]{17} \approx 2{,}571282 \tag{30}$$

3) Determina de manera aproximada la raíz de la ecuación (problema 1, radiación de cuerpo negro):

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \tag{31}$$

Realiza cinco iteraciones y verifica la precisión de tu aproximación de acuerdo al intervalo inicial que escogiste.

Solución:
La raíz es aproximadamente:

$$x \approx 4{,}96 \tag{32}$$