### P1. Un deporte de invierno: los saltos de esquí.

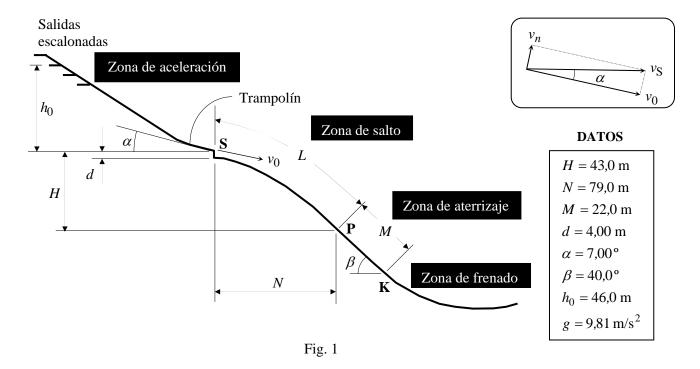
En esta espectacular modalidad deportiva, los espectadores se mantienen en vilo desde que el atleta inicia el descenso por la pista hacia el trampolín hasta que, tras saltar al "vacío", realiza un estético vuelo, aterriza suavemente, frena y se detiene. Este atleta, mediante un largo y duro entrenamiento, ha adquirido la suficiente destreza para lograr que la física esté de su parte permitiéndole mejorar sus marcas.

El perfil de la pista de saltos, mostrado en la figura 1, presenta cuatro partes: la primera es la zona de aceleración, en la que los saltadores que han partido de alguna de las salidas escalonadas, sin velocidad inicial, descienden por una pronunciada pendiente hasta el trampolín, en el que la pendiente se reduce hasta un ángulo  $\alpha$ . En el borde S del trampolín, el saltador inicia el vuelo sobre la zona de salto, que tiene forma aproximadamente parabólica y una longitud L característica de la instalación: se habla así de pistas de 50, 80 ó 90 m.

La tercera zona, P - K, es la *de aterrizaje*, de longitud M y pendiente constante de ángulo  $\beta$ . A partir del límite K de esta región, el denominado *punto crítico*, se inicia la cuarta zona, *de frenado*, en la que no debe producirse el aterrizaje pues disminuye rápidamente la pendiente y el impacto sería peligroso. Según sean las condiciones meteorológicas, el estado de la pista y la calidad de los competidores, los jueces deciden el punto de partida adecuado (una de las salidas escalonadas) para conseguir que el aterrizaje se realice siempre en la zona adecuada, y no en la de frenado. En concreto, los jueces fijan la altura  $h_0$  del punto de salida respecto al borde S del trampolín.

Los principales parámetros de un gran trampolín, ( $L \approx 90~\text{m}$ ), se encuentran indicados en el cuadro de datos de la figura 1.

a) Suponiendo que en el descenso por la zona de aceleración (desde la salida hasta el punto S), el rozamiento con el suelo y el aire disipan una energía Q que es igual al 20 % de la energía mecánica inicial, determine y calcule el módulo de la velocidad de despegue del saltador,  $v_0$ , sabiendo que ha iniciado el descenso, sin velocidad inicial, desde una salida con la altura  $h_0$  dada en el cuadro de valores.



A pesar de que el trampolín tiene una pendiente final descendente  $\alpha$ , la velocidad real de salida del saltador,  $v_S$ , es prácticamente horizontal, pues se da un impulso perpendicular a la pista justo antes de iniciar el vuelo. Para ello, el saltador desciende con las piernas flexionadas y las extiende en el extremo final del trampolín, haciendo un gesto similar al de un salto, sin carrerilla, perpendicular al suelo. Así, además de







descender en una postura más aerodinámica, consigue imprimirse una velocidad  $v_n$  perpendicular al trampolín y alargar el salto. (Observa el diagrama vectorial indicado en la figura 1).

b) Calcule cuál debe ser el valor de la velocidad  $v_n$  y compruebe si podrá conseguirla un atleta capaz de realizar un salto vertical de altura  $h_e = 0.60$  m, ¡sin carrerilla!

Suponga que la velocidad de salida es exactamente horizontal y no tenga en cuenta los efectos de la fuerza de fricción con el aire ni los de sustentación debidos a la aerodinámica del saltador. (En la práctica el segundo efecto domina sobre el primero, de forma que los saltos reales son algo más largos que los idealizados parabólicos).

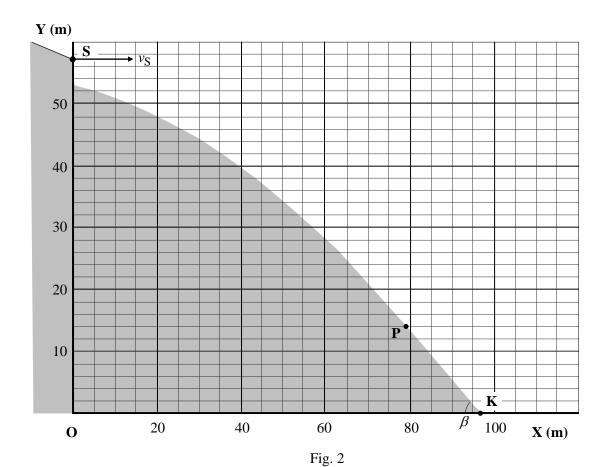
- c) Obtenga la ecuación de la trayectoria que hipotéticamente describirá el saltador, referida al sistema de coordenadas OXY indicado en la figura 2 que se encuentra en la "hoja de respuestas" adjunta. En dicha figura se representa también el perfil de la pista (sombreado), desde el punto de salida S del trampolín hasta el punto crítico K.
- d) Sobre la figura 2, haga una representación gráfica de la trayectoria y determine aproximadamente el punto C de aterrizaje, con sus correspondientes coordenadas  $x_{\rm C}$  e  $y_{\rm C}$ .
- e) Determine las componentes de la velocidad  $v_f$  del saltador cuando toca la pista en la zona de aterrizaje. Calcule el ángulo  $\varphi$  que forma la velocidad con el eje OX.
- f) Determine y calcule el ángulo,  $\phi$ , que forma la velocidad final  $v_f$  con la pista.







# Hoja de respuestas









### Solución

a) El saltador inicia el descenso sin velocidad inicial, desde una altura  $h_0$  respecto al borde de salida del trampolín, S. Se sabe que la energía disipada, Q, es el 20 % de la energía mecánica inicial. Si se toma como referencia para la energía potencial gravitatoria la horizontal por el punto S, se tiene

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + Q$$
 donde  $Q = 0.2 mgh_0$ 

Por tanto

$$v_0 = \sqrt{1,6 g h_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 26.9 \text{ m/s}}$$

b) Del diagrama de velocidades de la figura del enunciado se deduce que

$$v_n = v_0 tg\alpha$$
  $\Rightarrow$   $v_n = 3.3 \,\text{m/s}$ 

¿Es el saltador capaz de *imprimirse* esta velocidad, teniendo en cuenta que en los entrenamientos en el gimnasio es capaz de saltar en vertical una altura  $h_e=0.6~\mathrm{m}$ ? Teniendo en cuenta de nuevo la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = mg h_e$$

De donde

$$v_e = \sqrt{2gh_e} = 3.4 \text{ m/s}$$
  $\Rightarrow$   $v_e > v_n$ 

En conclusión, el saltador SI que es capaz de salir de la pista de saltos con velocidad horizontal.

c) Necesitamos deducir la ecuación de la trayectoria que seguirá el saltador, considerando que inicia el salto en el extremo del trampolín con una velocidad inicial horizontal  $v_S$ , de módulo

$$v_S = \sqrt{v_0^2 + v_n^2}$$
  $\implies$   $v_S = 27.1 \text{ m/s}$ 

Emplearemos el sistema de coordenadas dado en la figura 2, con eje vertical OY pasando por el punto de salida y eje horizontal, OX, pasando por el punto K. En la figura 2 se aprecia que la ordenada del punto de salida S es aproximadamente

$$y_S \approx 57 \text{ m}$$

De una forma más precisa, la ordenada inicial puede deducirse a partir de los datos del enunciado

$$y_S = H + M \operatorname{sen} \beta$$
  $\Rightarrow$   $y_S = 57,1 \text{ m}$ 

Suponiendo que el salto se realiza en el vacío, la trayectoria del saltador sería la de un "tiro parabólico" desde el punto S de coordenadas  $x_S=0$  e  $y_S=57,1$  m, con una velocidad inicial horizontal, de módulo  $v_S=27,1$  m/s .

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{vmatrix}
v_x = v_S \\
v_y = -g t
\end{vmatrix} \qquad (1) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned}
x = v_S t \\
y = y_S - \frac{1}{2} g t^2
\end{vmatrix} \qquad (2)$$

Eliminando el tiempo en(2) se obtiene la ecuación cartesiana de la trayectoria

$$y = y_S - \frac{g}{2v_S^2}x^2$$

Teniendo en cuenta los valores numéricos, en unidades del SI, la ecuación resulta







$$y = 57.1 - 6.69 \times 10^{-3} x^2 \tag{3}$$

d) En la Tabla I se muestran las coordenadas de una serie de puntos deducidos por medio de (3). Con ellos se puede trazar, de forma aproximada, la trayectoria del salto sobre la figura 3, (análoga a la figura 2, que se encuentra en la "hoja de respuestas").

Tabla 1					
<i>x</i> (m)	20	40	60	80	92,4
y (m)	54,5	46,4	33,0	14,3	0

La intersección de la trayectoria con el área sombreada del perfil, permite estimar que el punto C de "toma de tierra" está próximo a P y dentro de la zona de aterrizaje. Concretamente las coordenadas de C son

$$x_C = 82.0 \text{ m}$$
;  $y_C = 12.0 \text{ m}$  (4)

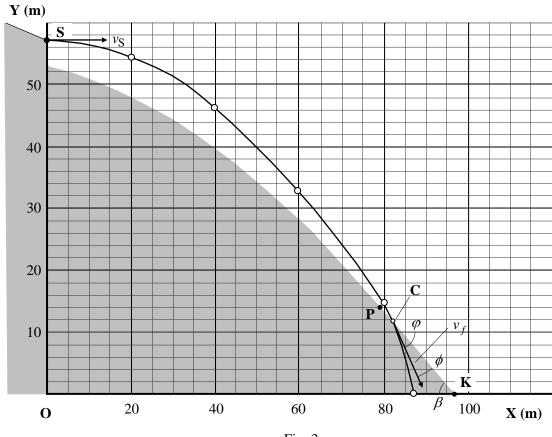


Fig. 3

**e**) De (1) y (2) se tiene

$$v_x = v_S \ ; \ v_y = -\frac{g}{v_S} x$$

Luego en el punto C se tiene

$$v_{fx} = v_S$$

$$v_{fy} = -\frac{g}{v_S} x_C$$







El ángulo  $\, \varphi \,\,$  que forma la velocidad,  $\, v_f \,$ , al llegar a C, con la horizontal, viene dado por

$$\varphi = artg \frac{v_{yf}}{v_{xf}}$$

Tomando el valor absoluto de  $v_{y\!f}$  , la expresión del ángulo  $\varphi$  es

$$\varphi = artg \frac{g x_C}{v_S^2}$$
  $\Rightarrow$   $\varphi = 47.7^{\circ}$ 

 $\mathbf{f}$ ) El ángulo,  $\phi$ , que forma la velocidad final con la pista en el punto de aterrizaje es, por fin

$$\phi = \varphi - \beta$$
  $\Rightarrow$   $\phi = 7.7^{\circ}$ 





#### P2 El electrómetro monofilar de Wulf.

Con objeto de demostrar que la radiación en la superficie de la Tierra provenía de sustancias radiactivas existentes en el suelo, el sacerdote jesuita alemán Theodor Wulf diseñó y construyó un electrómetro de hilo que lleva su nombre. Con este instrumento, en 1910, quiso demostrar que la radiación debía disminuir con la altura. El resultado de la experiencia, realizada en la torre Eiffel, resultó negativo. La variación era pequeña pero en sentido contrario: aumentaba con la altura. Esto obligó a admitir la existencia de una radiación de origen externo que competía con la emanada de la propia Tierra. En 1912 el físico austriaco Victor Francis Hess, hizo mediciones ascendiendo en globo hasta los 5000 m: "La mejor explicación para los resultados de mis observaciones se basa en el supuesto de que una radiación de gran poder penetrante entra en nuestra atmósfera desde arriba". Posteriores medidas, realizadas desde globos no tripulados, le llevaron a la conclusión de que la intensidad de la radiación procedente del exterior (rayos cósmicos) aumenta con la altitud, varía con la latitud y es algo más intensa de día que de noche. Victor Hess, que puede considerarse el "padre" de los rayos cósmicos, recibió el Premio el Nobel de Física en 1936.

Los electrómetros son aparatos para medir diferencias de potencial o cargas eléctricas. Aunque existen diversos tipos, vamos a centrarnos en el electrómetro de Wulf de la figura 1, que se expone en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza y cuyo esquema se representa en la figura 2.





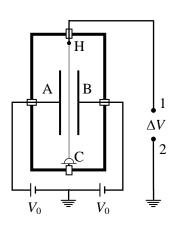


Fig. 2

En esencia, está constituido por una carcasa por cuyas caras laterales salen al exterior, perfectamente aislados, los soportes conductores de dos placas metálicas paralelas, A y B. Un fino hilo conductor HC tiene su extremo H conectado eléctricamente al borne 1 del aparato, y su extremo inferior está sujeto a la carcasa por medio de un bucle de cuarzo C, aislante, que permite regular la fuerza de tensión del hilo. El aparato dispone de un sistema lateral de iluminación, que permite observar el hilo con un microscopio dotado de un micrómetro. De esta forma es posible medir con gran precisión las pequeñas desviaciones laterales del hilo que se producen cuando entre los bornes 1 y 2 se aplica una diferencia de potencial  $\Delta V$ .

Las placas A y B, separadas una distancia d, se conectan a dos baterías de fem  $V_0$  cada una, como se indica en la figura 2. Por tanto, entre dichas placas se establece un campo eléctrico que, para simplificar el problema, puede considerarse uniforme. Si el hilo HC no está cargado no sufrirá ninguna fuerza electrostática, como se representa en la figura 3. Pero si existe una diferencia de potencial  $\Delta V > 0$ , el hilo adquirirá una carga +q y tenderá a desplazarse lateralmente hacia la placa conductora negativa (figura 4) hasta que la fuerza electrostática esté compensada por las componentes horizontales de la fuerzas de tensión  $\vec{T}$  en los extremos del hilo.

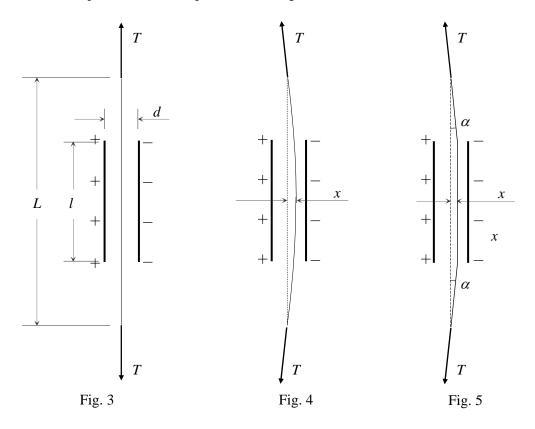
Dado que la carga q del hilo es extremadamente pequeña, también lo será el desplazamiento del hilo,  $x \ll l$ , lo que justifica la necesidad del microscopio. En consecuencia, el ángulo  $\alpha$  que forma la tensión del hilo en sus extremos con la vertical será también muy pequeño ( $\alpha \approx \text{sen } \alpha \approx t \text{g } \alpha$ ) y, por la misma razón, se puede considerar que el módulo T de la tensión se mantiene constante e independiente de x. Como







simplificación adicional, puede suponerse que, en equilibrio, el hilo es prácticamente recto en el espacio comprendido entre las placas, como se representa en la figura 5.



## a) Determine el módulo del campo eléctrico E existente entre las placas A y B, en función de $V_0$ y d.

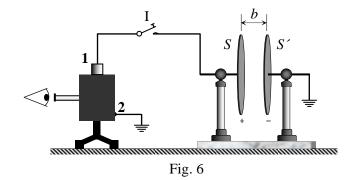
Cuando entre los bornes 1 y 2 se establece la diferencia de potencial  $\Delta V$ , el hilo adquiere una carga q que se reparte uniformemente por el hilo como una densidad lineal de carga  $\lambda = q/L$ . La parte del hilo comprendido entre las placas, cuya carga es  $\lambda l$ , por efecto del campo eléctrico uniforme sufrirá un desplazamiento x, tal como se muestra en la figura 5.

# b) Deduzca la expresión que relaciona el desplazamiento x del hilo, con de $V_0$ , L, l, d, T y q.

Para modificar el rango de medidas puede modificarse la tensión T del hilo, aunque no es sencillo determinar su valor. Tampoco es fácil encontrar la relación entre la carga del hilo y la diferencia de potencial  $\Delta V$  que se aplica entre los bornes del electrómetro. Sin embargo, para pequeños valores de x, la desviación del hilo y el voltaje aplicado  $\Delta V$  son proporcionales, es decir  $x = K \Delta V$ . Suponga que, mediante una operación previa de calibrado, se sabe que la constante de

proporcionalidad es  $K = 5.59 \times 10^{-6}$  m/V.

En estas condiciones, como se muestra en la figura 6, se unen los bornes 1 y 2 del electrómetro, a través de un interruptor I, a las armaduras S y S´ de un condensador plano cargado. Las armaduras son circulares, de radio  $r=0,150~\mathrm{m}$ , y están separadas una distancia  $b=0,120~\mathrm{m}$ . Cuando se cierra el interruptor I, se observa en el electrómetro una desviación del hilo  $x_1=0,139~\mathrm{mm}$ .



Determine y calcule la diferencia de potencial  $\Delta V_1$  existente entre las armaduras del condensador, así como su carga  $Q_1$ . (Permitividad dieléctrica del aire:  $\varepsilon = 8,86 \times 10^{-12} \,\mathrm{C}^2 \mathrm{N}^{-1} \mathrm{m}^{-2}$ ).







A partir del instante en que se cierra el interruptor I se observa que la desviación del hilo  $x_1$  disminuye lentamente hasta anularse, lo que significa que la diferencia de potencial entre las placas del condensador disminuye con el mismo ritmo hasta hacerse cero. Si no existiese ningún tipo de corriente de fuga a través de los materiales aislantes del montaje, el fenómeno se debería exclusivamente a que algún tipo de radiación, suficientemente energética, ioniza las moléculas del gas (aire) existente entre las placas. Los iones positivos emigran a la placa negativa y los negativos a la positiva y, paulatinamente, se descarga el condensador.

d) Si el tiempo que transcurre desde que se acciona el interruptor hasta que  $x_1 \approx 0$  es  $\tau = 7,66 \times 10^3$  s, y suponiendo que la descarga del condensador se deba solo a ionizaciones simples del aire entre sus armaduras (cada molécula ionizada da lugar a un solo electrón y a un ion positivo), determine y calcule el número N de ionizaciones que se realizan por segundo y por cm<sup>3</sup> en el espacio comprendido entre las armaduras del condensador. (carga elemental  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C).







### Solución

a) En la figura 7 se representan exclusivamente las conexiones de las placas del electrómetro con las dos baterías y la conexión a tierra, y es fácil ver que la diferencia de potencial entre ambas es  $2V_0$ . Dado que dichas placas constituyen un condensador plano, el módulo del campo eléctrico en su interior es

$$E = \frac{2V_0}{d}$$

b) Cuando el hilo tenga carga positiva, tenderá a desplazarse hacia la placa negativa, la B en nuestro caso. Aceptando la simplificación propuesta en el enunciado, consideremos como sistema mecánico en equilibrio la porción de hilo entre las placas (figura 8). Las fuerzas exteriores que actúan son las tensiones en sus extremos, de módulo T, y la fuerza electrostática F debida al campo eléctrico. Si  $\lambda$  es la densidad lineal de carga eléctrica del hilo, esta fuerza es

$$\begin{array}{c|c}
A & B \\
\hline
V_0 & V_0 \\
\hline
& & \end{array}$$

$$F = \lambda l E = \lambda l \frac{2V_0}{d} \tag{1}$$

En el equilibrio, la fuerza resultante horizontal debe ser nula, por lo que

$$F - 2T \operatorname{sen} \alpha = 0 \tag{2}$$

Teniendo en cuenta el pequeño valor de  $\alpha$ ,

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$$

De la figura 5 del enunciado es fácil deducir que

$$tg \alpha = \frac{x}{(L-l)/2}$$

De donde,

$$\lambda l \frac{2V_0}{d} = 2T \frac{2x}{L-l}$$
  $\Rightarrow$   $x = \frac{(L-l)l}{d} \frac{\lambda V_0}{2T}$ 

Y como  $\lambda = q/L$ , resulta

$$x = \frac{(L-l)l}{Ld} \frac{V_0}{2T} q \tag{3}$$

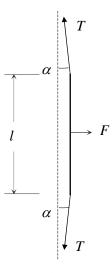


Fig. 8

c) Al conectar las armaduras del condensador a los bornes del electrómetro se observa una desviación del hilo  $x_1 = 0.139 \text{ mm}$ , luego, teniendo en cuenta el valor de la constante de calibración K, el voltaje es

$$\Delta V = \frac{x_1}{K} \implies \Delta V = 24.9 \text{ V}$$

La capacidad del condensador plano viene dada por  $C = \varepsilon A/b$ , donde A es el área de las armaduras. Por consiguiente,

$$C = \varepsilon \frac{\pi r^2}{h}$$

Si la diferencia de potencial a la que se conecta es  $\Delta V$ , el valor absoluto de la carga de cada una de sus armaduras será  $Q = C \Delta V$ , por lo que, en función de los parámetros del problema

$$Q = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b} \frac{x}{K} \implies Q = 1.30 \times 10^{-10} \text{ C}$$







d) La carga de cada armadura se neutraliza al cabo del tiempo  $\tau$  como consecuencia de las cargas de signo opuesto que le llegan procedentes de las ionizaciones que han tenido lugar en el aire existente entre las placas, cuyo volumen es  $\pi r^2 b$ . Por lo tanto, el número de ionizaciones que han tenido lugar por segundo y por unidad de volumen es

$$N = \frac{Q}{e \, \tau \, \pi \, r^2 b}$$

Teniendo en cuenta la expresión de Q,

$$N = \frac{\varepsilon}{e \tau b^2} \frac{x}{K}$$
  $\Rightarrow$   $N = 12,5 \times 10^6 \text{ ionizaciones /(s × m}^3)$ 







### P3 El giróscopo interferencial de fibra óptica.

Un *giróscopo* mecánico es un aparato consistente en un disco que gira rápidamente sobre un eje libre que, debido a la conservación del momento angular, tiende a mantenerse en una dirección constante. Fue inventado por el físico francés Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) y se utiliza habitualmente para mantener la orientación en el espacio, en particular para la estabilización del rumbo de barcos, aviones y satélites. Pero existen otros dispositivos no mecánicos, más precisos, versátiles y sencillos, que se usan con los mismos fines.

El también físico francés Georges Sagnac descubrió en 1911 que "una onda electromagnética que se mueve en un camino cerrado es influenciada por la velocidad angular del sistema". Basados en el llamado "efecto Sagnac", a partir de 1960 comenzó la utilización de los giróscopos ópticos, que derivaron en 1970 en los giróscopos interferenciales de fibra óptica. En este ejercicio se describen, de forma simplificada, estos giróscopos.

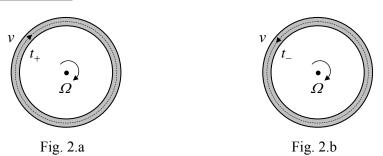
Como ejercicio preliminar, considere que un haz de luz láser, de longitud de onda  $\lambda$  (en el vacío), se propaga con velocidad v por una fibra óptica rectilínea, de índice de refracción efectivo n, que se mueve longitudinalmente con velocidad N.

- a1) Determine el tiempo  $t_1$  que tarda la luz en recorrer una longitud L de fibra, cuando dicha luz se propaga en el mismo sentido que se mueve la fibra (figura 1.a), y el tiempo  $t_2$  cuando lo hace en sentido opuesto (figura 1.b).
- a2) Determine la diferencia entre estos dos tiempos,  $\Delta t = t_1 t_2$ . Aproxime el resultado teniendo en cuenta que  $V \ll v$



Considere ahora que la fibra óptica se curva en una circunferencia de longitud  $L=2\pi R$ , y que gira con velocidad angular  $\Omega$  en torno a su centro en sentido horario. Por la fibra se propagan dos haces de luz en sentidos opuestos.

**b**) Determine la diferencia,  $\Delta t$ , entre los tiempos  $t_+$  y  $t_-$  que tarda la luz en recorrer el anillo circular de longitud L en sentidos horario y antihorario, respectivamente (Figuras 2.a y 2.b). Exprese el resultado en función del área A del anillo.



El funcionamiento de un giróscopo de fibra óptica se esquematiza en la figura 3. Un 50% de la luz emitida por el láser se refleja en el divisor de haz (+), recorre *N* espiras circulares de fibra en sentido horario y, tras reflejarse en el divisor de haz, incide en el detector. El otro 50% de la luz se transmite a través del divisor de haz (-), recorre las *N* espiras en sentido antihorario e incide en el detector después de transmitirse a través del divisor.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> El índice de refracción efectivo n hace referencia a la velocidad de avance de la luz a lo largo del eje de la fibra, v = c/n, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.







Si el dispositivo no gira ( $\Omega = 0$ ), al detector llegan dos haces coherentes que han recorrido el mismo camino óptico y que, por tanto, se superponen en fase e interfieren constructivamente. Sin embargo, cuando todo el conjunto de la figura 3 gira con velocidad angular  $\Omega$  en torno al centro de las espiras, entre ambos haces habrá una diferencia de fase que cambiará el estado interferencial en el detector (efecto Sagnac).

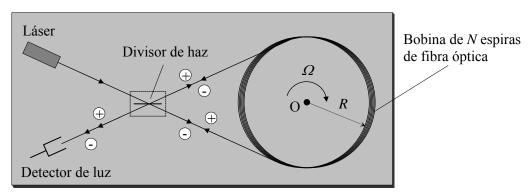


Fig. 3

### Determine:

- c1) La diferencia entre los tiempos que tardan los dos haces en llegar al detector,  $\Delta T$ , cuando el dispositivo gira con una velocidad  $\Omega$  en torno a su centro.
- c2) La diferencia de fase,  $\delta$ , entre los dos haces de luz.

En los giróscopos de fibra óptica, el sistema optoelectrónico de detección analiza el estado interferencial de los dos haces, determina esta diferencia de fase y permite deducir con gran precisión la velocidad angular de rotación y, en consecuencia, los cambios de rumbo.

d) Determine la mínima velocidad angular de rotación,  $\Omega_{\min}$ , para que ambos haces interfieran destructivamente en el detector, de forma que se anule la intensidad total.

Suponga que el sistema de detección es capaz de apreciar variaciones de la diferencia de fase  $\Delta \delta = 1 \text{ mrad}$ .

e) Con los datos que se indican a continuación, calcule la precisión  $\Delta\Omega$  con que es posible obtener la velocidad angular de rotación.

Radio de las espiras de fibra óptica:  $R = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 

Número de espiras: N = 3200

Índice de refracción efectivo de la fibra: n = 1,48

Longitud de onda (en el vacío) del láser:  $\lambda = 1.3 \, \mu \text{m}$ 

Velocidad de la luz en el vacío:  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s







### Solución

a1) Los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  que tarda la luz en recorrer el segmento de la fibra de longitud L, cuando dicha fibra se mueve con velocidad V, en el mismo sentido que la luz o en sentido contrario, verifican las expresiones siguientes, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} v t_1 = L + V t_1 \\ v t_2 = L - V t_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t_1 = \frac{L}{v - V} \\ t_2 = \frac{L}{v + V} \end{vmatrix}$$

a2) La diferencia,  $\Delta t$  de los tiempos anteriores es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L \left( \frac{1}{v - V} - \frac{1}{v + V} \right) = \frac{2LV}{v^2 - V^2}$$

Teniendo en cuenta que  $V \ll v = c/n$ , las expresión anterior de  $\Delta t$  puede aproximarse

$$\Delta t \approx \frac{2LV}{v^2}$$

La velocidad de propagación de la luz en la fibra es v = c/n, de forma que

$$\Delta t = \frac{2n^2LV}{c^2} \tag{1}$$

**b)** La situación es análoga a la del apartado anterior, con  $L = 2\pi R$  y  $V = \Omega R$ . Por lo tanto

$$\Delta t = \frac{4\pi n^2 R^2}{c^2} \, \Omega$$

En función del área de la espira circular  $A = \pi R^2$ 

$$\Delta t = \frac{4n^2 A}{c^2} \Omega \tag{2}$$

c1) De acuerdo con el enunciado, al detector llegan dos haces. Uno ha recorrido las *N* espiras de la bobina en sentido horario y el otro en sentido antihorario. Por lo tanto, teniendo en cuenta el resultado anterior (2),

$$\Delta T = N \, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = N \, \frac{4 \, n^2 A}{c^2}}$$
 (3)

c2) La diferencia de fase,  $\delta$ , entre los dos haces es

$$\delta = \omega \Delta T$$

donde  $\omega = 2\pi c / \lambda$  es la frecuencia angular de la luz.

Teniendo en cuenta (3)

$$\delta = \frac{8\pi n^2 N A}{\lambda c} \Omega \tag{4}$$

d) Los haces que alcanzan el detector interferirán destructivamente cuando  $\delta = m \pi$ , con m = 1, 3, 5... La frecuencia  $\Omega_{\min}$  corresponderá al primer mínimo de interferencia, es decir  $\delta = \pi$ . Sustituyendo en (4),

$$\Omega_{\min} = \frac{\lambda c}{8 n^2 N A}$$







e) Si la mínima diferencia de fase detectable es  $\Delta\delta$ , tomando incrementos en (4) se obtiene la precisión  $\Delta\Omega$  con que es posible obtener la velocidad angular de rotación

$$\Delta\Omega = \frac{\lambda c}{8\pi n^2 N A} \Delta \delta$$

Con  $\Delta \delta = 1$  mrad y los datos que figuran en el enunciado, se obtiene

$$\Delta\Omega = 2.8 \times 10^{-4} \text{ rad/s} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ o/s} = 58 \text{ o/h}$$





