

Gravitación

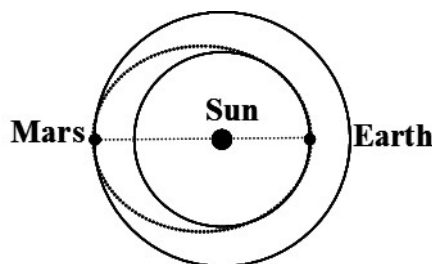
1 Órbitas Planetarias. Secciones Cónicas

1.1 Ejercicios

1. Un cometa que orbita alrededor del sol tiene su punto más lejos a 31.5 U.A. y la parte más cercana 0.5 U.A. ¿Cuál es su período orbital (en días)?
2. Demuestre que la rapidez v de un objeto en una órbita elíptica satisface la relación:

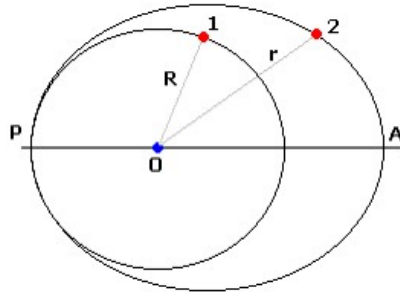
$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

3. Durante la formación de la Luna se sabe que la fuerza que ejercía sobre la Tierra era 4 000 veces la fuerza actual y esta se encontraba a 21 000 km de la Tierra. A través del tiempo la Luna se ha ido alejando de la Tierra, de tal manera que la distancia desde entre sus centros es de 384 401 km y cuya masa actual es de 7.34×10^{22} kg.
 - a) ¿Cuál fue la masa de la Luna cuando se encontraba a 21 000 km de la Tierra?
 - b) Si la densidad de la Luna no cambió desde ese entonces, siendo $3\,300 \text{ kg/m}^3$ ¿Cuál era el radio de la Luna?
4. La distancia entre Marte y el sol es de 2.28×10^{11} m.



- a) Encuentre el periodo de revolución de Marte (en días) alrededor del sol. $M_s = 1.99 \times 10^{30}$ kg.
- b) Para poner en marcha una nave espacial desde la Tierra a Marte, la nave espacial debe seguir una órbita elíptica con la Tierra en un extremo del eje largo y Marte en el otro extremo. El sol se encuentra también sobre el eje longitudinal, como se muestra en la figura. El tiempo que tarda para volar la mitad de la órbita elíptica es de 259 días. ¿Dónde debe estar Marte al inicio del vuelo, considere el Sol como el centro de sus ejes, ubique al planeta mediante el ángulo que forma con respecto a la horizontal.
- c) Para volver de Marte, la nave seguirá la misma órbita elíptica y le tomará la misma cantidad de días para volver del primer viaje. ¿Cuántos días deben permanecer en Marte antes de que inicie el camino de regreso?

5. Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia más próxima a la estrella 10^{11} m y la más alejada 1.8×10^{11} m.



- Cuál es la masa de la estrella.
- Cuál es el período del segundo planeta.
- Qué velocidad lleva el segundo planeta cuando se encuentra más cerca de la estrella.

1.2 Problemas

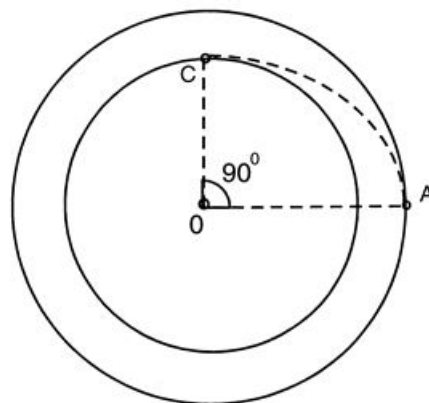
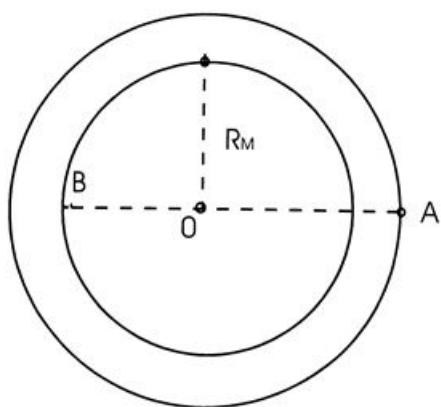
1. Un misil balístico es lanzado desde el polo norte, el blanco se encuentra a una latitud ϕ . ¿En qué ángulo el misil debe ser lanzado de manera que tenga una velocidad mínima de lanzamiento?
2. Un cohete es lanzado desde el polo norte de la Tierra con la primera velocidad cósmica. ($R=6400$ km).
 - a) Encuentre el semieje más grande que puede tener la órbita.
 - b) ¿Cuál es la máxima altura h de la órbita del cohete? (Respecto a la superficie de la Tierra)
 - c) ¿Cuál es el tiempo de vuelo del cohete?

La superficie de una elipse es $S = \pi ab$, donde b es el semieje menor.

3. Una nave espacial de masa m se mueve en una órbita circular a una distancia r del centro de la Tierra (M_e).
 - a) ¿Cuál es su energía cinética?
 - b) ¿Suponga que la nave enciende uno de sus motores por un corto tiempo en dirección tangencial a su órbita. Después de ese tiempo su energía cinética se incrementa en 30%. ¿Cuál es la distancia más lejana de la nave desde el centro de la Tierra? Expresar su respuesta en múltiplos de r .
4. Problema

Una nave espacial de masa $m=12$ toneladas da vueltas alrededor de la Luna a una altura de 100 km, describiendo una órbita circular. Con objeto de que llegue a la luna, un motor de propulsión se conecta en un punto A durante un corto período de tiempo. La velocidad de escape de los gases es $u = 10^4$ m/s con relación a la nave espacial. El radio de la Luna es 1700 km y la aceleración de la gravedad en su superficie $g=1.7$ m/s².

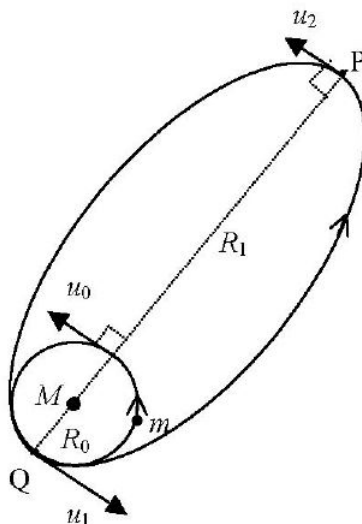
La nave espacial puede alcanzar la luna por dos métodos diferentes.



- a) ¿Qué cantidad de combustible es necesario expulsar para que al activar los motores en el punto A de la trayectoria, el cohete pueda aterrizar en la Luna en el punto B?
- b) En el segundo caso, en el punto A el cohete es impulsado directamente en dirección al centro de la Luna, para poner realizar el aterrizaje en la Luna en el punto C ¿Qué cantidad de combustible es necesario en este caso?
5. Un satélite orbita la Tierra en una órbita circular. El momento inicial del satélite está dado por el vector \vec{p} . En cierto momento, una carga de explosivo le genera un impulso adicional $\Delta\vec{p}$, con magnitud $|\vec{p}|$. Sea α el ángulo entre los vectores \vec{p} y $\Delta\vec{p}$, y β entre el radio vector del satélite y el vector $\Delta\vec{p}$. Analice cada uno de los siguientes casos, en caso de ser posible brinde los valores de α y β para la cual es posible. Si la órbita no es posible, marque NO.
- a) Una hipérbola con el perigeo en el punto de la explosión.
- b) Una parábola con el perigeo en el punto de la explosión.
- c) Una elipse con el perigeo en el punto de la explosión.
- d) Un círculo.
- e) Un elipse con el apogeo en el punto de la explosión.
- f) ¿Qué órbita se obtiene si $\alpha = 180^\circ$ y $\beta = 90^\circ$?

6. Transferencia de Órbitas

En un futuro cercano podríamos formar parte en el lanzamiento de un satélite que, desde el punto de vista de la física, requiera sólo del uso de mecánica simple.



- Un satélite de masa m está dando vueltas alrededor de la Tierra de masa M en una órbita circular de radio R_0 . ¿Cuál es la velocidad u_0 de la masa m en términos de M , R_0 y la constante de gravitación universal G ?
(1.0 puntos)
- Hemos de poner a este satélite en una trayectoria que lo lleve al punto P a una distancia R_1 del centro de la Tierra incrementando (casi instantáneamente) su velocidad en el punto Q de u_0 a u_1 . ¿Cuál es el valor de u_1 en términos de u_0 , R_0 y R_1 ?
(2.0 puntos)
- Deduzca el mínimo valor de u_1 en términos de u_0 que le permita al satélite dejar la superficie de la Tierra completamente.
(1.0 puntos)
- (Haciendo referencia a la parte b.) ¿Cuál es la velocidad u_2 del satélite en el punto P en términos de u_0 , R_0 y R_1 ?
(1.0 puntos)
- Ahora, queremos cambiar la órbita del satélite en el punto P a una órbita circular de radio R_1 incrementando el valor de u_2 (casi instantáneamente) a u_3 . ¿Cuál es la magnitud de u_3 en términos de u_2 , R_0 y R_1 ?
(1.0 puntos)

7. ¿Cuándo la Tierra se volverá un satélite sincrónico?

El periodo de rotación de la Luna en torno a su eje es actualmente el mismo que su periodo de revolución alrededor de la Tierra de modo que el mismo lado de la Luna siempre encara a la Tierra. La igualdad de estos dos periodos surgió probablemente debido a la acción de las fuerzas de marea a través de la larga historia del sistema Tierra-Luna.

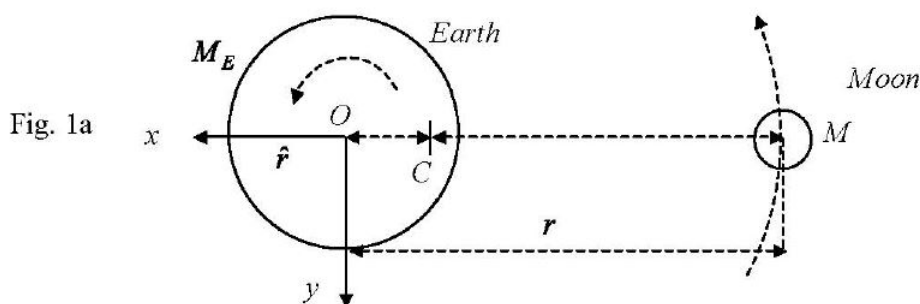
Sin embargo, el periodo de rotación de la Tierra en torno a su eje es actualmente más corto que el periodo de revolución de la Luna. Como resultado, las fuerzas lunares de marea siguen actuando de una manera que tiende a ralentizar la velocidad rotacional de la Tierra y a alejar aún más a la Luna de la Tierra.

En esta pregunta, estamos interesados en obtener una estimación de cuánto más tiempo le tomará al periodo rotacional de la Tierra igualar al periodo de revolución de la Luna. La Luna entonces se convertirá en un satélite sincrónico, apareciendo en el cielo como un objeto fijo visible sólo para aquellos observadores en el lado de la Tierra que encare a la Luna. También queremos encontrar cuánto le tomaría a la Tierra completar una rotación cuando dichos dos periodos sean iguales.

Dos sistemas de coordenadas rectangulares de mano derecha son adoptados como marcos de referencia. Los terceros ejes coordenados de estos dos sistemas son paralelos entre sí y normales al plano orbital de la Luna.

- (I) El primer marco, llamado marco CM , es un marco inercial con su origen localizado en el centro de masa C del sistema Tierra-Luna.
- (II) El segundo marco, llamado marco xyz , tiene su origen fijado en el centro de la Tierra. Su eje z coincide con el eje de rotación de la Tierra. Su eje x está a lo largo de la línea que conecta los centros de la Luna y de la Tierra, y apunta en la dirección del vector unitario \hat{r} como se muestra en la Fig. 1a. La Luna siempre se mantiene en el eje x negativo en este marco.

Note que las distancias en la Fig. 1a no están dibujadas a escala. Las flechas curvadas muestran las direcciones de la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna. La distancia Tierra-Luna está denotada por r .



Se dan los siguientes datos:

- (a) En el presente, la distancia entre la Tierra y la Luna es $r_0 = 3.85 \times 10^8$ m e incrementa a un ritmo de 0.038 m por año.
- (b) El periodo de revolución de la Luna es actualmente $T_M = 27.322$ das.
- (c) La masa de la Luna es $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg.
- (d) El radio de la Luna es $R_M = 1.74 \times 10^6$ m.
- (e) El periodo de rotación de la Tierra es actualmente $T_E = 23.933$ horas.
- (f) La masa de la Tierra es $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg.
- (g) El radio de la Tierra es $R_E = 6.37 \times 10^6$ m.
- (h) La constante de gravitación universal es $G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N m²/kg².

Puede hacer las siguientes suposiciones al responder las preguntas:

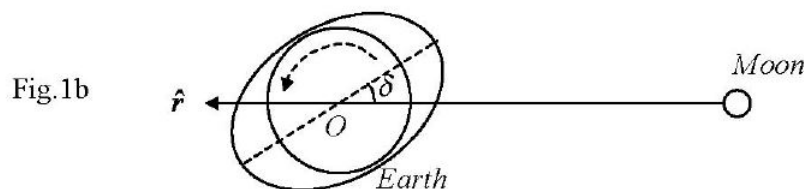
- (i) El sistema Tierra-Luna está aislado del resto del universo.
- (ii) La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular.
- (iii) El eje de rotación de la Tierra es perpendicular al plano orbital de la Luna.
- (iv) Si la Luna está ausente y la Tierra no rota, la distribución de masa en la Tierra es esféricamente simétrica y el radio de la Tierra es R_E .
- (v) Tanto para la Tierra como para la Luna, el momento de inercia I en torno a cualquier eje que pase por su centro es el de una esfera uniforme con respectiva masa M y radio R , i.e. $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Responda las siguientes preguntas:

- (1) Con el respecto al centro de masa C , ¿cuál el valor actual del momento angular total L del sistema Tierra-Luna?
- (2) Cuando el periodo de rotación de la Tierra y el periodo de revolución de la Luna se vuelvan iguales, ¿cuál será la duración de una rotación de la Tierra? Denote su respuesta como T y exprésela en unidades del día presente. Sólo una solución aproximada es requerida, por lo que puede usar métodos iterativos.
- (3) Considere que la Tierra es una esfera sólida giratoria cubierta con una capa superficial de agua, y asuma que mientras la Luna se mueve alrededor de la Tierra el agua permanece estacionaria en el marco xyz . En el modelo, las fuerzas de fricción entre la esfera sólida giratoria y la capa de agua son tomadas en cuenta. Mientras más rápido gire la Tierra se asume que arrastrará mareas lunares de modo que la línea que conecta los abultamientos de las mareas forma un ángulo δ con el eje x , como se muestra en la Fig. 1b. Consecuentemente, las fuerzas de marea lunares actuando sobre la Tierra ejercerán una torca Γ en torno a O para ralentizar la rotación de la Tierra.

Se asume que el ángulo δ es constante e independiente de la distancia Tierra-Luna r hasta que desaparece cuando la revolución de la Luna es sincrónica con la rotación de la Tierra de modo que las fuerzas de fricción ya no existan. La torca Γ por lo tanto disminuye con la distancia Tierra-Luna y es proporcional a $\frac{1}{r^6}$.

De acuerdo con este modelo, ¿cuándo tendrán la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna el mismo periodo? Denote su respuesta como t_f y exprésela en unidades del año presente.



Las siguientes fórmulas matemáticas pueden ser útiles al responder las preguntas:

(M1) Para $0 \leq s \leq r$ y $x = \cos \theta$:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right)$$

(M2) Si $a \neq 0$ y $\frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a}$, entonces $\omega^a(t') - \omega^a(t) = (t' - t)ab$