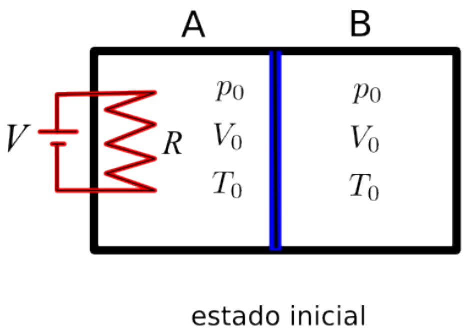
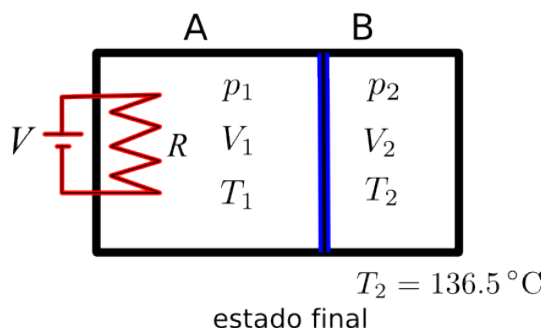
XXV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Oaxaca 9-13 de noviembre de 2014
Prueba teórica

Problema 1 Transferencia de calor (10 puntos)





Un contenedor cilíndrico, fabricado de un material aislante al calor, y de volumen total $V = 44.8\,\mathrm{lt}$ está dividido en dos compartimentos (A y B de la figura) mediante un pistón, también perfectamente aislante al calor, que puede desplazarse sin fricción. Cada compartimento tiene un mol de Helio en estado gaseoso. Inicialmente, los dos compartimentos tienen el mismo volumen V_0 (dividen a la mitad el contenedor cilíndrico) y están a la misma temperatura $T_0 = 0°\,\mathrm{C}$.

Con una resistencia eléctrica colocada en el compartimento A circula una corriente que genera calor lentamente por efecto Joule y cambia el estado termodinámico del sistema, es decir, el gas en los diferentes compartimientos cambian sus presiones, volúmenes y temperaturas. En particular, se encuentra que después de un tiempo t el gas en el compartimiento B ha alcanzado una temperatura de $T_2 = 136.5\,°\mathrm{C}$.

El propósito de este problema es calcular ese tiempo t en el que la resistencia eléctrica confiere calor al sistema, sabiendo que dicha resistencia tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V.

Los siguientes pasos pueden ser de utilidad en dicho cálculo.

Denotemos los valores finales en las variables del gas en cada compartimento de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \text{valores finales:} \\ \text{compartimento A:} \quad (p_1, V_1, T_1) \qquad\qquad \text{compartimento B:} \quad (p_2, V_2, T_2) \end{array} \tag{1}$$

donde, como ya se mencionó, $T_2 = 136.5\,°\mathrm{C}$.

Recuerda que en un gas ideal hay cuatro procesos básicos con las siguientes propiedades:

proceso	propiedad	ecuación que satisface el proceso
isotérmico	T es constante	$pV =$ constante
isobárico	p es constante	$\dfrac{V}{T} =$ constante
isocórico	V es constante	$\dfrac{p}{T} =$ constante
adiabático	$Q = 0$, no hay flujo de calor	$TV^{\gamma-1} =$ constante

donde $\gamma = c_p/c_V$;
c_v y c_p es la capacidad calorífica molar a volumen constante y presión constante respectivamente.
Para el Helio en estado gaseoso: $c_v = \dfrac{3}{2}R$ y $c_p = \dfrac{5}{2}R$
La constante universal de los gases ideales es: $R = 8.31$ J/Kmol;

1.1	**Pregunta:** Determina la presión y el volumen final del compartimento B (p_2, V_2)	3 puntos

Solución

Empleando la ecuación de gas ideal se obtiene la presión inicial en cada compartimiento.

conversión: $T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$,

$$V = 44.8\,\mathrm{lt} \times \frac{10^3\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{lt}} \times \frac{1\,\mathrm{m}^3}{100^3\,\mathrm{cm}^3} = 44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3,\ V_0 = V/2,\ n = 1\,\mathrm{mol}$$

(Calcular bien el volumen V_0 de cada compartimiento inicial, 0.25 puntos)

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{8.31\ \mathrm{J/Kmol} \times 273.15\,\mathrm{K}}{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/2} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \approx 1\,\mathrm{atm} \tag{2}$$

El compartimento B esta aislado térmicamente por lo que el proceso del gas es adiabático. Empleando la ecuación del proceso adiabático que se da en la tabla se puede calcula el volumen final

Para el Helio: $\gamma = 5/3, \qquad \Rightarrow \quad 1/(\gamma - 1) = 3/2$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}, \tag{3}$$

Identificar la ecuación adiabática y escribirla bien 1.25 puntos

$$\Rightarrow \quad V_2 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{2} \left(\frac{273.15\,\mathrm{K}}{409.65\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} = 12.20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 12.20\,\mathrm{lt} \tag{4}$$

Calcular V_2 correcto 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades

La presión final p_2 se obtiene con la ecuación de gas ideal:

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = nR, \tag{5}$$

Usar la ecuación de gas ideal en el problema 0.5 puntos

$$\Rightarrow \quad p_2 = p_0 \frac{T_2}{T_0}\frac{V_0}{V_2} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times \frac{409.65\,\mathrm{K}}{273.15\,\mathrm{K}} \times \frac{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/2}{12.20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 2.78 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{6}$$

Calcular p_2 correcto 0.4 puntos = 0.2 fórmula + 0.2 resultado correcto con unidades

1.2	**Pregunta:** Determina la presión, volumen y temperatura finales del compartimento A (p_1, V_1, T_1)	2 puntos

Solución

$$V_1 = V - V_2 = 44.8\,\text{lt} - 11.92\,\text{lt} = 32.88\,\text{lt} = 32.88 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \tag{7}$$

V_1correcto 0.25 puntos = 0.10 fórmula + 0.15 resultado correcto con unidades.
La presión en ambos compartimentos es la misma:

$$p_1 = p_2 = 2.78 \times 10^5\,\text{Pa} \tag{8}$$

Establecer que la presión es la misma en ambos lados, igual a la pregunta 1.1, 1.0 punto.
La temperatura se calcula con la ecuación del gas ideal:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = nR, \tag{9}$$

Usar ecuación de estado de gas ideal, 0.25 puntos

$$\Rightarrow \quad T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = 273.15\,\text{K} \times \frac{2.78 \times 10^5\,\text{Pa}}{1.01 \times 10^5\,\text{Pa}} \frac{32.88\,\text{lt}}{44.8\,\text{lt}/2} = 1103.59\,\text{K} = 830.44\,^\circ\text{C} \tag{10}$$

Calcular T_1 correcta 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades
Notar que el tenemos información del tipo de proceso que se realizo en el compartimento A; sin embargo se puede calcular el valor de las variables del estado final.

1.3	**Pregunta:** Determina el cambio de energía en ambos compartimentos.	2 puntos

Solución
El cambio de energia en cada recipiente:

$$\begin{aligned}
\Delta U_A &= n c_v \Delta T_A = \frac{3}{2} R \left(T_1 - T_0\right) = \frac{3 \times 8.31\ \ \text{J/Kmol}}{2} \left(1103.59\,\text{K} - 273.15\,\text{K}\right) = 10351.43\,\text{J} \\
\Delta U_B &= n c_v \Delta T_B = \frac{3}{2} R \left(T_2 - T_0\right) = \frac{3 \times 8.31\ \ \text{J/Kmol}}{2} \left(409.65\,\text{K} - 273.15\,\text{K}\right) = 1701.47\,\text{J}
\end{aligned} \tag{11}$$

Energía U_A, 1 punto = 0.5 fórmula + 0.5 resultado correcto con unidades
Energía U_B, 1 punto = 0.5 fórmula + 0.5 resultado correcto con unidades

1.4	**Pregunta:** Usando que la resistencia del compartimento A tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V, determina el tiempo t necesario que le toma a la resistencia generar el calor necesario para realizar el proceso descrito. ¿Existe trabajo W_A y W_B entre los compartimientos, durante el proceso? Si sí, ¿Cuál es la relación entre dichos trabajos?	3 puntos

Solución

El compartimento B esta aislado por lo que $Q_B = 0$, por otra parte en la resistencia es un sistema externo que provee calor Q_R entonces por lo que la primera ley para cada compartimento es:

$$\mathrm{A}: \qquad \Delta U_A = Q_A + W_A \qquad\qquad \mathrm{B}: \qquad \Delta U_B = W_B \tag{12}$$

Sin embargo, todo el sistema A+B recibe Q_R de la resistencia, por lo tanto:

$$\Delta U_T = \Delta U_A + \Delta U_B = Q_R \tag{13}$$

Identificar que el cambio de la energía total es igual al calor de resistencia $\Delta U_T = Q_R$, 0.5 puntos

Como $Q_A = Q_R$, entonces se obtiene:

$$\Delta U_A + \Delta U_B = \cancel{Q_A} + W_A + W_B = \cancel{Q_R}, \qquad \Rightarrow \quad W_A = -W_B \tag{14}$$

Relación WA = -WB entre trabajos, 0.5 puntos

Por otra parte la potencia de la resistencia esta dada $P = VI$; pero la potencia de la resistencia es precisamente el calor generado por efecto Joule por unidad de tiempo $P = \dfrac{Q_R}{t}$, entonces:

$$P = VI = \frac{V^2}{R}, \qquad t = \frac{R}{V^2} Q_R = \frac{R}{V^2}\left(\Delta U_A + \Delta U_B\right) \tag{15}$$

Relación correcta de potencia $P = V^2/R$ o expresión equivalente con Ley de Ohm $V = IR$, 0.75 puntos

Expresión correcta del tiempo de la resistencia $t = Q/P$ o expresión equivalente, 0.75 puntos

Por lo que el tiempo que tarda la resistencia en realizar el proceso es:

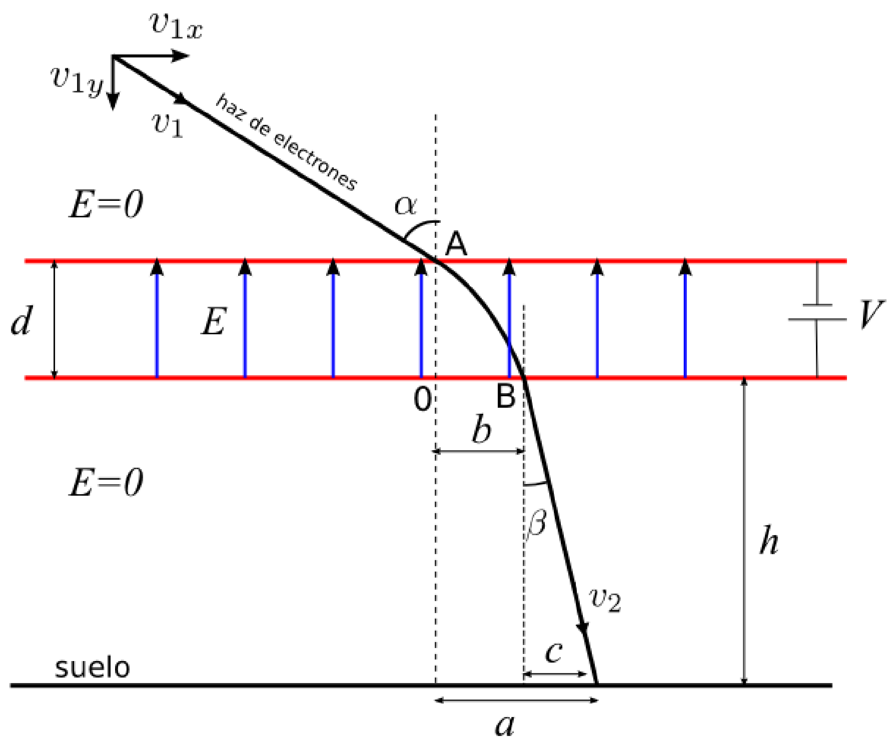
$$t = \frac{242\,\Omega}{(220\,\mathrm{V})^2}\left(10351.43\,\mathrm{J} + 1701.47\,\mathrm{J}\right) = 60.26\,\mathrm{s} \approx 1\,\mathrm{min} \tag{16}$$

Cáculo del tiempo t, 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades

Problema 2 Refracción de electrones **(10 puntos)**

Se tiene un haz de electrones que incide, a un ángulo α, sobre un par de placas paralelas que se encuentran a un potencial V (un condensador), ver figura. El haz incide en el punto A de la placa superior como se muestra en la figura y es desviado dentro de las placas, debido a que el campo eléctrico E entre las placas produce una fuerza sobre los electrones, hasta el punto B de la placa inferior. En ese punto el haz emerge fuera de las placas con un ángulo β. Considera que los electrones pueden cruzar las placas paralelas sin ser afectadas, es decir, sólo las desvía el campo eléctrico. Nota también que en la dirección horizontal no hay fuerzas sobre los electrones del haz. Desprecia cualquier efecto de la gravedad.

El problema general consiste en determinar la distancia horizontal a a la cual es proyectado el haz de electrones en el suelo, respecto de la linea vertical donde incide el haz en la placa superior.



2.1	**Pregunta** Suponiendo que la magnitud de la velocidad del haz incidente es v_1 y que el ángulo de incidencia es α, demuestra que si la magnitud de velocidad de haz desviado (refractado) es v_2 con ángulo β con respecto a la vertical, se satisface la siguiente relación: $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (17)$$	2 puntos

Solución: (**1 punto**, identificar que las componentes de la velocidad, 0.5 c/u) Comparando las componentes de la velocidad de los electrones incidentes y los electrones refractados: $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v_{1x}}{v_1}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{v_{2x}}{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_{1x}}{v_1}\frac{v_2}{v_{2x}} = \frac{v_2}{v_1} \tag{18}$$ (**0.8 punto**, identificar que la velocidad no cambia en la dirección horizontal) En la dirección horizontal no hay fuerzas por lo que la velocidad en la dirección horizontal no cambia: $v_{1x} = v_{2x}$ (**0.2 punto**, resultado final)

La expresión (17) es semejante a la ley de Snell que describe la refracción de la luz cuando atraviesa la interfase entre dos medios de índice de refracción diferentes.

Considera que el haz de electrones incidente tiene una velocidad inicial $v_1 = 1.5 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ y que hace un ángulo $\alpha = 70°$ respecto de la normal de las placas. Considera también que las placas del condensador están separadas una distancia $d = 10\,\mathrm{cm}$ y están conectadas a una diferencia de potencial $V = 300\,\mathrm{V}$

2.2	**Pregunta** Encuentra el tiempo t_v que tarda un electrón perteneciente al haz, en atravesar las placas paralelas; es decir, el tiempo de ir del punto A al punto B.	3 puntos

Solución:
El campo eléctrico dentro de las placas es: $|E| = \dfrac{V}{d} = \dfrac{300\,\mathrm{V}}{0.1\,\mathrm{m}} = 3000\,\mathrm{V/m}$.
El campo eléctrico acelera a los electrones de acuerdo a la segunda ley de Newton:
0.75 puntos por formula correcta de aceleración, 0.25 valor numérico.
0.5 punto si se calcula solo campo eléctrico o segunda ley de Newton

$$F_e = eE = m_e a_e, \qquad \Rightarrow \quad a_e = \frac{eE}{m_e} = \frac{eV}{m_e d} \quad \text{(aceleración debida al campo)} \tag{19}$$

$$a_e = \frac{eV}{m_e d} = \frac{-1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\times 300\,\mathrm{V}}{9.1\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\times 0.1\,\mathrm{m}} = 5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2} \tag{20}$$

Según la dirección del campo eléctrico en la figura, la fuerza eléctrica es negativa (hacia abajo) y la aceleración en la componente vertical es constante por lo que dentro de las placas la trayectoria del haz de electrones es una parábola (tiro parabólico).
(0.5 punto identificar tiro parabólico)
Las componentes de la velocidad son: $v_{1x} = v_1 \operatorname{sen}\alpha$ y $v_{1y} = -v_1\cos\alpha$
Ecuaciones del tiro parabolico: (0.5 punto ecuaciones de tiro parabólico)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{1x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{1y}t - \frac{1}{2}a_e t^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_x(t) &= v_{1x} = v_1 \operatorname{sen}\alpha \\ v_y(t) &= v_{1y} - a_e t = -v_1\cos\alpha - a_e t \end{aligned} \tag{21}$$

Para analizar el tiro parabolico conviene ubicar el origen de coordenadas en el punto O de la figura, de tal manera que $x_0 = 0$, $y_0 = d$. Así, para hallar el tiempo que tarda el electrón en atravesar las placas t_v y el alcance b se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b &= v_{1x}t_v \\ 0 &= d + v_{1y}t_v - \frac{1}{2}a_e t_v^2 \end{aligned} \tag{22}$$

El tiempo t_v se obtiene de la segunda ecuación:
0.75 punto resolver la ecuación para t_v , 0.25 por valor numérico correcto.

$$t_c = \frac{v_{1y}}{a_e} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{1y}}{a_e}\right)^2 + \frac{2d}{a_e}} = \frac{v_{1y} \pm \sqrt{v_{1y}^2 + 2a_e d}}{a_e} = \frac{-v_1\cos\alpha \pm \sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + 2a_e d}}{a_e} \tag{23}$$

Para que el tiempo sea positivo se elige el signo positivo de la raiz:

$$\begin{aligned} t_v &= \frac{-v_1\cos\alpha + \sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + 2a_e d}}{a_e} \\ &= \frac{-\left(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)\cos 70^\circ + \sqrt{\left(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)^2\cos^2 70^\circ + 2\left(5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}\right)(0.1\,\mathrm{m})}}{5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 1.20\times 10^{-8}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{24}$$

2.3	**Pregunta** Calcula la distancia b que es desviado el haz de electrones dentro de las placas. Ver figura, $b = \overline{OB}$.	2 puntos

Solución

1 punto identificar que se trata del alcance horizontal de un tiro parabolico: $x = tv_{1x}$
0.75 punto formula correcta, 0.25 valor numérico correcto.

Conociendo el valor de t_v encontrado en el inciso anterior, se obtiene la distancia que se desvia el haz:

$$b = v_{1x}t_v = v_1 \operatorname{sen}\alpha\, t_v = \left(1.5 \times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)\left(\operatorname{sen} 70^\circ\right)\left(1.20 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}\right) = 0.17\,\mathrm{m} = 17\,\mathrm{cm} \tag{25}$$

2.4	**Pregunta** Si la altura a la que se encuentra la placa inferior del condensador con respecto al piso es $h = 1\,\mathrm{m}$, determina la distancia total a que se desvía el haz hasta llegar al suelo (ver figura).	3 puntos

Solución:
El ángulo de desviación β se determina a partir de ley de Snell, ecuación (17); sin embargo, primero es necesario calcular la velocidad final del haz de electrones v_2 con que salen de las placas. Una manera sencilla se obtiene con la ecuación de la conservación de energía:
(1 punto conservación de energía para encontrar la razón v_2/v_1)

$$\text{conservación de energía:} \quad \frac{m}{2}v_2^2 = \frac{m}{2}v_1^2 + eV, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} \tag{26}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} = \sqrt{1+\frac{2\times 1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\times 300\,\mathrm{V}}{(9.1\times 10^{-31}\ \mathrm{kg})\,(1.5\times 10^{7}\,\mathrm{m/s})^2}} = 1.21, \qquad v_2 = 1.81\times 10^{7}\,\mathrm{m/s} \tag{27}$$

(1 punto usar ley de Snell del inciso 2.1)
Sustituyendo en la ley de Snell, se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} = 1.21, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1.21} \\ \beta &= \arcsin\left[\frac{\operatorname{sen}70^\circ}{1.21}\right] = \arcsin\,[0.78] \\ \beta &= 50.95^\circ \end{aligned} \tag{28}$$

Otra manera de calcular la velocidad v_2, así como el ángulo β es a partir de las ecuaciones del tiro parabolico (21), de la siguiente manera. Al llegar al punto B ha transcurrido el tiempo t_v, de donde la componente vertical de la velocidad en el punto B es:
(0.75 punto componente vertical de la velocidad en el punto B)

$$\begin{aligned} v_{2y}\,(B) &= -v_1\cos\alpha - a_e t_v \\ &= -\left(1.5\times 10^{7}\,\mathrm{m/s}\right)(\cos 70^\circ) - \left(5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(1.20\times 10^{-8}\,\mathrm{s}\right) \\ &= -1.15\times 10^{7}\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{29}$$

(0.75 punto velocidad v_2 en el punto B)
como la componente horizontal de la velocidad no cambia, entonces v_2 se calcula como:

$$v_2 = \sqrt{v_{1x}^2 + (v_{2y}\,(B))^2} = \sqrt{(1.5\times 10^{7}\,\mathrm{m/s}\times \operatorname{sen}70^\circ)^2 + (-1.15\times 10^{7}\,\mathrm{m/s})^2} = 1.82\times 10^{7}\,\mathrm{m/s} \tag{30}$$

(0.5 punto calcular el ángulo β)
resultado que coincide con (27), el ángulo β se obtiene de la siguiente manera:

$$\tan\beta = \frac{v_{1x}}{v_{2y}} = \frac{1.5\times 10^{7}\,\mathrm{m/s}\times \operatorname{sen}70^\circ}{-1.15\times 10^{7}\,\mathrm{m/s}} = -1.22, \qquad \beta = \arctan\,(-1.22) = 50.79^\circ \tag{31}$$

(0.5 punto identificar $c = h\tan\beta$)
con esto se obtiene la siguiente distancia:

$$c = h\,\tan\beta = 1\,\mathrm{m}\times\tan\,(50.95^\circ) = 1.23\,\mathrm{m} \tag{32}$$

(0.5 punto resultado final)
finalmente la ditancia total que se pide es:

$$a = b + c = 0.17\,\mathrm{m} + 1.23\,\mathrm{m} = 1.4\,\mathrm{m} \tag{33}$$

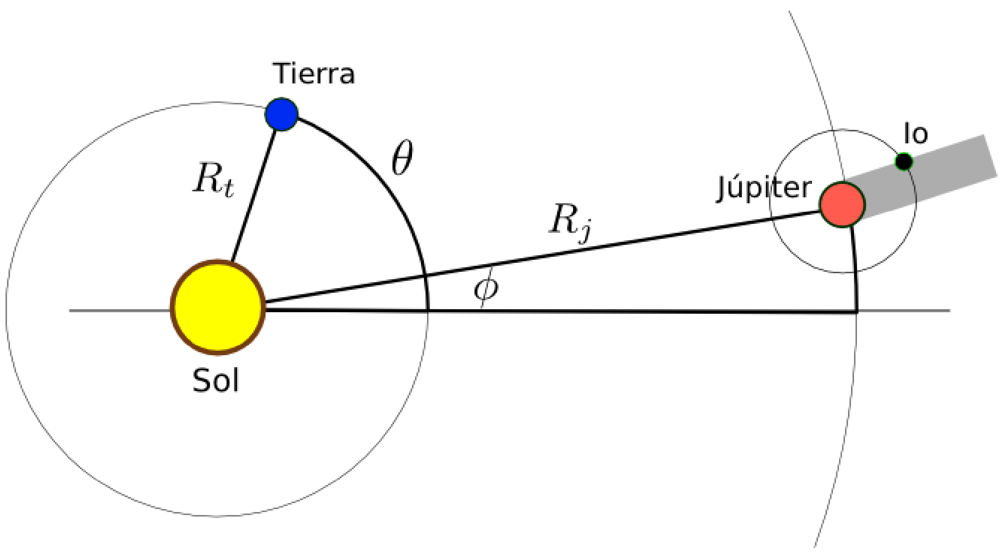
DATOS

carga del electrón	$e = -1.6 \times 10^{-19}$ C
masa del electrón	$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

Problema 3 Velocidad de la Luz, experimento de Romer (10 puntos)

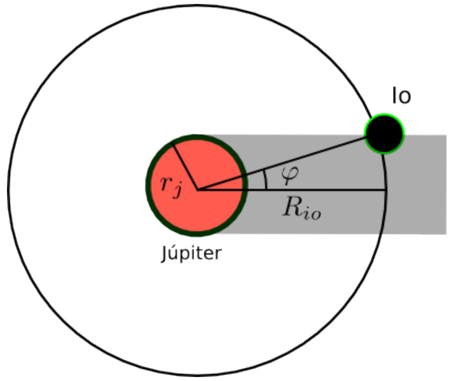
En el año 1676 el astrónomo danés Ole Roemer realizó la primera medición de la velocidad de la luz. En las observaciones hechas por Romer de la luna Io de Júpiter había notado que la duración de los eclipses del satélite se hacían más cortos conforme la Tierra se acercaba a Júpiter y por el contrario se hacían más largos conforme se alejaban. Estas discrepancias, conjeturó Romer, se podían explicar suponiendo que la velocidad de la luz era finita y no infinita como se creía entonces. Es decir, la discrepancia se debía al tiempo adicional que le toma a la luz viajar entre la Tierra y Júpiter. Este problema consiste en determinar la velocidad de la luz de acuerdo al razonamiento de Roemer.

En la figura se observa la configuración en un momento dado del Sol, la Tierra, Júpiter y su satélite Io. En todo el problema supondremos que el Sol está fijo en un punto, mientras que la Tierra y Júpiter giran alrededor del Sol en órbitas circulares (en general son órbitas elípticas, pero por simplicidad suponemos que son circunferencias) cuyos radios son R_T y R_J, respectivamente. En la figura se muestra también la sombra que proyecta Júpiter sobre una parte de la órbita de Io, lo que provoca el eclipse de Io.



De la figura también se puede ver que durante la mitad de la trayectoria de la Tierra, es decir durante medio año, un observador en la Tierra sólo puede ver cuando Io emerge de la sombra proyectada de Júpiter, ya que el mismo Júpiter impide ver cuando entra en la sombra de Júpiter. Lo contrario sucede la siguiente mitad de la trayectoria, el siguiente medio año, cuando solo se puede observar la entrada en la sombra de Júpiter y no su salida de ella.

Primero analicemos el sistema de Júpiter y su luna Io. Para ello se ilustra este sistema en la siguiente figura y se plantean las siguientes preguntas.



3.1	**Pregunta:** Determina el periodo orbital de Io alrededor de Júpiter. Usa los datos de la tabla al final del problema. Nota que tal tiempo es muchísimo menor que el periodo orbital de Júpiter alrededor del Sol.	2 puntos

Solución:

1 punto fuerza gravitacional y centripeta, 0.75 formula correcta del periodo y 0.25 valor numérico correcto

Usando fuerza gravitacional y fuerza centrípeta se obtiene la velocidad órbita de la luna Io y por lo tanto su periodo orbital.

$$m_{io}\frac{v^2}{R_{io}} = G\frac{M_J m_{io}}{R_{io}^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{GM_J}{R_{io}}} = 17448.6\,\mathrm{m/s} \tag{34}$$

$$\boxed{T_{io} = \frac{2\pi R_{io}}{v} = 151241.01\,\mathrm{s} = 42.01\,\mathrm{h} = 1.750\,\mathrm{dias}} \tag{35}$$

A medida que Júpiter se mueve su sombra proyectada en una porción de la órbita de su luna Io va cambiando de orientación, tal como se observa en la figura.

3.2	**Pregunta:** Determinar el tiempo de duración del eclipse de la luna Io, es decir calcula el tiempo t_e que tarda Io en atravesar la sombra de Jupiter (suponga que la luna de Io es un punto sin dimensiones).	2 puntos

Solución

1.75 llegar a formula correcta del tiempo, 0.25 valor numérico

Como la anchura de la sombra es igual al diámetro de Júpiter, el ángulo φ que subtiende medio arco del eclipse se puede calcular como:

$$\tan\varphi = \frac{r_J}{R_{io}} = \frac{71398 \times 10^3\,\mathrm{m}}{4.2\times 10^8\,\mathrm{m}}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left[\frac{r_J}{R_{io}}\right] = 0.168\,\mathrm{rad} \tag{36}$$

Por una regla de tres se obtiene el tiempo de duración del eclipse de Io: (**1 punto**)

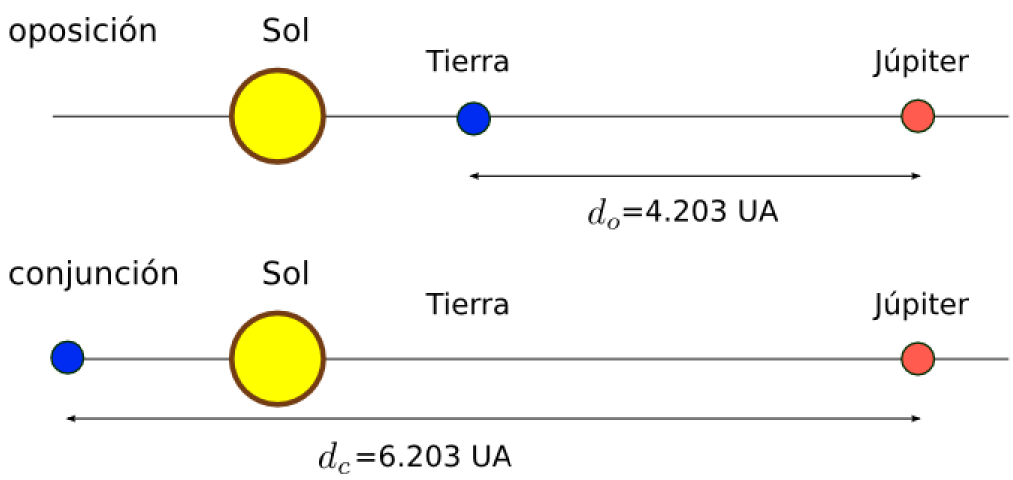
$$\frac{t_e}{T_{io}} = \frac{2\varphi}{2\pi} \qquad t_e = \frac{2\varphi}{2\pi}T_{io} = \frac{\varphi}{\pi}\times 151241\,\mathrm{s} = 8087.75\,\mathrm{s} = 134.79\,\mathrm{min} = 2.25\,\mathrm{hrs} \tag{37}$$

Otra manera de calcular el tiempo que tarda Io en atravesar la sombra de Júpiter sería a partir de la velocidad de Io, ecuación (34), de la siguiente manera: (**2 punto**)

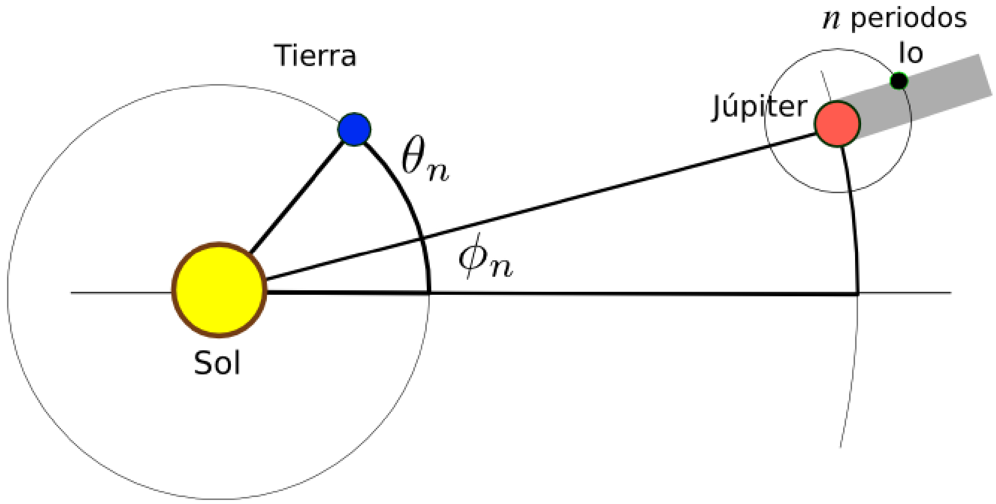
$$t_e = \frac{2r_j}{v} = \frac{2\times 71398\times 10^3\,\mathrm{m}}{17448.6\,\mathrm{m/s}} = 8183.80\,\mathrm{s} = 136.40\,\mathrm{min} = 2.27\,\mathrm{hrs} \tag{38}$$

(esto es valido porque $r_j \ll R_{io}$) cuyo resultado solo varía en el orden de minutos, respecto del anterior.

Hay dos posiciones relativas entre la Tierra y Júpiter que son importantes y se muestran en las siguientes figuras; una de ellas se llama *oposición* y es cuando la Tierra está en la posición más cercana a Júpiter y la otra se llama *conjunción* y es cuando la Tierra está en la posición más alejada de Júpiter.



Supongamos que inicialmente un astrónomo, estando la Tierra en *oposición*, observa la salida de Io de la sombra de Jupiter. Después de que Io ha completado n periodos el astrónomo vuelve a observar la salida de Io de la sombra de Júpiter. Durante este tiempo la Tierra y Júpiter han girado un ángulo θ_n y ϕ_n de su posición inicial (cuando estaban en *oposición*).



3.3	**Pregunta:** Determina el ángulo θ_n que ha girado la Tierra respecto de su posición inicial (*oposición*), así como el ángulo ϕ_n que ha girado Júpiter, cuando ha transcurrido un periodo completo de Io ($n = 1$) y cuando han transcurrido $n = 50$ periodos de Io.	2 puntos

Solución

Hay que hallar la velocidad angular de la Tierra y multiplicar por el numero de periodos de Io.

0.5 punto, frecuencia angular del movimiento circular; 0.5 punto, ángulo que recorre (0.25 c/u)

$$\omega_T = \frac{2\pi}{365\,\text{dias}} = 0.017\,\text{dias}^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \theta_n &= \omega_T \times nT_{io} = 0.017\,\text{dias}^{-1} \times n\,1.750\,\text{dias} \\ &= n\,0.03\,\text{rad} = n\,1.72^\circ \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & \theta_1 = 0.03\,\text{rad} = 1.72^\circ \\ n = 50 \quad & \theta_{50} = 1.5\,\text{rad} = 86^\circ \end{aligned} \tag{40}$$

Lo mismo para Júpiter:

0.5 punto, frecuencia angular del movimiento circular; 0.5 punto, ángulo que recorre (0.25 c/u)

$$\begin{aligned} \omega_J &= \frac{2\pi}{11.86 \times 365\,\text{dias}} = 0.0015\,\text{dias}^{-1}, \\ \Rightarrow \quad \phi_n &= \omega_J\,nT_{io} = 0.0015\,\text{dias}^{-1} \times n\,1.750\,\text{dias} = n\,0.0025\,\text{rad} = n\,0.14^\circ \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & \phi_1 = 0.0025\,\text{rad} = 0.14^\circ \\ n = 50 \quad & \theta_{50} = 0.125\,\text{rad} = 7.16^\circ \end{aligned} \tag{42}$$

3.4	**Pregunta:** Determina la distancia Tierra-Júpiter en unidades astronómica (UA) después de que ha transcurrido uno ($n = 1$) y cincuenta ($n = 50$) periodos de Io a partir de la *oposición* de la Tierra.	2 puntos

Solución:

Si θ_1 y ϕ_1 es el ángulo que ha girado la Tierra y Júpiter, respectivamente, durante un periodo de Io. Entonces por ley de cosenos se puede encontrar la distancia Tierra-Júpiter

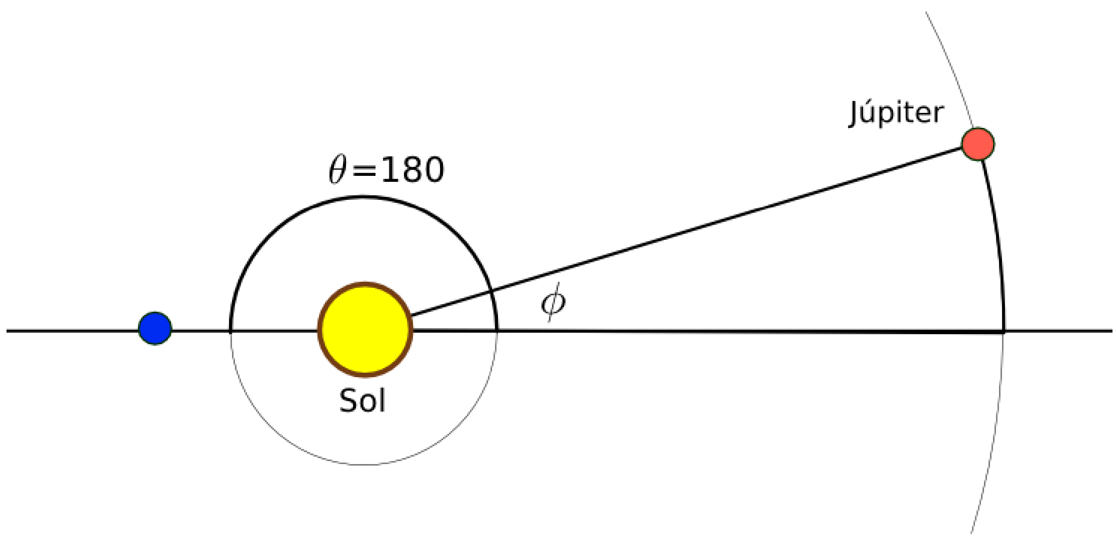
1.5 punto formula correcta; 0.25 punto por evalucuación correcta de cada una de las distancias)

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{R_t^2 + R_j^2 - 2R_tR_j\cos\left(\theta_n - \phi_n\right)} \\ \\ d_1 &= \sqrt{(1\,\text{UA})^2 + (5.203\,\text{UA})^2 - 2\,(1\,\text{UA})\,(5.203\,\text{UA})\cos\left(1.72^\circ - 0.14^\circ\right)} = 4.20347\,\text{UA} \\ d_{50} &= \sqrt{(1\,\text{UA})^2 + (5.203\,\text{UA})^2 - 2\,(1\,\text{UA})\,(5.203\,\text{UA})\cos\left(86^\circ - 7.16^\circ\right)} = 5.10462\,\text{UA} \end{aligned} \tag{43}$$

En un periodo de Io la distancia permanece casi igual respecto de la oposición de la Tierra ($d = 4.203\,\text{UA}$), después de 50 periodos ya se nota la diferencia en este caso aproximadamente 1 UA.

De tu resultado anterior notarás que hay un cambio notable en la distancia Tierra-Júpiter dependiendo de cuantos eclipses hayan ocurrido en Io. Con esta observación, y conociendo un periodo orbital de Io, un astrónomo en la Tierra puede anticipar el tiempo en que verá emerger al satélite Io de la sombra de Júpiter, medido a partir de una observación previa de la salida de Io. Sin embargo, al realizar las observaciones (tal como lo hizo Roemer en 1676) es un hecho experimental que hay un tiempo de retraso Δt en la salida de Io, con respecto al esperado. La explicación es que en ese intervalo de tiempo la Tierra se ha alejado de Júpiter, y dado que la luz viaja a una velocidad constante c, entonces la luz tiene que viajar una distancia más grande de Io a la Tierra y, por lo tanto, la aparición de Io se observa en la Tierra un tiempo más tarde de lo esperado. De esta manera, midiendo el tiempo de retraso Δt es posible determinar la velocidad de la luz.

En general el tiempo de retraso es muy pequeño si han transcurrido pocos periodos orbitales de Io, debido a que la distancia Tierra-Júpiter no varía mucho en este tiempo (ve tu respuesta de 3.2). Por lo tanto, es difícil de medir el tiempo Δt con unos cuantos periodos. Sin embargo, es posible medir el retraso de la observación *medio año* después, cuando la Tierra está en *conjunción* con respecto a la posición (*oposición*) original de Júpiter. Se ha medido con exactitud este retraso global y el resultado es, $\Delta t = 997\,\text{s}$.



3.5	**Pregunta:** Con la medición observada del retraso en la aparición de Io, $\Delta t = 997\,\text{s}$, determina la velocidad de la luz.	2 puntos

Solución:
Primero determinamos el ángulo ϕ que ha girado Júpiter cuando la Tierra ha girado 180° o π radianes:
(0.25 punto, ángulo ϕ)

$$\frac{1/2\,\text{año}}{11.86\,\text{años}} = \frac{\phi}{360} \qquad \Rightarrow \quad \phi = \frac{360^\circ}{2 \times 11.86} = 15.18^\circ \tag{44}$$

Entonces la distancia Tierra-Jupiter se obtiene con ley de cosenos:
(0.25 punto, ley de los cosenos)

$$\begin{aligned} d_c &= \sqrt{R_t^2 + R_j^2 - 2R_tR_j\cos(180^\circ - \phi)} \\ &= \sqrt{(1\,\text{UA})^2 + (5.203\,\text{UA})^2 - 2\,(1\,\text{UA})\,(5.203\,\text{UA})\cos(180^\circ - 15.18^\circ)} \\ &= 6.171\,\text{UA} \end{aligned} \tag{45}$$

La velocidad de la luz es la diferencia de distancias entre el tiempo de retraso:
(1.5 punto, velocidad de la luz)

$$c = \frac{6.171\,\text{UA} - 4.203\,\text{UA}}{997\,\text{s}} = \frac{1.968\,\text{UA}}{997\,\text{s}} = \frac{1.968 \times 1.496 \times 10^{11}\,\text{m}}{997\,\text{s}} = 2.953 \times 10^8\,\text{m/s} \tag{46}$$

DATOS

radio orbital de la Tierra	$R_t = 1\,\mathrm{UA}$
radio orbital de Júpiter	$R_j = 5.203\,\mathrm{UA}$
radio Io-Jupiter	$R_{io} = 4.2 \times 10^8\,\mathrm{m}$
radio ecuatorial de Júpiter	$r_j = 71398\,\mathrm{km}$
unidad astronómica	$1\,\mathrm{UA} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
masa Júpiter	$M_J = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$
periodo de Júpiter alrededor del Sol	11.86 años
constante gravitacional	$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$