P1 La física del Scalextric

El Scalextric es un juguete de coches de carreras cuyos orígenes se remontan al año 1952, cuando la compañía Minimodels comenzó a fabricar modelos en miniatura de coches de competición como Maserati o Ferrari. La escala en que se construían los modelos era muy variable, y cada coche se fabricaba con un tamaño diferente. Por este motivo a la gama de coches se la denominó ScaleX (palabra compuesta por "Scale" y "X", que significa “escala variable”, o “desconocida").

Fred Francis, dueño de Minimodels, tuvo la idea de motorizar los coches con un mecanismo de cuerda. El juguete tuvo tanto éxito que Minimodels decidió probar con motores eléctricos. A partir de entonces, ScaleX se convirtió en Scalextric (contracción de las palabras ScaleX y Electric). Para hacer carreras en pistas, se diseñaron unos carriles guía que tienen contactos eléctricos a ambos lados. Los coches avanzan por los carriles gracias a una fuente de alimentación de corriente continua conectada a cada uno de los dos raíles metálicos que tiene cada pista. Estos raíles se conectan al motor mediante dos *escobillas* situadas en la parte inferior del coche. Las escobillas son flexibles y deslizan sobre los raíles mientras los coches avanzan por la pista, transmitiendo la corriente eléctrica al motor.

La velocidad del coche se controla con un mando constituido por una resistencia eléctrica variable conectada en serie entre el motor del coche y la fuente de alimentación. Presionando el pulsador del mando se modifica su resistencia eléctrica, que varía entre un valor prácticamente nulo (cuando se empuja el pulsador a tope) y una resistencia máxima (cuando no se pulsa). El mando lleva incorporado un muelle que devuelve el pulsador a la posición de resistencia máxima cuando deja de empujarse. Variando la resistencia del mando se consigue que circule más o menos intensidad de corriente por el motor del coche, y así se puede controlar su velocidad en la pista.

Exploremos la física de un circuito de Scalextric como el de la figura 1, que consta de dos pistas horizontales A y B separadas una distancia d = 25 cm. Cada pista tiene dos tramos rectos paralelos S_1 y S_3, de longitud L = 5 m, y dos semicirculares S_2 y S_4 de radios R = 75 cm para la pista interior y (R + d) para la exterior. Dos coches de masa m = 125 g cada uno circulan uno en cada pista. Parten con velocidad nula de la meta y giran en sentido antihorario.

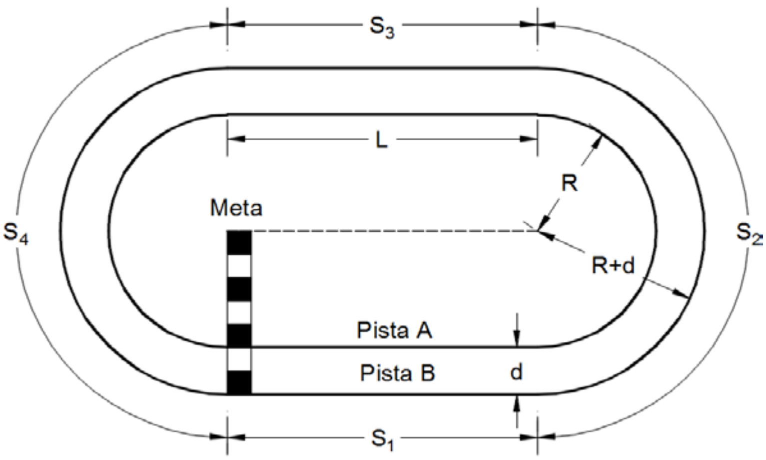


Fig. 1

En el movimiento del coche se disipa energía debido a una serie de factores que, en conjunto, se comportan como un rozamiento dinámico de coeficiente μ_d. En los tramos curvos los raíles pueden soportar una fuerza lateral máxima $F_{max} = 1{,}5$ N, por encima de la cual los coches se salen del raíl. El cableado del motor del coche tiene una resistencia eléctrica $R_c = 5{,}0\ \Omega$. Para simplificar el problema, se supone que las únicas pérdidas de energía en el motor se deben a la resistencia de su cableado. El pulsador del mando controla una resistencia R_v, que varía de forma lineal con el recorrido del pulsador, entre 0 (pulsador a fondo) y $R_{max} = 400\ \Omega$ (pulsador suelto). La pista está alimentada con una fuente de tensión continua cuya FEM es $\varepsilon = 15$ V. En la figura 2 se muestra un esquema del circuito eléctrico formado por el motor del coche en serie con el mando y la fuente de alimentación. Se ha añadido un amperímetro para medir la intensidad de corriente que circula.

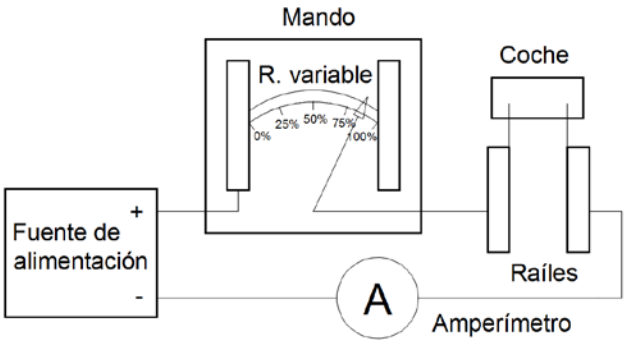


Fig. 2

a) Sabiendo que el motor no convierte energía eléctrica en mecánica cuando el pulsador del mando se deja suelto, calcule la lectura del amperímetro I_0 y la potencia que aporta la fuente de tensión P_{f0}.

b) ¡Comienza la carrera! Los jugadores pulsan a tope sus mandos y los coches comienzan a moverse por el tramo S_1. Para simplificar el análisis[1] suponemos que la intensidad eléctrica en el circuito, tras pulsar los mandos, alcanza de forma casi instantánea un valor de 850 mA que se mantiene constante a lo largo del tramo S_1. Determine la potencia eléctrica que el motor está convirtiendo en potencia mecánica para mover un coche.

c) Suponga que los coches aceleran desde el reposo hasta una velocidad máxima en un tiempo muy pequeño (despreciable) y que, después, su velocidad se mantiene constante. Si los coches tardan un tiempo $t_1 = 1{,}25$ s en recorrer el tramo S_1, ¿cuál es el valor del coeficiente de rozamiento dinámico μ_d?

d) Los coches entran en el sector S_2. Calcule la velocidad máxima a la que puede circular el coche A en este sector para que no se salga en la curva.

e) Para que el coche A trace la curva del sector S_2 a la velocidad máxima, ¿en qué porcentaje P de su recorrido hay que pulsar el mando? Suponga que en la transición entre S_1 y S_2 tanto los cambios de velocidad como de energía cinética se producen en un tiempo muy pequeño. En S_2 el amperímetro sigue marcando 850 mA.

f) Dos amigos juegan con sendos coches idénticos, uno en la pista A y otro en la B. Antes de empezar a jugar discuten sobre cuál de los dos coches tiene ventaja. El piloto de la pista B argumenta que el A tiene ventaja porque recorre menos distancia en las curvas. El jugador de la pista A sostiene que el de la pista B recorre curvas con mayor radio y que, por tanto, en ellas el coche puede ir más rápido. Si ambos coches van en los sectores S_2 y S_4 a la velocidad máxima posible, calcule la diferencia entre los tiempos de ambos en las curvas y explique cuál de los dos tiene razón.

g) Con el objetivo de igualar los tiempos de los dos coches en las curvas, se modifica la pista B variando la fuerza máxima que pueden soportar los raíles sin que el coche descarrile. ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza máxima en el carril B?

[1] El tiempo que transcurre desde que arranca el motor parado hasta que éste alcanza una velocidad (constante) de "régimen" se denomina "período de puesta en marcha". Suponemos que este tiempo es despreciable y que la velocidad de régimen se alcanza de forma prácticamente instantánea.

P1 Solución

a) Con el mando suelto la resistencia del mando es la máxima ($R_v = R_{max}$). Y con el motor parado, sin realizar conversión de energía eléctrica a mecánica como dice el enunciado, aplicando la ley de Ohm se tiene:

$$\varepsilon = I_0 \left(R_c + R_{max} \right) \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R_c + R_{max}} = 37{,}037 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \quad = \quad 37{,}04\ \text{mA}$$

$$P_{f0} = \varepsilon I_0 \quad = \quad 0{,}56\ \text{W}$$

b) El mando está pulsado a tope y entonces $R_v = 0$. De la energía aportada por la fuente, una parte se disipa en la resistencia interna del cableado del motor, y el resto se comunica al motor, que la convierte en energía mecánica. Por lo tanto la potencia eléctrica que el motor convierte en mecánica es

$$P_{motor\text{-S1}} = \varepsilon I - I^2 R_c = \ 9{,}14\ \text{W}$$

---

* Nota: Este resultado es aproximado ya que la intensidad no es constante, pues parte de un valor máximo, justo tras pulsar el mando, hasta un valor mínimo estable cuando se alcanza la velocidad de régimen del motor. Sin embargo, este transitorio ocurre en un tiempo despreciable y la aproximación es buena.

c) En el tramo S_1 la energía aportada por el motor es igual al trabajo realizado por la fuerza efectiva de rozamiento. No hay que considerar aquí un término de variación de energía cinética porque, de acuerdo con las hipótesis simplificadoras del enunciado, el coche alcanza una velocidad constante en un tiempo muy pequeño y luego recorre a esa velocidad el tramo S_1. Por lo tanto se tiene

$$v_1 = L / t_1 = 4\ \text{m/s}$$

Del balance de energía resulta:

$$P_{motor\text{-S1}}\, t_1 = m\, g\, \mu_d\, L \quad \rightarrow \quad \mu_d = \frac{P_{motor\text{-S1}}\, t_1}{m\, g\, L} \ = 1{,}865$$

---

* Nota: Hemos supuesto por simplicidad que cada vez que pulsamos el mando el motor acelera en un tiempo despreciable hasta una velocidad de régimen constante. En realidad, para estos motores, dicha velocidad se alcanza en un tiempo muy pequeño pero no nulo. La solución exacta resulta de una ecuación diferencial para el balance de energía en un tiempo dt :

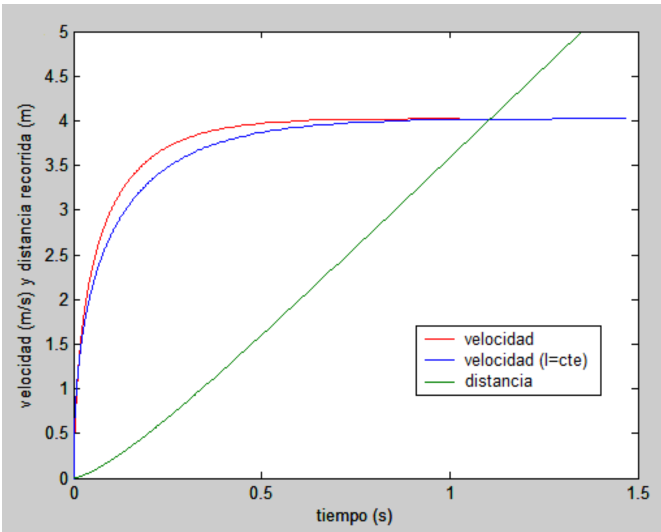
$$P_{motor}\, dt = dE_c + dW_{Fr} \quad \rightarrow \quad \left(\varepsilon I - I^2 R \right) dt = \frac{1}{2} 2 m v\, dv + m\, g\, \mu_d\, dx \quad \rightarrow \quad (\varepsilon - I\, R) I = m v v' + m\, g\, \mu_d\, v \qquad (1)$$

Se ha de tener en cuenta, además, que la intensidad que recorre el motor (debido a la fuerza “contraelectromotriz”) depende de la velocidad: $I = \varepsilon / (R + kv)$, donde k es una constante que depende de las características del motor. Así:

$$m v' = \frac{k \varepsilon^2}{(R + kv)^2} - m\, g\, \mu_d \qquad (2)$$

La gráfica muestra la solución exacta $v(t)$ a la ecuación (2) y una solución aproximada a la ecuación (1) tomando el valor de la intensidad constante, para el coeficiente de rozamiento $\mu_d =$ 1,865. También se representa la distancia recorrida en función del tiempo.

Comprobamos que las hipótesis son adecuadas, ya que la velocidad de régimen se alcanza rápidamente y el movimiento puede considerarse uniforme.



d) La velocidad máxima del coche A en el sector S_2 se alcanza cuando la fuerza centrípeta necesaria para trazar la curva es igual a la fuerza máxima que pueden soportar los raíles sin que el coche descarrile:

$$\frac{m v_{\text{A-S2}}^2}{R} = F_{max} \quad \rightarrow \quad v_{\text{A-S2}} = \sqrt{\frac{F_{max}\, R}{m}} = 3{,}0 \text{ m/s}$$

e) El coche tarda un tiempo

$$t_{\text{A-S2}} = \frac{(2\pi R)/2}{v_{\text{A-S2}}} = \frac{\pi R}{v_{\text{A-S2}}} = 0{,}7854 \text{ s}$$

en recorrer el sector S_2. Lógicamente en el tramo curvo S_2 el coche ha de circular a menor velocidad que en S_1 y, por tanto, ha de perder parte de su energía cinética justo antes de entrar en la curva. Esto implica que en S_2 el motor sólo tiene que convertir energía eléctrica en mecánica para compensar la pérdida energética debida al rozamiento dinámico, no siendo necesario invertir potencia mecánica en aumentar la energía cinética del coche.

Como la resistencia del mando varía linealmente con la profundidad con la que se introduce el pulsador, se tendrá que $R_v = (1-\alpha)R_{\max}$, donde $\alpha \in [0,1]$ es la fracción del mando que debe pulsarse. La potencia eléctrica que convierte el motor en eléctrica en este tramo es

$$P_{motor\text{-S2}} = \varepsilon I - I^2\left(R_c + R_v\right) = \varepsilon I - I^2\left(R_c + (1-\alpha)R_{\max}\right)$$

Podemos escribir el balance de energía como:

$$P_{motor\text{-S2}}\; t_{\text{A-S2}} = m\, g\, \mu_d \left(\frac{1}{2} 2\pi R\right)$$

Operando se obtiene $\alpha = 0{,}992$. Multiplicando por 100, hay que pulsar el mando P = 99,2% de su recorrido.

f) Ya se ha calculado antes la velocidad máxima del coche A en el tramo S_2 a velocidad máxima sin salirse de los raíles: $v_{\text{A-S2}} = 3 \text{ m/s}$. El tiempo que invierte el coche A en ese tramo era

$$t_{\text{A-S2}} = \frac{\pi R}{v_{\text{A-S2}}} = 0{,}7854 \text{ s}$$

Para el coche B la velocidad máxima y el tiempo empleado resultan

$$v_{\text{B-S2}} = \sqrt{\frac{F_{max}\left(R+d\right)}{m}} = 3{,}4641 \text{ m/s}$$

$$t_{\text{B-S2}} = \frac{\pi\left(R+d\right)}{v_{\text{B-S2}}} = 0{,}9069 \text{ s}$$

La diferencia de tiempos es $t_{\text{B-S2}} - t_{\text{A-S2}}$ = 0,12 s. Por tanto, el coche A tiene ventaja.

g) Llamando F'_{max} a la fuerza centrípeta que deben soportar los raíles de la pista exterior para que ambos coches corran en las mismas condiciones en la curva, debe cumplirse

$$\pi\sqrt{\frac{mR}{F_{max}}} = \pi\frac{\sqrt{m\left(R+d\right)}}{\sqrt{F'_{max}}} \quad \rightarrow \quad F'_{max} = \frac{R+d}{R} F_{max} = 2{,}0 \text{ N}$$

P2 La luz láser

Cuando en 1917 Albert Einstein predijo el fenómeno de "emisión estimulada de radiación", era difícil imaginar que décadas después se inventaría el *láser*[1] y que éste tendría revolucionarias aplicaciones en muy diversos campos como la medicina, la industria, el ocio, las comunicaciones… o la investigación científica. "Láser" es el acrónimo de las palabras inglesas *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación), que describen su funcionamiento.

La radiación láser posee todas las propiedades de la luz. Pero entonces, ¿qué la hace especial respecto a la luz emitida por otras fuentes? La respuesta es que la luz láser tiene una gran direccionalidad, una alta concentración energética, y una elevada monocromaticidad. Un "rayo" láser se presenta como un intenso haz casi cilíndrico de unos pocos milímetros de diámetro y muy poca divergencia, que contiene ondas de prácticamente una única frecuencia.

Estas extraordinarias características se deben a su propio principio de funcionamiento, que vamos a describir brevemente. Un láser típico consta de tres elementos básicos: 1) una *cavidad óptica resonante*, formada por dos espejos enfrentados, donde la luz viaja repetidamente en trayectos de ida y vuelta; 2) un material (sólido, líquido o gaseoso), llamado *medio activo*, que llena la cavidad entre los dos espejos y cuya función es amplificar la luz que viaja por él; y 3) un mecanismo de *bombeo* que aporta energía al medio activo para excitar sus átomos o moléculas a niveles energéticos superiores al fundamental.

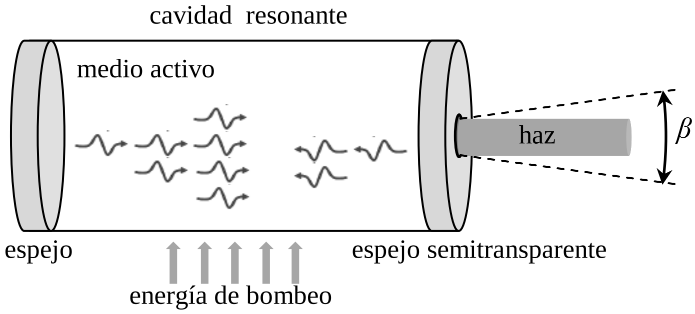


Fig. 1

El efecto amplificador del medio activo se debe a la *emisión estimulada* descubierta por Einstein, consistente en que los fotones emitidos espontáneamente por algunos de los átomos excitados inducen (estimulan) la emisión de fotones por otros átomos, con la peculiaridad de que la radiación estimulada tiene la misma frecuencia, fase y dirección que la radiación incidente estimuladora, de manera que ambas interfieren constructivamente.

Este proceso en cadena llevaría a que la intensidad de la luz amplificada dentro de la cavidad tendiera a infinito. Sin embargo, no ocurre así, pues se alcanza un equilibrio entre ganancias y pérdidas. Parte de las pérdidas se debe a que uno de los espejos de la cavidad es semitransparente y permite la salida de una fracción de la luz, que constituye precisamente el haz láser que emerge del dispositivo.

Dentro de la cavidad se produce la superposición de las ondas electromagnéticas que viajan en ambos sentidos. La distribución de la amplitud del campo eléctrico en la cavidad es del mismo tipo que la de las ondas estacionarias transversales en una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, como se esquematiza en la figura 2.

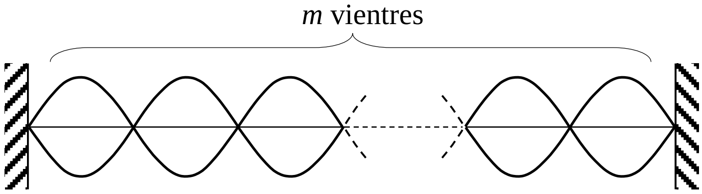


Fig. 2. Modo *m* de la cavidad

Si la cavidad tiene longitud L y está rellena de un medio activo de índice de refracción n:

a) Deduzca la relación entre las longitudes de onda de la luz dentro de la cavidad, λ, y en el vacío, λ_0.

b) Obtenga la expresión para la frecuencia, f_m, del modo m de la cavidad y la expresión para la separación en frecuencia, Δf, entre dos modos consecutivos.

[1] El primer láser fue construido en 1960 por Maiman utilizando rubí. Antes, en 1953, Townes, Gordon y Zeiger habían construido el primer máser, que funcionaba con los mismos principios físicos, para radiación de microondas.

Vamos a considerar un láser de Helio-Neón (He-Ne) cuya cavidad tiene una longitud $L = 44{,}0$ cm e índice de refracción $n = 1{,}000$. El espejo semitransparente tiene una reflectancia en energía del 95%. El láser emite luz con espectro centrado en una longitud de onda $\lambda_0 = 632{,}8$ nm con una potencia de salida de 10 mW, a través de un orificio de diámetro $D_s = 2$ mm. El haz viaja en el sentido positivo del eje OX. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s.

c) Suponiendo que el haz es perfectamente unidireccional, calcule su intensidad justo a la salida del láser y a una distancia de 10 m de la salida. Calcule también la intensidad, dentro de la cavidad, de la onda que viaja hacia el espejo de salida (se desprecia la absorción del medio de propagación).

En realidad, debido a la difracción de la luz en el orificio del láser se produce la divergencia del haz. Se sabe que el ángulo de divergencia β para un orificio circular (véase la figura 1) viene dado por la expresión:

$$\sin\frac{\beta}{2} = 1{,}22\frac{\lambda_0}{D_s} \qquad (1)$$

d) Obtenga el diámetro del haz $D(x)$ a una distancia x de la salida del láser, en función de D_s y λ_0. Tenga en cuenta que los ángulos de divergencia son muy pequeños. Calcule de nuevo la intensidad a 10 metros considerando la divergencia y que la energía luminosa se distribuye uniformemente en el haz.

La intensidad de una onda electromagnética y su amplitud de campo eléctrico se relacionan como:

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \qquad (2)$$

donde la permitividad del vacío es $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ C² N⁻¹ m⁻².

e) Suponga que el haz láser es cilíndrico y monocromático. Escriba la ecuación de la onda armónica emitida, calculando el valor de las magnitudes implicadas.

Volvamos a la cavidad óptica resonante.

f) Calcule la frecuencia del modo fundamental de la cavidad, f_1, y la separación entre dos modos consecutivos, Δf, para los datos del láser del He-Ne. Dada λ_0, ¿cuál es el número de orden, *m*, del modo implicado?

La radiación producida en el medio activo no es absolutamente monocromática y presenta un espectro más o menos amplio. Ahora bien, la cavidad sólo puede amplificar luz dentro de un estrecho rango de frecuencias, definido por su *curva de ganancia* $\gamma(f)$, en la que γ es la ganancia y f la frecuencia de la luz. Las frecuencias para las que no se supera un cierto valor umbral de ganancia no son amplificadas, pues las pérdidas superan a las ganancias, y en la práctica no aparecen en la radiación emitida por el láser. La curva de ganancia típica es una función *lorentziana*, de la forma

$$\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{(f - f_0)^2 + (w/2)^2} \qquad (3)$$

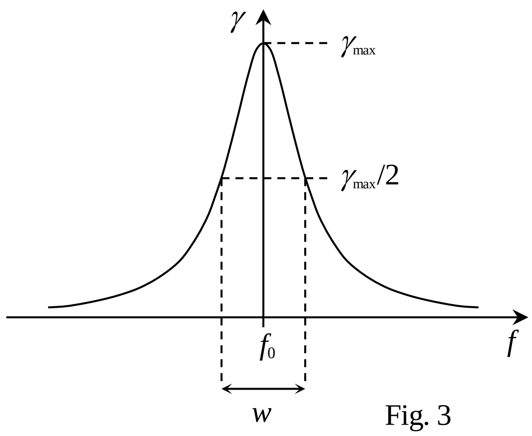


Fig. 3

donde, como es fácil comprobar, f_0 es la frecuencia para la que se alcanza la máxima ganancia, γ_{max}, y w es la anchura de la curva a mitad de su altura (véase la figura 3). Para nuestro láser de He-Ne, el máximo de la curva corresponde a la longitud de onda ya mencionada, $\lambda_0 = 632{,}8$ nm, y la anchura es $w = 341$ MHz.

g) Si sólo se amplifican eficientemente las frecuencias con ganancia γ superior al 10% de γ_{max}, ¿cuántos modos aparecerán en la luz emitida por el láser? (Por simplicidad, suponga que uno de los modos implicados está perfectamente centrado en la curva de ganancia.)

P2 Solución

a) Como es bien sabido, la longitud de onda, λ, la frecuencia, f, y la velocidad de propagación, v, de cualquier onda armónica cumplen

$$v = \lambda f \tag{4}$$

En particular, la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío es $c = \lambda_0 f$, y en un medio material de índice de refracción n la velocidad es

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\lambda_0 f}{n} \tag{5}$$

Comparando (4) y (5) se obtiene:

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}} \tag{6}$$

b) La condición de onda estacionaria en un espacio de longitud L, con nodos en los dos extremos, es

$$L = m\frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

donde m es un número entero. Combinando esta ecuación con (6) y (5) y despejando la frecuencia se obtienen las posibles frecuencias, f_m, de los modos de la cavidad láser:

$$\boxed{f_m = m\frac{c}{2nL}} \tag{8}$$

Por tanto, la separación en frecuencia entre dos modos consecutivos, de órdenes m y $m+1$, es

$$\boxed{\Delta f = \frac{c}{2nL}} \tag{9}$$

c) La intensidad podemos calcularla como la potencia por unidad de área, siendo el área la del círculo que ocupa el haz a la salida, cuyo diámetro es $D_s = 2\ \text{mm}$. Por tanto, resulta:

$$I = \frac{P}{\pi (D_s/2)^2} = \boxed{3{,}183\ \text{kW/m}^2} \tag{10}$$

Si el haz es perfectamente unidireccional, la sección del haz será la misma independientemente de la distancia recorrida por la luz. Así, la intensidad es la misma que en la salida: 3,183 kW/m^2

Debido al espejo semitransparente de reflectancia R = 0,95, la energía luminosa que atraviesa el espejo es una fracción $T = 1 - R$ = 0,05 de la que hay en el interior. Así:

$$I = (1-R)\, I_{\text{interior}} \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{\text{interior}} = 63{,}66\ \text{kW/m}^2}$$

d) El diámetro a una distancia x de la salida del láser se obtiene como:

$$D(x) = D_s + 2\left(x \tan\frac{\beta}{2} \right) \tag{11}$$

Podemos comprobar que el ángulo de divergencia es muy pequeño:

$$\sin(\beta/2) = 1{,}22\,\lambda_0 / D_s \quad \rightarrow \quad \beta = 7{,}72\times 10^{-4}\ \text{rad} \ = 0{,}0442^\circ$$

Entonces podemos aproximar las razones trigonométricas: $\tan(\beta/2) \approx \sin(\beta/2) \approx \beta/2$. Así, con el ángulo de divergencia de (1), el diámetro en (11) resulta:

$$D(x) = D_s + 2{,}44\frac{\lambda_0}{D_s}x$$

El diámetro del haz a 10 m resulta: $D(x = 10\ \text{m}) = 9{,}71\ \text{mm}$

Finalmente, el valor de la intensidad en (10) disminuye a

$$I = 135{,}0\ \text{W/m}^2$$

e) La ecuación de una onda electromagnética armónica, plana (pues suponemos el haz cilíndrico), con amplitud de campo eléctrico E_0, puede escribirse como

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) = E_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}(ct - x)$$

donde $\omega = 2\pi f$ y $k = 2\pi / \lambda_0$, y la propagación es en el sentido positivo del eje OX.

Calculamos la amplitud del campo eléctrico con (2):

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^{\,2} \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 1{,}549\ \text{kV/m}$$

Así, la variación del campo con el espacio y el tiempo es:

$$E(x,t) = 1{,}55 \cos\left(2{,}98\times 10^{15}\, t - 9{,}93\times 10^{6}\, x\right)\ \text{kV/m}$$

f) Observando (8) y (9), se deduce que la frecuencia f_1 del modo fundamental, correspondiente a m = 1, coincide con Δf_m. Operando con los datos se obtiene

$$f_1 = \Delta f = 340{,}7\ \text{MHz} \qquad (12)$$

Para la longitud de onda λ_0 = 632,8 nm, a partir de (7) se deduce que

$$m = 2n\frac{L}{\lambda_0}$$

El resultado que aparece en la pantalla de la calculadora es 1 390 644,753. Pero se supone que m debe ser entero, por lo que es tentador redondear al entero más próximo y responder que el orden del modo implicado es m = 1 390 645. Sin embargo, este resultado numérico no tiene mucho sentido físico porque todos los datos están dados con cuatro cifras significativas. El resultado debe darse también con cuatro cifras significativas, (o como mucho con cinco, puesto que la primera cifra es un uno), es decir, la contestación más correcta es:

El número de orden del modo implicado es un entero próximo a $1{,}390\times 10^{6}$

No es de extrañar que se obtenga un número tan grande, porque la longitud de la cavidad es muchísimo mayor que la longitud de onda de la luz.

g) Se trata de averiguar cuántos modos de la cavidad, correspondientes a una serie de valores de m consecutivos, caben dentro de la curva de ganancia en su zona central, donde γ es superior a $\gamma_{\max}/10$.

La ganancia en el máximo, de acuerdo a (3) es

$$\gamma_{\max} = \gamma(f_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{(w/2)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{w} \qquad (13)$$

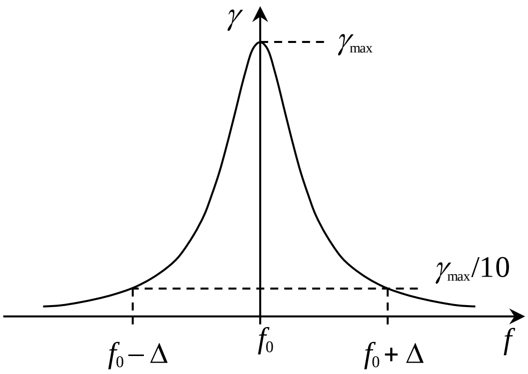


Fig. 4

Como es fácil comprobar, la curva es simétrica en torno a $f = f_0$, es decir $\gamma(f_0 - \Delta) = \gamma(f_0 + \Delta)$. La semianchura Δ de la zona de amplificación eficiente debe cumplir

$$\gamma(f_0 \pm \Delta) = \frac{\gamma_{\max}}{10} = \frac{1}{5\pi}\frac{1}{w} \tag{14}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (3),

$$\gamma(f_0 \pm \Delta) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{\Delta^2 + (w/2)^2} \tag{15}$$

Igualando (14) y (15) y despejando Δ se obtiene

$$\Delta = \frac{3}{2}w$$

Con nuestros datos, la anchura del rango de frecuencias a cada lado de f_0 con amplificación eficiente es

$$\Delta = 511{,}5 \ \text{MHz}$$

Teniendo en cuenta la simetría de la curva de ganancia y que uno de los modos está centrado en ella, en cada lado de la curva caben $\Delta / \Delta f$ modos, donde Δf era la separación de modos en (12). En nuestro caso

$$\frac{\Delta}{\Delta f} = 1{,}5$$

El número de modos debe ser entero, por lo que hay que redondear el resultado al entero inferior. Es decir, en cada ala de la curva cabe un modo. Añadiendo el central, obtenemos un total de tres modos. La situación se esquematiza en la figura 5, que está aproximadamente a escala en el eje de frecuencias.

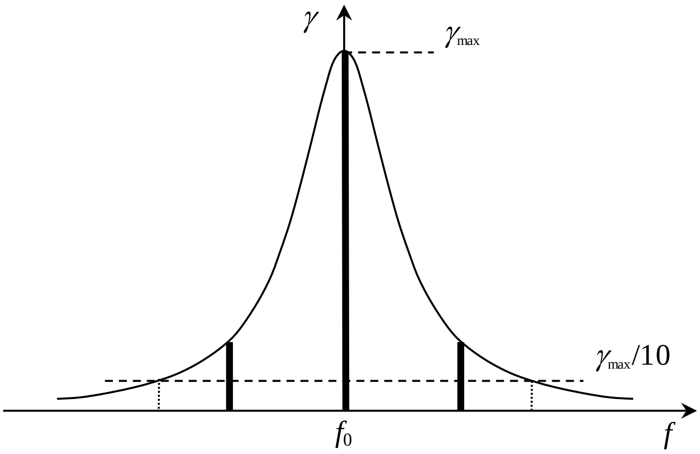


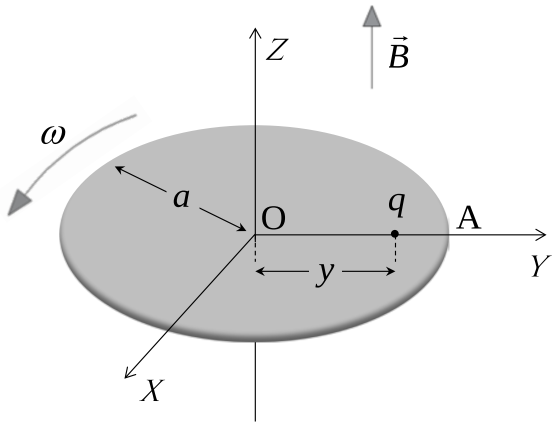
Fig. 5

* Nota: Cuando más de un modo se amplifica eficientemente, la luz emitida por el láser contiene radiación en un “peine” de frecuencias dentro de la curva de ganancia, y se dice que el láser es *multimodo*. Estos láseres se usan en aplicaciones donde interesa la alta potencia y no es necesaria la monocromaticidad.

P3 Entre Barlow y Faraday

Peter Barlow (1776-1862) y Michael Faraday (1791-1867) fueron dos físicos británicos pioneros en el desarrollo de los primeros motores y generadores eléctricos. El primero de ellos construyó, en 1822, un motor eléctrico conocido como “rueda de Barlow”. Poco después, en 1831, Faraday desarrolló el primer generador eléctrico, conocido como “disco de Faraday”. El elemento básico, en ambos, es una rueda conductora que gira alrededor de su eje en presencia de un campo magnético.

Considere un disco conductor de radio a que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω en una región donde existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y paralelo a dicho eje. Véase la figura.



a) Determine la fuerza que el campo magnético ejerce sobre un electrón, de carga $q = -e$, colocado en el eje Y a distancia y del centro, tal como se muestra en la figura.

b) Como consecuencia de dicha fuerza los electrones se van desplazando. ¿Hacia dónde?

c) El desplazamiento de los electrones provoca que la densidad de carga en el disco no sea homogénea. Cuando se alcanza el estado estacionario y los electrones dejan de moverse, calcule la fuerza eléctrica sobre un electrón colocado en la misma posición que el de la figura.

d) Si se conecta un voltímetro de contactos deslizantes (a modo de escobillas) entre los puntos O y A del disco, ¿en cuál de los dos puntos habría que poner el polo positivo y en cuál el negativo del voltímetro para que éste diera una lectura positiva? ¿Cuál sería su lectura? Tenga en cuenta que la relación entre la fuerza electromotriz, ε, y la fuerza eléctrica, $\vec{F_e}$, es:

$$\varepsilon = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \frac{\vec{F_e}}{q}\,\vec{dl} \qquad (1)$$

donde la integral se calcula a lo largo de una trayectoria que une los puntos O y A, y $\vec{dl}$ es un vector tangente a la trayectoria en todo punto y tiene módulo infinitesimal (tan pequeño como se quiera).

e) ¿Podría obtenerse el mismo resultado que en el apartado anterior utilizando la ley de inducción de Faraday sobre un sector circular ("quesito") del disco? Justifique su respuesta haciendo los cálculos matemáticos oportunos.

P3 Solución

a) Por estar el disco girando con una velocidad angular ω, un electrón que se encuentre en la posición indicada tendrá una velocidad lineal

$$\vec{v} = \omega \hat{k} \times y \hat{j} = -\omega y \hat{i}$$

Según la ley de fuerzas de Lorentz: $\overrightarrow{F_m} = q\vec{v} \times \vec{B}$, la fuerza magnética sobre el electrón de carga $q = -e$ será

$$\overrightarrow{F_m} = -e\left(-\omega y \hat{i}\right) \times B\hat{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F_m} = -e\,\omega B y\;\hat{j}}$$

b) Los electrones se ven desplazados hacia el centro del disco.

El resultado es general e independiente de la posición radial que ocupen. De hecho, para cualquier punto de una circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, actúa una fuerza radial de módulo $F(r) = -e\omega B r$. En consecuencia, se produce una acumulación de electrones en el centro del disco, que se cargará negativamente, y un defecto de electrones en el borde, el cual se cargará positivamente.

c) El estado estacionario se alcanzará cuando los electrones acumulados en el centro del disco y la carga positiva que su defecto provoca en el borde, sean capaces de producir un campo eléctrico y, por tanto, una fuerza eléctrica igual y de sentido contrario a la fuerza magnética.

En esta situación de equilibrio se tiene:

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = -\overrightarrow{F_m} = e\,\omega B y\;\hat{j}} \qquad (2)$$

d) Puesto que el campo eléctrico se establece apuntando al centro del disco, y el campo eléctrico siempre apunta hacia potenciales decrecientes, el voltímetro tendría que conectarse con el polo negativo en el centro (punto O) y el positivo en el borde (punto A).

El voltímetro medirá la fuerza electromotriz entre dichos puntos que podemos obtener de (1) teniendo en cuenta la fuerza eléctrica obtenida en (2):

$$\varepsilon = -\int_{O}^{A} \frac{\overrightarrow{F_e}}{q} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{0}^{a} \frac{e\omega B y\,\hat{j}}{-e} \cdot dy\,\hat{j} = \omega B \int_0^a y\,dy = \omega B\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^a \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}\omega B a^2}$$

e) El área de un sector circular de radio a y ángulo φ radianes es $S = a^2\varphi/2$, donde el ángulo se puede expresar como: $\varphi = \omega t$. Y el flujo de campo magnético a través de dicha superficie es

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{Ba^2\omega t}{2}$$

Finalmente si se aplica la ley de inducción de Faraday, queda:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2}\omega B a^2$$

Por tanto, el resultado, en valor absoluto, es el mismo que se obtuvo en el apartado c) aplicando la ley de Lorentz. El signo negativo viene de la elección arbitraria que se ha hecho para la orientación del vector superficie $\vec{S}$.

---

* Nota: Finalmente indicar que existe un solapamiento entre la ley de fuerzas de Lorentz y la ley de inducción de Faraday expresada tal cual se ha utilizado en la solución del apartado d) de este problema. Es decir, todos los casos en los cuales el movimiento de un conductor es el que produce una variación de flujo magnético, se pueden resolver con ambas expresiones. Lo realmente nuevo en la ley de inducción de Faraday son las situaciones en que el campo magnético varía con el tiempo.

P4 Radiación de Hawking

Hace hoy exactamente un mes (el 14 de marzo de 2018) falleció Stephen Hawking. Fue un brillante físico teórico de la Universidad de Cambridge que investigó en cosmología sobre el *Big Bang*, los agujeros negros, etc. Sus principales aportaciones se centran en teorías que intentan unificar la relatividad general con la teoría cuántica. También fue un científico muy popular por su trabajo divulgativo sobre el universo. Sirva este problema como pequeño homenaje a este querido personaje de la física.

Consideraremos en todo el problema un agujero negro de masa igual a la del planeta Tierra.

Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ [S.I.]; $M_{\mathrm{T}} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.

El tamaño de un agujero negro[1] se puede caracterizar mediante el *radio de Schwarzschild*, que es el radio de la superficie esférica que delimita la región de la cual no puede escapar la luz.

a) Calcule el valor del radio de Schwarzschild, R_{S}, del agujero negro considerado.

b) Obtenga la expresión del campo gravitatorio en la superficie de un agujero, en función de c y R_{S}. Calcule su valor, en función de g_0 (campo en la superficie de la Tierra), para el agujero considerado.

El agujero emite radiación de forma equivalente a un cuerpo negro a la llamada *temperatura de Hawking* T_{H}. Esta temperatura es inversamente proporcional a la masa *m* del agujero y depende también de la velocidad de la luz, de la constante de Planck *h*, de la constante de Boltzmann k_{B} y de la constante de gravitación *G*.

c) Obtenga mediante análisis dimensional la expresión para T_{H}, salvo constantes numéricas adimensionales, en función de *m*, *G*, *c*, *h* y k_{B}. (Ayuda: La constante de Planck relaciona la energía de un fotón con su frecuencia: $E = h\,f$; y la constante de Boltzmann relaciona la energía interna de un objeto con su temperatura absoluta: $E = k_{\mathrm{B}}T$).

El espacio no está realmente vacío, sino lleno de pares partícula/antipartícula virtuales que continuamente se crean y se aniquilan debido a fluctuaciones cuánticas. Así, Hawking descubrió que los agujeros negros no son totalmente negros, sino que pueden emitir radiación. Ello es debido a que puede ocurrir que, para los pares que se crean justo en la superficie del agujero, un miembro del par se forme en el interior y el otro en el exterior, y así uno de los miembros escapa del agujero. Este fenómeno se denomina *radiación de Hawking* e implica, de acuerdo a la equivalencia entre la masa y la energía dada por la ecuación de Einstein de la relatividad especial, $E = mc^2$, que el agujero se iría evaporando y llegaría a desaparecer.

d) Puede calcularse que, para un agujero de masa $m = M_{\mathrm{T}}$, la radiación de Hawking es aproximadamente 10^{-14} W por cada metro cuadrado de superficie del agujero. Estime una cota superior al tiempo que debe transcurrir para que el agujero desaparezca por completo.

[1] Recordemos que un agujero negro es un objeto con una concentración de masa lo suficientemente elevada como para crear un campo gravitatorio tal que ninguna partícula material, ni siquiera la luz, puede escapar de él.

P4 Solución

a) La velocidad de escape de una superficie de radio igual al radio de Schwarzschild debe ser igual a la velocidad de la luz:

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R_S}} = c$$

donde m es la masa del agujero. Despejando se obtiene el radio pedido:

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2}$$

que, con $m = M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, resulta: $R_S = 8{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m} \approx 9\ \text{mm}$

b) El campo gravitatorio que crea un agujero de radio R_S es

$$g = \frac{Gm}{R_S^2} = \frac{Gm}{\left(2Gm/c^2\right)^2} = \frac{c^4}{4Gm} \quad \rightarrow \quad g = \frac{c^2}{2R_S}$$

Para el agujero negro considerado, el resultado es:

$$g = 5{,}08 \times 10^{18}\ \text{m/s}^2 \quad \rightarrow \quad g \approx 5 \times 10^{17}\, g_0$$

c) Según el enunciado, T_H es inversamente proporcional a la masa. También será inversamente proporcional a la constante de Boltzmann, ya que ésta tiene unidades de energía entre temperatura y el resto de magnitudes no depende de la temperatura. Entonces hemos de hallar los parámetros α, β y γ que satisfagan

$$[T] = \left[\frac{c^\alpha h^\beta G^\gamma}{m k_B}\right]$$

Teniendo en cuenta las unidades de cada magnitud:

$$[m] = \text{M}\,,\ [T] = \Theta\,,\ [c] = \text{L}\,\text{T}^{-1}\,,\ [h] = \text{M}\,\text{L}^2\,\text{T}^{-1}\,,\ [G] = \text{M}\,\text{L}^3\,\text{T}^{-2}\,,\ [k_B] = \text{M}\,\text{L}^2\,\text{T}^{-2}\,\Theta^{-1}$$

hemos de resolver el sistema: $\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta = 2 + \gamma \end{cases}$, cuya solución es: $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$

Por tanto, la temperatura de Hawking es: $T_H \propto \dfrac{c^3 h}{m G k_B}$

d) Debido a la radiación de Hawking, transcurrido el tiempo suficiente habrá desaparecido una energía equivalente a toda la masa del agujero de acuerdo a la ecuación de Einstein:

$$E = M_T c^2 = 5{,}37 \times 10^{41}\ \text{J}$$

Suponemos que el agujero radia con una potencia constante dada por

$$P = \left(4\pi R_S^2\right) I = 4\pi\,(8{,}85 \times 10^{-3})^2\,(10^{-14}) \approx 10^{-17}\ \ \text{W}$$

El tiempo necesario es para la "evaporación" total: $t < E/P = 5{,}37 \times 10^{58}\ \ \text{s} \quad \rightarrow \quad t < 10^{51}\ \text{años}$

* Nota: En realidad, la potencia radiada no es constante ya que, de acuerdo a la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia es proporcional a la temperatura elevada a la cuarta potencia y, por tanto, decrece con la inversa de la masa al cuadrado. El tiempo necesario para la desaparición total del agujero, tras realizar la correspondiente integral, es exactamente 1/3 del que hemos obtenido, que nos sirve como cota superior.