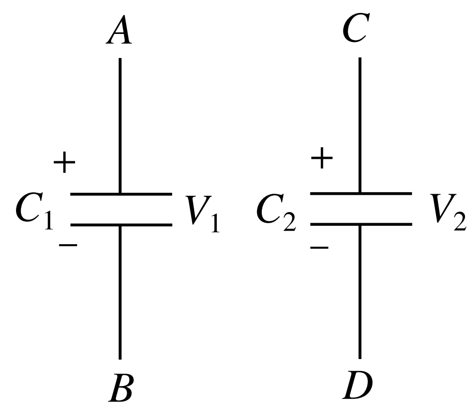
Problema 1. Capacitores (10 puntos)

La capacitancia es una propiedad de cualquier conductor o conjunto de conductores de retener cargas eléctricas, y depende de la geometría de los conductores. Como consecuencia habrá diferencias de potencial (voltajes) entre los conductores. Cuando se agrega un medio dieléctrico entre los conductores, la capacitancia aumenta k-veces, siendo k la constante dieléctrica del medio (o permitividad relativa). Además al retener una carga, el sistema almacenará una energía $U = \frac{1}{2}QV$.

Primera Parte

En este problema tenemos dos capacitores de placas paralelas con capacitancias C_1 y C_2 que se cargan respectivamente con diferencias de potencial V_1 y V_2, como se muestra en la figura.



Pregunta 1.1 ¿Cuál es la diferencia de potencial del sistema cuando se conectan las terminales AC y BD, y cuando se conectan AD y BC? **(4 puntos)**

Pregunta 1.2 ¿Cómo cambia la energía antes y después de hacer las conexiones mencionadas en la pregunta anterior? **(3.0 puntos)**

Segunda Parte

Consideremos ahora que los dos capacitores son iguales, pero uno de ellos no está inicialmente cargado y además tiene el espacio entre sus placas lleno de un dieléctrico (no-lineal) cuya "constante" dieléctrica cambia con la diferencia de potencial de acuerdo a la relación $k = \alpha V$, siendo $\alpha = 1\ \mathrm{V}^{-1}$. El otro capacitor está vacío pero ha sido cargado hasta una diferencia de potencial $V_0 = 156$ V.

Pregunta 1.3 Determine el valor de la diferencia de potencial V al conectar los capacitores en paralelo. **(3.0 puntos)**

Problema 2. Funcionamiento de una chimenea (10 puntos)

Las torres solares o chimeneas solares son construcciones que permiten aprovechar la energía solar mediante la convección de aire. El esquema de una chimenea solar se puede ver en la figura 1, en la base de la chimenea se encuentran unos colectores de aire por donde entra el aire de la atmósfera a la chimenea. Las chimeneas solares son pintadas de negro para absorber la radiación solar y con ello calentar el aire dentro de la chimenea, a su vez los colectores son construidos de material reflejante para calentar el aire en la base de la chimenea. De esta manera, el aire al interior de la chimenea esta a mayor temperatura que el aire del exterior. La diferencia de temperatura provoca que haya un flujo de aire desde los colectores, en la base de la chimenea, hasta la parte superior de la chimenea por donde sale el aire caliente de la chimenea. Este flujo de aire puede ser aprovechado colocando unas turbinas al interior de la chimenea.

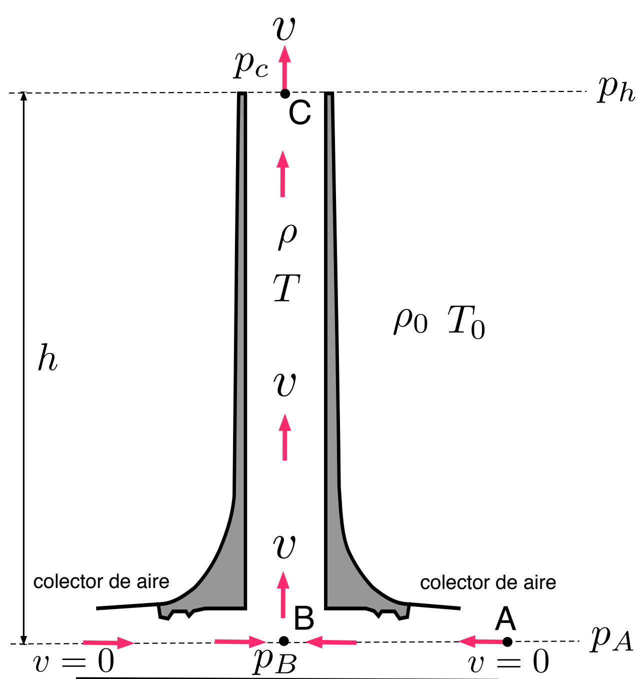


Figura 1: Esquema del funcionamiento de una chimenea.

El propósito de este problema es entender el funcionamiento de una chimenea a partir de un modelo sencillo. Considere el esquema simplificado de la figura 1.

Describamos el funcionamiento primero:

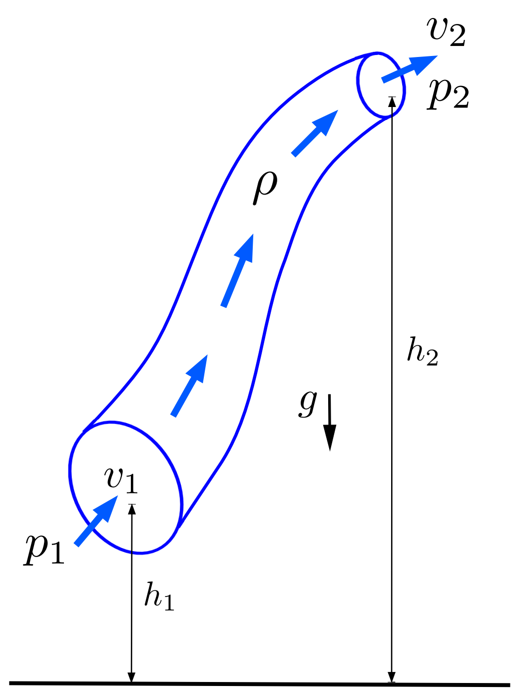
1) El aire fuera de la chimenea está en reposo $v = 0$, a una temperatura ambiente T_0, con una densidad ρ_0, y a una presión p_A. Este es sitio marcado como (A) en la figura 1.

2) Dentro de la chimenea el aire está, aproximadamente, a la misma temperatura T mayor que T_0 ($T > T_0$). Esta diferencia de temperaturas hace que la densidad del aire dentro de la chimenea ρ sea menor que la de afuera $\rho < \rho_0$. Esto a su vez genera un flujo de aire que, de velocidad $v = 0$ en la entrada, se acelere hasta un valor $v > 0$ en la base de la chimenea, marcada como (B) en la figura 1. Muy importante, esto también provoca que la presión en (B), p_B, sea menor que la presión en (A), $p_B < p_A$.

3) Dicha velocidad v en (B) se mantiene constante en todo el tiro de la chimenea (por conservación de masa). El aire entonces sube por la chimenea a velocidad constante v, pero al salir su presión p_C se iguala a la presión atmosférica a la altura h, que llamamos p_h.

Ahora estudiaremos que la explicación anterior es razonable, con ciertas aproximaciones y haciendo uso de la ecuación de Bernoulli, que es la ecuación que describe el flujo de un fluido, cuando la viscosidad no es muy grande (que es el caso del aire). Veamos: Si se tiene un fluido incompresible (densidad constante), que se mueve en el campo gravitacional y despreciamos su viscosidad, se halla que las presiones y velocidades en cada punto del flujo, a diferentes alturas, están relacionadas a través de la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{constante} \tag{1}$$



Se hace una medición de la temperatura ambiente y de la temperatura del aire en la chimenea y se hallan los valores $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ y $T = 50°\mathrm{C}$. Se sabe también que la densidad del aire a temperatura ambiente es $\rho_0 = 1.24\,\mathrm{kg/m^3}$. Considere que la altura de la chimenea es $h = 100\,\mathrm{m}$. Puede usar $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$. Con estos datos sólamente, usted analizará el resto del problema.

Pregunta 2.1 Calcule el valor de la densidad del aire caliente (ρ) dentro de la chimenea (2.0 puntos)

Para hallar este resultado, hacemos una observación (y aproximación) muy importante. Notamos que en la entrada de la chimenea, punto (A) en la figura 1, se tiene la "unión" del gas caliente a temperatura T y la del gas ambiente a temperatura T_0. Ahora haga la suposición de que la presión es la misma en esos dos gases en el punto (A) y calcule la densidad ρ del gas caliente dentro de la chimenea. Suponga que el aire es un gas ideal.

Pregunta 2.2 **Determine la expresión para la diferencia de presiones $p_A - p_B$ entre los puntos A y B, en función de la velocidad v del aire en el punto B. Demuestre que: $p_A > p_B$. (2.0 puntos)**

Pregunta 2.3 **Determine el valor numérico para la diferencia de presiones $p_B - p_C$ entre los puntos B y C. (2.0 puntos)**

Pregunta 2.4 **Calcule la diferencia de presiones del aire en la atmósfera, entre la base de la chimenea y la parte superior de la chimenea: $p_A - p_h$. Recuerde que el aire de la atmósfera a la altura h, pero alejado de la salida de la la chimenea, está en reposo.(2.0 puntos)**

Pregunta 2.5 **Determine el valor de la velocidad v con la que sale el aire caliente de la chimenea. Recuerda que la presión del aire caliente en C es aproximadamente igual a la presión atmosférica a la altura h. (2.0 puntos)**

Problema 3. Sistema de tres cargas (10 puntos)

Se tienen dos partículas fijas en el espacio cargadas, ambas partículas tienen la misma carga Q (mismo signo y mismo valor) separadas una distancia d. Una tercer partícula con carga q, de sino contrario a las otras dos cargas, esta restringida a moverse sobre la línea media entre las dos partículas y esta separada una distancia y respecto del punto medio de las partículas fijas como se muestra en la figura.

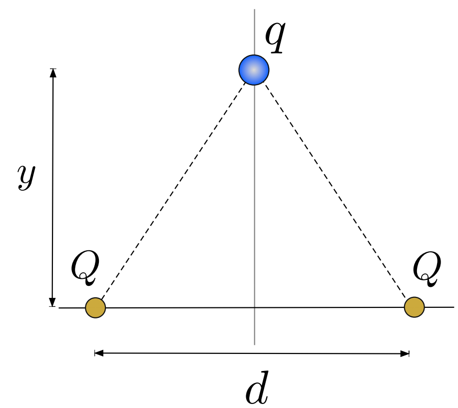


Figura 2: Sistema de tres carga, las cargas Q y q son de signo contrario.

En todo el problema desprecia la fuerza gravitacional entre las partículas.

Pregunta 3.1 Dibuje el diagrama de cuerpo libre para la partícula de carga q, determine la expresión de la fuerza resultante sobre esta partícula indicando la dirección de la fuerza resultante. (3.0 puntos).

Pregunta 3.2 Demuestre que si la distancia y es despreciable en comparación con la distancia de separación d, es decir: $y \ll d$, entonces la fuerza eléctrica sobre la partícula q es proporcional a la distancia y, escriba la expresión de la fuerza resultante en este caso. (3.0 puntos)

En este caso ($y \ll d$), cuando la fuerza eléctrica sobre la carga q es proporcional a la distancia y, la fuerza es similar a la ley de Hooke. La ley de Hooke establece que la fuerza sobre un cuerpo de masa m sujeto a un resorte, de constante k, es proporcional a la distancia x que se estira el resorte: $F = -kx$. Se sabe además que un cuerpo, de masas m, sometido a la fuerza de un resorte (ley de Hooke) describe un movimiento armónico simple de frecuencia: $\omega = \sqrt{k/m}$.

Si en la aproximación ($y \ll d$) la fuerza eléctrica sobre la carga q es semejante la ley de Hooke, entonces al liberar la carga q describe también un movimiento armónico simple.

Pregunta 3.3 Si m es la masa de la partícula de carga q, determine la expresión para la frecuencia de oscilación de la partícula de carga q en la aproximación: $y \ll d$.(2.0 puntos)

Una molécula de hidrógeno diatómico ionizada esta compuesta por dos protones y un electrón. La distancia de separación entre los dos protones es: $d = 1.06 \times 10^{-10}$ m; la masa del protón y electrón son, respectivamente: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $m_e = 9.10 \times 10^{-31}$ kg y la carga elemental tiene el valor: $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C.

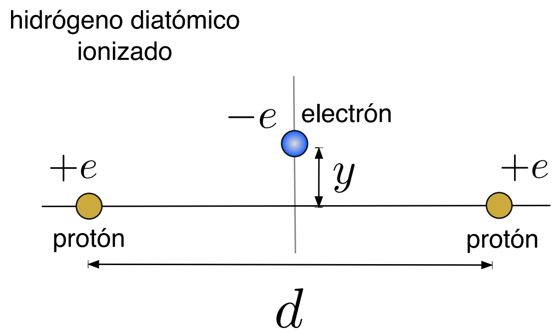


Figura 3: Hidrógeno diatómico ionizado, los protones están fijos en el espacio y el electrón esta restringido a moverse en la linea media entre los protones.

Para aplicar los resultados obtenidos en los incisos anteriores, considera que los protones están fijos en el espacio y que el electrón esta restringido a moverse en la linea media entre los protones. Bajo estas condiciones, si se libera al electrón a una distancia y en la aproximación: $y \ll d$, describe un movimiento armónico simple, responde entonces las siguientes preguntas:

Pregunta 3.4 Calcule el valor de la frecuencia de oscilación del electrón cuando se libera a una distancia y en la aproximación: $y \ll d$. (1.0 punto)

De acuerdo a la teoría electromagnética, cuando una partícula cargada se acelera emite ondas electromagnéticas (luz). Por otra parte, para cualquier onda electromagnética se satisface la relación: $c = f\lambda$, donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz, f la frecuencia de la onda y λ su longitud de la onda. En el ejemplo del inciso anterior, si el movimiento armónico del electrón genera ondas electromagnéticas con la misma frecuencia con la que oscila, entonces:

Pregunta 3.5 Calcule el valor de la longitud de onda de las ondas electromagnéticas emitidas por el electrón, de acuerdo al espectro electromagnético (ver figura del espectro) ¿en que banda se localizan estas ondas? (1.0 punto)

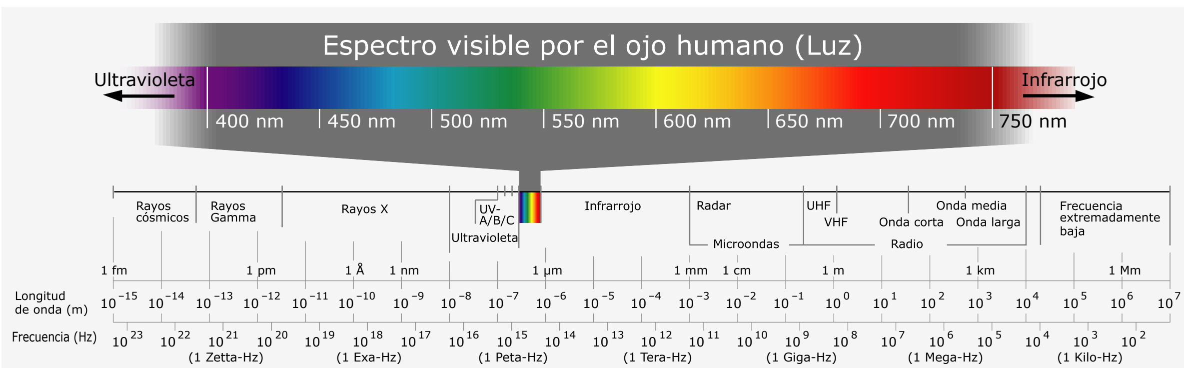


Figura 4: Espectro electromagnético.