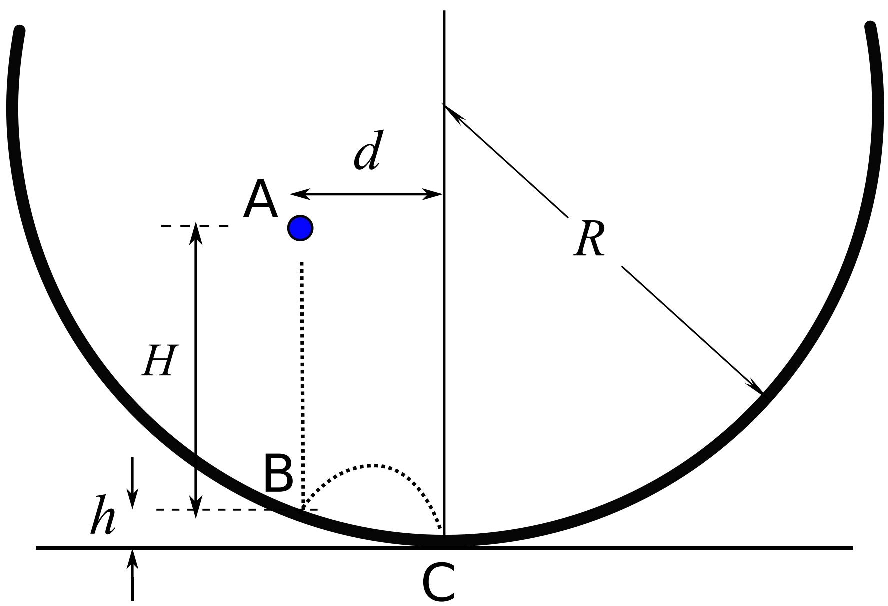
XXIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Mérida Yucatán, 25-29 de noviembre de 2012

Prueba teórica

1. **Caída libre sobre una superficie esférica (10 puntos).** Una canica se deja caer verticalmente con velocidad inicial cero sobre una superficie esférica de radio R. La canica se deja caer desde una altura H (punto A de la figura) medida desde la superficie esférica y a una distancia d del eje de simetría de la superficie esférica, como se muestra en la figura. La canica rebota elásticamente sobre la superficie (punto B) y cae de nuevo justo en el centro de la superficie (punto C).



Formulas trigonométricas que te pueden ser útiles:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Para ángulos pequeños $\theta \ll 1$, las funciones trigonométricas se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Preguntas

1.1	Calcula la velocidad v_0 con la cual rebota la canica sobre la superficie de la esfera.	1 puntos

Respuesta: De la caída libre de la canica desde una altura H, con velocidad inicial nula, se obtiene el tiempo de caída de la canica:

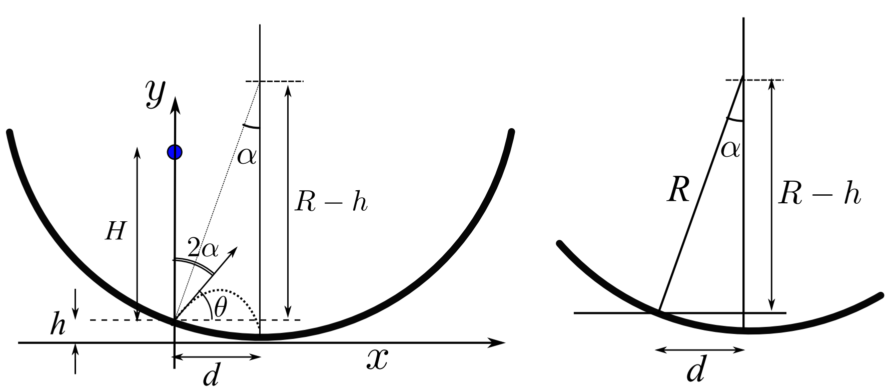
$$H - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{3}$$

entonces la velocidad con la cual llega la canica sobre la superficie es:

$$\boxed{v_0 = gt_c = \sqrt{2gH}} \tag{4}$$

1.2	Calcula el tiempo que le toma a la canica desde que rebota sobre la superficie (punto B) hasta que cae en el centro de la superficie (punto C) en términos de las variables H, R, h y g (aceleración de la gravedad).	5 puntos

Respuesta:



Después que la canica choca contra la superficie rebota con velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gH}$ y un ángulo $\theta = \pi/2 - 2\alpha$ respecto de la horizontal. La trayectoria de la canica desde que rebota, hasta que cae en el centro de la superficie es un tiro parabólico, por lo que las ecuaciones de movimiento, respecto del los ejes mostrados en la figura:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos(\theta)\ t = v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)\, t \\ y &= h + v_0 \operatorname{sen}(\theta)\ t - \frac{1}{2} g t^2 = h + v_0 \cos(2\alpha)\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

donde se uso:

$\cos\theta = \cos(\pi/2 - 2\alpha) = \cos\pi/2 \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\pi/2 = \operatorname{sen} 2\alpha$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi/2 - 2\alpha) = \operatorname{sen}\pi/2 \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos\pi/2 = \cos 2\alpha$

Si t_v es el tiempo que le toma a la canica desde que rebota hasta que cae en el centro de la superficie, entonces de la primer ecuación de (**??**) el desplazamiento horizontal d esta dado por:

$$\begin{aligned} d &= v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)\, t_v \\ &= \sqrt{2gH}\,(2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)\ t_v \end{aligned} \tag{6}$$

del triangulo rectangulo que se muestra en la figura se obtiene las siguientes relaciones trigonometricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{d}{R} \\ \cos\alpha &= \frac{R-h}{R} \end{aligned} \tag{7}$$

sustituyendolas en la ecuación (**??**):

$$d = \sqrt{2gH}\left(2\frac{d}{R}\frac{R-h}{R}\right) t_v \tag{8}$$

entonces el tiempo de vuelo t_v es:

$$\boxed{t_v = \frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\,(R-h)}} \tag{9}$$

1.3	Calcula la distancia h, desde el suelo hasta el punto donde rebota la canica sobre la superficie (como se muestra en la figura), en términos de los mismos parametros H, R, g y adicionalmente la distancia d.	2 puntos

Respuesta:

En el tiempo t_v la canica cae al centro de la superficie, es decir en $y = 0$, por lo que de la segunda ecuación (**??**) se tiene que:

$$\begin{aligned} y\left(t_v\right) = 0 = h + v_0 \cos\left(2\alpha\right)\, t_v - \frac{1}{2} g \left(t_v\right)^2 \\ \Rightarrow h + \sqrt{2gH} \cos\left(2\alpha\right)\, t_v - \frac{1}{2} g \left(t_v\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

usando la siguiente relación trigonometrica:

$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2$,

y sustituyendo el valor encontrado de t_v en la ecuación (**??**):

$$h + \sqrt{2gH}\left[\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2\right] \frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\left(R-h\right)} - \frac{1}{2} g \left[\frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\left(R-h\right)}\right]^2 = 0 \tag{11}$$

simplificando resulta la siguiente ecuación:

$$h + \left[\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2\right] \frac{R^2}{2\left(R-h\right)} - \frac{R^4}{16H\left(R-h\right)^2} = 0 \tag{12}$$

1.4	Considera ahora que la canica se deja caer desde una distancia mucho muy cercana al eje de simetría, calcula en este caso el valor aproximado de la altura H, en términos del radio R de la superficie esférica, a la que se debe dejar caer la canica	2 puntos

Respuesta:

En este caso se puede aproximar que $h = d \approx 0$, sustituyendo en (**??**) se simplifica y se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H} = 0 \\ \Rightarrow \boxed{H = \frac{R}{8}} \end{aligned} \tag{13}$$

2. **Comparando las fuerzas eléctrica y gravitacional (5 puntos).**

Una estrella de neutrones tiene una densidad del orden de $\rho = 10^{14}$ g/cm^3 y un radio de aproximadamente $R = 20$ km.

Supongamos que se coloca un electrón sobre la superficie de la estrella de neutrones,

$k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2

Constante gravitacional: $G = 6.7 \times 10^{-11}$N m^2/kg^2

Carga del electrón: e = -1.6 $\times 10^{-19}$ C

Preguntas:

2.1	¿Cuál es la atracción gravitacional sobre el electrón debido a la estrella de neutrones?	2 puntos

Respuesta:

cambiamos las unidades para la densidad de la estrella de neutrones:

$$\rho = 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \frac{1\text{kg}}{100\text{ g}} \left(\frac{100\text{cm}}{1\text{ m}}\right)^3 \approx 10^{17}\text{kg/m}^3 \tag{14}$$

con esto podemos calcular la masa de la estrella de neutrones:

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}R^3 = \frac{4}{3}\left(2 \times 10^4\text{m}\right)^3 \left(10^{17}\text{kg/m}^3\right) = \frac{32}{3} \times 10^{29}\text{ kg} = 1.06 \times 10^{30}\text{ kg} \tag{15}$$

entonces la fuerza gravitacional sobre el electrón sobre la superficie de la estrella de neutrones:

$$F_g = G\frac{Mm_e}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \frac{\left(1.06 \times 10^{30}\text{ kg}\right)\left(9.1 \times 10^{-31}\text{kg}\right)}{\left(20 \times 10^3\text{ m}\right)^2} \approx \boxed{1.61 \times 10^{-19}\text{ N}} \tag{16}$$

2.2	¿Qué carga eléctrica habría que colocar en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la atracción gravitacional que encontraste en el inciso anterior?	2 puntos

Respuesta:

Igualando la fuerza gravitacional y eléctrica:

$$F_{elec} = k\frac{Qe}{R^2} = G\frac{Mm_e}{R^2} = F_g \tag{17}$$

donde la carga Q es la necesaria para que ambas fuerzas sean iguales, despejando Q se obtiene:

$$Q = \frac{R^2}{k\,e} F_g = \frac{\left(20 \times 10^3 \mathrm{m}\right)^2}{\left(9 \times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2\right)(\text{-}1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C})} \left(1.61 \times 10^{-19}\ \mathrm{N}\right) \approx \boxed{-0.04\ \mathrm{C}} \tag{18}$$

la carga debe ser negativa para que sea de repulsión y equilibre la fuerza gravitación de atracción, otra forma es obtener una expresión general, despejando Q de la misma ecuación (**??**):

$$Q = \frac{G}{k} \frac{M m_e}{e} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2\right)\left(1.06 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}\right)\left(9.1 \times 10^{-31} \mathrm{kg}\right)}{\left(9 \times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2\right)(-1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C})} \approx \boxed{-0.04\ \mathrm{C}} \tag{19}$$

el resultado no depende de la separación entre las cargas, es decir del radio R de la estrella de neutrones.

2.3	Cuantos electrones habría que poner en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la fuerza gravitacional	1 puntos

Respuesta:

dividiendo la carga Q entre la carga del electrón, se obtiene el número de electrones que equivale la carga:

$$N_e = \frac{Q}{e} = \frac{-0.04\mathrm{C}}{-1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}} \approx 2.5 \times 10^{17} \approx \boxed{10^{17}\ \text{electrones}} \tag{20}$$

3. **Experimento de Torricelli dentro de un pistón (10 puntos).**

Un tubo vertical de vidrio, de área transversal $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ y cerrado en su parte superior, está sumergido en mercurio. Todo el sistema se encuentra contenido dentro de un cilindro con un pistón móvil, como se muestra en la figura **??**. El cilindro, además contiene aire en su interior. La parte superior del tubo de vidrio contiene una cantidad de hidrógeno encerrado. El tubo y el cilindro son impermeables, es decir no dejan entrar ni salir material. Tanto el aire como el hidrógeno y el mercurio se encuentran en contacto térmico, por lo que están a la misma temperatura.

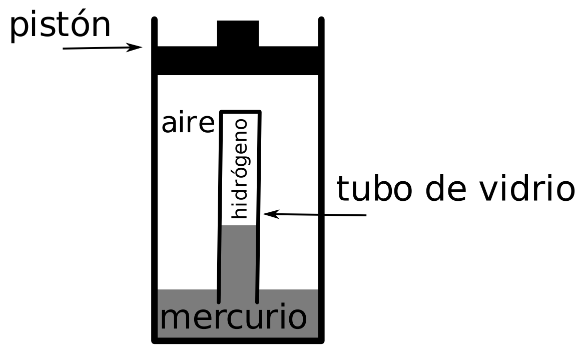
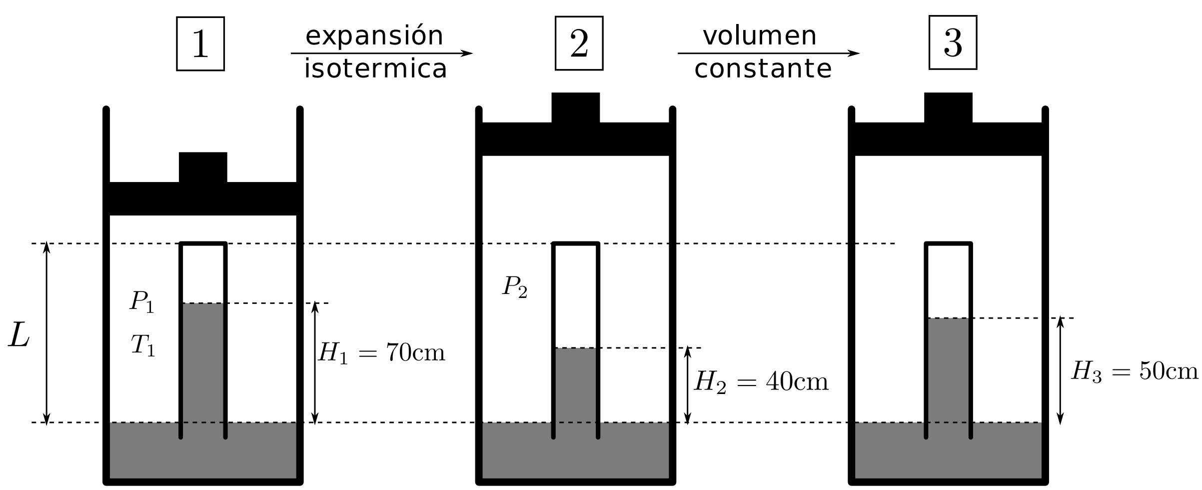


Figura 1

El sistema del tubo y el cilindro pasa por 3 estados de equilibrio a través de dos procesos diferentes, como se muestra en la figura siguiente:



El proceso $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2}$ se trata de una expansión isotérmica.

En el proceso $\boxed{2} \longrightarrow \boxed{3}$ el sistema se calienta manteniendo constante el volumen del aire contenido en el cilindro; nota que el hidrógeno se comprime debido a la expansión térmica del mercurio.

Se conocen los siguientes datos en cada uno de los estados de equilibrio:

$\boxed{1}$

Altura de la columna de mercurio: $H_1 = 70$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_1 = 133 \times 10^3$ Pa

Temperatura $T_1 = 273$ K

$\boxed{2}$

Altura de la columna de mercurio: $H_2 = 40$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_2 = 8 \times 10^4$ Pa

$\boxed{3}$

Altura de la columna de mercurio: $H_3 = 50$ cm

Constante universal de los gases: $R = 8.314$ J/mol K

Densidad del mercurio: $\rho = 1.36 \times 10^4$ kg/m^3.

Preguntas:

Considerando que el hidrógeno y el aire se comportan como un gas ideal y que el mercurio es incompresible, contesta las siguientes preguntas.

3.1	Cuál es la altura L desde la superficie del mercurio dentro del cilindro, hasta la parte superior del tubo de vidrio.	4 puntos

Respuesta:

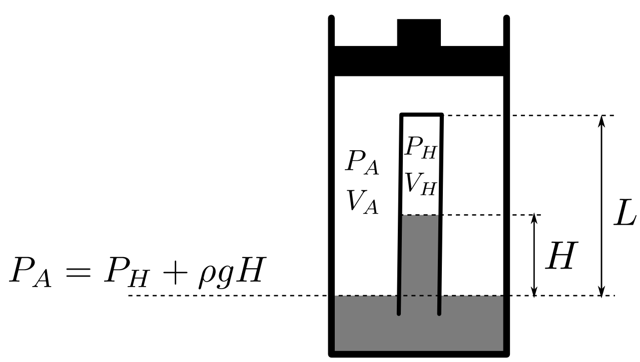


Figura 2

P_H: presión del hidrógeno, V_H: volumen del hidrógeno,

P_A: presión del aire, V_A: volumen del aire,

H: es la altura de la columna de mercurio dentro del tubo, densidad del mercurio: $\rho = 1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}$

La presión en el nivel de la superficie de mercurio corresponde a la del aire, pero por equilibrio hidrostatico:

$$P_A = P_H + \rho g H \tag{21}$$

de donde se obtiene la presión del hidrógeno contenido en la superficie del tubo de hidrógeno:

$$P_H = P_A - \rho g H \tag{22}$$

De la ecuación anterior se obtiene la presión del hidrógeno para cada uno de los estados de equilibrio; para los estados 1 y 2:

$$\begin{aligned} P_{H1} = P_{A1} - \rho g H_1 = 133 \times 10^3 \text{ Pa} - \left(1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}\right)\left(9.8 \mathrm{m/s^2}\right)(0.7 \text{ m}) = 3.97 \times 10^4 \text{ Pa} \\ P_{H2} = P_{A2} - \rho g H_2 = 8 \times 10^4 \text{ Pa} - \left(1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}\right)\left(9.8 \mathrm{m/s^2}\right)(0.4 \text{ m}) = 2.67 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned} \tag{23}$$

El proceso es una expansión isotérmica del aire, pero lo mismo se aplica al hidrógeno por lo que de la ecuación de gas ideal se obtiene:

$$P_{H1} V_{H1} = P_{H2} V_{H2} \tag{24}$$

si L es la longitud del tubo, desde nivel inferior del mercurio hasta la parte superior del tubo (ver figura **??**), entonces el volumen del hidrógeno en los estados 1 y 2:

$$\begin{aligned} V_{H1} = (L - H_1)\, A \\ V_{H2} = (L - H_2)\, A \end{aligned} \tag{25}$$

donde $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \mathrm{m}^2$ es el área transversal del tubo de vidrio. Sustituyendo en (**??**):

$$P_{H1}\,(L - H_1)\, A = P_{H2}\,(L - H_2)\, A \tag{26}$$

de donde se obtiene la longitud L (sustituyendo los datos):

$$
\begin{aligned}
L = \frac{P_{H1}H_1 - P_{H2}H_2}{P_{H1} - P_{H2}} &= \frac{\left(3.97 \times 10^4 \text{ Pa}\right)(.7 \text{ m}) - \left(2.67 \times 10^4 \text{ Pa}\right)(.4 \text{ m})}{3.97 \times 10^4 \text{ Pa} - 2.67 \times 10^4 \text{ Pa}} \\
&= \frac{(3.97 \text{ Pa})(.7 \text{ m}) - (2.67 \text{ Pa})(.4 \text{ m})}{3.97 \text{ Pa} - 2.67 \text{ Pa}} \\
&= \boxed{1.32 \text{ m} = 132 \text{ cm}}
\end{aligned} \tag{27}
$$

3.2	¿Cuál es la cantidad de hidrógeno contenido en la parte superior del tubo de vidrio, puedes expresar esta cantidad en moles?	2 puntos

Respuesta:

De la ecuación del gas ideal, el número de moles de hidrógeno:

$$
n = \frac{RT_H}{P_H V_H} \tag{28}
$$

Aplicando en el estado $\boxed{1}$:

$V_{H1} = (L - H_1)\, A = (1.32 \text{ m} - 0.7 \text{ m}) \left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 6.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

$$
n = \frac{P_{H1}V_{H1}}{RT_1} = \frac{\left(3.97 \times 10^4 \text{ Pa}\right)\left(6.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3\right)}{(8.314 \text{ J/mol K})(273 \text{ K})} = \boxed{1.08 \times 10^{-3} \text{ mol}} \tag{29}
$$

lo mismo se puede hacer, pero en el estado $\boxed{2}$:

$V_{H2} = (L - H_2)\, A = (1.32 \text{ m} - 0.4 \text{ m}) \left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 9.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

$$
n = \frac{P_{H2}V_{H2}}{RT_2} = \frac{\left(2.67 \times 10^4 \text{ Pa}\right)\left(9.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3\right)}{(8.314 \text{ J/mol K})(273 \text{ K})} = \boxed{1.08 \times 10^{-3} \text{ mol}} \tag{30}
$$

obteniendo el mismo resultado como era de esperar (si el hidrogenoes diatomico, esto resulta en una masa de 2×10^{-6} kg).

3.3	¿Cuál es la temperatura final T_3 en el estado $\boxed{3}$?	4 puntos

Respuesta:

Durante el proceso $\boxed{2} \longrightarrow \boxed{3}$, el aire dentro del cilindro se calienta a volumen constante por lo tanto:

$$
\frac{P_{A2}}{T_2} = \frac{P_{A3}}{T_3}, \quad \Rightarrow \; P_{A3} = P_{A2}\frac{T_3}{T_2} \tag{31}
$$

pero de la ecuación (**??**) se obtiene la presión del hidrógeno:

$$P_{H3} = P_{A3} - \rho g H_3 \tag{32}$$

despejando P_{A3} y sutituyendo en (**??**):

$$P_{H3} + \rho g H_3 = P_{A2}\frac{T_3}{T_2}; \quad \Rightarrow \ T_3 = \frac{T_2}{P_{A2}}\left(P_{H3} + \rho g H_3\right) \tag{33}$$

Para determinar T_3 completamente es necesario conocer P_{H3}, que se obtiene de la ecuación del gas ideal al estado 3 del hidrógeno:

$$P_{H3}V_{H3} = nRT_3, \quad \Rightarrow \ P_{H3} = \frac{nRT_3}{V_{H3}} \tag{34}$$

sustituyendo esta expresión en (**??**) se obtiene:

$$T_3 = \frac{T_2}{P_{A2}}\left(\frac{nRT_3}{V_{H3}} + \rho g H_3\right) \tag{35}$$

finalmente se despeja T_3:

$$T_3 = \frac{\rho g H_3}{\dfrac{P_{A2}}{T_2} - \dfrac{nR}{V_{H3}}} \tag{36}$$

sustituyendo valores:

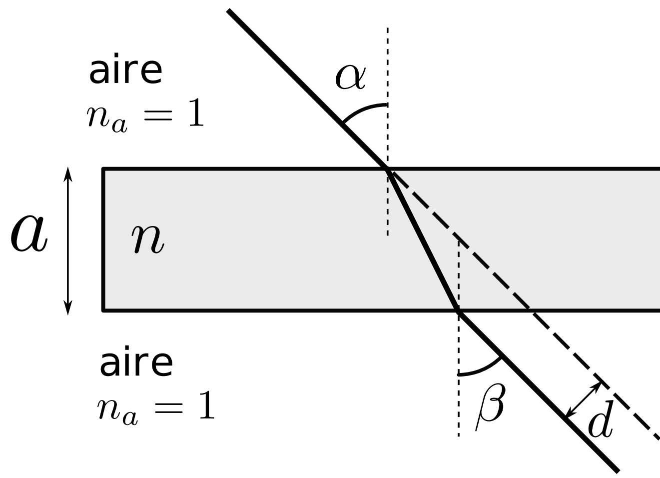
$V_{H3} = (L - H_3)\, A = (1.32 \text{ m} - 0.5 \text{ m})\left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 8.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

$\rho h H_3 = \left(1.36 \times 10^4 \text{kg/m}^3\right)\left(9.8 \text{m/s}^2\right)(0.5 \text{ m}) = 6.66 \times 10^4 \text{ Pa}$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{6.66 \times 10^4 \text{ Pa}}{\dfrac{8 \times 10^4 \text{ Pa}}{273 \text{ K}} - \dfrac{\left(1.08 \times 10^{-3} \text{ mol}\right)(8.314 \text{ J/mol K})}{8.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3}} \\ &= \frac{6.66 \times 10^4 \text{ Pa}}{293.04 - 109.5} \text{ K} \\ &= \boxed{362.86 \text{ K}} \end{aligned} \tag{37}$$

4. **Óptica geométrica (5 puntos).**

Un haz de luz que se propaga en el aire incide sobre la cara superior de una placa de grosor a y cuyo material tiene índice de refracción n. El haz incide con un ángulo α (ver figura) con respecto a la normal al vidrio. El haz de luz se refracta en la placa y emerge de nuevo al aire por debajo de la placa con un ángulo β respecto de la vertical.



$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= 1
\end{aligned} \tag{38}
$$

Preguntas:

4.1	Muestra que el haz que sale por debajo de la placa es paralelo al haz que incide por arriba de la placa, es decir muestra que: $\beta = \alpha$.	1 punto

Respuesta:

De la ley de Snell en la cara superior e inferior se obtiene:

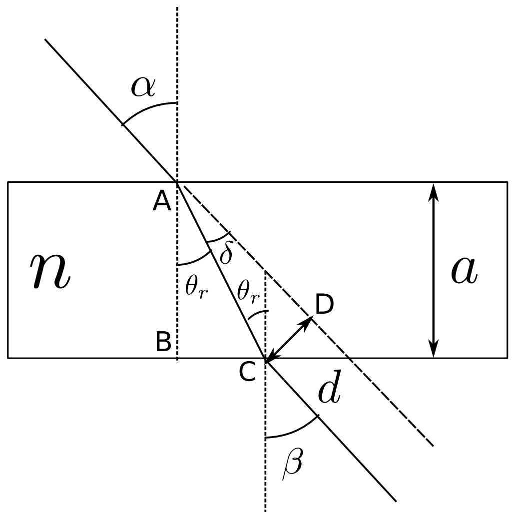
$$
\begin{aligned}
n_a \operatorname{sen}\alpha &= n \operatorname{sen}\theta_r \\
n \operatorname{sen}\theta_r &= n_a \operatorname{sen}\beta
\end{aligned} \tag{39}
$$

de donde

$$
\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta, \quad \alpha = \beta} \tag{40}
$$

4.2	Calcula la distancia d que separa los dos haces de luz, el de incidencia y el que sale por debajo de la placa en términos de solamente el ángulo de incidencia α, el índice de refracción n y el grosor de la placa a.	2 puntos

Respuesta:



De los triangulo ABC y ACD (ver figura) se obtienen las siguientes selaciones trigonometricas:

$$\begin{aligned} \cos\theta_r &= \frac{AB}{AC} = \frac{a}{AC} \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{CD}{AC} = \frac{d}{AC} \end{aligned} \tag{41}$$

dividiendo ambas ecuaciones:

$$d = a\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\theta_r} \tag{42}$$

De los ángulos opuestos en el vértice A, se tiene que: $\alpha = \theta_r + \delta$, es decir $\delta = \alpha - \theta_r$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} d = a\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\theta_r} &= a\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta_r)}{\cos\theta_r} \\ &= a\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta_r - \operatorname{sen}\theta_r\cos\alpha}{\cos\theta_r} \\ &= a\left(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta_r\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \end{aligned} \tag{43}$$

de la ley de Snell se tiene que $\operatorname{sen}\theta_r = \frac{n_a}{n}\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha$ ($n_a = 1$), sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} d &= a\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \\ &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \end{aligned} \tag{44}$$

usando la relación trigonometrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces:

$$\cos\theta_r = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_r} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\right)^2} \tag{45}$$

sustituyendo en (**??**) se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} d &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\right)^2}}\right) \\ &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}}\right) \end{aligned}} \tag{46}$$

4.3	Si el ángulo de incidencia es $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ radianes, calcula el valor del índice de refracción de la placa n para el cual la distancia de separación entre los haces es la misma que el grosor de la placa, es decir para $a = d$.	2 puntos

Respuesta:

sabemos que $\operatorname{sen}45 = \cos 45 = 1/\sqrt{2} = 0.7$, sustituyendo en el resultado del inciso anterior con $a = d$, $n_a = 1$:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 - 1/2}}\right) \tag{47}$$

resolviendo para n:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 - 1/2}} &= \sqrt{2} \\
\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 - 1/2}} &= 1 - \sqrt{2} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2 - 1/2}\right) &= \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 \\
n^2 - 1/2 &= \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} \\
n^2 &= \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\frac{1}{2\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{2}} = 1.85}
\end{aligned}
\tag{48}
$$