P1. ***Feel free, feel zero-g!***

El título de este problema hace alusión a la campaña que, desde hace algunos años, promueve la Agencia Espacial Europea (ESA) y que permite que grupos de jóvenes estudiantes europeos realicen experimentos diseñados por ellos mismos en condiciones de *gravedad aparente* nula. La foto de la figura 1 corresponde a un grupo de la Universidad de Zaragoza en la campaña 2006, a bordo de un avión Airbus A300 preparado para tal fin (figura 2).

Fig. 1

Fig. 2

La descripción de este tipo de vuelos, comúnmente denominados "parabólicos", se representan esquemáticamente en la figura 3 y es la siguiente: en un principio el avión vuela horizontalmente a su velocidad máxima hasta un punto A. Después se eleva, y cuando alcanza con un ángulo de 45º una altura, $h_B \approx 25.000$ ft[1] sobre el nivel del mar (punto B), reduce la potencia de los motores hasta un mínimo suficiente para contrarrestar la disipación de energía producida por la resistencia del aire. En esta primera fase del vuelo AB, que dura un tiempo t_{AB} = 20 s, los pasajeros sienten que su "peso" casi se duplica. A partir de B el vuelo puede considerarse libre, ¡feel free! y, por tanto, la trayectoria que describe es parabólica (de ahí el nombre que reciben estos vuelos). El vértice de la parábola (punto C) se encuentra a una altura, $h_C \approx 28.000$ ft. Posteriormente, ya iniciado el descenso del avión, en el punto D, situado a una altura similar a la de B, se incrementa de nuevo la potencia de los motores para permitir que en el punto E el aparato recupere el vuelo horizontal. Durante el trayecto B-C-D tanto los pasajeros como la carga transportada se encuentran como si la gravedad se hubiese anulado, ¡feel zero-g! Sin embargo, durante el trayecto DE, cuya duración es también análoga a la del trayecto AB, sienten de nuevo que su peso casi se duplica.

Estas maniobras se repiten 30 veces en cada vuelo, que tiene una duración total de unas dos horas, brindando la oportunidad de realizar interesantes experiencias en ingravidez, imposibles de conseguir en laboratorios en Tierra.

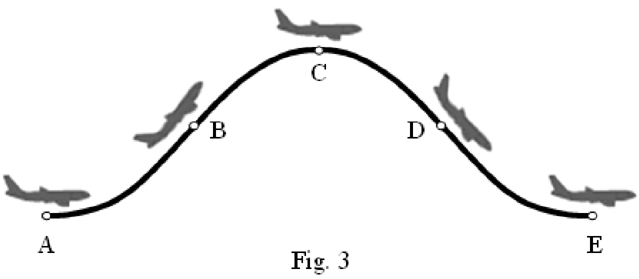

Fig. 3

El concepto de “gravedad aparente” al que antes se ha hecho referencia, requiere cierta explicación. Por esta razón, antes de plantear las cuestiones relativas al problema del “vuelo parabólico”, se propone resolver el siguiente ejercicio:

Del extremo inferior de un dinamómetro sujeto al techo de un ascensor se suspende un cuerpo de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$. Como la escala del dinamómetro nos indica, en newton, la fuerza que el resorte ejerce sobre la masa suspendida, cuando el ascensor está en reposo la indicación numérica de dicha escala coincidirá con el valor numérico de la aceleración de la gravedad.

Más en general, la indicación en la escala del dinamómetro cuando la masa suspendida de su extremo es $m = 1\,\mathrm{kg}$, nos proporciona el valor numérico de lo que se denomina *gravedad aparente*, g_a.

Según esto, ¿cuál es la gravedad aparente en los siguientes casos:

A1) Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de subida con aceleración constante, a.

A2) Ascensor que, moviéndose hacia arriba, frena con aceleración constante a.

A3) Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de bajada con aceleración constante, a.

A4) Ascensor que, moviéndose hacia abajo, frena con aceleración constante a.

Con referencia al “vuelo parabólico”, obtenga las expresiones analíticas y estime los valores correspondientes de las siguientes magnitudes:

B1) La velocidad del avión en el punto B, v_B.

B2) Los valores de la gravedad aparente media, g_{AB} y g_{DE}, en los trayectos AB y DE, respectivamente.

B3) El tiempo del que disponen los estudiantes para realizar sus experiencias con gravedad aparente nula en cada maniobra.

Nota:

Considere que el valor de la aceleración de la gravedad en puntos próximos a la superficie terrestre es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

[1] En aeronáutica se usan asombrosamente las unidades anglosajonas (*imperial units*). La equivalencia del pie, “foot” o abreviadamente ft es $1\mathrm{ft} = 0{,}30480\ \mathrm{m}$

Solución

Ejercicio previo:

La escala del dinamómetro marca la fuerza (elástica), F_e, que el resorte ejerce sobre la masa suspendida m, cuyo peso es mg_0.

A1) Cuando el ascensor que parte del reposo, inicia un movimiento de subida con aceleración constante, a, la 2ª ley de Newton nos permite escribir:

$$F_e - mg_0 = ma$$

Como m = 1 kg, la indicación numérica de la escala del dinamómetro nos dará el valor de la gravedad aparente. Por tanto:

$$\boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \qquad (1)$$

A2) Cuando el ascensor que está moviéndose hacia arriba, frena con aceleración constante a:

$$F_e - mg_0 = m(-a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \qquad (2)$$

A3) Cuando el ascensor inicia un movimiento de bajada con aceleración a constante:

$$F_e - mg_0 = m(-a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \qquad (3)$$

A4) Cuando el ascensor que está moviéndose hacia abajo, se detiene con aceleración constante a:

$$F_e - mg_0 = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \qquad (4)$$

Ejercicio del "vuelo parabólico":

B1) El trayecto del avión desde A hasta B, en el que gana una altura $h_B - h_A$, lo realiza a costa de la potencia que generan sus motores. Por ello, en este trayecto no se conserva la energía mecánica y en consecuencia no se puede deducir la velocidad en B a partir de la velocidad en A que, por cierto, ni siquiera es un dato del problema.

Sin embargo, y para todos los efectos, en el punto B es como si el avión parara sus motores e iniciara un vuelo libre, con una velocidad inicial v_B que forma un ángulo φ con la horizontal (el bien conocido "tiro oblicuo"), como se muestra en la figura 4.

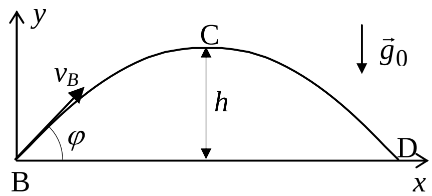

Fig. 4

Omitiendo detalles y comentarios, las expresiones básicas del tiro oblicuo son las siguientes:

Componentes de la aceleración del "proyectil" (en nuestro caso, del propio avión): $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g_0 \end{cases}$

Componentes de la velocidad: $\begin{cases} v_x = v_B \cos\varphi \\ v_y = v_B \operatorname{sen}\varphi - g_0\, t \end{cases}$

Trayectoria: $\begin{cases} x(t) = v_B\, t \cos\varphi \\ y(t) = v_B\, t \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{1}{2} g_0\, t^2 \end{cases}$

En el punto C la velocidad del avión es horizontal, $v_y = 0$. Si t_{BC} es el tiempo que dura el vuelo entre B y C, tendremos,

$$t_{BC} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{g_0} \qquad (5)$$

Como $y(t_{BC}) = h$, siendo $h = h_C - h_B$, resulta

$$\boxed{v_B = \frac{\sqrt{2 g_0 h}}{\operatorname{sen} \varphi}}$$

De acuerdo con el enunciado,

$$h = h_C - h_B = 3{,}0 \times 10^3 \text{ ft} = 910 \text{ m}, \quad \varphi = 45^\circ \ \text{ y } \ g_0 = 9{,}81 \text{ m/s}^2 .$$

Por lo que

$$\boxed{v_B = 190 \text{ m/s} = 680 \text{ km/h}}$$

B2) La componente vertical de la aceleración media del avión en el trayecto AB es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en B y en A (que es nula) y el tiempo de vuelo, t_{AB}, entre A y B,

$$\bar{a}_{AB} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}$$

Como $t_{AB} = 20 \text{ s}$, $\quad \bar{a}_{AB} = 6{,}7 \text{ m/s}^2 = 0{,}68\, g_0$

Por lo que, teniendo en cuenta la expresión (1) obtenida en A3, la gravedad aparente en el avión será

$$g_{AB} = g_0 + \bar{a}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{AB} = g_0 + \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{AB} = 1{,}7\, g_0}$$

En el descenso DE del avión la aceleración vertical media es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en E (que es nula) y en D, que por simetría es la misma que en B pero en sentido contrario, dividido por el tiempo de vuelo entre ambos puntos que, según el enunciado, es prácticamente el mismo que entre Ay B, por lo tanto,

$$\bar{a}_{DE} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_{DE} = 0{,}68\, g_0$$

De acuerdo con la expresión (4), la gravedad aparente en DE es

$$g_{DE} = g_0 + \bar{a}_{DE} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{DE} = g_0 + \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{DE} = 1{,}7\, g_0}$$

B3) El tiempo que trascurre con gravedad aparente nula, $t_{g=0}$ corresponde al vuelo libre parabólico propiamente dicho, es decir, al trayecto BCD . En él la aceleración del avión es $-g_0$, por lo que la gravedad aparente será:

$$g_{BCD} = g_0 + (-g_0) = 0$$

En este trayecto el interior del avión se convierte en un recinto que permite experimentar en estado de ingravidez durante el tiempo $t_{g=0}$.

Este tiempo es el doble que el que trascurre entre B y C, dado por la expresión (5). En definitiva,

$$t_{g=0} = 2 t_{BC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{g=0} = 2 \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{g_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{g=0} = 27 \text{ s}}$$

P2. Un modelo de molécula de HCl

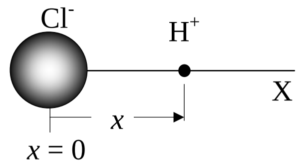

Fig. 1a

La molécula de cloruro de hidrógeno está formada por los iones, Cl^- y H^+. Como la masa del primero es mucho mayor que la del segundo, podemos adoptar como modelo sencillo que el Cl^- está en reposo en $x = 0$ y que el H^+ puede moverse a lo largo del eje X, tal como se representa en la figura 1a.

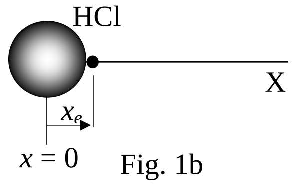

Fig. 1b

Consideraremos que el HCl está en estado gaseoso para que cualquiera de sus moléculas esté poco perturbada por la presencia de otras vecinas. En estas condiciones, el Cl^- de una molécula ejerce una fuerza de atracción electrostática sobre el H^+. Pero para que el sistema (la molécula de HCl) permanezca en equilibrio con los iones separados una distancia x_e, (fig. 1b), es necesario además que sobre el H^+ se ejerza una fuerza de repulsión, muy fuerte a distancias cortas y que decrezca rápidamente a distancias interiónicas grandes comparadas con la de equilibrio.

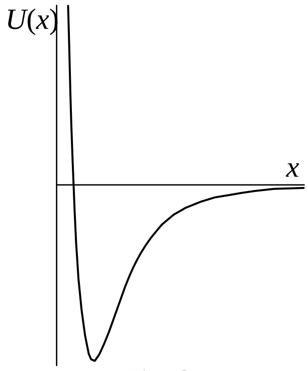

Fig. 2

Por ello, debido a la presencia del Cl^-, el H^+ tiene una energía potencial[1] que viene dada por la siguiente expresión:

$$U(x) = -k\frac{e^2}{x} + \frac{B}{x^9}$$

donde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}987\times10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$, $e = 1{,}602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$ y B una constante positiva.

Esta energía potencial se representa en la figura 2.

1º Teniendo en cuenta que en el equilibrio la fuerza sobre el H^+ debe ser nula, determine la distancia de equilibrio x_e.

2º Deduzca que la expresión de la energía potencial, $U(x)$, puede escribirse en función de x_e de la siguiente forma:

$$U(x) = ke^2\left(-\frac{1}{x} + \frac{x_e^8}{9x^9}\right) \qquad (1)$$

El ión H^+ no está nunca en reposo en la posición de equilibrio $x = x_e$. Para "entretenerse" realiza pequeñas oscilaciones en torno a x_e. Esto significa que cuando la distancia de separación es $x \approx x_e$ se comporta como si el H^+, de masa m_H, estuviese unido a un muelle de constante K y, por lo tanto, su energía potencial (elástica) sería:

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x - x_e)^2 + cte \qquad (2)$$

En consecuencia, la expresión de la energía potencial (1) deberá coincidir con (2) cuando $x \approx x_e$.

3º Haga un desarrollo en serie de Taylor[2] para $U(x)$ en torno a $x = x_e$, con las aproximaciones que estime oportuno y deduzca el valor de la constante K de la energía potencial elástica (2).

---

[1] Recuerde que la diferencia de energía potencial se define a partir de la expresión $dW = F\,dx = -dU$

[2] El desarrollo en serie de Taylor de una función $f(x)$ en torno a un punto x_0 es una importantísima herramienta matemática. El desarrollo es:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \dots$$

4º Determine la frecuencia de oscilación, f, del H+ en torno a su posición de equilibrio.

5º Experimentalmente se encuentra que $f = 8{,}66 \times 10^{13}$ Hz. Sabiendo que la masa del H^+ es $m_{\mathrm{H}} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, calcule el valor de x_e.

6º Determine y calcule la energía, W_d, que hay que aportar a un mol de HCl para separar completamente los iones de cada una de sus moléculas (Energía de disociación). El número de Avogadro es $N_A = 6{,}022 * 10^{23}$ moléculas/mol.

Solución

1º Si la energía potencial del H^+ es

$$U(x) = -k\,\frac{e^2}{x} + \frac{B}{x^9}$$

la fuerza que actúa sobre él es

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -ke^2\,\frac{1}{x^2} + \frac{9B}{x^{10}}$$

por lo que la posición de equilibrio se obtiene de

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x_e = \left(\frac{9B}{ke^2}\right)^{1/8}}$$

2º Despejamos *B* en la expresión anterior y la sustituimos en la de $U(x)$,

$$\boxed{U(x) = ke^2\left(-\frac{1}{x} + \frac{x_e^8}{9x^9}\right)}$$

como se trataba de demostrar.

3º Empleando la expresión del desarrollo de Taylor que se indica en la nota 2 a pié de página, el desarrollo de $U(x)$ resulta:

$$U(x) = U(x_e) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_e}(x - x_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e}(x - x_e)^2 + \ldots$$

Como $\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_e} = 0$

el primer término del desarrollo es el cuadrático en $x - x_e$. Los siguientes dependen de potencias crecientes por lo que son despreciables frente al anterior, dado que $x - x_e \approx 0$, por lo que

$$U(x) = U(x_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e}(x - x_e)^2$$

Comparando con la expresión de la energía potencial elástica que se da en el enunciado resulta,

$$K = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e}$$

y como

$$\frac{d^2U}{dx^2} = ke^2\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{10\,x_e^8}{x^{11}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e} = \frac{8ke^2}{x_e^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{8ke^2}{x_e^3}}$$

4ª Si *K* es la constante del muelle equivalente, la frecuencia angular de las oscilaciones de una masa *m* es

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Luego en nuestro caso en el que la masa *m* es la del ión hidrógeno, m_H, la frecuencia de las oscilaciones será:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8ke^2}{m_\mathrm{H} x_e^3}}}$$

5º Despejando x_e de la expresión anterior,

$$x_e = \left(\frac{2ke^2}{\pi^2 f^2 m_\mathrm{H}}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_e = 1{,}55\times10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}15\,\mathrm{nm}}$$

Este resultado es coherente con el valor de la longitud de enlace del HCl[3], $x_e = 1{,}2746\times10^{-10}$ m .

6º En la figura 2 del enunciado se pone de manifiesto que la energía potencial del el ión hidrógeno sólo será nula cuando se encuentre muy alejado del origen, en el que se supone que está el ión Cl. Esto equivale a decir "matemáticamente", que será nula cuando la distancia tienda a infinito. Por tanto, la energía w_d que es preciso aportar a la molécula es igual a $-U(x_e)$, es decir

$$w_d = -U(x_e) = -ke^2\left(-\frac{1}{x_e} + \frac{x_e^8}{9x_e^9}\right) = \frac{8ke^2}{9x_e} \quad \Rightarrow \quad w_d = 1{,}32\times10^{-18}\ \mathrm{J}$$

Luego, para disociar un mol de HCl, la energía necesaria será,

$$W_d = N_A\, w_d \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_d = N_A \frac{8ke^2}{9x_e}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_d = 7{,}96\times10^2\ \mathrm{kJ/mol}}$$

[3] CRC Handbook of Chemistry and Physics. 83rd Edition. 2002.

P3. Un prototipo de “gato” termodinámico.

Un estudiante aficionado a la física y a la tecnología ha ideado un dispositivo capaz de funcionar como un *gato* que permita levantar cuerpos a pequeñas alturas.

El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico vertical con secciones diferentes; en la parte superior tiene un radio $r_1 = 9{,}00\,\mathrm{cm}$ y en la inferior $r_2 = 7{,}00\,\mathrm{cm}$, tal como se representan en la figura 1. Dentro del tubo hay dos émbolos de masas $M_1 = 4{,}00\,\mathrm{kg}$ y $M_2 = 0{,}900\,\mathrm{kg}$, unidos mediante una cadena inextensible, de longitud $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$ y masa $m_c = 0{,}100\,\mathrm{kg}$. Los émbolos, que ajustan perfectamente en el tubo, pueden deslizar sin fricción. Todos los materiales con los que se ha construido el sistema son perfectos aislantes del calor.

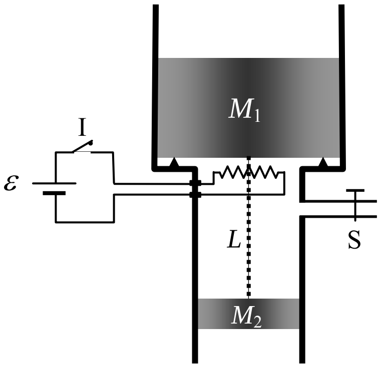

Fig. 1

Mediante la llave S se puede igualar la presión del espacio comprendido entre los émbolos con la atmosférica del exterior, $p_{at} = 1{,}01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Con la llave S abierta, la base inferior de M_1 se apoya sobre unos pequeños pivotes que tienen como objeto, entre otros, dejar espacio para alojar una resistencia eléctrica de calefacción que se alimentada con una batería ε cuando se cierre el interruptor I.

Se supone que en el estado inicial (que es el representado en la figura 1), la temperatura de todo el sistema es la ambiente, $T_a = 3{,}00 \times 10^2\,\mathrm{K}$. A continuación, se cierra la llave S y se mantiene cerrada en todo lo que sigue. Considere que el aire se comporta como un gas perfecto diatómico[1] de densidad $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

1º Determine la masa de aire, m_{aire}, encerrada entre los émbolos. Compruebe que esta masa es mucho menor que la del sistema deslizante (émbolos + cadena) y, por tanto, puede despreciarse en los cálculos del problema.

2º Con objeto de levantar los émbolos (gato termodinámico), al aire encerrado entre ambos se le suministra lentamente calor mediante una resistencia eléctrica. En consecuencia, la presión interior variará. ¿Cuál es el valor de la presión crítica, p_c, para la cual los émbolos comenzarán su ascenso? ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$).

3º Desde el estado inicial hasta que los émbolos comienzan a ascender,

- 3a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- 3b) ¿Cuál es la temperatura, T_1, del aire al comenzar el ascenso?
- 3c) ¿Cuánto calor, Q_1, habrá sido necesario suministrar para que M_1 empiece a ascender?

4º Una vez que M_1 despega, se produce la acción útil del gato elevando este émbolo hasta una altura $h = 20{,}0\,\mathrm{cm}$. Supóngase que la elevación es muy lenta para poder despreciar la energía cinética del sistema.

- 4a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- 4b) Calcule la temperatura, T_2, del gas al final de este proceso.
- 4c) ¿Cuánto calor adicional, Q_2, habrá sido necesario suministrar al gas?

5º Si se considera como *trabajo útil* el necesario para levantar el émbolo M_1 la altura *h*, calcule la relación, expresada en %, entre dicho trabajo y el calor total suministrado, lo que puede llamarse *rendimiento*, η, *del proceso*.

---

[1] Calores específicos molares de un gas ideal diatómico, a presión y a volumen constante: $c_v = 5R/2$; $c_p = 7R/2$, donde *R* es la constante de los gases perfectos.

6º Para que el sistema evolucione lentamente, el suministro de calor se realiza mediante una resistencia $r = 1{,}00\ \mathrm{k\Omega}$ conectada a una batería, de resistencia interna despreciable y fuerza electromotriz $\varepsilon = 50{,}0\ \mathrm{V}$. Calcule el tiempo, *t*, que deberá estar conectada la batería durante todo el proceso.

7º Represente en un diagrama Presión-Volumen el proceso seguido por el gas (aire) desde el estado inicial hasta que M_1 haya subido la altura *h*.

Solución

1º Cuando se cierra la válvula S la masa de aire encerrada es (despreciando el volumen de la parte ancha del tubo en la que se encuentran los pequeños pivotes y el de la conexión a la llave S):

$$\boxed{m_{aire} = \rho_{aire}\,\pi\, r_2^2 L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{aire} = 1{,}99 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}}$$

$$m_{aire} << M_1, M_2 \text{ o } m_c$$

2º Cuando la llave S se cierra, antes de comunicar calor, el aire encerrado entre los émbolos está a la presión atmosférica. Los pivotes que sujetan al conjunto móvil ejercen unas fuerzas normales cuya resultante es:

$$N_0 = \left(M_1 + M_2 + m_c\right) g$$

Al conectar el interruptor I comenzará la transferencia de calor y la presión del aire interior aumentará. Para una presión $p = p_{at} + \Delta p$, la resultante de las fuerzas de presión sobre los émbolos es $p\,\Delta A - p_{at}\,\Delta A = \Delta p \Delta A$ hacia arriba, por lo que el valor de la reacción normal será:

$$N = \left(M_1 + M_2 + m_c\right) g - \Delta p\,\Delta A \quad \text{con} \quad \Delta A = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = 1{,}01 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$$

A medida que aumente la presión en el interior, la normal disminuirá hasta que para un valor critico de la diferencia de presiones, Δp_c, se anule,

$$\Delta p_c = \frac{\left(M_1 + M_2 + m_c\right) g}{\Delta A}$$

De donde la presión crítica absoluta es

$$\boxed{p_c = p_{at} + \frac{\left(M_1 + M_2 + m_c\right) g}{\pi\,(r_1^2 - r_2^2)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_c = 1{,}06 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

Como se observa, la presión sólo depende de la masa total y de la geometría del sistema móvil.

3a) Hasta que la presión alcanza el valor crítico, el volumen de aire encerrado entre los émbolos, $V_0 = \pi\, r_2^2 L$, no sufre variación, en consecuencia, sufre un proceso lento a volumen constante.

$$\boxed{\text{Tipo de proceso: a volumen constante (isocoro)}}$$

3b) Como la transferencia de calor se realiza lentamente, se puede suponer que todos los estados intermedios son de equilibrio (proceso cuasiestático). Por lo tanto, la ecuación de estado de los gases perfectos permite escribir:

$$\left.\begin{array}{l} p_{at} V_0 = nRT_a \\ p_c V_0 = nRT_1 \end{array}\right\}$$

Donde n es el número de moles del aire encerrado, R la constante de los gases, V_0 el volumen de aire inicial y T_1 la temperatura del aire correspondiente a la presión $p_{c\,c}$ que se trata de determinar.

Dividiendo las relaciones anteriores,

$$\boxed{T_1 = T_a \frac{p_c}{p_{at}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = 314\,\text{K}}$$

3c) En este proceso a volumen constante, el calor Q_1 que ha sido necesario aportar viene dado por

$$Q_1 = n c_v \left(T_1 - T_a\right)$$

Teniendo en cuenta que $c_v = 5R/2$ y que n es

$$n = \frac{p_{at} V_0}{R T_a}$$

La expresión del calor resulta ser

$$\boxed{Q_1 = \frac{5}{2} p_{at} \pi r_2^2 \left(\frac{T_1}{T_a} - 1 \right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1 = 188 \text{ J}}$$

4a) A partir del estado en el que la presión es la crítica, los émbolos comienzan a elevarse manteniendo la presión del aire encerrado constante e igual a p_c y, aumentando tanto el volumen del aire encerrado como su temperatura. El proceso se realiza, lentamente, a presión constante:

$$\boxed{\text{Tipo de proceso: a presión constante (isobaro)}}$$

4b) Razonando de forma análoga que en el apartado 3b, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} p_c V_0 = nRT_1 \\ p_c (V_0 + \Delta V) = nRT_2 \end{array} \right\}$$

Donde T_2 es la temperatura final del sistema y ΔV la variación total del volumen de aire correspondiente a la elevación de los émbolos la altura *h*, cuyo valor es $\Delta V = h\Delta A$. Dividiendo las expresiones anteriores y despejando T_2,

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(1 + \frac{h(r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 L} \right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2 = 356 \, \text{K}}$$

4c) Ahora el proceso es a presión constante, el calor Q_2 aportado será

$$Q_2 = nc_p (T_2 - T_1)$$

Teniendo en cuenta que $c_p = 7R/2$ y que el no ha variado el número de moles, resulta

$$\boxed{Q_2 = \frac{7}{2} \frac{p_{at} \pi r_2^2}{T_a} (T_2 - T_1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = 745 \text{ J}}$$

5º Trabajo útil: el que es preciso realizar para elevar el bloque M_1 hasta una altura *h*:

$$W_{útil} = M_1 g\, h$$

Energía aportada total:

$$W = Q_1 + Q_2$$

El rendimiento es:

$$\eta = \frac{W_{útil}}{Q_1 + Q_2} \times 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{M_1 g\, h}{Q_1 + Q_2} \times 100} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 0{,}84\,\%}$$

Realmente el gato diseñado es deplorable.

6º El suministro de calor se hace de acuerdo con la ley de Joule:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{\varepsilon^2}{r} t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon^2} r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 373 \, \text{s} = 6{,}22 \, \text{min}}$$

7º Como antes hemos indicado, los procesos pueden considerarse cuasiestáticos, por lo tanto susceptibles de ser representados en un diagrama P-V. La primera fase del proceso, isocora, la segunda, isobara, están representadas cualitativamente (y no a escala) en la figura 3.

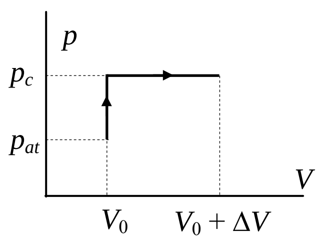

Fig. 3