Problema 1

El modelo atómico de Thomson de 1904 suponía una esfera de carga uniforme positiva, con los electrones incrustados en ella (modelo del budín de pasas). Sin embargo, los experimentos de 1909 de Rutherford y sus colaboradores permitieron descubrir características más detalladas del átomo; en esos experimentos, se bombardearon con partículas alfa (núcleos de helio) láminas delgadas de oro. De acuerdo con el modelo de Thomson, se esperaba que las partículas alfa se deflectaran menos de 0.02°, y aunque la mayoría no se desviaban de su trayectoria, una de cada ocho mil partículas se deflectaba un ángulo mayor que 10°, y en algunos pocos casos el ángulo de deflexión llegaba a 90° o incluso a 180°. Rutherford expresó entonces que "fue el acontecimiento más increíble de mi vida. Era casi tan increíble como si hubiera disparado un proyectil de 15 pulgadas en un pedazo de papel de seda, se devolviera y me golpeara".

1.1 Determine el valor de la velocidad de las partículas alfa producidas en la desintegración del isótopo de Polonio-210 en la reacción:

$$^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{1}$$

1.2 Considere una partícula alfa como la de la pregunta anterior, que se aproxima a un núcleo de oro y se deflecta 180°. Mediante consideraciones energéticas, obtenga una expresión para una cota superior del radio de ese núcleo. Calcule su valor.

Problema 2

Cuando se tiene una partícula confinada en un potencial $V(x)$ se puede hacer un análisis de las oscilaciones de la partícula en los puntos de equilibrio donde el potencial es mínimo. Para ello se hace una aproximación del potencial $V(x)$ hasta términos cuadráticos en su serie de Taylor como sigue (supongamos que x_0 es un valor mínimo del potencial):

$$V(x) \approx V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}(x - x_0)^2 \tag{2}$$

El primer término $V(x_0)$ es constante y se puede escoger como cero (el cero del potencial se puede escoger como mejor convenga), el segundo término es cero por ser x_0 un mínimo. Por lo tanto, el potencial aproximado alrededor del mínimo que expresado como:

$$V(x) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \qquad k \equiv \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} \tag{3}$$

Esta expresión corresponde al potencial de un oscilador armónico cuya frecuencia esta dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}} \tag{4}$$

Se suele usar el adjetivo de "pequeñas oscilaciones" para referirse a la aproximación del potencial en torno al punto de equilibrio, pues esto solo es valido para pequeñas desviaciones del punto de equilibrio.

2.1 El potencial de Morse es una aproximación de la energía potencial entre los átomos de una molécula diatómica:

$$V(x) = V_0\left[1 - e^{-(x-x_0)/\delta}\right]^2 - V_0 \tag{5}$$

donde V_0, x_0 y δ son parámetros que se determinan de acuerdo al comportamiento observado del par de átomos.

i) Haz una gráfica del comportamiento del potencial de Morse.

ii) Determina la fuerza ejercida entre cada átomo que forma la molécula.

ii) Encuentra la frecuencia de oscilación de la molécula en torno al mínimo del potencial de Morse.

ii) Si la energía de enlace ($-V_0$) de una molécula diatómica de hidrogeno H_2 es -4.52 eV y el valor de las constantes son $x_0 = 0.074\,\mathrm{nm}$ y $\delta = 0.036\,\mathrm{nm}$, suponiendo que a temperatura ambiente la energía total de la molécula de H_2 es $\Delta E = 1/40\,\mathrm{eV}$ mayor que su energía de enlace. Calcula la máxima separación que pueden tener los dos átomos que forman a la molécula.

Una manera de encontrar la frecuencia de un sistema es a través de su energía total. Si está se puede escribir de la siguiente forma:

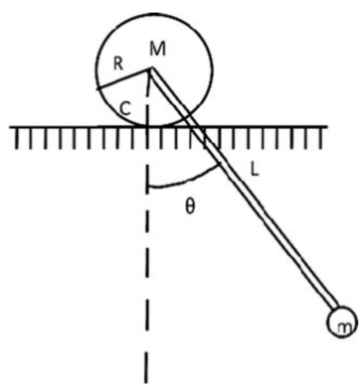
$$E = \frac{m^*}{2}\dot{w}^2 + \frac{1}{2}k^* w^2 \tag{6}$$

donde la variable w puede ser una coordenada o un ángulo y m^* es una masa "efectiva" y k^* una constante de resorte "efectiva". Entonces es inmediato que la frecuencia de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \tag{7}$$

(esto se puede demostrar derivando respecto del tiempo la ecuación anterior, lo que resulta en la ecuación del oscilador).

Veamos como ejemplo el sistema de la tarea 4.



La energía del sistema completo esta dada por:

$$E = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgL\left(1 - \cos\theta\right) \tag{8}$$

donde x es el desplazamiento del centro del cilindro, $I = \frac{1}{2}MR^2$ es el momento de inercia del cilindro respecto de su eje y $l = L^2 + R^2 - 2RL\cos\theta$

Como el cilindro rueda sin resbalar entonces $x = R\theta$, por lo que $\dot{x} = R\dot{\theta}$. Sustituyendo en la expresión anterior:

$$E = \frac{1}{2}\left(MR^2 + ml^2 + I\right)\dot{\theta}^2 + mgL\left(1 - \cos\theta\right) \tag{9}$$

que casi tiene la forma (6), solo hay que hacer las aproximaciones en torno al ángulo de equilibrio $\theta_0 = 0$. Para el potencial gravitacional hasta orden cuadrático se tiene: $V(\theta) = mgL(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$. Como l también depende del ángulo θ es necesario también aproximar, $l \approx L^2 + R^2 - 2RL = (L-R)^2$

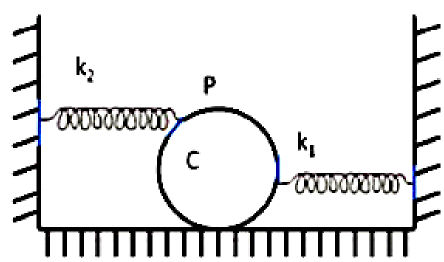
$$E = \frac{1}{2}\left(MR^2 + m(L-R)^2 + I\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2 \tag{10}$$

Entonces la frecuencia de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{mgL}{MR^2 + m(L-R)^2 + I}} = \sqrt{\frac{mgL}{3MR^2/2 + m(L-R)^2}} \tag{11}$$

Claro, se puede obtener el mismo resultado a través de las torcas del sistema.

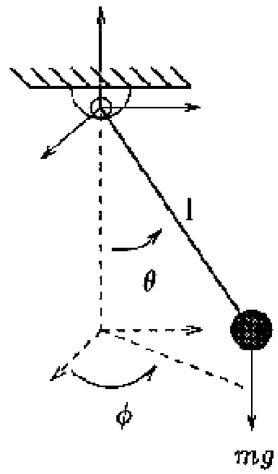
2.2 Dos resortes de constante k_1 y k_2 están unidos a un cilindro sólido de masa m como se muestra en la figura. Cuando el cilindro es desplazado una pequeña distancia se deja en libertad y comienza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Asumiendo que el cilindro rueda sin resbalar sobre la superficie, encuentra el período de oscilación.



2.3 Un cilindro sólido y homogéneo de radio r rueda sin resbalar por el interior de una superficie cilíndrica de radio mayor R realizando oscilaciones pequeñas. Determina su periodo.

2.4 Un sistema esta compuesto de dos discos, con momentos de inercia I_1 y I_2, unidos por una varilla delgada cuyo coeficiente de torsión es τ. Los discos son libres de girar alrededor del eje de la varilla que los une. Determina la frecuencia de oscilación cuando los discos giran en "contrafase".

2.5 Un péndulo esférico consta de una partícula de masa m suspendida de un hilo de longitud l con la libertad de moverse en dos ángulos, el ángulo polar θ (ángulo respecto de la vertical) y el ángulo azimutal ϕ, tal como se muestra en la figura. Encuentra la frecuencia de pequeñas oscilaciones para el péndulo esférico alrededor del ángulo de equilibrio θ_0.



Hint: Escribe la energía cinética del péndulo esférico (considera los ejes instantáneos de rotación) y toma en cuenta además que la componente vertical del momento angular se conserva.

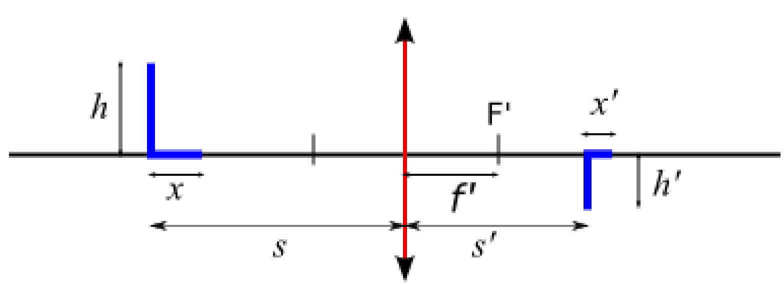
Solución

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{1+3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}} \tag{12}$$

donde θ_0 es el ángulo de equilibrio.

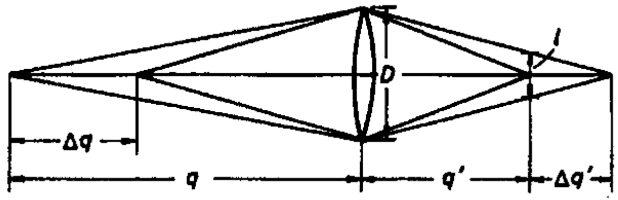
Problema 3

3.1 Un objeto en forma de **L** se encuentra a la izquierda de una lente convergente de distancia focal f'. Las dimensión vertical del objeto el h y la horizontal x, tal como se indica en la figura. El aumento transversal es $\beta = h'/h$ y el longitudinal $\alpha = x'/x$ Encontrar la relación entre ambos aumentos y en particular cuando x sea muy pequeño comparado con s.



3.2 Para la lente de una cámara fotográfica la "profundidad de campo" es el rango de distancia Δq (ver figura) que un objeto puntual se puede "mover" manteniendo el mismo enfoque y de tal manera que la luz del objeto dentro del rango Δq sea captada sobre la película de la cámara dentro un "circulo de confusión" de diámetro l (ver figura).

Encuentra una expresión para la profundidad de campo Δq, como función de la distancia al objeto q, la longitud focal de la lente F, el numero f de la cámara ($f \equiv D/F$) y el diámetro del circulo de confusión l. Considera que la distancia al objeto es mucho mayor que la longitud focal de la lente.



Problema 4, Análisis de datos

La ley de Gauss relaciona que relaciona la distancia a la que se forma la imagen S_i con la distancia a la que se coloca un objeto S_0 y la distancia focal f se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \tag{13}$$

Con los datos reportados en la siguiente tabla realiza un análisis gráfico para determina la distancia focal de la lente f, reporta la incertidumbre en tu resultado final.

S_0 / (± 0.05 cm)	S_i / (± 0.05 cm)
20.0	65.0
25.1	39.0
30.9	30.0
34.8	27.0
45.3	24.0
49.0	23.0
47.5	23.0
62.0	21.0
53.0	22.0
49.0	22.0
37.0	27.0