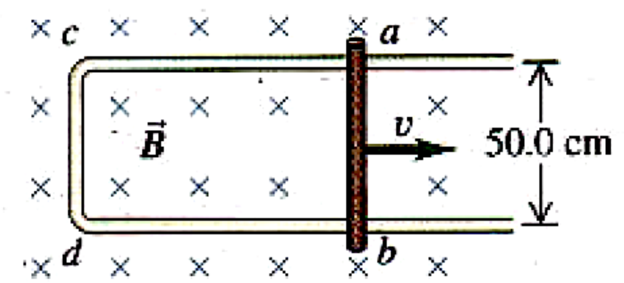
Problema 1

La barra conductora ab de la figura está en contacto con los rieles metálicos ca y db. El aparato se localiza en un campo magnético uniforme de 0.8 T, perpendicular al plano de la figura.



a Encuentra la magnitud de la fem (fuerza electromotriz) inducida en la barra cuando ésta se desplaza hacia la derecha con una rapidez de $v = 7.5$ m/s

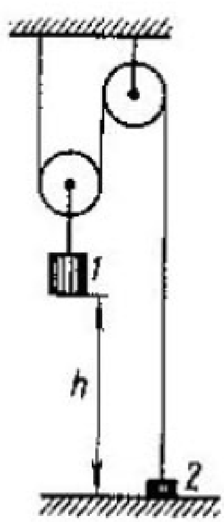
b) ¿En qué sentido fluye la corriente en la barra?

c) Si la resistencia del circuito $abdc$ es de 1.5 Ω (se supone constante), proporcione la fuerza en dirección y magnitud que se necesita para que la barra siga desplazándose hacia la derecha con una rapidez constante de 7.5 m/s. No tenga en cuenta la fricción.

d) Compare la rapidez con que la fuerza (Fv) realiza trabajo, con la rapidez con la que se desprende energía térmica en el circuito (I^2R).

Problema 2

En el sistema de poleas mostrado en la figura, la masa del cuerpo 1 es 4 veces mayor que la del cuerpo 2. La altura h = 20 cm. Las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento son despreciables (los radio de las poleas son despreciables). En cierto momento el cuerpo 2 se soltó y el sistema se pone en movimiento. ¿Cuál es la altura máxima desde el suelo a la que subirá el cuerpo 2?



Problema 3

Considera un sistema donde en la dirección del eje z existe un campo magnético, el suelo está en el plano xy. El campo magnético varía con la altura según la ecuación $B(z) = B_0(1 - \alpha z)$, siendo α un número positivo y z es la altura contada desde el suelo. Un anillo metálico de masa m, diámetro d y resistencia R se deja en libertad desde una altura muy grande y se observa que a partir de cierta altura h desciende con movimiento uniforme.

Calcular la velocidad constante del anillo (*velocidad terminal*). Se supone que en su caída el plano del anillo es paralelo al plano xy.

Problema 4

Tratemos de analizar de manera general el movimiento en una dimensión de una partícula de masa m. La segunda ley de Newton establece lo siguiente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1}$$

donde, por definición, la aceleración de la partícula es la segunda derivada respecto del tiempo de la posición de la partícula $x(t)$. En la ecuación (1), la fuerza F en general pude depender de la posición misma de la partícula, del tiempo t y de la velocidad de la partícula $v = dx/dt$.

Veamos como integrar la ecuación (1) para los siguientes casos:

4.1 Supongamos que la fuerza solo depende del tiempo $F = F(t)$, entonces la ecuación (1) se puede escribir como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m} \tag{2}$$

donde hemos utilizado que la velocidad de la partícula es por definición $\frac{dx}{dt} = v$. La forma de escribir de esta manera la ecuación (1) permite integrar directamente ya que la fuerza depende solo del tiempo:

$$dv = \frac{F(t)}{m}dt, \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{F(t)}{m}dt \qquad \text{donde} \quad v(t=0) = v_0 \tag{3}$$

conociendo $F(t)$ e integrando se encuentra $v(t)$. Escribiendo que $v(t) = \frac{dx}{dt}$ e integrando nuevamente, se obtiene finalmente $x(t)$.

i) Considera el siguiente ejemplo: se tiene un electrón libre de moverse en la dirección del eje x sujeto a un campo eléctrico que oscila en el tiempo como:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta) \tag{4}$$

donde E_0 es una amplitud constante y θ es una fase inicial también constante.

Suponiendo que el electrón esta inicialmente en el origen $x(t=0) = 0$, determina entonces la posición del electrón como función del tiempo $x(t)$, haz una descripción cualitativa del movimiento del electrón. Qué sucede cuando la frecuencia ω del campo externo es muy grande.

4.2 Consideremos ahora el caso cuando la fuerza solo depende de la velocidad de la partícula $F(v)$, nuevamente escribimos la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v), \tag{5}$$

lo cual permite integrar de la siguiente manera:

$$\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{t-t_0}{m} \tag{6}$$

conociendo $F(v)$ se puede integrar para hallar $v(t)$. De la misma manera que el inciso anterior, una vez obtenida la expresión de $v(t)$, se puede integrar haciendo uso de $dx/dt = v(t)$, para hallar $x(t)$.

Una aplicación directa es cuando una partícula se mueve en un medio que presenta resistencia, en este caso la fuerza se opone al movimiento de la partícula y puede variar como alguna potencia de la velocidad $F(v) = -bv^n$.

i) Considera el caso $n = 1$:

$$F(v) = -bv \tag{7}$$

Integra para encontrar $v(t)$ y $x(t)$ de una partícula sujeta a esta fuerza únicamente. ¿Qué le pasa a la velocidad y la posición de la partícula cuando $t \to \infty$?, ¿se llegará a detener la partícula en algún momento?

ii) Considera ahora una partícula cayendo debido a la fuerza de gravedad, pero que ademas la resistencia del aire ejerce una fuerza $F(v) = -bv$. Encuentra en este caso $v(t)$ y $x(t)$. Describe cualitativamente el movimiento de la partícula. En este caso, después de cierto tiempo la velocidad de la partícula es prácticamente constante, esta se conoce como *velocidad terminal.*

4.3 Cuando la fuerza depende de la posición $F(x)$ ya no es tan directo integrar la ecuación de Newton (1), para obtener $v(t)$ y $x(t)$. Trata de intentarlo! Sin embargo la conservación de energía y la definición del potencial $V(x)$ nos salvan!.

En general, para una dimensión, si la fuerza depende la posición $F(x)$ entonces se puede definir su energía potencial $V(x)$ como:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}, \qquad \Leftrightarrow \qquad V(x) = -\int F(x)\, dx \tag{8}$$

Así para una partícula sujeta a una fuerza que depende de solamente de la posición su energía se conserva:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \tag{9}$$

despejando dx/dt se puede integrar:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt \tag{10}$$

Conociendo la la expresión de la fuerza $F(x)$ o del potencial $V(x)$ e integrando se obtiene “directamente” $x(t)$.

Claro, en todos los casos que hemos visto esperamos que las integrales puedan hacerse sin demasiadas complicaciones.

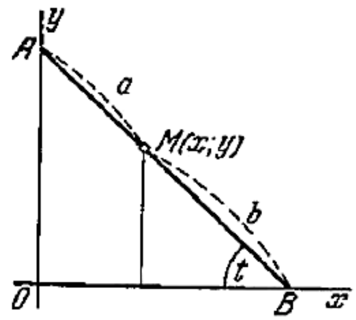
i) Deriva respecto del tiempo la expresión de la energía (9) y verifica que recuperas la segunda ley de Newton (1).

ii) Integra la ecuación (10) para la ley de Hooke, $F(x) = -kx$ y obtén $x(t)$. Para realizar la integral realiza un cambio de variable con alguna de las funciones trigonométricas seno o coseno, se cuidadoso con los limites de integración al hacer el cambio de variable y regresar a la variable original.

Problemas de matemáticas

Problema 1

Los extremos de una varilla AB resbalan sobre los ejes de coordenadas. El punto M que divide a la varilla en dos partes $AM = a$ y $MB = b$. Deducir las ecuaciones parámetricas del punto M, tomando por parámetro al ángulo $t = \measuredangle OBA$. Eliminar después el parámetro t y hallar la ecuación de la trayectoria del punto M de la forma $F(x, y) = 0$



Problema 2

Resuelve las siguiente ecuaciones

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4} \tag{11}$$

$$2\sin(17x) + \sqrt{3}\cos(5x) + \sin(5x) = 0 \tag{12}$$