Tarea avanzada 6

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**

Fecha de entrega: 15 de mayo 2016

Problemas de matemáticas

Continuando con las ecuaciones diferenciales lineades de coeficienes constantes de segundo orden, resolveremos el problema no homogéneo, *i.e.* se tiene el problema

$$a\frac{d^2y}{dx^2} \ + \ b\frac{dy}{dx} \ + \ cy = f(x) \tag{1}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales nos dice que la solución a este problema de compone de dos partes, una parte a la solución homogéne y otra función llamada solución particular. Entonces

$$\begin{aligned}
&\text{Si } a\frac{d^2y}{dx^2} \ + \ b\frac{dy}{dx} \ + \ cy = f(x) \\
&\Rightarrow y(x) = y_p(x) + y_h(x) \\
\text{Donde } y_h \text{ resuelve } &a\frac{d^2y}{dx^2} \ + \ b\frac{dy}{dx} \ + \ cy = 0 \ \ (\text{En general } y_h(x) = Ay_1 + By_2) \\
&\text{Y } y_p \text{ es alguna solución de la ecuación (1)}
\end{aligned}$$

Entonces basta encontrar una sola función de satisfaga (1) para tener todo el conjunto de soluciones. Hay varios métodos para encontrar una solución particular. El más común se llama variación de parámetros, el cual consiste, a través de la solución homogénea encontrar la solución particular de la siguietne forma. Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones a la ecuación homogénea, entonces podemos suponer que

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1(x)\phi_1(x) + u_2(x)\phi_2(x) \\
u_1'\phi_1 &+ u_2'\phi_2 = 0 \\
u_1'\phi_1' &+ u_2'\phi_2' = f(x)
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que

$$\begin{aligned}
y_p(x) = \phi_1(x)\int \frac{-f(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x),\phi_2(x))} + \phi_2(x)\int \frac{f(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x),\phi_2(x))} \\
\text{Donde } W(\phi_1(x),\phi_2(x)) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Otro método mucho más sencillo, pero a veces difícil, es encontrar la solución particular a .ºjo"tratando de adivinar cual sería la solución, como sabemos que la solución es única, si se encuentra una función que satisfaga (1) hemos encontrado la solución particular.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden

1. $y'' + y = \sec^2 x$

2. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
3. $y'' - 2y' + y' = \frac{e^x}{x}$
4. $y'' + 2y' + y = 12xe^{-x}$
5. $y'' - y' = e^{-2x} \sin e^{-x}$
6. $y'' + 4y = \cos^2 x$
7. $3y'' + 4y' + y = (\sin x)e^x$ con $y(0) = 1, y'(0) = 0$
8. $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = y'(0) = 0$.

Problemas de Física

Problemas cortos

1. **Aire líquido**
   Una mezcla de oxígeno y nitrógeno (en forma de gas) está contenida en un contenedor equipado con un pistón en un extremo a una temperatura de $T = 77.4\ K$. La cantidad total de la mezcla de gas es 1.1 mol y su presión inicial es de 0.5 atm. Con la ayuda del pistón la mezcla de gas es lentamente comprimida a temperatura constante.
   Usando suposiciones acertadas, grafica la presión del sistema como función de su volúmen hasta que alcance un décimo de su volúmen, si la fracción del número de moles de oxígeno con respecto a los moles de nitrógeno es:
   a) $\frac{n_{O_2}}{N_{N_2}} = \frac{1}{9}$
   b) $\frac{n_{O_2}}{N_{N_2}} = \frac{2}{9}$
   c) $\frac{n_{O_2}}{N_{N_2}} = \frac{1}{4}$

   Encuentre la presión y el volumen a puntos distintivos de las curvas isotérmicas.
   Puede usar los siguientes datos.
   a) Punto de ebullición del nitrógeno líquido a 1 atmósfera: $77.4\ K$.
   b) Punto de ebullición del oxígeno líquido a 1 atmósfera: $90.2\ K$
   c) Calor de vaporización del oxígeno: 213 $\frac{J}{g}$

2. **Resorte cilíndrico con pistón**
   Considera n=2 moles del gas ideal helio a una presión P_0, volumen V_0 y temperatura $T_0 = 300$ K colocado en un contenedor cilíndrico vertical. Un pistón horizontal, movible y sin fricción de masa $m = 10$ kg (supón $g = 9.8\dfrac{m}{s^2}$) y una sección transversal $A = 500cm^2$ comprime al gas dejando la sección superior del contenedor vacía. Desprecia cualquier fuga de gas a través de la superficie de contacto y las capacidades térmicas de el contenedor, el pistón y el resorte. Inicialmente el sistema está en equilibrio y el resorte está sin estirar. Desprecia la masa del resorte.

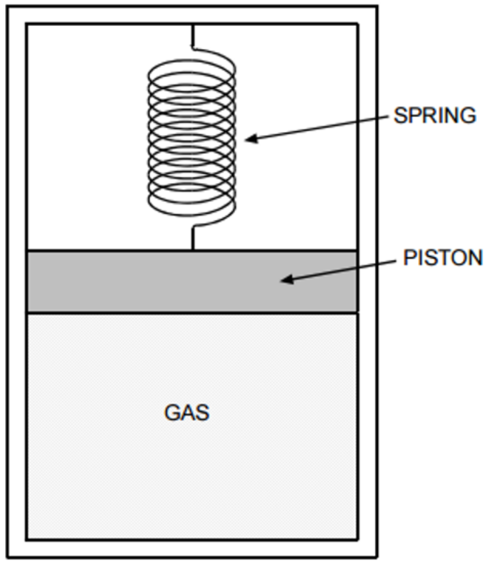

Figura 1:

a) Calcula la frecuencia f de pequeñas oscilaciones del pistón, cuando está ligeramente desplazado de su posición de equilibrio.

b) Ahora el pistón está empujado hacia abajo hasta que el volumen del gas queda reducido a la mitad y es soltado con velocidad cero. Calcula el valor del volumen de gas cuando la velocidad del pistón es:

$$\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$$

Considera la constante del resorte $k = mgA/V_0$. Todos los procesos en el gas son adiabáticos. La constante del gas es $R = 8.314JK^{-1}mol^{-1}$. Para gases monoatómicos (helio) usa la constante de Laplace $\gamma = 5/3$.

3. **Problemas de circuitos**

a) Encuentre la resistencia equivalente entre dos vértices opuestos de un cubo. Donde las aristas tienen resistencia $R\Omega$

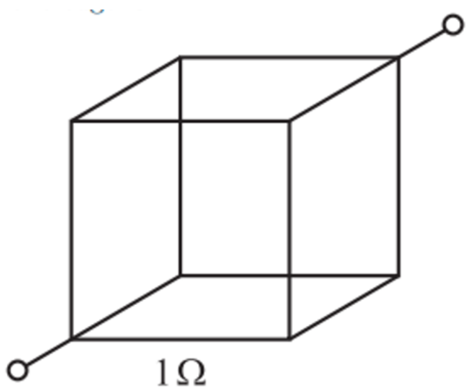

Figura 2:

b) Encuentre la resistencia equivalente entre dos vértices adyacentes de un dodecaedro. Donde las aristas tienen resistencia $R\Omega$

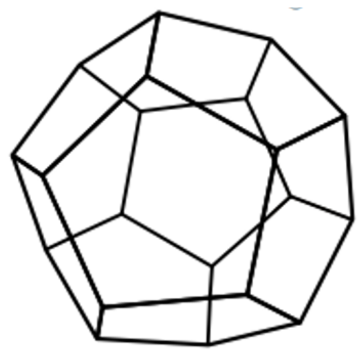

Figura 3:

c) Haga el mismo problema del dodecaedro sólo que ahora el cable entre A y B está cortado.

d) Encuentre la resistencia equivalente entre dos vértices vecinos, A y B, de una malla rectangular infinita de resistencias, cada una con una resistencia de $R\Omega$

4. **Misíl balístico**
Se pretende lanzar un misíl desde el suelo de tal forma que impacte sobre lo alto de un edificio de forma circular de radio R.
El punto del lanzamiento se puede escoger en cualquier lugar del eje $Z = 0$ y además se puede variar el ángulo de lanzamiento. El objetivo del lanzamiento es lograr que la bola llegue al punto más alto de un edificio de forma esférica y radio R y con la velocidad inicial v_0 mínima. No se permiten rebotes en el tejado del edificio antes de llegar al punto más alto. (Más puede haber un pequeño roce) ¿Cuál es la velocidad minima de lanzamiento desde el suelo ($Z = 0$) para que la bola alcance el punto más alto del edificio de forma esférica?

5. **Algunos de termo**

a) Una pieza de metal aislada térmicamente se calienta bajo la presión atmosférica mediante una corriente eléctrica de manera que recibe la energía eléctrica siendo la potencia P constante. La variación de la temperatura de la pieza metálica con el tiempo está dada por la expresión

$$T(t) = T_0 \left(1 + a(t - t_0)\right)^{\frac{1}{4}}$$

donde a, t_0 y T_0 son constantes.
Calcule la capacidad calorífica $C_p(T)$ del metal en función de T y T_0

b) Una superficie negra plana se encuentra a una temperatura alta T_h y es paralela a otra superficie semejante que se encuentra a una temperatura T_l inferior a T_h. Entre las superficies existe el vacío. Con el fin de reducir el flujo calorífico debido a la radiación se coloca una pantalla que consiste en dos superficies planas negras aisladas térmicamente entre sí. Dicha pantalla se coloca entre las superficies de temperaturas T_h y T_l. Cuando las condiciones son estacionarias, determinar el factor η que mide el cociente entre el flujo con la pantalla y sin ella. Despreciar los efectos debidos al tamaño finito de las superficies.

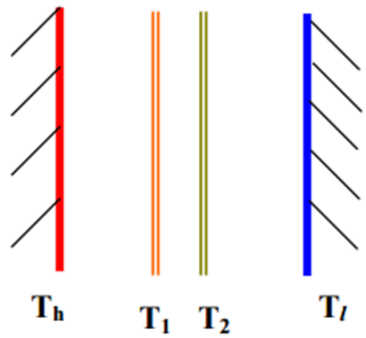

Figura 4:

Problemas Largos

Dipolo Magnético

Un dipolo magnéitco con momento m_1 es colocado en el origen orientado hacia el eje de las x

1. Determine el campo magnético en todo el espacio
2. Otro dipolo es ccolocado a una distancia r del origen y este hace un ángulo θ con respecto al eje de las x. Veáse la siguiente figura.

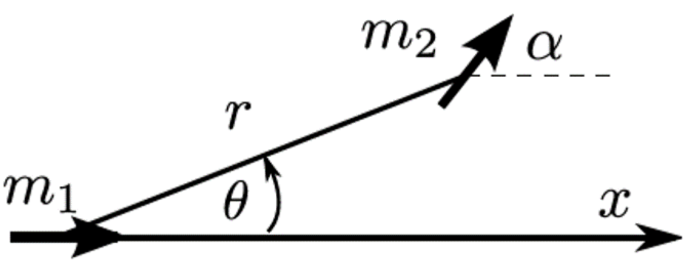

Figura 5:

3. Determine la interacción de engergía entre los dos dipolos.
4. Determine la fuerza en el segundo dipolo.
5. El segundo dipolo es atado al primer dipolo con una cuerda de masa despreciable tal que la distancia entre ambos dipolos se mantenga constante y valga r. Aunque la orientación del primer dipolo permanezca constante la orientación del segundo dipolo podrá cambiar. También está permitido mover libremente el en plano xy al rededor del primer dipolo. Escriba la ecuación de movimiento para el segundo dipolo. La masa y el momento de incerdia del segundo dipolo valen m e I respectivamente.
6. Inicialmente el segundo dipolo se encuentra en reposo en el eje x, y su momento magnético formando un ángulo α_0 con respecto al eje x ($\alpha_0 << 1$). Al tiempo $t = 0$, el segundo dipolo se deja en libertad. Escriba la ecuación de movimiento del segundo dipolo, asumiendo que θ y α son pequeños. Tome $I = \frac{mr^2}{5}$
7. El sistema experimenta movimiento armónico simpe. Se dice que un sistema se encuentra en un modo normal de vibración cuando las variables oscilantes están en fase y se pueden escribir como: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$ y $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \phi)$. Existen dos valores posibles para ω (modos normales de vibración). Determine los dos posibles valores de ω.

8. Para cada modo normal, determine el radio de amplitud de α y θ, $c_1 = \frac{\alpha_1}{\theta_1}$ y $c_2 = \frac{\alpha_2}{\theta_2}$

9. El sistema puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\theta = \theta_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \theta_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\alpha = c_1\theta_1 \cos(\omega_1 t\phi_1) + c_2\theta_2 \cos(\omega_2 t\phi_2)$$

Usando las condiciones iniciales, encuentre los valores de θ_1, ϕ_1, θ_2 y ϕ_2.

Lente de Plasma

La física de los intensos haces de partículas tiene un gran impacto no solo en la investigación básica sino también en aplicaciones en la medicina y en la industria. Un lente de plasma es un dispositivo que proporciona un fuerte y concentrado foco al final de los colisionadores lineales. Para apreciar realmente las posibilidades de un lente de plasma es casi natural comparar este lente con los lentes magneticos y electrostáticos usuales. En lentes magnéticas, la capacidad de enfoque es proporcional al gradiente del campo magnético. El límite superior práctico de la lente de enfoque del cuadrupolo es del orden de 10^2 T/m, mientras que para las lentes con una densidad de 10^{17} cm^{-3}, su capacidad de enfoque es equivalente al gradiente de campo magnético de 3x10^6 T/m (alrededor de cuatro ordenes de magnitud más que el de un lente de cuadrupolo magnético). En lo siguiente, se describirá porqué los intensos haces de partículas relativistas podrían producir haces de enfoque automático que no estallen en el espacio libre.

a) Considera un haz de electrones cilíndrico muy largo, con una densidad uniforme η y una velocidad promedio v (ambas cantidades respecto al marco de referencia de un laboratorio). Deriva la expresión para el campo eléctrico en un punto a distancia r del eje central del haz usando electromagnetismo clásico.

b) Deriva la expresión para el campo magnético en el mismo punto que describe a).

c) ¿Cuál es la fuerza neta (hacia afuera) ejercida en el electrón en el haz de electrones pasando ese punto?

d) Asumiendo que la expresión obtenida en c) es aplicable a velocidades relativistas, ¿cuál será la fuerza en el electrón cuando v se acerca a la velocidad de la luz c, donde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$?

e) Si el haz de electrones de radio R entra a un plasma de densidad uniforme $\eta_0 < \eta$ (el plasma es un gas ionizado de iones y electrones con igual densidad de carga), ¿cuál será la fuerza neta en el ion del plasma estacionario a una distancia r' fuera del haz de electrones mucho tiempo después de que el haz entra al plama. Puedes asumir que la densidad de los iones del plasma permanece constante y que la simetría cilíndrica se conserva.

f) Después un largo y suficiente tiempo, ¿cuál es la fuerza neta en un electrón a una distancia r del eje central en el plasma, asumiendo que $v \to c$ siempre y cuando la densidad de los iones del plasma permanece constante y que la simetría cilíndrica se conserva?