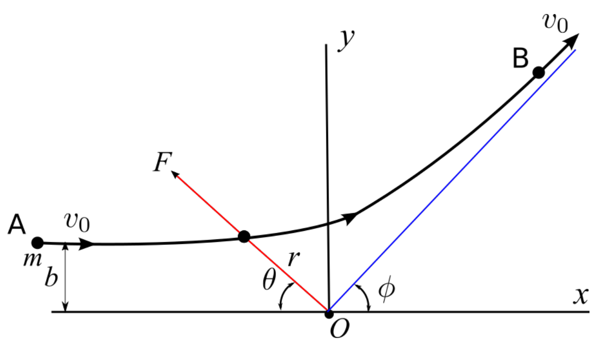
Tarea 8

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**

Fecha de entrega: martes 21 de abril 2015.

Problema 24, mecánica

24.1 Considera la dispersión de una partícula bajo una fuerza central $F = k/r^2$.



Inicialmente la partícula de masa m se mueve paralela al eje x con velocidad inicial v_0, separada una distancia b (parámetro de impacto) del eje horizontal. En el punto O esta otra partícula fija que ejerce una fuerza $F = k/r^2$ en la dirección que une ambas partículas y donde r es la distancia entre ambas partículas.

a) Demuestra que la velocidad en el eje y se relaciona con la velocidad angular $d\theta/dt$ a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{d\,v_y}{dt} = \frac{k}{mv_0 b}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{1}$$

b) De esta ecuación demuestra entonces que el parámetro de impacto b esta relacionado con el ángulo de dispersión ϕ a través de la siguiente ecuación:

$$b\frac{mv_0^2}{k} = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{2}$$

Hint: Por conservación de energía la velocidad de la partícula en el punto B es la misma que al inicio v_0 (verifícalo).

24.2 Sistema de partículas.

Considera dos partículas de masas m_1, m_2, que interactúan a través de una fuerza conservativa, es decir hay una ***energía potencial interna*** entre ambas partículas U_{12}. Se define la ***energía propia*** del sistema como:

$$U = E_k + U_{12} = \frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2} + U_{12} \tag{3}$$

esta es la energía cinética de ambas partículas, referidas a un observador inercial, y la energía potencial de interna. Adicionalmente puede haber un potencial externo que contribuya a la ***energía total del sistema***:

$$E = U + U_{ext} = \frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2} + U_{12} + U_{ext} \tag{4}$$

donde U_{ext} es la suma de energías debidas al potencial externo en cada partícula.

a) Demuestra que la energía cinética E_k puede reescribirse como:

$$E_k = E_{kCM} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 \tag{5}$$

donde se define la ***energía cinética interna*** referida al centro de masa (CM), como:

$$E_{kCM} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1' + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_2' \tag{6}$$

siendo $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ las velocidades de las partícula de masas m_1 y m_2 respectivamente referidas al CM, $M = m_1 + m_2$ y $\mathbf{V}_{CM}$ es la velocidad del CM.

b) Demuestra que la energía cinética interna se puede escribir en términos de la masa reducida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ como:

$$E_{kCM} = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}_{12}^2 \tag{7}$$

donde $\mathbf{v}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1$ es la velocidad relativa de las dos partículas.

Consideremos ahora una colisión entre dos partículas de masas m_1 y m_2 y momento inicial $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ respectivamente. Después de la colisión lo que se observa es que "surgen" dos nuevas partículas (por alguna reacción producida en la colisión) de masas m_1' y m_2'.
Ya que durante la colisión-reacción solo hay fuerzas internas entonces tanto el momento como la energía totales se conservan.

La energía potencial interna antes de la colisión-reacción U_{12}, en general será diferente después de colisónreacción U_{12}' ($U_{12} \neq U_{12}'$). Se define la siguiente cantidad:

$$Q \equiv E_k' - E_k = U_{12}' - U_{12} \tag{8}$$

para $Q = 0$ se tiene una colisión elástica. Si $Q > 0$ se trata de una colisión inelástica exoérgica y si $Q < 0$ una colisión inelástica endoérgica.

c) Demuestra que si $\mathbf{p_1}'$ es el momento de la partícula de masa m_1 referido al centro de masa, entonces la cantidad Q, referida al sistema de CM, se puede escribir como:

$$Q = \frac{\mathbf{p}_1'}{2\mu'} - \frac{\mathbf{p}_1}{2\mu} \tag{9}$$

donde es claro quien es μ' (la masa reducida después de la colisión).

d) Considera una colisión donde un neutrón choca con el protón de un átomo de hidrógeno y es capturado para formar un núcleo de deuterio. Determina en este caso la expresión Q

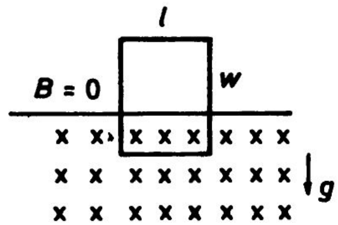
e) Finalmente considera una partícula de masa m_1 y momento $\mathbf{p}_1$ que colisiona con una partícula de masa m_2 pero que esta en reposo. Después de la colisión las masas de las partículas se modifican a m_1' y m_2' y se mueven con momento $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$, ver figura.

Demuestra que en esté caso:

$$Q = E_{k,1}' \left(1 + \frac{m_1'}{m'_2}\right) - E_{k,1} \left(1 - \frac{m_1}{m'_2}\right) - \frac{2\sqrt{m_1 m_2 E_{k,1} E_{k,1}'}}{m_2'} \cos\theta \tag{10}$$

Problema 25, electromagnetismo.

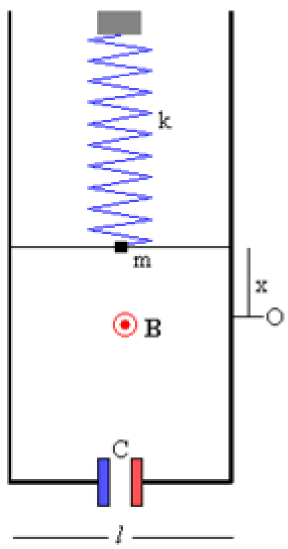
25.1 Una espira rectangular de dimensiones l y w se deja caer al tiempo $t = 0$ desde el reposo por encima de una región donde hay un campo magnético uniforme B_0, como se muestra en la figura. La espira tiene una resistencia R, autoinductancia L y masa m.



a) Considera que la autoinductancia puede ser ignorada pero no la resistencia, encuentra la corriente y la velocidad de la espira como función del tiempo.

b) Ahora considera que la resistencia puede ser ignorada pero no la autoinductancia, encuentra en este caso la corriente y la autoinductancia de la espira como función del tiempo.

25.2 Una varilla de masa M cuelga del techo sujeta por un muelle elástico de constante k. La varilla puede deslizarse a lo largo de dos vías paralelas colocadas en posición vertical y separadas por una distancia l, considere que no hay fricción en el sistema. En la parte inferior las vías se conectan a un condensador de capacitancia C. El sistema se encuentra en una región con campo magnético B y perpendicular al plano del sistema.



Considere primeramente que el campo magnético se encuentra apagado, la varilla descenderá hasta alcanzar el equilibrio y si se desplaza una distancia x esta comenzará a oscilar. Obtenga la distancia que se estira el resorte hasta el punto de equilibrio X_e y la frecuencia angular de las oscilaciones ω.

A partir de ahora consideraremos que el campo magnético se encuentra encendido, al moverse la varilla dentro del campo magnético esta generará una diferencia de potencial en la resistencia, tome en cuenta el origen de coordenadas en el punto donde el resorte no se encuentra deformado:

a) Determine la f.e.m. inducida ε y la intensidad i en el circuito en términos de C, B, l,$\dot{x}$,$\ddot{x}$

b) Haga un diagrama de fuerzas en la varilla y determine la ecuación de movimiento de esta. Asuma que al tiempo $t = 0$ se encuentra a x_0 del punto de equilibrio con una velocidad nula.

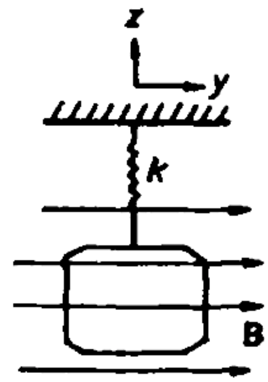
c) Haga un bosquejo de la intensidad y la f.e.m. de sistema en una misma gráfica.

25.3 Una espira de área A y resistencia R esta suspendida por un resorte de torsión de constante k, como se ve en la figura. En la región donde esta suspendida la espira hay un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{j}$, la espira se encuentra en el plano yz y puede rotar alrededor del eje z con un momento de inercia I, como se muestra en la figura. El resorte de torsión es aislante y se puede despreciar la autoinductancia de la espira.

Si la espira es desplazada un pequeño ángulo α_0 del equilibrio y dejada en libertad.

a) Determina la ecuación que describe el movimiento de la espira, explica cualitativamente los tipos de movimiento que puede tener la espira (puedes incluir gráficas).

b) Encuentra la dependencia con el tiempo del ángulo de giro de la espira respecto de la linea del resorte de torsión.



Problema 26, Estabilidad de las estrellas.

a) Considere una estrella esférica de densidad uniforme, radio R y masa M. Calcula la energía potencial (gravitacional) U_g de la estrella debida a su propio campo gravitacional (esta es la energía gravitacional "empleada" para formar a la estrella).

b) Supongamos que la estrella está hecha sólo de hidrógeno y que todo el hidrógeno está ionizado. Consideremos que la producción de energía de la estrella está generada por fusión nuclear y está se ha detenido. Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli y su energía total puede calcularse usando estadística cuántica, en este caso la energía electrónica total (ignorando la energía protónica) es:

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10\, m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2} \tag{11}$$

donde m_e es la masa del electrón, N_e es el número total de electrones y $\hbar = h/2\pi$.

Llamemos a este tipo de estrella EB; ahora, suponiendo su masa es aproximadamente la misma que la masa solar: $M_s = 2 \times 10^{30}$ kg, determina el radio que debería tener la estrella EB.

c) Considerando que los electrones en la estrella EB están distribuidos uniformemente, haz una estimación de la separación promedio entre los electrones r_{sep}.

d) Haz una estimación de la velocidad v_e que deben tener los electrones dentro de la estrella EB, hazlo en el límite clásico ($v \ll c$) y en el límite relativista ($v \lessapprox c$).

e) La expresión (11) se obtiene a partir de un análisis clásico donde la energía de los electrones es simplemente: $E = \frac{p^2}{2m}$; Sin embargo al considerar el límite relativista $E = pc$, en este caso la ecuación (11) se modifica de la siguiente forma:

$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3} \tag{12}$$

La estabilidad de una estrella depende tanto de su radio como de su masa; determina la masa critica a la cual la estrella es estable, es decir no se expande ni se colapsa, expresa la masa critica en unidades de masas solares.

Si la masa de la estrella aumenta, ¿la estrella se colapsa o se contrae?

De acuerdo a la mecánica cuántica a una partícula que se mueve con momento p se le asocia una longitud de onda λ, esto establece una dualidad onda-partícula. Ambas propiedades de las partículas no son independientes y están relacionadas por la llamada *longitud de onda de de Broglie*:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{13}$$

donde h es la constante de Planck.