

Tarea 10

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF

ENTRENAMIENTO 2016

Fecha de entrega: viernes 3 junio 2016.

Problema 39, radiación de cuerpo negro.

La radiación (ondas electromagnéticas) que emite un *cuerpo negro* en equilibrio termodinámico tiene una distribución de frecuencias dada por la distribución de Planck:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1)$$

donde $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la luz, $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann y $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s la constante de Planck.

Esta cantidad corresponde a la energía por unidad de volumen, para una frecuencia ν dada, de la radiación electromagnética del cuerpo negro cuando se encuentra en equilibrio a la temperatura T . De tal manera la densidad de energía total del cuerpo negro queda determinada por la integral de la expresión (1) sobre todas las frecuencias posibles:

$$\frac{U}{V} = u = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} h \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{4}{c} \sigma T^4 = u(T) \quad (2)$$

donde $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8}$ Js⁻¹m⁻²K⁻⁴ es la constante de Stefan-Boltzmann y se conoce el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (3)$$

La densidad de energía de la radiación de cuerpo negro solo depende de la temperatura T .

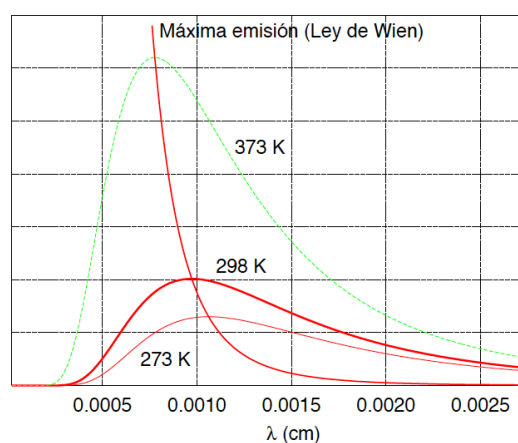
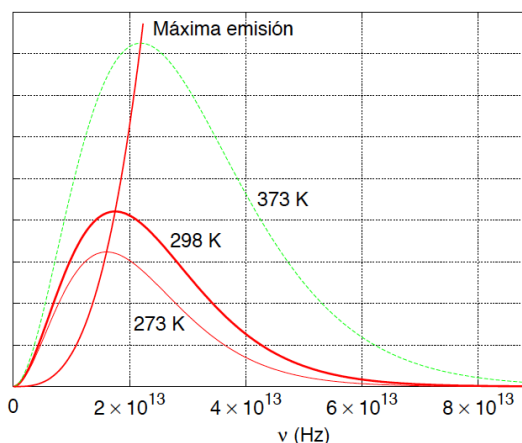
a) La densidad de energía de la radiación en un intervalo de frecuencias ν y $\nu + d\nu$ esta dada por la expresión:

$$\rho(\nu, T) d\nu \quad (4)$$

Si la longitud de onda esta relacionada con la frecuencia: $\lambda = c/\nu$, realiza un cambio de variable en la ecuación (4) para obtener su expresión en términos de la longitud de onda:

$$\rho'(\lambda, T) d\lambda \quad (5)$$

En las siguientes figuras se muestra la curva de distribución de Planck para tres diferentes temperaturas. En la figura de la izquierda esta representada la distribución de Planck en función de la frecuencia ν y en la figura de la derecha en función de la longitud de onda λ . De acuerdo al ejercicio anterior, estas curvas no son del todo iguales.



De acuerdo a las curvas de distribución de Planck, para cada temperatura T existe un valor máximo de la longitud de onda λ_{max} (o de la frecuencia ν_{max}) a la cual emite un cuerpo con esa temperatura. A la dependencia de λ_{max} con la temperatura se le conoce como ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{max}T = b \quad (6)$$

donde $b = 2.9 \times 10^{-3} \text{ mK}$.

- b) A partir de la expresión que encontraste en el inciso anterior: $\rho'(\lambda, T)$, demuestra la ley de desplazamiento de Wien (6).

Para ello necesitarás resolver la siguiente ecuación:

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \quad (7)$$

Más adelante, en el problema 42 de esta tarea se describe un método para calcular de manera aproximada la raíz de una ecuación trascendental.

- c) Obtén la expresión de la ley de Wien, en términos de la longitud de onda:

$$\nu_{max} = aT \quad (8)$$

calcula el valor de la constante a .

Resuelve los siguientes problemas:

- 1) La presión dentro del Sol se estima que es de aproximadamente 400 millones de atmósferas. Estima la temperatura del Sol, considerando la presión del Sol se debe únicamente como resultado de la radiación.
- 2) La masa del Sol se estima que es del orden de $2 \times 10^{30} \text{ kg}$, su radio de $7 \times 10^8 \text{ m}$ y su temperatura de 5700 K.
 - 2.1) Calcula la masa que el sol pierde por segundo por radiación.
 - 2.1) Calcula el tiempo necesario para que la masa del Sol disminuya el 1 %
- 3) Estima la temperatura de la Tierra suponiendo que se encuentra en equilibrio con la radiación del Sol.

Formulas útiles:

La presión de radiación electromagnética es un tercio de su densidad de energía ($u = U/V$):

$$p_r = \frac{u}{3} \quad (9)$$

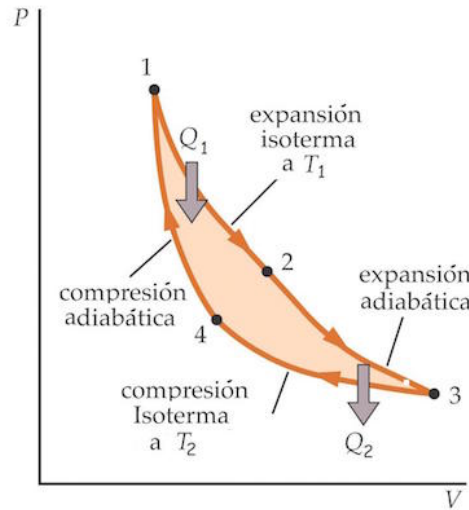
La potencia total radiada por unidad de área (P/A) de un cuerpo negro que esta a temperatura T esta dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \quad (10)$$

Problema 40, ciclo de Carnot.

El ciclo de Carnot es el ciclo más importante de la termodinámica pues a partir de él se obtienen algunos resultados generales importantes, uno de ellos es que su eficiencia es independiente del sistema con el cual se realice el ciclo.

En la siguiente figura se muestra el ciclo de Carnot para un gas, este ciclo se construye a partir de dos procesos adiabáticos: una compresión y una expansión; y dos procesos isotérmicos, $T_1 > T_2$, que conectan los dos procesos adiabáticos. Nota que durante el proceso isotérmico T_1 (temperatura alta) entra calor Q_1 al gas y durante el proceso isotérmico T_2 (temperatura baja) el gas cede calor Q_2 .



Ciclo de Carnot para un gas.

La eficiencia de un ciclo que opera como motor, como es el caso para el ciclo de Carnot descrito, esta definida como:

$$\eta = \frac{\text{trabajo que realiza el sistema}}{\text{calor que entra al sistema}} = \frac{W_T}{Q_1} \quad (11)$$

Para calcular la eficiencia del ciclo de Carnot es necesario conocer el sistema sobre el cual se realiza dicho ciclo, es decir la ecuación de estado, la ecuación de la energía interna, la ecuación de las curvas adiabáticas, etc.

Parte I, gas ideal

La ecuación de estado y la energía interna del gas ideal son:

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ U &= U_0 + C_V T \end{aligned} \quad (12)$$

donde U_0 es una constante y C_V es la capacidad calorífica a volumen constante (se supone constante). Para el gas ideal las curvas adiabatas son: $PV^\gamma = \text{constante}$, donde $\gamma \equiv C_p/C_V$, que depende si el gas es monoatómico o diatómico.

a) Calcula el trabajo total realizado durante el ciclo de Carnot:

$$W_T = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \quad (13)$$

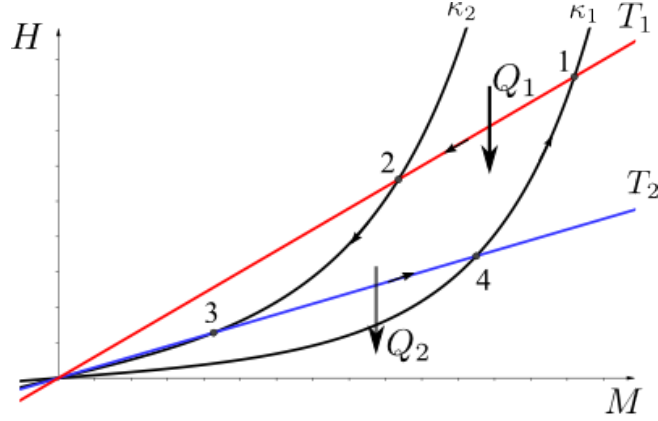
Considera la siguiente definición del trabajo: $dW = -pdV$; verifica los signos que obtienes del trabajo en cada proceso ($W < 0$ si el sistema realiza trabajo, $W > 0$ si se realiza trabajo sobre el sistema).

b) Recuerda que la energía interna del gas ideal solo depende de la temperatura. Calcula entonces la eficiencia del ciclo de Carnot para el gas ideal y demuestra que se puede escribir como:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (14)$$

vas a necesitar la ecuación de las curvas adiabáticas.

Parte II, Sólido magnético ideal.



Ciclo de Carnot para un sólido magnético.

Para un sólido magnético ideal o paramagneto las variables termodinámicas que determinan su estado son: la magnetización M , el campo magnético externo aplicado H y la temperatura T . La ecuación de estado y la energía interna de un sólido magnético son:

$$\begin{aligned} M &= \frac{CH}{T}, & \text{ec. de estado (ley de Curie)} \\ U &= C_M T, & \text{energía interna} \end{aligned} \quad (15)$$

Donde C es la constante de Curie que depende del material que compone al sólido y C_M es otra constante que corresponde a la capacidad calorífica del sólido cuando se mantiene la magnetización constante (es similar a C_V para un gas). Notar que la energía solo depende de la temperatura igual que el gas ideal.

El ciclo de Carnot para el sólido paramagnético se representa en la figura de arriba. Las curvas isotérmicas (T_1, T_2) son rectas que cruzan el origen y las constantes (κ_1, κ_2) corresponden a las curvas adiabáticas que son funciones exponenciales.

Si el trabajo para un sólido magnético se define como:

$$W_{\text{magnetico}} = - \int H dM \quad (16)$$

c) Demuestra que las curvas adiabáticas para el sólido magnéticos, en las variables $H - M$, están dadas por:

$$H = \kappa M \exp \left[\frac{M^2}{2C C_M} \right] \quad (17)$$

donde κ es una constante.

d) Calcula el trabajo total realizado durante el ciclo de Carnot para el sólido magnético:

$$W_T = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \quad (18)$$

e) Calcula la eficiencia del ciclo de Carnot para el sólido magnético y demuestra que se obtiene el mismo resultado que para el gas ideal (inciso b):

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (19)$$

Ya que tienes practica, calcula la eficiencia del ciclo de Carnot para un gas que satisface la ecuación de van der Waals (ver problema 18, tarea 5) y demuestra que es la misma que del gas ideal y del sólido magnético.

Así, la eficiencia del ciclo de Carnot de cualquier sistema es la misma:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (20)$$

donde $T_2 < T_1$, esta es una propiedad universal que representa una propiedad previa a la formulación de la segunda ley de la termodinámica.

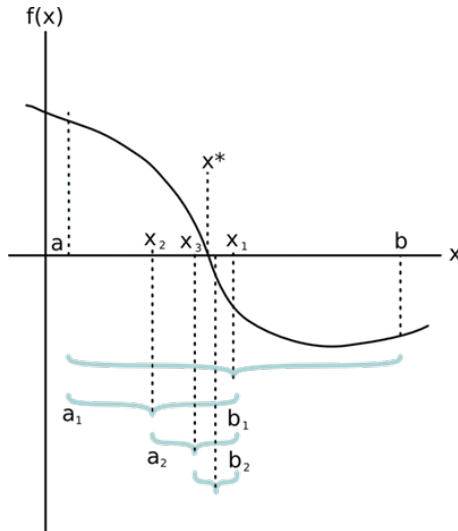
Problema 41, física moderna.

- 1) a) Un fotón de energía E choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo m_0 y es absorbido ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante? b) Una partícula de masa en reposo m_0 se desplaza a una velocidad de $v = \frac{4}{5}c$, choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma una partícula compuesta. ¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál su velocidad?
- 2) El ^{232}U se desintegra emitiendo una partícula alfa y pasando a ^{228}Th . Calcular la energía cinética de la partícula alfa.

Masas en reposo: $^{232}\text{U} = 232.0372 \text{ u}$; $^{228}\text{Th} = 228.0288 \text{ u}$; Partícula alfa = 4.0026 u

donde: (unidad de masa atómica) $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Problema 42, método de bisección para encontrar raíces.



Sea la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad (21)$$

a la cual queremos encontrar su raíz (o raíces). Supongamos entonces que x^* es la raíz exacta de la ecuación (21). A continuación se presenta el método de bisección para obtener de manera aproximada (con una precisión ε) el valor de x^* .

- 1) Se escoge dos valores diferentes a y b que van a definir un intervalo $[a, b]$. Entonces se evalúa la función en ambos valores y calculamos su producto $f(a) \cdot f(b)$ para verificar lo siguiente:

a) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, hay una raíz en el intervalo $[a, b]$ (en general puede haber un número impar de raíces).

b) Si $f(a) \cdot f(b) > 0$, entonces hay que escoger otro par de valores hasta que $f(a) \cdot f(b) < 0$

en la practica solo necesitamos verificar el cambio de signo de la función en ambos valores a y b para asegurar que hay una raíz en el intervalo $[a, b]$

2) Como primer aproximación para el valor de la raíz, escogemos el punto medio definido por el intervalo $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x^* \approx x_1 \quad (22)$$

Si $f(x_1) = 0$, entonces x_1 es la raíz exacta. Pero en general esto no sucederá por lo que se define otro nuevo intervalo a partir del valor x_1 .

3) El valor x_1 divide al intervalo inicial $[a, b]$ en dos nuevos intervalos: $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$. Entonces hay que verificar en cual de los dos intervalos se encuentra la raíz:

a) Si $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[a, x_1]$

b) Si $f(a) \cdot f(x_1) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[x_1, b]$

Definimos entonces el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ aquel donde se verifique que se encuentra la raíz:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} \text{caso a:} & a_1 = a, b_1 = x_1 \\ \text{caso b:} & a_1 = x_1, b_1 = b \end{cases} \quad (23)$$

4) El siguiente valor aproximado de la raíz es el punto medio definido por el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$:

$$x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad x^* \approx x_2 \quad (24)$$

Repetiendo el paso 3 y 4 sucesivamente, el numero de veces que se desee, se obtendrá un mejor valor aproximado de la raíz. Así, el valor aproximado $j+1$ ésima de la raíz queda determinado por el valor:

$$x_{j+1} = \frac{a_j+b_j}{2}, \quad x^* \approx x_{j+1} \quad (25)$$

Precisión:

Si requerimos que la precisión entre valor real de la raíz x^* y el valor aproximado x_j sea menor a un valor dado ε , en necesario realizar al menos un numero j de iteraciones (repeticiones) determinado por la siguiente expresión:

$$\frac{|b-a|}{2^{j+1}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad j > \frac{\ln \left[\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right]}{\ln(2)} - 1 \quad (26)$$

La precisión ε depende del intervalo inicial $[a, b]$.

Problemas de practica.

1) La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por raíz a $x^* = 0.61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$ realiza seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿verifica la precisión obtenida con las seis iteraciones? ¿cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor a 10^{-4} ?

2) Aplica el método de bisección para determinar la raíz cúbica de 17 con un error mínimo de 0.125.

3) Determina de manera aproximada la raíz de la ecuación (problema 1, radiación de cuerpo negro):

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \quad (27)$$

Realiza cinco iteraciones y verifica la precisión de tu aproximación de acuerdo al intervalo inicial que escogiste.

Problema 43

Para explicar la conservación de la energía y del momento lineal en la desintegración β , el físico austriaco Wolfgang Pauli predijo en 1930 la existencia de una partícula de masa nula o prácticamente nula, sin carga eléctrica y con una interacción muy débil con la materia, por lo tanto muy difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi le dio el nombre de *neutrino*. En 1956, Clyde Cowan y Frederick Reines comprobaron experimentalmente su existencia. Desde entonces el interés por los neutrinos ha sido creciente, hasta el punto de llegar a convertirse en piezas fundamentales para entender el Universo en su escala más pequeña, y en elementos básicos para investigar algunos de los problemas candentes de la Astrofísica y de la Cosmología.

Los neutrinos, por carecer de carga, no son desviados por los campos electromagnéticos y apenas son perturbados por la materia que cruzan en su camino. De hecho, enormes cantidades de neutrinos procedentes del cosmos y, en particular del Sol, atraviesan la Tierra cada segundo. Sin embargo, sólo unos pocos interaccionan con algún núcleo dando como resultado la producción de otras partículas: electrones, muones y tauones.

Como más adelante se explica, estas partículas cargadas, si son suficientemente energéticas, provocan la emisión de una luz azulada conocida como *radiación de Cherenkov* (luz característica en las piscinas de almacenamiento de material irradiado de las centrales nucleares). Si el medio en el que se propagan es transparente, como agua o hielo de gran pureza, esta luz se puede detectar y su medida constituye un método indirecto para la detección de neutrinos. Este es el fundamento de buena parte de los observatorios de neutrinos existentes en el mundo. Como la probabilidad de que algún neutrino sea “cazado” es tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño y la masa de los detectores, los “observatorios” de neutrinos son gigantescas instalaciones y su construcción constituye un inmenso reto tecnológico.

En estos ejercicios, de forma muy simplificada, se hace alusión al mayor de ellos, el IceCube Neutrino Observatory, situado en la Antártida, en la base Amundsen-Scott, cercana al Polo Sur geográfico. En este laboratorio se presta especial atención a los muones generados por los neutrinos ya que, mediante un complejo sistema de adquisición de datos, se puede determinar la dirección de propagación y energía de los neutrinos que los han producido.

Básicamente, el IceCube es una red tridimensional de detectores, llamados DOM (Digital Optical Module). Tienen forma esférica y se alojan distribuidos en 86 pozos excavados en el hielo austral. Cada DOM alberga un fotomultiplicador y los equipos electrónicos asociados. Estos se disponen formando cadenas, como se muestra en la figura 1, y están situados a una profundidad entre 1450 m y 2450 m, donde el hielo es extraordinariamente puro y transparente.

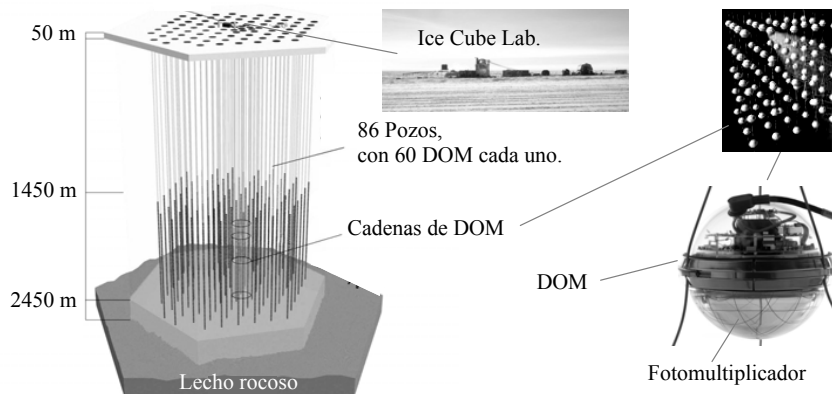


Fig. 1

Parte I, A la caza del neutrino

a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

- a1) Cada pozo tiene una profundidad media $H = 2,40 \times 10^3$ m y un radio $r = 0,30$ m, y la temperatura media del hielo a fundir es $T_h = -30$ °C. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo, E_{\min} , y calcule su valor.

b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones (^1H) que dan lugar a la formación de núcleos de ^4He y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

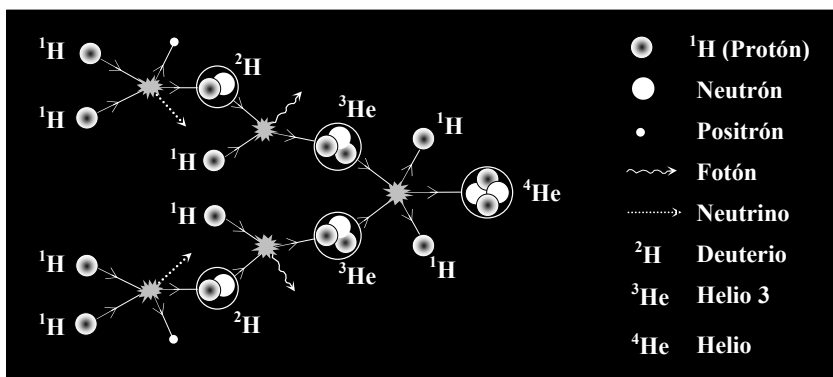


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una pérdida de masa Δm que da lugar a una liberación de energía ΔE . Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

- b1) Escriba la expresión para Δm y calcule la energía liberada en cada ciclo pp, ΔE .

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*, u_s . Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es $u_s = 1,366 \text{ kW/m}^2$

- b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo, N_ν .

c) Neutrinos y muones.

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media², medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$.

- c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón, v_μ , en función de su masa m_μ , de su energía E_μ y de la velocidad de la luz en el vacío, c . Calcule su valor cuando la energía del muón es $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$.

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para “descontarlos”, ya que no han sido originados por neutrinos.

- c2) Calcule la distancia d_μ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J / (kg K)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J / kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg / m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{ST} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa del protón (^1H)	$m_{^1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del núcleo de Helio (^4He)	$m_{^4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ayuda	
Energía mecánica relativista de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v : $E = \gamma m c^2$, donde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$	
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma \tau_0$	

Parte II, La detección indirecta de los neutrinos del IceCube

a) La radiación de Cherenkov.

En las escasas interacciones de los neutrinos con los núcleos del hielo antártico, se originan *muones* que son partículas cargadas relativistas, es decir que viajan con una velocidad próxima a la de luz en el vacío, c . Por tener carga eléctrica, excitan a los átomos de la materia (hielo, en este caso) que encuentran a su paso. Los átomos excitados vuelven casi inmediatamente a su estado fundamental emitiendo luz (radiación de Cherenkov), que se propaga en el hielo con una velocidad menor que c . El hielo tiene un índice de refracción, n_h , dado en la Tabla de Constantes Físicas. La región de emisión (no los átomos) se desplaza con el muón, a velocidad mayor que la de la luz en el hielo. En virtud del principio de Huygens-Fresnel, el frente de onda luminoso resultante es una superficie cónica, como se representa en la figura 3.

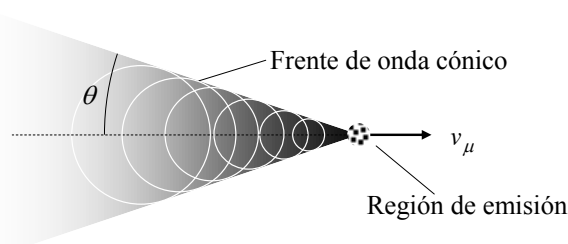


Fig. 3

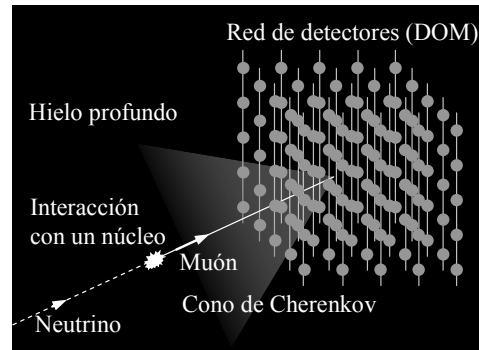


Fig. 4

a1) Escriba la expresión y calcule el semiángulo θ del frente de onda cónico en función de v_μ y de n_h .

b) La detección de la luz de Cherenkov.

La detección de la luz Cherenkov en el IceCube, que constituye la forma indirecta de detección de los neutrinos, se lleva a cabo mediante los 5160 DOM alojados en el hielo profundo (figura 4). En cada DOM existe un *fotomultiplicador* que transforma los fotones de luz de Cherenkov en una señal eléctrica que, una vez digitalizada, se envía al centro de control para ser registrada y analizada.

Aunque los fotomultiplicadores empleados en los DOM tienen una geometría diferente, son básicamente análogos al representado en la figura 5. Un fotomultiplicador consta de un *fotocátodo* que, por efecto fotoeléctrico, emite electrones (*fotoelectrones*) cuando sobre él inciden fotones de energía igual o mayor que la *función de trabajo* (o *energía de extracción*) del material con el que está construido. Un campo eléctrico acelera estos electrones y los dirige hacia un ánodo, que en estos dispositivos recibe el nombre de *dínodo*. La energía de los electrones incidentes provoca la emisión de un número mayor de *electrones secundarios* que son dirigidos hacia un segundo dínodo. El número de dínodos, su disposición y las diferencias de potencial existentes entre ellos, varían con el modelo de fotomultiplicador.

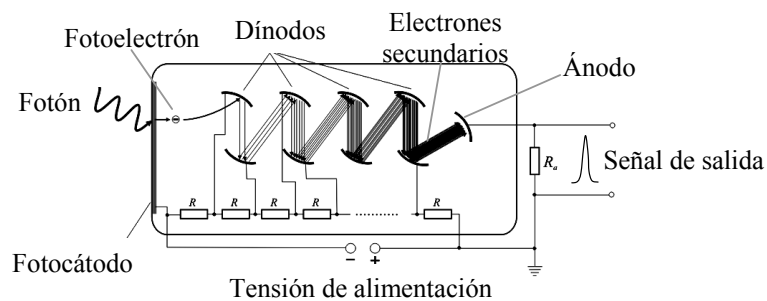


Fig. 5

Al final, tras este proceso en cascada, donde el número de fotoelectrones es multiplicado por las emisiones secundarias, la señal de salida que se obtiene en el último dínodo (ánodo propiamente dicho), es proporcional al número de fotones incidentes en el fotocátodo.

- b1) Teniendo en cuenta la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, determine la función de trabajo del material del fotocátodo, Φ , para que un fotón de luz de Cherenkov, de longitud de onda en el vacío $\lambda = 420 \text{ nm}$, sea capaz de extraer un electrón.
- b2) Si el número de fotones de longitud de onda λ que inciden por unidad de tiempo en el fotocátodo es N_f , determine la energía por unidad de tiempo (potencia, P_f) que estos fotones depositan en el fotocátodo.

Las principales características técnicas de los fotomultiplicadores son: el número de dínodos, n , la *eficiencia cuántica* (Quantum Efficiency), la *sensibilidad radiante* y la *ganancia*.

La eficiencia cuántica, QE , es el porcentaje del número de electrones que salen del fotocátodo por segundo, N_e , respecto al número de fotones que inciden por segundo, N_f .

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

La sensibilidad radiante, S , para una determinada longitud de onda de la luz incidente, es el cociente entre la intensidad de corriente que sale del fotocátodo, I_e , y la potencia de la radiación de fotones que inciden en el fotocátodo, P_f .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

La ganancia, G , se define como el cociente entre la intensidad de corriente que llega al ánodo, I_a , y la que sale del fotocátodo, I_e .

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

- b3) Determine la expresión de la ganancia G del fotomultiplicador en función del número de dínodos, n . Considere que en cada dínodo, en promedio, se producen δ electrones secundarios por cada electrón incidente. Calcule δ para un fotomultiplicador de 10 dínodos con una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$.
- b4) Obtenga la expresión que relaciona la eficiencia cuántica, QE , con la sensibilidad radiante, S .
- b5) Los fotomultiplicadores empleados en el IceCube tienen una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$ y una eficiencia cuántica $QE = 25$. Si inciden fotones Cherenkov de longitud de onda $\lambda = 420 \text{ nm}$, calcule la relación entre la intensidad de corriente I_a que sale del ánodo y la potencia P_f de la radiación incidente.

Constantes físicas	
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
Índice de refracción del hielo	$n_h = 1,32$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elemental	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Problema 44

Partículas provenientes del Sol

(Total de Puntos: 10)

Los fotones provenientes de la superficie del sol y los neutrinos que nos llegan desde su núcleo nos dan información sobre la temperatura solar y confirman que su brillo es debido a reacciones nucleares.

A lo largo de este problema considera que la masa del sol es $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$ kg, su radio, $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8$ m, su luminosidad (energía radiada por unidad de tiempo), $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$ W, y la distancia Tierra-Sol, $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$ m.

Toma en cuenta que:

$$(i) \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

$$(ii) \int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

$$(iii) \int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

A Radiación proveniente del Sol :

A1	Supón que el Sol radia como un cuerpo negro perfecto. Utiliza este hecho para calcular la temperatura, T_s , de la superficie solar.	0.3
----	--	-----

El espectro de la radiación solar puede ser bien aproximado por la ley de distribución de Wien. Así que, la energía solar que incide sobre cualquier superficie en la Tierra por unidad de tiempo y por unidad de intervalo de frecuencias, $u(\nu)$, está dada por

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

donde ν es la frecuencia y A es el área que la superficie presenta de manera perpendicular a la dirección de incidencia de la radiación.

Considera ahora una celda solar que consiste de un disco delgado de material semiconductor de área A , colocado perpendicularmente a los rayos del sol.

A2	Usando la aproximación de Wien, expresa la potencia total P_{in} que incide sobre la celda en términos de A , R_{\odot} , d_{\odot} , T_s , ν , y las constantes fundamentales c , h , k_B .	0.3
A3	Expresa el número de fotones $n_{\gamma}(\nu)$ que inciden sobre la celda por unidad de tiempo por unidad de intervalo de frecuencia en términos de A , R_{\odot} , d_{\odot} , T_s , ν , y las constantes fundamentales c , h , k_B .	0.2

El material semiconductor de la celda solar tiene una “banda prohibida” de energía E_g . Consideraremos un modelo en donde todo fotón de energía $E \geq E_g$ excita un electrón a través de la banda prohibida. Este electrón contribuye con una cantidad E_g de energía útil de salida, mientras que cualquier energía sobrante se disipa en forma de calor (no convertida en energía útil).

A4	Define $x_g = h\nu_g/k_B T_s$ donde $E_g = h\nu_g$. Expresa la potencia útil de salida de la celda, P_{out} , en términos de x_g , A , R_{\odot} , d_{\odot} , T_s y las constantes fundamentales c , h , k_B .	1.0
A5	Expresa la eficiencia η de esta celda solar en términos de x_g .	0.2
A6	Haz un bosquejo cualitativo de η contra x_g . Los valores en $x_g = 0$ y en $x_g \rightarrow \infty$ deben mostrarse claramente. ¿Cuál es la pendiente de $\eta(x_g)$ en $x_g = 0$ y en $x_g \rightarrow \infty$?	1.0
A7	Define x_0 como el valor de x_g para el cual η es máximo. Obtén la ecuación cúbica con la que se encuentra x_0 . Estima numéricamente el valor de x_0 con una precisión de ± 0.25 . Con ello calcula $\eta(x_0)$.	1.0
A8	La banda prohibida del silicio es de $E_g = 1.11$ eV. Calcula la eficiencia η_{Si} de una celda solar de silicio utilizando este valor.	0.2

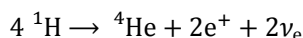
A finales del siglo XIX, Kelvin y Helmholtz (KH) postularon una hipótesis para explicar porque brilla el sol. Postularon que el Sol comenzó como una gran nube de material de masa M_{\odot} con densidad despreciable, y que a partir de entonces el Sol se ha encogido constantemente. De esta manera, el brillo del Sol estaría provisto por la liberación de energía potencial gravitacional durante esta lenta contracción.

A9	Supongamos que la densidad de material es uniforme en el interior del Sol. Encuentra, en términos de G , M_{\odot} y R_{\odot} , la energía potencial gravitacional total del Sol, Ω , al momento actual.	0.3
A10	Estima el tiempo máximo posible, τ_{KH} (en años), por el que el Sol podría haber estado brillando de acuerdo con la hipótesis de KH. Supón que la luminosidad del Sol se ha mantenido constante durante este periodo.	0.5

El τ_{KH} calculado no coincide con la edad del sistema solar estimada por el estudio de meteoritos. Esto muestra que la fuente de energía del Sol no puede ser puramente gravitacional.

B Neutrinos provenientes del Sol:

En 1938, Hans Bethe sugirió que la fusión nuclear de hidrógeno en helio en el núcleo del Sol es la fuente de su energía. La reacción nuclear neta es:



Los “neutrinos del electrón”, ν_e , producidos en esta reacción se pueden considerar con masa igual a cero. Estos neutrinos escapan del Sol y su detección en la Tierra confirma que la reacción nuclear antes mencionada ocurre en el interior del Sol. La energía portada por los neutrinos puede ser ignorada en este problema.

B1	Calcula la densidad de flujo, Φ_{ν} , del número de neutrinos que llegan a la tierra, en unidades de $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. La energía liberada en la reacción anterior es de $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}\text{ J}$. Supón que la energía liberada por el sol se debe en su totalidad a esta reacción.	0.6
----	--	-----

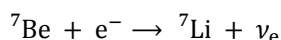
En el viaje desde el núcleo del Sol a la Tierra, algunos de los neutrinos del electrón, ν_e , se convierten en otros tipos de neutrinos, ν_x . La eficiencia del detector para detectar ν_x es 1/6 de su eficiencia para detectar ν_e . De no haber conversión de neutrinos, esperaríamos detectar un promedio de N_1 neutrinos en un año. Sin embargo, dada la conversión, en la práctica un promedio de N_2 neutrinos (ν_e y ν_x sumados) son detectados por año.

B2	En términos de N_1 y N_2 , calcula la fracción, f , de ν_e que se convierte en ν_x .	0.4
----	--	-----

Para detectar neutrinos se construyen grandes detectores llenos de agua. Aunque la interacción de los neutrinos con la materia es escasa, ocasionalmente estos arrancan un electrón de las moléculas de agua del detector. Estos electrones energéticos se mueven en el agua a altas velocidades, emitiendo radiación electromagnética en el proceso. Mientras la velocidad de estos electrones sea más grande que la de la luz en el agua (índice de refracción n), esta radiación, llamada radiación de Cherenkov, se emite en forma de cono.

B3	Supón que un electrón arrancado por un neutrino pierde energía a una tasa de α por unidad de tiempo mientras viaja en el agua. Si uno de estos electrones emite radiación de Cherenkov por un tiempo Δt , determina, en términos de α , Δt , n , m_e y c , la energía ($E_{\text{transmitida}}$) transmitida por el neutrino a este electrón. (Supón que el electrón estaba en reposo antes de interactuar con el neutrino.)	2.0
----	--	-----

La fusión de H en He al interior del Sol ocurre en varios pasos. Núcleos de ^7Be (con masa en reposo, m_{Be}) son producidos en uno de estos pasos intermedios. Subsecuentemente, este núcleo puede absorber un electrón, produciendo un núcleo ^7Li (con masa en reposo, $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$) y emitiendo un ν_e . La reacción nuclear correspondiente es:



Cuando un núcleo de Be ($m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}\text{ kg}$) se encuentra en reposo y absorbe un electrón también en reposo, el neutrino emitido tiene energía $E_{\nu} = 1.44 \times 10^{-13}\text{ J}$. Sin embargo, los núcleos de Be se encuentran en movimiento termal aleatorio debido a la temperatura T_c en el núcleo del Sol, y actúan como fuentes de neutrinos en movimiento. En consecuencia, la energía de los neutrinos emitidos fluctúa con un valor de root mean square (rms) (raíz media cuadrática) ΔE_{rms} .

B4	Si $\Delta E_{rms} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$, calcula la velocidad rms de los núcleos de Be, V_{Be} y así estima T_c . (Pista: ΔE_{rms} depende del valor de la rms de la componente de la velocidad en la dirección de la línea de observación).	2.0
----	--	-----