

Tarea 7

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF

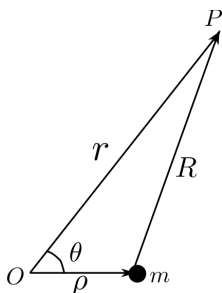
ENTRENAMIENTO 2015

Fecha de entrega: martes 14 de abril 2015.

Problema 18

Una cuerpo de masa m se encuentra a una distancia ρ de un origen O usando como referencia (ver figura). Demostrar que el potencial gravitacional en P , debido al cuerpo de masa m , a una distancia R del cuerpo ($R \gg \rho$) puede expresarse en función de la distancia $OP = r$ y el ángulo θ por la serie:

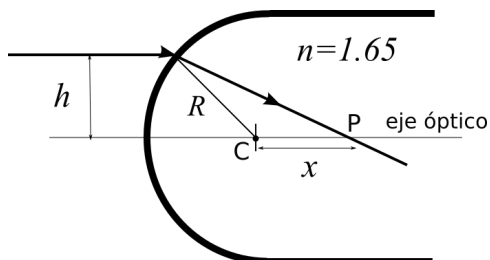
$$V = -\frac{Gm}{r} \left[1 + \frac{\rho \cos \theta}{r} + \frac{\rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^2} + \dots \right] \quad (1)$$



Problema 19, óptica.

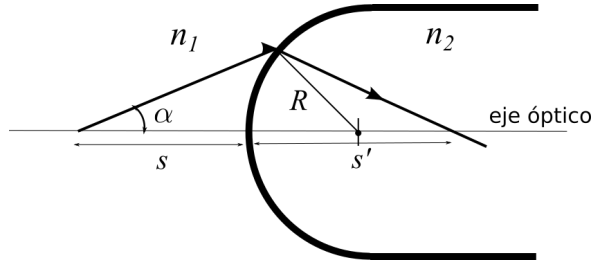
19.1 Una superficie semiesférica de radio $R = 0.1$ m separa dos medios transparentes. Uno es aire y el otro una sustancia de índice de refracción $n = 1.65$. Un rayo paralelo al eje principal a la altura h , medida desde el eje óptico, incide sobre la superficie y penetra en el medio de índice n . El rayo corta al eje principal en un punto P que dista una longitud x del centro de la superficie esférica C.

- a) Calcular la relación entre la distancia x a la cual el rayo corta al eje principal y la altura h con la cual incide el rayo.



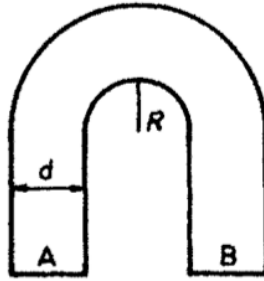
- b) Para un rayo que incide con ángulo α en la zona paraxial (donde el ángulo α es muy pequeño) como se muestra en la siguiente figura, demuestra que se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2)$$



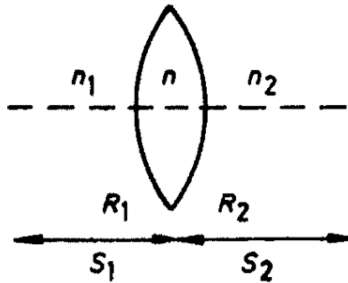
c) Desde el interior de una pecera esférica de 50 cm de diámetro, un pez observa un libro que se encuentra a 20 cm de la superficie de la pecera. Si el índice de refracción del agua es de 1.33, ¿A qué distancia verá el pez el libro?

19.2 Se tiene una barra de vidrio en forma de herradura y de sección transversal cuadrada, de lado d , como se muestra en la figura. Un haz de luz incide de manera perpendicular a la superficie A. Determina el valor mínimo de la razón R/d para el cual toda la luz que entra por la superficie A emerge por la superficie B de la barra de vidrio, el índice de refracción del vidrio es 1.5.



19.3 Una lente con índice de refracción n y radios de curvatura R_1 y R_2 se coloca entre dos medios de índice de refracción n_1, n_2 , ver figura. Si S_1 y S_2 corresponde a la distancia del objeto y de su imagen respectivamente y f_1, f_2 es la longitud focal de cada una de las superficies. Muestra que se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{f_1}{S_1} + \frac{f_2}{S_2} = 1 \quad (3)$$

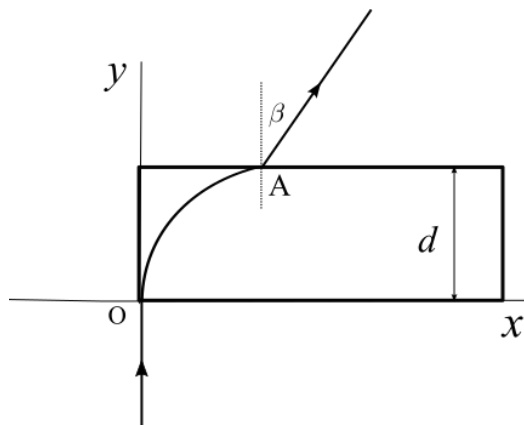


19.4 Un bloque rectangular esta hecho con un material cuyo índice de refracción varía en la dirección longitudinal, si se colocan los ejes de coordenadas de acuerdo a la figura de abajo, entonces el índice de refracción del bloque se puede escribir como:

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - x/r} \quad (4)$$

donde $n_0 = 1.2$ y $r = 13$ cm es una distancia característica del material, el espesor del bloque es d . Como se muestra en la figura, un haz de luz incide de manera perpendicular en la cara inferior del bloque en una de las esquinas (en el punto O), el haz es desviado dentro del material hasta que emerge en el punto A de la cara superior del bloque, en este punto el rayo es refractado con un ángulo $\beta = 30^\circ$.

- a) Determina el valor del índice de refracción del bloque en el punto A donde emerge el haz de luz el valor.
- b) Con la información de que dispones, determina el espesor del bloque d .



Problema 20, modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

En 1913 Bohr propuso un modelo para describir el átomo de hidrógeno que fue motivado por dos ideas principales: el modelo planetario de Rutherford y la hipótesis cuántica de Einstein y Planck. Rutherford basándose en sus resultados experimentales había propuesto un modelo “planetario” para la estructura del átomo de hidrógeno; es decir, un núcleo formado por el protón y girando alrededor de éste, el electrón. Por otra parte, los trabajos de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico y el de Planck sobre la radiación de cuerpo negro habían establecido la cuantización de la energía.

Bohr toma estas dos ideas como parte central de su modelo del átomo de hidrógeno y establece los siguientes postulados:

- I El electrón se mueve alrededor del núcleo en **órbitas circulares estacionarias** debido a la fuerza electrostática con el protón.
- II Las únicas órbitas posibles sobre las que se mueve el electrón son tales que el momento angular del electrón está *cuantizado*; es decir, solo puede tomar los siguientes valores:

$$L = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

donde se define $\hbar \equiv h/2\pi$, siendo $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ la constante de Planck. El *número cuántico* n denota los posibles *estados cuánticos* del electrón en el átomo de hidrógeno.

En ausencia de campos externos el electrón ocupa el estado de menor energía (el *estado base* corresponde a $n = 1$)

- II La emisión o absorción de luz (un fotón) se presenta cuando el electrón cambia de órbita, se dice entonces que el átomo realiza una transición. El cambio de energía del átomo en la transición está relacionada con la frecuencia del fotón ν , que se emite *emite* o *absorbe*:

$$\nu = \frac{|\Delta E|}{h} \quad (6)$$

Si el electrón pasa de una órbita de mayor a menor energía entonces el átomo emite un fotón; en caso contrario, cuando el átomo absorbe un fotón el electrón realiza una transición de un estado de menor a mayor energía.

Ejercicios:

- a) Calcula el radio de las órbitas estacionarias del electrón (es decir encuentra una expresión del radio en términos del número cuántico n). El primer valor $n = 1$, corresponde al radio de Bohr $a_0 = 5.3 \times 10^{-11}$ m.

- b) Demuestra que la velocidad del electrón en las órbitas estacionarias, esta dada por:

$$v_n = \frac{\alpha}{n} c \quad (7)$$

donde $\alpha \approx 1/137$ y $c = 299,792,458$ m/s $\approx 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Calcula el valor de la velocidad del electrón en el estado base.

- c) Encuentra los valores de la energía E_n del electrón en cada una de las órbitas estacionarias en términos del número n , esto corresponde a la cuantización de la energía para el átomo de hidrógeno.

- d)Cuál es el valor de la energía en el estado base $n = 1$, exprésala en unidades de electronvolts.

- e) Demuestra que la longitud de onda de los fotones emitidos por el electrón al pasar de un estados cuántico inicial con número n al estado final con $n' = 2$ ($n > n'$), esta dada por la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (8)$$

donde debes determinar la expresión de λ_e y calcular su valor numérico en metros (nota que tiene unidades de longitud).

Introducción

Para explicar la conservación de la energía y del momento lineal en la desintegración β , el físico austriaco Wolfgang Pauli predijo en 1930 la existencia de una partícula de masa nula o prácticamente nula, sin carga eléctrica y con una interacción muy débil con la materia, por lo tanto muy difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi le dio el nombre de *neutrino*. En 1956, Clyde Cowan y Frederick Reines comprobaron experimentalmente su existencia. Desde entonces el interés por los neutrinos ha sido creciente, hasta el punto de llegar a convertirse en piezas fundamentales para entender el Universo en su escala más pequeña, y en elementos básicos para investigar algunos de los problemas candentes de la Astrofísica y de la Cosmología.

Los neutrinos, por carecer de carga, no son desviados por los campos electromagnéticos y apenas son perturbados por la materia que cruzan en su camino. De hecho, enormes cantidades de neutrinos procedentes del cosmos y, en particular del Sol, atraviesan la Tierra cada segundo. Sin embargo, sólo unos pocos interaccionan con algún núcleo dando como resultado la producción de otras partículas: electrones, muones y tauones.

Como más adelante se explica, estas partículas cargadas, si son suficientemente energéticas, provocan la emisión de una luz azulada conocida como *radiación de Cherenkov* (luz característica en las piscinas de almacenamiento de material irradiado de las centrales nucleares). Si el medio en el que se propagan es transparente, como agua o hielo de gran pureza, esta luz se puede detectar y su medida constituye un método indirecto para la detección de neutrinos. Este es el fundamento de buena parte de los observatorios de neutrinos existentes en el mundo. Como la probabilidad de que algún neutrino sea “cazado” es tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño y la masa de los detectores, los “observatorios” de neutrinos son gigantescas instalaciones y su construcción constituye un inmenso reto tecnológico.

En estos ejercicios, de forma muy simplificada, se hace alusión al mayor de ellos, el IceCube Neutrino Observatory, situado en la Antártida, en la base Amundsen-Scott, cercana al Polo Sur geográfico. En este laboratorio se presta especial atención a los muones generados por los neutrinos ya que, mediante un complejo sistema de adquisición de datos, se puede determinar la dirección de propagación y energía de los neutrinos que los han producido.

Básicamente, el IceCube es una red tridimensional de detectores, llamados DOM (Digital Optical Module). Tienen forma esférica y se alojan distribuidos en 86 pozos excavados en el hielo austral. Cada DOM alberga un fotomultiplicador y los equipos electrónicos asociados. Estos se disponen formando cadenas, como se muestra en la figura 1, y están situados a una profundidad entre 1450 m y 2450 m, donde el hielo es extraordinariamente puro y transparente.

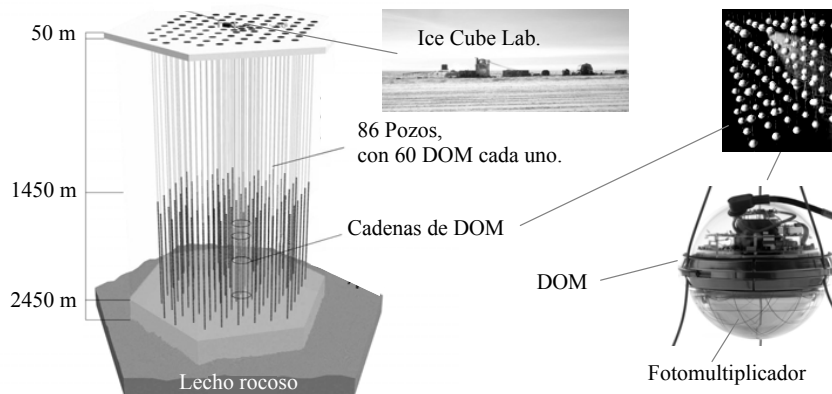


Fig. 1

Problema 21

a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

- a1) Cada pozo tiene una profundidad media $H = 2,40 \times 10^3$ m y un radio $r = 0,30$ m, y la temperatura media del hielo a fundir es $T_h = -30$ °C. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo, E_{\min} , y calcule su valor.

b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones (^1H) que dan lugar a la formación de núcleos de ^4He y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

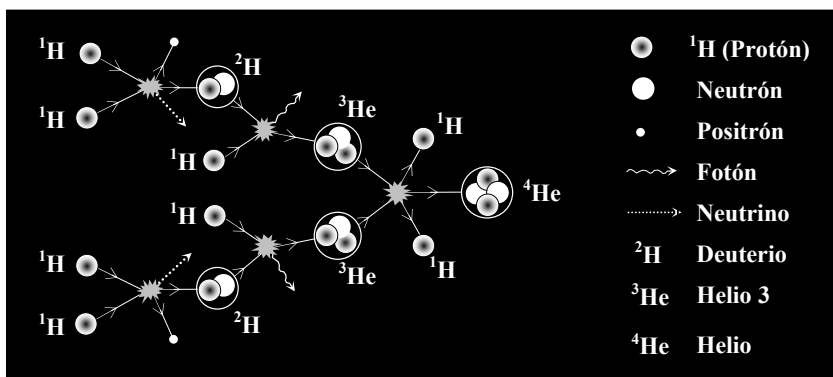


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una pérdida de masa Δm que da lugar a una liberación de energía ΔE . Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

- b1) Escriba la expresión para Δm y calcule la energía liberada en cada ciclo pp, ΔE .

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*, u_S . Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es $u_S = 1,366 \text{ kW/m}^2$

- b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo, N_ν .

c) Neutrinos y muones.

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media², medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$.

- c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón, v_μ , en función de su masa m_μ , de su energía E_μ y de la velocidad de la luz en el vacío, c . Calcule su valor cuando la energía del muón es $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$.

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para “descontarlos”, ya que no han sido originados por neutrinos.

- c2) Calcule la distancia d_μ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J / (kg K)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J / kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg / m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{ST} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa del protón (^1H)	$m_{^1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del núcleo de Helio (^4He)	$m_{^4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ayuda	
Energía mecánica relativista de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v : $E = \gamma m c^2$, donde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$	
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma \tau_0$	

Problema 22

a) La radiación de Cherenkov.

En las escasas interacciones de los neutrinos con los núcleos del hielo antártico, se originan *muones* que son partículas cargadas relativistas, es decir que viajan con una velocidad próxima a la de luz en el vacío, c . Por tener carga eléctrica, excitan a los átomos de la materia (hielo, en este caso) que encuentran a su paso. Los átomos excitados vuelven casi inmediatamente a su estado fundamental emitiendo luz (radiación de Cherenkov), que se propaga en el hielo con una velocidad menor que c . El hielo tiene un índice de refracción, n_h , dado en la Tabla de Constantes Físicas. La región de emisión (no los átomos) se desplaza con el muón, a velocidad mayor que la de la luz en el hielo. En virtud del principio de Huygens-Fresnel, el frente de onda luminoso resultante es una superficie cónica, como se representa en la figura 3.

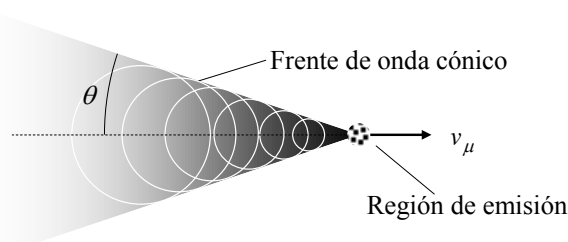


Fig. 3

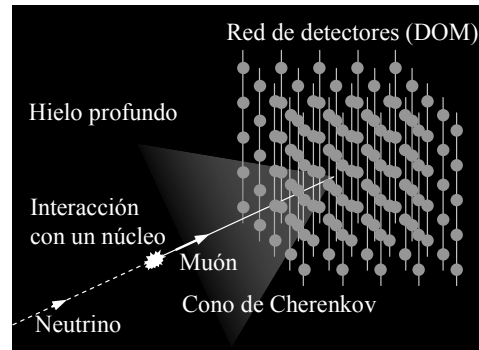


Fig. 4

a1) Escriba la expresión y calcule el semiángulo θ del frente de onda cónico en función de v_μ y de n_h .

b) La detección de la luz de Cherenkov.

La detección de la luz Cherenkov en el IceCube, que constituye la forma indirecta de detección de los neutrinos, se lleva a cabo mediante los 5160 DOM alojados en el hielo profundo (figura 4). En cada DOM existe un *fotomultiplicador* que transforma los fotones de luz de Cherenkov en una señal eléctrica que, una vez digitalizada, se envía al centro de control para ser registrada y analizada.

Aunque los fotomultiplicadores empleados en los DOM tienen una geometría diferente, son básicamente análogos al representado en la figura 5. Un fotomultiplicador consta de un *fotocátodo* que, por efecto fotoeléctrico, emite electrones (*fotoelectrones*) cuando sobre él inciden fotones de energía igual o mayor que la *función de trabajo* (o *energía de extracción*) del material con el que está construido. Un campo eléctrico acelera estos electrones y los dirige hacia un ánodo, que en estos dispositivos recibe el nombre de *dínodo*. La energía de los electrones incidentes provoca la emisión de un número mayor de *electrones secundarios* que son dirigidos hacia un segundo dínodo. El número de dínodos, su disposición y las diferencias de potencial existentes entre ellos, varían con el modelo de fotomultiplicador.

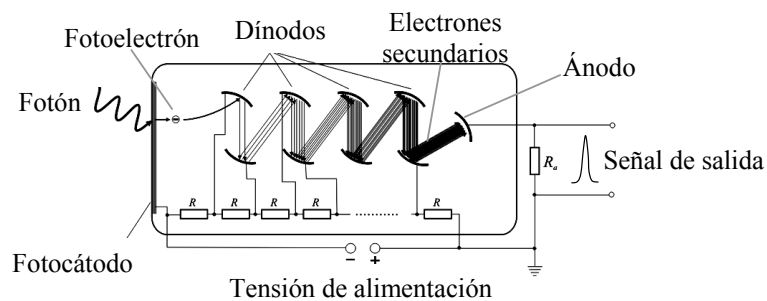


Fig. 5

Al final, tras este proceso en cascada, donde el número de fotoelectrones es multiplicado por las emisiones secundarias, la señal de salida que se obtiene en el último dínodo (ánodo propiamente dicho), es proporcional al número de fotones incidentes en el fotocátodo.

- b1) Teniendo en cuenta la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, determine la función de trabajo del material del fotocátodo, Φ , para que un fotón de luz de Cherenkov, de longitud de onda en el vacío $\lambda = 420 \text{ nm}$, sea capaz de extraer un electrón.
- b2) Si el número de fotones de longitud de onda λ que inciden por unidad de tiempo en el fotocátodo es N_f , determine la energía por unidad de tiempo (potencia, P_f) que estos fotones depositan en el fotocátodo.

Las principales características técnicas de los fotomultiplicadores son: el número de dínodos, n , la *eficiencia cuántica* (Quantum Efficiency), la *sensibilidad radiante* y la *ganancia*.

La eficiencia cuántica, QE , es el porcentaje del número de electrones que salen del fotocátodo por segundo, N_e , respecto al número de fotones que inciden por segundo, N_f .

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

La sensibilidad radiante, S , para una determinada longitud de onda de la luz incidente, es el cociente entre la intensidad de corriente que sale del fotocátodo, I_e , y la potencia de la radiación de fotones que inciden en el fotocátodo, P_f .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

La ganancia, G , se define como el cociente entre la intensidad de corriente que llega al ánodo, I_a , y la que sale del fotocátodo, I_e .

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

- b3) Determine la expresión de la ganancia G del fotomultiplicador en función del número de dínodos, n . Considere que en cada dínodo, en promedio, se producen δ electrones secundarios por cada electrón incidente. Calcule δ para un fotomultiplicador de 10 dínodos con una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$.
- b4) Obtenga la expresión que relaciona la eficiencia cuántica, QE , con la sensibilidad radiante, S .
- b5) Los fotomultiplicadores empleados en el IceCube tienen una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$ y una eficiencia cuántica $QE = 25$. Si inciden fotones Cherenkov de longitud de onda $\lambda = 420 \text{ nm}$, calcule la relación entre la intensidad de corriente I_a que sale del ánodo y la potencia P_f de la radiación incidente.

Constantes físicas	
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
Índice de refracción del hielo	$n_h = 1,32$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elemental	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Problema 23, relatividad.

Problemas del capítulo de relatividad:

37.7 Una nave espacial se aleja volando de la Tierra con una

37.11 ¿Por qué somos bombardeados por los muones?

37.18 La ecuación 37.23 da la transformación sólo para la componente x ...

37.24 Rescriba la ecuación 37.25 para determinar la velocidad

37.27 a) una partícula de masa m se desplaza a lo largo de

37.32 Aniquilación. En una aniquilación de protón/antiprotón,

37.44 Creación de una partícula. Dos protones (cada uno con