Problema 1, Kepler

2.1 Los satélites pueden ponerse a diferentes alturas sobre la superficie de la tierra, dependiendo de los propósitos del satélite. Por ejemplo una órbita con una altura de 300 km sobre la superficie terrestre se le conoce como LEO por sus siglas en ingles: *Low Earth Orbital* (órbita cercana terrestre).

2.1a) Calcula el periodo del satélite en una órbita LEO.

2.1b) Un satélite *geosíncrono* órbita la tierra en su plano ecuatorial con un periodo de 24 hrs. De tal manera que se ve como un punto fijo sobre la tierra. ¿Cuál es el radio del satélite?

Datos de la tierra: $R_t = 6{,}3 \times 10^6$ m, $M_t = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg,

2.2 Para colocar un satélite en una órbita geosíncrona se hace en dos etapas: primero se lanza cerca de una órbita LEO usando apropiadamente el combustible del cohete de la fase de propulsión. Entonces se enciende la fase de propulsión y el satélite es transferido a una órbita elíptica diseñada para que tome la órbita geosíncrona cuya altitud coincide con el apogeo de la elipse (ver figura). En el apogeo, la fase de propulsión es encendida otra vez para salir de la órbita elíptica y ponerse en la órbita geosíncrona. Este mecanismo requiere dos impulsos a través de un cambio de la velocidad Δv_1 y Δv_2

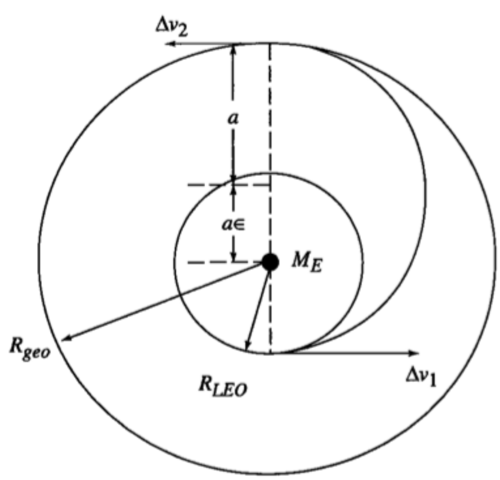
2.2a) Δv_1 para mover el satélite desde su órbita circular LEO R_{LEO}, hasta ponerlo en la órbita elíptica. Calcula el valor de Δv_1

Respuesta: $\Delta v_1 = 8,600$ km/hr

2.2b) Δv_2 para transformar la órbita elíptica, en que se encuentra el satélite, en la órbita circular geosíncrona. Calcula el valor de Δv_2

Respuesta: $\Delta v_2 = 5,269$ km/hr

Datos: $R_{LEO} = 6,693$ km, $R_{geo} = 42,400$ km



Esto te puede servir.

energía de un cuerpo en un campo de potencial gravitacional $U(r) = -k/r$:

$$E = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{k}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a} \qquad (1)$$

donde $k = GMm$ y L es el momento angular del cuerpo que se mantiene constante.

(**Demuestra** la última igualdad de la energía: $E = -k/2a$)

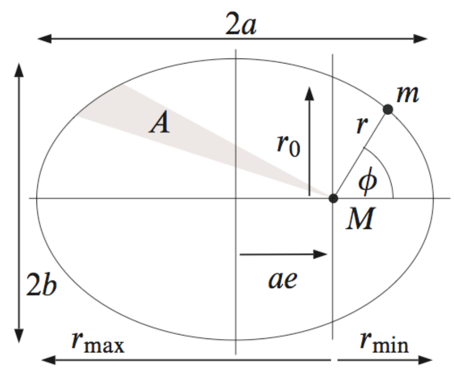
Excentricidad de la orbita (conica) en terminos de la energía y el momento angular:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{k}\right)^2} = \begin{cases} E < 0 & \epsilon < 1 & \text{elipse (circulo)} \\ E = 0 & \epsilon = 1 & \text{parábola} \\ E > 0 & \epsilon > 1 & \text{hipérbola} \end{cases} \qquad (2)$$

relación entre el momento angular con el semi-lado recto r_0:

$$r_0 = \frac{L^2}{mk} \qquad (3)$$

ecuación de un conica (coordenas polares)



$$\begin{aligned} r &= \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos\theta} = \frac{a\left(1-\epsilon^2\right)}{1+\epsilon\cos\theta} \\ \epsilon &= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \\ r_0 &= \frac{b^2}{a} = a\left(1-\epsilon^2\right) \\ r_{min} &= \frac{r_0}{1+\epsilon} = a\,(1-\epsilon) \\ r_{max} &= \frac{r_0}{1-\epsilon} = a\,(1+\epsilon) \end{aligned} \qquad (4)$$

a	semieje mayor
b	semieje menor
ϵ	excentricidad
r_0	semi lado recto
r_{min}	dist. foco-perigeo
r_{max}	dist. foco-apogeo

Repaso relatividad

$$\text{transformaciones de Lorentz} \qquad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \\ \beta &\equiv \frac{v}{c} \leq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

	sistema **S**	sistema **S'**
evento E_1	$(x_1,\, t_1)$	$(x_1', t_1') = \begin{cases} x_1' &= \gamma\,(x_1 - vt_1) \\ t_1' &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c2}x_1\right) \end{cases}$
evento E_2	$(x_2,\, t_2)$	$(x_2', t_2') = \begin{cases} x_2' &= \gamma\,(x_2 - vt_2) \\ t_2' &= \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c2}x_2\right) \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_1' - x_2' &= \gamma\,(x_1 - x_2) - \gamma v\,(t_1 - t_2) \\ t_1' - t_2' &= \gamma\,(t_1 - t_2) - \gamma\frac{v}{c^2}\,(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Si los eventos son simultaneos en **S** : $\quad t_1 - t_2 = 0$

$\Rightarrow$ en general NO son simultaneos en $\mathbf{S}'$: (6)

$$t_1' - t_2' = \gamma\frac{v}{c^2}\,(x_2 - x_1)$$

Si ocurren en el mismo lugar en **S** : $\quad x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow$ en general NO ocurren en el mismo lugar en $\mathbf{S}'$: (7)

$$x_1' - x_2' = -\gamma v\,(t_1 - t_2)$$

dilatación del tiempo

Sean dos eventos que ocurre en el mismo sitio en el sistema **S**, $(x_1 - x_2 = 0)$ entonces:

$$\begin{aligned} &\text{sistema } \mathbf{S} && \Delta t = t_2 - t_1 \\ &\text{sistema } \mathbf{S}' && \Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\Delta t \end{aligned} \qquad \Delta t' > \Delta t \tag{8}$$

El intervalo de tiempo para un observador en movimiento es más lento respecto del tiempo medido por un observador en reposo.

contracción de Lorentz

Sea $L_0 = x_2' - x_1'$ una distancia medida en el sistema $\mathbf{S}'$, $(t_1 - t_2 = 0)$ entonces:

$$\begin{aligned} &\text{sistema } \mathbf{S}' && L_0 \equiv x_2' - x_1' \\ &\text{sistema } \mathbf{S} && L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}L_0 \end{aligned} \qquad L_0 \leq L \tag{9}$$

una barra moviendose esta contraida respecto de un observador en reposo

$$\begin{array}{c}\text{transformación}\\ \text{de velocidades}\end{array} \begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}v_x} \\[2ex] v_y' = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}v_x\right)} \\[2ex] v_z' = \dfrac{v_{xz}}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}v_x\right)} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{array}{c}\text{transformación}\\ \text{de angulos}\end{array} \begin{cases} \tan\theta' = \dfrac{\sin\theta}{\gamma\,(\cos\theta - \beta/\beta_0)} \\[2ex] \tan\theta = \dfrac{\sin\theta'}{\gamma\,(\cos\theta' - \beta/\beta_0')} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \text{vector de momento lineal} \quad & \mathbf{p} \equiv \gamma\, m\mathbf{v} \\ \text{energía relativista} \quad & E \equiv \gamma\, mc^2 \\ \text{cuadrivector de momento} \quad & P_\mu \equiv (E/c, \mathbf{p}) \end{aligned} \tag{12}$$

Donde m es masa de la partícula, algunos libros la denotan como m_0 y le denominan *masa en reposo* o *masa propia*; el vector velocidad esta dado por su expresión clásica: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\begin{aligned} \text{energía en reposo} \quad & E_0 \equiv mc^2 \\ \text{energía cinética} \quad & E_k \equiv E - E_0 = mc^2\,(\gamma - 1) \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} \end{aligned} \tag{13}$$

De las definiciones del momento lineal y la energía relativistas, ecuación (12), se puede obtener la relación entre la energía y el momento de una partícula:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4}\right) \tag{14}$$

Ejercicios para desarrollar:

1 Sean dos eventos: E_1 de coordenadas (ct_1, x_1, y_1, z_1) y E_2 de coordenadas (ct_2, x_2, y_2, z_2). Demuestra que la siguiente cantidad:

$$I = -c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{15}$$

es un invariante, es decir demuestra la siguiente igualdad:

$$-c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -c\left(t_2' - t_1'\right)^2 + \left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2 \tag{16}$$

La cantidad definida en (15) representa el *intervalo* entre los dos eventos E_1 y E_2. Dependiendo de los eventos el intervalo puede representar los siguientes casos:

i) Si $I < 0$, se le denomina intervalo temporaloide (*timelike*)

ii) Si $I > 0$, se le denomina intervalo espacialoide (*spacelike*)

iii) Si $I = 0$, se le denomina intervalo luminoide (*lightlike*)

Si el evento E_1 es el origen, y nos limitamos a una dimensión espacial x, entonces el intervalo $I = -ct^2 + x^2 = -ct'^2 + x'^2$ representan una familia de hipérbolas, una para cada valor de I, representadas en el diagrama de Minkowski.

2 Demustra la última expresión de la energía cinética, ecuación (13), que representa una aproximación cuando $\beta \ll 1$. El primer término de la aproximación corresponde a la energía cinética clásica.

3 A partir de las definiciones del momento y la energía, ecuación (12), obten la relación energía-momento: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Deduce también la última expresión de la ecuación (14), que corresponden a la aproximación cuando $\beta \ll 1$.

4 Deduce la ecuación de la transformación de angulos, ecuación (11)

Problema 2, Relatividad

2.1 En la ecuación de la transformación de la velocidad v_x (primer ecuación de (10)), demuestra que si $v_x < c$ y $v < c$ entonces $v_x' < c$.

2.2 Se tienen dos eventos: E_1 de coordenadas $(ct_1, x_1, 0, 0)$ y E_2 de coordenadas $(ct_2, x_2, 0, 0)$, suponiendo que el intervalo entre ambos eventos es de tipo espacialoide, encuentra la velocidad del sistema en el cual ambos eventos son simultáneos.

2.3 Sea S un sistema inercial fijo y S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema fijo. De acuerdo al principio de relatividad galileana (mecánica clásica), la adición de velocidades esta dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \tag{17}$$

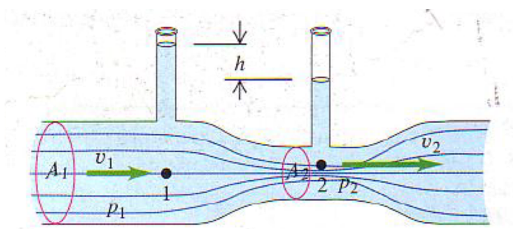
Considera la siguiente colisión simétrica en el sistema fijo S: una partícula A de masa m_A y velocidad $\mathbf{v}_A$ colisiona con otra partícula B, masa m_B y velocidad $\mathbf{v}_B$. Durante la colisión la masa de las partículas A y B se transforma dando lugar a otro par de partículas C y D , de masas m_C, m_D con velocidades velocidades v_C, v_D respectivamente. Asumiendo que el momento lineal total durante la colisión se conserva en el sistema S:

i) Demuestra que el momento lineal total se conserva también en el sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema S.

ii) Suponiendo que la colisión es elástica en el sistema S; muestra que también es elástica en el sistema S'

Problema 3

a) La siguiente figura representa un dispositivo donde fluye cierto liquido, el dispositivo es un tubo de forma cilíndrica, pero que en su parte central la sección transversal es más angosta, esta parte del tubo se llama *garganta*. El tubo tiene además dos tubos más pequeños con la parte superior abierta como se muestra en la figura. De acuerdo a los datos geométricos que se muestran en la figura y a partir de la ecuación de Bernoulli, determina la rapidez del flujo v_1 en la parte más ancha del tubo. ¿En que parte del tubo es mayor la presión, en la garganta o en la sección más ancha del tubo?



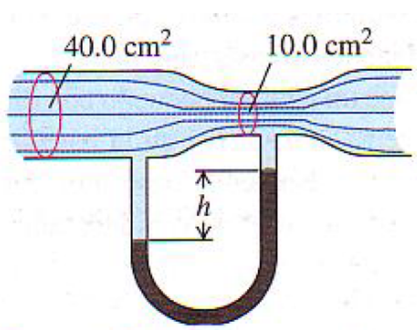
En la siguiente figura se muestra otro dispositivo parecida al anterior. El área transversal del dispositivo es 40 cm^2 en su parte más ancha y 10 cm^2 en su parte más angosta. En el dispositivo fluye agua con una descarga de $6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 6$ L/s.

Calcula:

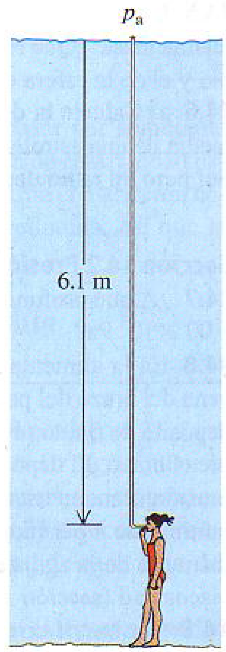
a.1) La rapidez de flujo en las ambas partes del tubo, la ancha y la angosta.

a.2) La diferencia de presión entre ambas partes del tubo.

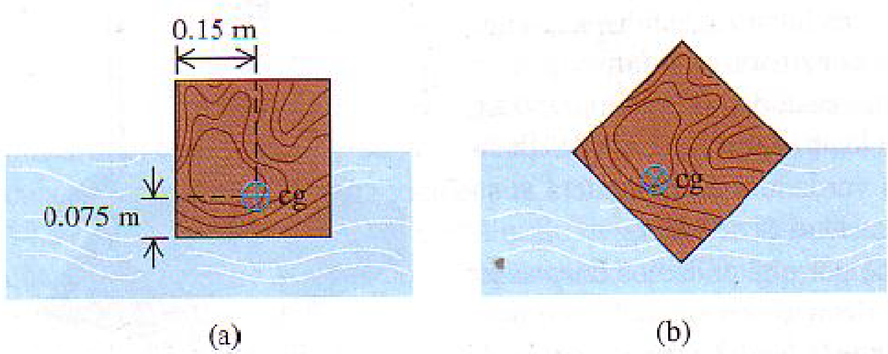
a.3) La diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U



b) Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un snorkel, esto se debe al aumentar la profundidad la diferencia de presión tiende a colapsar los pulmones. Dado que el snorkel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcula la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce (un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayor profundidades que uno que usa snorkel porque la presión dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).



c) Un bloque cúbico de madera de 0.3 m por lado tiene pesos que hacen que su centro de gravedad esté en el punto que se indica en la figura de abajo. El bloque flota en agua con la mitad de su volumen sumergido, el bloque se ladea con un ángulo de 45°, calcula la torca o momento de torsión neto respecto de un eje horizontal perpendicular al bloque y que pasa por su centro geométrico.



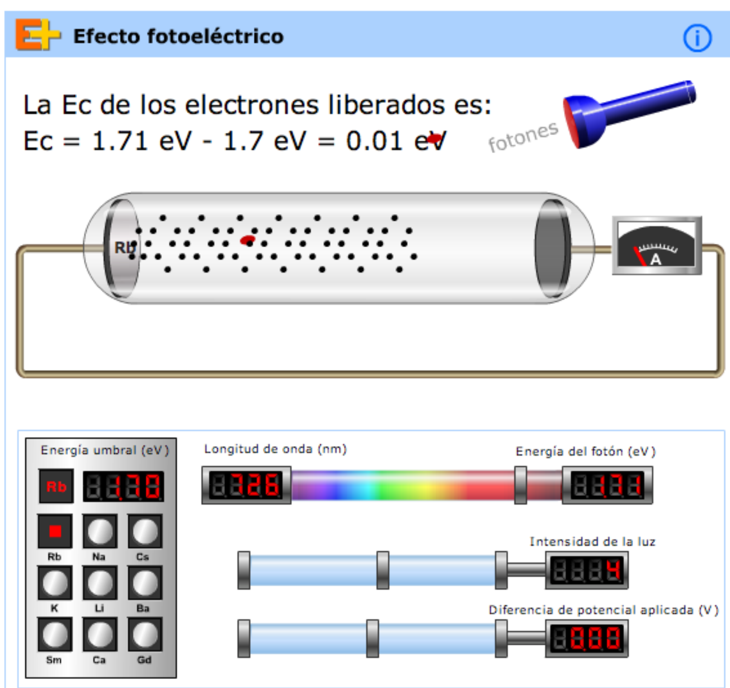
Problema 4, Efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico es un fenómeno en el que se pone de manifiesto una de las propiedades cuánticas de la materia, este fenómeno consiste esencialmente en la emisión de electrones de una superficie metálica cuando incide sobre ella radiación electromagnética. Una de las principales propiedades que se observa en el efecto fotoeléctrico es que solamente se emiten electrones de la superficie metálica cuando se ilumina con ciertos valores específicos de la longitud de onda de la radiación incidente y que la emisión de los electrones no depende de la intensidad de la luz. Como se explica en el sitio indicado más abajo, el efecto fotoeléctrico provee una manera de medir experimentalmente el valor de la constante de Planck $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

En el siguiente enlace:
`http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/fotoelectrico/fotoelectrico.htm`
se da una explicación del efecto fotoeléctrico muy ilustrativa, donde además, se pueden simular datos experimentales. Lee con atención la explicación que se da sobre el efecto fotoeléctrico y realiza la practica que se planeta en el sitio.

En la actividad del sitio se puede ver directamente una gráfica a partir de los datos simulados. Sin embargo, mas acorde al entrenamiento de olimpiadas de física, realiza un **análisis gráfico en papel milimétrico** a partir de los "datos" simulados que puedes obtener del sitio y determina el valor de la constante de Planck a partir del análisis gráfico (si sabes como, reporta también la incertidumbre asociada).

Aquí les dejo otro sitio de la simulación del efecto fotoeléctrico en el cual también es posible obtener "datos" simulados a partir de los cuales se puede hacer el análisis gráfico para determinar la constante de Planck. `http://www.educaplus.org/play-112-Efecto-fotoeléctrico.html`



Progresión Geométrica.

Una sucesión de números reales es una progresión geométrica (PG) si el cociente de cada término con el anterior es constante. Esta constante se llama razón común y la denotaremos con la letra r. Para que una PG quede completamente definida, debemos especificar el primer término de la progresión que denotaremos a_1 y la razón común r. De esta manera el n-esimo término de la progresión queda establecido por $a_n = a_1 r^{n-1}$.

La suma de los primeros n términos de la PG:

$$\begin{array}{rclcccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \ldots & +a_1 r^{n-1} & \\ rS_n & = & & & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \ldots & +a_1 r^{n-1} & + \quad a_1 r^n \\ \multicolumn{11}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ S_n - rS_n & = & a_1 & -a_1 r^n & & & & & & & \end{array} \tag{18}$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}} \qquad \text{si } \begin{cases} |r| < 1 \\ n \to \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}} \tag{19}$$

Ejercicios.

1) Calcula el valor de la siguientes suma:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = \tag{20}$$

2) sabiendo que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcula la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2 \, (n + 1)} = \tag{21}$$

3) encuentra el valor de los enteros m y n de la siguiente fracción escrita en su forma decimal:

$$0{,}1\overline{83} = 0{,}1838383\ldots = \frac{m}{n} \tag{22}$$