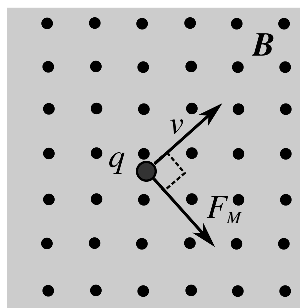
XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Monterrey, Nuevo León. 12-16 de noviembre del 2017
Prueba teórica

SMF
Sociedad Mexicana de Física

Problema 1. Aceleración de Fermi (10 puntos)

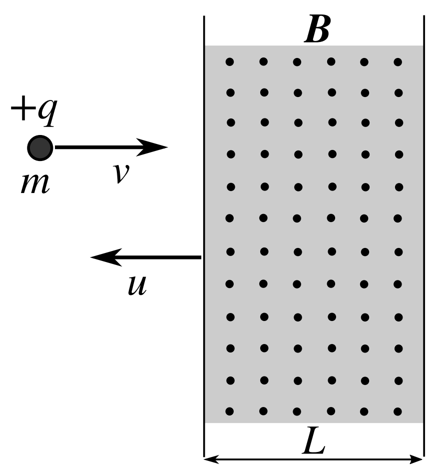
En este problema se emplea la fuerza de Lorentz, que es la que sienten las partículas cargadas cuando se mueven respecto de en un campo magnético de inducción B. En la figura se puede ver que cuando las líneas de campo apuntan hacia afuera de la hoja perpendiculares al plano, y una partícula con carga positiva se mueve sobre el plano con velocidad v, la fuerza que siente es perpendicular al vector de velocidad y con magnitud:

$$F_M = q\ v\ B. \tag{1}$$



En 1949 Enrico Fermi propuso un mecanismo para la aceleración de partículas cargadas en el espacio (Rayos Cósmicos), que en su mayoría son protones. Dicho mecanismo consiste en que regiones con campos magnéticos que se mueven a grandes velocidades (por ejemplo en las ondas de choque producidas en supernovas), pueden captar temporalmente partículas cargadas y las expulsan con mayor rapidez. El ingreso las partículas varias veces por estas regiones hará que puedan llegar a ser las partículas más energéticas en el universo.

Asumiremos un modelo muy simplificado para el mecanismo de Fermi en el que una región muy larga y de ancho L se mueve con velocidad constante u y posée un campo magnético de inducción B uniforme que apunta hacia afuera de la hoja, según se muestra en la figura. A su vez, se tiene un protón que se mueve en el espacio con una velocidad v perpendicularmente a la interfaz de la región, e ingresa en la misma.



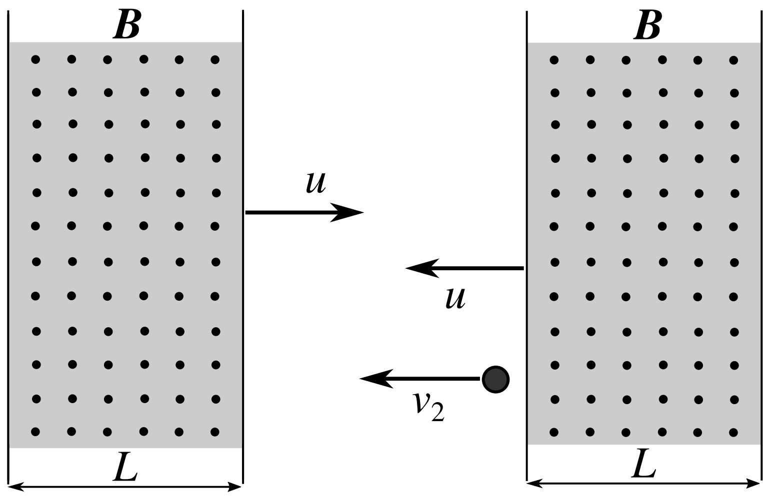
Considere que $v = 10^5$ m/s, $u = 10^3$ m/s, $B = 1$ mT y $L = 10$ m; suponga que las velocidades del protón nunca llegan a ser relativistas; recuerde que para un protón: $m = 1.672 \times 10^{-27}$kg y $q = +1.6 \times 10^{-19}$C. No tomaremos en cuenta campos eléctricos.

Pregunta 1.1 ¿Cuál será el radio de curvatura de la trayectoria del protón *observado* dentro de la región con campo magnético? (3 puntos)

Pregunta 1.2 ¿Cuánto tiempo estará el protón dentro de la región? (1 puntos)

Pregunta 1.3 Para un observador en reposo, ¿qué velocidad tendrá el protón al salir de la región? (1 puntos)

Suponga ahora una segunda región, igual a la primera, pero que se mueve en sentido contrario con la misma magnitud de la velocidad, como se muestra en la figura. Considere que las regiones se encuentran inicialmente separadas una distancia mucho mayor que el ancho L de las dos regiones.

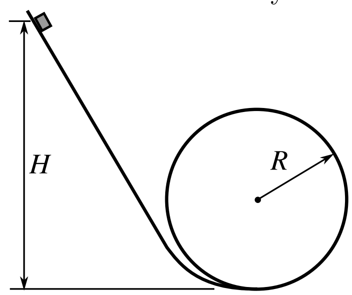


Pregunta 1.4 Haga un esquema cualitativo de la trayectoria que tendrá el protón en las dos regiones para unas cuantas vueltas, indicando las velocidades al ingresar y al salir de cada región. Encuentre expresiones generales para las velocidades al ingresar y al salir de cada región como función del número de vuelta n. (3 puntos)

Pregunta 1.5 ¿Cuántas vueltas dará el protón antes de liberarse de las dos regiones y de qué región saldrá? (2 puntos)

Problema 2. Montaña rusa loca (10 puntos)

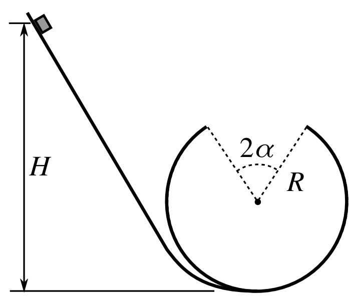
Cuando se diseña una montaña rusa se pretende que este juego sea lo más seguro posible y nos concentraremos en un rizo. Antes del rizo circular de radio R habrá una pendiente de la que se deslizará un carrito para después entrar en el rizo y dar la vuelta por éste como se muestra en la figura. Despreciaremos cualquier fricción entre el carrito y los rieles.



Pregunta 2.1 ¿De qué altura mínima se deberá de empezar a descender el carrito para que pueda dar una vuelta completa en el rizo sin despegarse? (2 puntos)

Los rizos completos son los más comunes, pero no son divertidos. Queremos diseñar un nuevo tipo de rizo incompleto con un corte simétrico en el riel de la parte superior, por un ángulo 2α como se muestra en la figura, de manera que el carrito vuele libremente en esta porción faltante y vuelva a reintegrarse al rizo. Consideremos la razón entre la altura a la que se dejará descender el carrito y el radio del rizo:

$$\eta = \frac{H}{R}.$$



Pregunta 2.2 ¿Cuánto vale η como función de α? Verifique el resultado de la pregunta 2.1 cuando $\alpha = 0$. (4 puntos)

Pregunta 2.3 Escriba $\cos\alpha$ como función de η y diga cuál es el mínimo valor que puede tener η y a qué ángulo α corresponde. (3 puntos)

(**Nota:** No es necesario usar el método de derivadas para encontrar el resultado, sólo analizar cuándo el resultado es físicamente posible. Pero si lo desea, derive.)

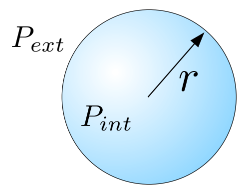
Pregunta 2.4 ¿Qué otro ángulo α corresponde también al η del resultado de la pregunta 2.1? (1 punto)

Problema 3. Burbujas en el agua. (10 puntos)

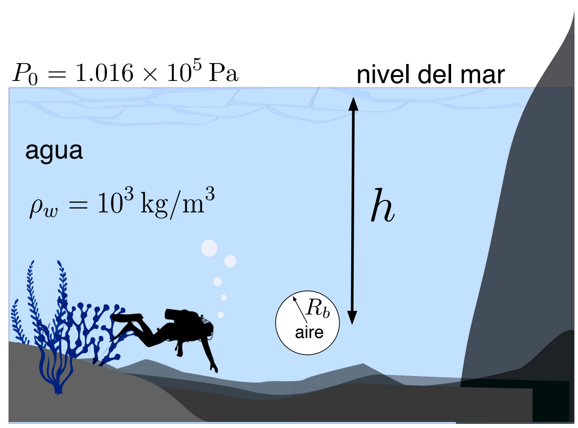
Burbujas en el fondo del mar.

La tensión superficial es una propiedad que se presenta en los líquidos cuando están en contacto con un medio diferente a través de una interfase que divide al líquido con el medio. La tensión superficial es importante en las formación de burbujas en los líquidos permitiendo que haya un equilibrio entre las presiones dentro y fuera de la burbuja; por una parte, la tensión superficial en la burbuja tiende a minimizar el área de la burbuja mientras que la diferencia de presiones tiende a aumentar el tamaño de la burbuja. En equilibrio, la diferencia de presiones: $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$, en una burbuja de radio r está dada por la formula de Laplace:

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\sigma}{r} \qquad (2)$$



donde σ es la tensión superficial del líquido y P_{int}, P_{ext} son las presiones interior y exterior de la burbuja; note que la presión dentro de la burbuja P_{int} es mayor a la presión externa P_{ext}.



Considere una burbuja de aire de radio R_b, que se encuentra en el fondo del mar a una profundidad h. La presión a nivel del mar es la presión atmosférica $P_0 = 1.016 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, ver figura. La densidad del agua es $\rho_w = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ y la tensión superficial del agua $\sigma = 0.0725\,\mathrm{N/m}$

Pregunta 3.1 Encuentre una expresión para la presión P_{int} dentro de una burbuja de aire de radio R_b que se encuentra a una profundidad h respecto del nivel del mar. Obtenga su valor si la profundidad es $h = 1.0\,\mathrm{m}$ y el radio es $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$. Obtenga también la diferencia de presiones $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$. (2 puntos).

Suponga que el aire dentro de una burbuja se comporta como un gas ideal y que su masa molar tiene el valor $M_a = 0.029\,\mathrm{kg/mol}$. La constante de los gases ideales es $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Pregunta 3.2 Determine el valor de la densidad del aire dentro de una burbuja de radio $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$ si está a una profundidad $h = 1.0\,\mathrm{m}$, considere que la temperatura del agua es $25\,^\circ\mathrm{C}$. (2 puntos)

Como la densidad del aire dentro de las burbujas es menor a la densidad del agua, las burbujas que se forman en el fondo del mar ascienden hasta la superficie y debido a la diferencia de presiones las burbujas aumentan su tamaño. Suponiendo que la burbuja asciende de manera isotérmica hasta llegar a la superficie del mar. Si R_b es el radio de una burbuja de aire en el fondo del mar, a una profundidad h, y R_s el radio de la misma burbuja cuando ha llegado a la superficie.

Pregunta 3.3 Determine una expresión para calcular la profundidad h en términos de R_b, R_s y las constantes del problema, obtenga el valor de h si la burbuja aumenta al doble de su volumen inicial al llegar a la superficie del mar y $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$. (3 puntos)

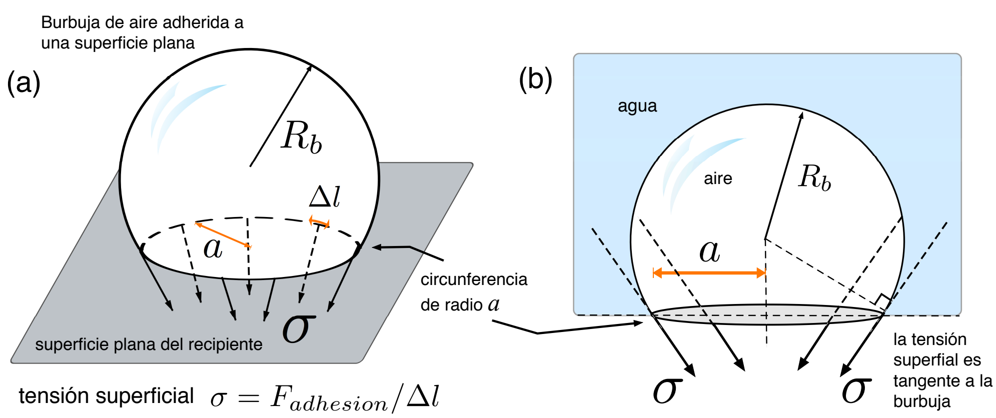
Formación de burbujas de aire en el agua.

Al calentar agua en un recipiente es común la formación de burbujas de aire dentro del agua, estas burbujas inicialmente están adheridas a la superficie inferior del recipiente por efecto de la tensión superficial. En este caso una burbuja de aire, de radio R_b, adherida a la superficie plana del recipiente está truncada a través de una circunferencia de radio a como se muestra en la figura (a).

La tensión superficial se define como la fuerza de adhesión por unidad de longitud:

$$\sigma = F_{adhesion}/\Delta l \tag{3}$$

donde Δl es una pequeña longitud donde actúa la fuerza de adhesión. La tensión superficial actúa en todos los puntos de la circunferencia de contacto entre entre la burbuja y la superficie del recipiente y es tangente a la burbuja como se muestra en la figura (b).



Pregunta 3.4 Determine la magnitud de la fuerza total de adhesión que actúa sobre la burbuja si está en contacto con una superficie plana a través de una circunferencia de radio a. (1.5 puntos)

Suponga que $R_b \gg a$, de tal manera que el volumen de la burbuja truncada se puede aproximar al volumen de una esfera de radio R_b. La burbuja permanece adherida al recipiente mientras haya un equilibrio de fuerzas sobre la burbuja. Nota que la densidad del aire dentro de las burbujas es mucho menor a la del agua: $\rho_a = 1.29\,\mathrm{kg/m^3} \ll \rho_w = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Pregunta 3.5 Determine una expresión para calcular el radio a necesario para que una burbuja de radio R_b se mantenga adherida del fondo del recipiente, obtenga el valor de a si $R_b = 1.0\,\mathrm{mm}$. (1.5 puntos)