

# Tarea 8

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF  
Fecha de entrega: miércoles 25 de abril 2018.

ENTRENAMIENTO 2018

---

## Problema 31, relatividad.

Lee el capítulo 37 de Relatividad del libro Sears-Zemansky y resuelve los siguientes problemas al final del capítulo (trata de hacer 5 problemas más de los propuestos al final del capítulo, cada quien puede escoger los que deseen):

- 37.7** Una nave espacial se aleja volando de la Tierra con una ....
- 37.11** ¿Por qué somos bombardeados por los muones? ....
- 37.18** La ecuación 37.23 da la transformación sólo para la componente  $x$  ...
- 37.24** Rescriba la ecuación 37.25 para determinar la velocidad ....
- 37.27** a) una partícula de masa  $m$  se desplaza a lo largo de .....
- 37.32** Aniquilación. En una aniquilación de protón/antiprotón, ....
- 37.44** Creación de una partícula. Dos protones (cada uno con ...
- 37.68** Medición de la rapidez por radar.
- 37.74** Una versión realista de la paradoja de los gemelos
- 37.75** Cómo medir la masa de las estrellas.
- 37.76** Relatividad y la ecuación de onda.

## Problema 32, Propulsor magnetohidrodinámico.

Un propulsor magnetohidrodinámico elemental (MHD), consiste en una caja hueca de largo  $L$ , con dos caras abiertas de ancho  $a$  y altura  $h$ , que se sumerge en un fluido con conductividad eléctrica  $\sigma$  (la conductividad se define como el inverso de la resistividad). La cara inferior y la superior son metálicas y están conectadas a una fuente de corriente continua con diferencia de potencial  $V$ , que establece una corriente eléctrica que se supondrá perpendicular a las placas. Las caras de dimensiones  $L$  y  $h$ , son dos imanes rectangulares no conductores, de modo que dentro de la caja se establece un campo magnético de módulo  $B$ , que en forma aproximada vamos a suponer uniforme, dirigido como se indica en la figura 1.

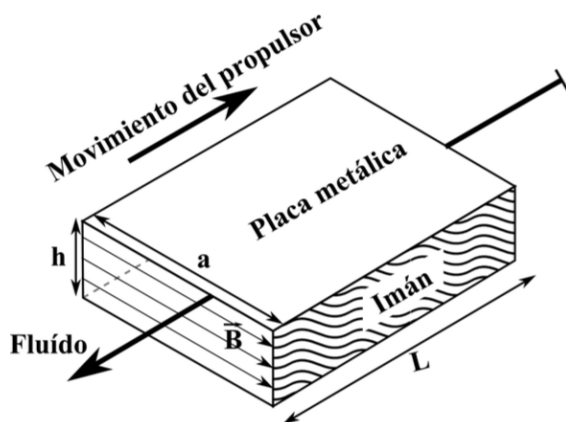


Fig. 1 - Vista en perspectiva del propulsor MHD.

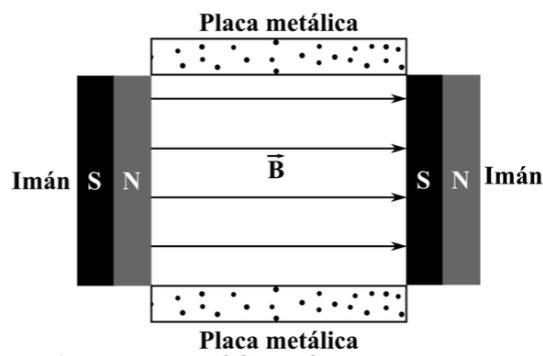


Fig. 2 - Vista trasera del propulsor MHD.

- Para que el propulsor avance en la dirección del movimiento indicada en la figura 1, determine si la placa de arriba es positiva o negativa, justificando su respuesta. Escriba la expresión para la fuerza aplicada por el propulsor MHD sobre el fluido.
- Para el par de imanes considerados, la intensidad del campo magnético depende de la distancia  $a$ , según  $B(a) = 0.42 - 14a$ , donde  $a$  está dado en metros y  $B$  en Tesla. Esta relación lineal es válida para distancias comprendidas entre 0.005 m y 0.025 m. Escriba la expresión para la distancia  $a$ , entre los imanes, a la cual es máxima la fuerza generada por el propulsor MHD y determine su valor. Determine el valor del campo magnético para dicha distancia.
- Se construye un propulsor MHD para funcionar en agua salada, con el ancho calculado en la parte anterior, largo  $L = 12$  cm y altura  $h = 2$  cm. La fuente es una batería de  $V_0 = 9.0$  V y resistencia interna  $r_i = 1.1 \Omega$ . La conductividad eléctrica del agua salada es  $\sigma = 4.8 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Escriba la expresión para la intensidad de corriente y determine su valor. Determine la fuerza generada por el propulsor MHD.
- Se diseña un pequeño bote de juguete que es impulsado mediante el propulsor MHD de la parte anterior. El bote es una caja de 10 cm de ancho, 6 cm de altura y tiene la misma longitud que el propulsor (Fig. 3). La masa total del bote incluyendo la batería y el propulsor es  $m = 215$  g. Al moverse, el agua se opone al movimiento del bote con una fuerza de arrastre que es de la forma,  $F_a = \frac{1}{2} \rho C A v^2$ , donde  $\rho = 1.02 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  es la densidad del agua salada,  $C$  es el coeficiente de arrastre, el cual depende de la forma, y que en este caso es  $C = 1.2$ ,  $A$  es el área frontal en contacto con el agua y  $v$  es la velocidad relativa entre el bote y el agua. Escriba la expresión para la velocidad terminal (aceleración nula) con la que avanza el bote y determine su valor.

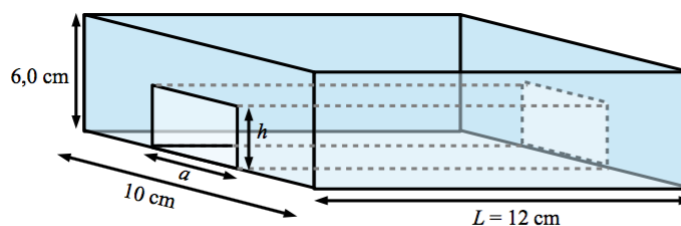


Fig. 3 - Dimensiones del bote de juguete

### Problema 33, Ciclotrón.

El ciclotrón fue inventado por Ernest O. Lawrence y M. S. Livingston en Berkeley (California, EE. UU.), en el año 1932. Consiste en un acelerador de partículas cargadas, las cuales debido a la fuerza de Lorentz y a un potencial acelerador pueden adquirir energía suficiente como para impactar sobre un blanco y producir una reacción nuclear. Un esquema simplificado, se muestra en la figura 1 (dibujo original de la patente).

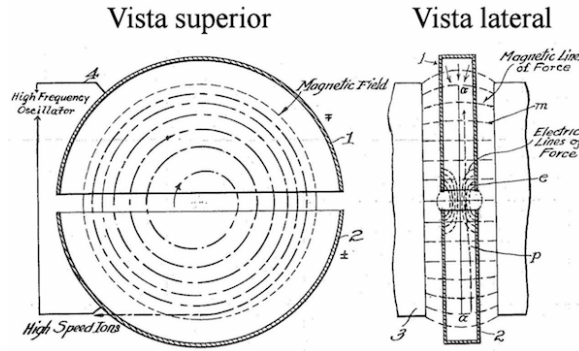


fig 1. Detalle de las placas del Ciclotrón. Los electroimanes con forma de letras “D” están indicados con 1 y 2.

Básicamente el ciclotrón consiste en dos regiones de campo magnético uniforme en forma de letra “D” entre las cuales se establece una diferencia de potencial, cuya polaridad se invierte periódicamente cuando la partícula pasa de una “D” a otra. Para este problema considere que no se alcanzan velocidades relativistas.

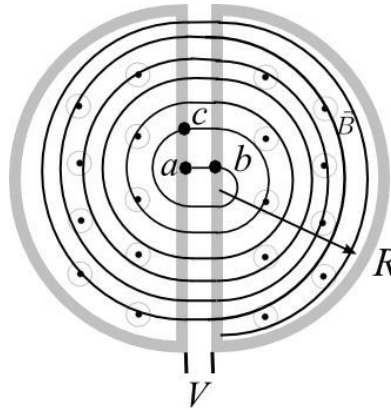


fig. 2 Trayectoria de una partícula en el ciclotrón.

- Considere que una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  parte del reposo en el punto  $a$  y es acelerada por la diferencia de potencial  $V$ . Determine la velocidad  $v_b$  con la que llega al punto  $b$  y el radio de la trayectoria que describe dentro de la “D”, en donde existe un campo magnético de intensidad uniforme  $\vec{B}$ .
- Determine la frecuencia  $f$  con que debe oscilar la polaridad del potencial  $V$  para que la partícula referida en la pregunta (a), sea acelerada cada vez que pasa por la región entre las “D” (frecuencia de ciclotrón).
- Determine la energía cinética de salida de la partícula referida en la pregunta (a), si el radio del ciclotrón es  $R$ .

Se ha investigado la opción de introducir en el punto  $a$  del ciclotrón una sustancia radiactiva como el Cm (curio), que emite partículas  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) con una velocidad inicial  $v_\alpha$ , de forma que sea posible aumentar la energía cinética de salida de las partículas  $\alpha$ , sin necesidad de aumentar el radio del ciclotrón.

Considerando la ecuación de desintegración radiactiva:



**d)** Determine la energía cinética de la partícula  $\alpha$  y del núcleo de plutonio en retroceso. Considere el núcleo de Cm en reposo.

**e)** Determine la velocidad  $v_\alpha$  de la partícula  $\alpha$  emitida.

Considere un ciclotrón de radio  $R$  de 0,5 m que opera con un campo magnético uniforme  $B = 2$  T y un potencial acelerador  $V = 500$  kV. Teniendo en cuenta que ahora la partícula en el punto  $a$  tiene una velocidad inicial  $v_\alpha$ , calcule la velocidad  $v_1$  con que llega al punto  $c$  y el radio  $r_1$  de la trayectoria dentro de la “D” izquierda (fig. 2).

**f)** Obtenga la expresión para la velocidad  $v_n$  y el radio  $r_n$  de la trayectoria después de que la partícula haya realizado  $n$  vueltas en torno al centro del ciclotrón.

---

velocidad de la luz en el vacío	$c$	299,792,458 m/s
permeabilidad del vacío	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$
permisividad del vacío	$\epsilon_0$	$8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
constante de Planck	$h$	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
carga del electrón	$e$	$-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
masa electrón	$m_e$	$9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
masa protón	$m_p$	$1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$
unidad masa atómica	$u$	$1.661 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.4 \text{ MeV}/c^2$
numero atómico del oro (Au)	$Z_{Au} = 79$	
masa del Polonio	$M_{Po} = 209.982857 \text{ u}$	
masa del Plomo	$M_{Pb} = 205.974449 \text{ u}$	
masa del Helio	$M_{He} = 4.002603 \text{ u}$	
masa del Curio	$M_{Cm} = 240.05552 \text{ u}$	
masa del Plutonio	$M_{Pu} = 236.046060 \text{ u}$	
masa partícula alfa	$M_\alpha = 4.002603 \text{ u}$	

## Problema 34

Para explicar la conservación de la energía y del momento lineal en la desintegración  $\beta$ , el físico austriaco Wolfgang Pauli predijo en 1930 la existencia de una partícula de masa nula o prácticamente nula, sin carga eléctrica y con una interacción muy débil con la materia, por lo tanto muy difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi le dio el nombre de *neutrino*. En 1956, Clyde Cowan y Frederick Reines comprobaron experimentalmente su existencia. Desde entonces el interés por los neutrinos ha sido creciente, hasta el punto de llegar a convertirse en piezas fundamentales para entender el Universo en su escala más pequeña, y en elementos básicos para investigar algunos de los problemas candentes de la Astrofísica y de la Cosmología.

Los neutrinos, por carecer de carga, no son desviados por los campos electromagnéticos y apenas son perturbados por la materia que cruzan en su camino. De hecho, enormes cantidades de neutrinos procedentes del cosmos y, en particular del Sol, atraviesan la Tierra cada segundo. Sin embargo, sólo unos pocos interaccionan con algún núcleo dando como resultado la producción de otras partículas: electrones, muones y tauones.

Como más adelante se explica, estas partículas cargadas, si son suficientemente energéticas, provocan la emisión de una luz azulada conocida como *radiación de Cherenkov* (luz característica en las piscinas de almacenamiento de material irradiado de las centrales nucleares). Si el medio en el que se propagan es transparente, como agua o hielo de gran pureza, esta luz se puede detectar y su medida constituye un método indirecto para la detección de neutrinos. Este es el fundamento de buena parte de los observatorios de neutrinos existentes en el mundo. Como la probabilidad de que algún neutrino sea “cazado” es tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño y la masa de los detectores, los “observatorios” de neutrinos son gigantescas instalaciones y su construcción constituye un inmenso reto tecnológico.

En estos ejercicios, de forma muy simplificada, se hace alusión al mayor de ellos, el IceCube Neutrino Observatory, situado en la Antártida, en la base Amundsen-Scott, cercana al Polo Sur geográfico. En este laboratorio se presta especial atención a los muones generados por los neutrinos ya que, mediante un complejo sistema de adquisición de datos, se puede determinar la dirección de propagación y energía de los neutrinos que los han producido.

Básicamente, el IceCube es una red tridimensional de detectores, llamados DOM (Digital Optical Module). Tienen forma esférica y se alojan distribuidos en 86 pozos excavados en el hielo austral. Cada DOM alberga un fotomultiplicador y los equipos electrónicos asociados. Estos se disponen formando cadenas, como se muestra en la figura 1, y están situados a una profundidad entre 1450 m y 2450 m, donde el hielo es extraordinariamente puro y transparente.

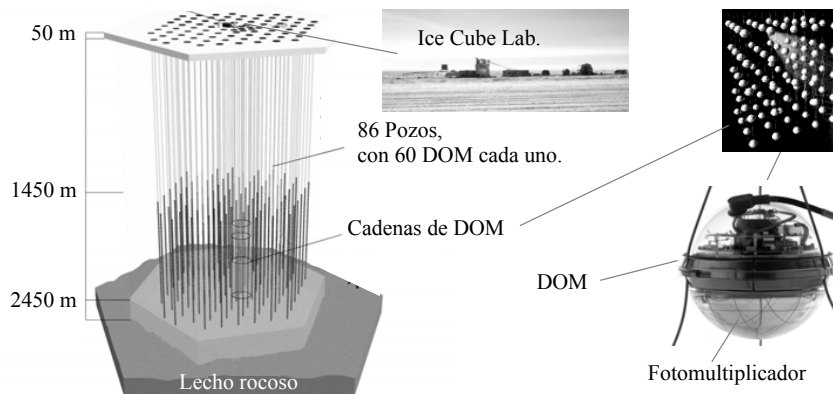


Fig. 1

## Parte I, A la caza del neutrino

### a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

- a1) Cada pozo tiene una profundidad media  $H = 2,40 \times 10^3$  m y un radio  $r = 0,30$  m, y la temperatura media del hielo a fundir es  $T_h = -30$  °C. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo,  $E_{\min}$ , y calcule su valor.

### b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones ( $^1\text{H}$ ) que dan lugar a la formación de núcleos de  $^4\text{He}$  y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

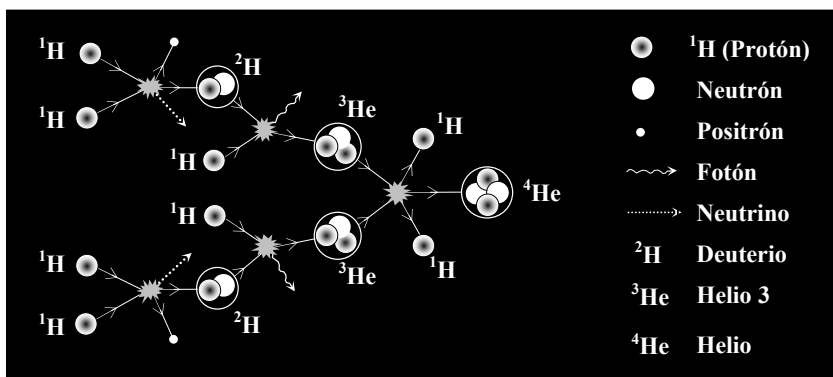


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una pérdida de masa  $\Delta m$  que da lugar a una liberación de energía  $\Delta E$ . Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

- b1) Escriba la expresión para  $\Delta m$  y calcule la energía liberada en cada ciclo pp,  $\Delta E$ .

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*,  $u_s$ . Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es  $u_s = 1,366 \text{ kW/m}^2$

- b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo,  $N_\nu$ .

**c) Neutrinos y muones.**

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media<sup>2</sup>, medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es  $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$ .

- c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón,  $v_\mu$ , en función de su masa  $m_\mu$ , de su energía  $E_\mu$  y de la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . Calcule su valor cuando la energía del muón es  $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$ .

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para “descontarlos”, ya que no han sido originados por neutrinos.

- c2) Calcule la distancia  $d_\mu$ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J / (kg K)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J / kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg / m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{\text{ST}} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa del protón ( $^1\text{H}$ )	$m_{^1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del núcleo de Helio ( $^4\text{He}$ )	$m_{^4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ayuda	
Energía mecánica relativista de una partícula de masa $m$ que se mueve con velocidad $v$ : $E = \gamma m c^2$ , donde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$	
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma \tau_0$	

## Parte II, La detección indirecta de los neutrinos del IceCube

### a) La radiación de Cherenkov.

En las escasas interacciones de los neutrinos con los núcleos del hielo antártico, se originan *muones* que son partículas cargadas relativistas, es decir que viajan con una velocidad próxima a la de luz en el vacío,  $c$ . Por tener carga eléctrica, excitan a los átomos de la materia (hielo, en este caso) que encuentran a su paso. Los átomos excitados vuelven casi inmediatamente a su estado fundamental emitiendo luz (radiación de Cherenkov), que se propaga en el hielo con una velocidad menor que  $c$ . El hielo tiene un índice de refracción,  $n_h$ , dado en la Tabla de Constantes Físicas. La región de emisión (no los átomos) se desplaza con el muón, a velocidad mayor que la de la luz en el hielo. En virtud del principio de Huygens-Fresnel, el frente de onda luminoso resultante es una superficie cónica, como se representa en la figura 3.

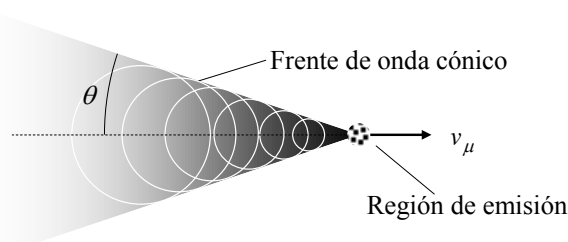


Fig. 3

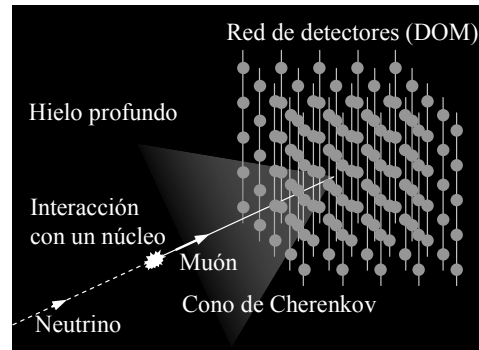


Fig. 4

a1) Escriba la expresión y calcule el semiángulo  $\theta$  del frente de onda cónico en función de  $v_\mu$  y de  $n_h$ .

### b) La detección de la luz de Cherenkov.

La detección de la luz Cherenkov en el IceCube, que constituye la forma indirecta de detección de los neutrinos, se lleva a cabo mediante los 5160 DOM alojados en el hielo profundo (figura 4). En cada DOM existe un *fotomultiplicador* que transforma los fotones de luz de Cherenkov en una señal eléctrica que, una vez digitalizada, se envía al centro de control para ser registrada y analizada.

Aunque los fotomultiplicadores empleados en los DOM tienen una geometría diferente, son básicamente análogos al representado en la figura 5. Un fotomultiplicador consta de un *fotocátodo* que, por efecto fotoeléctrico, emite electrones (*fotoelectrones*) cuando sobre él inciden fotones de energía igual o mayor que la *función de trabajo* (o *energía de extracción*) del material con el que está construido. Un campo eléctrico acelera estos electrones y los dirige hacia un ánodo, que en estos dispositivos recibe el nombre de *dínodo*. La energía de los electrones incidentes provoca la emisión de un número mayor de *electrones secundarios* que son dirigidos hacia un segundo dínodo. El número de dínodos, su disposición y las diferencias de potencial existentes entre ellos, varían con el modelo de fotomultiplicador.

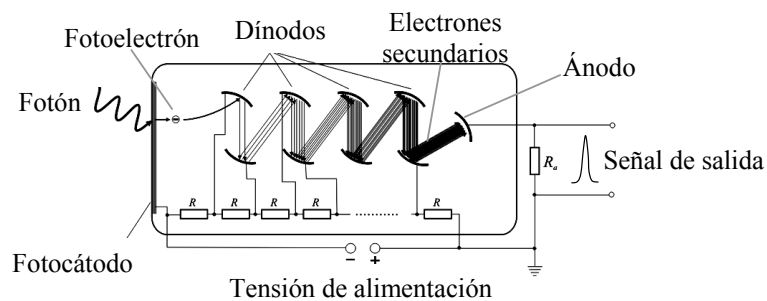


Fig. 5



Al final, tras este proceso en cascada, donde el número de fotoelectrones es multiplicado por las emisiones secundarias, la señal de salida que se obtiene en el último dínodo (ánodo propiamente dicho), es proporcional al número de fotones incidentes en el fotocátodo.

- b1) Teniendo en cuenta la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, determine la función de trabajo del material del fotocátodo,  $\Phi$ , para que un fotón de luz de Cherenkov, de longitud de onda en el vacío  $\lambda = 420 \text{ nm}$ , sea capaz de extraer un electrón.
- b2) Si el número de fotones de longitud de onda  $\lambda$  que inciden por unidad de tiempo en el fotocátodo es  $N_f$ , determine la energía por unidad de tiempo (potencia,  $P_f$ ) que estos fotones depositan en el fotocátodo.

Las principales características técnicas de los fotomultiplicadores son: el número de dínodos,  $n$ , la *eficiencia cuántica* (Quantum Efficiency), la *sensibilidad radiante* y la *ganancia*.

La eficiencia cuántica,  $QE$ , es el porcentaje del número de electrones que salen del fotocátodo por segundo,  $N_e$ , respecto al número de fotones que inciden por segundo,  $N_f$ .

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

La sensibilidad radiante,  $S$ , para una determinada longitud de onda de la luz incidente, es el cociente entre la intensidad de corriente que sale del fotocátodo,  $I_e$ , y la potencia de la radiación de fotones que inciden en el fotocátodo,  $P_f$ .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

La ganancia,  $G$ , se define como el cociente entre la intensidad de corriente que llega al ánodo,  $I_a$ , y la que sale del fotocátodo,  $I_e$ .

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

- b3) Determine la expresión de la ganancia  $G$  del fotomultiplicador en función del número de dínodos,  $n$ . Considere que en cada dínodo, en promedio, se producen  $\delta$  electrones secundarios por cada electrón incidente. Calcule  $\delta$  para un fotomultiplicador de 10 dínodos con una ganancia  $G = 1,0 \times 10^9$ .
- b4) Obtenga la expresión que relaciona la eficiencia cuántica,  $QE$ , con la sensibilidad radiante,  $S$ .
- b5) Los fotomultiplicadores empleados en el IceCube tienen una ganancia  $G = 1,0 \times 10^9$  y una eficiencia cuántica  $QE = 25$ . Si inciden fotones Cherenkov de longitud de onda  $\lambda = 420 \text{ nm}$ , calcule la relación entre la intensidad de corriente  $I_a$  que sale del ánodo y la potencia  $P_f$  de la radiación incidente.

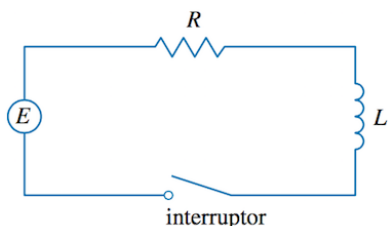
Constantes físicas	
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
Índice de refracción del hielo	$n_h = 1,32$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elemental	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

**Problema 35, Ejercicios ecuaciones diferenciales.**

Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas:

1.  $\frac{dy}{dx} + y = x$ ,  $y(0) = 4$
2.  $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$
3. Demuestra que para el circuito RL, con una fuente de voltaje oscilante  $E(t)$ , se satisface la ecuación:

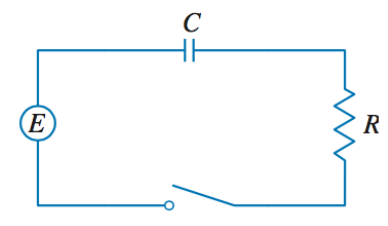
$$L \frac{dI}{dt} + R I(t) = E(t) \quad (2)$$



Si  $E(t) = V_0 \sin(\omega t)$  y  $I(0) = I_0$ , determina la expresión de corriente en el circuito  $I(t)$ .

4. Demuestra que para el circuito RC, con una fuente de voltaje oscilante  $E(t)$ , se satisface la ecuación:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (3)$$



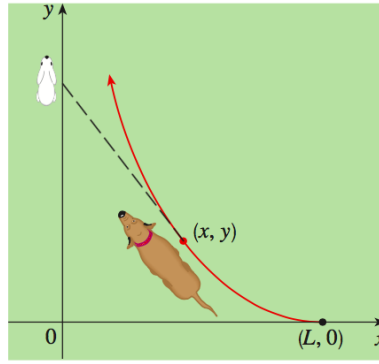
Si  $R = 2 \Omega$ ,  $C = 0.01 \text{ F}$ ,  $Q(0) = 0$  y  $E(t) = 10 \sin(60t)$  (en unidades adecuadas), determina la carga y la corriente en el tiempo  $t$ .

5. Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si  $y(t)$  es la cantidad de sal (en kilogramos) después de  $t$  minutos, muestre que  $y$  satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t} \quad (4)$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

6. Un perro ve un conejo que recorre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema de coordenadas rectangulares (ver figura) suponga:
  - i) Que el conejo está en el origen y el perro en el punto  $(L, 0)$  en el instante en que el perro ve por primera vez al conejo.
  - ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje  $y$ , y el perro siempre en línea directa hacia el conejo.
  - iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.



- a) Demuestra que la trayectoria del perro es la gráfica de la función  $y = f(x)$ , donde  $y$  satisface la ecuación diferencial:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (5)$$

- b) Determine la solución de la ecuación con las condiciones iniciales:  $y = y' = 0$  cuando  $x = L$ .

Sugerencia: realiza el cambio de variable  $z = dy/dx$

- c) ¿Alcanza el perro al conejo?

7. Continuación del problema anterior del perro y el conejo.

- a) Si el perro corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para hallar el punto donde el perro alcanza al conejo.
- b) Suponga que el perro corre a la mitad de la velocidad del conejo. ¿Qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿Cuáles son sus posiciones cuando están más próximos?

### Problema 36, Desintegración radiactiva.

La desintegración radiactiva es un proceso estadístico que depende de la inestabilidad de un radioisótopo particular y que para cualquier núcleo dado de una muestra es completamente impredecible. Si hay  $N$  núcleos radiactivos en un tiempo  $t$ , entonces, el número  $\Delta N$  que se desintegraría en cualquier intervalo de tiempo  $\Delta t$  será proporcional a  $N$ :

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (6)$$

donde  $\lambda$  es la *constante de desintegración* ( $\lambda > 0$ ). Si  $N_0 = N(t=0)$  es el número de núcleos inicial ( $t=0$ ) y se define la vida media de una sustancia radioactiva  $T_{1/2}$  (a veces denotado simplemente como  $T$ ) como el tiempo o periodo durante el cual el número de núcleos radiactivos disminuye a la mitad del número de núcleos que se tienen originalmente, responde los siguientes problemas:

1. Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración (vida media)  $T = 1.34$  días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante  $q = 2.7 \times 10^{29}$  núcleos/s. Determinar cómo varía la actividad  $A$  de la muestra con el tiempo, la actividad nuclear es el número de núcleos que desaparecen por unidad de tiempo y representa la velocidad de desintegración:  $A = \lambda N(t)$
2. Si una sustancia radioactiva A se transforma por desintegración en una sustancia B también radioactiva y  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  son las respectivas constantes de desintegración, entonces se establecen el par de ecuaciones que rigen el decaimiento radioactivo para cada sustancia:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \quad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \quad (7)$$

Si inicialmente ( $t = 0$ ) se tienen  $N_{0A}$  núcleos de la sustancia A y cero núcleos de la sustancia B, determina las soluciones:  $N_A(t)$  y  $N_B(t)$ .

Si adicionalmente la sustancia B se desintegra en una sustancia C, el número de núcleos de C aumenta uniformemente hasta que después de un tiempo muy largo (comparado con las vidas medias de A y B) es igual a  $N_{0A}$ . Demuestra que el número de núcleos de la sustancia C al tiempo  $t$  esta dada por:

$$N_C(t) = \frac{N_{0A}}{\lambda_B - \lambda_A} [\lambda_B (1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A (1 - e^{-\lambda_B t})] \quad (8)$$

## Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (9)$$

donde  $P(x)$  y  $f(x)$  son dos funciones dadas en el problema. El método para resolver esta ecuación es el siguiente:

1.- La solución general de la ecuación (9) esta dada por la suma de dos términos:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \quad (10)$$

donde  $y_c(x)$  es solución de la **ecuación homogénea** ( $f(x) = 0$ ):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (11)$$

esta ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables (problema 28) y por lo tanto es posible determinar  $y_c(x)$ , que se puede escribir de manera general, como:

$$y_c(x) = c e^{-\int P(x)dx} \quad (12)$$

donde  $c$  es una constante de integración.

2.- El segundo término de la solución general (10):  $y_p(x)$ , corresponde a una solución particular de la ecuación diferencial original (9). Para determinar una solución particular se emplea el **método de variación de parámetros** que consiste en emplear la solución de la ecuación homogénea, ecuación (12), pero donde  $c$  ya no es una constante, sino una función  $u(x)$  por determinar. Sea entonces:  $y_p = u(x) e^{-\int P(x)dx}$  la solución particular, sustituyendo en (9) se llega a la siguiente ecuación (verifícalo):

$$e^{-\int P(x)dx} \frac{du}{dx} = f(x) \quad (13)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden en variables separables; la solución se puede escribir como:

$$u(x) = \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (14)$$

entonces la solución particular esta dada por:

$$y_p = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (15)$$

y la solución general de (9) es:

$$y(x) = c e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (16)$$

la constante de integración  $c$  se determina de la condición inicial que se da en el problema:  $y_0 = y(x_0)$ .

El factor  $e^{-\int P(x)dx}$  se le llama **factor integrante**, nota que si multiplicas por este factor la ecuación (9) entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{-\int P(x)dx} y \right] = e^{-\int P(x)dx} f(x) \quad (17)$$

esta expresión es una ecuación diferencial en variables separables y cuyo resultado es nuevamente (16), simplemente es otra manera de abordar el problema. No es importante recordar las expresiones de las soluciones generales, que son de carácter general, sino entender el método de solución cuya idea es muy sencilla.