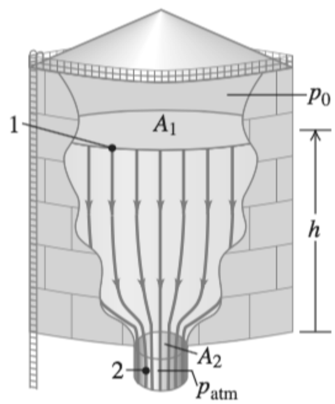
Tarea 5

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Fecha de entrega: sábado 25 febrero 2017

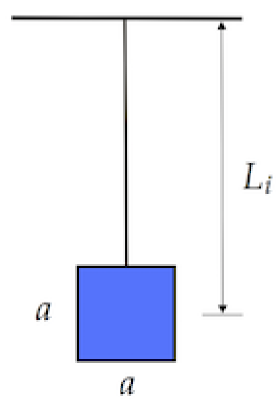
Problema 19, fluidos.

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. La figura ilustra un tanque de almacenamiento de agua con área transversal A_1, lleno hasta una altura h. El espacio arriba de la gasolina contiene aire a presión p_0 y la gasolina sale por un tubo corto de área A_2. Deduzca expresiones para la rapidez de flujo en el tubo y la tasa de flujo de volumen dV/dt.



2. Un contenedor cubico de arista a esta lleno de agua inicialmente. El cubo esta sujeto de una cuerda inelástica y oscila como un péndulo. En determinado momento $t_i = 0$ el agua comienza a salir por un pequeño orificio situado en el fondo del contenedor. Considera que L_i es la distancia desde el centro del cubo hasta el punto superior donde se sujeta la cuerda, considerando que el contenedor y la cuerda tienen masa despreciable.

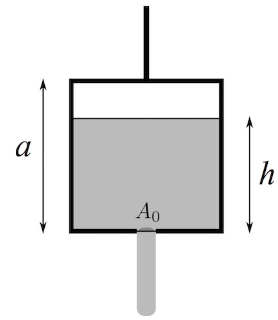


Suponiendo que el agua dentro del cubo sale por el orificio a una razón constante $dm/dt =$ constante

a) Encuentra el periodo del péndulo como función del tiempo $T(t)$.

b) Dibuja una gráfica de $T(t)$ desde el tiempo inical $t_i = 0$, hasta un pequeño momento antes de que el contenedor se ha vaciado completamente.

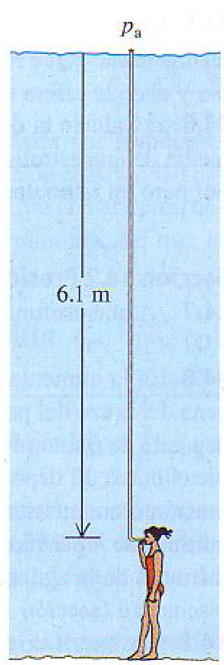
Ahora considera que el orificio del fondo del cubo tiene área A_0, si al tiempo t el nivel del agua dentro del cubo es h y la velocidad del el agua al salir por el orificio inferior es $v_0 = \sqrt{2gh}$, despreciando los efectos de fricción del agua al salir por el orificio del cubo.



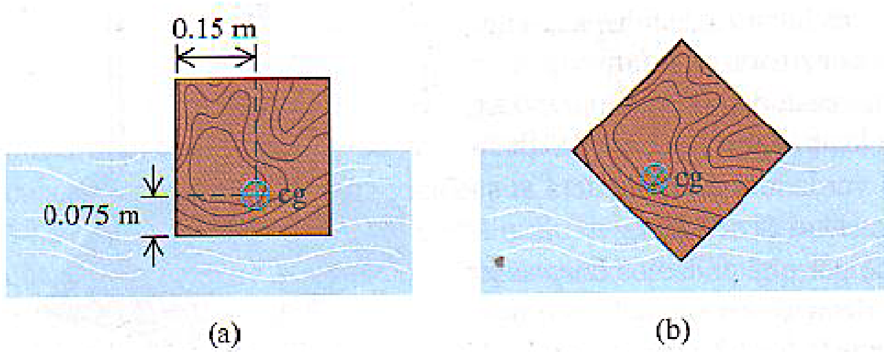
a) Encuentra la velocidad con que se vacía el cubo, es decir encuentra $h(t)$.

b) Encuentra en este caso la dependencia temporal del periodo del péndulo $T(t)$.

3. Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un snorkel, esto se debe a que al aumentar la profundidad la diferencia de presión tiende a colapsar los pulmones. Dado que el snorkel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcula la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce (un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayor profundidades que uno que usa snorkel porque la presión dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).



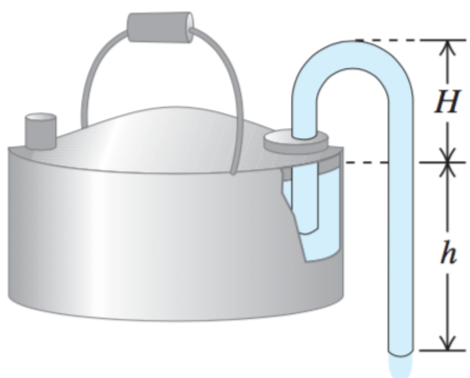
4. Un bloque cúbico de madera de 0.3 m por lado tiene pesos que hacen que su centro de gravedad esté en el punto que se indica en la figura de abajo. El bloque flota en agua con la mitad de su volumen sumergido, el bloque se ladea con un ángulo de 45°, calcula la torca o momento de torsión neto respecto de un eje horizontal perpendicular al bloque y que pasa por su centro geométrico.



5. Un sifón es un dispositivo útil para extraer líquidos de recipientes. Para establecer el flujo, el tubo debe llenarse inicialmente con fluido. Sea ρ la densidad del fluido y p_a la presión atmosférica. Suponga que el área transversal del tubo es la misma en toda su longitud.

   a) Si el extremo inferior del sifón está a una distancia h bajo el nivel del líquido en el recipiente, ¿con qué rapidez fluye el líquido por ese extremo? (Suponga que el recipiente tiene un diámetro muy grande e ignore los efectos de viscosidad.)

   b) Una característica curiosa del sifón es que el fluido inicialmente fluye hacia arriba. ¿Qué altura máxima H puede tener el punto alto del tubo sin que deje de haber flujo?



Problema 20, matemáticas.

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. Resolver el sistema de ecuaciones:

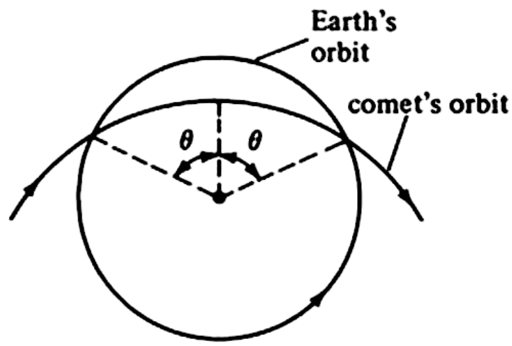
$$\begin{aligned} (3x+y)^{x-y} &= 9 \\ \sqrt[x-y]{324} &= 18x^2 + 12xy + 2y^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

2. De dos aleaciones con diferente porcentaje de cobre que pesan mN y nN se cortan dos pedazos de igual peso. El pedazo cortado de la primera aleación se funde con el resto de la segunda y el pedazo cortado de la segunda aleación se funde con el resto de la primera, después de lo cual el porcentaje de cobre de ambas aleaciones se hacen igual. ¿Cuánto pesa cada uno de pedazos cortados?

3. Dos cuerpos se mueven por una circunferencia en direcciones opuestas. El primero se mueve uniformemente con una velocidad v y el segundo tiene un movimiento uniformemente acelerado con aceleración lineal a. En el instante inicial ambos cuerpos se encontraban en un mismo punto A y la velocidad del segunda era nula. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán por primera vez estos cuerpos si el segundo encuentro será de nuevo en el punto A?

4. Hallar el tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados a y b, y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados se cruzan formando un ángulo recto. ¿Para cuáles condiciones existe este triángulo?

5. La órbita del cometa Halley puede aproximarse por una parábola cuyo mayor acercamiento al Sol es de 0.4 UA. Considerando que la órbita de la Tierra es una circunferencia de radio 1UA, determina el ángulo θ mostrado en la figura.



Problema 21, varios.

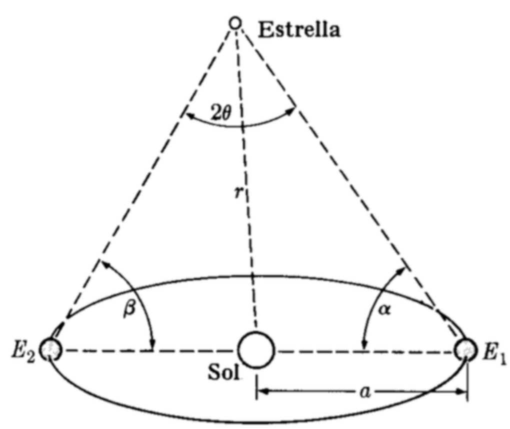
Resuelve al menos 5 de los siguientes problemas.

1. Empleando vectores, demuestra las formulas de suma/resta de ángulos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{2}$$

2. La masa de un átomo se encuentra prácticamente en su núcleo. El radio del núcleo de uranio es de 8.68×10^{-15} m. Utilizando la masa atómica del uranio ...., obtener la densidad de la "materia nuclear". Este núcleo contiene 238 partículas o "nucleones". Estimar la separación promedio entre nucleones. A partir de este resultado ¿es razonable tratar la materia nuclear de la misma manera como la materia en general, es decir, como agregado de átomos?

3. El paralaje es la diferencia en la dirección aparente de un objeto debido a un cambio en la posición del observador (sostén un lápiz frente a ti y cierra el ojo derecho y luego el ojo izquierdo, notas que en cada caso el lápiz aparece con un fondo diferente). El paralaje estelar es el cambio en la posición aparente de una estrella como resultado del movimiento orbital terrestre alrededor del Sol. Se expresa cuantitativamente por la mitad del ángulo θ sustentado por el diámetro terrestre E_1E_2 perpendicular a la linea que une la estrella y el Sol, ver figura. La estrella con el mayor paralaje de $0.76''$ es α-Centauro, encontrar su distancia media desde el Sol expresándola en metros, en años luz y en unidades astronómicas.



4. Empleando métodos vectoriales encontrar: (a) la longitud de las diagonales de un cubo, (b) sus ángulos con los lados adyacentes, (c) sus ángulos con las caras adyacentes, (d) el ángulo entre las diagonales.

5. Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros de lado a. Encontrar, utilizando métodos vectoriales, el ángulo que hace cada lado con la cara opuesta y la distancia de un vértice a la cara opuesta.

6. La evaporación del sudor es un mecanismo importante para controlar la temperatura de algunos animales de sangre caliente. a) ¿Qué masa de agua debe evaporarse de la piel de un hombre de 70.0 kg para enfriar su cuerpo 1.0 C° ? El calor de vaporización del agua a la temperatura corporal de 37 °C es de 2.42×10^6 J/kg · K La capacidad calorífica específica del cuerpo humano es de 3480 J/kg (véase el ejercicio 17.37). b) ¿Qué volumen de agua debe beber el hombre para reponer la que evaporó? Compárelo con el volumen de una lata de bebida gaseosa.

7. Al correr, un estudiante de 70 kg genera energía térmica a razón de 1200 W. Para mantener una temperatura corporal constante de 37 °C, esta energía debe eliminarse por sudor u otros mecanismos. Si tales mecanismos fallaran y no pudiera salir calor del cuerpo, ¿cuánto tiempo podría correr el estudiante antes de sufrir un daño irreversible? (Nota: las estructuras proteínicas del cuerpo se dañan irreversiblemente a 44 °C o más. La capacidad calorífica específica del cuerpo humano es de alrededor de 3480 J/kg · K, poco menos que la del agua; la diferencia se debe a la presencia de proteínas, grasas y minerales, cuyo calor específico es menor que el del agua.)

Vectores.

Sistema de vectores cartesianos.

Un vector esta representado por un segmento de **longitud** A **y dirección (ángulo)** α. En coordenadas cartesianas $(x,\, y)$ un vector queda definido por la proyección del vector en cada uno de los ejes y representan las componentes cartesianas del vector:

$$\mathbf{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z) \tag{3}$$

La **magnitud o norma del vector A** corresponde a su longitud:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{4}$$

Se define la **multiplicación por un escalar** a por un vector $\mathbf{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z)$ de la siguiente manera:

$$a\mathbf{A} = (aA_x,\, aA_y,\, aA_z)\,; \tag{5}$$

la suma de dos vectores $\mathbf{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x,\, B_y,\, B_z)$ se define como:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x,\, A_y + B_y,\, A_z + B_z) \tag{6}$$

Vectores base unitarios.

Coordenadas cartesianas.

En coordenadas cartesianas de tres dimensiones se define una base de tres vectores perpendiculares entre si y unitarios (un vector unitario tiene magnitud uno) en la dirección de cada uno de los ejes como se muestra en la figura. Estos tres vectores se dice que forman una **base ortonormal de vectores cartesianos**:

$$\left\{\hat{\mathbf{i}},\, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\} \tag{7}$$

Este conjunto de vectores tres vectores son linealmente independientes) de tal manera que cualquier vector **A** se puede escribir como suma de los tres vectores base de la siguiente manera (combinación lineal de los vectores base):

$$\mathbf{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z) = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{8}$$

Entonces la multiplicación por un escalar a esta dado por la siguiente expresión:

$$a\mathbf{A} = (aA_x,\, aA_y,\, aA_z) = aA_x\hat{\mathbf{i}} + aA_y\hat{\mathbf{j}} + aA_z\hat{\mathbf{k}} \tag{9}$$

Si tenemos dos vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_x,\, A_y,\, A_z) = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= (B_x,\, B_y,\, B_z) = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{10}$$

la suma de ambos vectores esta dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x + B_x,\, A_y + B_y,\, A_z + B_z) \\ &= (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_x + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{11}$$

Productos vectoriales.

Se define el **producto punto (escalar)** de dos vectores como:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta \tag{12}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre ambos vectores.
Propiedades:

1. El producto punto de dos vectores es un escalar.
2. El producto punto es conmutativo: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$
4. El producto punto de un vector consigo mismo es la magnitud del vector al cuadrado: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
5. La componentes o proyecciones de un vector en los ejes cartesianos:
   $A_x = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}$, $A_y = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}}$, $A_z = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{k}}$

Se define el **producto cruz (vectorial)** de dos vectores en tres dimensiones como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\mathbf{i}} - (A_x B_z - A_z B_x)\,\hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{13}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre ambos vectores.

1. El producto vectorial, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, resulta en un nuevo vector perpendicular al plano que definen los dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$
2. El producto vectorial es anticonmutativo: $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores paralelos $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = 0$
4. El producto vectorial de un vector consigo mismo es cero: $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$
5. La magnitud del producto vectorial esta dada por: $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta$
   El área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es igual a la magnitud de su producto vectorial:

$$\text{área paralelogramo } = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| \tag{14}$$