Examen 1

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF ENTRENAMIENTO 2016
Primer Entrenamiento-Selectivo 2016, CIMAT Guanajuato, 11 febrero 2016

Problema 1, mecánica.

(10 puntos) Desde el vértice de una esfera lisa de radio $R = 1$ m comienza a deslizarse un pequeño cuerpo de masa $m = 0.3$ kg. La esfera gira a una rapidez angular constante constante $\omega = 6.0$ rad/s al rededor de un eje vertical que pasa por su centro.

a) [2 puntos] Determina el ángulo al cual se separa el cuerpo de la esfera.

b) [3 puntos] Determina, en el sistema de referencia ligado a la esfera, el valor de la fuerza inercial centrífuga en el momento que el cuerpo se separa de la esfera.

c) [5 puntos] Lo mismo para la fuerza de Coriolis.

Problema 2, oscilaciones.

(10 puntos) Consideremos un bloque sujeto a un resorte que no obedece la ley de Hooke, la cual es solo una aproximación lineal al comportamiento real de los resortes cuando son estirados. En general la fuerza de un resorte se puede describir como una serie de potencias de la distancia que se estira el resorte lo cual complica la solución del movimiento del resorte y en general de abordar el problema requiere de técnicas sofisticadas de matemáticas. Consideremos entonces el caso donde la fuerza tiene un término adicional a la ley de Hooke que es cubico con la distancia:

$$F = -kx + \lambda x^3 \tag{1}$$

Para abordar el problema partimos de lo que conocemos sobre oscilador y de allí tratar de sugerir una solución. Sabemos que la solución del oscilador armónico, cuando $\lambda = 0$, es del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2}$$

donde A es la amplitud y ϕ es una fase constante que por simplicidad consideramos cero: $\phi = 0$. Siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la frecuencia de oscilación; la estrategia es suponer la "misma" solución para el problema original (1) pero con una frecuencia de oscilación diferente ω:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{3}$$

donde la frecuencia ω queda por determinar.

a) [5 puntos] Suponiendo como solución de prueba al oscilador armónico la ecuación (3) demuestra que se obtiene la siguiente ecuación para ω:

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2\right) A\cos(\omega t) - \frac{1}{4}\lambda A^3 \cos(3\omega t) = 0 \tag{4}$$

la solución en general de esta ecuación es cuando cada uno de los coeficientes de los cosenos son idénticamente cero (t varía), lo cual solo se satisface cuando $A = 0$ y por lo tanto la solución de prueba no "funciona"; sin embargo cuando el valor de λ es muy pequeño ($\lambda \approx 0$), entonces se puede encontrar una solución para ω:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3\lambda A^2}{4\omega_0}\right)^{1/2} \tag{5}$$

Para obtener una mejor aproximación se debe contemplar el segundo término de la ecuación (4), entonces ahora se propone una nueva solución del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(3\omega t) \tag{6}$$

b) [5 puntos] Demuestra que en este caso, suponiendo como solución del oscilador armónico la expresión anterior, se obtiene la siguiente ecuación para determinar el coeficiente B:

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2\right) A\cos(\omega t) + \left(-9B\omega^2 + \omega_0^2 B - \frac{1}{4}\lambda A^3\right)\cos(\omega t) + \\ +\text{términos con } B\lambda \text{ y ordenes mayores de } \omega t = 0 \tag{7}$$

Este procedimiento se puede continuar y obtener mejores aproximaciones. Aunque este procedimiento para abordar el problema es muy burdo, se obtienen dos resultados importantes: que el periodo de oscilación depende de la amplitud de oscilación y que el movimiento es una superposición de movimientos armónicos con frecuencias: ω, 3ω, etc.

Problema 3, termodinámica.

(10 puntos) Considera un modelo de la atmósfera donde la temperatura varía con la altura z de la siguiente manera:

$$T(z) = T_0 - \lambda z \tag{8}$$

donde $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ y $p_0 = 1\,\mathrm{atm} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ es la temperatura y presión a nivel del mar ($z = 0$); $\lambda = 6.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K/m}$ es una constante. Suponiendo que el aire de la atmósfera se comporta como un gas ideal diatómico ($\gamma = 7/5$) de masa molar: $M = 28.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$.

a) [2.5 puntos] Determina la expresión de la presión atmosférica como función de la altura: $p(z)$.

b) [2.5 puntos] Demuestra que la temperatura y la presión en la atmósfera satisfacen la siguiente relación:

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \tag{9}$$

donde $\alpha = R\lambda/Mg$ es un número adimensional, determina su valor ($R = 8.31$ J/Kmol).

c) [1 punto] A cierta altura de la atmósfera se pueden formar una burbuja de aire que tiene una temperatura diferente del aire que la rodea pero la misma presión. Si T_a es la temperatura de la atmósfera y T_b la temperatura de la burbuja, demuestra que cuando $T_b > T_a$ el globo se puede elevar.

Consideremos que durante la elevación de la burbuja el gas dentro de la burbuja cambia adiabáticamente. Si designamos con (p_1, T_1) su presión y temperatura inicial, cuando la burbuja se ha formado a una altura z_1, y (p_2, T_2) su presión y temperatura final cuando se eleva hasta la altura z_2.

d) [4 puntos] La elevación de la burbuja tiene un límite z_{max} a partir del cual ya no se eleva más. Si una burbuja se genera a una altura $z = 2\,\mathrm{km}$, con una temperatura inicial $T_1 = 280\,\mathrm{K}$. Determina la altura máxima a la que llega esta burbuja, determina también su presión y temperatura al llegar a esa altura máxima.

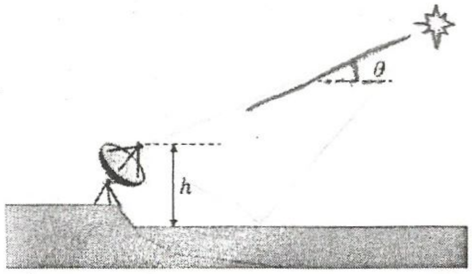
Problema 4, ondas.

(10 puntos) El detector de un observatorio radioastronómico se encuentra en el borde de un lago a una altura h= 2 m, tal dispositivo recolecta la señal proveniente de una estrella distante. Después de la aparición de la estrella en el horizonte, el detector registra un conjunto alternativo de máximos y mínimos de intensidad.

a) [6.0 puntos] Obtén una expresión para el ángulo entre la estrella y el horizonte en el momento cuando el detector registra máximos θ_{max} y mínimos de intensidad θ_{min}. Considera que la estrella emite ondas electromagnéticas de longitud de onda λ.

b) [3.0 puntos] Si el detector registra 20 máximos de intensidad durante la mitad del desplazamiento de la estrella en la bóveda celeste, ¿Cual es la longitud de onda máxima λ_{max} y mínima λ_{min} posible que puede tener la estrella?

c) [1.0 puntos] Teniendo en cuenta que el primer máximo de intensidad se detectó a un ángulo $\theta_1 = 1.45°$, obtén la longitud de onda de emisión de la estrella.



Herramientas Matemáticas

Identidades trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \tag{10}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \tag{11}$$