P1.- La delicada vida gravitatoria del cometa 67P/Churiumov-Guerasimenko .

El cometa 67P, descubierto en 1969 por los astrónomos Klim Churiumov y Svetlana Guerasimenko, se ha convertido recientemente en una "estrella" en los medios de comunicación. El motivo ha sido la visita que la Agencia Espacial Europea ha realizado con éxito a la superficie de este cometa. La sonda Rosetta, lanzada el 2 de marzo de 2004 desde la base de Kourou en la Guayana francesa, tras un largo viaje de diez años consiguió entrar en órbita en torno al cometa, y dejó caer el módulo Philae sobre su superficie. Sin embargo el "aterrizaje" (¿cometizaje?) tuvo dificultades: el módulo no se fijó a la superficie como estaba previsto, y rebotó varias veces hasta quedar en reposo en una zona recóndita y sombría donde los paneles solares apenas podían recargar sus baterías. No obstante, la misión ha proporcionado información científica valiosísima. Tanto es así que la prestigiosa revista *Science* ha calificado esta misión como el descubrimiento científico más importante del año 2014.

Desde la sonda Rosetta se pudo comprobar que 67P tiene una forma irregular, como se muestra en la fotografía de la figura 1, con dos lóbulos desiguales que, en primera aproximación, podemos imaginar como dos cuerpos esféricos homogéneos (señalados con línea de trazos en la figura 1), que se mantienen en contacto exclusivamente por la atracción gravitatoria mutua. El cometa está básicamente formado por hielo y polvo suelto y esponjoso, con escasa cohesión interna. En la figura 2 se esquematiza este modelo de dos cuerpos esféricos apoyados uno en otro, con indicaciones de sus centros, radios, etc. El punto A indica aproximadamente la situación del módulo Philae sobre la superficie (cráter a la derecha de la figura 1), alineado con los centros de las dos esferas.

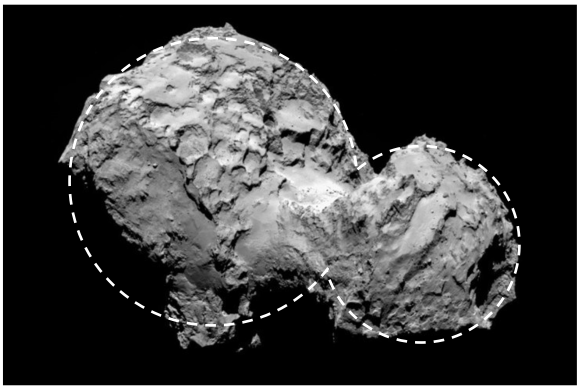


Fig. 1

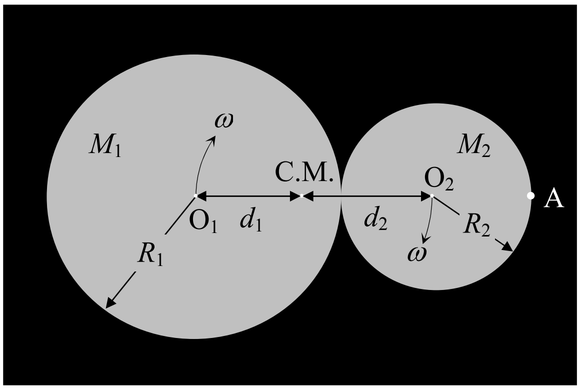


Fig. 2

Además, el cometa gira con velocidad angular ω en torno a un eje perpendicular al plano de la figura 2 y que pasa por el centro de masas del sistema (C.M.). Medidos desde la sonda Rosetta, el periodo de rotación y los radios aproximados de las esferas son $T = 12{,}4\ \text{h}$, $R_1 = 1{,}5\ \text{km}$ y $R_2 = 1{,}2\ \text{km}$.

a) Sabiendo que la masa total de 67P, medida desde el Rosetta, es $M = 1{,}0\times10^{13}\ \text{kg}$, determine analíticamente y calcule la densidad ρ del cometa y las masas M_1 y M_2 de cada uno de sus lóbulos esféricos.

b) Determine y calcule las distancias d_1 y d_2 entre el centro de masas y los centros O_1 y O_2 de las dos esferas[1].

c) Calcule la fuerza de atracción gravitatoria entre los dos lóbulos, F_G.

d) Teniendo en cuenta la rotación del sistema, determine y calcule la fuerza de apoyo normal de cada lóbulo sobre el otro, N.

[1] Quizá no conozca con detalle el concepto de "centro de masas", pues sobrepasa los límites del programa mínimo de Física del Bachillerato español. Para la resolución de este problema es suficiente saber que debe cumplirse la igualdad $M_1 d_1 = M_2 d_2$.

e) Determine y calcule el período de rotación crítico, T_c, por debajo del cual el cometa se disgregaría, al separarse las dos esferas.

f) Determine y calcule la aceleración de la gravedad en A, $g_{0,\mathrm{A}}$.

g) Teniendo en cuenta la rotación del cometa, ¿cuál es la gravedad aparente[2] en A, g_A?

h) El Philae *pesaba*[3] en la Tierra $w_T = 110\ \mathrm{kg}$. ¿Cuál será su *peso* (en gramos), w_A, una vez posado en A?

i) Imagine un hipotético astronauta que, con su traje espacial y equipo, es capaz de saltar en vertical (sin carrerilla e impulsándose hacia arriba con las piernas) una altura $h = 0{,}2\ \mathrm{m}$ en la Tierra. Sin tener en cuenta la rotación del cometa, ¿hasta qué altura saltaría desde el punto A de la superficie del cometa? Discuta su resultado.

Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

[2] Fuerza de apoyo sobre la superficie por unidad de masa.

[3] Este "peso" debe entenderse en el sentido coloquial que se usa en la vida cotidiana, por ejemplo cuando alguien dice que pesa 70 kilos.

P1. Solución

a) La masa total del cometa, supuesto de densidad constante ρ, es

$$M = M_1 + M_2 = \rho \frac{4}{3}\pi \left(R_1^3 + R_2^3\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{3M}{4\pi\left(R_1^3 + R_2^3\right)}} \quad ; \quad \boxed{\rho = 4{,}7\times 10^{2}\ \mathrm{kg/m^3}}$$

Conocida la densidad, es inmediato obtener las masas de los dos lóbulos. Se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= 6{,}6\times 10^{12}\,\mathrm{kg} \\ M_2 &= 3{,}4\times 10^{12}\,\mathrm{kg} \end{aligned}}$$

b) Para determinar las distancias d_1 y d_2 de los centros de cada lóbulo al centro de masas del sistema utilizamos la expresión que nos facilita la nota 1, a pié de página del enunciado

$$M_1 d_1 = M_2 d_2 \qquad (1)$$

Por otra parte, observando la figura 2

$$d_1 + d_2 = R_1 + R_2 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 &= \frac{M_2}{M}(R_1 + R_2) \\ d_2 &= \frac{M_1}{M}(R_1 + R_2) \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} d_1 &= 0{,}9\ \mathrm{km} \\ d_2 &= 1{,}8\ \mathrm{km} \end{aligned}}$$

c) La distancia entre los centros de las esferas es $d = R_1 + R_2$, por lo que el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre los dos lóbulos es

$$F_G = G\frac{M_1 M_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Operando se obtiene

$$\boxed{F_G = 2{,}1\times 10^{8}\,\mathrm{N}}$$

d) Si consideramos el movimiento de, por ejemplo, el lóbulo 2, su centro O_2 está describiendo una trayectoria circular de radio d_2 con velocidad angular $\omega = 2\pi / T$ en torno al C.M., y por tanto se mueve con una aceleración centrípeta de módulo constante $\omega^2 d_2$. Sobre este lóbulo actúan en dirección central la fuerza F_G de atracción del lóbulo 1 y, en sentido opuesto, la fuerza de apoyo sobre este mismo lóbulo, N (véase la figura 3). En este caso, la segunda ley de Newton se escribe

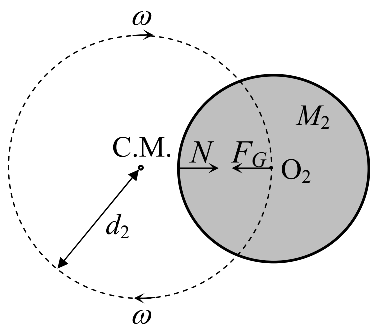


Fig. 3

$$F_G - N = M_2\,\omega^2 d_2$$

Por tanto, la fuerza de apoyo entre los lóbulos es[4]

$$\boxed{N = F_G - M_2\,\omega^2 d_2}$$

[4] Aunque las *fuerzas de inercia* están proscritas en la Enseñanza media actual, esta ecuación puede interpretarse de una forma más sencilla y directa como que la normal es igual a la fuerza de atracción gravitatoria menos la fuerza centrífuga (condición de equilibrio planteada por un observador no inercial que gira con el cometa).

Con los datos del problema y los resultados de los apartados anteriores se obtiene

$$\boxed{N = 8{,}5\times 10^{7}\ \text{N}}$$

Nótese que se obtendría el mismo resultado si se estudiase el movimiento de la esfera 1, puesto que se cumple $M_1 d_1 = M_2 d_2$.

e) Supuesto que no existe ninguna fuerza de adherencia entre las dos esferas, se separarán cuando su trayectoria circular requiera una fuerza centrípeta superior a la de atracción gravitatoria, es decir cuando

$$M_2\,\omega^2 d_2 > F_G$$

En otras palabras, la velocidad angular crítica correspondería a una trayectoria circular como la considerada en el apartado anterior, pero con $N = 0$.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{F_G}{M_2\,d_2}} \quad\Rightarrow\quad \omega_c = 1{,}84\times 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

El periodo de revolución crítico sería

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_c = 2\pi\sqrt{\frac{M_2\,d_2}{F_G}}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_c = 9{,}5\ \text{h}}$$

f) La gravedad en el punto A, $g_{0,A}$, es la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto, debida a la suma de las atracciones gravitatorias de los dos lóbulos que constituyen el cometa.

$$\boxed{g_{0,A} = G\left(\frac{M_1}{(R_1+2R_2)^2} + \frac{M_2}{R_2^{\,2}}\right)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{g_{0,A} = 1{,}9\times 10^{-4}\ \text{m/s}^2}$$

g) La gravedad aparente en A es la fuerza de apoyo sobre la superficie por unidad de masa. El punto A describe una trayectoria circular de radio $d_2 + R_2$ en torno al C.M., de forma que, con un razonamiento análogo al del apartado (4), se tiene

$$\boxed{g_A = g_{0,A} - \omega^2 (d_2 + R_2)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{g_A = 1{,}3\times 10^{-4}\ \text{m/s}^2}$$

h) Cuando el enunciado expresa en kg el "peso" del módulo Philae en la Tierra, $w_T = 110\ \text{kg}$, realmente lo está expresando en "kilogramos fuerza" o "kilopondios", que es lo que en la vida cotidiana llamamos simplemente "kilos". Debemos entender, en un lenguaje estricto, que la masa del Philae es $m = 110\ \text{kg}$. Naturalmente, esta masa es la misma en P67 que en la Tierra.

El peso, w_A, del módulo cuando esté situado en el punto A del cometa es

$$w_A = m\,g_A \quad\Rightarrow\quad w_A = 1{,}4\times 10^{-2}\ \text{N}$$

Traduciendo de nuevo al lenguaje coloquial, un kilogramo fuerza equivale a 9,8 N, luego Philae en el punto A del cometa "pesa" tan solo

$$\boxed{w_A = 1{,}4\ \text{g}}$$

i) Para que el astronauta, de masa *m*, realice un salto "vertical" de altura máxima $h = 0{,}2\ \text{m}$ en la superficie de la Tierra, necesita una velocidad inicial, v_0, que debe cumplir

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m\,g\,h \qquad (3)$$

Para realizar el salto, debe flexionar las piernas e impulsarse hacia arriba. El trabajo que realizan sus músculos durante este proceso aporta la energía necesaria, dada en (3). La velocidad inicial resulta

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,h} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = 2{,}0 \text{ m/s}$$

Si el hipotético astronauta realizase el salto vertical en el punto A del cometa 67P, sus músculos realizarían el mismo trabajo que en la Tierra, y la velocidad inicial v_0 sería por tanto la misma que en la Tierra. Pero, dada la "levedad" del cometa, es evidente que va a alcanzar una altura H mucho mayor que h, probablemente no despreciable frente a las dimensiones del cometa. Esta altura máxima H puede obtenerse planteando la conservación de la energía mecánica, con energía cinética nula en el punto más alto, pero empleando la forma general de la energía potencial en el campo gravitatorio de las dos esferas, en vez de la típica forma *mgh* que corresponde al campo aproximadamente uniforme en las proximidades de la superficie.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2} = -G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2 + H} - G\frac{M_2 m}{R_2 + H} \tag{4}$$

De esta ecuación puede despejarse H, aunque es bastante engorroso, pero al realizar cálculos numéricos se llega a resultados absurdos. El problema matemático está en que el segundo miembro de (4) es forzosamente menor o igual que cero, mientras que el primero, con los valores numéricos del problema, es positivo, de forma que la igualdad es imposible.

Desde el punto de vista físico, una energía mecánica inicial positiva indica que la velocidad inicial del astronauta, tras el salto, es superior a la *velocidad de escape*, con lo cual se alejaría indefinidamente del cometa y pasaría a ser un curioso asteroide orbitando en torno al Sol.

Para comprobarlo, puede calcularse fácilmente la velocidad de escape, planteando que la energía mecánica inicial sea nula, de forma que pueda llegar hasta el infinito, donde la energía potencial es nula, con energía cinética también nula.

$$\frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 - G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$v_{\text{esc}} = \left[2G\left(\frac{M_1}{R_1 + 2R_2} + \frac{M_2}{R_2} \right) \right]^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad v_{\text{esc}} = 0{,}78 \text{ m/s}$$

Se comprueba que, efectivamente, $v_0 > v_{\text{esc}}$, de forma que el astronauta saltarín iniciaría un viaje… "a las chimbambas".

P1.- Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$\rho = \dfrac{3M}{4\pi\left(R_1^3 + R_2^3\right)}$	$\rho = 4{,}7\times10^2\ \mathrm{kg/m^3}$ $M_1 = 6{,}6\times10^{12}\,\mathrm{kg}$ $M_2 = 3{,}4\times10^{12}\,\mathrm{kg}$	1 (0,25x4)
b)	$d_1 = \dfrac{M_2}{M}(R_1 + R_2)$ $d_2 = \dfrac{M_1}{M}(R_1 + R_2)$	$d_1 = 0{,}9\ \mathrm{km}$ $d_2 = 1{,}8\ \mathrm{km}$	1 (0,25x4)
c)		$F_G = 2{,}1\times10^8\,\mathrm{N}$	0,25
d)	$N = F_G - M_2\,\omega^2 d_2$	$N = 8{,}5\times10^7\ \mathrm{N}$	0,5+0,25
e)	$T_c = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_2 d_2}{F_G}}$	$T_c = 9{,}5\ \mathrm{h}$	1+0,25
f)	$g_{0,A} = G\left(\dfrac{M_1}{(R_1+2R_2)^2} + \dfrac{M_2}{R_2^{\,2}}\right)$	$g_{0,A} = 1{,}9\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$	1+0,25
g)	$g_A = g_{0,A} - \omega^2(d_2 + R_2)$	$g_A = 1{,}3\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$	1,5+0,25
h)		$w_A = 1{,}4\ \mathrm{g}$	0,75
i)	La velocidad inicial del salto vertical de altura h, en la Tierra: $v_0 = \sqrt{2\,g\,h} \;\Rightarrow\; v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m/s}$ Velocidad de escape en el cometa 67P: $v_{\mathrm{esc}} = \left[2G\left(\dfrac{M_1}{R_1+2R_2} + \dfrac{M_2}{R_2}\right)\right]^{1/2} \;\Rightarrow\; v_{\mathrm{esc}} = 0{,}78\ \mathrm{m/s}$ Como $v_0 > v_{\mathrm{esc}}$, el astronauta se alejaría indefinidamente del cometa.		2

P2.- El escape de áncora.

Como es bien sabido desde hace tiempo, las oscilaciones de un péndulo son isócronas, por lo que son idóneas como referencia para la medida del tiempo en los relojes. Sin embargo, las oscilaciones de un péndulo real son siempre amortiguadas, pues siempre hay pérdidas energéticas que reducen paulatinamente su amplitud. Por lo tanto, su aplicación en un reloj requiere la incorporación de un dispositivo que suministre en cada oscilación una energía igual a la disipada, de forma que la amplitud de oscilación del péndulo sea constante. El *escape de áncora*, llamado así porque se asemeja al ancla (o áncora) de un barco, es un ingenioso mecanismo inventado hacia 1670 por el relojero londinense William Clement para conseguir este fin. El movimiento del péndulo mece la pieza llamada *áncora* de tal manera que traba y destraba sucesivos dientes de la *rueda de escape*, lo que a su vez permite que la rueda gire un ángulo preciso en cada oscilación. Los encuentros del áncora con la rueda de escape, al llegar el péndulo a los extremos de su recorrido, producen el tic-tac característico de estos relojes.

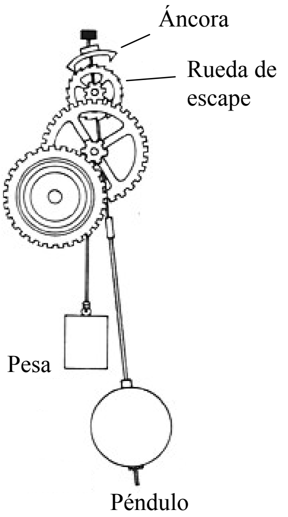


Fig. 1.a

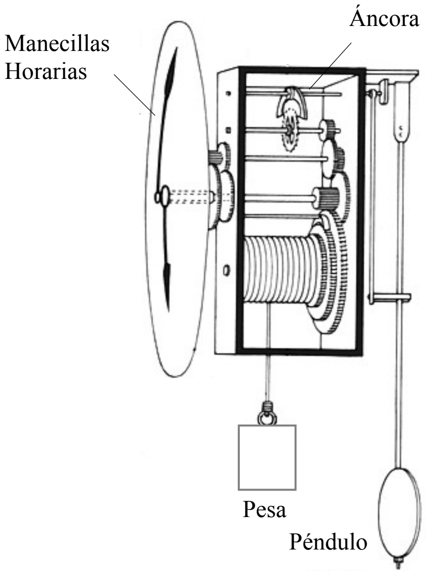


Fig. 1.b

En las figuras 1.a (vista frontal) y 1.b (vista semilateral) se representan los principales componentes de un reloj de péndulo:

El *péndulo***:** constituido por una masa (*lenteja*) situada en el extremo de una varilla metálica.

La *pesa*: masa que cuelga de un hilo enrollado en un cilindro giratorio, al que se conectan mediante engranajes multiplicadores las manecillas del reloj. La pesa desciende muy lentamente, haciendo girar los engranajes y las manecillas, y perdiendo energía potencial que, en parte, se transfiere al péndulo. Esta pesa es, por tanto, la "fuente de alimentación" energética del reloj.

El *escape de áncora* (figura 2): la rueda de escape está formada por una rueda dentada con dientes de tallado especial, conectada mediante los engranajes adecuados al eje de las manecillas y a la pesa. El áncora oscila solidariamente con el péndulo y sus extremos contactan con los dientes de la rueda de escape al final de cada semioscilación. El sistema cumple una doble función: por una parte controla la marcha del reloj dejando pasar un único diente de la rueda en cada oscilación completa del péndulo, de forma que el sistema gira el mismo ángulo en cada periodo; por otra, en cada contacto la rueda da un pequeño impulso al áncora, y por tanto al péndulo, para compensar el amortiguamiento y mantener constante la amplitud de sus oscilaciones.

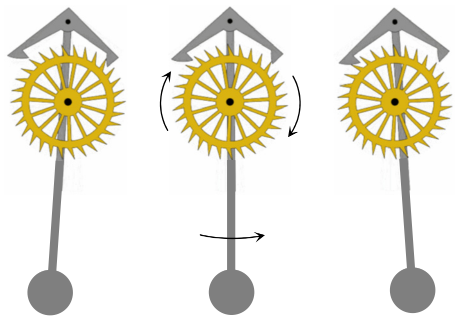


Fig. 2

En cada semioscilación, la rueda de escape se mantiene en contacto con el áncora durante un pequeño intervalo de tiempo, durante el que el sistema no gira. El resto del tiempo gira libremente, accionada por el descenso de la pesa, y con ella todo el sistema de engranajes y las propias manecillas del reloj.

De esta forma, la pesa desciende lentamente, a pequeños saltos siempre iguales. La energía potencial que pierde se transfiere al propio péndulo, para compensar la energía disipada en cada oscilación, y también al sistema de engranajes para compensar las perdidas por fricción.

a) El péndulo de un reloj, situado en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, realiza una semioscilación en 1 s (se dice que el péndulo *bate segundos*). Calcule la longitud L del péndulo simple equivalente, es decir que oscilaría con el mismo periodo.

b) Determine la energía mecánica del péndulo, E, en función de la amplitud angular de sus oscilaciones, $\theta_{\max}$, y de la longitud L y la masa M del péndulo.

c) Demuestre que, para pequeñas oscilaciones, la energía mecánica del péndulo es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir $E \propto \theta_{\max}^2$.

Ayuda: puede serle útil la relación trigonométrica $1 - \cos\alpha = 2\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

d) Determine la potencia media disipada por fricción en todo el mecanismo, P, en función de la altura H que desciende la pesa durante un tiempo τ y de la masa m de la pesa. Calcule P cuando $H = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $\tau = 1$ semana y $m = 0{,}25$ kg.

e) Calcule la relación r entre las velocidades angulares de la rueda de escape, ω_a, y de la aguja horaria del reloj, ω_h, suponiendo que el número de dientes de la rueda de escape es $N = 30$.

Suponga que al reloj se le retira la rueda de escape. La pesa ya no aportará energía al péndulo y, en consecuencia, sus oscilaciones tendrán una amplitud cada vez menor. Llamaremos γ a la fracción de energía que conserva el péndulo al cabo de una oscilación completa, es decir $E_1 = \gamma E_0$, donde E_0 y E_1 son las energías del péndulo al principio y al final de una oscilación, respectivamente.

f) Determine, en función de γ, el número de oscilaciones del péndulo hasta que su amplitud se reduce a la mitad de la inicial. Si $\gamma = 0{,}99$ y el péndulo bate segundos, calcule el tiempo que transcurre, $\tau_{1/2}$.

El cambio de L al variar la temperatura puede afectar apreciablemente al periodo de oscilación del péndulo de un reloj. Suponga que, para poder compensar este efecto, L es ajustable en pequeñas cantidades, δL. Llamando α al coeficiente de dilatación lineal de la varilla del péndulo, de longitud L_0,

g) Determine δL para mantener el periodo de oscilación si la temperatura aumenta δt.

Para conseguir que el periodo de las oscilaciones del péndulo de un reloj no dependa de la temperatura, se utilizan los *péndulos compensados*, según idea de J. Leroy en 1738. En la Figura 3 se representa un péndulo compensado, formado por cinco varillas verticales y dos barras horizontales AB y CD. El sistema oscila en torno al punto de suspensión O. Las varillas externas y central son de un metal de coeficiente de dilatación lineal α, y las varillas intermedias son de otro metal, de coeficiente de dilatación lineal β. La varilla central atraviesa la barra CD a través de un orificio, pudiendo deslizar libremente a través de él. L_1, L_2 y L_3 son las longitudes de las varillas a temperatura ambiente.

h) ¿Qué relación debe existir entre α y β para que el periodo de oscilación del péndulo sea independiente de la temperatura?

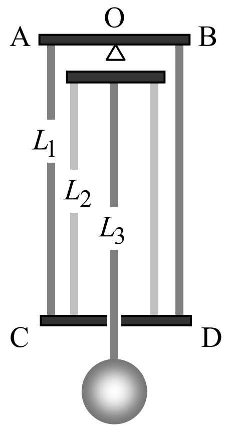


Fig. 3

Solución P2

a) El periodo de oscilación de un péndulo simple[1] es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si el péndulo "bate segundos", $T = 2$ s. Por lo tanto

$$L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 0{,}994 \text{ m}}$$

b) El péndulo simple es un sistema conservativo. Tomando como nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria la horizontal que pasa por el punto central de la oscilación, y considerando el instante en el que el desplazamiento angular es máximo (energía cinética nula), la energía mecánica coincide con la potencial, de forma que

$$\boxed{E = M\,g\,L\left(1 - \cos\theta_{\max}\right)} \qquad (1)$$

c) La expresión (1) es válida para cualquier valor de $\theta_{\max}$, pero el péndulo oscila armónicamente con periodo independiente de la amplitud sólo cuando $\theta_{\max}$ es pequeña.

En una primera aproximación, si para amplitudes pequeñas tomamos $\cos\theta_{\max} \approx 1$, la expresión (1) nos da $E = 0$. Es preciso "refinar" la aproximación. Para ello se puede recurrir a un desarrollo en serie del coseno, o bien a la expresión trigonométrica dada en el enunciado:

$$1 - \cos\theta_{\max} = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta_{\max}}{2}$$

Como es bien sabido, para ángulos pequeños $\mathrm{sen}\,\varepsilon \approx \varepsilon$, luego para pequeñas amplitudes se tiene que

$$1 - \cos\theta_{\max} \approx 2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)^2 = \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

Por lo que la energía mecánica resulta ser, para pequeñas oscilaciones,

$$\boxed{E = \frac{1}{2}M\,g\,L\,\theta_{\max}^2} \qquad (2)$$

Esta energía resulta proporcional al cuadrado de la amplitud, como se trataba de demostrar.

También se puede llegar a la misma conclusión sin recurrir a (1). Basta tener en cuenta que, para pequeñas oscilaciones, el comportamiento del péndulo es armónico y, por tanto, la elongación angular en función del tiempo, $\theta(t)$, viene dada por

$$\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$

Donde tanto $\theta_{\max}$ como φ son constantes del movimiento dependientes de las condiciones iniciales, y $\omega = 2\pi/T$.

La energía cinética es

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}M v^2 = \frac{1}{2}M\left(L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Derivando $\theta(t)$ respecto al tiempo y sustituyendo, resulta

[1] Realmente el sistema es un "péndulo físico" pero, lamentablemente, en los programas de enseñanza vigentes la Mecánica del Sólido Rígido está prácticamente eliminada.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 \theta_{\max}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

La energía mecánica, *E*, es igual a la energía cinética máxima, por lo que

$$E = \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 \theta_{\max}^2 = \frac{1}{2} M g L \theta_{\max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E \propto \theta_{\max}^2}$$

d) La pesa desciende una altura *H* con velocidad prácticamente nula, y toda su energía potencial inicial se disipa en las distintas partes del reloj. Si el tiempo de descenso es τ, la potencia media disipada es

$$\boxed{P = \frac{mgH}{\tau}}$$

Si $m = 0{,}25$ kg $H = 1{,}5$ m y $\tau = 1\,\text{semana} = 6{,}05 \times 10^5$ s , resulta

$$\boxed{P = 6{,}08 \times 10^{-6}\ \text{W}}$$

e) El péndulo efectúa una oscilación en un tiempo *T*, durante el que la rueda de escape gira el ángulo correspondiente a un diente, es decir $2\pi/N$ radianes, donde *N* es el número de dientes de dicha rueda. Por tanto, su velocidad angular media ω_a es

$$\omega_a = \frac{2\pi / N}{T}$$

Para $N = 30$ y $T = 2$ s, se obtiene

$$\omega_a = 0{,}105\ \text{rad/s}$$

Por otra parte, la aguja horaria tarda 12 horas en girar 2π radianes, luego su velocidad angular es

$$\omega_h = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = 1{,}45 \times 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

La relación entre ambas velocidades angulares, resulta

$$\boxed{r = \frac{\omega_a}{\omega_h} = 720}$$

Esta es la relación de multiplicación que deben tener los engranajes entre el eje de la rueda de escape y el eje de las manecillas del reloj.

f) El péndulo inicia una primera oscilación con energía E_0. Al terminar esta oscilación la energía se ha reducido a $E_1 = \gamma E_0$. Ésta es la energía con que comienza la segunda oscilación, que termina con $E_2 = \gamma E_1 = \gamma^2 E_0$, y así sucesivamente. Tras la n-ésima oscilación, la energía será

$$E_n = \gamma^n E_0$$

Según (2), la energía del péndulo es proporcional al cuadrado de la amplitud, de forma que

$$(\theta_{\max})_n^2 = \gamma^n (\theta_{\max})_0^2 \qquad (3)$$

La incógnita es el número *n* de oscilaciones para que la amplitud se reduzca a la mitad de la inicial

$$(\theta_{\max})_n = \frac{1}{2} (\theta_{\max})_0$$

Llevando esta igualdad a (3) se deduce que $\gamma^n = 1/4$.

Finalmente, tomando logaritmos, el número de oscilaciones es

$$\boxed{n = -\frac{\ln 4}{\ln \gamma}}$$

Si $\gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad n = 138$ oscilaciones

Como el periodo es $T = 2$ s, el tiempo que transcurre es

$$\boxed{\tau_{1/2} = 276 \text{ s}}$$

g) Si α es el coeficiente de dilatación lineal de una varilla de longitud L_0, el cambio de longitud δL debido a un cambio de temperatura δt viene dado por

$$\boxed{\delta L = \alpha L_0 \delta t}$$

Si la temperatura ha aumentado δt, la longitud también aumenta, luego para mantener el periodo de oscilación debe disminuirse la longitud del péndulo en esta cantidad δL.

h) La dilatación de las varillas L_1 y L_3 debida a una variación δt hace descender la lenteja en la cantidad

$$\Delta L_1 + \Delta L_3 = \alpha (L_1 + L_3) \delta t \qquad (4)$$

Mientras que la dilatación de las varillas intermedias la hará ascender en

$$\Delta L_2 = \beta L_2 \delta t \qquad (5)$$

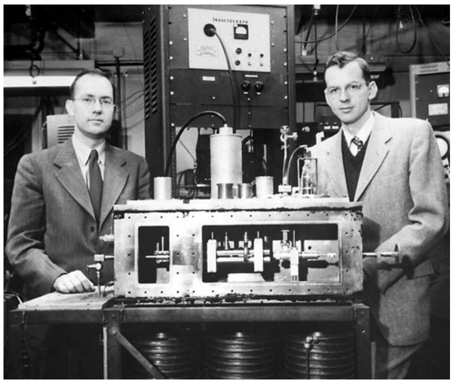
Para que la longitud efectiva del péndulo no se modifique, el ascenso y el descenso deben ser iguales. Igualando (4) y (5), se obtiene

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \frac{L_1 + L_3}{L_2}}$$

P2.- HOJA DE RESPUESTAS

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)		$L = 0{,}994$ m	0,5
b)	$E = M\, g\, L(1 - \cos\theta_{\max})$		1
c)	$E \approx \frac{1}{2} M\, g\, L \theta_{max}^2$		1,5
d)	$P = \frac{mg\, H}{\tau}$	$P = 6{,}08 \times 10^{-6}$ W	0,75+0,25
e)		$r = \frac{\omega_a}{\omega_h} = 720$	1,5
f)	$n = -\frac{\ln 4}{\ln \gamma}$	$\tau_{1/2} = 276$ s	1,5+1
g)	$\delta L = \alpha\, L_0\, \delta t$		0,5
h)	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{L_1 + L_3}{L_2}$		1,5

P3.- El máser[1]



Charles Townes (izquierda) con su colaborador en la Universidad de Columbia James Gordon, y el primer máser (1955).

El término MÁSER es el acrónimo de *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. El máser es el precursor del máser óptico o LÁSER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), que funciona de forma similar, pero emitiendo luz visible.

En este problema vamos a estudiar algunos aspectos del primer máser construido por Townes y sus colaboradores Gordon y Zeiger en 1955. Se trata de un máser de amoníaco, un aparato que rezuma física por todas partes.

Funcionamiento

El máser y el láser están basados en el fenómeno de *emisión estimulada de radiación*, estudiado por Albert Einstein en 1916: Cuando una molécula se halla en un estado *excitado*, de energía E_2 mayor que la de su estado *fundamental*, E_1, puede producirse la transición espontánea del nivel excitado al fundamental, emitiendo un fotón cuya frecuencia corresponde al salto energético $\Delta E = E_2 - E_1$ entre los dos niveles.

Pero si un fotón de esa misma frecuencia incide sobre una molécula en el estado excitado, se puede inducir o *estimular* la transición al fundamental, resultando dos fotones de la misma frecuencia, el incidente más el emitido. Cuando el fenómeno ocurre dentro de una cavidad de paredes reflectoras (*cavidad resonante*), se desencadena una cascada de emisiones estimuladas y se amplifica la radiación inicial, siempre que dentro de la cavidad se mantenga de alguna forma la población de moléculas excitadas. Un orificio en la cavidad resonante deja salir parte de la radiación (microondas en el máser o luz en el láser) en forma de un haz estable, unidireccional y muy monocromático, es decir de una frecuencia bien determinada.

El máser de amoníaco de Townes

La molécula de amoníaco puede tener dos estados de energía dependiendo de su orientación espacial respecto al sentido de rotación de la molécula. Para la rotación mostrada en las figuras 1.a y 1.b, se presenta el estado 1 de menor energía cuando el átomo de nitrógeno está por debajo de los átomos de hidrógeno, y el estado 2 de mayor energía cuando el nitrógeno está por encima. Estos dos niveles son muy próximos: la diferencia de energía entre ellos es tan sólo $\Delta E = 9{,}84 \times 10^{-5}$ eV, lo que explica que la radiación emitida en la transición sea de microondas (figura 1.c).

Estado1
Energía E_1

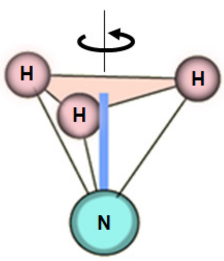


Fig. 1.a

Estado2
Energía E_2

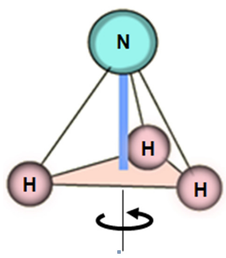


Fig. 1.b

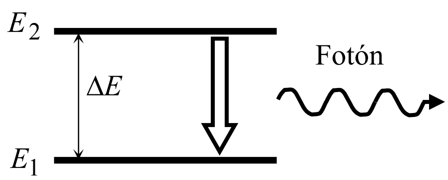


Fig. 1.c

[1] Este problema es un homenaje a Charles Townes, que falleció el 27 de enero de este año. Fue laureado con el premio Nobel de Física en 1964 por la invención del máser y por los primeros desarrollos del láser.

a) Calcule la frecuencia de la radiación emitida en la transición entre los estados 2 y 1.

Datos: carga elemental $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; constante de Planck $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s .

b) El máser de Townes emitía con una potencia de 10^{-10} W. ¿Cuántas moléculas efectivas de amoníaco emitían radiación en cada segundo?

El máser es un oscilador extraordinariamente estable y monocromático, por lo que sirvió como patrón para la fabricación de los primeros relojes atómicos. La frecuencia de la radiación emitida por el máser de amoníaco tiene una incertidumbre (ancho de banda) de tan solo 75 Hz.

c) Haga una estimación del número de años que han de transcurrir para que el reloj acumule un error de 1 s.

Un tanque de amoníaco suministra las moléculas al aparato. A temperatura ambiente, los dos estados están prácticamente igual de poblados, es decir, la mitad de las moléculas está en cada uno de estos estados. Para que la emisión estimulada domine sobre la absorción de radiación, y por tanto haya amplificación, es necesario disponer de más moléculas en el estado excitado que en el fundamental. Para ello, hay que seleccionar las moléculas con energía E_2 y descartar las de E_1 antes de que entren en la cavidad resonante.

Esto se consigue con un dispositivo llamado *selector*. Consiste en una *lente electrostática cuadrupolar* formada por cuatro electrodos situados longitudinal y simétricamente alrededor del haz de moléculas procedente del tanque (figura 2). Dos electrodos opuestos están conectados a una fuente de tensión V_e y los otros dos a $-V_e$.

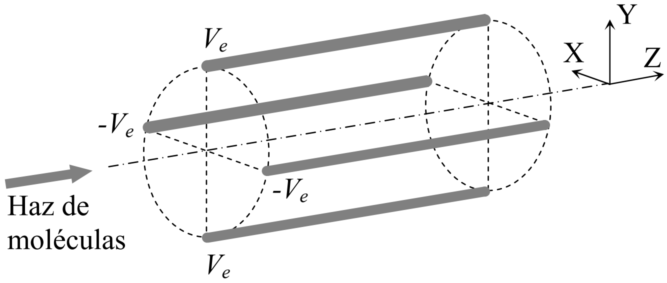


Fig. 2

Para comprender cómo es la distribución de potencial eléctrico dentro de este selector, en primer lugar vamos a estudiar un modelo simplificado de sistema cuadrupolar, formado por cuatro cargas puntuales $\pm q$ situadas simétricamente sobre los ejes coordenados a una distancia d del origen O, como se indica en la figura 3.

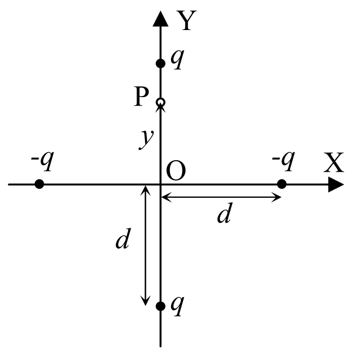


Fig. 3

d) Determine el potencial electrostático $V(y)$ en el punto P de la figura 3, situado a una distancia y del origen, en función de y, d y q.

e) Desarrolle la expresión anterior de $V(y)$ en serie de potencias de y/d, y obtenga una expresión aproximada suponiendo que $y \ll d$. Considere despreciables potencias superiores a 2 del cociente y/d.

Ayuda: Tenga en cuenta el desarrollo en serie binomial

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2!}\delta^2 + \ldots$$

Extendiendo el cálculo anterior a cualquier punto P del plano XY se encuentra que el potencial cerca de O tiene una dependencia hiperbólica

$$V(x,y) \propto (y^2 - x^2)$$

En un selector real el sistema cuadrupolar no está formado por cargas sino por varillas conductoras hiperbólicas conectadas a un potencial $\pm V_e$ que producen líneas equipotenciales también hiperbólicas (figura 4)

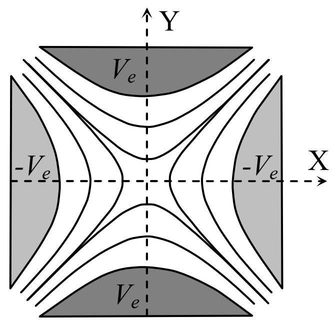


Fig. 4 Líneas equipotenciales

$$V(x,y)=V_e\frac{y^2-x^2}{r_e^2} \qquad (1)$$

donde r_e es la distancia del centro a cada electrodo. En el máser de Townes, $r_e = 0{,}5$ cm y $V_e = 15$ kV.

Por simplicidad en adelante vamos a trabajar exclusivamente en el plano YZ, es decir $x = 0$.

Nótese que en las expresiones anteriores no hay ninguna dependencia con z, lo que significa que pueden despreciarse, o están compensados por algún método, los efectos debidos a la falta de invariancia longitudinal cerca de los extremos de entrada y salida del selector (*efectos de bordes*).

f) Justifique que el campo eléctrico en un punto del plano YZ sólo tiene componente y. A partir de la expresión (1), compruebe que el campo es de la forma $\mathcal{E}(y)=-Cy$. Determine y calcule numéricamente la constante C.

Cuando las moléculas de amoníaco (que son moléculas dipolares) penetran en el selector, la interacción con el campo eléctrico hace que la energía de sus dos niveles se vea perturbada por un término de energía potencial, U, que disminuye la energía del estado 1 y aumenta la del 2 en esa misma cantidad. Un estudio de mecánica cuántica, que queda fuera de las posibilidades de la Enseñanza Secundaria, permite demostrar que esta energía potencial es proporcional al cuadrado del campo eléctrico (*efecto Stark cuadrático*), de la forma

$$U(r)=\pm\frac{\mu^2}{\Delta E}\mathcal{E}(r)^2 \qquad (2)$$

donde μ es una constante conocida (momento dipolar eléctrico de la molécula) y $\mathcal{E}(r)$ es el campo eléctrico a una distancia $r=\sqrt{x^2+y^2}$ del eje OZ. Esta energía es positiva para las moléculas en el estado 2 y negativa para las que están en el estado 1, de ahí el doble signo.

En consecuencia, sobre las moléculas actúa una fuerza radial, $F(r)$ de sentido contrario para los dos estados. En nuestro estudio en el plano YZ, la dependencia $F(r)$ se reduce a $F(y)$.

g) Determine la fuerza $F(y)$ sobre una molécula en función de μ, ΔE y C.

Supongamos que las moléculas penetran en el selector a una altura y_0 y con velocidad v_0 paralela al eje OZ (figura 5). Sobre las moléculas en el estado 1 actúa una fuerza que las aleja de este eje, de forma que en la práctica no alcanzan la salida. Sin embargo, sobre las moléculas en el estado 2 actúa una fuerza proporcional a y dirigida siempre hacia el eje OZ (fuerza elástica), de forma que avanzan realizando una oscilación armónica en torno a dicho eje, en la forma

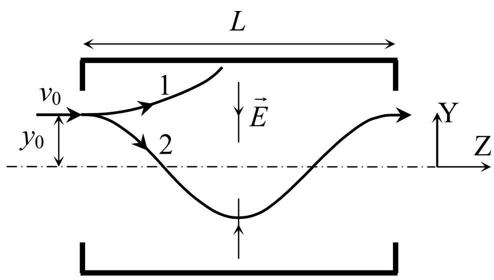


Fig. 5

$$y=y_0\cos(kz) \qquad (3)$$

h) Determine la frecuencia espacial de la oscilación, k, de las moléculas del estado 2, en función de μ, ΔE, C, v_0 y la masa m de una molécula.

Interesa que las moléculas excitadas salgan del selector moviéndose hacia la cavidad resonante en paralelo al eje OZ, como ocurre en la figura 5. Esto puede conseguirse con varias posibles longitudes L del selector.

i) Determine la mínima longitud, L_{min}, que puede tener el selector.

P3. Solución

a) Frecuencia de la radiación emitida en la transición entre los estados 2 y 1:

$$\Delta E = 9{,}84\times10^{-5}\ \text{eV}\times 1{,}60\times10^{-19}\ \text{J/eV} = 1{,}57\times10^{-23}\ \text{J}$$

$$\Delta E = hf \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f = 23{,}7\ \text{GHz}}$$

b) Número de moléculas efectivas de amoníaco que emiten radiación en cada segundo:

$$N = 10^{-10}/\Delta E \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N = 6\times10^{12}\ \text{moléculas/s}}$$

c) La incertidumbre relativa de la frecuencia del reloj es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{75}{24\times10^{9}} = 3{,}2\times10^{-9}$$

El periodo de oscilación T (patrón de tiempo) es $T = 1/f$. Tomando incrementos en esta igualdad, es inmediato demostrar que la incertidumbre relativa del periodo coincide con la de la frecuencia

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta f}{f}$$

Por tanto, para que el reloj acumule un error $\Delta t = 1\ \text{s}$, una estimación del tiempo transcurrido es

$$t = \frac{\Delta t}{3{,}2\times10^{-9}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = 3{,}1\times10^{8}\ \text{s} \approx 10\ \text{años}}$$

d) El potencial electrostático a una distancia r de una carga puntual q es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

En nuestro caso, el potencial total en el punto P es la suma de las contribuciones de las cuatro cargas

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d-y} + \frac{1}{d+y} - \frac{2}{\sqrt{d^2+y^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2d}{d^2-y^2} - \frac{2}{\sqrt{d^2+y^2}}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{d}\left(\frac{1}{1-(y/d)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}}\right)} \qquad (4)$$

e) Teniendo en cuenta el desarrollo en serie indicado en el enunciado, con $\delta = \mp(y/d)^2$

$$\frac{1}{1-(y/d)^2} = \left(1-(y/d)^2\right)^{-1} \approx 1+(y/d)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}} = \left(1+(y/d)^2\right)^{-1/2} \approx 1-\frac{1}{2}(y/d)^2$$

Con esta aproximación, la expresión (4) se reduce a

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{d}\left(\frac{3}{2}(y/d)^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V \approx \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y^2}{d^3}}$$

Se obtiene por fin una dependencia $V \propto y^2$, del mismo tipo que la dependencia real dentro del selector indicada en la ecuación (1) del enunciado.

f) Si se desprecian, o están compensados, los efectos de los bordes, el campo eléctrico en el plano YZ está dirigido según OY, con sentido hacia el origen, pues se compensan las componentes E_x de los campos de los electrodos negativos, como se esquematiza en la figura (6).

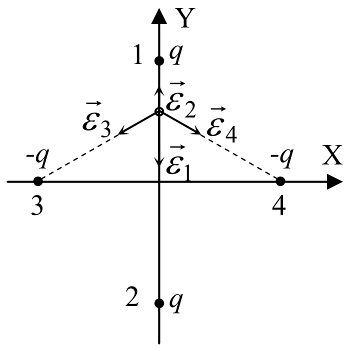


Fig. 6

En total, en los puntos del plano YZ

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_y \vec{j}$$

Para un desplazamiento infinitesimal dentro de este plano

$$d\vec{r} = dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

se cumple

$$dV = -\vec{\varepsilon} \cdot d\vec{r} = -\varepsilon_y dy \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_y = -\frac{dV}{dy}$$

Por tanto, a partir de la expresión (1) del enunciado se obtiene la dependencia lineal esperada

$$\varepsilon_y(y) = -\frac{2V_e}{r_e^2} y \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{2V_e}{r_e^2}}, \qquad \boxed{C = 1{,}2 \times 10^9 \ \mathrm{V/m^2}}$$

g) La fuerza y la energía potencial eléctrica se relacionan de forma análoga al apartado anterior

$$F(y) = -\frac{dU}{dy}$$

De la expresión (2) tenemos

$$U(y) = \pm\frac{\mu^2}{\Delta E}\varepsilon(y)^2 = \pm\frac{\mu^2}{\Delta E}C^2 y^2 = \pm\frac{\mu^2}{\Delta E}\left(\frac{2V_e}{r_e^2}y\right)^2$$

Por tanto:

$$\boxed{F(y) = \mp\frac{2\mu^2}{\Delta E}C^2 y}$$

con el signo negativo para el estado 2, y el signo positivo para el estado 1.

h) La única fuerza que actúa dentro del selector sobre las moléculas en el estado 2 es

$$-\frac{2\mu^2}{\Delta E}C^2 y = m a_y \qquad \Rightarrow \qquad a_y = -\frac{2\mu^2 C^2}{m\Delta E} y$$

Se obtiene una aceleración proporcional a y, en sentido opuesto, característica de una oscilación armónica. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia de oscilación ω. Por tanto el movimiento es de la forma

$$y = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (4)$$

con $$\omega = \left(\frac{2\mu^2 C^2}{m\Delta E}\right)^{1/2} = \mu C\left(\frac{2}{m\Delta E}\right)^{1/2}$$

La amplitud A y la fase inicial α de la oscilación pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Planteando

$$y(t=0) = y_0$$

$$v_y\,(t=0) = 0$$

es inmediato demostrar que $A = y_0$ y $\alpha = 0$.

El movimiento en el eje OZ es uniforme:

$$z = v_0 t$$

Eliminando el tiempo t en la ec. (4), la ecuación de la trayectoria en el plano YZ queda

$$y = y_0 \cos\left(\frac{\omega}{v_0} z\right)$$

Con lo que la frecuencia espacial de oscilación resulta

$$k = \frac{\omega}{v_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = \frac{\mu C}{v_0}\sqrt{\frac{2}{m\Delta E}}}$$

i) El periodo espacial de las oscilaciones dentro del selector es

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Para que las moléculas salgan del detector con velocidad paralela a OZ, la longitud L del selector debe ser un múltiplo entero de $\lambda/2$. La situación de la figura 5 corresponde a $L = \lambda$.

La mínima longitud se consigue para $L = \lambda/2$ (figura 6), es decir

$$\boxed{L_{\min} = \frac{\pi v_0}{\mu C}\sqrt{\frac{m\Delta E}{2}}}$$

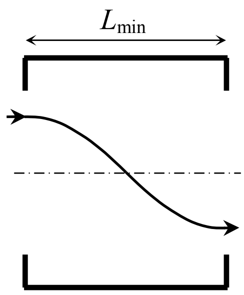


Fig. 6

P3.- HOJA DE RESPUESTAS

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)		$f = 23{,}7$ GHz	0,5
b)		$N = 6\times10^{12}$ moléculas / s	0,5
c)		$t = 3{,}1\times10^{8}$ s $\approx$ 10 años	1,5
d)	$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{d}\left(\frac{1}{1-(y/d)^2}-\frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}}\right)$		1
e)	$V \approx \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2}{d^3}$		1
f)	$C = \frac{2V_e}{r_e^2}$	$C = 1{,}2\times10^{9}$ V/m^2	1+ 0,5
g)	$F(y) = \mp\frac{2\mu^2}{\Delta E}C^2 y$		1
h)	$k = \frac{\mu C}{v_0}\sqrt{\frac{2}{m\Delta E}}$		1,5
i)	$L_{\min} = \frac{\pi v_0}{\mu C}\sqrt{\frac{m\Delta E}{2}}$		1,5