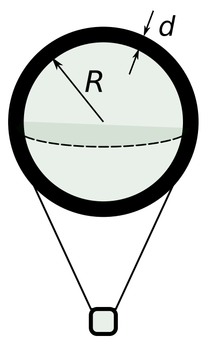
XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Culiacán Sinaloa 8-12 de noviembre de 2015
Prueba teórica

Problema 1 Ascensión de un globo (10 puntos)

El principio de Arquímedes establece que sobre un cuerpo sumergido dentro de un fluido se ejerce una fuerza de flotación que es igual al peso del volumen del fluido desalojado por el cuerpo. Esta fuerza de flotación en ciertos casos puede vencer a la fuerza de gravedad y hacer ascender al cuerpo sumergido dentro de un liquido o fluido y es bajo este principio el que se basa el funcionamiento de los globos aerostáticos.



Considere un globo aerostático de forma esférica. Suponga que el gas contenido dentro del globo y fuera del globo (la atmósfera) se comportan como gases ideales; denote a la densidad de masa del gas dentro del globo como ρ_{gs} y a la del aire de la atmósfera como ρ_a. Por otra parte, la cubierta del globo, que impide la entrada o salida de gas, está hecho de un material cuya densidad de masa es ρ_{gb} y tiene un grosor de d. Este grosor es mucho menor que el radio del globo, es decir, $d \ll R$.

Para simplificar el calculo considere que la masa extra que carga el globo es despreciable, suponga además que de manera general la presión dentro del globo es la misma que la del aire fuera del globo (atmósfera) (esto no es cierto, existe una diferencia de presión pero es pequeña). Es decir, suponemos que gas dentro del globo está en equilibrio de presión con la atmósfera.

En un modelo sencillo de las propiedades termodinámicas de la atmósfera, se supone que la temperatura es isotérmica, es decir que tiene la misma temperatura, independientemente de la altura. Sin embargo debido a los efectos de la gravedad sobre el aire la presión de la atmósfera varia con la altura h de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P = P_0 e^{-Mgh/RT} \tag{1}$$

donde la presión atmosférica a nivel del mar ($h = 0$) es $P_0 = 1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$, la masa molar del aire de la atmósfera es $M = 28.8 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}$, $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ es la gravedad, la constante de los gases tiene el valor $R = 8.31\,\text{J/mol}\cdot\text{K}$ y la temperatura de la atmósfera es $T = 10\,°\text{C}$.

1	**Pregunta:** Calcula el valor de la densidad del aire de la atmósfera al nivel de mar. Denótala como ρ_0.	**2 puntos**

Solución

Si el aire de la atmósfera se comportan como gas ideal entonces:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{P_0 M_a}{R T_a} = \frac{\left(1.013 \times 10^5\,\text{Pa}\right)\left(28.8 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}\right)}{(8.31\,\text{J/mol}\cdot\text{K})\,(283\,\text{K})} = 1.24\,\text{kg/m}^3} \tag{2}$$

(1 pt) escribir ecuación de gas ideal en su forma $PV = nRT$

(0.5 pt) escribir ecuación de gas ideal en su forma $\rho = PM/RT$

(0.5 pt) valor numérico correcto.

Ecuación de gas ideal:

$$pV = nRT, \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{PM}{RT}, \quad \begin{cases} \text{densidad de masa} & \rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{nM}{V} \\ \text{masa molar} & M = N_A \mu \end{cases} \tag{3}$$

M es la masa molar, μ es la masa atómica (molecular).

2	**Pregunta:** Determina una expresión para calcular el radio del globo R necesario para que el globo flote y se mantenga en equilibrio, la expresión debe estar en términos de la densidad del globo ρ_{gb}, la densidad del aire dentro del globo ρ_{gs}, la densidad de la atmósfera ρ_a y del grosor de la cubierta del globo d. **Sugerencia:** Debido a que el grosor $d \ll R$ es mucho menor que el radio del globo, aproxime el volumen de la cubierta del globo como $V_{cubierta} \approx 4\pi R^2 d$.	**2.5 puntos**

Solución

$$\begin{aligned}
\text{peso de la cubierta del globo} \quad & W_{gb} = \rho_{gb} g V_{cubierta} = \rho_{gb} g 4\pi R^2 d \\
\text{peso del aire dentro del gas} \quad & W_{gs} = \rho_{gs} g V_{globo} = \rho_{gs} g \frac{4}{3}\pi R^3 \\
\text{fuerza de flotación} \quad & F_b = \rho_a g V_{globo} = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned} \tag{4}$$

Por equilibrio de fuerzas

$$W_{gb} + W_{gs} = F_b \tag{5}$$

sustituyendo y simplificando se obtiene una ecuación lineal para el radio R:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi R^3 \left(\rho_{gs} - \rho_a\right) + 4\pi \rho_{gb} R^2 d = 0 \\
\left(\rho_{gs} - \rho_a\right) R + 3\rho_{gb} d \ = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

(1.0 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
Resolviendo para R:

$$\boxed{R = \frac{3\rho_{gb} d}{(\rho_a - \rho_{gs})}} \tag{7}$$

Para que el globo flote es necesario que $\rho_a > \rho_{gs}$, lo cual esta de acuerdo con $R > 0$.
(1.5 pt) expresión del radio de la gota (resolver ecuación cuadrática).

Inicialmente el globo flota en equilibrio al nivel del mar para lo cual el aire dentro del globo se calienta hasta una temperatura de $T_{gs} = 300\,^{\circ}\mathrm{C}$. La cubierta del globo está hecho de un material cuya densidad es $\rho_{gb} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$ y tiene un grosor de $d = 1\,\mathrm{mm}$.

3	**Pregunta:** Considera que el globo flota en equilibrio a nivel del mar, calcula el valor del radio R y el volumen del globo cuando la temperatura del aire dentro del globo es $T_{gs} = 300\,^{\circ}\mathrm{C}$.	**2.5 puntos**

Solución

El gas dentro del globo y el de la atmósfera se comportan como gas ideal:

$$\text{gas dentro del globo:} \quad \rho_{gs} = \frac{P_{gs} M_{gs}}{R T_{gs}}, \qquad \text{atmósfera:} \quad \rho_a = \frac{P_a M_a}{R T_a}, \tag{8}$$

(1.0 pt) escribir ecuación de gas ideal para gas dentro del globo y para la atmósfera.

según el enunciado del problema la presión dentro y fuera del globo es la misma y el gas dentro del globo es el mismo que el de la atmósfera (misma masa molar). Entonces dividiento ambas ecuaciones:

$$\frac{\rho_{gs}}{\rho_a} = \frac{\cancel{P_{gs}}}{\cancel{P_a}} \frac{\cancel{M_{gs}}}{\cancel{M_a}} \frac{T_a}{T_{gs}}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_{gs}}{\rho_a} = \frac{T_a}{T_{gs}} = \frac{273 + 10\,\mathrm{K}}{273 + 300\,\mathrm{K}} = \frac{283\,\mathrm{K}}{573\,\mathrm{K}} = 0.49 \tag{9}$$

(0.5 pt) relación entre densidades.

sustituyendo en la ecuación (7) determinanda en el inciso anterior:

$$\begin{aligned} R &= \frac{3\rho_{gb} d}{(\rho_a - 0.49\rho_a)} = \frac{3\left(10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)(0.001\,\mathrm{m})}{\rho_0\,(1 - 0.49)} \\ &= \frac{3\left(10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)(0.001\,\mathrm{m})}{(1.2\,\mathrm{kg/m^3})\,(0.51)} = \boxed{4.9\,\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{10}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del radio.

donde la densidad de la atmósfera a nivel del es $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$. El volumen del globo:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\,(4.9\,\mathrm{m})^3 = 492.8\,\mathrm{m^3}} \tag{11}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del volumen.

Si el globo se eleva rápidamente no tiene tiempo de intercambiar calor con la atmśfera. En ese caso podemos suponer que el gas dentro del globo sufre una expansión adiabática al elevarse y que, por lo tanto, el radio del globo aumenta con la altura. Si la relación entre las capacidades caloríficas del aire dentro del globo es: $c_p/c_V = \gamma = 7/5$

4	**Pregunta:** Cuál es el radio y el volumen del globo al elevarse 5000 m.	**3 puntos**

Solución

Si P_0, V_0 es la presión y el volumen del globo a nivel del mar y P_H, V_H a la altura H. En un proceso adiabático:

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_H V_H^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_0 R_0^{3\gamma} = P_H R_H^{3\gamma} \tag{12}$$

(1 pt) escribir la ecuación de un proceso adiabático.

Sustituyendo la expresión de la presión como función de la altura, ecuación (1), el radio del globo a la altura H es:

$$R_H = R_0 \left(\frac{P_0}{P_H}\right)^{1/3\gamma} = R_0 e^{MgH/3\gamma RT} \tag{13}$$

(1 pt) considerar la ecuación (1) de la presión como función de la altura.

Sustituyendo valores:

$$\begin{gathered}\frac{Mg}{3\gamma RT} = \frac{\left(28.8\times10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}\right)\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)}{3\left(\frac{7}{5}\right)\left(8.31\,\mathrm{J/mol\cdot K}\right)\left(283\,\mathrm{K}\right)} = 2.86\times10^{-5} \\ \frac{Mg}{3\gamma RT}H = 2.86\times10^{-5}\times5000\,\mathrm{m} = 0.143\end{gathered} \tag{14}$$

$$\boxed{R_H = (4.9\,\mathrm{m})\,e^{0.143} = 5.65\,\mathrm{m}} \tag{15}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del radio.

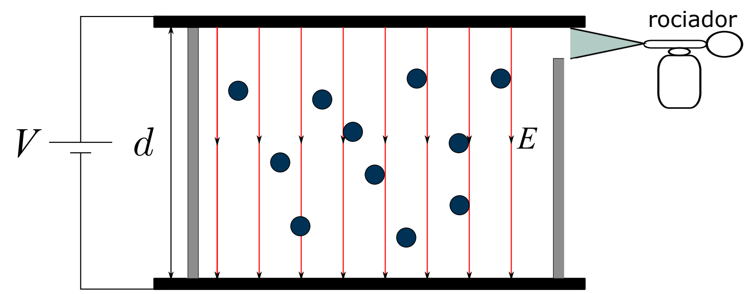
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\,(5.65\,\mathrm{m})^3 = 755.5\,\mathrm{m}^3} \tag{16}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del volumen.

Problema 2 Experimento de Millikan **(10 puntos)**

Uno de los experimentos más importantes de la física fue realizado por los físicos norteamericanos Robert Millikan y Hervey Fletcher en el año 1909 en cual midieron la carga eléctrica del electrón. Desde finales del siglo XIX, a través de los experimentos con rayos catódicos, se sabía de la existencia de los electrones como partículas cargadas negativamente. El poder determinar el valor de dicha carga eléctrica era un reto para la física en esos momentos.

En el experimento de Millikan y Fletcher se empleó una cámara compuesta por un par de placas metálicas paralelas separados una distancia d y colocadas horizontalmente, ver figura. Las placas están conectadas a una diferencia de potencial V de tal manera que dentro de las placas hay un campo eléctrico uniforme E. Con un rociador se dispersan gotas de aceite dentro de la cámara y las gotas se cargan eléctricamente debido a la fricción que tienen con la válvula del rociador al ser expulsadas.



Si suponemos que las gotas son esferas que se cargan negativamente por haber adquirido varios electrones, entonces midiendo la carga de las gotas es posible determinar la carga del electrón.

Debido a las pequeñas dimensiones de las gotas de aceite es importante tomar en cuenta los efectos del aire sobre las gotas de aceite. En este caso el aire se comporta como un fluido dentro del cual las gotas de aceite se mueven.

Se sabe que cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido, además de las fuerzas de presión que el fluido ejerce, existe una fuerza de resistencia, o de fricción, debida a la viscosidad del fluido, que actúa en sentido contrario a su movimiento y es proporcional a la velocidad v con la que se mueve el cuerpo. Si el cuerpo es de forma esférica, esta fuerza de resistencia está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_r = -6\pi R\eta\vec{v} \tag{17}$$

donde R es el radio del cuerpo esférico y η es la viscosidad del fluido. Para el aire la viscosidad tiene el siguiente valor: $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa/s donde Pa es la unidad de presión en SI, Pa $=$ N/m^2. Dicha fuerza de fricción se llama *fuerza de Stokes*.

Debido a que la fuerza de resistencia siempre se opone al movimiento, llega un momento en que ésta compensa o iguala *todas* las demás fuerzas presentes. Es decir, después de cierto tiempo se alcanza una situación donde la fuerza total sobre el cuerpo es cero y el cuerpo se mueve con velocidad constante. A dicha velocidad se le conoce como *velocidad terminal*.

Por sencillez, supondremos que el movimiento de las gotas es estrictamente vertical, es decir, despreciaremos cualquier movimiento en otras direcciones.

El experimento de Millikan-Fletcher se divide en dos partes que se describen a continuación.

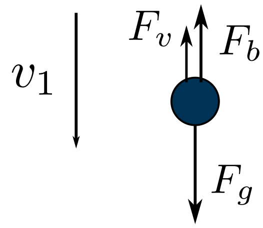
Parte 1

En la primer etapa el voltaje entre las placas es cero ("apagado") por lo que el campo eléctrico dentro de la cámara es cero. Bajo estas condiciones se observa que las gotas *caen*, al principio con cierta aceleración pero después de un lapso de tiempo las gotas alcanzan su velocidad terminal v_1 constante.

Sea la densidad de masa del aceite $\rho_o = 0.92\,\mathrm{g/cm^3}$, densidad del aire $\rho_a = 0.0013\,\mathrm{g/cm^3}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$,

1	**Pregunta:** Si la velocidad terminal con la que cae una gota de aceite es $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor del radio R de la gota.	**3 puntos**

Solución



Si la gota se mueve con velocidad constante entonces la suma de fuerzas es cero. En este caso la fuerza de resistencia del aire es hacia arriba ya que la gota esta cayendo.

$$F_g = F_b + F_r, \qquad \Rightarrow \quad \rho_o g \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3 + 6\pi R \eta v_1 \tag{18}$$

(1.5 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
donde $F_g = \rho_o g V$ es la fuerza de gravedad, $F_b = \rho_a g V$ es la fuerza de flotación sobre las gotas debido al aire y F_r es la fuerza de resistencia del aire. Despejando el radio R de la gota se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{9 v_1 \eta}{2g\left(\rho_o - \rho_a\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{9\left(0.095 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}\right)\left(1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa/s}\right)}{2 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\left(0.92 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} - 0.0013 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)}} \\ R &= \boxed{2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{19}$$

(1 pt) expresión correcta del radio de la gota (despejar).
(0.5 pt) valor numérico correcto.

2	**Pregunta:** Para la misma gota de aceite que cae con la velocidad terminal del inciso anterior, $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la masa m_o de la gota.	**1 punto**

Solución
Conociendo la densidad del aceite $\rho_o = 0.92\,\mathrm{g/cm^3}$, entonces la masa de la gota de aceite es:

$$m_o = \rho_o V_o = \rho_o \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{20}$$

(0.5 pt) expresión de la densidad de masa.
sustituyendo la expresión para el radio de las gotas obtenido en el inciso anterior:

$$m_o = \frac{4\pi}{3}\left(0.92 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right) \times \left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 = \boxed{9.63 \times 10^{-14}\,\mathrm{kg}} \tag{21}$$

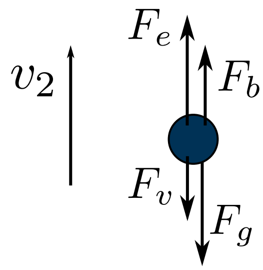
(0.5 pt) valor numérico correcto.

Parte 2

En la segunda parte del experimento se enciende el voltaje entre las placas y se genera un campo eléctrico uniforme dentro de la cámara, lo suficientemente alto, que ahora las gotas de aceite se *mueven hacia arriba* y alcanzan su velocidad terminal v_2. Considere que el voltaje aplicado es $V = 5000\,\mathrm{V}$ y que la distancia entre las placas metálicas es $d = 10\,\mathrm{mm}$.

3	**Pregunta:** Para la misma gota de la primera parte del experimento, que cae con velocidad terminal $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, si su velocidad terminal en la segunda etapa es $v_2 = 0.085\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la carga q de la gota.	**3 puntos**

Solución



La suma de fuerzas es cero, en este caso la fuerza de resistencia F_r está dirigida hacia abajo ya que la gota se mueve hacia arriba:

$$F_g + F_r = F_b + F_e, \qquad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o g + 6\pi R \eta v_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g + |q|\, E \tag{22}$$

(1.5 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
despejando q se obtiene ($E = V/d$):

$$|q| = \frac{d}{V}\frac{4}{3}\pi R^3 g\left(\rho_o - \rho_a\right) + \frac{d}{V} 6\pi R \eta v_2 \tag{23}$$

(0.5 pt) expresión correcta de la carga de la gota (despejar).
Para la gota $R = 2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$
Primer término:

$$\begin{aligned} &\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{5000\,\mathrm{V}} \frac{4\pi\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)(0.92 - 0.0013)\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}}{3}\left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 \\ &= \left(0.075\,\mathrm{C/m^3}\right)\left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 = 1.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{24}$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{5000\,\mathrm{V}} 6\pi\left(1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa/s}\right)}_{6.78\times 10^{-10}}\left(v_2 = 0.085 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}\right)\left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right) \\ &= 1.68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{25}$$

Carga de la gota:

$$|q| = 1.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} + 1.68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} = 35.70 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{26}$$

(1 pt) valor numérico correcto.

Como acabas de mostrar en los incisos anteriores, si conocemos las velocidades terminales v_1 y v_2 para cada parte del experimento, *para la misma gota*, es posible determinar la carga de la gota. En la práctica hay diferentes tamaños en las gotas y cada gota adquiere varios electrones extras por lo que las velocidades v_1 y v_2 difieren para cada gota. Esto puede usarse en un análisis estadístico para hallar la carga del electrón. Aqui haremos una simplificación con sólo tres gotas y una suposición para hallarla.

En la siguiente tabla se reportan las mediciones hechas de las velocidades terminales v_1 y v_2 para tres gotas diferentes.

	velocidad v_1 (cm/s)	velocidad v_2 (cm/s)
gota 1	0.020	0.015
gota 2	0.038	0.00025
gota 3	0.041	0.0081

4	**Pregunta:** Para los valores de v_1 y v_2 de la tabla calcula el valor de la carga para cada una de las gotas. Suponiendo ahora que la carga obtenida de cada gota es un múltiplo entero de la carga del electrón e, halla los valores *mínimos* enteros posibles que estén de acuerdo con los valores de las cargas obtenidos. Determina de esta manera el valor de la carga del electrón. **Sugerencia:** Haz la suposición que las cargas obtenidas son $q_1 = n_1 e$, $q_2 = n_2 e$ y $q_3 = n_3 e$, con n_1, n_2 y n_3 valores enteros y halla sus valores mínimos posibles.	**3 puntos**

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso anterior se puede calcular la carga para cada gota, primero se calcula el radio de la gota para la velocidad v_1, ecuación (19), con este valor y v_2 se calcula la carga de la gota, ecuación (23). Los valores son:

velocidad v_1 (cm/s)	velocidad v_2 (cm/s)	radio gota ($\times 10^{-6}$ m)	q (10^{-19} C)
0.020	0.015	1.34	q_1 =3.18
0.038	0.00025	1.85	q_2 =4.79
0.041	0.0081	1.92	q_3 =6.39

(2 pt) los tres valores correctos de la carga.

Si se divide cada una de las cargas entre la de menor valor, q_1 en este caso, se obtienen fracciones simples:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{4.79}{3.18} = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{q_3}{q_1} = \frac{6.39}{3.18} = 2 = \frac{n_3}{n_1} \tag{27}$$

de tal manera que $n_1 = 1$ no es posible pues $n_2 = 3/2$ que no es entero. Por lo tanto $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$ son los valores mínimos:

$$e = \frac{q_1}{2} = \frac{3.18}{2} \times 10^{-19}\,\mathrm{C} = 1.59 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{28}$$

(1 pt) valor de la carga del electrón.

Problema 3 Estimación de la edad del Sol	**(10 puntos)**

Este problema consiste en estimar la edad del Sol suponiendo que la energía total que irradia se debe a su contracción gravitacional. La temperatura del Sol se calculará considerando que se comporta como un cuerpo negro. La formación del Sol comenzó a partir de una nube muy grande de gas y polvo que debido a los efectos gravitacionales de ha comprimido hasta tener las dimensiones actuales. El Sol puede considerarse como una esfera de gas con un radio actual de $R_S = 6.95 \times 10^5\,\mathrm{km}$ y una densidad de masa $\rho_S = 1.4 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

La energía gravitacional de una esfera de masa M y radio R esta dada por la siguiente expresión:

$$U_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{29}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$ es la constante gravitacional.

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la potencia por unidad de área que radía un cuerpo depende de la temperatura a la que se encuentra el cuerpo y está dada por la siguiente expresión:

$$H = \sigma T^4 \tag{30}$$

donde H es la potencia por unidad de área que emite el cuerpo negro y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y T la temperatura.

1	**Pregunta:** Si el radio del Sol en su etapa inicial cuando se estaba formando era muy grande comparado con su radio actual, calcula el cambio de su energía gravitacional debido a está contracción. **Sugerencia:** Considera que el radio inicial del Sol era tan grande, comparado con el actual, que puede considerarse como infinito.	**3 puntos**

Solución:
La masa del Sol se puede calcular a partir de su radio y su densidad de masa:

$$M_S = \rho_S \cdot \frac{4}{3}\pi R_S^3 = \frac{4\pi \left(1.4 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)\left(6.95 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)^3}{3} = 1.97 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \tag{31}$$

(0.5 pt) expresión de la densidad de masa.
(0.5 pt) valor numérico correcto de la masa del Sol.
A partir de la ecuación (29) se obtiene que el cambio de energía gravitacional del Sol cuando se ha comprimido desde un radio muy grande ($R \to \infty$) hasta su valor actual:

$$\begin{aligned} U_S &= U\left(R \to \infty\right) - U\left(R_S\right) = +\frac{3}{5}\frac{GM_s^2}{R_s} \\ &= \frac{3}{5}\frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\right)\left(1.97 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}\right)^2}{\left(6.95 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)} = 2.26 \times 10^{41}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{32}$$

(1.5 pt) identificar el cambio de energía, energía gravitacional inicial cero.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

Sobre la superficie terrestre se han hecho mediciones de la cantidad de energía que recibe del Sol en forma de radiación. La constante solar K que es la potencia por unidad de área recibida del Sol sobre la superficie terrestre tiene el valor:

$$K = 1366\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \tag{33}$$

Por otra parte, puedes considerar que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular con un periodo de 365 días.

2	**Pregunta:** Calcula el valor de la potencia total emitida por el Sol.	**3 puntos**

Solución:
Como se desconoce la distancia Tierra-Sol, se puede calcula de la siguiente manera: si la Tierra se mueve en órbita circular alrededor del Sol con un radio R_T por la fuerza de gravedad:

$$\frac{GM_S m_T}{R_T^2} = \frac{mv_T^2}{R_T}, \qquad \Rightarrow \quad \frac{R_S^3}{P_T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \tag{34}$$

donde $P_T = 365\,\text{días} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 3.1 \times 10^7\,\text{s}$ es el periodo de la Tierra ($v_T = \omega_T R_T = 2\pi R_T/P_T$). La expresión anterior es la tercer ley de Kepler.

$$R_T = \sqrt[3]{P_T^2 \frac{GM_S}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{(3.1 \times 10^7\,\text{s})^2 \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2)\,(1.97 \times 10^{30}\,\text{kg})}{4\pi^2}} = 1.47 \times 10^{11}\,\text{m} \tag{35}$$

(1 pt) uso de la tercer ley de Kepler, o su deducción, para calcular la distancia Tierra-Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto de la distancia Tierra-Sol.
Conociendo la distancia Tierra-Sol, la potencia total emitida por el Sol a partir de la constante solar esta dada por:

$$P = K \times 4\pi R_T^2 = 1366\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \times 4\pi \left(1.5 \times 10^{11}\,\text{m}\right)^2 = 3.86 \times 10^{26}\,\text{W} \tag{36}$$

(1 pt) expresión correcta para calcular la potencial total emitida por el Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

3	**Pregunta:** Considerando que la energía que radía el Sol se debe solamente a la contracción gravitacional, y suponiendo que que la energía por unidad de tiempo que ha estado radiando desde su inició es constante, calcula la edad del Sol y exprésala en años (terrestres).	**2 puntos**

Solución:
La edad del Sol se puede estimar a partir de la potencia total que emite el Sol

$$\begin{aligned} \text{Edad Sol} &= \frac{\text{energía gravitacional Sol}}{\text{potencia emitida del Sol}} = \frac{U_S}{P} \\ &= \frac{2.26 \times 10^{41}\,\text{J}}{3.86 \times 10^{26}\,\text{W}} = 5.85 \times 10^{14}\,\text{s} \left(\frac{\text{años}}{365 \times 24 \times 60 \times 60\,\text{s}} \right) \\ &= 1.86 \times 10^{7}\,\text{años} \approx 18\,\text{millones de años} \end{aligned} \tag{37}$$

(1.5 pt) expresión para estimar la edad del Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

4	**Pregunta:** Si el Sol se considera como un cuerpo negro, estima la temperatura del Sol.	**2 puntos**

Solución:
A partir de la ley de Stefan-Boltzmann se puede calcular la temperatura del Sol y de la potencia total emitida del Sol (inciso 2):

$$H = \frac{\text{potencia total emitida del Sol}}{\text{superficie del Sol}} = \frac{P}{4\pi R_S^2} = \sigma T^4, \qquad \Rightarrow \quad T^4 = \frac{P}{4\pi\sigma R_S^2} \tag{38}$$

(1.5 pt) uso de la ley de Stefan-Boltzmann.

$$T = \left(\frac{3.86 \times 10^{26}\,\text{W}}{4\pi\,(5.67 \times 10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4)\,(6.95 \times 10^{8}\,\text{m})^2} \right)^{1/4} = 5783.03\,\text{K} \tag{39}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto.