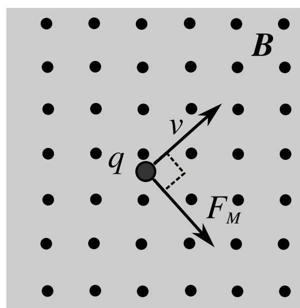
XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Monterrey, Nuevo León. 12-16 de noviembre del 2017
Prueba teórica

Problema 1. Aceleración de Fermi (10 puntos)

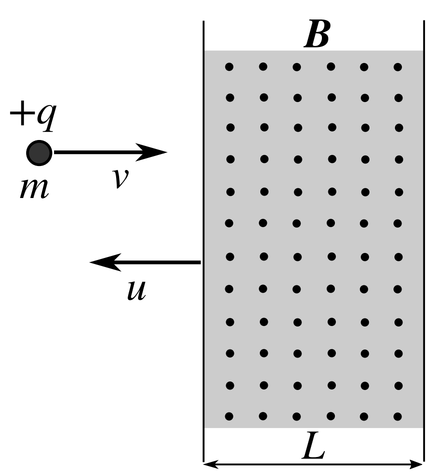
En este problema se emplea la fuerza de Lorentz, que es la que sienten las partículas cargadas cuando se mueven respecto de en un campo magnético de inducción B. En la figura se puede ver que cuando las líneas de campo apuntan hacia afuera de la hoja perpendiculares al plano, y una partícula con carga positiva se mueve sobre el plano con velocidad v, la fuerza que siente es perpendicular al vector de velocidad y con magnitud:

$$F_M = q\ v\ B. \tag{1}$$



En 1949 Enrico Fermi propuso un mecanismo para la aceleración de partículas cargadas en el espacio (Rayos Cósmicos), que en su mayoría son protones. Dicho mecanismo consiste en que regiones con campos magnéticos que se mueven a grandes velocidades (por ejemplo en las ondas de choque producidas en supernovas), pueden captar temporalmente partículas cargadas y las expulsan con mayor rapidez. El ingreso las partículas varias veces por estas regiones hará que puedan llegar a ser las partículas más energéticas en el universo.

Asumiremos un modelo muy simplificado para el mecanismo de Fermi en el que, para un observador en reposo, una región muy larga y de ancho L se mueve con velocidad constante u y poseé un campo magnético de inducción B uniforme que apunta hacia afuera de la hoja, según se muestra en la figura. A su vez, se tiene un protón que se mueve en el espacio con una velocidad v perpendicularmente a la interfaz de la región, e ingresa en la misma.

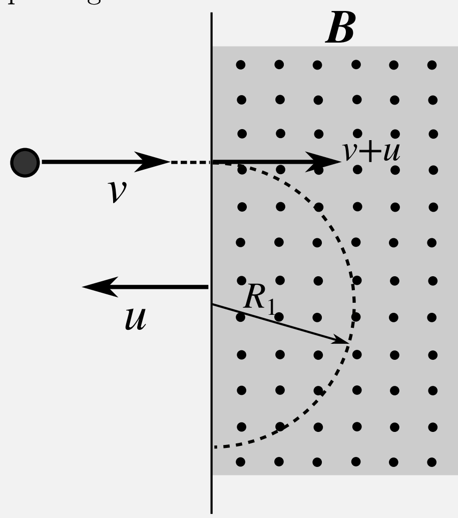


Considere que $v = 10^5$ m/s, $u = 10^3$ m/s, $B = 1$ mT y $L = 10$ m; suponga que las velocidades del protón nunca llegan a ser relativistas; recuerde que para un protón: $m = 1.672 \times 10^{-27}$kg y $q = +1.6 \times 10^{-19}$C. El sistema podrá ser visto, tanto por un observado en reposo, como por algún observador que se mueve junto con las regiones con campo magnético. No tomaremos en cuenta campos eléctricos.

Pregunta 1.1 ¿Cuál será el radio de curvatura de la trayectoria del protón *observado* dentro de la región con campo magnético? (3 puntos)

Pregunta 1.1 Solución

Para un observador que se mueve con velocidad u, la velocidad relativa de la partícula al ingresar a la región con campo magnético será la suma de ambas.



$$v_1 = v + u \tag{2}$$

(1 puntos) Por escribir la velocidad relativa.
En este marco de referencia, el campo es estático y se puede usar la fuerza de Lorentz. Para el cálculo del radio de curvatura consideramos dicha fuerza de Lorentz cuya magnitud es

$$F_1 = qv_1B \tag{3}$$

La cual provocará una trayectoria circular dada por la aceleración centrípeta

$$qv_1B = \frac{mv_1^2}{R_1} \tag{4}$$

(1 puntos) Por considerar la aceleración (o fuerza) centrípeta.
Despejando encontramos que el radio de curvatura es

$$R_1 = \frac{m(v+u)}{qB} = 1.05 \text{ m.} \tag{5}$$

(0.5 puntos) Llegar a la ecuación.
(0.5 puntos) Resultado numérico.

Pregunta 1.2 **¿Cuánto tiempo estará el protón dentro de la región?** **(1 puntos)**

Pregunta 1.2 Solución Considerando la trayectoria circular de la partícula dentro de la región con campo magnético tiene una rapidez angular dada por

$$\omega = \frac{v+u}{R_1} = \frac{qB}{m} = 9.57 \times 10^4 \text{ rad/s}. \tag{6}$$

(0.5 puntos) Por usar la rapidez angular.
El protón describirá media circunferencia antes de salir de la región, de manera que el tiempo que tardará dentro será

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{qB} = 32.8\ \mu\text{s}. \tag{7}$$

(0.5 puntos) Por llegar al resultado.

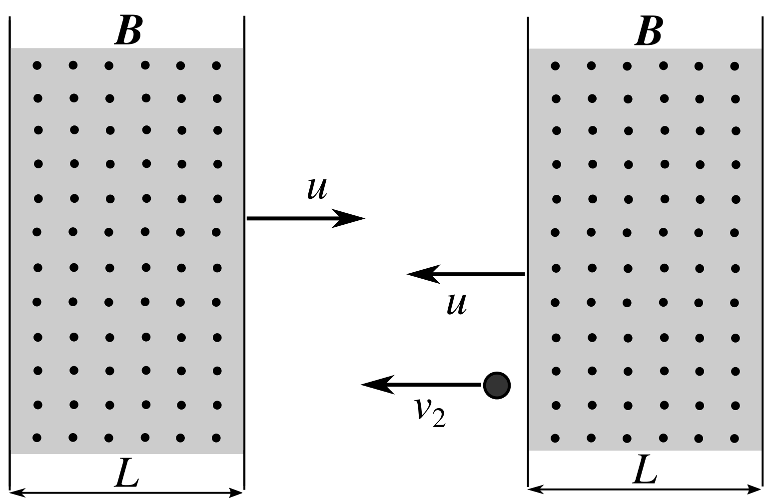
Pregunta 1.3 **Para un observador en reposo, ¿qué velocidad tendrá el protón al salir de la región?** **(1 puntos)**

Pregunta 1.3 Solución Cuando sale el protón de la región se mueve ahora en sentido opuesto que cuando ingresó, en la misma dirección en la que se mueve la región de manera que en un sistema de referencia fijo la velocidad con que sale es:

$$v_2 = v_1 + u = v + 2u. \tag{8}$$

(1 puntos) Por escribir la velocidad de salida.

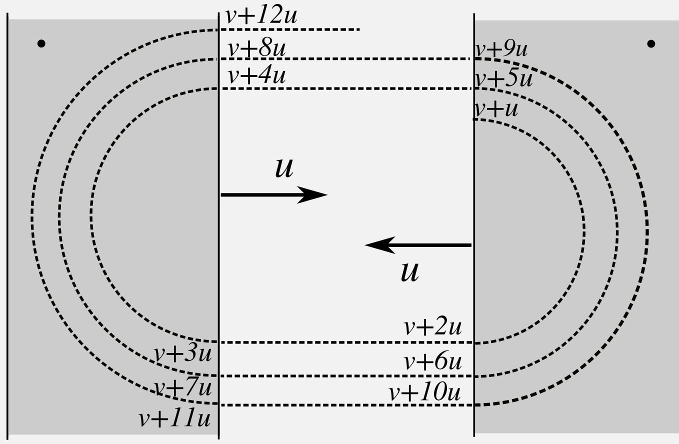
Suponga ahora una segunda región, igual a la primera, pero que se mueve en sentido contrario con la misma magnitud de la velocidad, como se muestra en la figura. Considere que las regiones se encuentran inicialmente separadas una distancia mucho mayor que el ancho L de las dos regiones.



Pregunta 1.4 **Haga un esquema cualitativo de la trayectoria que tendrá el protón en las dos regiones para unas cuantas vueltas, indicando las velocidades al ingresar y al salir de cada región. Encuentre expresiones generales para las velocidades al ingresar y al salir de cada región como función del número de vuelta n.** **(3 puntos)**

Pregunta 1.4 Solución

El esquema cualitativo con las velocidades con que entra y sale de cada región se puede ver en la figura:



(1 puntos) Por el dibujo.
(1 puntos) Por las velocidades.

También podemos ver que la progresión de las velocidades del protón al ingresar (i), vista desde la región, y al salir(f), vista en reposo, en las regiones derecha (D) e izquierda (I) son

$$\begin{aligned} v(n)_{Di} &= v + (4n + 1)\,u, & (9)\\ v(n)_{Df} &= v + (4n + 2)\,u, & (10)\\ v(n)_{Ii} &= v + (4n + 3)\,u, & (11)\\ v(n)_{If} &= v + (4n + 4)\,u. & (12) \end{aligned}$$

siendo n el número de vuelta con $n = 0$ para la primer vuelta.

(1 puntos) por generalizar las velocidades.

Otra posibilidad para las progresiones son considerando una $n' = 1$ en la primer vuelta, para la cual:

$$\begin{aligned} v(n')_{Di} &= v + \left(4n' - 3\right)u, & (13)\\ v(n')_{Df} &= v + \left(4n' - 2\right)u, & (14)\\ v(n')_{Ii} &= v + \left(4n' - 1\right)u, & (15)\\ v(n')_{If} &= v + \left(4n'\right)u. & (16) \end{aligned}$$

Pregunta 1.5 **¿Cuántas vueltas dará el protón antes de liberarse de las dos regiones y de qué región saldrá?** **(2 puntos)**

Pregunta 1.5 Solución

Método 1:

Consideremos que en general, el radio de la trayectoria en alguna de las regiones, R_N, es de la forma:

$$R_N = \frac{m(v+Nu)}{qB}, \tag{17}$$

(0.5 puntos) Por la ecuación o similar. siendo N un número entero. Para que el protón salga de las regiones se debe cumplir que al menos $R_N = L$. Despejando N tendremos:

$$N = \frac{qBL}{mu} - \frac{v}{u} = \frac{(1.6\times10^{-19}\text{ C})(10^{-3}\text{T})(10\text{ m})}{(1.672\times10^{-27}\text{kg})(10^{3}\text{m/s})} - 100 \approx 857. \tag{18}$$

(0.5 puntos) Llegar al número.

Dividiendo entre 4 tenemos

$$\frac{857}{4} = 214.25 \tag{19}$$

Resultado que es de la forma $n+\frac{1}{4}$, de manera que corresponde a la progresión de $v(n)_{Di}$. Recordando que si comenzamos a contar n desde 0, realmente el protón saldrá en la **vuelta 215**, y será por la parte trasera de la **Región Derecha**.

(0.5 puntos) por el número correcto de vueltas

(0.5 puntos) Por identificar la región de la que saldrá.

Método 2:

Otra forma de resolver esta parte será considerando la variación en los radios de la trayectoria entre una vuelta y otra, por ejemplo, de la primera a la segunda vuelta en la región derecha tendremos:

$$\Delta R = \frac{m(v+5u)}{qB} - \frac{m(v+u)}{qB} = \frac{4mu}{qB}. \tag{20}$$

(0.5 puntos) Por la ecuación.

Entre el primer radio y el borde de la región tendremos n semicircunferencias separadas por ΔR, así:

$$L - R_1 = n\Delta R, \tag{21}$$

empleando la ecuación (23):

$$n = \frac{L-R_1}{\Delta R} = \frac{qBL - m(v+u)}{4mu} \approx 214. \tag{22}$$

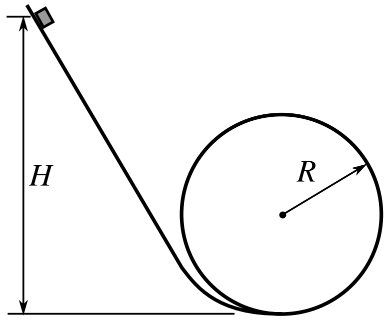
(0.7 puntos) Por la ecuación y el resultado. Añadiendo la primer vuelta tendremos que el protón saldrá el la **vuelta 215**.

(0.3 puntos) por el número correcto de vueltas

(0.5 puntos) por identificar la región de la que saldrá.

Problema 2. Montaña rusa loca (10 puntos)

Cuando se diseña una montaña rusa se pretende que este juego sea lo más seguro posible. Concentrémonos en un rizo. Antes del rizo circular de radio R habrá una pendiente de la que se deslizará un carrito para después entrar en el rizo y dar la vuelta por éste como se muestra en la figura. Despreciaremos cualquier fricción entre el carrito y los rieles.



Pregunta 2.1 ¿De qué altura mínima se deberá de empezar a descender el carrito para que pueda dar una vuelta completa en el rizo sin despegarse? (2 puntos)

Pregunta 2.1 Solución Empleando la ley de conservación de la energía mecánica, considerando cuando el carrito está en el punto de donde se suelta y cuando está en la parte más alta del rizo.

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R), \tag{23}$$

(0.5 puntos) Por escribir la ecuación.
Como el movimiento es circular, también debemos de considerar la fuerza centrípeta, también en la parte más alta del rizo

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}, \tag{24}$$

(0.5 puntos) Escribir la ecuación para la fuerza centrípeta.
siendo N, la fuerza normal del rizo sobre el carrito. La condición para que apenas llegue el carrito a la parte más alta del rizo es que el contacto entre el rizo y el carrito sea mínimo, esto es $N = 0$. De esta forma podemos encontrar la ecuación:

$$mv^2 = mgR. \tag{25}$$

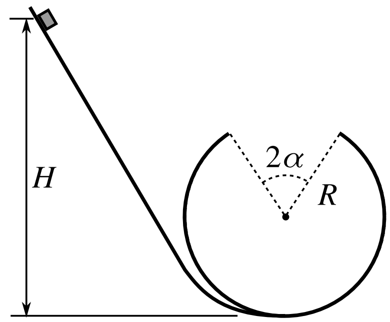
(0.5 puntos) Considerar la condición de $N = 0$ y escribir la ecuación 25.
Sustituyendo la ecuación (25) en la (23), eliminando la masa y despejando H tendremos:

$$H = \frac{5}{2}R. \tag{26}$$

(0.5 puntos) Llegar al resultado.

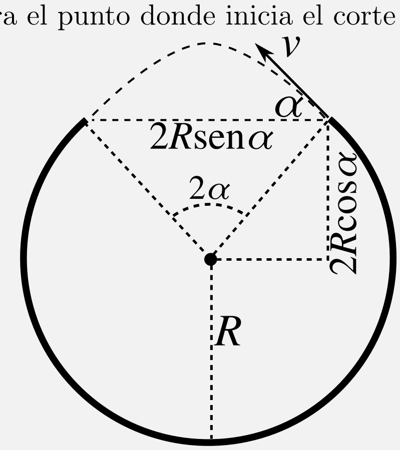
Los rizos completos son los más comunes, pero no son divertidos. Queremos diseñar un nuevo tipo de rizo incompleto con un corte simétrico en el riel de la parte superior, por un ángulo 2α como se muestra en la figura, de manera que el carrito vuele libremente en esta porción faltante y vuelva a reintegrarse al rizo. Consideremos la razón entre la altura a la que se dejará descender el carrito y el radio del rizo:

$$\eta = \frac{H}{R}.$$



Pregunta 2.2 **¿Cuánto vale η como función de α? Verifique el resultado de la pregunta 2.1 cuando $\alpha = 0$.** **(4 puntos)**

Pregunta 2.2 Solución Basándonos en la figura siguiente, podemos aplicar la ley de conservación de la energía para el punto donde inicia el corte en el riel.



$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 + \cos\alpha). \tag{27}$$

(1 puntos) Escribir la ecuación de conservación de energía o equivalente.
Por otra parte, en el corte el carrito tendrá una trayectoria parabólica, de la cuál, el alcance horizontal máximo es:

$$l = \frac{2v^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} = 2R\operatorname{sen}\alpha. \tag{28}$$

(2.5 puntos) Escribir la ecuación o llegar a ella a partir de las ecuaciones de movimiento parabólico.
Despejando la velocidad tendremos

$$v^2 = \frac{gR}{\cos\alpha}. \tag{29}$$

Sustituyendo (29) en la (27) y usando $\eta = H/R$, tendremos

$$\eta = 1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}. \tag{30}$$

(1 puntos) Llegar al resultado.
Cuando $\alpha = 0$ vemos que $\eta = \frac{5}{2}$.
(0.5 puntos) Por verificar el resultado de la pregunta 2.1.

Pregunta 2.3 Escriba $\cos\alpha$ como función de η y diga cuál es el mínimo valor que puede tener η y a qué ángulo α corresponde. (3 puntos)

(**Nota:** No es necesario derivar para encontrar el resultado, sólo analizar cuándo el resultado es físicamente posible. Aunque si lo desea, puede derivar.)

Pregunta 2.3 Solución

Método 1:
Rearreglando la ecuación (30) obtenemos la ecuación cuadrática:

$$2\cos^2\alpha + (1-\eta)\cos\alpha + 1 = 0. \tag{31}$$

(1 puntos) Llegar a la ecuación.
Cuya solución es :

$$\cos\alpha = \frac{2(\eta-1) \pm \sqrt{4(\eta-1)^2 - 8}}{4} = \frac{(\eta-1) \pm \sqrt{(\eta-1)^2 - 2}}{2}. \tag{32}$$

(0.5 puntos) Resolver la ecuación.
Analizando la expresión, vemos que tiene significado físico cuando el discriminante es positivo

$$(\eta-1)^2 - 2 \geq 0, \tag{33}$$

(0.5 puntos) Por darse cuenta de la condición.
Por lo tanto

$$(\eta-1)^2 \geq 2, \tag{34}$$

Lo que nos dice que el valor mínimo que tendrá η es

$$\eta_{\min} = 1 + \sqrt{2} = 2.414, \tag{35}$$

(0.5 puntos) Llegar al resultado.
que sustituído en la ecuación (32) nos da que:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \alpha = 45°. \tag{36}$$

(0.5 puntos) Llegar al resultado.

Método 2:
Partiendo de la ecuación (30) y derivando:

$$\eta' = -\operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\cos^2\alpha} = 0. \tag{37}$$

(1 puntos) Derivar correctamente.
(0.5 puntos) Aplicar la condición del extremo $\eta' = 0$.
Despejando tenemos

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}. \tag{38}$$

De donde encontramos que $\alpha = 45°$.
(1 puntos) Llegar al ángulo.
Con este resultado tenemos que el valor mínimo para η es :

$$\eta_{\min} = 1 + \sqrt{2}. \tag{39}$$

(0.5 puntos) Llegar al resultado

Pregunta 2.4 ¿Qué otro ángulo α corresponde también al η del resultado de la pregunta 2.1? (1 punto)

Pregunta 2.4 Solución sustituyendo $\eta = \frac{5}{2}$ en la ecuación (32) tenemos

$$\cos\alpha = \frac{(\frac{5}{2} - 1) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \ 1,\ \frac{1}{2} \tag{40}$$

ó:

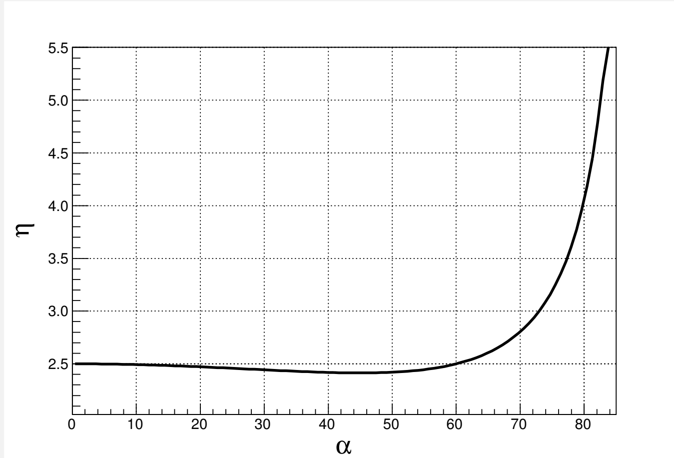
$$\alpha = 0,\ 60°. \tag{41}$$

(1 puntos) Llegar al resultado.

Pregunta 2.3 Solución alternativa, incluyendo la pregunta 2.4:
Tabulando los valores de α y η de acuerdo a la ecuación (30):

α (°)	$\cos\alpha$	η
0	1	2.5
5	0.996	2.498
10	0.945	2.474
15	0.966	2.48
20	0.94	2.49
25	0.91	2.46
30	0.866	2.44
35	0.82	2.42
40	0.77	2.419
45	0.71	2.414
50	0.64	2.42
55	0.57	2.45
60	0.5	2.5
65	0.42	2.61
70	0.34	2.81
75	0.26	3.2
80	0.174	4.05
85	0.087	6.83

(1 puntos) Tabulación con suficientes valores para los ángulos.
Con estos valores podemos hacer la gráfica para la dependencia de η como función de α:



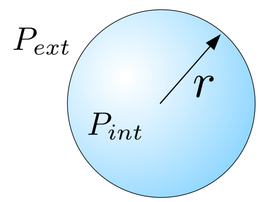
(1.5 puntos) Por hacer la gráfica correctamente, de buen tamaño y con el rango adecuado.
(0.5 puntos) Por identificar el valor mínimo de $\eta_{\min} = 2.414$.
(0.5 puntos) Por identificar el ángulo $\alpha(\eta_{\min}) = 45°$.
(0.5 puntos) Por identificar el otro valor de $\alpha = 60°$ **para** $\eta = \frac{5}{2}$.

Problema 3. Burbujas en el agua. (10 puntos)

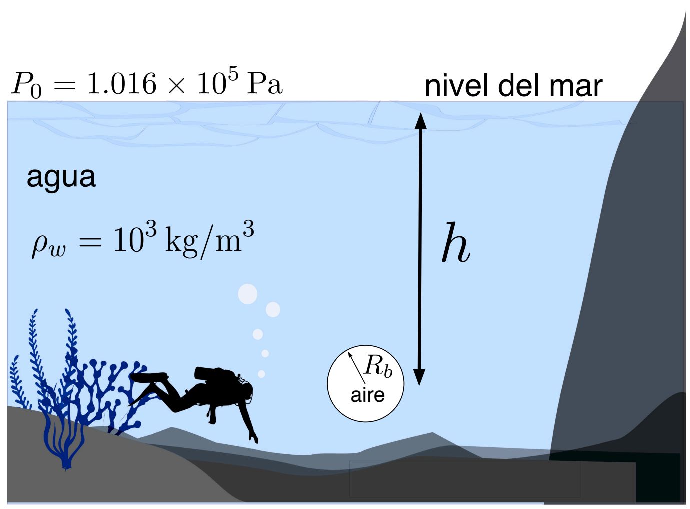
Burbujas en el fondo del mar.

La tensión superficial es una propiedad que se presenta en los líquidos cuando están en contacto con un medio diferente a través de una interfase que divide al líquido con el medio. La tensión superficial es importante en las formación de burbujas en los líquidos permitiendo que haya un equilibrio entre las presiones dentro y fuera de la burbuja; por una parte, la tensión superficial en la burbuja tiende a minimizar el área de la burbuja mientras que la diferencia de presiones tiende a aumentar el tamaño de la burbuja. En equilibrio, la diferencia de presiones: $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$, en una burbuja de radio r está dada por la formula de Laplace:

$$\Delta P = P_{int} - P_{ext} = \frac{2\sigma}{r} \qquad (42)$$



donde σ es la tensión superficial del líquido y P_{int}, P_{ext} corresponden a las presiones interior y exterior de la burbuja; nota que la presión dentro de la burbuja P_{int} es mayor a la presión externa P_{ext}.



Considere una burbuja de aire de radio R_b, que se encuentra en el fondo del mar a una profundidad h. La presión a nivel del mar es la presión atmosférica $P_0 = 1.016 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, ver figura. La densidad del agua es $\rho_w = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ y la tensión superficial del agua $\sigma = 0.0725\,\mathrm{N/m}$

Pregunta 3.1 Encuentre una expresión para la presión P_{int} dentro de una burbuja de aire de radio R_b que se encuentra a una profundidad h respecto del nivel del mar. Obtenga su valor si la profundidad es $h = 1.0\,\mathrm{m}$ y el radio es $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$. Obtenga también la diferencia de presiones $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$. (2 puntos).

Pregunta 3.1 Solución

De la formula de Laplace, la diferencia de presiones esta dada por:

$$\frac{2\sigma}{R_b} = P_{int} - P_{ext} = P_{int} - (P_0 + \rho_w g h)$$

donde la presión fuera de la burbuja es la presión atmosférica, P_0, más la presión hidrostática del agua, $\rho_w g h$, despejando se obtiene la presión dentro de la burbuja:

$$P_{int} = P_0 + \rho_w g h + \frac{2\sigma}{R_b} \tag{43}$$

(1.0 puntos) Expresión correcta de la presión dentro de la burbuja.
sustituyendo valores:

$$P_{int} = 1.016\times10^5\,\mathrm{Pa} + \left(10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right)(1.0\,\mathrm{m}) + \frac{2\,(0.0725\,\mathrm{N/m})}{2.0\,\mathrm{cm}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/cm}} = 1.114\times10^5\,\mathrm{Pa} \tag{44}$$

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.
La diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja es:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R_b} = \frac{2\,(0.0725\,\mathrm{N/m})}{2.0\,\mathrm{cm}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/cm}} = 7.25\,\mathrm{Pa} \tag{45}$$

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Suponga que el aire dentro de una burbuja se comporta como un gas ideal y que su masa molar tiene el valor $M_a = 0.029\,\mathrm{kg/mol}$. La constante de los gases ideales es $R = 8.31\,\mathrm{J/mol\cdot K}$.

Pregunta 3.2 Determine el valor de la densidad del aire dentro de una burbuja de radio $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$ si está a una profundidad $h = 1.0\,\mathrm{m}$, considere que la temperatura del agua es $25\,^\circ\mathrm{C}$. (2 puntos)

Pregunta 3.2 Solución

Empleando la ecuación del gas ideal:

$$PV = nRT, \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM_a}{RT} \tag{46}$$

donde la masa del aire esta dada por: $m = nM_a$, siendo M_a la masa molar del aire y n el número de moles.
(1.5 puntos) Escribir la ecuación de gas ideal en términos de la densidad ρ
Sustituyendo el valor de la presión dentro de la burbuja obtenida en el inciso anterior y los valores constantes:

$$\rho = \frac{\left(1.114\times10^5\,\mathrm{Pa}\right)(0.029\,\mathrm{kg/mol})}{(8.31\,\mathrm{J/mol\cdot K})\,(273+25)\,^\circ\mathrm{C}} = 1.3\,\mathrm{kg/m^3} \tag{47}$$

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Como la densidad del aire dentro de las burbujas es menor a la densidad del agua, las burbujas que se forman en el fondo del mar ascienden hasta la superficie y debido a la diferencia de presiones las burbujas aumentan su tamaño. Suponiendo que la burbuja asciende de manera isotérmica hasta llegar a la superficie del mar. Si R_b es el radio de una burbuja de aire en el fondo del mar, a una profundidad h, y R_s el radio de la misma burbuja cuando ha llegado a la superficie.

Pregunta 3.3 Determine una expresión para calcular la profundidad h en términos de R_b, R_s y las constantes del problema, obtenga el valor de h si la burbuja aumenta al doble de su volumen inicial al llegar a la superficie del mar y $R_b = 2.0\,\mathrm{cm}$. (3 puntos)

Pregunta 3.3 Solución

Como establece la pregunta, durante el ascenso el aire dentro de la burbuja mantiene su temperatura constante (proceso isotérmico) y por lo tanto, de la ecuación de gas ideal, se obtiene: $P_h V_h = P_s V_s$, donde P_h, V_h corresponde a la presión dentro de la burbuja y al volumen de la burbuja a la profundidad h y lo mismo corresponde para P_s, V_s pero en la superficie.

(0.5 puntos) Escribir la ecuación de un proceso isotérmico del gas ideal

Como en el inciso anterior, la presión dentro de la burbuja cuando esta a la profundidad h es: $P_0 + \rho_w g h + \dfrac{2\sigma}{R_b}$; por otro lado, cuando esta en la superficie es: $P_0 + \dfrac{2\sigma}{R_s}$ (en la superficie la presión hidrostática del agua es cero), por lo tanto la ecuación del proceso isotérmico queda como:

$$\begin{aligned}\left(P_0 + \rho_w g h + \frac{2\sigma}{R_b}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_b^3\right) &= \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_s}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_s^3\right) \\ \left(P_0 + \rho_w g h + \frac{2\sigma}{R_b}\right) R_b^3 &= R_s^3\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_s}\right)\end{aligned} \tag{48}$$

(0.5 puntos) Escribir correctamente las presiones empleando la formula de Laplace.

despejando h y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}h &= \frac{1}{\rho_w g}\left[\left(\frac{R_s^3}{R_b^3}\right)\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_s}\right) - \frac{2\sigma}{R_b} - P_0\right] \\ &= \frac{1}{\rho_w g}\left[P_0\left(\frac{R_s^3}{R_b^3} - 1\right) + 2\sigma\left(\frac{R_s^3}{R_b^3}\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_b}\right)\right]\end{aligned} \tag{49}$$

(1.0 puntos) Expresión correcta de h.

definiendo: $x \equiv R_s/R_b > 1$, se puede reescribir como:

$$h = \frac{1}{\rho_w g}\left[P_0\left(x^3 - 1\right) + \frac{2\sigma}{R_b}\left(x^2 - 1\right)\right] \tag{50}$$

Si la burbuja aumenta al doble de volumen entonces: $\frac{4\pi}{3}R_s^3 = 2\,\frac{4\pi}{3}R_b^3$, es decir:

$\left(\dfrac{R_s}{R_b}\right)^3 = x^3 = 2, \quad x^2 = 2^{2/3} \approx 1.59\ , \quad x = 2^{1/3} \approx 1.26,$

(0.5 puntos) Por escribir $R_s = 2^{1/3}\,R_b$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}h &= \frac{1}{(10^3\,\mathrm{kg/m^3})\,(9.81\,\mathrm{m/s^2})}\left[\left(1.016\times 10^5\,\mathrm{Pa}\right)(2-1) + \frac{2\,(0.0725\,\mathrm{N/m})}{2.0\,\mathrm{cm}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/cm}}\,(1.59-1)\right] \\ &\approx 10.36\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{51}$$

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

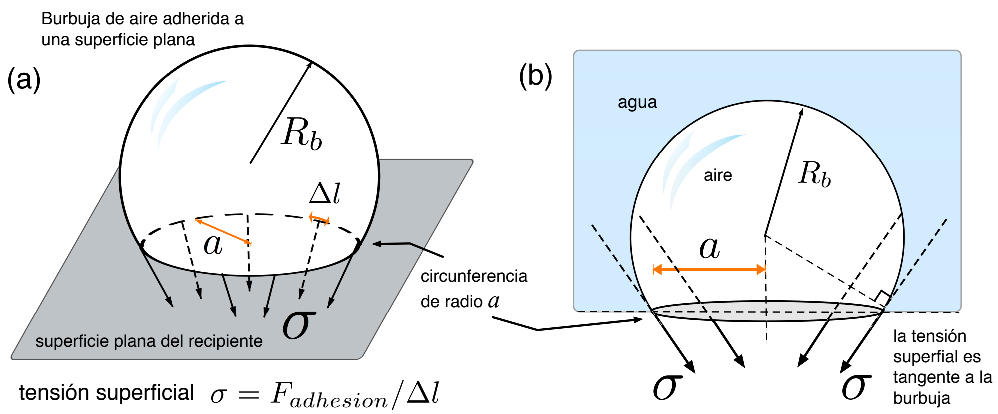
Formación de burbujas de aire en el agua.

Al calentar agua en un recipiente es común la formación de burbujas de aire dentro del agua, estas burbujas inicialmente están adheridas a la superficie inferior del recipiente por efecto de la tensión superficial. En este caso una burbuja de aire, de radio R_b, adherida a la superficie plana del recipiente está truncada a través de una circunferencia de radio a como se muestra en la figura (a).

La tensión superficial se define como la fuerza de adhesión por unidad de longitud:

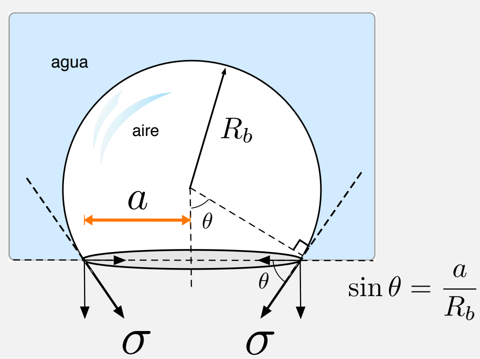
$$\sigma = F_{adhesion}/\Delta l \tag{52}$$

donde Δl es una pequeña longitud donde actúa la fuerza de adhesión. La tensión superficial actúa en todos los puntos de la circunferencia de contacto entre entre la burbuja y la superficie del recipiente y es tangente a la burbuja como se muestra en la figura (b).



Pregunta 3.4 Determine la magnitud de la fuerza total de adhesión que actúa sobre la burbuja si está en contacto con una superficie plana a través de una circunferencia de radio a. **(1.5 puntos)**

Pregunta 3.4 Solución



La fuerza de adhesión se obtiene de la tensión superficial, pero la tensión superficial es tangente a la burbuja en cada punto; sin embargo, las componentes horizontales se cancelan mutuamente y por lo tanto la fuerza de adhesión resultante está en la dirección vertical y su magnitud esta dada por:

$$F_{adhesion} = (2\pi a)\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta = (2\pi a)\,\sigma\frac{a}{R_b} \tag{53}$$

(-0.5 puntos) Si omite el factor: $\mathrm{sen}\,\theta$

Suponga que $R_b \gg a$, de tal manera que el volumen de la burbuja truncada se puede aproximar al volumen de una esfera de radio R_b. La burbuja permanece adherida al recipiente mientras haya un equilibrio de fuerzas sobre la burbuja. Nota que la densidad del aire dentro de las burbujas es mucho menor a la del agua: $\rho_a = 1.29\,\mathrm{kg/m^3} \ll \rho_w = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Pregunta 3.5 Determine una expresión para calcular el radio a necesario para que una burbuja de radio R_b se mantenga adherida del fondo del recipiente, obtenga el valor de a si $R_b = 1.0\,\mathrm{mm}$. (1.5 puntos)

Pregunta 3.5 Solución

Las fuerzas que actúan sobre la burbuja son su peso: $W = \rho_a g V_b = \rho_a g \dfrac{4\pi R_b^3}{3}$, la fuerza de flotación: $F_f = \rho_w g V_b = \rho_w g \dfrac{4\pi R_b^3}{3}$ y la fuerza de adhesión: $F_{adhesion} = (2\pi a)\,\sigma \frac{a}{R_b}$. En equilibrio de fuerzas:

$$F_{adhesion} + W = F_f \tag{54}$$

Como $\rho_a \ll \rho_w$, se puede despreciar el peso de la burbuja W y se acepta como correcto.
(0.5 puntos) Identificar la fuerza de flotación y escribir la ecuación de equilibrio de fuerzas
Sustituyendo el resultado del inciso anterior de la fuerza de adhesión, se obtiene:

$$(2\pi a)\,\sigma \frac{a}{R_b} = \frac{4\pi g R_b^3}{3}(\rho_w - \rho_a) \qquad \Rightarrow \qquad a = R_b^2 \sqrt{\frac{2(\rho_w - \rho_a)\,g}{3\sigma}}$$

(0.5 puntos) Expresión correcta para determinar a
Sustituyendo valores:

$$a = (1.0\,\mathrm{mm})^2 \sqrt{\frac{2\,(10^3\,\mathrm{kg/m^3} - 1.29\,\mathrm{kg/m^3})\,(9.81\,\mathrm{m/s^2})}{3\,(0.0725\,\mathrm{N/m})}} = 3.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.3\,\mathrm{mm} \tag{55}$$

El resultado es el mismo si se omite el peso de la burbuja y se acepta como correcto.
(0.5 puntos) Valor numérico correcto.