P1. Anemometría sónica.

Hoy en día, los Centros Meteorológicos disponen de aparatos muy sofisticados para medir la velocidad del viento que, además y simultáneamente, miden la temperatura del aire. El ejercicio que se propone hace referencia a uno de estos aparatos, el *anemómetro sónico*, que a diferencia de los convencionales carece de partes móviles como son las cazoletas giratorias, veleta, etc. El funcionamiento de este tipo de anemómetro se basa en la medida de tiempos de propagación de señales sonoras.

Como introducción, y para facilitar la resolución del ejercicio, se propone en primer lugar el conocido problema del movimiento de una canoa en un río.

Una canoa que navega a una velocidad constante *c* respecto al agua, realiza una trayectoria rectilínea desde un punto A hasta otro B separados una distancia *L* y después, realiza el trayecto inverso de B hasta A. Los tiempos que tarda en hacer los recorridos son t_1' y t_2' respectivamente, siendo $t_2' > t_1'$ porque existe una corriente de velocidad $\vec{v}_a$ que tiene la dirección de A a B, tal como se muestra en la figura 1.

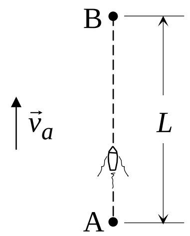


Fig. 1

a) Deduzca las expresiones analíticas que permitan calcular *c* y v_a (módulo de $\vec{v}_a$) en función de t_1' y de t_2' y de la distancia *L*.

Suponga ahora, y en todo lo que sigue, que la canoa es una señal sonora que se propaga en el aire con una velocidad *c* y que la velocidad $\vec{V}_a$ es la del viento.

b) Si la velocidad de propagación del sonido es $c = 3{,}44 \times 10^2\,\text{m/s}$ y la del viento es $V_a = 100{,}0\,\text{km/h}$, calcule los tiempos t_1' y t_2' tomando $L = 20{,}0\,\text{cm}$

Considere que el viento “no sopla” en la dirección AB sino que lo hace de forma que $\vec{v}_a$ tiene dos componentes, v_N y v_L, perpendicular y paralela a AB, respectivamente, tal como se indica en la figura 2.

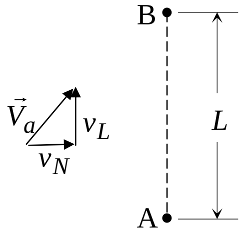


Fig. 2

c) Como sólo se puede determinar la componente longitudinal de la velocidad del viento, deduzca la expresión de v_L en función de la distancia *L* y de los tiempos t_1 y t_2 que transcurren, respectivamente, desde que la señal sonora es emitida en A y detectada en B y viceversa.

d) Teniendo en cuenta que $c >> v_a$, deduzca la expresión de la velocidad del sonido, *c*, en función de *L*, t_1 y t_2.

La velocidad de propagación del sonido en el aire, *c*, depende de la densidad del aire ρ y de su módulo de compresibilidad *B*, según la expresión:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

En la propagación de una onda sonora, cada elemento de volumen del aire, *V*, experimenta variaciones periódicas de la presión, Δp, que dan lugar a variaciones, ΔV, de su volumen. El módulo de compresibilidad representa el factor de proporcionalidad entre dichas variaciones, es decir, se define como

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

Ahora bien, la relación $\Delta V / \Delta p$ depende del tipo de transformación termodinámica que experimente el gas (aire) contenido en el elemento de volumen.

Dada la baja conductividad térmica de los gases y la rapidez con que se producen las variaciones de presión y de volumen, estos procesos deben considerarse adiabáticos. En consecuencia, el modelo adiabático de propagación del sonido es el más indicado para aire seco, por lo que, si γ es el índice adiabático del aire, se tiene

$$V\Delta p + \gamma\, p\Delta V = 0$$

e) Considerando que el aire, de masa molecular media M_a, se comporta como un gas perfecto, obtén la expresión de c en función de la temperatura T del aire.

f) ¿A qué temperatura la velocidad del viento tendrá el valor indicado en el apartado b?

$$R = 8{,}315\,\text{J/(K mol)} \qquad M_a = 28{,}8\times 10^{-3}\,\text{kg/mol} \qquad \gamma = 1{,}40$$

Nota:

El problema propuesto constituye el fundamento de los anemómetros sónicos, ampliamente usados en la actualidad y descritos por V. E. Suomi y J. A. Businger (Geophys. Research Papers No 59, Vol. III, 1, 1959).

Puesto que sólo se puede determinar la componente longitudinal de la velocidad del viento, v_L, en función de los tiempos de vuelo de la señal, es necesario disponer de tres dispositivos análogos que midan dicha componente en tres direcciones no coplanarias para que la velocidad del viento quede completamente determinada, como se puede apreciar en la fotografía de la figura 3.

La dirección del viento puede medirse con una exactitud de $\pm 1^{\circ}$ y su velocidad con $\pm 1\%$ en el rango de 0 a 215 km/h. Asimismo, miden la velocidad del sonido con la misma exactitud en el rango de 300 a 380 m/s.

Dada la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura, estos anemómetros permiten medirla con una exactitud de $\pm 1\%$ en el rango comprendido entre -30ºC y 50ºC.

Fig. 3

Solución

a) Consideremos dos sistemas de referencia, uno fijo ligado a los puntos A y B y otro ligado al agua que se mueve respecto al primero con velocidad $\vec{v}_a$. Las velocidades de la barca en ambos sistemas de referencia están relacionadas por:

$$\vec{v}\,' = \vec{c} + \vec{v}_a \qquad (1)$$

Si llamamos $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ a las velocidades con las que se mueve la barca respecto al primer sistema en los recorridos citados, y dado que todos los vectores velocidad tienen la misma dirección, sus módulos verifican

$$v_1' = c + v_a$$
$$v_2' = c - v_a$$

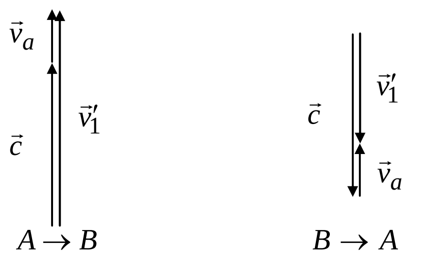


Fig. 4

Por otra parte, $v_1' = L / t_1'$ y $v_2' = L / t_2'$, luego

$$t_1' = \frac{L}{c + v_a} \qquad t_2' = \frac{L}{c - v_a} \qquad (2)$$

Lógicamente, $t_2' > t_1'$. Sumando y restando las expresiones (2) se obtienen las relaciones buscadas

$$\boxed{v_a = \frac{L}{2}\,\frac{t_2' - t_1'}{t_1' t_2'}} \qquad \boxed{c = \frac{L}{2}\,\frac{t_2' + t_1'}{t_1' t_2'}}$$

b) Con los datos del enunciado, de (1) se obtiene:

$$\boxed{t_1' = 5{,}38 \times 10^{-4}\ \text{s} = 0{,}538\,\text{ms}} \qquad \boxed{t_2' = 6{,}33 \times 10^{-4}\ \text{s} = 0{,}633\,\text{ms}}$$

c) La relación entre las velocidades es la dada en (1) pero ahora los vectores tienen direcciones diferentes. En los trayectos AB y BA, los correspondientes diagramas de velocidades son los dados en la figura 5.

Las direcciones de las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son la de AB, deberá cumplirse que

$$v_N = c\,\text{sen}\,\beta_1 = c\,\text{sen}\,\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta$$

Por otra parte, de los diagramas de la figura 5, se deduce

$$v_1 = c\cos\beta + v_L$$
$$v_2 = c\cos\beta - v_L \qquad (3)$$

siendo $v_1 = L / t_1$ y $v_2 = L / t_2$

sustituyendo estas últimas expresiones en (3) y restando ambas ecuaciones se obtiene inmediatamente v_L en función de los tiempos de ida y de vuelta de la señal

$$\boxed{v_L = \frac{L}{2}\left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}\right)} \qquad (4)$$

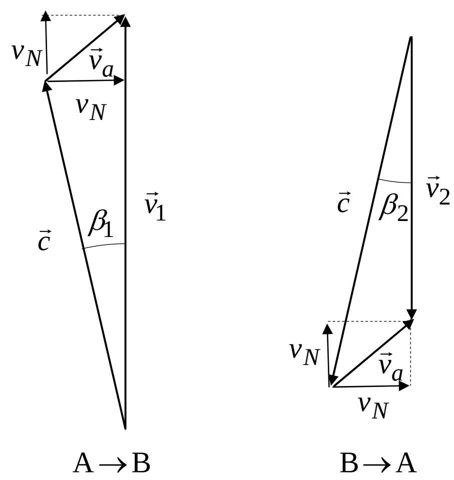


Fig. 5

d) Si sumamos las expresiones (3), con las velocidades de la señal en función de los tiempos de vuelo, resulta

$$c\cos\beta = \frac{L}{2}\left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}\right) \qquad (5)$$

Como el ángulo β es desconocido, para poder eliminarlo, el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectángulos de la figura 5, nos proporciona la siguiente ecuación

$$c^2 \cos^2 \beta = c^2 - v_N^2 \qquad (6)$$

Sustituyendo en (5)

$$c^2 - v_N^2 = \frac{L^2}{4}\left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}\right)^2$$

Ya que $c >> v_a$, también $c >> v_N$ por lo que

$$c^2 \approx \frac{L^2}{4}\left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c \approx \frac{L}{2}\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}} \qquad (7)$$

d') Otra forma de determinar c.

Del diagrama A → B de la figura 5 se deduce que

$$v_1 = c\cos\beta + v_L \quad \Rightarrow \quad c\cos\beta = v_1 - v_L$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta (6)

$$c^2 - v_N^2 = v_1^2 + v_L^2 - 2v_L v_1 \quad \Rightarrow \quad c^2 = v_1^2 + v_L^2 + v_N^2 - 2v_L v_1$$

Pero, $v_L^2 + v_N^2 = v_a^2$ y como $c >> v_a$, se puede escribir, recordando que $v_1 = L / t_1$

$$c^2 \approx \frac{L^2}{t_1^2} - 2\frac{L}{t_1} v_L$$

Sustituyendo el valor de v_L de la expresión (4), se deduce que

$$\boxed{c \approx \frac{L}{\sqrt{t_1 t_2}}} \qquad (8)$$

Nota:

Las expresiones (7) y (8) son, a primera vista, muy diferentes pero ambas válidas. En efecto la ecuación (7) puede expresarse así en función del cociente entre de las medias aritmética y geométrica de t_1 y t_2

$$c \approx L\frac{(t_1 + t_2)/2}{\sqrt{t_1 t_2}}\frac{1}{\sqrt{t_1 t_2}}$$

Como ambas medias son prácticamente coincidentes cuando, como es el caso que nos ocupa, $t_1 \approx t_2$, resulta que

$$c \approx L\frac{1}{\sqrt{t_1 t_2}}$$

que coincide con la expresión (8).

De (7) y (8) se llega también a

$$\boxed{c \approx \frac{2L}{t_1 + t_2}}$$

Dado que $t_1 \approx t_2$, puede deducirse esta expresión de forma independiente sin más que escribir que

$$c \approx \frac{L}{\bar{t}}$$

donde $\bar{t}$ es el tiempo medio de ida y vuelta de la señal sonora

e) En virtud de la información que aporta el enunciado de este apartado, la velocidad del sonido puede escribirse como

$$c = \sqrt{-\frac{V\,\Delta p}{\rho\,\Delta V}} \qquad (9)$$

Naturalmente, un aumento de presión ($\Delta p > 0$) implica una disminución del volumen ($\Delta V < 0$) y viceversa, es decir, la relación $\Delta p / \Delta V$ tiene que ser necesariamente negativa, cualquiera que sea la transformación termodinámica que sufra el elemento de volumen.

En este caso, y de nuevo tal como sugiere el enunciado para aire seco, el modelo de transformación más indicado es el adiabático en el que se verifica que

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma\, p}{V}$$

Sustituyendo en (9)

$$c = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho}} \qquad (10)$$

Asumiendo que el aire se comporta como un gas perfecto, llamando M a la masa de aire encerrado en el volumen V y T a su temperatura absoluta, se tiene que

$$pV = nRT = \frac{M}{M_a} RT \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_a}$$

Sustituyendo en (19) se obtiene la expresión de la velocidad de propagación del sonido en el aire, en función de la temperatura

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma\, R}{M_a} T}} \qquad (11)$$

f) La velocidad del sonido indicada en el apartado (b) es $c = 3{,}44 \times 10^2$ m/s. La temperatura correspondiente, de acuerdo con (11), vendrá dada por

$$T = \frac{c^2 M_a}{\gamma\, R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2{,}93 \times 10^2 \text{ K}}$$

P2. La rueda hidráulica.

La rueda hidráulica es uno de los más antiguos artilugios para producir trabajo útil. Como antecedentes de las modernas turbinas, estos dispositivos captan energía de de una corriente de agua y la transforman en trabajo mecánico para mover molinos, batanes, martillos pilones en las ferrerías, etc, y para bombear agua, como es el caso de las norias, objeto de este ejercicio.

En España han existido infinidad de norias y algunas todavía subsisten, como ejemplo verdaderamente notable es la de Abarán (Murcia). En el río Ebro, una noria da nombre a un antiguo monasterio cisterciense: el Monasterio de Rueda. Con motivo de la celebración en España de la Exposición Internacional de 2008 que tendrá lugar en Zaragoza y para hacer honor a su lema: el agua, se instalará una noria de gran tamaño y enteramente de madera, construida en Siria donde son famosas las existentes en Hama, en el río Orantes, que datan del siglo XII y aún permanecen en funcionamiento.

Una noria hidráulica destinada a la elevación de agua es esencialmente una rueda con paletas (álabes), colocada con su eje horizontal, como se muestra en la figura 1. La corriente de un río, acequia o canal ejerce una fuerza sobre los álabes sumergidos de su parte inferior que producen la rotación de la rueda. En el perímetro de la rueda se disponen unos pequeños recipientes (cangilones o arcaduces) que se llenan de agua al estar sumergidos y cuando, debido al giro de la rueda, alcanzan la parte superior vierten su contenido en un canal. De esta forma elevan agua a una altura aproximadamente igual al diámetro de la rueda.

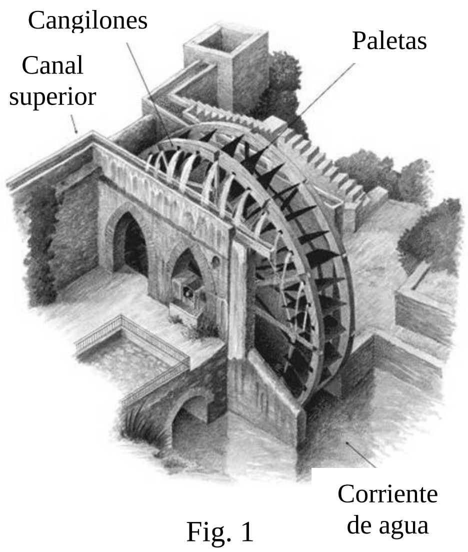


Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3

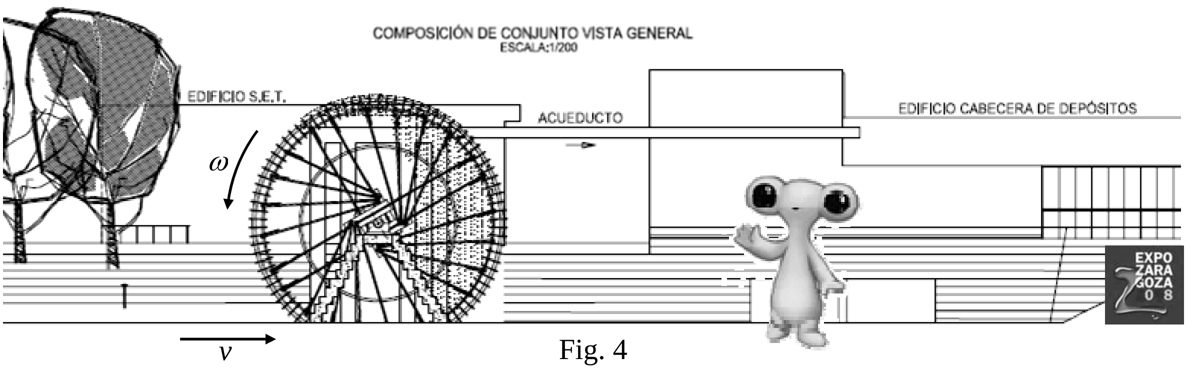


Fig. 4

Una reproducción de una noria romana, con cangilones de barro en forma de cántaros, se encuentra en el parque de María Cristina de Algeciras (figura 2) y en la fotografía de la figura 3 aparecen unas norias de Hama; la mayor es la que está siendo reproducida en la EXPO2008 y que en la figura 4, está representada esquemáticamente y a escala. (Foto y esquema, cortesía de EUROTEC, empresa encargada de su proyecto y construcción)

En la noria representada en la figura 4, objeto de este ejercicio, el agua de la acequia que se mueve con una velocidad media *v*, "choca" con el álabe plano, de área *A*, que se encuentra en su parte inferior y que se desplaza con una velocidad constante u ($u < v$).

Responde a las siguientes cuestiones suponiendo que la noria se comporta como un mecanismo ideal, sin tener en cuenta ningún tipo de pérdidas energéticas.

Si llamamos Δt al tiempo que dura el choque, la cantidad de agua Δm que golpea al álabe es la contenida en el elemento de volumen $A\Delta x$, como se muestra en la figura 5a. Como consecuencia de este proceso, la masa Δm pasa a tener una velocidad horizontal *u*, igual a la del álabe (figura 5b).

"*antes* del choque" "*después* del choque"

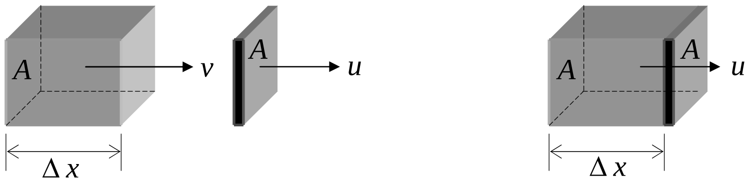


Fig. 5 b

1) Como aplicación del *teorema del impulso y de la cantidad de movimiento*, deduzca la expresión de la fuerza ΔF que el agua ejerce sobre el álabe en función de las velocidades *u* y *v*, del área *A* y de la densidad del agua ρ.

2) Determina el trabajo ΔW que realiza la fuerza ΔF sobre el álabe en el intervalo de tiempo Δt.

3) Determina el rendimiento del proceso, definido como $\eta = \Delta W / \Delta E_c$, en donde ΔE_c es la energía cinética de la masa Δm contenida en el elemento de volumen $A\Delta x$, que es la máxima energía que se puede transferir del agua al álabe.

4) El rendimiento anterior depende de la velocidad *u* del álabe. Determina el valor u_0 de la velocidad del álabe para la cual dicho rendimiento es máximo. ¿Cuál es el valor del máximo rendimiento?

5) Si el radio de la noria es *R*, ¿con qué velocidad angular ω_0 debe girar para que el rendimiento sea máximo?

La noria que se va a construir para la Expo2008, tiene un diámetro $2R = 16{,}5\,m$, la superficie efectiva de sus álabes planos es $A = 0{,}5\,m^2$ y se pretende elevar un caudal de agua $G = 1{,}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3/s}$.

6) Determina la expresión analítica de la velocidad media de la corriente de agua, *v*, que provoca el giro de la noria, en condiciones de rendimiento máximo, y calcula su valor. Toma como valor de la aceleración de la gravedad: $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Solución

1º La variación de la componente horizontal del momento lineal de la masa Δm contenida en el elemento de volumen $A\Delta x$, durante el choque con el álabe es igual al impulso que éste ejerce sobre dicho elemento de volumen:

$$\Delta F'\Delta t = \Delta m(u-v)$$

Como $\Delta m = \rho A\Delta x$ y, en virtud del principio de acción y reacción, la fuerza ΔF que el agua ejerce sobre el álabe es igual a $-\Delta F'$, se tiene

$$\Delta F\Delta t = \rho A\Delta x(v-u)$$

Además, como $\Delta x = v\Delta t$ se obtiene

$$\boxed{\Delta F = \rho A v(v-u)}$$

2º El trabajo ΔW que ΔF realiza sobre el álabe en el tiempo Δt es

$$\Delta W = \Delta F\,\Delta x'$$

Como $\Delta x' = u\Delta t$ es la distancia recorrida por el álabe en el tiempo que dura el choque, el trabajo viene dado por

$$\boxed{\Delta W = \rho A u\, v(v-u)\Delta t}$$

3º Para el cálculo del rendimiento es necesario determinar la energía cinética de la masa Δm. Esta energía es

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 = \frac{1}{2}\rho A v\Delta t\, v^2 = \frac{1}{2}\rho A\Delta t\, v^3$$

Por lo que el rendimiento es

$$\boxed{\eta = \frac{2u(v-u)}{v^2}}$$

4º El rendimiento será máximo para el valor $u = u_0$ que haga

$$\frac{d\eta}{du} = 0 \quad \Rightarrow \quad v - 2u_o = 0$$

Con lo que

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2}v} \quad \text{y} \quad \boxed{\eta = 0{,}5}$$

5º La velocidad angular de la noria es $\omega = u/R$. Si el rendimiento ha de ser el máximo, la velocidad angular deberá ser

$$\boxed{\omega_0 = \frac{v}{2R}}$$

6º La energía disponible es el trabajo realizado sobre el álabe en condiciones de rendimiento máximo, $u_0 = v/2$

$$\Delta W_{u=u_0} = \frac{1}{4}\rho A v^3\Delta t$$

Para elevar una masa de agua ΔM a una altura $h = 2R$ es necesario consumir una energía

$$\Delta E = \Delta M\, 2Rg$$

que podemos poner en función del caudal G recordando que $\Delta M = \rho G\Delta t$, con lo que

$$\Delta E = \Delta M \, 2R g = \rho G \, 2 R g \Delta t$$

Igualando la energía disponible con la consumida (balance energético) se tiene

$$\frac{1}{4} \rho A v^3 \Delta t = \rho G \, 2 R g \Delta t$$

Que nos permite obtener la velocidad de la corriente de agua que provoca el giro de la noria en rendimiento máximo en función del caudal de agua elevada

$$\boxed{v = \left(\frac{8 R g G}{A} \right)^{1/3}}$$

Sustituyendo los valores dados en el enunciado, se obtiene el siguiente valor

$$\boxed{v = 2{,}7 \text{ m/s} = 9{,}6 \text{ km/h}}$$

P3. Paseando una espira por un campo magnético.

Una espira cuadrada de lado b, resistencia eléctrica R y masa m, está montada sobre un carrito de madera que puede moverse sobre una superficie horizontal con rozamiento despreciable. Un ciudadano empuja el carrito, como se muestra en la figura 1, haciendo que la espira atraviese la región sombreada en la figura, de longitud $L = 2b$, en la que existe un campo magnético B uniforme, perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia adentro. El ciudadano tiene que esforzarse para que durante todo el recorrido la velocidad de la espira sea siempre la misma, V.

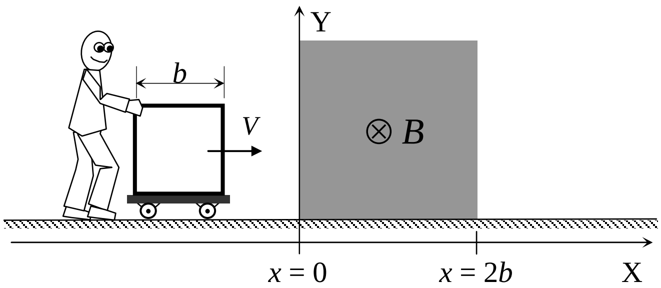


Fig. 1

En la figura se han incluido unos ejes de coordenadas para tener bien definida la posición de la espira en todo momento. Considera como coordenada x la distancia del eje Y al borde derecho de la espira.

a) Determina el flujo magnético $\Phi(x)$ que atraviesa la espira en los siguientes rangos de x:

a$_1$) $\Phi(x \le 0)$ a$_2$) $\Phi(0 \le x \le b)$ a$_3$) $\Phi(b \le x \le 2b)$ a$_4$) $\Phi(2b \le x \le 3b)$ a$_5$) $\Phi(3b \le x)$

b) Haz una representación gráfica de $\Phi(x)$ en el rango $x = -b$ a $x = 4b$.

c) Determina el valor absoluto de la fuerza electromotriz, inducida en la espira, $\varepsilon(x)$,en los siguientes rangos:

c$_1$) $\varepsilon(x \le 0)$ c$_2$) $\varepsilon(0 \le x \le b)$ c$_3$) $\varepsilon(b \le x \le 2b)$ c$_4$) $\varepsilon(2b \le x \le 3b)$ c$_5$) $\varepsilon(3b \le x)$

d) Representa gráficamente la intensidad de la corriente inducida que circula por la espira en función de x. Considera que la intensidad es positiva cuando recorre la espira en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

e) Determina la fuerza que el ciudadano tiene que ejercer sobre la espira para que su velocidad permanezca constante e igual a V en los siguientes rangos de x:

e$_1$) $F(x \le 0)$ e$_2$) $F(0 \le x \le b)$ e$_3$) $F(b \le x \le 2b)$ e$_4$) $F(2b \le x \le 3b)$ e$_5$) $F(3b \le x)$

Ahora la protagonista es una ciudadana que en vez de arrastrar el carrito con la espira, le da un empujón imprimiéndole una velocidad v_0, como se muestra en la figura 2.

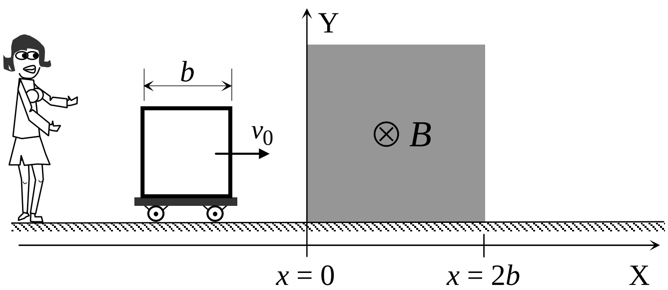


Fig. 2

f) ¿Cuál es la mínima velocidad v_0 que la ciudadana debe imprimir al carrito para que la espira entre completamente en la región del campo magnético?

En este último apartado, seguramente te serán útiles las siguientes relaciones:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Solución

a) El flujo de un campo magnético uniforme que atraviesa perpendicularmente una superficie de área S es:

$$\Phi = B\,S\,.$$

a₁) $\boxed{\Phi\,(x \le 0) = 0}$

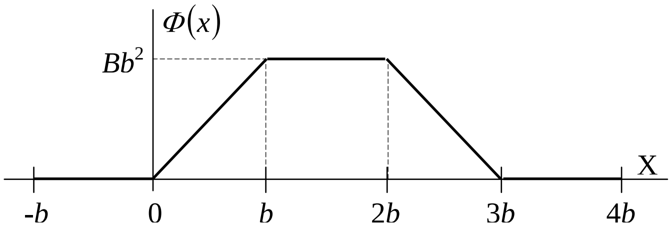
a₂) $\boxed{\Phi\,(0 \le x \le b) = B\,b\,x}$

a₃) $\boxed{\Phi\,(b \le x \le 2b) = B\,b^2}$

a₄) $\boxed{\Phi(2b \le x \le 3b) = B\,b(3b - x)}$

a₅) $\boxed{\Phi\,(3b \le x) = 0}$

b) La representación correspondiente es:



c) De acuerdo con la ley de Faraday-Lenz,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}$$

el valor absoluto de la fem inducida en la espira es:

c₁) $\boxed{\varepsilon(x \le 0) = 0}$

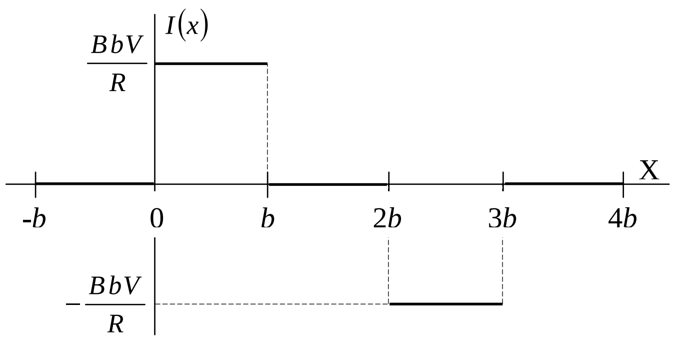
c₂) $\boxed{\varepsilon(0 \le x \le b) = B\,b\,V}$

c₃) $\boxed{\varepsilon(b \le x \le 2b) = 0}$

c₄) $\boxed{\varepsilon(2b \le x \le 3b) = B\,b\,V}$

c₅) $\boxed{\varepsilon(3b \le x) = 0}$

d) La representación gráfica de la intensidad que circula por la espira $(I = \varepsilon / R)$, de acuerdo con el convenio de signos establecido en el enunciado, es:



e) Cuando la espira está en $x \le 0$, $b \le x \le 2b$ o $3b \le x$ la fuerza de interacción con el campo magnético es nula; sin embargo, tanto en $0 \le x \le b$, como en $2b \le x \le 3b$ la fuerza de Lorentz es $F = IBb$, horizontal y dirigida hacia la izquierda.

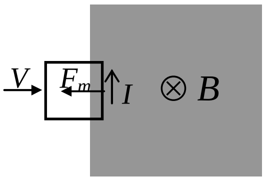


Fig. 3

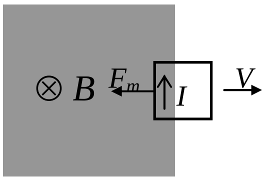


Fig. 4

Por lo tanto, sólo en ambos tramos, para que la espira se mueva con velocidad constante *V*, es decir, con aceleración nula, el ciudadano deberá "esforzarse" aplicando una fuerza igual y de sentido contrario a F_m.

Como en dichos tramos el valor absoluto de la intensidad de la corriente inducida es

$$I = \frac{BbV}{R}$$

Resulta que la fuerza con la que el ciudadano deberá empujar es:

$$\boxed{F = \frac{B^2 b^2 V}{R}}$$ "Horizontal y hacia la derecha"

f) Una vez que la ciudadana "lanza" el carrito con la espira, el movimiento es uniforme hasta que comience a entrar en el campo. A partir de ahí, la fuerza de Lorentz debida a la intensidad inducida, que actúa sobre el lado derecho de la espira, frenará su movimiento.

Si *v* es la velocidad de la espira cuando está a la distancia *x*, e *I* la intensidad de la corriente inducida en ese instante, el módulo de la fuerza de Lorentz vendrá dada por:

$$f_m = B\, b\, I$$

siendo $I = \dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}$

Por otra parte,

$$\Phi = B\, b\, x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = B\, b\frac{dx}{dt} = B\, b\; v \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{B^2\, b^2}{R} v$$

Recordando que f_m se opone a la velocidad, que "frena" la espira, en virtud de la segunda ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\, b^2}{R} v$$

Ahora es cuando viene bien tener en consideración la "ayuda" del final del apartado d ya que con ella se puede escribir,

$$\frac{dv}{dx} v = -\frac{B^2\, b^2}{m\, R} v \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{B^2\, b^2}{m\, R} dx$$

Si v_0 es la mínima velocidad con la que la ciudadana lanza el carrito para que entre enteramente en la región del campo magnético y se pare, o lo que es lo mismo que $v = 0$ en $x = b$, integrando la anterior ecuación, se obtiene

$$\int_{v_0}^{0} dv = -\frac{B^2\, b^2}{m\, R}\int_0^b dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{B^2\, b^3}{m\, R}}$$