

**Problema 1**

La desintegración radiactiva es un proceso estadístico que depende de la inestabilidad de un radioisótopo particular y que para cualquier núcleo dado de una muestra es completamente impredecible. El proceso de decaimiento y la dependencia de la radiactividad de la semivida observada, se puede predecir si se asume que las desintegraciones individuales nucleares, son eventos puramente aleatorios. Si hay  $N$  núcleos radiactivos en un tiempo  $t$ , entonces, el número  $\Delta N$  que se desintegraría en cualquier intervalo de tiempo  $\Delta t$  será proporcional a  $N$ :

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

integrando la ecuación anterior se obtiene el numero de núcleos radioactivos presentes en la sustancia al tiempo  $t$ :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

donde  $N_0 = N(t=0)$  es el número de núcleos inicialmente ( $t=0$ ) y  $\lambda$  es la *constante de desintegración*.

La vida media de una sustancia radioactiva  $T_{1/2}$  (a veces denotado simplemente como  $T$ ) se define como el tiempo o periodo durante el cual el numero de núcleos radioactivos diminuye a la mitad del numero de núcleos que se tienen originalmente ( $N_0$ ). Como se puede comprobar facilmente, la vida media y la constante de desintegración están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (3)$$

- 1.1** Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración (vida media)  $T = 1.34$  días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante  $q = 2.7 \times 10^{29}$  núcleos/s. Determinar cómo varía la actividad  $A$  de la muestra con el tiempo, la actividad nuclear es el número de núcleos que desaparecen por unidad de tiempo y representa la velocidad de desintegración:  $A = \lambda N(t)$

- 1.2** Si una sustancia radioactiva A se transforma por desintegración en una sustancia B también radioactiva y  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  son las respectivas constantes de desintegración, entonces se establecen el par de ecuaciones que rigen el decaimiento radioactivo para cada sustancia<sup>1</sup>:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \quad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \quad (4)$$

Si inicialmente ( $t=0$ ) se tienen  $N_{0A}$  núcleos de la sustancia A y cero núcleos de la sustancia B, la solución de las ecuaciones anteriores son:

$$N_A(t) = N_{0A} e^{-\lambda_A t} \quad N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{0A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \quad (5)$$

Si adicionalmente la sustancia B se desintegra en una sustancia C, el número de núcleos de C aumenta uniformemente hasta que después de un tiempo muy largo (comparado con las vidas medias de A y B) es igual a  $N_{0A}$ . Demuestra que el número de núcleos de la sustancia C al tiempo  $t$  esta dada por:

$$N_C(t) = \frac{N_{0A}}{\lambda_B - \lambda_A} [\lambda_B (1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A (1 - e^{-\lambda_B t})] \quad (6)$$

<sup>1</sup>Intenta resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (4) y llegar a las soluciones (5), no es nada fácil. Si encuentras una manera reportala por favor.

## Problema 2

En la reacción nuclear  ${}^6_6\text{C} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{14}_7\text{N}^*$ , siendo el blanco de la reacción los núcleos de carbono, los protones con una energía de 1.750 MeV producen nitrógeno en estado excitado.

- a) Calcular la energía cinética de traslación del sistema total, esta es la energía cinética del centro de masa considerado como una partícula cuya masa es la suma de todas las partículas:

$$E_{CM} = \frac{1}{2} (m_p + m_C) v_{CM}^2 \quad (7)$$

- b) Calcula la energía de excitación del nitrógeno.

c) Si el nitrógeno pasa a su estado fundamental lo hace emitiendo un fotón; probar que prácticamente toda la energía se la lleva el fotón.

d) Una de las reacciones más utilizadas en los aceleradores consiste en que un protón con cierta energía golpea a otro que se encuentra en reposo. Calcular la energía disponible para la reacción.

Datos: Masa del protón = 1.007826 uma; masa del carbono = 13.003354 uma; masa del nitrógeno = 14.003074 uma; 1 uma = 931.49 MeV/c<sup>2</sup>

## Problema 3, análisis de datos.

### Medición de relación carga-masa del electrón

A finales del siglo XIX J. J. Thompson logró medir el valor de la relación carga-masa del electrón  $e/m_e$ . El experimento original de Thompson consistía en un tubo donde eran acelerados electrones que provenían de un filamento y después desviados por campos externos hasta ser detectados en una placa fluorescente. El experimento que se describe a continuación consiste en una variante al experimento realizado por Thompson.

En la fotografía de abajo, figura 1, se muestra un ampolla o tubo de vidrio dentro del cual se observa un haz de electrones acelerados en trayectorias circulares por un campo magnético generado por las bobinas circulares, *bobinas de Helmholtz*, externas que se pueden observar en la fotografía. En la parte derecha, dentro del tubo, se encuentra un filamento a muy alta temperatura que sirve como fuente de electrones por efecto termoiónico. La ampolla o tubo de vidrio contiene gas hidrógeno a muy baja presión cuya función es hacer visible al haz de electrones.

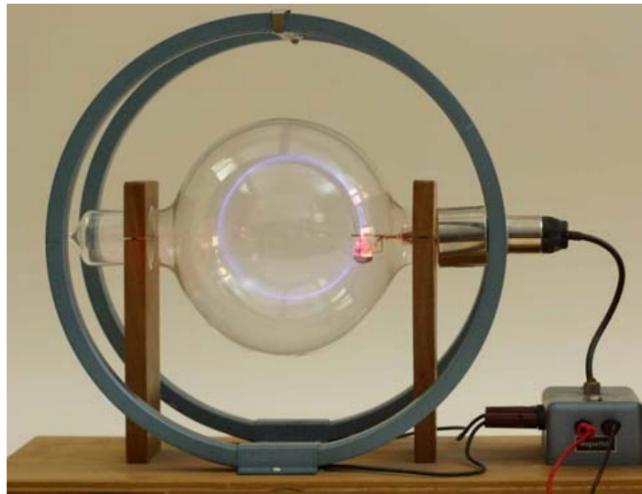
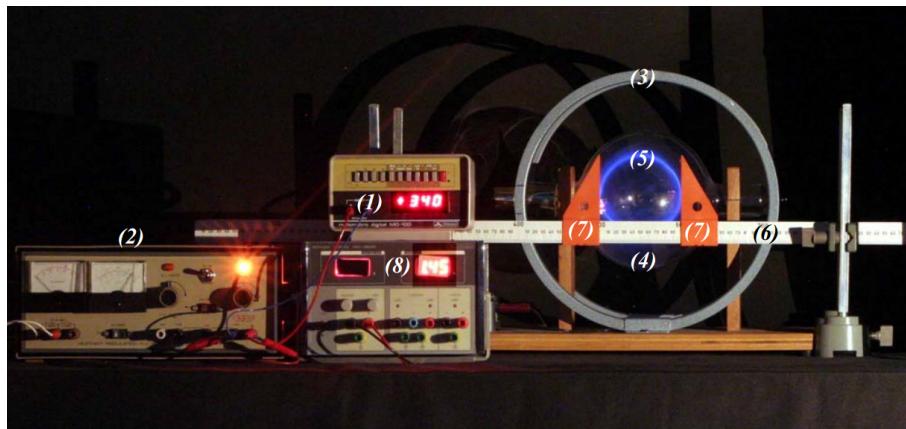


figura 1

El dispositivo experimental completo que permite medir la relación carga-masa del electrón se muestra en la fotografía de la figura 2. Además de la ampolla de vidrio y las bobinas de Helmholtz, se observan dos fuentes de voltaje, una de ellas de 6,3 V cuya función es calentar el filamento metálico que produce los electrones y la otra de centenas de volts cuya función es lograr acelerar a los electrones hasta alcanzar muy altas velocidades; adicionalmente otra fuente debe suministrar la corriente eléctrica, del orden de los amperes, al par de bobinas Helmholtz, todo acompañado de un amperímetro y un voltímetro. El amperímetro mide la corriente eléctrica de las bobinas y el voltímetro la diferencia de potencial que acelera a los electrones.



1) Voltímetro que mide la tensión  $V$ , 2) Fuentes de alimentación, 3) Bobinas de Helmholtz, 4) Ampolla de vidrio, 5) Trayectoria circular de los electrones , la cual se encuentra en el interior de la ampolla vidrio, 6) regla graduada en milímetros, 7) Índices sobre la regla, que permiten medir el diámetro de la trayectoria, 8) Amperímetro

**1)** Un campo magnético uniforme de intensidad  $B$  es generado por las bobinas Helmholtz en la región donde se mueven los electrones. Si los electrones se mueven en dirección perpendicular al campo magnético, encuentra la relación carga-masa del electrón  $e/m_e$  en términos de la velocidad de los electrones  $v$ , la intensidad del campo  $B$  y del radio de la trayectoria circular que describen los electrones  $R$ .

**2)** Adicionalmente se aplica un campo eléctrico generado por una diferencia de potencial eléctrico acelerador  $V_a$ . Suponiendo que los electrones emitidos del filamento tienen velocidad cero, encuentra la velocidad  $v$  que adquieren los electrones debido a este potencial (la dirección del campo eléctrico es perpendicular al campo magnético).

**3)** Teniendo en cuenta que la intensidad del campo magnético  $B$  generado por las bobinas de Helmholtz es proporcional a la corriente en las bobinas:  $B = k \cdot I$  ( $k$  depende del radio de las bobinas, del número de espiras y de la distancia entre ellas), determina una expresión que permite medir la relación carga-masa del electrón en función los dos parámetros externos  $I$  y  $V_a$ .

Para obtener los valores reportados en la Tabla de datos, el procedimiento experimental consistió en variar el voltaje de aceleración  $V_a$  y la corriente en las bobinas  $I$ , de tal manera que el radio de la circunferencia descrita por los electrones sea siempre constante e igual a  $R=5$  cm. Con una regla graduada en milímetros se medió el radio de la trayectoria de los electrones ( $R = 5.00 \pm 0.2$  cm).

Si el valor de la constante de las bobinas es:  $k = 7.54 \times 10^{-4}$  T/A y los datos de la tabla de abajo determina la relación carga-masa del electrón.

$V/(\pm 2$ volts)	$I/(\pm 0.05$ amperes)
192	1.00
208	1.05
220	1.10
234	1.15
252	1.25
270	1.30
300	1.35
315	1.40
335	1.45
355	1.50

Tabla de datos, mediciones de voltaje  $V$  contra corriente  $I$ .

## Introducción

Se le llama *meteoroide* a una pequeña partícula (normalmente menor de 1 m) que se desprende de un cometa o un asteroide. A un meteoroide que impacta en el suelo se le llama meteorito.

La noche del 17 de enero de 2009, muchas personas pudieron observar cerca del Mar Báltico el rastro brillante de un meteoroide que caía en la atmósfera terrestre. El evento fue grabado en video por una cámara de vigilancia en Suecia, véase Fig. 1.1(a). A partir de estas imágenes, y del relato de los testigos, fue posible delimitar el área del impacto. Seis semanas después se encontró un meteorito de masa  $0.025 \text{ kg}$  en las cercanías de un pueblo llamado Maribo al sur de Dinamarca. Las medidas tomadas del meteorito, al que llamaron Maribo, y su órbita en el cielo mostraron resultados interesantes. Su velocidad en el momento de entrada en la atmósfera había sido particularmente alta. Su edad,  $4.567 \times 10^9 \text{ años}$ , indica que se formó poco tiempo después de la formación del sistema solar. El meteorito Maribo es posiblemente una parte del Cometa Encke.

## La velocidad del meteorito Maribo

La bola de fuego viajaba en dirección oeste, con una orientación de  $285^\circ$  respecto al norte, hacia el lugar donde posteriormente se encontró el meteorito, tal como se muestra esquemáticamente en la Fig. 1.1. El meteorito se encontró a  $195 \text{ km}$  de la cámara de seguridad con una orientación de  $230^\circ$  respecto al norte.

1.1	Usando esta información y los datos de la Fig. 1.1. calcula la velocidad media del meteorito en el intervalo de tiempo entre los cuadros (frames) 155 y 161 de la figura 1.1. La curvatura de la Tierra y la fuerza gravitacional sobre el meteorito pueden despreciarse.	1.3
-----	---	-----

## ¿Se funde el meteorito al atravesar la atmósfera?

El rozamiento o fricción del aire con un meteoroide que viaja a través de la capa superior de la atmósfera depende de manera complicada de su forma y velocidad, así como de la temperatura y la densidad de la atmósfera. Una aproximación razonable para la fuerza de rozamiento  $F$  en la capa superior de la atmósfera está dada por la expresión  $F = -k\rho_{\text{atm}}Av^2$ , donde  $k$  es una constante,  $\rho_{\text{atm}}$  es la densidad atmosférica,  $A$  el área de la sección trasversal del meteorito y  $v$  su velocidad.

Para analizar el meteoroide de manera aproximada, se consideran las siguientes simplificaciones: El objeto que entró en la atmósfera fue una esfera de masa  $m_M = 30 \text{ kg}$ , con un radio  $R_M = 0.13 \text{ m}$ , a una temperatura  $T_0 = 200 \text{ K}$ , y con una velocidad  $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$ . La densidad de la atmósfera puede considerarse constante,  $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ , su valor a  $40 \text{ km}$  sobre la superficie de la Tierra. Considere que el coeficiente de fricción es  $k = 0.60$ .

1.2a	Estima el tiempo que tarda en reducirse la velocidad del meteoroide en un 10% (de $v_M$ a $0.90 v_M$ ), una vez que entra en la atmósfera. Supón que el meteoroide conserva su masa y su forma. Puedes despreciar la fuerza gravitacional sobre el meteoroide.	0.7
------	--	-----

1.2b	Calcula cuántas veces es mayor la energía cinética $E_{\text{kin}}$ del meteorito al entrar en la atmósfera, comparada con la energía $E_{\text{melt}}$ que se necesitaría para que se fundiera completamente (ver la Hoja de Datos).	0.3
------	---	-----



(b)

Cuadro (Frame)	Tiempo	Azimut	Altitud
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Aterrizó en M		230°	0.0°



**Figura 1.1** El azimut es la posición angular respecto al norte en el sentido de las manecillas del reloj. La altitud es la posición angular sobre el horizonte. (a) Serie de cuadros (frames) grabados por la cámara de seguridad en Suecia que muestran el movimiento del meteorito Maribo como una bola de fuego cayendo a través de la atmósfera. (b) Datos de dos cuadros indicando el tiempo, la dirección (azimut) en grados, como lo registró la cámara C, y la altura sobre el horizonte (altitud) en grados. (c) Esquema de la trayectoria del meteorito Maribo (flecha magenta) relativa al norte N, y del punto de impacto M en Dinamarca tal como se vio desde la cámara C.

## Calentamiento del Maribo durante su caída en la atmósfera

Cuando el meteorito Maribo entró en la atmósfera a una velocidad supersónica, se percibió como una bola de fuego debido a que el aire que lo rodeaba brillaba intensamente. No obstante, sólo se calentó su capa más externa. Supongamos que el Maribo es una esfera homogénea con densidad  $\rho_{sm}$ , calor específico  $c_{sm}$  y conductividad térmica  $k_{sm}$  (véase la Hoja de Datos para consultar los valores). Se estima que su temperatura al entrar en la atmósfera era  $T_0 = 200$  K y que, durante la caída a través de la atmósfera, su temperatura superficial se mantuvo constante a  $T_s = 1000$  K debido al rozamiento con el aire. Durante este intervalo de tiempo su interior se calentaba gradualmente.

El grosor  $x$  de dicha capa caliente puede ser estimada por medio de un análisis dimensional, en el que se propone como el producto de las potencias de los parámetros termodinámicos:  $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$ , donde  $t$  es el tiempo de caída desde que entra a la atmósfera.

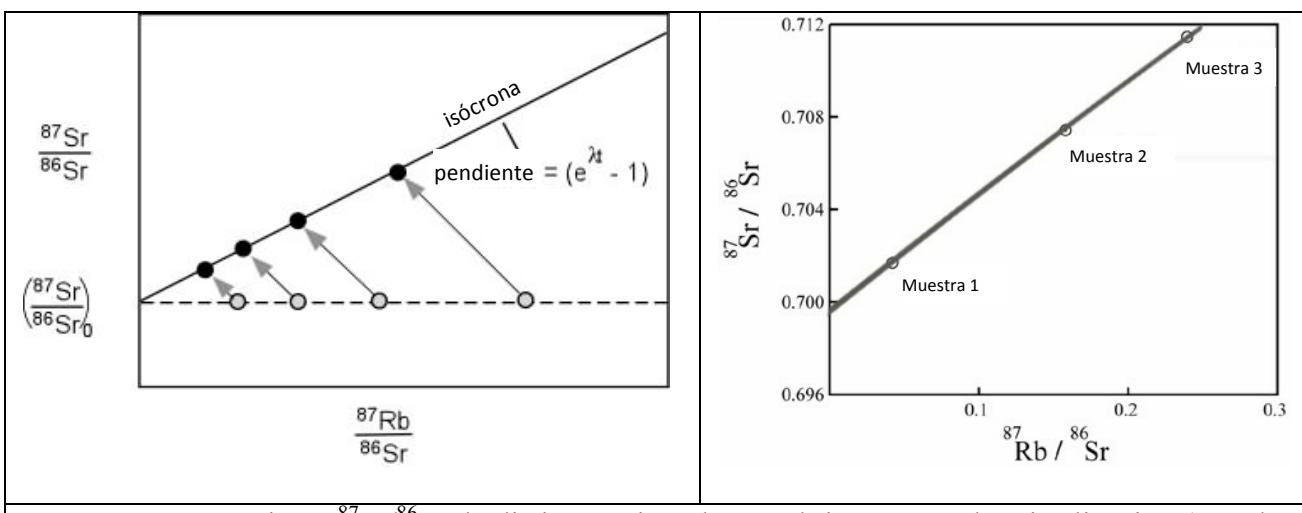
1.3a	Determina por análisis dimensional el valor de las cuatro potencias $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ y $\delta$ .	0.6
1.3b	Calcula el grosor $x$ después de un tiempo de caída de $t = 5$ s, y determina el cociente $x/R_M$ .	0.4

## La edad del Maribo

Las propiedades químicas de los elementos radioactivos pueden ser diferentes, por lo que durante la cristalización de los minerales en un meteorito dado, algunos minerales tendrán un alto contenido de un elemento radiactivo específico y otros un bajo contenido del mismo. Esta diferencia se puede usar para determinar la edad de un meteorito por la datación radiométrica de sus minerales radiactivos.

Como ejemplo concreto, estudiaremos el isótopo  $^{87}\text{Rb}$  (elemento número 37), el cual decae (o se desintegra) al isótopo estable  $^{87}\text{Sr}$  (elemento número 38), con un tiempo de vida media de  $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$  años, relativo al isótopo estable  $^{86}\text{Sr}$ . En el momento de la cristalización, el cociente  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  era idéntico para todos los minerales, mientras que el cociente  $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$  era diferente. A medida que el tiempo transcurre, la cantidad de  $^{87}\text{Rb}$  disminuye por decaimiento (o desintegración), y en consecuencia, aumenta la cantidad de  $^{87}\text{Sr}$ . Como resultado de este proceso, el cociente  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  será diferente al del día de hoy. En la Fig. 1.2 (a), los puntos de la línea horizontal se refieren al cociente  $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$  de diferentes minerales en el momento que se cristalizan.

(a)	(b)
-----	-----



**Figura 1.2 (a)** Cociente  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  de distintos minerales en el tiempo  $t=0$  de cristalización (círculos vacíos) y al día de hoy (círculos rellenos). **(b)** Línea isócrona para tres muestras minerales diferentes extraídas de un meteorito en la actualidad.

1.4a	Escribe el esquema de desintegración para la transformación de $^{87}\text{Rb}$ a $^{87}\text{Sr}$ .	0.3
1.4b	Muestra que el cociente de $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ , como función del cociente de $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ , ambos al día de hoy, de diferentes muestras minerales del mismo meteorito, es una línea recta, llamada isócrona, con pendiente $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$ . En esta expresión $t$ es el tiempo transcurrido desde la cristalización de los minerales y $\lambda$ es la constante de desintegración, inversamente proporcional al tiempo de vida media $T_{1/2}$ .	0.7
1.4c	Determina la edad $\tau_M$ del meteorito usando la línea isócrona de la Fig. 1.2(b).	0.4

### Cometa Encke, probablemente el origen del Maribo

En su órbita alrededor del Sol, las distancias mínima y máxima entre el cometa Encke y el Sol son  $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$  y  $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$ , respectivamente.

1.5	Calcula el período orbital $t_{\text{Encke}}$ del cometa Encke.	0.6
-----	---	-----

### Consecuencias del impacto de un asteroide en la Tierra

Hace 65 millones años chocó contra la Tierra un enorme asteroide de densidad  $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , radio  $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$  y velocidad final  $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ . Este impacto resultó en el exterminio de la mayor parte de la vida en la Tierra y en la formación del enorme cráter Chicxulub. Suponiendo que el día de hoy un asteroide idéntico golpearía a la Tierra en un choque completamente inelástico, responde las preguntas de los siguientes incisos. Considera que el momento de inercia de la Tierra es 0.83 veces el de una esfera homogénea de la misma masa y radio. Recuerda que el momento de inercia de una esfera homogénea con masa  $M$  y radio  $R$  es  $\frac{2}{5}MR^2$ . Desprecia también cualquier cambio en la órbita de la Tierra.

1.6a	El asteroide golpea el Polo Norte. Encuentra las condiciones para que el cambio de la orientación angular del eje de la Tierra después del impacto sea máximo. Calcula dicho cambio.	0.7
1.6b	El asteroide golpea el ecuador radialmente. Encuentra el cambio $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ del periodo de rotación de la Tierra después del impacto.	0.7
1.6c	El asteroide golpea a la Tierra tangencialmente en el plano ecuatorial. Encuentra el cambio $\Delta\tau_{\text{tan}}$ del periodo de rotación de la Tierra después del impacto.	0.7

### Máxima velocidad de impacto

Considera un cuerpo celeste bajo la influencia gravitacional del Sol, que impacta en la superficie de la tierra con velocidad  $v_{\text{imp}}$ . Inicialmente, el efecto de la gravedad de la Tierra sobre el cuerpo puede despreciarse. Desprecia, en el momento del impacto, el rozamiento con la atmósfera, así como el efecto de cualquier otro cuerpo celeste y la rotación de la Tierra.

1.7	Calcula $v_{\text{imp}}^{\max}$ , el mayor valor posible de $v_{\text{imp}}$ .	1.6
-----	--	-----