

### Problema 1, Rayos cósmicos ultraenergéticos.

El proyecto Auger es una colaboración internacional que busca entender a los rayos cósmicos ultraenergéticos, partículas que viajan por el espacio a velocidades muy cercanas a la de la luz. Estas partículas se detectan indirectamente, por los chubascos (lluvias) de otras partículas y de fotones que se producen al llegar a la parte alta de nuestra atmósfera y chocar con las moléculas del aire ahí existentes. Sus energías son de muchos órdenes de magnitud mayores que las de las partículas más energéticas creadas en los aceleradores terrestres y existe gran interés en comprender cómo se aceleran a estas velocidades tan cercanas a las de la luz y de qué cuerpos cósmicos provienen.

Se sabe que los rayos cósmicos por encima de cierto umbral de energía NO pueden provenir de cuerpos cósmicos muy remotos. Esto se debe a que por encima de una cierta energía (conocida como el “corte” GZK por las iniciales de los físicos que predijeron este efecto en 1966), estos rayos cósmicos ultraenergéticos pueden chocar con fotones de la radiación cósmica de fondo, perdiendo parte de su energía al crear nuevas partículas. En otras palabras, en estas colisiones dejan de ser ultraenergéticos.

En este problema calculamos cuál es el umbral de energía para que los rayos cósmicos puedan tener estas colisiones que los degradan a menores energías y la distancia que pueden recorrer como ultraenergéticos, antes de sufrir una de estas colisiones.

#### Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

La radiación cósmica de fondo es una energía en forma de fotones que llena el espacio y se produjo cuando el Universo era muy joven. Su intensidad como función de la longitud de onda del fotón se ajusta a un cuerpo negro con temperatura  $T$  de 2.7 K. La radiación de cuerpo negro tiene la propiedad, descrita por la ley de desplazamiento de Wien, en la cual su máximo de emisión ocurre a una longitud de onda inversamente proporcional a la temperatura:

$$\lambda_{max} = \frac{0.0029}{T} \quad (1)$$

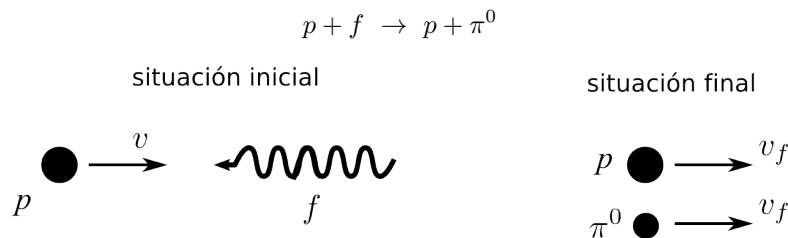
donde  $\lambda_{max}$  está en metros y  $T$  en Kelvins.

(I.a) Suponga que los fotones de  $\lambda_{max}$  son típicos de la radiación de cuerpo negro de fondo y calcule esta longitud de onda. [0.3 puntos]

(I.b) Calcule la energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo. La constante de Planck es  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  Js y la velocidad de la luz es  $c = 3 \times 10^8$  m/s. [0.7 puntos]

#### Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

Por simplicidad suponga que el proceso de pérdida de energía es debido a que un protón ( $p$ ) colisiona de frente con uno de los fotones ( $f$ ) de la radiación cósmica de fondo, resultando de esta colisión el protón más un pión neutro ( $\pi^0$ ):



La velocidad inicial del protón es  $v$  y su momento es  $p = \gamma m_p v$ , donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2)$$

Las masas de las partículas son:  $m_p = 1.6 \times 10^{-27}$  kg,  $m_{\pi^0} = 2.4 \times 10^{-28}$  kg

Suponga que el problema es en una sola dimensión y que el protón y el pión neutro se mueven con la misma velocidad  $v_f$  después de la colisión. Se trata de determinar cuál es la energía mínima que debe de tener el protón para lograr producir al pión neutro.

(II.a) Escriba las ecuaciones que rigen la colisión. [2.0 puntos]

(II.b) Determine la energía inicial del protón ultraenergético,  $E = \gamma m_p c^2$ . Dado que  $v \approx c$ , puede usar la aproximación  $1 + \beta \approx 2$

(II.c) Encuentre el valor de la energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts. Para esto necesita saber la siguiente equivalencia  $1 \text{ J} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$ . Los protones a ésta y mayores energías son considerados ultraenergéticos porque pueden producir partículas al chocar con los fotones de la radiación cósmica de fondo. [1.0 puntos]

**Parte III:** Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía (la energía en fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo está dada por:

$$u_E = aT^4 \quad (3)$$

donde  $a = 7.6 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{K}^{-4}$  es la constante de radiación. Calcule la densidad de energía de la radiación cósmica de fondo. [0.3 puntos]

(III.b) Determine la densidad de fotones  $u_f$  (el número de fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo. [1.0 puntos]

(III.c) La sección eficaz para estas colisiones entre protones y fotones es  $\sigma = 2.0 \times 10^{-32} \text{ m}^2$ . El camino libre medio está definido como la distancia promedio que recorre una partícula entre una colisión y la siguiente y puede estimarse como la altura de un cilindro que tiene como base la sección eficaz de colisión y que contiene a un fotón en su volumen. Los protones ultraenergéticos no pueden viajar distancias mucho más grandes que este camino libre medio sin perder energía y dejar de ser ultraenergéticos.

Estime el camino libre medio  $l$ , de un protón antes de sufrir una colisión con un fotón. [1.2 puntos]

(III.d) Los cuásares son objetos cósmicos que tienen fenómenos de altas energías y que podrían ser responsables de la producción de los rayos cósmicos ultraenergéticos. Los cuásares son objetos lejanos, el más cercano está a una distancia de  $2.0 \times 10^{25} \text{ m}$ . ¿Pueden los rayos cósmicos ultraenergéticos provenir de los cuásares o no? ¿Por qué? [0.5 puntos]

## Problema 2: Fuerza de Arrastre

La fuerza de arrastre se presenta en objetos que se mueven a través de un fluido. Actúa en la dirección del movimiento relativo al fluido. La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad. En muchos casos, como en el diseño de automóviles se trata de minimizar dicha fuerza, sin embargo, otros dispositivos, como los paracaídas, se diseñan maximizando la fuerza de arrastre a bajas velocidades.

El estudio teórico de la fuerza de arrastre es una empresa compleja, incluso para objetos con simetría, pues no se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones que los modelan. Sin embargo, es posible obtener información valiosa con un modelo sencillo.

Considere un modelo que consiste en un objeto macroscópico que se mueve a través de un fluido constituido por moléculas uniformemente distribuidas donde cada una está inicialmente en reposo. En este modelo la fuerza de arrastre surge exclusivamente de las colisiones entre las moléculas y el objeto en movimiento. Dichas colisiones se suponen perfectamente elásticas.

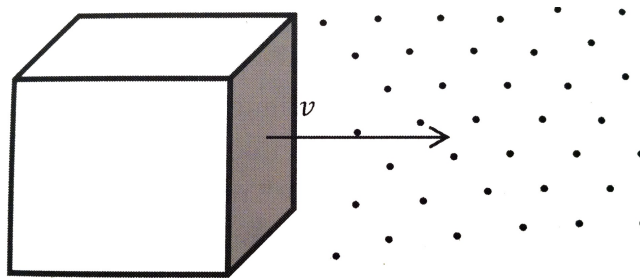


FIGURA 1

- a) Un objeto de masa  $M$  y velocidad  $v$  choca frontalmente con una única molécula de masa  $m$  inicialmente en reposo. Encuentre el cambio en la velocidad  $\Delta v$  en el objeto debido al choque. Exprese su resultado en función de  $M$ ,  $m$  y  $v$ . **(2 Puntos)**
- b) Un cubo de arista  $L$  se mueve a través de un fluido con densidad  $\rho$  en dirección perpendicular a una de sus caras. Demuestre que la fuerza de arrastre  $F_D$  es:

$$F_D = 2\rho A v^2,$$

donde  $v$  es la velocidad del cubo y  $A$  el área de una de sus caras. Considere que la masa  $m$  de cada una de las moléculas del fluido es mucho menor que  $M$ . **(3 Puntos)**

- c) Un cubo de 10.0 cm por lado se mueve en línea recta con rapidez constante de 0.600 m/s a través de un gas formado por moléculas en reposo de  $O_2$  con densidad  $\rho = 1.43 \text{ kg/m}^3$ . Calcule la potencia necesaria para que el cubo mantenga su velocidad constante. **(2 Puntos)**
- d) Se quiere modificar la forma del cubo para mejorar su aerodinámica, esto es, disminuir su fuerza de arrastre en su movimiento a través del fluido. Para ello se le da forma de cuña simétrica. Para caracterizar la aerodinámica del nuevo objeto (en la figura 2 se muestra su sección transversal), se introduce un parámetro  $K$  en la ecuación anterior

$$F_D = 2K\rho Av^2$$

Este parámetro depende del ángulo  $\theta$  (indicado en la figura 2). Note que para  $K=1$ , se recupera la forma de la fuerza de arrastre para el cubo. Encuentre el coeficiente  $K$  para el nuevo objeto si las partículas colisionan elásticamente sobre la superficie de la cuña y su masa es muy pequeña comparada con la del objeto, de modo que se produce una “reflexión especular” de las moléculas. **(3 Puntos)**

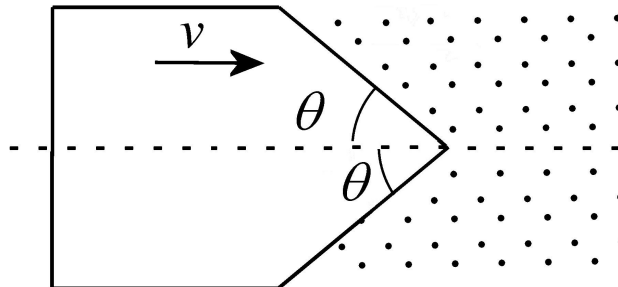


FIGURA 2

### problema 3

#### A la caza del neutrino

##### a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

- a1) Cada pozo tiene una profundidad media  $H = 2,40 \times 10^3$  m y un radio  $r = 0,30$  m, y la temperatura media del hielo a fundir es  $T_h = -30$  °C. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo,  $E_{\min}$ , y calcule su valor.

##### b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones ( $^1\text{H}$ ) que dan lugar a la formación de núcleos de  $^4\text{He}$  y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

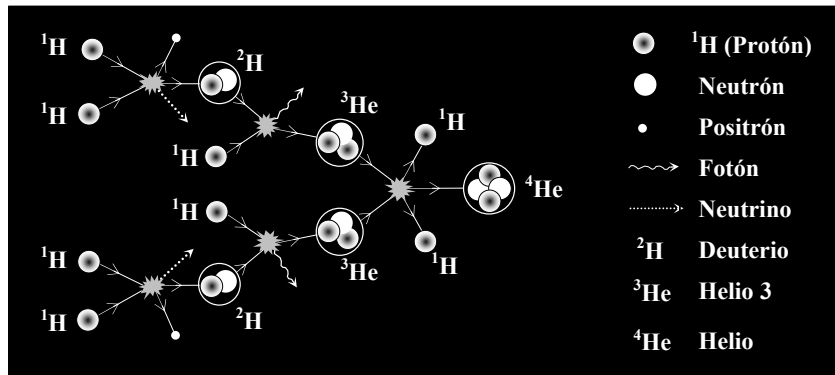


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una pérdida de masa  $\Delta m$  que da lugar a una liberación de energía  $\Delta E$ . Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

- b1) Escriba la expresión para  $\Delta m$  y calcule la energía liberada en cada ciclo pp,  $\Delta E$ .

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*,  $u_S$ . Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es  $u_S = 1,366 \text{ kW/m}^2$

- b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo,  $N_\nu$ .

**c) Neutrinos y muones.**

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media<sup>2</sup>, medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es  $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$ .

- c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón,  $v_\mu$ , en función de su masa  $m_\mu$ , de su energía  $E_\mu$  y de la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . Calcule su valor cuando la energía del muón es  $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$ .

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para “descontarlos”, ya que no han sido originados por neutrinos.

- c2) Calcule la distancia  $d_\mu$ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J / (kg K)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J / kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg / m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{ST} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa del protón ( $^1\text{H}$ )	$m_{^1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del núcleo de Helio ( $^4\text{He}$ )	$m_{^4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ayuda	
Energía mecánica relativista de una partícula de masa $m$ que se mueve con velocidad $v$ : $E = \gamma m c^2$ , donde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$	
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma \tau_0$	

## Análisis de datos experimentales

Una barra cilíndrica hueca de masa  $M$  y longitud  $L$ , contiene dentro una pequeña esfera de masa  $m$  sujeta a la distancia  $z$  respecto la parte superior del cilindro (ver figura).

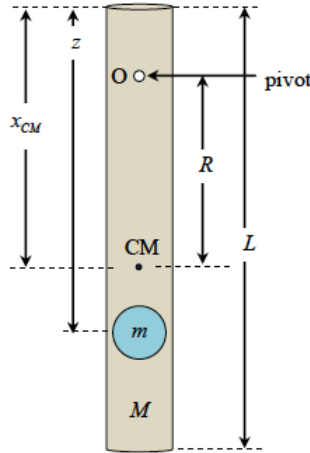


Figura 1:

El cilindro tiene una serie de perforaciones (ver la figura del material) que sirven como pivotes (pivot) para hacer oscilar a la barra como un péndulo a diferentes distancias.

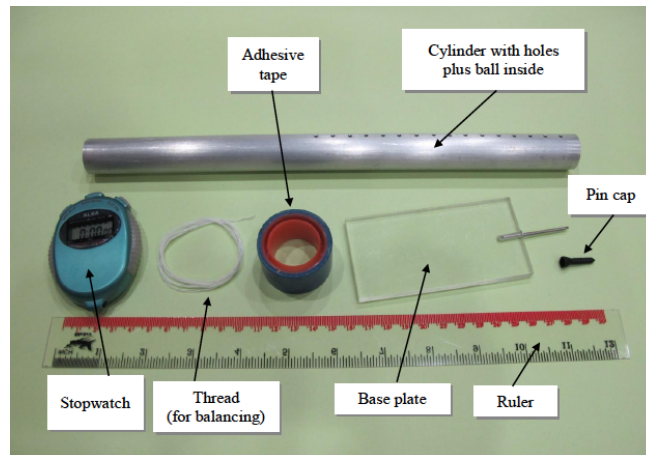


Figura 2:

El problema experimental consiste en determinar las siguientes magnitudes de la barra con la esfera:

1. Posición del centro de masa  $x_{CM}$  del sistema de la barra con la esfera dentro.
2. La distancia  $z$  a la que se encuentra fija la esfera.
3. La razón entre las masa de la barra y de la esfera  $M/m$ .

4. La aceleración de la gravedad.

Información teórica:

- Para el péndulo de la barra con la esfera, la ecuación de movimiento, valida para pequeños ángulos, es la siguiente:

$$[(M + m) R^2 + I_{CM}] \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -g (M + m) R\theta \quad (4)$$

donde  $I_{CM}$  es el momento de inercia de la barra con la esfera respecto de un eje perpendicular a la barra que pasa por el centro de masa CM (de esta ecuación pueden deducir el periodo de oscilación del péndulo).

- Para un cilindro hueco de longitud  $L$  y masa  $M$ , el momento de inercia eje perpendicular a la barra que pasa por el centro de masa CM se puede aproximar por  $\frac{1}{3}M \left(\frac{L}{2}\right)^2$
- El teorema de ejes paralelos, para el calculo de momentos de inercia, establece que el momento de inercia  $I$  con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de masa es igual al momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de masa  $I_{CM}$  más el producto de la masa del cuerpo  $M$  por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes  $x$ :

$$I = I_{CM} + Mx^2 \quad (5)$$

- La esfera puede ser considerada puntual y localizada sobre el eje longitudinal del cilindro.

Datos experimentales:

longitud de la barra:  $L = 30.0 \pm 0.1$  cm

balancenado la barra se mide la posición del centro de masa:  $x_{CM} = 17.8 \pm 0.1$  cm

Haciendo oscilar a la barra como un péndulo para varias posiciones del pivote, se obtuvieron las mediciones reportadas en la siguiente tabla (el tiempo se midió para 20 ciclos de oscilación del péndulo, excepto para  $x_{CM} - R = 15.1, 16.1$  cm donde se midió para 10 ciclos):

$x_{CM} - R$ (cm)	tiempo para 20 ciclos (s)		
1.1	18.59	18.78	18.59
2.1	18.44	18.25	18.53
3.1	18.10	18.09	18.15
4.1	17.88	17.78	17.81
5.1	17.69	17.50	17.65
6.1	17.47	17.38	17.28
7.1	17.06	17.06	17.22
8.1	17.06	17.00	17.06
9.1	16.97	16.91	17.96
10.1	17.00	17.03	17.06
11.1	17.22	17.37	17.38
12.1	17.78	17.72	17.75
13.1	18.57	18.59	18.47
14.1	19.78	19.90	19.75
15.1	11.16	11.13	11.13
16.1	13.25	13.40	13.50