P 1. Física en los encierros de San Fermín.

¿Pero, hay Física en los encierros? Claro que la hay, mucha y muy compleja. En este ejercicio se pretende poner de manifiesto algún aspecto físico de este popular festejo. Naturalmente, será necesario utilizar modelos muy simples; de lo contrario, el problema sería prácticamente irresoluble.

La longitud del recorrido del encierro, desde la salida de los corralillos de Santo Domingo hasta la entrada de la plaza de toros es de 848,6 m y la duración promedio de los últimos treinta años, es de 3,55 min.

a) Determine la velocidad media, V, de un toro en un encierro rápido y limpio como el del 8 de julio de 2008, cuya duración fue de 2 min 17 s.

Un tramo singular del encierro es la cerrada curva con la que se inicia la calle Estafeta. Su pavimento es prácticamente horizontal y allí los toros suelen derrapar dando lugar a situaciones peligrosas. La figura 1 es una fotografía a vista de pájaro de la famosa curva. En ella, superpuesta, se muestra la hipotética trayectoria de un toro y se supone que la curva es un arco de circunferencia de radio *R*.

b) Haga una estimación de *R* utilizando la escala que también se muestra en la fotografía.

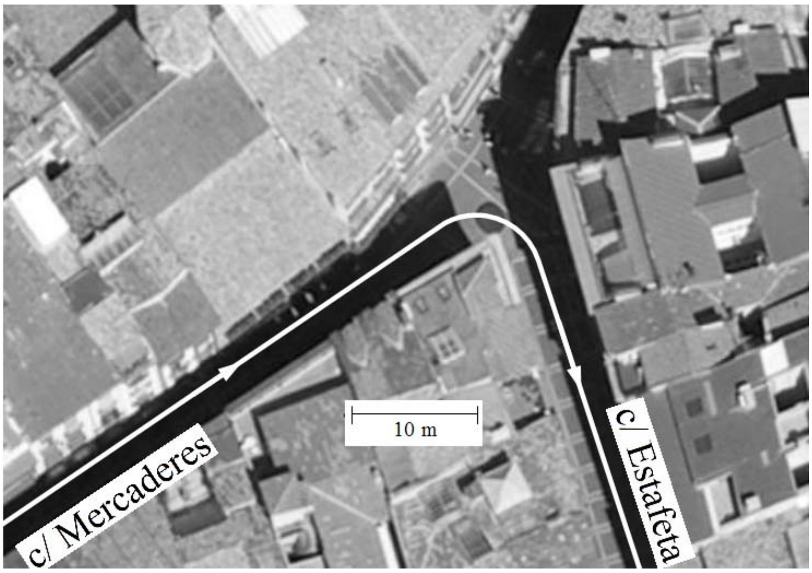
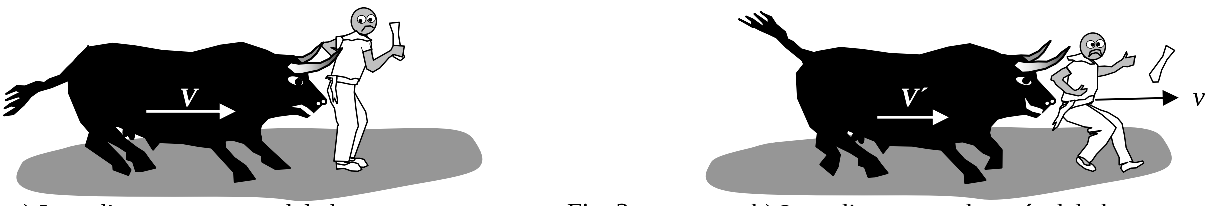


Fig. 1

Siendo coherentes con la “vista de pájaro” de la figura 1, podemos considerar al toro como una partícula puntual que traza la curva de la Estafeta con una velocidad de módulo constante *V*, la calculada en el apartado (a). Además, suponemos que el toro no llega a “derrapar” pero está en el límite, es decir, que no desliza por muy poco.

c) Con estos supuestos, haga una estimación del coeficiente de rozamiento μ entre las pezuñas del cornúpeta y el pavimento de la curva de la Estafeta.

Supongamos ahora que un toro de masa $M = 512$ kg (que visto de cerca no es precisamente una partícula puntual…) que se mueve con la velocidad *V* del apartado (a), embiste a un despistado forastero de masa $m = 75$ kg que se encontraba parado en la calle (no lo empitona, simplemente choca con él). Los dibujos a y b de la figura 2 corresponden respectivamente a los instantes inmediatamente anterior y posterior al choque y se supone que el intervalo de tiempo δt transcurrido entre ellos es muy corto. Como consecuencia del choque, la velocidad del toro se reduce en un 10 %.



a) Inmediatamente antes del choque — Fig. 2 — b) Inmediatamente después del choque

d) ¿Cuál es la velocidad v del forastero inmediatamente después del choque?

e) ¿Cuánto ha variado la energía mecánica del toro ΔE_{toro}? ¿Se transfiere ΔE_{toro} íntegramente al forastero? Razone su respuesta.

f) Si estimamos como “duración del choque” un tiempo $\delta t = 0{,}3$ s, ¿cuál es la fuerza media $\overline{F}$ con que el toro empuja al forastero durante el choque?

Solución

a) Como la longitud del recorrido es $L = 848{,}6\ \text{m}$ y el tiempo es $T = 2\ \text{min}\ 17\ \text{s} = 137\ \text{s}$, la velocidad media es

$$\boxed{V = 6{,}19\ \text{m/s} = 22{,}3\ \text{km/h}}$$

b) Para medir el radio de curvatura de la "curva de la Estafeta", se puede trazar sobre la fotografía de la figura 1 del enunciado una circunferencia que se "ajuste" lo mejor posible a la trayectoria, como se muestra en la figura 3. Con una regla se mide el diámetro de dicha circunferencia y la longitud de la escala. El radio de curvatura R será

$$R = \frac{1}{2}\frac{\text{diametro}}{\text{Longitud de la escala}}10 = 5{,}0\ \text{m}$$

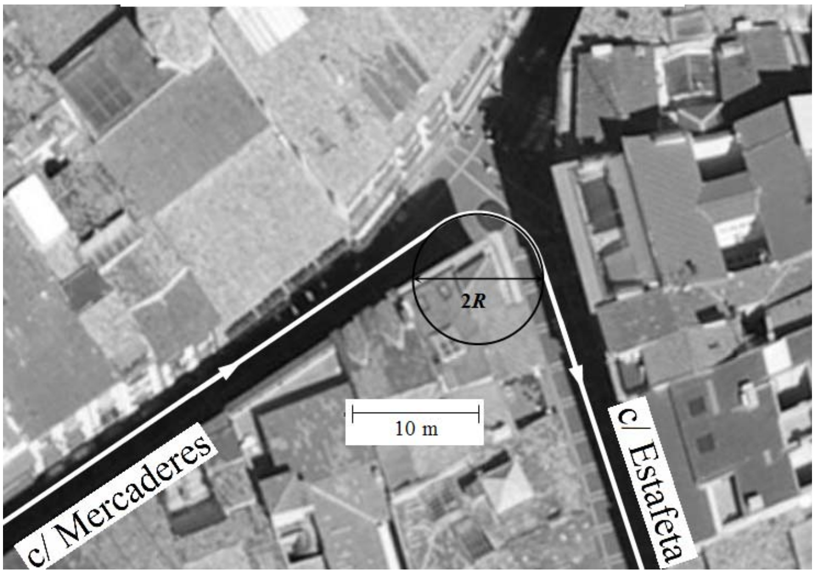


Fig. 3

c) El toro, considerado como una partícula puntual, describe una trayectoria circular con velocidad constante. En consecuencia, si llamamos F_r a la fuerza de rozamiento, se verificará

$$M\frac{V^2}{R} = F_r \qquad (1)$$

Si el toro no "derrapa" pero está en límite de hacerlo, la fuerza de rozamiento tiene que estar muy próxima a su valor máximo $F_r = \mu N = \mu Mg$, siendo M la masa del toro. Sustituyendo en (1), resulta

$$M\frac{V^2}{R} = \mu Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{V^2}{gR}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 0{,}78}$$

d) Considerando como sistema mecánico al conjunto toro-forastero, en el proceso del choque entre ambos actúa como fuerza exterior, paralela al suelo, la fuerza de rozamiento. Luego, en la dirección horizontal, no se conserva el momento lineal del sistema. Si llamamos P_i y P_f a los momentos lineales inicial y final del sistema, el teorema del impulso permite escribir

$$P_f - P_i = I$$

Donde $P_i = MV$, $P_f = MV' + mv$ e $I = \int_0^{\delta t} F_r\, dt$

siendo m la masa del forastero, V' y v las velocidades del toro y del forastero después del choque.

Ahora bien, aunque la fuerza de rozamiento puede variar en el intervalo de tiempo δt, nunca puede llegar a superar su valor máximo. Por ello y teniendo en cuenta el pequeño valor de δt que indica el enunciado, su impulso puede considerarse nulo y entonces resulta que

$$P_f - P_i \approx 0 \quad \Rightarrow \quad MV = MV' + mv$$

O lo que es igual,

$$\boxed{v = \frac{M}{m}\left(V - V'\right)}$$

Como el enunciado nos dice que "la velocidad del toro se reduce en un 10 %, se tiene que

$$\frac{\left(V - V'\right)}{V} = 0{,}1$$

Y teniendo en cuenta las masas de los protagonistas del choque, el módulo de la velocidad del forastero resulta

$$\boxed{v = 0{,}68\, V = 4{,}2 \text{ m/s}}$$

e) Dado que todo el proceso se lleva a cabo sin variación apreciable de energía potencial gravitatoria, la variación de la energía mecánica del toro es

$$\boxed{\Delta E_{toro} = \frac{1}{2} M\left(V'^2 - V^2\right)}$$

Naturalmente es negativa, ya que $V' = 0{,}9\, V$, (el toro tiene que perder energía). En valor absoluto la perdida es

$$\boxed{\Delta E_{toro} = 1{,}9 \text{ kJ}}$$

¿Se transfiere ΔE_{toro} íntegramente al forastero? No, el toro no es un "sólido rígido". En el breve "encuentro" con el forastero sufrirá alguna deformación que conlleva trabajo de las fuerzas interiores. Este trabajo se realiza a expensas de una fracción de la energía mecánica del cornúpeta.

Si se considera ahora al forastero como sistema mecánico, durante el corto tiempo δt que dura el choque, actúa como fuerza externa la que ejerce el toro sobre el sufrido forastero. Esta fuerza es nula antes y después del choque pero no lo es durante los $\delta t = 0{,}3\ s$ que dura el encontronazo. Es pues una fuerza de percusión $F(t)$ que puede llegar a tener valores muy altos en el intervalo de tiempo δt. El impulso de esta fuerza es igual a la variación del momento lineal del forastero que es mv, por lo tanto

$$mv = \int_0^{\delta t} F(t)\, dt$$

f) Si sustituimos $F(t)$ por su valor medio en el intervalo δt,

$$mv = \int_0^{\delta t} \overline{F}\, dt = \overline{F} \int_0^{\delta t} dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{F} = \frac{mv}{\delta t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{F} = 1{,}1 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

P2. “Pesando” un *zapatero*.

Una definición elemental de líquido es: *Los líquidos, a diferencia de los sólidos, no tienen una forma definida: adoptan la del recipiente que los contiene*. Sin embargo, existen múltiples observaciones que contradicen lo anterior. Por ejemplo, si sobre una superficie horizontal de vidrio limpio se depositan pequeñas cantidades de mercurio se forman gotas, como se muestra en la figura 1, y es fácil observar que las más pequeñas son rigurosamente esféricas; a medida que aumenta su tamaño se “aplanan” pero sus bordes siempre están redondeados. Se pone de manifiesto que a la tendencia de los líquidos a adoptar la forma esférica a causa de *fuerzas superficiales* se opone la fuerza de gravedad que tiende a “aplanar” las gotas.

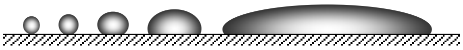


Fig. 1

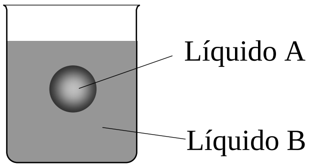


Fig. 2

Otro ejemplo, cuando se introduce un líquido A en otro B que tenga la misma densidad pero que no sea miscible, el empuje de Arquímedes equilibra el peso, y el primer líquido A, que se encuentra en una condición de gravedad aparente nula, adopta una perfecta forma esférica. (Fig. 2).

Estos y otros muchos ejemplos ponen de manifiesto que los líquidos adoptan la forma esférica “cuando se les deja”; esto es, cuando las fuerzas superficiales de cohesión (*tensión superficial*) predominan sobre las fuerzas de gravedad, y esto ocurre cuando el número de moléculas que ocupan las superficie es del mismo orden que el de moléculas que forman parte del volumen del líquido. Esto hace que la “escala” de los fenómenos superficiales o capilares sea pequeña en la superficie de la Tierra, donde la gravedad es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ aproximadamente.

El Análisis Dimensional nos proporciona la llamada *longitud capilar*, λ_c, que sirve para saber cuándo se deben considerar los efectos de la tensión superficial. Cuando una dimensión característica del problema sea mucho mayor que λ_c, podremos despreciar tranquilamente los efectos de dicha tensión superficial.

La longitud capilar viene dada por la siguiente expresión

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g}}$$

donde σ es la tensión superficial del líquido, ρ su densidad y g la aceleración de la gravedad

Si apretando lentamente un cuentagotas lleno de alcohol conseguimos que se desprendan gotas, observaremos que en promedio, su diámetro es de 2,5 mm y puede ser considerado como la longitud capilar de este fenómeno.

a) ¿Cuál sería el volumen V de la gota en un ambiente en el que existiese una gravedad residual $10^{-4} g_0$? El resultado que obtendrá es suficiente para justificar las viñetas de las figuras 3ª y 3b

Fig. 3a

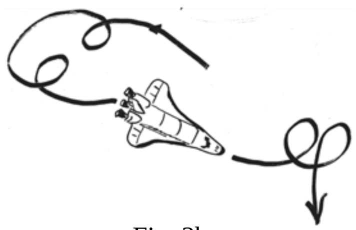


Fig. 3b

El significado de la tensión superficial es el siguiente: la superficie de los líquidos se comporta como una membrana. Una cama elástica es un símil que puede ayudar a comprender este concepto.

En la figura 4a se representa una cama elástica rectangular sujeta a un bastidor rígido. Su superficie es prácticamente plana y horizontal. La cama esta sometida a tensión, es decir el bastidor ejerce sobre la cama un conjunto de fuerzas como el representado en la figura 4a. En consecuencia, en cada lado de la cama, actúa una fuerza por unidad de longitud que denotamos por σ. Por lo tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el lado AB de longitud L, vendrá dada por $F = \sigma L$

Fig. 4a

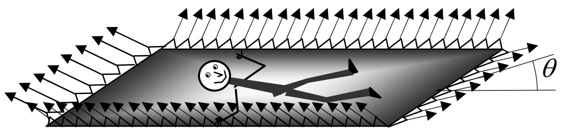


Fig. 4a

Naturalmente, si sobre la cama descansa un ciudadano, como se muestra en la figura 4b, la superficie deja de ser plana, presentará una concavidad en la región que está el ciudadano. Las fuerzas que sostienen la cama (las tensiones) cambiaran su dirección pero su módulo no variará apreciablemente.

Es importante observar que cuando la superficie de la cama es plana (Fig. 4a), la presión en la parte superior e inferior de ella es la misma: la atmosférica. Sin embargo, cuando la cama está cargada, en la parte inferior, la presión es la atmosférica, pero en la superior, en la parte cóncava, la presión es la atmosférica más la que ejerce el peso del ciudadano. Por lo tanto, la presión es mayor en la parte cóncava que en la convexa.

b) Suponga que la cama elástica es cuadrada de lado L, que la masa del ciudadano que está tumbado en ella es M, y que el ángulo que forman las tensiones con la horizontal es θ. Calcule la fuerza por unidad de longitud, σ.

Tras estas consideraciones, proponemos el siguiente experimento que fácilmente se puede realizar en casa. Consiste en depositar un alambre muy ligero sobre la superficie del agua contenida, por ejemplo, en un vaso como se muestra en la figura 5a. La longitud, l, del alambre debe ser de pocos milímetros y mucho mayor que su radio R.

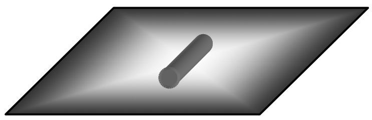


Fig. 5a

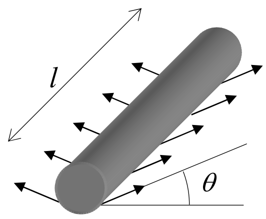


Fig. 5b

c) Cuando el alambre esté en equilibrio sobre la superficie, obtenga la expresión de su peso W en función de la tensión superficial σ, de la longitud l y del ángulo de contacto θ que forma la superficie con la horizontal. (Figura 5b).Ya que el radio del alambre es $R << 1$, se puede despreciar la acción de la tensión superficial en sus extremos.

El *gerris lacustris* es un insecto muy abundante en charcas, lagunas y en general en aguas dulces remansadas siendo su nombre vulgar *zapatero*. Estos animalejos “caminan” sobre el agua, no “nadan” en ella. Cuatro de sus seis patas terminan en una especie de pie en forma de cilindro que es el que se apoya horizontalmente sobre el agua, comportándose como el alambre del ejemplo anterior. Las dos patas delanteras la usa más como “manos” que como “pies”. En una foto, como la de la figura 6, puede apreciarse uno sobre la superficie del agua, deformándola ligeramente en los apoyos, como si de una membrana se tratase.

Sobre la fotografía de la figura 6 se han indicado las dimensiones más relevantes del fenómeno: longitud de sus “pies”: $l = 3\,\text{mm}$; anchura de la depresión que producen: $D = 1{,}5\,\text{mm}$ y “profundidad” de la depresión: $h = 0{,}5\,\text{mm}$.

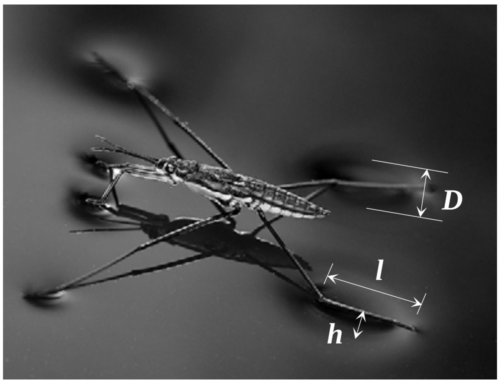


Fig. 6

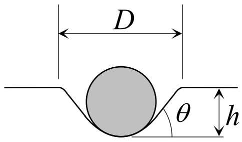


Fig. 7

d) Con las aproximaciones que crea convenientes, haga una estimación de la masa m del zapatero. Ayúdese de la figura 7 en la que se muestra el pie visto de frente y considere que la tensión superficial del agua es $\sigma = 7{,}28 \times 10^{-2}\ \text{N/m}$.

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, consideramos que en un ambiente en el que la aceleración de la gravedad es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, la longitud característica (diámetro de la gota) del fenómeno de formación de una gota de alcohol (ginebra) es $\lambda_0 = 2{,}5\,\mathrm{mm}$, es decir

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g_0}} \tag{1}$$

Es de esperar que la tensión superficial σ, al igual que la densidad ρ, es independiente de la gravedad, por lo tanto, cuando la gravedad sea g el nuevo diámetro de la gota vendrá dado por

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g}} \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{g_0}{g}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2{,}5\sqrt{\frac{g_0}{10^{-4} g_0}} = 250\, mm$$

Por lo tanto el volumen de la gota esférica de ginebra en microgravedad es

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 8{,}2\cdot 10^{-3}\, m^3}$$

No cabe duda que 8,2 litros de ginebra justifican la viñeta de la figura 3 del enunciado.

b) En cada lado del cuadrado actuará la fuerza resultante de las tensiones, que forma un ángulo θ con la horizontal y cuyo módulo será

$$F = \sigma L$$

El peso del ciudadano estará equilibrado con las componentes perpendiculares de las fuerzas F que actúan en cada lado de la cala elástica cuadrada. Es decir

$$Mg = 4\sigma L \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{Mg}{4L\operatorname{sen}\theta}}$$

c) Razonando de forma idéntica al anterior apartado, directamente se puede escribir

$$\boxed{W = 2\sigma\, l \operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

d) Si ahora se trata de un "zapatero", consideramos que su peso mg está equilibrado con las fuerzas debidas a la tensión superficial del agua que actuan en cada uno de los cuatro "pies" de sus patas ya que, como indica el enunciado, las delateras las utiliza más como "manos" que como "pies", por lo tanto

$$mg = 4\sigma\, l \operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

Con referencia a la figura 7 del enunciado y teniendo en cuenta la pequeñez de los valores de D y h, se puede hacer una estimación aproximada del $\operatorname{sen}\theta$.

$$\text{Como} \quad \operatorname{tg}\theta \approx \frac{h}{D/2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2\mathrm{h}}{\sqrt{D^2 + 4\mathrm{h}^2}}$$

Y sustituyendo en (4)

$$\boxed{m = \frac{8\sigma\, l\, h}{g\sqrt{D^2 + 4h^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 50\,\mathrm{mg}}$$

P3. El fracaso del átomo clásico.

En los albores de las investigaciones sobre el átomo, a principios del siglo XX, se pensaba que éste tenía una estructura similar a un sistema planetario con el núcleo en el centro, muy pesado y cargado positivamente, y los ligeros electrones girando a su alrededor, ligados por la atracción coulombiana. (Figura 1)

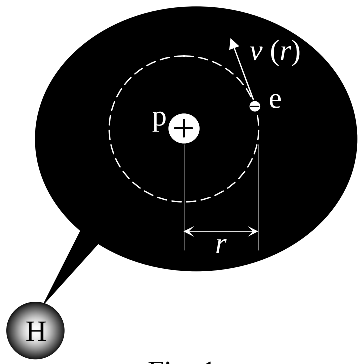


Fig. 1

Pronto se descubrió que las cosas no podían ser tan simples: las cargas eléctricas cuando se mueven con aceleración, como los electrones orbitando alrededor del núcleo, pierden energía en forma de radiación electromagnética, por lo que los electrones atómicos se precipitarían hacia el núcleo en un tiempo muy breve. Está claro que no sucede así, puesto que la materia normal es estable y ustedes están aquí.

Este problema tiene por objeto hacer una estimación, clásica y no relativista, del tiempo que tardaría en aniquilarse un átomo de hidrógeno según las teorías clásicas de la mecánica y de la radiación, partiendo del hecho de que la energía de ionización de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental o no excitado es $E_{ioniz} = 13{,}6\,\mathrm{eV}$.

a) Suponiendo que la órbita del electrón es circular de radio *r*, obtenga las expresiones de la energía total del electrón *E*, de su velocidad *v*, de su aceleración *a* y de su periodo de revolución *T*, en función de la energía total E_0 del átomo de hidrógeno en el estado no excitado y del radio r_0 de la órbita circular en dicho estado.

b) Determine y calcule E_0 y r_0 así como la velocidad, la aceleración y el periodo en esta órbita, v_0, a_0, y T_0, respectivamente.

Cuando un electrón se mueve con aceleración *a*, la potencia radiante que emite viene dada por la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3}\frac{k\,e^2}{c^3}a^2$$

en la que *k* es la constante de Coulomb, *c* la velocidad de la luz y *e* la carga elemental

c) Al perder energía, el electrón irá describiendo órbitas de radio cada vez menor. Halle la expresión de la potencia emitida *P* en función del radio *r* de la órbita circular del electrón, de r_0 y de E_0.

Puede comprobar que tanto $E(r)$ como $P(r)$ tienden a infinito cuando $r \to 0$. Este absurdo físico es consecuencia de que en las antiguas teorías se idealizaba al electrón y al protón considerándolos como partículas puntuales. Pasemos por alto estos inconvenientes y vayamos al objetivo de este ejercicio:

d) ¿Cuál es el tiempo τ que le costaría a un electrón “caer” sobre el núcleo desde la órbita del estado fundamental de radio r_0?

AYUDA: La potencia radiada por el electrón (fórmula de Larmor) tiene que ser igual a la variación (con signo negativo) de la energía mecánica del electrón por unidad de tiempo, $-dE/dt$. Esta variación representa una pérdida de energía, de ahí el signo negativo.

Le resultarán útiles las siguientes expresiones:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{dE/dt}\frac{dE}{dr}dr$$

El tiempo τ lo obtendrá integrando entre los valores inicial y final de *t* y de *r*. (La integral es inmediata).

DATOS: $1\,\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J : masa del electrón $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg : constante de Coulomb $k = 8{,}99 \times 10^{9}\ \text{N}\,\text{m}^2\text{C}^{-2}$: velocidad de la luz $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$; carga elemental $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C .

CONCLUSIÓN: Si ha llegado al final del problema comprobará que la vida de un átomo según la teoría clásica es muy corta. El átomo clásico es un fracaso. La teoría cuántica es la que describe correctamente la estabilidad de la materia, prediciendo además las propiedades de los átomos.

Solución

a) La energía mecánica del electrón en una órbita de radio r es

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - k \frac{e^2}{r} \qquad (1)$$

Como la fuerza que actúa sobre el electrón es central y describe una órbita circular, su velocidad angular es constante, por lo que su aceleración es sólo centrípeta y se verificará

$$k \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad m_e v^2 = k \frac{e^2}{r},$$

sustituyendo en (1)

$$E = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} \quad \text{o también} \quad E = -\frac{1}{2} m_e v^2 \qquad (2)$$

En el estado fundamental, $r = r_0$, luego

$$E(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r_0} = E_0 \quad \Rightarrow \quad ke^2 = -2E_0 \, r_0 \qquad (3)$$

Por lo tanto

$$\boxed{E = E_0 \frac{r_0}{r}} \qquad (4)$$

Despejando v de (2) y teniendo en cuenta (4) se tiene

$$\boxed{v = \sqrt{-\frac{2E_0 \, r_0}{m_e \, r}}}$$

En cuanto a la aceleración, a, y el periodo, T,

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -\frac{2E_0 \, r_0}{m_e \, r^2}} \qquad (5)$$

$$v = \frac{2\pi}{T} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{-2E_0 \, r_0}} \, r^{3/2}}$$

b) Como la energía de ionización es la mínima energía que hay que comunicar a un átomo para arrancarle un electrón (y que alcance el infinito con velocidad cero), se puede escribir

$$E_0 + E_{ioniz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = -E_{ioniz}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = -13{,}6\,\text{eV} = -2{,}18 \times 10^{-18}\ \text{J}}$$

De (3), el valor de r_0 es

$$\boxed{r_0 = -\frac{ke^2}{2E_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}}$$

Si en el resto de expresiones anteriores hacemos $r = r_0$ se obtiene

$$\boxed{v_0 = \sqrt{-\frac{2E_0}{m_e}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 2{,}19 \cdot 10^6\ \text{m/s}}$$

$$\boxed{a_0 = -\frac{2E_0}{m_e \, r_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = 9{,}05 \cdot 10^{22}\ \text{m/s}^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{-2E_0}}\, r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = 1{,}52 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}}$$

c) Llevando a la fórmula de Larmor las anteriores expresiones (3) y (5), se obtiene

$$\boxed{P = -\frac{16}{3} \frac{E_0^3\, r_0^3}{m_e^2\, c^3} \frac{1}{r^4}} \qquad (6)$$

d) La potencia radiada tiene que ser igual a la variación (con signo negativo) de la energía mecánica del electrón por unidad de tiempo, es decir:

$$P = -\frac{dE}{dt}$$

Luego, teniendo en cuenta la “ayuda”

$$dt = \frac{1}{dE/dt} \frac{dE}{dr} dr \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{P(r)} \frac{dE}{dr} dr$$

Derivando en (4)

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{E_0\, r_0}{r^2}$$

Teniendo en cuenta además la expresión (6) queda

$$dt = -\frac{3}{16} \frac{c^3 m_e^2}{E_0^2\, r_0^2} r^2 dr$$

Integrando desde un instante inicial, $t = 0$ en el que $r = r_0$, hasta un instante $t = \tau$ en el que $r = 0$, esto es

$$\int_0^{\tau} dt = -\frac{3}{16} \frac{c^3 m_e^2}{E_0^2\, r_0^2} \int_{r_0}^{0} r^2 dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{1}{16} \frac{c^3 m_e^2}{E_0^2}\, r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 1{,}56 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}}$$