XVIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FÍSICA
SANTO DOMINGO 2013-REP. DOM.

Problema 1. Escalas atómicas.

El modelo atómico de Thomson de 1904 suponía una esfera de carga uniforme positiva, con los electrones incrustados en ella (modelo del *budín de pasas*). Sin embargo, los experimentos de 1909 de Rutherford y sus colaboradores permitieron descubrir características más detalladas del átomo; en esos experimentos, se bombardearon con partículas alfa (núcleos de helio) láminas delgadas de oro. De acuerdo con el modelo de Thomson, se esperaba que las partículas alfa se deflectaran menos de 0.02º, y aunque la mayoría no se desviaban de su trayectoria, una de cada ocho mil partículas se deflectaba un ángulo mayor que 10º, y en algunos pocos casos el ángulo de deflexión llegaba a 90º o incluso a 180º. Rutherford expresó entonces que "fue el acontecimiento más increíble de mi vida. Era casi tan increíble como si hubiera disparado un proyectil de 15 pulgadas en un pedazo de papel de seda, se devolviera y me golpeara".

1. Determine el valor de la velocidad de las partículas alfa producidas en la desintegración del isotopo de Polonio-210 en la reacción: **(4 puntos)**

$$ {}^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He $$

2. Considere una partícula alfa como la de la pregunta anterior, que se aproxima a un núcleo de oro y se deflecta 180º. Mediante consideraciones energéticas, obtenga una expresión para una cota superior del radio de ese núcleo. Calcule su valor. **(3 puntos)**

3. En 1913, Bohr, inspirado en el modelo atómico planetario de Rutherford, propuso cuantizar el momento angular de los electrones que orbitan al núcleo, de acuerdo con la relación:

$$ L = n\hbar, $$

donde $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π y n = 1,2,3... Utilice este modelo para determinar el radio mínimo del átomo de hidrógeno. **(3 puntos)**

Valores de algunas constantes físicas

Rapidez de la luz: $c = 2.998 \times 10^{8}$ m/s

Carga elemental: $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

Constante de Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

Masa del electrón: $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg

Masa del protón: $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg

Permitividad del vacío: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

Unidad de masa atómica: 1.661×10^{-27} kg

Numero atómico del oro (Au) : $Z_{Au} = 79$

Masa del Polonio $M_{Po} = 209.982857$ u
Masa del Plomo $M_{Pb} = 205.974449$ u
Masa del Helio $M_{He} = 4.002603$ u

Solución

Problema 1. Escalas atómicas.

a) De la reacción: ${}^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$

Donde el Polonio-210 se encuentra en reposo, por lo que al emitir una partícula alfa y crearse el plomo-206 se debe conservar el momento lineal

$$\vec{P}_{Po} = \vec{P}_{Pb} + \vec{P}_{He}$$

Ya que el Polonio-210 está en reposo, por lo que $\vec{P}_{Po} = 0$ y en consecuencia

$$\vec{P}_{Pb} = -\vec{P}_{He}$$

Para la energía de enlace

$$E = (M_{Po} - M_{Pb} - M_{He})c^2 = \Delta M c^2$$

En la desintegración también se debe conservar la energía:

$K = K_{Pb} + K_{He}$ usando la definición de energía cinética $K = \frac{P^2}{2m}$

$K = \frac{P_{Pb}^2}{2M_{Pb}} + \frac{P_{He}^2}{2M_{He}}$ sustituyendo la conservación del momento

$$K_{He} = \frac{M_{Pb}}{M_{Pb} + M_{He}}(M_{Po} - M_{Pb} - M_{He})c^2$$

Por lo que la velocidad de las partículas alfa (${}^{4}_{2}He$) resultante es

$$v_{He} = \left(\sqrt{\frac{2M_{Pb}}{(M_{Pb} + M_{He})M_{He}}\Delta M}\right)c$$

$$v_{He} = 0.053\ c$$

b) Para cuando las partículas alfa llegan y colisionan con los núcleos de oro, en el instante que se detienen, suponemos solo la interacción del potencial Coulombiano, despreciando las otras interacciones, tenemos en término de la conservación de la energía.

$$K_{He} = U_e$$

$$\frac{M_{Pb}}{M_{Pb} + M_{He}}\Delta M c^2 = \frac{e^2 Z_{He} Z_{Au}}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

Por lo que

$$r = \frac{e^2 Z_{He} Z_{Au}}{4\pi\epsilon_0\, \Delta M c^2}\left(\frac{M_{Pb} + M_{He}}{M_{Pb}}\right)$$

$$r = 42.93\ fm$$

Si calculamos el radio usando

$$r = (1.2x10^{-15}m)A^{\frac{1}{3}} = 5.15\ fm$$

Siendo este radio 8 veces más pequeño que el predicho por el modelo de Rutherford, pero prediciendo el orden de magnitud del núcleo.

c) Igualando la fuerza Coulombiana a la fuerza radial se tiene

$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \, r^2}$;

y usando el momento angular propuesto por Bohr se obtiene la rapidez tangencial

$$v = \frac{n\hbar}{r \, m_e}$$

Sustituyendo en la expresión de la fuerza para obtener

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2$$

resultando para n=1, el radio de Bohr $= 0.53$ Å

Problema 2: Fuerza de Arrastre

La fuerza de arrastre se presenta en objetos que se mueven a través de un fluido. Actúa en la dirección del movimiento relativo al fluido. La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad. En muchos casos, como en el diseño de automóviles se trata de minimizar dicha fuerza, sin embargo, otros dispositivos, como los paracaídas, se diseñan maximizando la fuerza de arrastre a bajas velocidades.

El estudio teórico de la fuerza de arrastre es una empresa compleja, incluso para objetos con simetría, pues no se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones que los modelan. Sin embargo, es posible obtener información valiosa con un modelo sencillo.

Considere un modelo que consiste en un objeto macroscópico que se mueve a través de un fluido constituido por moléculas uniformemente distribuidas donde cada una está inicialmente en reposo. En este modelo la fuerza de arrastre surge exclusivamente de lascolisiones entre las moléculas y el objeto en movimiento. Dichas colisiones se suponen perfectamente elásticas.

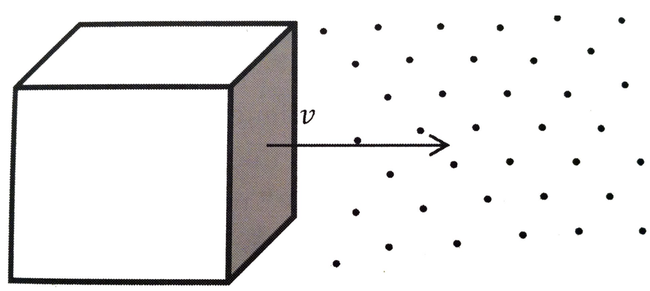


FIGURA 1

a) Un objeto de masa M y velocidad v choca frontalmente con una única molécula de masa m inicialmente en reposo. Encuentre el cambio en la velocidad Δv en el objeto debido al choque. Exprese su resultado en función de M, m y v.**(2 Puntos)**

b) Un cubo de arista L se mueve a través de un fluido con densidad ρ en dirección perpendicular a una de sus caras. Demuestre que la fuerza de arrastre F_D es:

$$F_D = 2\rho A v^2,$$

donde$v$ es la velocidad del cubo y A el área de una de sus caras. Considere que la masa m de cada una de las moléculas del fluido es mucho menor que M.**(3 Puntos)**

c) Un cubo de 10.0 cm por lado se mueve en línea recta con rapidez constante de 0.600 m/s a través de un gas formado por moléculas en reposo de O_2con densidad ρ = 1.43 kg/m^3. Calcule la potencia necesaria para que el cubo mantenga su velocidad constante.**(2 Puntos)**

d) Se quiere modificar la forma del cubo para mejorar su aerodinámica, esto es, disminuir su fuerza de arrastre en su movimiento a través del fluido. Para ello se le da forma de cuña simétrica. Para caracterizar la aerodinámica del nuevo objeto (en la figura 2 se muestra su sección transversal), se introduce un parámetro K en la ecuación anterior

$$F_D = 2K\rho A v^2$$

Este parámetro depende del ángulo θ (indicado en la figura 2). Note que para K=1, se recupera la forma de la fuerza de arrastre para el cubo. Encuentre el coeficiente K para el nuevo objeto si las partículas colisionan elásticamente sobre la superficie de la cuña y su masa es muy pequeña comparada con la del objeto, de modo que se produce una "reflexión especular" de las moléculas.**(3 Puntos)**

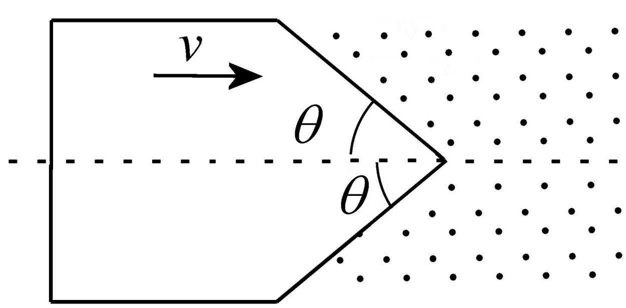


FIGURA 2

Soluciones:

a) Sea u la velocidad final de la molécula, ya que conocemos que inicialmente ésta se encontraba en reposo. Aplicando el principio de conservación del momento y la conservación de la energía cinética:

$$Mv = Mv_2 + mu,$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mu^2.$$

Combinando éstas dos ecuaciones obtenemos:

$$v + v_2 = u,$$

la cual sustituimos en la ecuación de conservación de momento y obtenemos:

$$v_2 = \frac{M-m}{M+m}v,$$
$$\delta v = v_2 - v = \frac{-2m}{M+m}v.$$

b) Para calcular la fuerza de arrastre solo debemos calcular la aceleración promedio que recibe el bloque. Ya tenemos el cambio de velocidad que sufre el bloque debido a un choque, solo debemos calcular ahora en qué intervalo de tiempo promedio tales choques ocurren, para poder estimar la aceleración promedio.

El tiempo entre choques en el bloque es:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v},$$

en donde δx es el desplazamiento entre choques que incurre el cubo. Durante ese tiempo la cara del bloque barre un volumen

$V = \delta x\, L^2 = \delta x\, A.$

Dividiendo δv por δt tenemos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2m}{(M+m)\frac{\delta x}{v}}v = \frac{-2m}{(M+m)\delta x}v^2,$$
$$a = \frac{-2m}{(M+m)V}Av^2 = \frac{-2}{(M+m)}\rho A v^2.$$

Finalmente:

$$F_D = |Ma| = \frac{2M}{(M+m)}\rho A v^2 \approx 2\rho A v^2.$$

Las fuerzas de arrastres regularmente se expresan siempre con signo positivo.

c) La potencia puede ser calculada usando la expresión $P = Fv$. Para mantener una velocidad constante la fuerza aplicada tiene que ser igual en magnitud a la fuerza de arrastre. Teniendo esto en cuenta, la potencia es:

$$P = F_D v = 2\rho A v^3 = 0.00618\ \mathrm{W}$$

d) En este problema es más fácil tratarlo suponiendo que el bloque está en reposo y es tan masivo que su movimiento puede ser despreciado inicialmente, y las moléculas se mueven con velocidad inicial $-v$ (esto corresponde con un cambio en el marco de referencia). El cambio de velocidad horizontal de una partícula que choca con la cuña es:

$$\Delta u = -v\cos 2\theta - (-v) = (1-\cos 2\theta)v.$$

El cambio de momento lineal experimentado en la molécula debe corresponderse con el bloque. Teniendo eso en cuenta, el cambio de velocidad en el bloque es:

$$\Delta v \approx (1-\cos 2\theta)\frac{m}{M}v.$$

Siguiendo un procedimiento similar al del acápite b) obtenemos que la fuerza de arrastre es

$$F_D = (1 - \cos 2\theta)\rho A v^2,$$

Lo que nos da un coeficiente de arrastre K:

$$K = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

Nótese que para $\theta = 90°$ obtenemos el caso del acápite b), como es de esperarse.

Problema 3: Molécula Diatómica.

Una molécula diatómica consta de dos átomos enlazados químicamente. Estos enlaces químicos sólo pueden estudiarse con exactitud utilizando mecánica cuántica. Sin embargo, se pueden hacer aproximaciones de mecánica clásica adecuadas para varias aplicaciones.

Un modelo común de enlace diatómico es tratarlos como si los dos átomos estuvieran atados por un resorte de constante k a una separación de equilibrio r_0. Este modelo es muy usado para estudiar las vibraciones moleculares de baja energía, pero falla en donde hay rompimiento de enlaces o para vibraciones de alta energía. La energía potencial de este modelo, el cual no es más que el oscilador armónico, se puede escribir como:

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

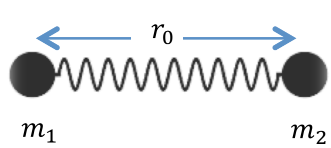
donde r es la separación instantánea entre los dos átomos. De la expresión anterior podemos obtener la magnitud de la fuerza entre los dos átomos:

$$F(r) = -k(r - r_0)$$

Cuando se quiere modelar vibraciones de alta energía (o de alta amplitud) se puede recurrir al potencial de Morse:

$$U(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2$$

en donde D_e y a son cantidades constantes. Nótese que cuando la distancia interatómica crece hasta el infinito, la energía potencial tiende a D_e.



Representación de una molécula diatómica.

a) Considere una molécula diatómica con átomos de masas m_1 y m_2 y separación de equilibrio r_0. Determine la ubicación del centro de masas de la molécula respecto de m_1. **(2 puntos)**

b) Si esta molécula, supuesta rígida, gira a una velocidad rotacional ω alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los átomos y pasa por su centro de masa, encuentre la expresión de la energía cinética rotacional en término de m_1, m_2, r_0 y ω. **(2 puntos)**

c) Suponga ahora que la molécula no rota pero sus átomos pueden vibrar. Determine su frecuencia angular de vibración ω_0 para bajas energías. **(2 puntos)**

d) Un efecto muy estudiado en espectroscopia es el hecho de que el movimiento rotacional hace que la distancia entre los átomos aumente. Este fenómeno se conoce como *distorsión centrífuga.* Encuentre esta nueva distancia r_0' en función de ω, ω_0 y r_0, suponiendo que la molécula no vibra. **(2 puntos)**

e) Para oscilaciones pequeñas el potencial de Morse se comporta de manera muy parecida al potencial del oscilador armónico. Encuentre la constante equivalente k en función de D_e y a para oscilaciones pequeñas del oscilador de Morse. **(2 puntos)**

Ayuda: $e^x \approx 1 + x$ *para* x *muy pequeña.*

Soluciones

a) Sean $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ las posiciones de los átomos. El centro de masa del sistema es

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2}.$$

Para obtener el centro de masa relativo a m_1 simplemente restamos $\vec{R}_1$ de $\vec{R}_{cm}$ y obtenemos:

$$r_{cm} = \left|\vec{R}_{cm} - \vec{R}_1\right| = \left|\frac{m_2(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{m_1+m_2}\right| = \frac{m_2 r}{m_1+m_2},$$

En donde r es la separación entre los átomos.

b) Como el sistema no vibra (se comporta como un cuerpo rígido), la distancia entre los átomos tiene que ser constante:

$$\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right| = r_0$$

Entonces las distancias de cada átomo al centro de masa es:

$$r_1 = \left|\vec{R}_1 - \vec{R}_{cm}\right| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0$$

$$r_2 = \left|\vec{R}_2 - \vec{R}_{cm}\right| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0$$

Esto nos permite calcular el momento de inercia alrededor del centro de masa del sistema:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$$

Por lo que la energía cinética rotacional es

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \omega^2$$

c) La fuerzas sobre las masas se pueden escribir:

$$m_1 a_1 = k(-r_1 + r_2 - r_0)$$

$$m_2 a_2 = -k(-r_1 + r_2 + r_0)$$

En donde las posiciones aquí tienen como origen al centro de masa (no confundir con las distancias al centro de masa del problema anterior, ya que las distancias no pueden ser negativas). Para poder obtener la frecuencia de oscilación debemos convertir estas ecuaciones a la forma:

$$a_x = -\omega_0^2 (x - x_0)$$

Podemos combinar estas ecuaciones despejamos las aceleraciones en cada ecuación y las restamos:

$$a_2 - a_1 = \left(-\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1}\right)(r_2 - r_1 - r_0),$$

$$a_2 - a_1 = -\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} k (r_2 - r_1 - r_0).$$

Definiendo a $a = a_2 - a_1$ y $r = r_2 - r_1$, la ecuación ahora luce

$$a = -\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} k (r - r_0).$$

Podemos concluir entonces que la frecuencia de oscilación es:

$$\omega_0^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} k.$$

d) El origen de la distorsión centrífuga tiene que ver con el hecho de que el resorte se extiende porque la aumenta la aceleración centrípeta a medida que aumenta la velocidad angular ω. Lo que se debe hacer es igualar la fuerza del resorte con la aceleración centrípeta total. La fuerza del resorte es:

$$F_e = -k(r_0' - r_0).$$

La aceleración centrípeta de cada átomo, tomando las distancias calculadas en el acápite b) son:

$$a_{c1} = -r_1\omega^2,$$
$$a_{c2} = -r_2\omega^2.$$

La fuerza centrípeta neta es

$$F_c = m_1 a_{c1} + m_2 a_{c2} = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r_0'\omega^2.$$

Igualando F_e y F_c, y usando el resultado del acápite c) obtenemos:

$$r_0' = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} r_0.$$

e) Para oscilaciones de bajas energía $r - r_0$ tiene que ser una cantidad pequeña, lo que nos permite establecer

$$U(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2 \approx D_e a^2 (r-r_0)^2.$$

Comparando con $U(r) = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$, tenemos:

$$k = 2D_e a^2.$$