

Tarea avanzada V

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF
Fecha de entrega: 4-5 de Mayo

ENTRENAMIENTO 2016

Problemas de matemáticas

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Continuando con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (cabe mencionar que los métodos aquí presentados se generalizan de manera natural para cualquier orden). Las ecuaciones de la tarea pasada presentaban la peculiaridad de que todos los polinomios característicos tenían dos raíces distintas ($\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$). Ahora, ¿qué ocurre cuándo las raíces se repiten? o incluso nos preguntamos ¿qué pasa cuando las raíces son complejas?. Si las raíces son múltiples, debemos de encontrar otra solución que sea linealmente independiente (i.e. que no genere las mismas soluciones que ya tenemos). Para que esto suceda hay que multiplicar a la solución e^{λ_k} por un polinomio, si la raíz λ_k se repite m veces, entonces hay que multiplicar a la solución por un polinomio de grado $m - 1$ con constantes arbitrarias, es decir, la nueva solución será

$$y_k(x) = e^{\lambda_k} \sum_{i=0}^{m-1} C_i x^i$$

Para determinar las constantes C_i basta con sustituir en la ecuación original y agrupar los términos en las mismas potencias de x e igualar a cero, como debe ser cero, los coeficientes (ya agrupados) cada uno debe ser igual a cero, dando un sistema de ecuaciones diferenciales soluble. Una vez obtenido esta solución se vuelve a hacer superposición de las soluciones con constantes arbitrarias (que se determinan por las condiciones iniciales). En cambio, cuando la raíz es compleja $\lambda_k = a + ib$ el resultado es mucho más sencillo. Pues recordando la ecuación de Euler ($e^{i\lambda_k x} = \cos(\lambda_k x) + i\sin(\lambda_k x)$). Puede mostrarse, usted mismo puede hacerlo, que la parte real y la parte imaginaria ambas son soluciones de la ecuación diferencial. Por lo cual, en este caso:

$$y_k(x) = e^a \{A_k \cos(bx) + B_k \sin(bx)\}$$

Y de nuevo la solución general es la superposición de todas las soluciones.

Problemas

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones, o bien la solución al problema de valores iniciales

1. $\frac{d^2 y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 0$
2. $4 \frac{d^2 y}{dt^2} - 12 \frac{dy}{dt} + 9y = 0$
3. $9 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
4. $4 \frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
5. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$
6. $9 \frac{d^2 y}{dt^2} - 12 \frac{dy}{dt} + 4y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$

Problemas de preparación

- Tres esferas metálicas concéntricas de radios r_1 , r_2 , y r_3 tienen las cargas q_1 , q_2 , y q_3 (ver figura) donde . Determine el potencial en el punto A , que se encuentra entre las esferas 1 y 2 a una distancia r del centro de las esferas en los siguientes casos.
 - Los interruptores k_1 y k_2 están abiertos.
 - Después de cerrar el interruptor k_1 .
 - Después de cerrar el interruptor k_2 con el interruptor k_1 cerrado

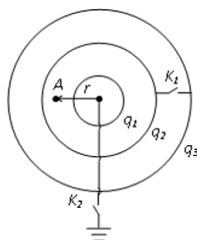


Figura 1:

- En 1911 el físico holandés Kamerlingh Onnes descubrió que en algunos materiales la resistencia eléctrica caía a cero por debajo de cierto valor de temperatura. A este fenómeno se le llamó superconductividad y a los materiales que lo presentan, superconductores. Unos años más tarde, en 1933, W. Meissner y R. Oschenfeld descubrieron que los superconductores, además de no tener resistencia eléctrica, se comportaban como diamagnéticos perfectos, esto quiere decir que en el interior de estos materiales, el campo magnético es nulo. Este es el conocido efecto Meissner. Supongamos que tenemos una pastilla superconductora, la cual podemos considerar infinita, encima de la cual se coloca un imán de masa m cuyo polo norte apunta hacia la pastilla, de modo que el momento dipolar magnético \vec{p} del imán tiene la dirección que muestra la figura. Considere que el vector \vec{p} se encuentra todo el tiempo en dirección vertical y que las dimensiones del imán pueden ser despreciadas. Todo el sistema se encuentra en el campo gravitatorio terrestre.
 - Determine la energía potencial de interacción entre el superconductor y el imán.
 - Grafique la forma aproximada de la energía potencial total del imán en función de la distancia a la superficie del superconductor.
 - Halle a qué distancia h_0 de la pastilla superconductora el imán quedará en reposo. d) Demuestre que si colocamos el imán a una distancia de la pastilla superconductora que esté en la vecindad de h_0 , este realizará un movimiento armónico simple. Determine la frecuencia de las oscilaciones.

Información. La proyección en z del campo magnético de un dipolo \vec{p} en un punto del espacio se calcula como: $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} p \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$, donde el eje z se encuentra dirigido en la misma dirección del momento dipolar \vec{p} y r es la distancia que hay desde el dipolo al punto en el cual queremos calcular el campo.

- Un fotón de energía E choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo m_0 y es absorbido. ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante?
 - Una partícula de masa en reposo m_0 se desplaza a una velocidad de $v = \frac{4}{5}c$, choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma una partícula compuesta. ¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál su velocidad?
- Un átomo de masa M se encuentra en reposo, en él se produce un salto electrónico desde una órbita más externa a una más interna con un cambio de energía ΔE y se emite un fotón.
 - Se pide determinar la energía de retroceso del átomo.
 - Calcular la frecuencia del fotón emitido por un átomo de hidrógeno en un salto electrónico desde el nivel $n = 5$ al nivel en que el átomo queda en su estado fundamental.

Datos. Masa aproximada del átomo de hidrógeno $1uma$ Energía del átomo de hidrógeno $E = -13.6/n^2 eV$
 Constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} Js$

5. En la figura se esquematiza un aparato construido por Möllenstedt y Düker en los años cincuenta para poner de manifiesto que los electrones, además de ser partículas, se comportan también como ondas. El aparato consta básicamente de tres placas planas cargadas de longitud L que crean campos eléctricos uniformes de módulo E en los espacios intermedios, tal como se indica en la figura. Por la izquierda de las placas (región 1) incide un haz colimado de electrones con velocidad v_x paralela a las placas.

- Calcule la componente transversal v_y de la velocidad de los electrones a la salida de las placas (región 2). Datos: $L = 5,0\text{mm}$; $E = 570\text{V/m}$; $v_x = 1,24\Delta 10^8\text{m/s}$; $e = 1,60\Delta 10^{-19}\text{C}$; $m_e = 9,11\Delta 10^{-31}\text{kg}$. No es necesario el cálculo relativista.
- El haz de electrones en la región 1 puede ser considerado como una onda plana. Llamando A a su amplitud y k_x a su número de ondas ($k_x = 2\pi/\lambda_1$, siendo λ_1 la longitud de onda asociada y $p = \frac{h}{2\pi}k$), esta onda puede expresarse en un instante dado, $t = 0$, en la forma: $\phi_1(x) = A \cos(K_x x)$. En la región 2 se superponen las dos ondas planas asociadas a los electrones desviados entre las placas. Por tanto, la onda resultante, en $t = 0$, puede expresarse en la forma: $\phi_2(x, y) = A\{\cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y)\}$. Determine k_x y k_y en la región 2. Dato: $h = 6,63\Delta 10^{-34}\text{Js}$.
- Se sitúa como indica la figura una pantalla fluorescente, que brilla con una intensidad proporcional a la intensidad de la onda de electrones que llega a cada uno de sus puntos. En la pantalla se detectan franjas de interferencia perpendiculares al plano de la figura. Obtenga una expresión para la distribución de intensidad en la pantalla, $I(y)$, y determine la distancia interfranja.

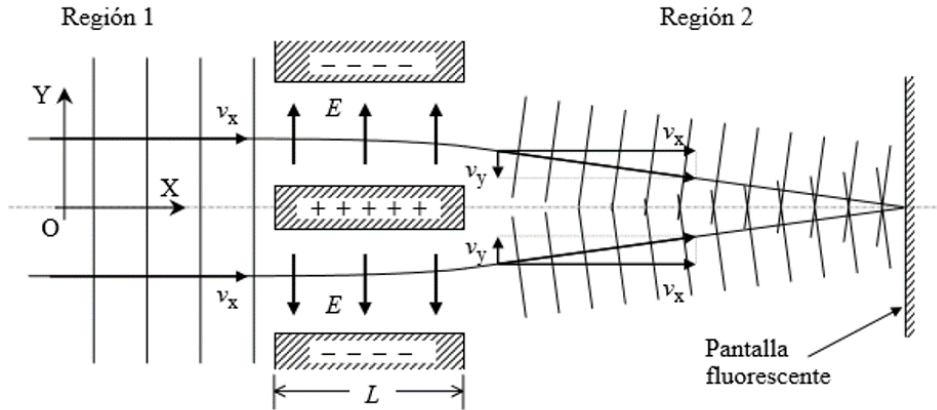


Figura 2:

6. Muchos automóviles están equipados con sensores de velocidad basados en el Efecto Hall. El sensor Hall, fijo a la carrocería y próximo a la rueda, consiste en una plaquita de material semiconductor, a través de la cual pasa una corriente I , montada frente a un imán que produce un campo magnético aproximadamente uniforme de magnitud B . Como resultado, se genera un voltaje de magnitud V_H . Cuando un dispositivo (placa metálica de elevada permeabilidad magnética), fijo a la rueda, pasa entre el imán y la plaquita semiconductora, anula el campo y el voltaje Hall, V_H del sensor. Eso produce como señal de salida una serie de pulsos de forma aproximadamente cuadrada (vea figura 2), que puede ser utilizada por el computador de a bordo para medir la velocidad angular de la rueda.

- Considere una plaquita semiconductora de altura d , espesor a y longitud L , donde hay una densidad de corriente \mathbf{j} (Ver Fig. 1), situada en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. Suponga que la corriente sea debida a portadores de carga q y que n sea la densidad de portadores en la plaquita, de forma que el módulo de la densidad de corriente sea $j = I/ad = nqv$, donde v es la velocidad de los portadores. Obtenga una expresión para el voltaje Hall generado entre el plano superior e inferior de la plaquita que compensa el efecto del campo magnético sobre los portadores de carga.
- Suponga que la plaquita semiconductora tiene altura $d = 1,0\text{cm}$, espesor $a = 250\mu\text{m}$, longitud $L = 1,0\text{cm}$. Por ella circula una corriente de 16mA y está sometida a un campo magnético $B = 0,1\text{T}$.

La densidad de portadores en el material, con carga $q = 1.6 \times 10^{-19}C$, es $n = 10^{19}cm^{-3}$. Calcule el valor de V_H .

- c) ¿Cuál es la velocidad de los portadores de carga asociados a la corriente?
- d) En la figura 2 tenemos un gráfico del voltaje Hall en función del tiempo. Siendo $t_1 = 0,5s$, $t_2 = 0,9s$ y $t_3 = 1,2s$ ¿el automóvil está acelerando o frenando? ¿Cuál es el valor medio de la aceleración entre intervalos de tiempo consecutivos? Se sabe que el diámetro típico de una rueda es de $60cm$.
- e) ¿Qué distancia recorrió el automóvil desde $t = 0$ hasta t_3 ?

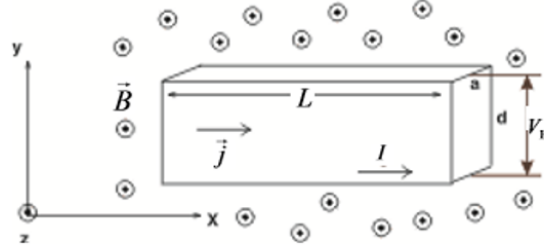


Figura 1: Placa de material semiconductor atravesada por corriente I y colocada en un campo magnético \vec{B} .

Figura 3:

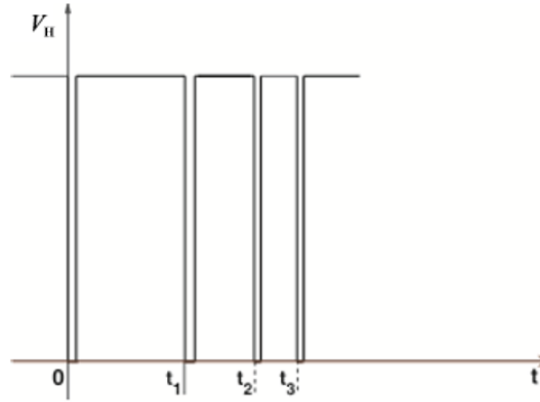


Figura 2: Gráfico del voltaje Hall en función del tiempo.

Figura 4:

7. Podemos tener alguna idea sobre la absorción de radiación por la materia considerando un sistema de oscilador armónico forzado y amortiguado. Considere una partícula de masa m , en un medio viscoso, sujeta a una fuerza disipativa proporcional a su velocidad ($f_{disip} = -\alpha v$) y ligada a una pared por un resorte de constante elástica $k = m\omega_0^2$.

- a) Una fuerza armónica externa $f = f_0 \cos(\omega t)$ es aplicada a la partícula, en la misma dirección de su movimiento. La potencia media transferida a la partícula en un período es:

$$\bar{P} = \frac{\alpha f_0^2 \omega^2}{2(m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2 \omega^2)}$$

Describa el comportamiento de \bar{P} con ω .

- b) Considere que la partícula ya no está ligada a la pared. ¿Cuál sería, en esta situación, la expresión para la potencia media \bar{P} ?

8. De acuerdo con el modelo del “bigbang”, el universo evolucionó de una situación de alta densidad y temperatura a la situación actual por un proceso de expansión. En una de las etapas de la expansión la densidad del universo alcanzó un valor crítico del orden de 10^{-20} g/cm^3 , razón por la cual los fotones transitan grandes distancias sin interactuar con la materia. A este proceso se lo llama desacoplamiento de la radiación con la materia. Este desacoplamiento se alcanzó cuando la temperatura del universo era $T_D = 3000 \text{ K}$. Si suponemos que los fotones producidos a partir del momento del desacoplamiento estaban en equilibrio térmico con la materia, la intensidad de la radiación por ellos producida debe obedecer a la fórmula de Planck:

$$R(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

, donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, k es la constante de Boltzmann, λ es la longitud de onda y T la temperatura. De acuerdo con la expresión de Planck, el máximo de radiación corresponde a la longitud de onda λ_{max} dada por la llamada ley de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{T}$$

, donde la cantidad 2.9×10^{-3} es una constante universal dada en metro-kelvin. La temperatura T se mide en kelvin.

- La densidad actual de materia en el universo es del orden de $10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ y la radiación emitida, producto del desacoplamiento de la radiación con la materia, es observada actualmente en forma de radiación cósmica de fondo, la cual obedece la ley de Planck, a una temperatura T_0 . Suponiendo que todas las distancias en el universo se expanden isotrópicamente, calcule la temperatura actual del universo T_0 .
- Los datos del satélite COBE, representados en la siguiente figura, indican que la radiación cósmica de fondo sigue la fórmula de Planck para una cierta temperatura $T_0^{(exp)}$. Utilizando la gráfica número 4 determine la temperatura $T_0^{(exp)}$

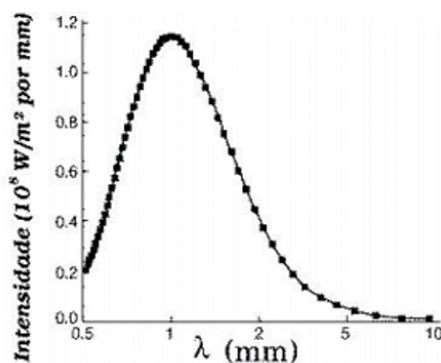


Figura 5: Espectro de la radiación cósmica de fondo medida por el satélite COBE.

- Determine la diferencia porcentual entre las temperaturas determinadas en los items anteriores.
9. Un disco metálico (de masa m y radio a) se encuentra situado en una región en la que existe un campo magnético uniforme, \vec{B} , dirigido según su eje. Si el disco se pone a girar con velocidad angular $\vec{\omega}$, se establece una diferencia de potencial, ΔV , entre el borde del disco y su eje de rotación.

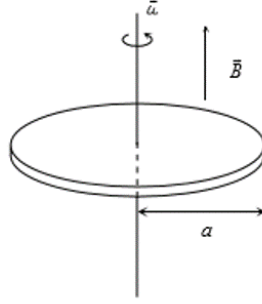


Figura 1: Disco metálico en rotación en un campo magnético uniforme.

Figura 6:

- a) Determine la fuerza magnética, \vec{F}_m , sobre las cargas libres del metal.
- b) Cuando se alcanza el estado estacionario, la resultante de las fuerzas eléctrica y magnética sobre las cargas libres del metal es nula. Si la velocidad angular $\vec{\omega}$ y el campo magnético \vec{B} tienen el mismo sentido, como se muestra en la figura, demuestre que la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \frac{\phi}{T}$$

en la que ϕ es el flujo del campo magnético a través del disco y T es el período de rotación.

- c) Imagine que se conecta una resistencia exterior, R , entre el eje y el borde del disco, de forma que se permita el paso de corriente. La diferencia de potencial y la velocidad angular disminuyen con el tiempo, pero en cada instante ΔV es la misma que existiría con el circuito abierto para esa velocidad angular. Llevando a cabo un balance de energía, demuestre que la energía cinética de rotación del disco, E_c , disminuye con el tiempo, por efecto Joule, de acuerdo con

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}$$

donde τ es un tiempo característico. Expresé τ en función de los parámetros conocidos.

- d) Los resultados obtenidos para discos son válidos para cilindros. Se comprobó experimentalmente que un cilindro de cobre de masa $m = 1\text{kg}$ y radio $a = 2\text{cm}$, colocado en un campo $B = 1\text{T}$ y puesto a rotar con una resistencia $R = 10\Omega$ conectada entre el eje y el borde, se detenía al cabo de unos 10 minutos. ¿Se puede explicar esta observación experimental considerando solamente la disipación de energía por efecto Joule? Justifique su respuesta.