

# Tarea avanzada VII

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF  
Fecha de entrega: 1 de Junio 2016

ENTRENAMIENTO 2016

---

## Problemas de matemáticas

### Integrales numéricas

A diferencia de las derivadas, una función no siempre tiene una integral indefinida de forma explícita. Por ejemplo, puede probarse que la función  $f(x) = e^{x^2}$  no tiene una antiderivada, i.e. no existe una función  $F(x)$  tal que  $\frac{d}{dx}F(x) = e^{x^2}$ . Por el contrario, para toda función integrable la integral definida en un intervalo  $[a, b]$  existe. La interpretación geométrica de la integral es el área bajo la curva, la mayoría de las aproximaciones consiste en tratar de calcular esta área, por ejemplo aproximando con rectángulitos con trapecios o con parábolas etc. Es importante tomar en cuenta que toda aproximación no es exacta, es decir conlleva un error numérico. Conocer el error es muy importante, pues nos dice que tan cerca de la solución real estamos. El error depende del grado de exactitud deseado, si se conoce una forma de encontrar, o al menos acotar el error, nuestros cálculos se volverá mucho más eficientes. Supongamos que en un experimento el error de medición es del orden de  $10^{-5}$ , entonces quisiéramos que la integral tuviera un error de al menos ese orden, pues un error más chico no se vería reflejado pues el error experimental "se come" el error de la integral. Luego, si no se conoce una forma de calcular el error, se tendría que hacer un número muy grande de iteraciones esperando que el error sea más chico que el deseado, digamos  $10^7$  iteraciones (son fácilmente hechas por una computadora en un par de minutos), por el contrario si se conoce una fórmula para el error el tiempo de computo, o esfuerzo humano se reduce considerablemente (para un error del orden de  $10^{-5}$ , aunque depende del intervalo y de la función, generalmente se necesitan del orden de  $10^3$  a  $10^4$  iteraciones, considerablemente muchas menos que  $10^7$ ). Cuando hablamos del error nos referimos a que si nuestra aproximación para la integral es  $I$ , entonces dicha aproximación tiene un error  $\varepsilon$  si

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I \right| < \varepsilon$$

### Integral de Riemann

Supóngase que se tiene una función  $f(x)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ . Recordando la definición para Riemann  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{(b-a)}{n})$ . Una aproximación de la integral sería truncar esta serie en algún  $n$  finito. Es decir

$$I = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n}) \quad (1)$$

Es claro que entre mayor sea  $n$  mejor es la aproximación. El error para la integral de Riemann viene dado por

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \quad (2)$$

donde  $M_1$  es el valor máximo de  $f'(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

### Riemann intermedio

Supóngase que se tiene una función  $f(x)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ . Pensando en el método anterior, si dibujamos un rectángulo de base  $d - c$  y altura  $f(c)$ , si la función es monótona creciente, nuestro rectángulo quedará por debajo, por el contrario si es monótona decreciente, nuestros rectángulos quedarán por arriba. Antes de continuar piense rápidamente una forma de mejorar la aproximación... Una solución rápida es tomar la altura del rectángulo como  $f\left(\frac{d+c}{2}\right)$ . De esta forma

$$I = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) - \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Y donde el error es

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} \quad (4)$$

donde  $M_2$  es el valor máximo del valor absoluto de  $f''(x)$  en el intervalo.

### Regla del trapecio

Supóngase que se tiene una función  $f(x)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ . La regla del trapecio es bastante parecida al método de rectángulos de Riemann. Pero de nuevo nos encontramos bajo el problema de que nuestros rectángulos se "salen" de la función. Antes de seguir piense en otras figura geométrica que se pueda usar para aproximar el área de una función... Para ello aproximaremos a la función como una recta en un intervalo. Luego, en este caso, para aproximar el área usaremos en vez de un rectángulo, un trapecio. De esta forma, el trapecio tendrá base  $\Delta x$  y altura  $h = \frac{1}{2}(f(c) + f(c + \Delta x))$ . Entonces a primera aproximación la integral vale

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (5)$$

Dividiendo el intervalo  $[a, b]$  en múltiples subintervalos la integral vale:

$$I = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right] \quad (6)$$

Con un error de

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad (7)$$

donde  $M_2$  es el valor máximo del valor absoluto de  $f''(x)$  en el intervalo.

## Regla de Simpson

Supóngase que se tiene una función  $f(x)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ . La regla de Simpson consiste en aproximar a la función como una parábola. Para toda cónica se necesitan al menos 3 puntos para determinarla, entonces escojamos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ ,  $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ , de esta forma la parábola que aproxima al polinomio es

$$P(x) = f(a) \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m) \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b) \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}. \quad (8)$$

Muestre que

$$I = \int_a^b P_2(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(m) + f(b)] \quad (9)$$

Si el intervalo  $[a, b]$  se divide de tal forma que  $x_i = a + ih$ , donde  $h = (b-a)/n$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Aplicando la Regla de Simpson a cada subintervalo  $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, 3, 5, \dots, n-1$ . Pruebe que:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) dx = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} [f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})] \quad (10)$$

Sumando las integrales de todos los subintervalos, muestre que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right] \quad (11)$$

El error por aproximación de simson valdrá

$$\left| \int_a^b f(x) - I \right| < (b-a) \frac{h^4}{180} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(4)}(\xi)|. \quad (12)$$

## Serie de Taylor

Si una función es infinitamente diferenciable, alrededor de un punto  $a$ , entonces  $f$  puede escribirse como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (13)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(f) \quad (14)$$

Entre más cerano se esté de  $a$  el error de  $f(x)$  con respecto a la serie truncada será más chico. Así que la serie de Taylor es una aproximación "local" de los valores de  $f$ . Muchas veces basta con tomar la aproximación lineal alrededor de  $a$ . El error en la serie de Taylor puede aproximarse por

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$$R_n(f) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

donde  $a$  y  $x$ , pertenecen a los números reales,  $n$  a los enteros y  $\xi$  es un número real entre  $a$  y  $x$ .

Luego, para aproximar la integral o serie de Taylor, basta escribir la serie de Taylor para una función  $f$  e integrar término a término, ¡esta integración es muy sencilla pues es un polinomio!. Y para calcular el error en la aproximación, basta con integrar el error en el intervalo pedido (generalmente el error no dependerá de la  $x$ , puedes acotar para que así sea, por lo cual bastará multiplicar al error por la longitud del intervalo).

## Ejercicios

Encuentre implícitamente una expresión en términos de  $n$  (número de divisiones) y luego úsela para aproximar numéricamente el valor de las siguientes integrales. Use al menos 2-3 métodos distintos. Incluya el error de sus cálculos, trate de que este sea al menos menor a  $10^{-3}$ .

1.  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

2.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

3.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

4.  $\int_1^8 \sqrt{1+x^3} dx$

5.  $\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{x^2+8} dx$

6.  $\int_0^1 e^{x^2} dx$

7.  $\int_0^1 e^x dx$

8.  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx$ , esta función se conoce como  $\text{erf}(x)$ , función error. Encuentre una serie de Taylor para  $\text{erf}(x)$  alrededor del 0 y luego integre  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

9.  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$ ,  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Esta integral nos da el periodo de un péndulo simple para cualquier ángulo inicial  $\theta_0$

10.  $4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta$ . Esta fórmula nos da la longitud de una elipse de semi eje mayor  $a$  y excentricidad  $\varepsilon$ . Encuentre la longitud de la órbita de Plutón, Mercurio y la Tierra.

11. Encuentre la serie de Taylor para las integrales de Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

Approxime  $S(1)$  y  $C(1)$

## Problemas de Física

1. El grafeno, formado por átomos de carbono dispuestos sobre una red hexagonal, fue el primer material estrictamente bidimensional obtenido por el hombre y posee propiedades muy especiales que le auguran importantes aplicaciones. Los electrones de conducción en el grafeno, cuyo recorrido libre medio puede llegar hasta una micra, se comportan como si fuesen partículas sin masa, de modo que la energía cinética es proporcional al módulo del momento lineal:  $\varepsilon = v_F P$  donde  $v_F$  es el valor absoluto de la velocidad, que es siempre el mismo y aproximadamente igual a  $v_F = 3 \times 10^6 \frac{m}{s}$ . Considere el movimiento balístico de un electrón entre dos electrodos verticales muy largos situados a la distancia  $d = 300nm$  sobre una muestra de grafeno y entre los cuales se establece una pequeña diferencia de potencial  $V$ .
  - a) Calcule el tiempo de vuelo  $\tau$  entre los electrodos e función de la energía cinética inicial  $\varepsilon_0$  y el ángulo de partida  $\theta$ .
  - b) Calcule la velocidad instantánea del electrón.
  - c) Evalúe  $\tau$  para  $\theta = 0$ . ¿Por qué no depende de la energía cinética inicial del electrón ni del potencial aplicado? Demuestre que en este caso el movimiento es rectilíneo y uniforme a pesar de que hay una fuerza aplicada.
  - d) Demuestre que, a pesar de no actuar fuerza en la dirección vertical, la velocidad en esa dirección disminuye con el tiempo. Explique por qué.

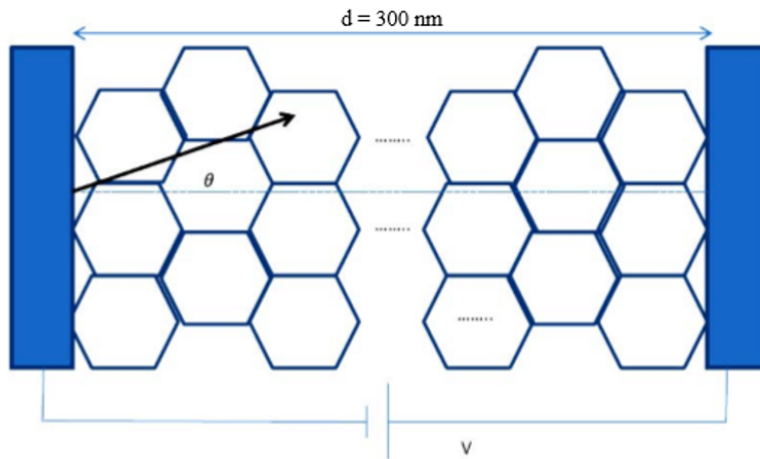


Figura 1:

2. Determine o estime la densidad de flujo de calor neta  $P$  entre las placas paralelas a distancia  $L$ , las cuales están a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. El espacio entre las placas está lleno de un gas monoatómico de densidad molar  $n$  y masa molar  $M$ . Las siguientes aproximaciones le pueden ser útiles

- La densidad del gas es tan baja que el camino libre medio  $\lambda \gg L$
- $T_1 \gg T_2$
- Cuando las moléculas de gas rebotan en las placas, estas obtienen la temperatura respectiva de las placas (por ejemplo, esto ocurrirá si son absorbidas/ligadas por un pequeño periodo de tiempo por las moléculas de las placas, y luego son liberadas de regreso al espacio entre las placas)
- Puedes despreciar la radiación de cuerpo negro
- Una estimación significa que el factor numérico de tu expresión no tiene que ser correcto, es decir, se busca una relación de proporcionalidad.

### 3. Reflexión total interna

El campo eléctrico de una onda plana monocromática polarizada puede ser representado generalmente como  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  donde  $E$  es la amplitud de la onda,  $k$  el número de onda y  $\omega$  la frecuencia. Supón que una onda plana monocromática con frecuencia  $\omega$  viaja en un medio de índice de refracción  $n_1$  e incide en el borde de otro medio de índice de refracción  $n_2$ . La onda entrante forma un ángulo  $\theta_i$  respecto a la normal del borde. A lo largo del problema, solo consideremos la onda eléctrica (TE) transversal polarizada donde el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y todos los medios son no magnéticos.

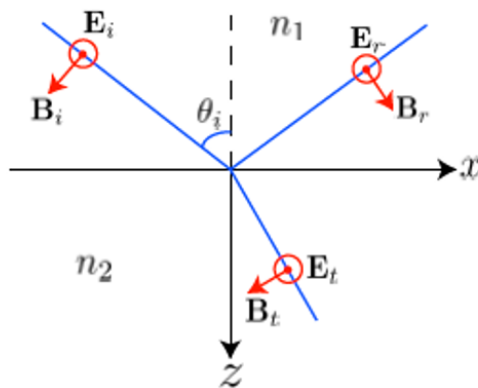


Figura 2:

- a) En el caso de que  $n_1 \geq n_2$ , existe un ángulo crítico en el cual la onda entrante será totalmente reflejada para  $\theta_i \geq \theta_c$  (reflexión total interna o TIR). La fase de la onda reflejada decae como  $\delta$  respecto a la onda incidente. Deduce  $\delta$  y escríbela en términos de  $n_1$ ,  $n_2$  y de  $\theta_i$ .

- b) Usando las condiciones necesarias de frontera, deduce la reflectancia  $R$  para el caso TIR. Muestra que la onda es perfectamente reflejada para todo  $\theta_i \geq \theta_c$

#### 4. Coincidencia constructiva de fases

La más simple "dielectric waveguide" guía dieléctrica es un bloque plano con un espesor  $d$  y un índice de refracción  $n_1$  localizado en un medio homogéneo en el fondo con un índice de refracción ( $n_2 \leq n_1$ ). En el caso de la reflexión total interna, el bloque puede ser usado para guiar ondas sin pérdida, con la condición adicional de que las ondas interfieran constructivamente. En otras palabras los frentes de onda deberían ser conservados mientras las ondas viajan dentro de la waveguide. Los números de onda para el vacío, medio  $n_1$  y medio  $n_2$  son tomados como  $k_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.

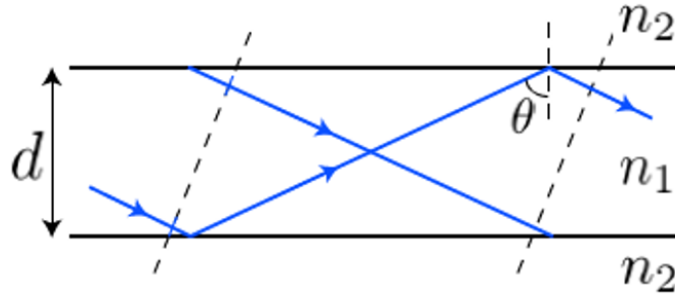


Figura 3:

- a) Encuentra la condición necesaria para la coincidencia de fases constructiva.
- b) La onda puede solo ser guiada sin pérdida para ciertos valores de  $\theta$ . Muestra que en esos casos,  $\theta$  debe satisfacer las ecuaciones:

$$k_1 d \cos \theta - \delta = m\pi; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Verifica que las ecuaciones de arriba también pueden ser escritas como:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{k_0 d}{2} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (16)$$

$$u \tan u = v \quad \text{y} \quad -u \cot u = v \quad (17)$$

$$\text{con } u = \frac{k_0 d}{2} \cos \theta \text{ y } v = \frac{d}{2} \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2}$$

#### 5. Ecuaciones de Maxwell

La ecuación de onda de Maxwell para el campo eléctrico en un medio dieléctrico de permeabilidad relativa  $\varepsilon$  es:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

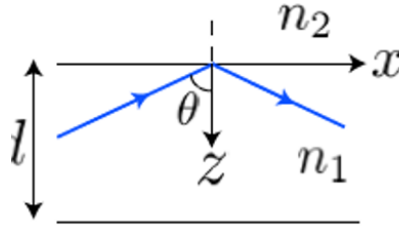


Figura 4:

En el caso del bloque guía "slab waveguide" mostrado en la figura encima,  $\epsilon = \eta_1^2$  para  $0 < z < d$  y para  $\epsilon = \eta_2^2$  para  $z < 0$  o  $z > d$ . Tomando un sistema de coordenadas tal que la onda viaja en el plano  $x - z$ , el campo eléctrico puede ser escrito como:

$$E(r, t) = E(x, z, t) = E(z) \exp i(\beta x - \omega t) \quad (18)$$

donde  $\beta$  es la propagación efectiva constante a lo largo de la "waveguide" guía de onda debido a la simetría de la estructura en la dirección  $x$ . En el caso de "waveguiding" la onda TE polarizada ( $\mathbf{E}(z) = E(z)\hat{y}$ ),  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  debería ser armónica simple dentro del bloque y decaer exponencialmente fuera.

- a) ¿Cuál es la relación de  $\beta$  con  $k_1$  y  $\theta$ ?
- b) De las condiciones de frontera en  $z = 0$  y  $z = d$ , deduce de las ecuaciones de Maxwell la condición para "waveguiding" guiar la onda como se encontró en el problema anterior.

## 6. Soluciones a los modos

Las soluciones a la guía de onda son soluciones de  $\theta$  donde la guía de onda ocurre dentro del bloque. La solución para  $m = 0$  (ejercicio Coincidencia constructiva de fases) es comúnmente llamado el modo fundamental (el menor modo o el primer modo), el modo  $m = 1$  es llamado el segundo modo, etcétera.

1. Dibuja las curvas en coordenadas  $(u, v)$  que representan las ecuaciones 16 y 17. Determina la condición necesaria para que solo exista una solución para el modo.
2. Muestra que el número máximo de modos que soporta el bloque dieléctrico es:

$$M = \left\lceil \frac{k_0 d}{\pi} \sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2} \right\rceil \quad (19)$$

donde el símbolo  $\lceil \rceil$  denota la función techo para la cual la expresión dentro se incrementa al entero más cercano.

3. Verifica que el número de soluciones a los modos es aumenta en uno para cada incremento de frecuencia:

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{d\sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2}} \quad (20)$$



4. De la ecuación 15, muestra que la velocidad de grupo ( $d\omega/d\beta$ ) de cada modo soportado por el sistema (i.e. que exista) la solución es:

$$v_g = \frac{d \tan \theta + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}}{\frac{\eta_1 d}{c \cos \theta} - \frac{\partial \delta}{\partial \omega}} \quad (21)$$

5. Muestra que el tiempo máximo de disparidad para diferentes modos en el bloque dieléctrico guía "dielectric slab waveguide" de onda para viajar una distancia  $L$  es:

$$\tau = \frac{L}{c}(\eta_1 - \eta_2) \quad (22)$$

6. Para  $\eta_1 = 1.7$ ,  $\eta_2 = 1.5$ ,  $\lambda = 800$  nm (en el vacío), y  $d = 1\mu m$ , encuentra todas las soluciones para  $\theta$  (con  $\theta \geq \theta_c$ ). Gráfica el campo eléctrico  $E(z)$  para estas soluciones.