Tarea 2

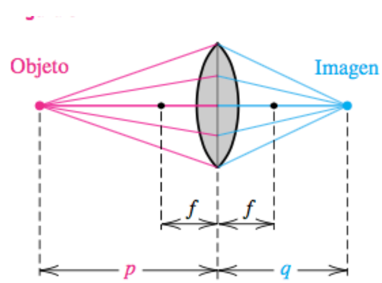
OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF **ENTRENAMIENTO 2017**
Fecha de entrega: martes 31 enero 2017.

Problema 6, de rutina.

Resuelve al menos tres de los siguientes problemas:

1. Como se ilustra en la figura de abajo, si una lente convexa tiene longitud focal de f centímetros y un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente a la imagen está relacionada con p y f mediante la fórmula:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{1}$$



Si $f = 5.0\,\mathrm{cm}$ ¿qué tan cerca debe estar el objeto desde la lente para que la imagen esté a más de 12 centímetros de la lente?

2. Para que un satélite mantenga una órbita de h kilómetros de altitud, su velocidad (en km/s) debe ser igual a $626.4/(h + R)$, donde $R = 6372\,\mathrm{km}$ es el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades resultarán en órbitas con una altitud de más de 100 kilómetros desde la superficie terrestre?

3. ¿Cuál es el promedio de las dos soluciones de la ecuación cuadrática arbitraria $ax^2+bx+c = 0$? Analice cómo es que este conocimiento puede ayudarlo a probar fácilmente las soluciones de una ecuación cuadrática.

4. La membrana de una célula es una esfera de radio de 6 micrones. ¿Qué cambio en el radio aumentará el área superficial de la membrana en un 25 %?

5. Un anillo que pesa 80 gramos está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua, se ha determinado que el anillo tiene un volumen de $5\,\mathrm{cm}^3$. El oro pesa $19.3\,\mathrm{cm}^3$ y la plata pesa $10.5\,\mathrm{cm}^3$. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

Problema 7, mecánica.

Resuelve al menos tres de los siguientes problemas:

1. Un hombre sobre un vagón de ferrocarril que viaja con rapidez constante $v = 9.1\,\mathrm{m/s}$ quiere lanzar una pelota a través de un aro estacionario a 4.90 m desde la altura de su mano, de modo que la bola se mueva horizontalmente al pasar por el aro. El hombre lanza la bola con una rapidez de $v = 10.8\,\mathrm{m/s}$ con respecto a sí mismo.

a) ¿Qué componente vertical debe tener la velocidad inicial de la bola?

b) ¿Cuántos segundos después del lanzamiento la bola atravesará el aro?

c) ¿A qué distancia horizontal del aro se deberá soltar la bola?

d) Cuando la pelota sale de la mano del hombre, ¿qué dirección tiene su velocidad relativa al marco de referencia del vagón? ¿Y relativa al marco de referencia de un observador parado en el suelo?

2. Una pelota recibe una velocidad inicial de magnitud v_0 a un ángulo ϕ sobre la superficie de una rampa que, a la vez, está inclinada un ángulo θ respecto la horizontal.

   a) Calcule la distancia sobre la rampa desde el punto de lanzamiento hasta donde el objeto golpea la rampa. Responda en términos de v_0, g, θ, ϕ

   b) ¿Para qué ángulo ϕ se obtiene el alcance máximo sobre la rampa?

3. Una partícula se mueve en el plano xy, donde sus cordenadas están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\left[\omega t - \sin(\omega t)\right] \\ y(t) &= R\left[1 - \cos(\omega t)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

   donde R y ω son constantes.

   a) La trayectoria de la partícula es un punto en el borde de una rueda de radio R que rueda con rapidez constante sobre una superficie horizontal. La curva describe el punto se llama cicloide.

   b) Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícula en función del tiempo.

   c) ¿En qué instantes la partícula está momentáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tiene la partícula en esos instantes? ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración en esos instantes?

   d) ¿La magnitud de la aceleración depende del tiempo? Compare este movimiento con el movimiento circular uniforme.

4. Se lanza una pelota hacia arriba desde el borde de una azotea. Una segunda pelota se deja caer desde la azotea un segundo después (desprecie la resistencia del aire)

   a) Si la altura del edificio es de 20 m, ¿qué rapidez inicial necesitará la primera pelota para que las dos lleguen al suelo al mismo tiempo? En una gráfica dibuja la posición de cada pelota en función del tiempo, a partir del instante en que se lanzó la primera.

   Considere la misma situación, pero ahora conociendo la rapidez inicial v_0 de la primer pelota y la altura h del edificio como una variable desconocida.

   b) Qué altura deberá tener el edificio para que las dos pelotas lleguen al suelo al mismo instante si: i) $v_0 = 6.0\,\mathrm{m/s}$ y ii) $v_0 = 9.5\,\mathrm{m/s}$

   c) Si $v_0 > v_{max}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso simultáneamente. Obtenga v_{max}, cuál es su interpretación física.

   d) Si $v_0 < v_{min}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso all mismo tiempo. Obtenga v_{min}, cuál es su interpretación física.

Problema 8, ondas.

Resuelve al menos tres de los siguientes problemas:

1. Las ondas de radio generadas por un máser de hidrógeno pueden servir como estándar de frecuencia. La frecuencia de estas ondas es 1,420,405,751.786 hertz. Un reloj controlado por un máser de hidrógeno tiene un error de 1 s en 100,000 años. En las siguientes preguntas, use sólo tres cifras significativas. (El gran número de cifras significativas dadas para la frecuencia tan sólo ilustra la notable exactitud con que se midió.) a) ¿Cuánto dura un ciclo de la onda de radio? b) ¿Cuántos ciclos ocurren en 1 h? c) ¿Cuántos ciclos habrán pasado durante la edad de la Tierra, estimada en 4.3×10^9 años? d) ¿Qué error tendría un reloj de máser de hidrógeno después de un lapso semejante?

2. Las ondas sonoras se propagan en el aire con una velocidad de 340 m/s. Si el oído humano percibe las frecuencias comprendidas entre 20 y 20 000 Hz ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda de los sonidos percibidos por el humano?

3. la densidad del hidrógeno es 0.0695 veces la densidad del aire. Si la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, calcula la velocidad del sonido en el hidrógeno (supón las misma condiciones y que γ es el mismo para ambos gases)

4. Un movimiento ondulatorio se propaga según la expresión:

$$x = \sin(4t - 5x) \tag{3}$$

   Calcula: la amplitud de la onda, el período, la frecuencia, la velocidad de propagación, la longitud de onda.

5. En el centro de un estanque circular de radio 5 cm, se produce un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. Si las ondas tardan 10 segundos en llegar a la orilla y se nota que la distancia entre dos crestas sucesivas es de 50 cm. Calcula el periodo; si además se mide que la elongación de la onda es de 3 cm en un intervalo de tiempo de 1/6 s la frecuencia, calcula la amplitud de la onda; finalmente calcula la elongación producida en un punto situado a 3.875 m del foco emisor de las ondas, al cabo de 8 segundos.

Problema 9, matemáticas vectores.

Resuelve al menos tres de los siguientes problemas:

1. En la molécula de metano (CH_4) cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces C-H está en la dirección: $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y uno de los enlaces adyacente está en la dirección $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$. Calcula el ángulo entre estos dos enlaces.

2. La nave Mars Polar Lander se lanzó al espacio el 3 de enero de 1999. El 3 de diciembre de 1999, el día en que la nave se posó en la superficie de Marte, las posiciones de la Tierra y Marte estaban dadas por estas coordenadas:

	x (UA)	y (UA)	z (UA)
Tierra	0.3182	0.9329	0.0000
Marte	1.3087	-0.4423	-0.0414

   En estas coordenadas, el Sol está en el origen y el plano de la órbita de la Tierra es el plano xy. La Tierra pasa por el eje $+x$ una vez al año en el equinoccio de otoño, el primer día de otoño en el hemisferio norte (cerca del 22 de septiembre). Una UA (unidad astronómica) es igual a 1.49×10^8 km, la distancia media de la Tierra al Sol.

   a) Haz un diagrama donde se muestren las posiciones del Sol, la Tierra y Marte el 3 de diciembre de 1999.

   b) Calcule las siguientes distancias en UA el 3 de diciembre de 1999: i) del Sol a la Tierra; ii) del Sol a Marte; iii) de la Tierra a Marte.

   c) Visto desde la Tierra, ¿qué ángulo había entre la dirección al Sol y la dirección a Marte el 3 de diciembre de 1999?

   d) Indique si Marte se veía desde donde usted estaba el 3 de diciembre de 1999 a media noche.

3. Un avión viaja de A siguiendo la dirección norte hacia B, y luego retorna a A. La distancia entre A y B es L. La velocidad del avión en el aire es v y la velocidad del viento es v': a) demuestra que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta, si el aire esta quieto, es $t_a = 2L/v$; b) demuestra que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el este (u oeste) es: $t_b = t_a/\sqrt{1 - (v'/v)^2}$; c) demuestra que el tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el norte (o sur) es: $t_c = t_a/1 - (v'/v)^2$; d) ¿qué posibilidad existe para se realicen los viajes (b) ó (c) cuando $v = v'$? Para un v' dado, ¿cuál es el tiempo mayor t_b o t_c?

4. Utilizando vectores encontrar: a) la longitud de las diagonales de un cubo; b) sus ángulos con los lados adyacentes; c) sus ángulos con las caras adyacentes; d) el ángulo entre las diagonales.

Movimiento en una dimensión.

Movimiento Rectilíneo Uniforme.

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= v_0 \quad \text{constante} \\ x &= x_0 + vt \end{aligned} \tag{4}$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

$$\begin{aligned} a &= a_0 \quad \text{constante} \\ v &= v_0 + a_0 t \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Sobre la superficie terrestre el movimiento en la componente vertical es MRUA con $a_0 = g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

Movimiento Circular Uniforme

$$\begin{aligned} a_t &= 0 \text{ (tangencial)}, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \text{ (normal)} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{constante} \\ \nu &= \frac{1}{T} \quad \text{constante} \\ \theta &= \theta_0 + \omega t \end{aligned} \tag{6}$$

ω: velocidad angular; ν: frecuencia; T: período.

Movimiento Armónico Simple

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) \\ v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \phi) \\ a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \end{aligned} \tag{7}$$

A: amplitud; ω: frecuencia angular; $\omega t + \phi$: fase; ϕ: fase inicial

Movimiento Ondulatorio.

Velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \qquad T \text{ tensión de la cuerda}; \quad \mu \text{ densidad lineal de la cuerda} \tag{8}$$

Velocidad de propagación de una onda longitudinal en un sólido:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \qquad Y \text{ módulo de Young}; \quad \rho \text{ densidad del medio} \tag{9}$$

Velocidad de propagación de una onda longitudinal en un gas:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \qquad P \text{ presión del gas}; \quad \rho \text{ densidad del gas}; \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ coeficiente adiabático} \tag{10}$$

Ecuación de una onda:

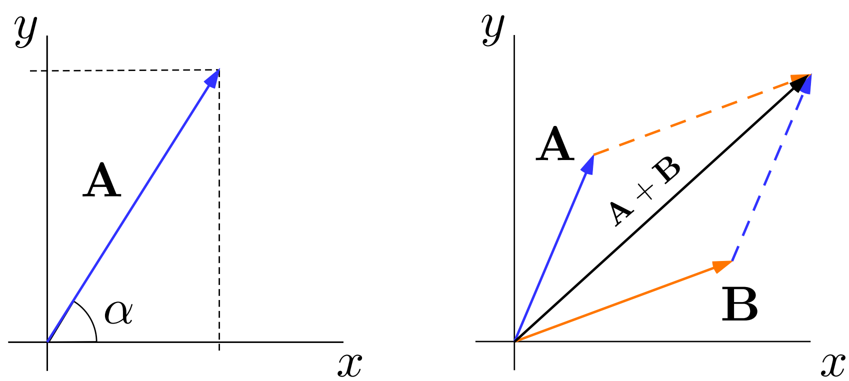
$$y\left(x,t\right) = A \sin\left(\omega t \pm kx\right) \tag{11}$$

$(+)$: la onda avanza en negativo; (-): la onda avanza en sentido positivo.
Parámetros:
A: amplitud; k: número de onda; λ: longitud de onda; ω: frecuencia angular; T: período; f: frecuencia; v: velocidad de propagación.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \tag{12}$$

Vectores.

Sistema de vectores cartesianos.



Un vector esta representado por un segmento de **longitud** A **y dirección (ángulo)** α. En coordenadas cartesianas $(x,\, y)$ un vector queda definido por la proyección del vector en cada uno de los ejes y representan las componentes cartesianas del vector:

$$\mathbf{A} = (A_x,\, A_y) \tag{13}$$

La **magnitud o norma del vector A** corresponde a su longitud:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{14}$$

Las componentes cartesianas del vector están determinadas por la norma del vector A y su dirección α:

$$\begin{array}{l} A_x = A\cos\alpha \\ A_y = A\sin\alpha \end{array}, \qquad \tan\alpha = \frac{A_y}{A_y} \tag{15}$$

es importante notar que el ángulo α tiene signo definido:
$(+)$ si se recorre en sentido contrario a las mancillas del reloj.
$(-)$ en caso contrario.
Se define la **multiplicación por un escalar** a por un vector $\mathbf{A} = (A_x,\, A_y)$ de la siguiente manera:

$$a\mathbf{A} = (aA_x,\, aA_y)\,; \tag{16}$$

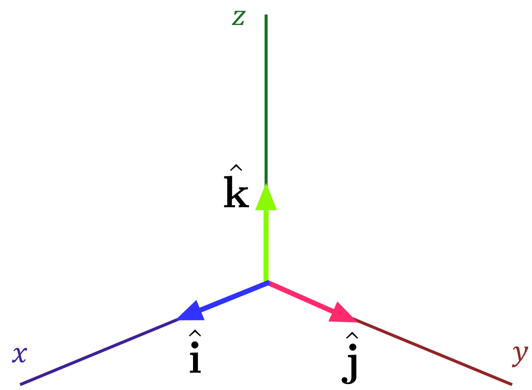
la suma de dos vectores $\mathbf{A} = (A_x,\, A_y)$ y $\mathbf{B} = (B_x,\, B_y)$ se define como:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x,\, A_y + B_y) \tag{17}$$

La extensión a tres o más dimensiones es directa:

$$
\begin{aligned}
& & \mathbf{A} &= (A_x,\, A_y,\, A_z) \\
&\text{magnitud:} & |\mathbf{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\
&\text{multiplicación por escalar:} & a\mathbf{A} &= (aA_x,\, aA_y,\, aA_z) \\
&\text{suma vectorial:} & \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x + B_x,\, A_y + B_y,\, A_z + B_z)
\end{aligned} \tag{18}
$$

Vectores base unitarios.



En coordenadas cartesianas de tres dimensiones se define una base de tres vectores perpendiculares entre si y unitarios (un vector unitario tiene magnitud uno) en la dirección de cada uno de los ejes como se muestra en la figura. Estos tres vectores se dice que forman una **base ortonormal de vectores cartesianos**:

$$\left\{\hat{\mathbf{i}},\, \hat{\mathbf{j}},\, \hat{\mathbf{k}}\right\} \tag{19}$$

(estos tres vectores son linealmente independientes) de tal manera que cualquier vector $\mathbf{A}$ se puede escribir como suma de los tres vectores base de la siguiente manera (combinación lineal de los vectores base):

$$\mathbf{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z) = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{20}$$

Entonces la multiplicación por un escalar a esta dado por la siguiente expresión:

$$a\mathbf{A} = (aA_x,\, aA_y,\, aA_z) = aA_x\hat{\mathbf{i}} + aA_y\hat{\mathbf{j}} + aA_z\hat{\mathbf{k}} \tag{21}$$

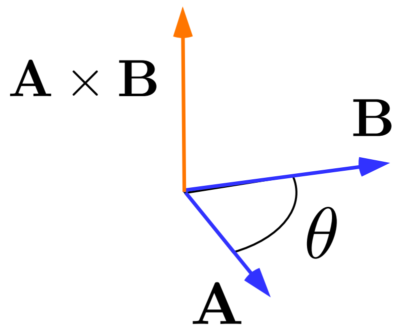
Si tenemos dos vectores:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (A_x,\, A_y,\, A_z) = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{B} &= (B_x,\, B_y,\, B_z) = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{22}
$$

la suma de ambos vectores esta dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x + B_x,\, A_y + B_y,\, A_z + B_z) \\
&= (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_x + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\,\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{23}
$$

Productos vectoriales.



Se define el **producto punto (escalar)** de dos vectores como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta \tag{24}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre ambos vectores.
Propiedades:

1. El producto punto de dos vectores es un escalar.
2. El producto punto es conmutativo: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$
4. El producto punto de un vector consigo mismo es la magnitud del vector al cuadrado: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
5. La componentes o proyecciones de un vector en los ejes cartesianos:
   $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}$, $A_y = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{j}}$, $A_z = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}}$

Se define el **producto cruz (vectorial)** de dos vectores en tres dimensiones como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\mathbf{i}} - (A_x B_z - A_z B_x)\,\hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{25}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre ambos vectores.

1. El producto vectorial, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, resulta en un nuevo vector perpendicular al plano que definen los dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$
2. El producto vectorial es anticonmutativo: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores paralelos $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$
4. El producto vectorial de un vector consigo mismo es cero: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$
5. La magnitud del producto vectorial esta dada por: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta$
   El área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es igual a la magnitud de su producto vectorial:

$$\text{área paralelogramo } = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \tag{26}$$