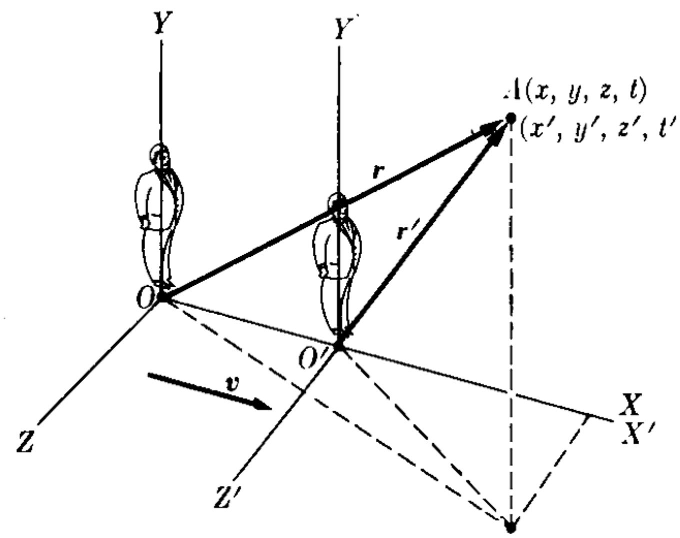
Tarea 8

Fecha de entrega: martes 11 de abril 2017.

Problema 29, Relatividad.



Considera un observador en un sistema fijo O y otro en un sistema O' que se mueve con velocidad v en la dirección x respecto del primero. Desde el punto de vista de la física clásica, el tiempo t que transcurre en el sistema O, comparado con el tiempo t' en el sistema O' son iguales $t = t'$. Si para el sistema que se mueve con velocidad v pasa un segundo $t' = 1$ seg, para el observador fijo también transcurre un segundo $t = 1$ seg. ¡Esto es claro de acuerdo a nuestra intuición!

Sin embargo, la teoría de la relatividad especial establece esto no ocurre así, el tiempo transcurre de manera diferente en sistemas de referencia inerciales diferentes. Para concretar, consideremos un observador en un sistema de referencia inercial O y un observador en un sistema de referencia O' que se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ en la dirección x y x' de ambos sistemas (ver figura). El tiempo en ambos sistemas relacionan a través de la siguiente expresión:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{1}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, siendo: $\beta = v/c$ y $c \approx 3 \times 10^8$ m/s la velocidad de la luz en el vacío.

Esto tiene como consecuencia que eventos que suceden simultaneamente, al mismo tiempo pero en diferentes posiciones, para un observador, no lo sean para otro observador que se mueve respecto del primero.

Para los sistemas O y O' descritos anteriormente, la transformación de coordenadas (espaciales) en ambos sistemas están dadas a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2}$$

Las coordenadas en y y z no son afectadas debido a que los dos sistemas se mueven con velocidad relativa en la dirección común x y x'. Este conjunto de ecuaciones junto con (1) se conocen como **transformaciones de Lorentz** y relacionan las coordenadas espaciales y el tiempo entre ambos sistemas. Entonces, en la teoría especial de la relatividad se definen las transformaciones de Lorentz de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{donde:} \qquad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \leq 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Se puede demostrar que las ecuaciones para la transformación de velocidades son:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}v_x\right)} \\ v'_z &= \frac{v_{xz}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}v_x\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

Resuleve los siguientes problemas:

1) Demuestra que cuando $v \approx c$, entonces: $\gamma \approx 1/\sqrt{2\,(1-\beta)}$, y que cuando $v \ll c$, entonces: $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$

2) En Relatividad se define un **evento** al conjunto de cuatro “coordenadas” (cuadrivector): (ct, x, y, z).

Sean dos eventos: E_1: (ct_1, x_1, y_1, z_1) y E_2: (ct_2, x_2, y_2, z_2). Demuestra que la siguiente cantidad:

$$I = -c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{5}$$

es un **invariante** (tiene el mismo valor en ambos sistemas), es decir demuestra la siguiente igualdad:

$$-c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -c\,(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \tag{6}$$

La cantidad definida en (5) representa el **intervalo** entre los dos eventos E_1 y E_2. Dependiendo de los eventos el intervalo puede representar los siguientes casos:

i) Si $I < 0$, se le denomina intervalo temporaloide (*timelike*)

ii) Si $I > 0$, se le denomina intervalo espacialoide (*spacelike*)

iii) Si $I = 0$, se le denomina intervalo luminoide (*lightlike*)

Si el evento E_1 es el origen, y nos limitamos a una dimensión espacial x, entonces el intervalo $I = -ct^2 + x^2 = -ct'^2 + x'^2$ representan una familia de hipérbolas, una para cada valor de I, representadas en el **diagrama de Minkowski**: (x, t) y (x', t').

3) En la ecuación de la transformación de la velocidad v_x, demuestra que si $v_x < c$ y $v < c$ entonces $v'_x < c$.

4) Se tienen dos eventos: E_1 de coordenadas $(ct_1, x_1, 0, 0)$ y E_2 de coordenadas $(ct_2, x_2, 0, 0)$, suponiendo que el intervalo entre ambos eventos es de tipo espacialoide, encuentra la velocidad del sistema en el cual ambos eventos son simultáneos.

5) Sea S un sistema inercial fijo y S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema fijo. De acuerdo al principio de relatividad galileana (mecánica clásica), la adición de velocidades esta dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \tag{7}$$

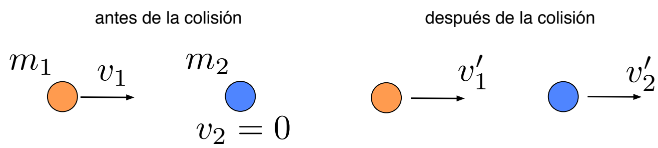
Considera la siguiente colisión simétrica en el sistema fijo S: una partícula A de masa m_A y velocidad $\mathbf{v}_A$ colisiona con otra partícula B, masa m_B y velocidad $\mathbf{v}_B$. Durante la colisión la masa de las partículas A y B se transforma dando lugar a otro par de partículas C y D , de masas m_C, m_D con velocidades velocidades v_C, v_D respectivamente. Asumiendo que el momento lineal total durante la colisión se conserva en el sistema S:

i) Demuestra que el momento lineal total se conserva también en el sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema S.

ii) Suponiendo que la colisión es elástica en el sistema S; muestra que también es elástica en el sistema S'

Problema 30, colisión elástica.

Considera la colisión elástica frontal (1 dimensión) de una partícula de masa m_1 que incide con velocidad v_1 sobre otra partícula de masa m_2 en reposo $v_2 = 0$



1. Demuestra que las velocidades después de la colisión para ambas partículas: v_1' y v_2', están dadas por:

$$v_1' = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1, \qquad v_2' = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_1, \tag{8}$$

donde $\gamma = m_1/m_2$. Analiza los casos $\gamma \ll 1$, $\gamma \gg 1$ y $\gamma = 0$.

2. Si definimos los coeficientes de reflexión: $R = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2$ y de transmisión: $T = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right)^2$. Demuestra que la energía cinética de ambas partículas después de la colisión se pueden escribir como:

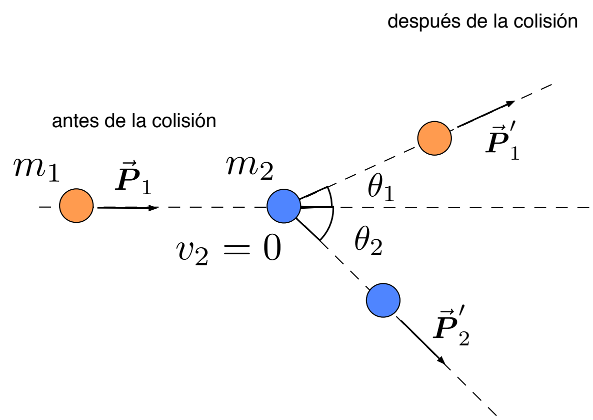
$$K_1' = R\,K_1, \quad K_2' = T\,K_1 \tag{9}$$

donde $K_1 = m_1 v_1^2/2$ y además se tiene que: $R + T = 1$

3. Considera ahora el caso más general donde la partícula de masa m_2 no esta reposo sino que tiene velocidad inicial v_2. Para determinar las velocidades finales v_1' y v_2' se puede emplear el resultado de la ecuación (8), para ello considera la colisión en el marco de referencia donde la partícula de masa m_2 esta en reposo. Demuestra entonces que las velocidades después de la colisión de ambas partículas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1 + \frac{2}{\gamma + 1} v_2 \\ v_2' &= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_1 + \frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} v_2 \end{aligned} \tag{10}$$

En una colisión elástica en dos dimensiones, donde nuevamente consideramos $v_2 = 0$, es posible que ambas partículas salen disparadas con cierto ángulo, ver figura.



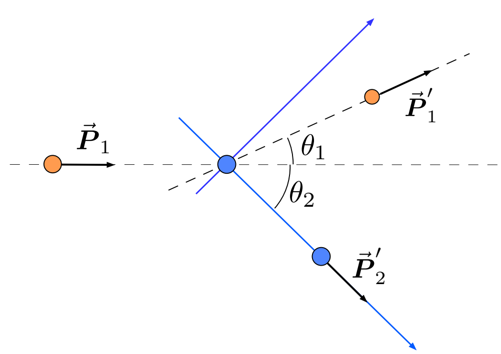
1. Demuestra que después de la colisión se satisface la siguiente relación entre los momentos de las partículas después de la colisión:

$$\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_2} \left(p_2'\right)^2 \tag{11}$$

2. Demuestra que las velocidades de las partículas después de la colisión se puede escribir como:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} \sin^2\theta_2} \\ v_2' &= v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cos\theta_2 \\ \cot\left(\theta_1 + \theta_2\right) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cot\theta_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Sugerencia: puedes analizar la colisión respecto de los eje perpendiculares, donde uno de ellos coincide con la dirección de la partícula de masa m_2 después de la colisión, estos ejes están marcado en azul en la siguiente figura.



Problema 31, Ejercicios ecuaciones diferenciales.

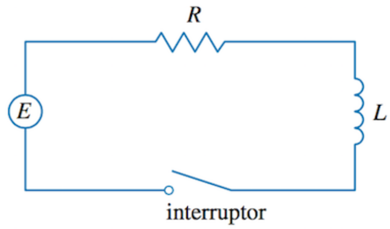
Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas:

1. $\dfrac{dy}{dx} + y = x, \qquad y\left(0\right) = 4$

2. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$

3. Demuestra que para el circuito RL, con una fuente de voltaje oscilante $E(t)$, se satisface la ecuación:

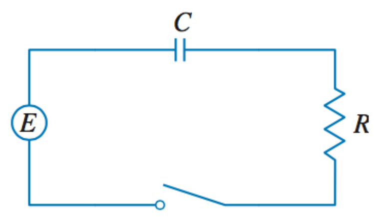
$$L\frac{dI}{dt} + R\,I(t) = E(t) \tag{13}$$



Si $E(t) = V_0 \sin(\omega t)$ y $I(0) = I_0$, determina la expresión de corriente en el circuito $I(t)$.

4. Demuestra que para el circuito RC, con una fuente de voltaje oscilante $E(t)$, se satisface la ecuación:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{14}$$



Si $R = 2\,\Omega$, $C = 0.01\,\mathrm{F}$, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 10\sin(60t)$ (en unidades adecuadas), determina la carga y la corriente en el tiempo t.

5. Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, muestre que y satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t} \tag{15}$$

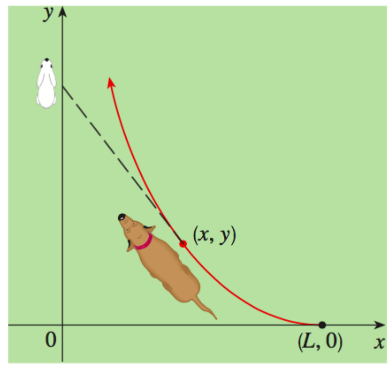
Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

6. Un perro ve un conejo que recorre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema de coordenadas rectangulares (ver figura) suponga:

   i) Que el conejo está en el origen y el perro en el punto $(L, 0)$ en el instante en que el perro ve por primera vez al conejo.

   ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje y, y el perro siempre en linea directa hacia el conejo.

   iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.



a) Demuestra que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{16}$$

b) Determine la solución de la ecuación con las condiciones iniciales: $y = y' = 0$ cuando $x = L$.

Sugerencia: realiza el cambio de variable $z = dy/dx$

c) ¿Alcanza el perro al conejo?

7. Continuación del problema anterior del perro y el conejo.

a) Si el perro corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para hallar el punto donde el perro alcanza al conejo.

b) Suponga que el perro corre a la mitad de la velocidad del conejo. ¿Qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿Cuáles son sus posiciones cuando están más próximos?

Problema 32, Desintegración radiactiva.

La desintegración radiactiva es un proceso estadístico que depende de la inestabilidad de un radioisótopo particular y que para cualquier núcleo dado de una muestra es completamente impredecible. Si hay N núcleos radiactivos en un tiempo t, entonces, el número ΔN que se desintegraría en cualquier intervalo de tiempo Δt será proporcional a N:

$$\Delta N = -\lambda N\,\Delta t \qquad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{17}$$

donde λ es la *constante de desintegración* ($\lambda > 0$). Si $N_0 = N(t = 0)$ es el número de núcleos inicial ($t = 0$) y se define la vida media de una sustancia radioactiva $T_{1/2}$ (a veces denotado simplemente como T) como el tiempo o periodo durante el cual el numero de núcleos radioactivos diminuye a la mitad del numero de núcleos que se tienen originalmente, responde los siguientes problemas:

1. Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración (vida media) $T = 1.34$ días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante $q = 2.7 \times 10^{29}$ núcleos/s. Determinar cómo varía la actividad A de la muestra con el tiempo, la actividad nuclear es el número de núcleos que desaparecen por unidad de tiempo y representa la velocidad de desintegración: $A = \lambda N(t)$

2. Si una sustancia radioactiva A se transforma por desintegración en una sustancia B también radioactiva y λ_A y λ_B son las respectivas constantes de desintegración, entonces se establecen el par de ecuaciones que rigen el decaimiento radioactivo para cada sustancia:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \qquad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \tag{18}$$

Si inicialmente ($t = 0$) se tienen N_{0A} núcleos de la sustancia A y cero núcleos de la sustancia B, determina las soluciones: $N_A\left(t\right)$ y $N_B\left(t\right)$.

Si adicionalmente la sustancia B se desintegra en una sustancia C, el número de núcleos de C aumenta uniformemente hasta que después de un tiempo muy largo (comparado con las vidas medias de A y B) es igual a N_{0A}. Demuestra que el número de núcleos de la sustancia C al tiempo t esta dada por:

$$N_C\left(t\right) = \frac{N_{0A}}{\lambda_B - \lambda_A}\left[\lambda_B\left(1 - e^{-\lambda_A t}\right) - \lambda_A\left(1 - e^{-\lambda_B t}\right)\right] \tag{19}$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x) \tag{20}$$

donde $P(x)$ y $f(x)$ son dos funciones dadas en el problema. El método para resolver esta ecuación es el siguiente:

1.- La solución general de la ecuación (20) esta dada por las suma de dos términos:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{21}$$

donde $y_c(x)$ es solución de la **ecuación homogénea** ($f(x) = 0$):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0 \tag{22}$$

esta ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables (problema 28) y por lo tanto es posible determinar $y_c(x)$, que se puede escribir de manera general, como:

$$y_c(x) = c\,e^{-\int P(x)dx} \tag{23}$$

donde c es una constante de integración.

2.- El segundo término de la solución general (21): $y_p(x)$, corresponde a una solución particular de la ecuación diferencia original (20). Para determinar una solución particular se emplea el **método de variación de parámetros** que consiste en emplear la solución de la ecuación homogénea, ecuación (23), pero donde c ya no es una constante, sino una función $u(x)$ por determinar. Sea entonces: $y_p = u(x)\,e^{-\int P(x)dx}$ la solución particular, sustituyendo en (20) se llega a la siguiente ecuación (verifícalo):

$$e^{-\int P(x)dx}\,\frac{du}{dx} = f(x) \tag{24}$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden en variables separables; la solución se puede escribir como:

$$u(x) = \int e^{\int P(x)dx}\,f(x)\,dx \tag{25}$$

entonces la solución particular esta dada por:

$$y_p = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}\,f(x)\,dx \tag{26}$$

y la solución general de (20) es:

$$y(x) = c\,e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}\,f(x)\,dx \tag{27}$$

la constante de integración c se determina de la condición inicial que se da en el problema: $y_0 = y(x_0)$.

El factor $e^{-\int P(x)dx}$ se le llama **factor integrante**, nota que si multiplicas por este factor la ecuación (20) entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\int P(x)dx}\,y\right] = e^{-\int P(x)dx}\,f(x) \tag{28}$$

esta expresión es una ecuación diferencial en variables separables y cuyo resultado es nuevamente (27), simplemente es otra manera de abordar el problema. No es importante recordar las expresiones de las soluciones generales, que son de carácter general, sino entender el método de solución cuya idea es muy sencilla.