Tarea 11

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Entregar antes del domingo 4 de junio 2017.

Problema 39, radiación de cuerpo negro.

La radiación (ondas electromagnéticas) que emite un *cuerpo negro* en equilibrio termodinámico tiene una distribución de frecuencias dada por la distribución de Planck:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{1}$$

donde $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la luz, $k = 1.38\times 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann y $h = 6.63\times 10^{-34}$ J $\cdot$ s la constante de Planck.

Esta cantidad corresponde a la energía por unidad de volumen, para una frecuencia ν dada, de la radiación electromagnética del cuerpo negro cuando se encuentra en equilibrio a la temperatura T. De tal manera la densidad de energía total del cuerpo negro queda determinada por la integral de la expresión (1) sobre todas las frecuencias posibles:

$$\frac{U}{V} = u = \int_0^\infty \rho(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi}{c^3}h\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{4}{c}\sigma T^4 = u(T) \tag{2}$$

donde $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5.67\times 10^{-8}\,\mathrm{Js^{-1}m^{-2}K^{-4}}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y se conoce el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{3}$$

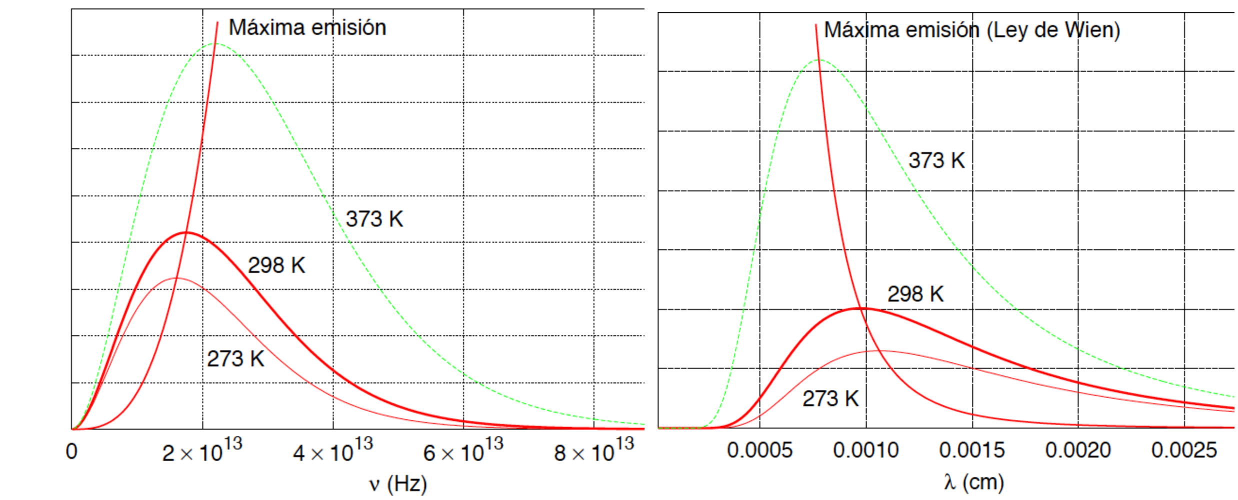
Así, la densidad de energía de la radiación de cuerpo negro solo depende de la temperatura T. La densidad de energía en un intervalo de frecuencias ν y $\nu + d\nu$ esta dada por la expresión:

$$\rho(\nu, T)\, d\nu \tag{4}$$

a) Si la longitud de onda esta relacionada con la frecuencia: $\lambda = c/\nu$, realiza un cambio de variable en la ecuación (4) para obtener su expresión en términos de la longitud de onda:

$$\rho'(\lambda, T)\, d\lambda \tag{5}$$

En las siguientes figuras se muestra la curva de distribución de Planck para tres diferentes temperaturas. En la figura de la izquierda esta representada la distribución de Planck en función de la frecuencia ν y en la figura de la derecha en función de la longitud de onda λ. De acuerdo al ejercicio anterior, estas curvas no son del todo iguales.



De acuerdo a las curvas de distribución de Planck, para cada temperatura T existe un valor máximo de la longitud de onda λ_{max} (o de la frecuencia ν_{max}) a la cual emite un cuerpo con esa temperatura. A la dependencia de λ_{max} con la temperatura se le conoce como ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{max} T = b \tag{6}$$

donde $b = 2.9 \times 10^{-3}$ mK.

b) A partir de la expresión que encontraste en el inciso anterior: $\rho'(\lambda, T)$, demuestra la ley de desplazamiento de Wien (6).

Para ello necesitarás resolver la siguiente ecuación:

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \tag{7}$$

Más adelante, se describe un método para calcular de manera aproximada la raíz de una ecuación trascendental.

c) Obtén la expresión de la ley de Wien, en términos de la longitud de onda:

$$\nu_{max} = aT \tag{8}$$

calcula el valor de la constante a.

Ejercicios

1. La presión dentro del Sol se estima que es de aproximadamente 400 millones de atmósferas. Estima la temperatura del Sol, considerando la presión del Sol se debe únicamente como resultado de la radiación.
2. La masa del Sol se estima que es del orden de 2×10^{30} kg, su radio de 7×10^{8} m y su temperatura de 5700 K.
   a) Calcula la masa que el sol pierde por segundo por radiación.
   b) Calcula el tiempo necesario para que la masa del Sol disminuya el 1 %
3. Estima la temperatura de la Tierra suponiendo que se encuentra en equilibrio con la radiación del Sol.

Formulas útiles:
La presión de radiación electromagnética es un tercio de su densidad de energía ($u = U/V$):

$$p_r = \frac{u}{3} \tag{9}$$

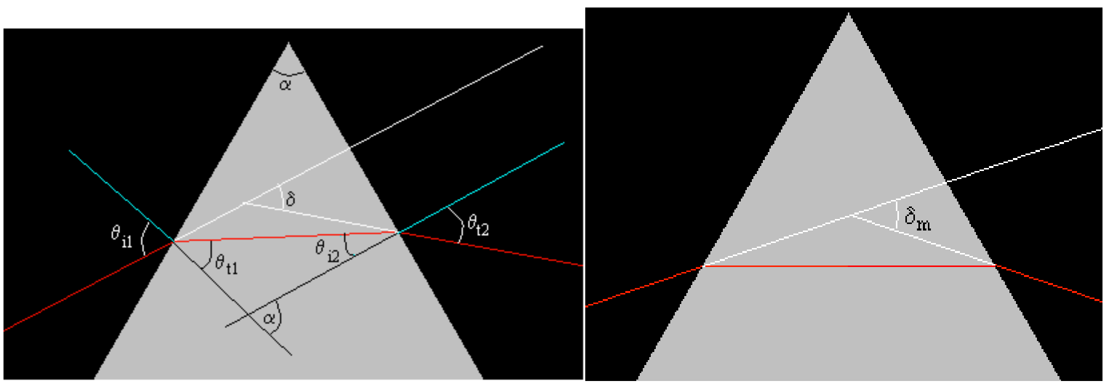
La potencia total radiada por unidad de área (P/A) de un cuerpo negro que esta a temperatura T esta dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \tag{10}$$

Problema 40, varios.

1. En dirección del eje z existe un campo magnético que varía con la altura según la ecuación $B = B_0(1-\alpha z)$, siendo α un número positivo y z es la altura contada desde el suelo. Un anillo metálico de masa m, diámetro d y resistencia R se deja en libertad desde una altura muy grande y se observa que a partir de cierta altura h desciende con movimiento uniforme, calcular la velocidad constante del anillo. Se supone que en su caída el plano del anillo siempre es paralelo al plano xy.

2. Prisma



En rojo se muestra un rayo que es refractado por el prima, el ángulo δ corresponde al ángulo de refracción.

   a) Demuestra la siguiente relación:

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\delta+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = n\frac{\cos\left(\dfrac{\theta_{t1}-\theta_{i2}}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_{i1}-\theta_{t2}}{2}\right)} \tag{11}$$

   Hint: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

   b) Demuestra que $\cos\left(\dfrac{\theta_{t1}-\theta_{i2}}{2}\right)$ nunca es menor a $\cos\left(\dfrac{\theta_{i1}-\theta_{t2}}{2}\right)$ y por lo tanto la condición de desviación mínima: $\delta = \delta_{min}$, es cuando $\theta_{i1} = \theta_{t2}$. En este caso el rayo atraviesa el prisma horizontalmente, tal como se muestra en la figura y por lo tanto se obtiene la siguiente relación:

$$n = \frac{\sin\left(\dfrac{\delta_{min}+\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha/2)} \tag{12}$$

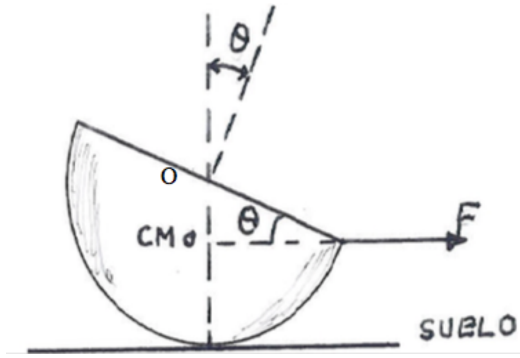
3. (a) Un prisma tiene un índice de refracción 1.5 y un ángulo de 60°, determina la desviación de un rayo incidente a un ángulo de 40°, halar la desviación mínima y el correspondiente ángulo de incidencia. (b) La desviación mínima de un prisma es 30° y el ángulo del prisma es 50°, hallar el índice de refracción y el ángulo de incidencia para la desviación mínima.

4. En la superficie de Venus la temperatura media es 460º C y la presión es de 92 atmósferas terrestres. La atmósfera es casi toda CO_2 y la temperatura permanece constante. Suponiendo que toda la atmósfera de Venus está a la misma temperatura.

a) ¿Cuál es la presión atmosférica un kilometro arriba de la superficie de Venus? Exprese su respuesta en atmósferas de Venus y en atmósferas de la Tierra.

b) ¿Cuál es la rapidez eficaz de las moléculas de CO_2 en la superficie de Venus y a una altura de 1.00 km?

5. Una semiesfera de densidad volumétrica ρ y radio R, es arrastrada deslizando con velocidad constante por un suelo horizontal por acción de la fuerza F La posición de la semiesfera queda determinada por el ángulo θ. Determinar: (a) El centro de masas de la semiesfera (b) El ángulo θ si el coeficiente de rozamiento entre la esfera y el suelo es $\mu = 0.8$



6. Un cilindro macizo de radio R, desliza por un plano horizontal AO, con velocidad de su centro de masa constante v_i En O existe un plano inclinado OB que forma un ángulo α con la horizontal (figura 1). Cuál es el valor máximo v_i del cilindro para que pase de un plano a otro sin perder el contacto con el suelo.

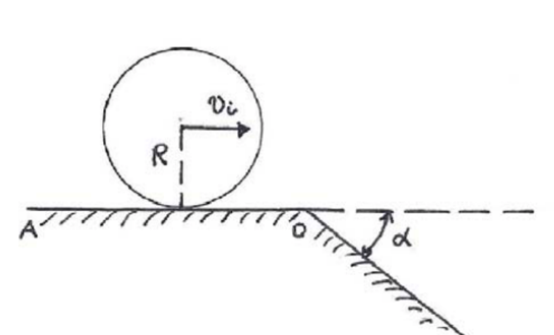


figura 1

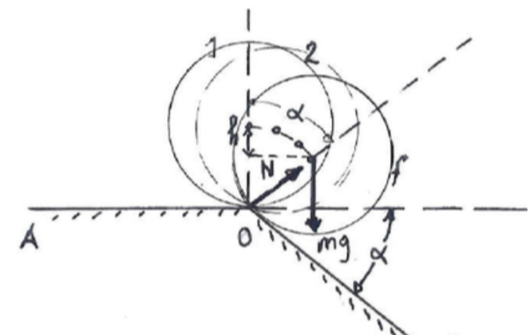
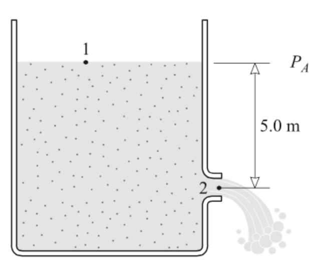


figura 2

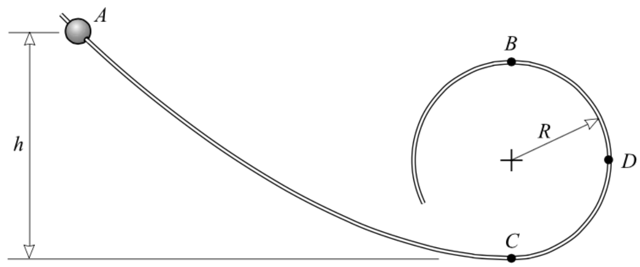
Hint: (1) De acuerdo a la figura 2, cuando el cilindro llega al plano inclinado gira respecto O y el CM describe un arco de ángulo α; (2) conservación de la energía y análisis de fuerzas.

7. Suponiendo que la energía en reposo del electrón se debe a su energía electrostática: (a) calcula el radio del electrón si su carga es $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C y está distribuida de forma uniforme en todo su volumen; (b) si su carga se distribuye de forma homogénea por su superficie.

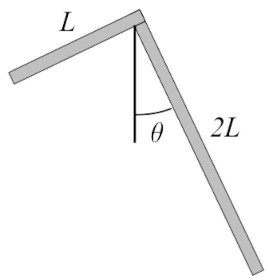
8. Un tanque abierto en su parte superior tiene una abertura de 3.0 cm de diámetro que se encuentra a 5.0 m por debajo del nivel del agua contenida en el tanque. ¿Qué volumen de líquido saldrá por minuto a través de dicha abertura?



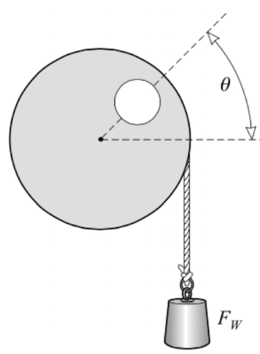
9. Como se muestra en la figura, una cuenta de 20 g resbala desde el reposo en el punto A a lo largo de un alambre sin fricción. Si h tiene 25 cm y R tiene 5.0 cm, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que el alambre debe ejercer sobre la cuenta en a) el punto B y b) el punto D?



10. La escuadra que se muestra en la figura cuelga en reposo de una clavija. Está fabricada con una hoja de metal uniforme. Uno de los brazos tiene una longitud de L cm y el otro tiene $2L$ cm de longitud. Calcule el ángulo θ que forma cuando está colgada.



11. El disco sólido uniforme de radio b puede girar libremente alrededor del eje que pasa por su centro. A través del disco se perfora un agujero de diámetro D cuyo centro está a una distancia r del eje. El peso del material extraído es F_{Wh}. Calcule el peso F_W de un objeto que cuelga de un hilo enrollado en el disco para que éste se mantenga en equilibrio en la posición que se muestra en la figura.



Problema 41, Propulsor magnetohidrodinámico.

Un propulsor magnetohidrodinámico elemental (MHD), consiste en una caja hueca de largo L, con dos caras abiertas de ancho a y altura h, que se sumerge en un fluido con conductividad eléctrica σ (la conductividad se define como el inverso de la resistividad). La cara inferior y la superior son metálicas y están conectadas a una fuente de corriente continua con diferencia de potencial V, que establece una corriente eléctrica que se supondrá perpendicular a las placas. Las caras de dimensiones L y h, son dos imanes rectangulares no conductores, de modo que dentro de la caja se establece un campo magnético de módulo B, que en forma aproximada vamos a suponer uniforme, dirigido como se indica en la figura 1.

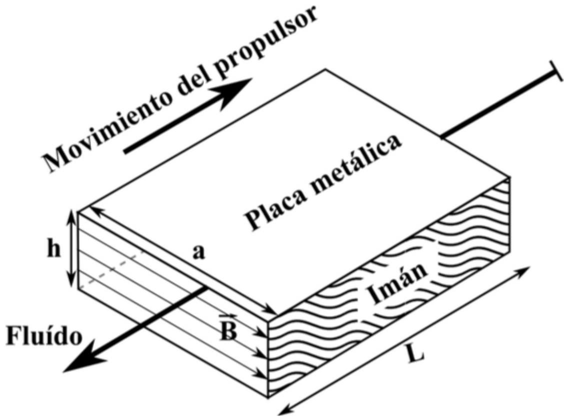


Fig. 1 - Vista en perspectiva del propulsor MHD.

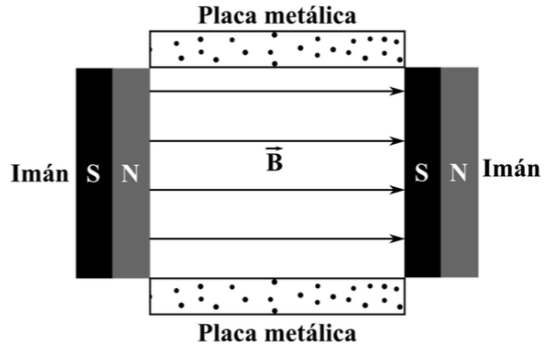


Fig. 2 - Vista trasera del propulsor MHD.

1. Para que el propulsor avance en la dirección del movimiento indicada en la figura 1, determine si la placa de arriba es positiva o negativa, justificando su respuesta. Escriba la expresión para la fuerza aplicada por el propulsor MHD sobre el fluido.

2. Para el par de imanes considerados, la intensidad del campo magnético depende de la distancia a, según $B\left(a\right) = 0.42 - 14\,\mathrm{a}$, donde a está dado en metros y B en Tesla. Esta relación lineal es válida para distancias comprendidas entre 0.005 m y 0.025 m. Escriba la expresión para la distancia a, entre los imanes, a la cual es máxima la fuerza generada por el propulsor MHD y determine su valor. Determine el valor del campo magnético para dicha distancia.

3. Se construye un propulsor MHD para funcionar en agua salada, con el ancho calculado en la parte anterior, largo $L = 12\,\mathrm{cm}$ y altura $h = 2\,\mathrm{cm}$. La fuente es una batería de $V_0 = 9.0\,\mathrm{V}$ y resistencia interna $r_i = 1.1\,\Omega$. La conductividad eléctrica del agua salada es $\sigma = 4.8\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Escriba la expresión para la intensidad de corriente y determine su valor. Determine la fuerza generada por el propulsor MHD.

4. Se diseña un pequeño bote de juguete que es impulsado mediante el propulsor MHD de la parte anterior. El bote es una caja de 10 cm de ancho, 6 cm de altura y tiene la misma longitud que el propulsor (Fig. 3). La masa total del bote incluyendo la batería y el propulsor es $m = 215\,\mathrm{g}$. Al moverse, el agua se opone al movimiento del bote con una fuerza de arrastre que es de la forma, $F_a = \frac{1}{2}\rho C A v^2$, donde $\rho = 1.02 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ es la densidad del agua salada, C es el coeficiente de arrastre, el cual depende de la forma, y que en este caso es $C = 1.2$, A es el área frontal en contacto con el agua y v es la velocidad relativa entre el bote y el agua. Escriba la expresión para la velocidad terminal (aceleración nula) con la que avanza el bote y determine su valor.

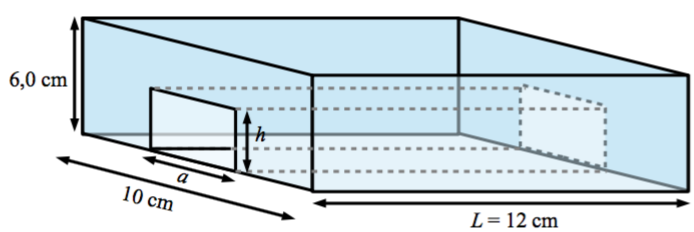


Fig. 3 - Dimensiones del bote de juguete

Problema 42, Ciclotrón.

El ciclotrón fue inventado por Ernest O. Lawrence y M. S. Livingston en Berkeley (California, EE. UU.), en el año 1932. Consiste en un acelerador de partículas cargadas, las cuales debido a la fuerza de Lorentz y a un potencial acelerador pueden adquirir energía suficiente como para impactar sobre un blanco y producir una reacción nuclear. Un esquema simplificado, se muestra en la figura 1 (dibujo original de la patente).

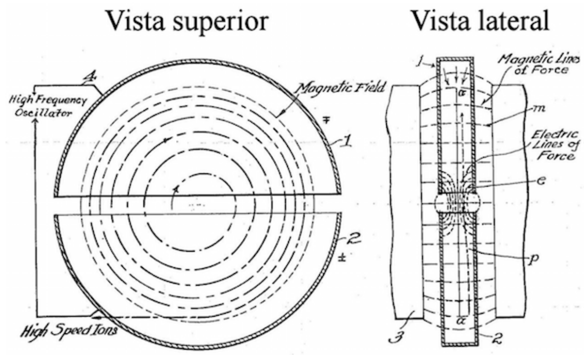


fig 1. Detalle de las placas del Ciclotrón. Los electroimanes con forma de letras "D" están indicados con 1 y 2.

Básicamente el ciclotrón consiste en dos regiones de campo magnético uniforme en forma de letra "D" entre las cuales se establece una diferencia de potencial, cuya polaridad se invierte periódicamente cuando la partícula pasa de una "D" a otra. Para este problema considere que no se alcanzan velocidades relativistas.

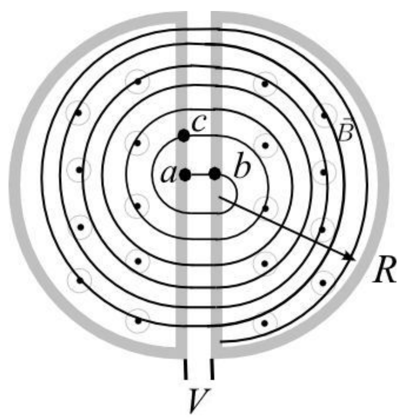


fig. 2 Trayectoria de una partícula en el ciclotrón.

a) Considere que una partícula de carga q y masa m parte del reposo en el punto a y es acelerada por la diferencia de potencial V. Determine la velocidad v_b con la que llega al punto b y el radio de la trayectoria que describe dentro de la "D", en donde existe un campo magnético de intensidad uniforme $\vec{B}$.

b) Determine la frecuencia f con que debe oscilar la polaridad del potencial V para que la partícula referida en la pregunta (**a**), sea acelerada cada vez que pasa por la región entre las "D" (frecuencia de ciclotrón).

c) Determine la energía cinética de salida de la partícula referida en la pregunta (**a**), si el radio del ciclotrón es R.

Se ha investigado la opción de introducir en el punto a del ciclotrón una sustancia radiactiva como el Cm (curio), que emite partículas α ($^4_2$He) con una velocidad inicial v_α, de forma que sea posible aumentar la energía cinética de salida de las partículas α, sin necesidad de aumentar el radio del ciclotrón.

Considerando la ecuación de desintegración radiactiva:

$$^{240}_{96}\mathrm{Cm} \;\rightarrow\; ^{4}_{2}\mathrm{He} \;+\; ^{236}_{94}\mathrm{Pu} \tag{13}$$

d) Determine la energía cinética de la partícula α y del núcleo de plutonio en retroceso. Considere el núcleo de Cm en reposo.

e) Determine la velocidad v_α de la partícula α emitida.

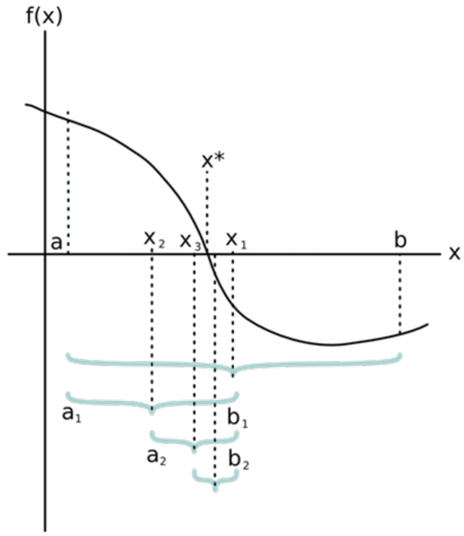
Considere un ciclotrón de radio R de 0,5 m que opera con un campo magnético uniforme $B = 2$ T y un potencial acelerador $V=$ 500 kV. Teniendo en cuenta que ahora la partícula en el punto a tiene una velocidad inicial v_α, calcule la velocidad v_1 con que llega al punto c y el radio r_1 de la trayectoria dentro de la "D" izquierda (fig. 2).

f) Obtenga la expresión para la velocidad v_n y el radio r_n de la trayectoria después de que la partícula haya realizado n vueltas en torno al centro del ciclotrón.

---

velocidad de la luz en el vacío	c	$299,792,458$ m/s
permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ NA^{-2}
permisividad del vacío	ϵ_0	8.8×10^{-12} F/m
constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J $\cdot$ s
carga del electrón	e	-1.6×10^{-19} C
masa electrón	m_e	9.1×10^{-31} kg
masa protón	m_p	1.6×10^{-27} kg
unidad masa atómica	u	1.661×10^{-27} kg $= 931.4$ MeV/c^2
numero atómico del oro (Au)	$Z_{Au} = 79$	
masa del Polonio	$M_{Po} = 209.982857$ u	
masa del Plomo	$M_{Pb} = 205.974449$ u	
masa del Helio	$M_{He} = 4.002603$ u	
masa del Curio	$M_{Cm} = 240.05552$ u	
masa del Plutonio	$M_{Pu} = 236.046060$ u	
masa partícula alfa	$M_\alpha = 4.002603$ u	

Método de bisección para encontrar raíces.



Sea la ecuación:

$$f(x) = 0 \tag{14}$$

a la cual queremos encontrar su raíz (o raíces). Supongamos entonces que x^* es la raíz exacta de la ecuación (14). A continuación se presenta el método de bisección para obtener de manera aproximada (con una precisión ε) el valor de x^*.

1) Se escoge dos valores diferentes a y b que van a definir un intervalo $[a, b]$. Entonces se evalúa la función en ambos valores y calculamos su producto $f(a) \cdot f(b)$ para verificar lo siguiente:

a) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, hay una raíz en el intervalo $[a, b]$ (en general puede haber un número impar de raíces).

b) Si $f(a) \cdot f(b) > 0$, entonces hay que escoger otro par de valores hasta que $f(a) \cdot f(b) < 0$

en la practica solo necesitamos verificar el cambio de signo de la función en ambos valores a y b para asegurar que hay una raíz en el intervalo $[a, b]$

2) Como primer aproximación para el valor de la raíz, escogemos el punto medio definido por el intervalo $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x^* \approx x_1 \tag{15}$$

Si $f(x_1) = 0$, entonces x_1 es la raíz exacta. Pero en general esto no sucederá por lo que se define otro nuevo intervalo a partir del valor x_1.

3) El valor x_1 divide al intervalo inicial $[a, b]$ en dos nuevos intervalos: $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$. Entonces hay que verificar en cual de los dos intervalos se encuentra la raíz:

a) Si $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[a, x_1]$

b) Si $f(a) \cdot f(x_1) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el intervalo: $[x_1, b]$

Definimos entonces el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ aquel donde se verifique que se encuentra la raíz:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} \text{caso a:} & a_1 = a, \ b_1 = x_1 \\ \text{caso b:} & a_1 = x_1, \ b_1 = b \end{cases} \tag{16}$$

4) El siguiente valor aproximado de la raíz es el punto medio definido por el nuevo intervalo $[a_1,\, b_1]$:

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad x^* \approx x_2 \tag{17}$$

Repitiendo el paso 3 y 4 sucesivamente, el numero de veces que se desee, se obtendrá un mejor valor aproximado de la raíz. Así, el valor aproximado $j{+}1$ ésima de la raíz queda determinado por el valor:

$$x_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}, \qquad x^* \approx x_{j+1} \tag{18}$$

Precisión:
Si requerimos que la precisión entre valor real de la raíz x^* y el valor aproximado x_j sea menor a un valor dado ε, en necesario realizar al menos un numero j de iteraciones (repeticiones) determinado por la siguiente expresión:

$$\frac{|b-a|}{2^{j+1}} < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad j > \frac{\ln\left[\dfrac{|b-a|}{\varepsilon}\right]}{\ln(2)} - 1 \tag{19}$$

La precisión ε depende del intervalo inicial $[a,\, b]$.

Ejercicios:

1) La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por raíz a $x^* = 0.61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$ realiza seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿verifica la precisión obtenida con las seis iteraciones? ¿cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor a 10^{-4}?

2) Aplica el método de bisección para determinar la raíz cúbica de 17 con un error mínimo de 0.125.

3) Determina de manera aproximada la raíz de la ecuación (problema 1, radiación de cuerpo negro):

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \tag{20}$$

Realiza cinco iteraciones y verifica la precisión de tu aproximación de acuerdo al intervalo inicial que escogiste.