P1. En la noria del parque de atracciones.

Un buen día soleado, Pedro y Ana se divierten en el parque de atracciones. Montados en la noria, a Pedro se le plantean muchas cuestiones de Física, como las siguientes.

La noria tiene un radio $R = 10\ \text{m}$, y el motor que la acciona tiene una potencia $P = 2\ \text{kW}$. Se desprecian todos los rozamientos.

a) ¿Cuál es la masa móvil, *M*, de la noria, suponiendo que toda ella se encuentra en la periferia, si tarda un tiempo $t_1 = 10\ \text{s}$ en adquirir una velocidad angular $\omega_1 = 0{,}2\ \text{rad/s}$?

b) Cuando Pedro pasa por la posición más alta, se le cae una moneda del bolsillo. ¿Qué tiempo, t_2, tardará en llegar al suelo? ¿A qué distancia, *d*, cae, medida desde la vertical del punto más alto?

c) ¿Qué velocidad angular, ω_2, debería tener la noria para que Ana se sintiera ingrávida, y en qué posición le ocurriría esto?

d) Describe el movimiento de Ana visto desde la cabina de Pedro, diametralmente opuesta a la suya. ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en función del tiempo? ¿Cómo es el movimiento de Pedro respecto a Ana?

e) En un momento en que el motor esta desconectado y la noria girando a una velocidad $\omega_3 = 0{,}1\ \text{rad/s}$, Pedro sube a la noria en marcha dando un pequeño salto lateral desde el andén. Si pesa 50 kg, ¿cuál es la variación de velocidad angular de la noria debida al salto?

Solución

a) El trabajo necesario para que la noria, partiendo del reposo, alcance una velocidad angular de giro ω_1 es igual a la diferencia de energía cinética, la final menos la inicial que es cero.

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 - 0$$

Donde I_0 es el momento de inercia de la noria respectoa su eje de rotación. Si, tal como indica el enunciado, toda la masa de la noria puede considerarse distribuida en su periferia, $I_0 = MR^2$. Por lo tanto

$$W = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2$$

Por otra parte, si t_1 es el tiempo que transcurre hasta que la noria adquiera la velocidad angular ω_1, la potencia media que generada por el motor será $P = W / t_1$, luego

$$P = \frac{1}{2t_1} M R^2 \omega_1^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2Pt_1}{R^2 \omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 10000 \text{ kg}}$$

b) La velocidad de la moneda en el instante de "caer", es horizontal y su módulo es $v_m = \omega_1 R$, como se indica en la figura 1. A partir de ese instante, la moneda describe una trayectoria parabólica hasta llegar al suelo. Como se deduce en el estudio cinemático del "tiro" horizontal,

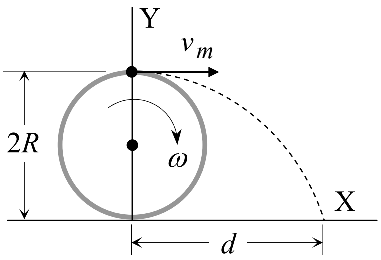


Fig. 2

$$y = 2R - \frac{1}{2} g t^2$$

El tiempo, t_2, que tardará la moneda hasta llegar al suelo ($y = 0$), es

$$t_2 = \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}02 \text{ s}}$$

La distancia, *d*, del punto en el que la moneda toca el suelo, es

$$d = v_m t_2 = \omega_1 R \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 4{,}04 \text{ m}}$$

c) Ana está describiendo una trayectoria circular con una velocidad angular constante. Se sentiría ingrávida si en el punto más alto, su aceleración centrípeta fuese igual a la de la gravedad, es decir, su módulo fuese

$$R\omega_2^2 = g \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = 0{,}99 \text{ rad/s}}$$

d) El enunciado de este apartado pide hacer una descripción del movimiento de Ana en un sistema de referencia ligado a Pedro. Pues bien, consideraremos dos sistemas de referencia, uno de ellos, el OXY´Z, con origen en el centro O de la noria; el otro, O´X´Y´Z, en la cabina en la que se encuentra Pedro, ambos representados simbólicamente en la figura 2. El origen O´ de este sistema se mueve en una trayectoria circular de radio *R*, pero supondremos que las direcciones de sus ejes son fijas.

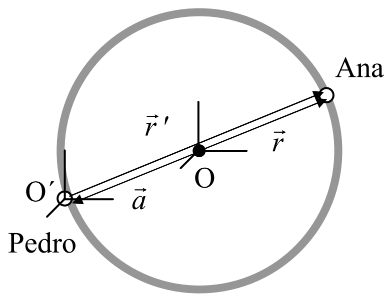


Fig. 2

Desde ambos sistemas, el movimiento de Ana, situada en una cabina diametralmente opuesta a la de Pedro, se describe mediante los radiovectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ respectivamente. Ambos vectores están relacionados por

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$$

Como nos interesa el movimiento de Ana respecto a Pedro

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a} \qquad (1)$$

Si llamamos $\vec{u}_r$ al vector unitario en la dirección de $\vec{r}$, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{a}$ expresados en función de su módulo son

$$r = R\vec{u}_r \quad \text{y} \quad a = -R\vec{u}_r$$

Con lo que la expresión (1) es

$$\vec{r}\,' = R\vec{u}_r - (-R\vec{u}_r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}\,' = 2R\vec{u}_r}$$

Lo que significa que Ana, respecto a Pedro, describe una trayectoria circular de radio 2*R*. La velocidad angular de la noria ω_1, es la misma con la que Pedro ve girar a Ana, ésta ve girar a Pedro, ya que cada uno de ellos ve que el otro da una vuelta completa en un tiempo $T_1 = 2\pi/\omega_1$, que es el mismo que tarda la noria en dar una vuelta. Así pues, la velocidad y aceleración de Ana respecto a Pedro son

$$\boxed{\begin{aligned} v_{Ana} &= \omega_1\, 2R \\ a_{Ana} &= \omega_1^2\, 2R \end{aligned}} \qquad (2)$$

En cuanto a la descripción del movimiento de Pedro desde el punto de vista de Ana, el razonamiento es idéntico y el resultado es que Ana ve a Pedro moviéndose en una trayectoria circular de radio 2*R* con velocidad y aceleración iguales a (2), pero con direcciones opuestas.

e) En este proceso, el momento angular del sistema Noria-Pedro se conserva. Por lo tanto el momento angular inicial, L_i, justo antes de subir a la noria, es igual al final, L_f cuando Pedrito ya ha entrado en la cabina. Por otra parte, dichos momentos angulares son

$$L_i = I_0\, \omega_1$$
$$L_f = I_0'\, \omega_3$$

Donde I_0 e I_0' son los momentos de inercia de la noria en los instantes señalados. Sus valores son

$$I_0 = M R^2$$
$$I_0' = (M + m) R^2$$

Siendo *m* la masa de Pedro. Por tanto

$$M R^2\, \omega_1 = (M + m) R^2\, \omega_3 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{M}{M + m}\omega_1$$

La variación de la velocidad angular de la noria es

$$\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = -\frac{m}{M + m}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\omega = -4{,}97 \times 10^{-4}\ \text{rad/s}}$$

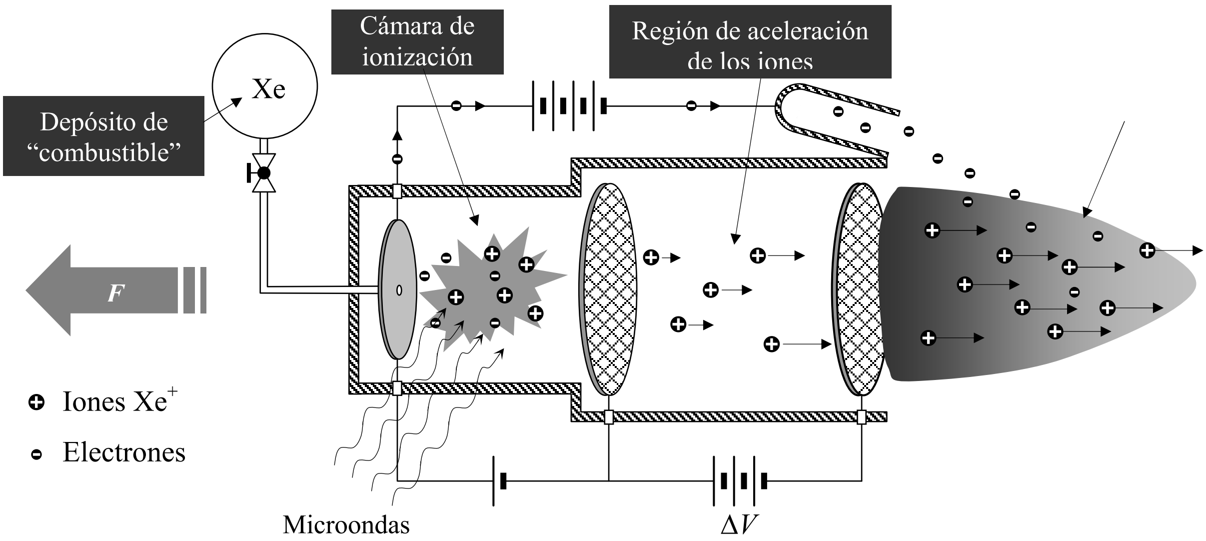
P2. Propulsión iónica.

Introducción.

La nave SMART-1, de la Agencia Espacial Europea, entró en la zona de predominio de la gravedad lunar el 15 de Noviembre de 2004. Catorce meses antes fue colocada en órbita terrestre por un lanzador convencional Ariane-5, y desde entonces ha viajado hacia la Luna impulsada por su motor iónico. Actualmente, este mismo motor la está frenando lentamente para situarla en una órbita lunar baja, en la que desarrollará su misión científica. Durante todo ese tiempo (cerca de año y medio) el motor iónico ha funcionado de forma casi continua, aunque con un empuje muy débil.

La inmensa ventaja de este sistema de propulsión es que puede mantenerse durante un tiempo muy largo y, a igualdad de propelente gastado, se alcanza una velocidad final mucho más elevada que con un motor cohete tradicional, de forma que su rendimiento es unas diez veces superior. El secreto radica en que la velocidad de expulsión de los iones es muy superior a la de los gases de combustión de un motor cohete, que no suele pasar de los 3 km/s (con un tiempo de encendido de tan solo unos 10 minutos). Además la energía eléctrica necesaria para el funcionamiento de un motor iónico se extrae de la luz solar mediante paneles fotovoltaicos.

El principio de funcionamiento del motor iónico es sencillo: átomos neutros de gas Xenón entran a una primera cámara donde son ionizados mediante un haz de microondas que arrancan un electrón a cada átomo. Los iones Xe+ son conducidos mediante un campo eléctrico débil a otra cámara, donde un intenso campo eléctrico los acelera hasta una alta velocidad y los expulsa al espacio exterior. Para crear este campo, se establece una diferencia de potencial entre dos rejillas, a través de las cuales pasan los iones. La nave debe permanecer eléctricamente neutra, por lo que un circuito capta los electrones producidos en la ionización y, mediante un cátodo hueco, los expulsa también al espacio, donde se recombinan con los iones Xe+ formando de nuevo gas neutro y emitiendo un bello resplandor azulado. Los electrones son muchísimo más ligeros que los iones, por lo que su efecto de propulsión es irrelevante.



Problema

La SMART-1 inició su viaje con una carga de unos 80 kg de gas Xenón. A su régimen normal de funcionamiento, el motor iónico tiene un consumo $C = 0{,}10$ kg/día de Xe, lo que le da una autonomía superior a dos años. La diferencia de potencial entre las rejillas aceleradoras es $\Delta V = 1{,}3$ kV.

Calcule:

a) La velocidad de expulsión de los iones, v_e .

b) La fuerza de empuje del motor, F.

c) El número N de iones expulsados por segundo y la intensidad de la corriente iónica expulsada, I.

d) La potencia eléctrica gastada en la ionización del gas, P_i.

e) El consumo de potencia eléctrica del conjunto del motor, P.

Nota:

Exprese primero sus resultados en forma analítica (fórmula final) en términos de las variables dadas (C, ΔV) y los símbolos empleados para los datos facilitados al pie (m, E^+, e).

Una vez obtenidas las expresiones analíticas, calcule sus valores numéricos, expresando los resultados en unidades del Sistema Internacional.

Los resultados analíticos y numéricos puntuarán por separado.

Datos:

Masa media de un átomo de Xenón: $m = 2{,}180 \times 10^{-25}$ kg

Energía de primera ionización: $E^+ = 12{,}13$ eV

Carga del electrón: $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

Solución

a) La energía cinética de cada ión es igual al trabajo efectuado sobre una carga e en la caída de potencial ΔV.

$$E_c = \frac{1}{2} m v_e^{\,2} = e\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e = \left(\frac{2e\Delta V}{m}\right)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e = 4{,}4\times 10^4 \text{ m/s}}$$

b) El empuje es igual al momento lineal de la masa expulsada por segundo

$$\boxed{F = C\,v_e = C\left(\frac{2e\Delta V}{m}\right)^{1/2}}$$

Como la masa expulsada por segundo es $C = 0{,}10$ kg/día $= 1{,}157\times 10^{-6}$ kg/s, el valor del empuje es

$$\boxed{F = 5{,}1\times 10^{-2} \text{ N}}$$

c) Número de átomos de Xe expulsados por segundo:

$$\boxed{N = \frac{C}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 5{,}3\times 10^{-13} \text{ s}^{-1}}$$

Carga expulsada por segundo es la intensidad: $I = N\,e$, por tanto

$$\boxed{I = \frac{C\,e}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0{,}85 \text{ A}}$$

d) En régimen estacionario, el número de iones expulsados por segundo coincide con el número N de átomos ionizados por segundo. La potencia (energía por segundo) consumida en la ionización será

$$P_i = N\,E^+ \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_i = \frac{C\,E^+}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_i = 10 \text{ W}}$$

e) Para estimar la potencia empleada en la aceleración de los iones se puede razonar al menos de dos maneras:

i) Potencia eléctrica directa

$$P_a = \Delta V\, I = \Delta V \frac{C\,e}{m}$$

ii) Energía cinética de los iones expulsados por segundo

$$N\,E_c = N\,e\Delta V = \Delta V\, I$$

La potencia total es entonces

$$P = P_a + P_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{C}{m}\left(e\Delta V + E^+\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 1{,}1\times 10^3 \text{ W}}$$

que es muy similar a los 1,19 kW declarados por la ESA.

P3. Un tapón oscilante.

Suponga que dispone de un matraz como el que se representa en la figura 1, constituido por un bulbo de volumen *V*, lleno de aire a presión atmosférica p_0, y de un cuello de sección *S*, en el que hay un tapón de masa *m* y longitud *L* que puede deslizar sin rozamiento.

En un cierto instante se empuja ligeramente el tapón una distancia *x* (*x* << *L*) y, como consecuencia, el volumen de aire dentro del bulbo experimenta una disminución ΔV y su presión un aumento Δp (figura 2). A continuación el sistema se libera y se observa que el tapón realiza un movimiento oscilatorio armónico.

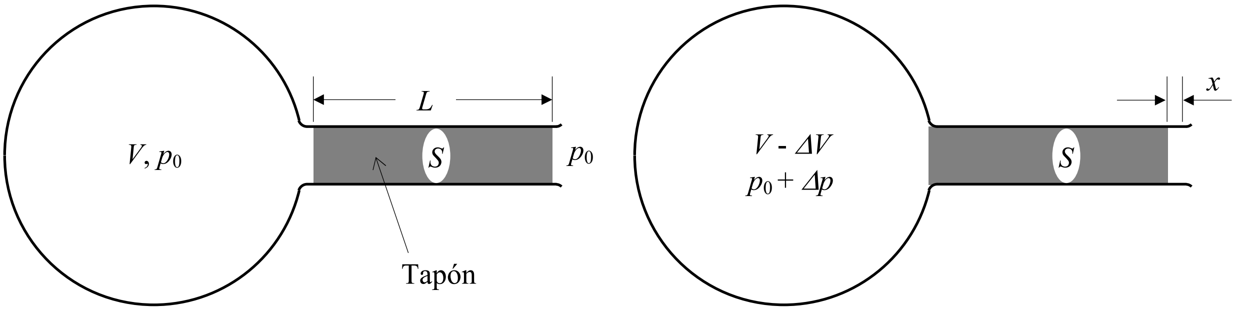


Fig. 1 Fig. 2

Sabiendo que el coeficiente de compresibilidad del aire, κ, que se define como

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

a) Demuestre que la frecuencia angular, ω, de s oscilaciones del tapón es

$$\omega = \sqrt{\frac{S^2}{mV\kappa}}$$

El valor del cociente $\Delta V / \Delta p$, y por tanto el del coeficiente de compresibilidad, depende del tipo de transformación termodinámica que experimenta el gas. En el caso del aire que contiene el bulbo, la transformación puede considerarse adiabática, puesto que es despreciable la cantidad de energía (calor) que intercambia con su entorno en el breve tiempo de cada expansión o compresión.

En las transformaciones adiabáticas, las variaciones de la presión y del volumen están relacionadas en la forma

$$\gamma \Delta V + V \Delta p = 0$$

donde γ es el llamado *índice adiabático*.

b) Determine en este caso la dependencia de κ con la presión y el índice adiabático.

Considere en adelante que la densidad del tapón es igual a la del aire, lo que equivale a decir que es un *tapón de aire*, y que la experiencia se realiza a una temperatura $T = 300$ K.

c) Suponiendo que el aire es un gas perfecto, obtenga la expresión de la frecuencia angular de las oscilaciones, ω', en función de γ, *S*, *T*, *V*, *L*, *R* (constante de los gases) y de *M* (masa molar del aire).

d) Con los siguientes datos numéricos, calcule el valor de la frecuencia, *f*, de las oscilaciones.

Volumen del bulbo:	$V = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$
Sección y longitud del cuello del matraz:	$S = 1{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ $L = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$
Índice adiabático del aire:	$\gamma = 1{,}4$
Constante de los gases:	$R = 8{,}314\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Masa molar del aire:	$M = 2{,}9 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}$

Real Sociedad Española de Física R.S.E.F. XVI Olimpiada Española de Física

Solución

a) Cuando el tapón se introduce una distancia *x,* la disminución del volumen de aire dentro del bulbo es

$$\Delta V = x\,S \qquad (1)$$

La fuerza que actuará sobre el tapón (figura 3) es

$$F = \Delta p S$$

Fig. 3

por lo que su aceleración será

$$a = \frac{1}{m}\Delta p S \qquad (2)$$

Despejando Δp de la expresión del coeficiente de compresibilidad, sustituyendo en (2) y teniendo en cuenta (1)

$$a = -\frac{S^2}{mV\kappa}x$$

que es la aceleración de un movimiento oscilatorio armónico, con frecuencia angular

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{S^2}{mV\kappa}}} \qquad (3)$$

b) De acuerdo con la expresión que proporciona el enunciado,

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{V}{\gamma\, p}$$

por lo que el coeficiente de compresibilidad es

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\kappa = \frac{1}{\gamma\, p}} \qquad (4)$$

c) Si el tapón es de aire, su masa es

$$m = \rho\, SL$$

donde ρ es la densidad del aire.

Teniendo en cuenta la expresión (4), la frecuencia angular (3) de oscilación toma la forma

$$\omega'^2 = \frac{S}{\rho\, LV}\gamma\, p \qquad (5)$$

Por otra parte, si llamamos m_B a la masa de aire del bulbo, la densidad del aire es

$$\rho = \frac{m_B}{V} \qquad (6)$$

y a su vez, si en el bulbo hay *n* moles de aire

$$m_B = nM \qquad (7)$$

en la que *M* es la masa molar del aire. Por la ley de los gases

$$p = \frac{1}{V} nRT \qquad (8)$$

Llevando (6), (7) y (8) a la expresión (5), queda finalmente

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{S\gamma R}{LVM} T}}$$

d) Con los datos numéricos del enunciado se obtiene,

$$\omega' = 4{,}9 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la frecuencia de las oscilaciones es

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f \approx 78 \text{ Hz}}$$

Esta frecuencia es del orden de la del sonido que produce el “descorche” de una botella de características similares a la que se ha descrito.