Tarea avanzada 2

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: 24 febrero 2016

Problemas de matemáticas

Integrales

Resuelva las siguientes integrales

1. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
3. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$
4. $\int \sec^6(x)dx$
5. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$
6. $\int \frac{6z^2-19z+11}{(z^2-2z-3)(z-2)}$
7. $\int \sec^3 x dx$
8. $\int \cos(\ln x)dx$
9. $\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$
10. $\int \sec^2 x \csc^2 x dx$
11. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^{1.3}}$

Serie de Taylor

Si una fución es derivable n veces, decimos que la función es derivable de orden n. Para funciones derivables de orden n podemos definir una serie que aproxime el valor de la función en cierto punto. Para ello se necesita un "pivote.º punto de inicio y las n primeras derivadas de la función evaluadas en el punto de inicio. A esta serie se le conoce como serie de Taylor y tiene la siguiente expresión

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

donde a es el pivote. Es decir, se dice que la serie anterior es la serie de Taylor de orden n alrededor del punto a. Cabe recalcar que la serie de Taylor es simplemente una aproximación a la función, más no es la función en si, esto sólo ocurre cuando $n \to \infty$. El residuo o error en una aproximación por serie de Taylor de orden n estará dada por

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \tag{2}$$

Calcular el polinomio de Taylor de las siguientes funciones de orden n y alrededor de a.

1. $\cos x$ de grado $2n$ alrededor del punto π
2. $\operatorname{sen} x$ de grado $2n$ en $\frac{\pi}{2}$.
3. $\ln x$ de grado n alrededor de 2.
4. Muestre que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$
5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, de grado $2n+1$, en 0.
6. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, de grado n, en 0.

7. Ahora, supongamos que queremos factorizar un polinomio en función de otro. Por ejemplo, el polinomio x^2+3x+1 en función del polinomio $x-1$ se escribiría como $(x-1)^2+5(x-1)+5$. Calcule los siguientes polinomios en función del polinomio pedido.
   a) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$, en función de $x-3$.
   b) $ax^2 + bx^2 + c$, en función de $x+1$.
   c) $5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, en función de $x+5$.

   [Hint: una manera rápida de resolver estos incisos es calcular la serie de Taylor, del mismo grado que el polinomio original, de los polinomios alrededor de un número adecuado ¿Por qué funciona?]

8. El desplazamiento x de una partícula de masa en reposo m_0, que es resultado de una fuerza constante $m_0 g$ sobre el eje de las $x's$, es
$$x = \frac{c^2}{g}\left[\left(1 + \left(g\frac{t}{c}\right)^2\right)^{1/2} - 1\right]$$
   incluyendo los efectos relativistas. Encuentre el desplazamiento x como una serie de potencias en función de t. Compare con el resultado clásico $x = \frac{1}{2}gt^2$

Problemas de física

Problemas cortos

1. ¿Cuál es la velocidad mínima inicial que se le tiene que dar a una piedra de forma que cruce un techo inclinado (ver figura 1)? El techo tiene ancho b, y sus dos alturas distintas son a y c, con $a > c$.

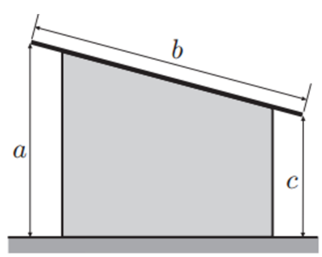

Figura 1:

2. Dos anillos O y O' resbalan libremente sobre dos columnas verticales $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$. Una cuerda incompresible es amarrada al anillo O y esta pasa a través del anillo O' (veáse figura). El otro extremo de la cuerda está fijado al punto A'. En el momento cuándo $\angle AOO' = \alpha$, el anillo O' se mueve hacia abajo con velocidad v. Encuentre la velocidad del anillo O en el mismo instante.

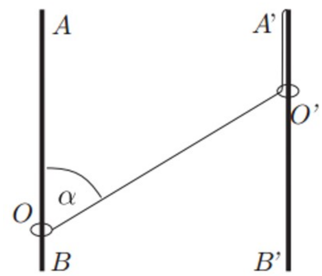

Figura 2:

3. Una estructura articulada consiste en un rombo con lados l, $2l$, $3l$ (Figura 3). El punto A_3 se mueve con velocidad constante v_0. Encuentre las velocidades de los puntos A_1, A_2 y B_2 en el momento cuando todos los ángulos de la estructura son iguales a 90°. Además, encuentre la acelerción del punto $B2$.

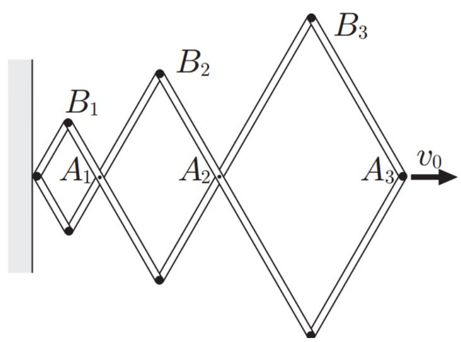

Figura 3:

4. Una placa de vidrio está situada paralela y por encima de un cubo de vidrio de 2 cm de arista, quedando entre ambos una pequeña lámina de aire de espesor uniforme d, tal como indica la figura inferior. Un haz de ondas electromagnéticas, cuyas longitudes de onda están comprendidas entre 400 nm y 1150 nm, inciden perpendicularmente a la lámina y son reflejadas por ambas superficies, la de la lámina y la del cubo produciendo interferencias. Solamente para dos longitudes del haz existe interferencia constructiva y una de ellas es para la longitud 400 μm. ¿Cuál es la segunda longitud de onda? Calcular el incremento de temperatura del cubo para que éste tocase a la placa. El coeficiente lineal de expansión es $\alpha = 8 \times 10^{-6}$ ^oC y el índice de refracción del aire $n = 1$. La distancia entre el cubo y la placa no cambia durante el calentamiento

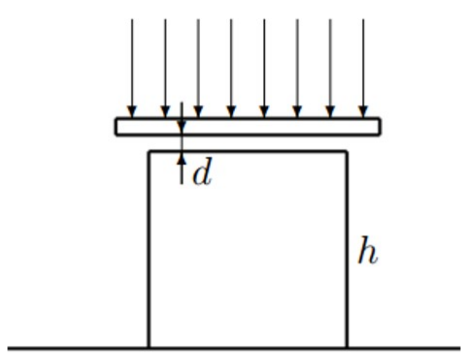

Figura 4:

Problema largo 1

Un número muy grande N de partículas puntuales movibles idénticas ($N >> 1$), cada una con masa m, son acomodadas en una cadena recta con $N+1$ resortes idénticos de masa despreciable, cada uno con constante S. Los resortes están conectados a las partículas y al extremo hay dos partículas adicionales las cuales permanecen inmóviles (ver figura). Esta cadena servirá como un modelo de los modos de vibración de un cristal unidimensional. Cuando la cadena es puesta en movimiento, las vibraciones longitudinales de la cadena pueden ser vistas como una superposición de oscilaciones simples (llamados modos), cada uno con su propia frecuencia modal característica.

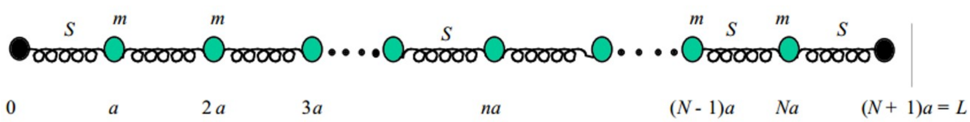

Figura 5:

1. Escriba la ecuación de movimiento de la n-ésima partícula.

2. Para tratar de resolver la ecuación de movimiento, encontrada en la parte anterior, intente la solución

$$X_n(\omega) = A\sin(nka)\cos(\omega t + \alpha),$$

donde $X_n(\omega)$ es el desplazamiento de la n-ésima partícula desde el equilibrio, ω es la frecuencia angular del modo de vibración y A, k y α son constantes; k y ω son el número de onda y la frecuencia del modo respectivamente. Para cada k, habrá una frecuencia ω correspondiente. Encuentre la dependencia de ω en k, los valores permitidos de k, y el máximo valor de ω. La vibración de la cadena es entonces una superposición de todos esos modos de vibración.
Fórmulas útiles:

$$\begin{aligned}(d/dx)\cos\alpha x &= -\alpha\sin\alpha x,\\ (d/dx)\sin\alpha x &= \alpha\cos\alpha x\\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\\ \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\end{aligned}$$

De acuerdo con Plank la energía de un fotón con frecuencia ω es $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Plank dividida por 2π. Einstein hizo un salto de esto asumiendo que dado un modo de vibración de un cristl con frecuencia ω también tenía esta energía. Note que un modo de vibración no es una partícula, pero es una simple configuración de oscilaciones de la cadena entera. Este modo de vibración es análogo al de un fotón y es llamado "fonón". Seguiremos discutiendo las consecuencias de esta idea en el resto del problema. Suponga que un cristal está hecho de un número muy grande ($\sim 10^{23}$) de partículas en una cadena recta.

3. Para una ω (o k) permitida podría no haber fonones; o sólo podría haber uno; o dos; o cualquier número de fonones. Entonces, tiene sentido tratar de calcular la energía promedio $\langle E(\omega)\rangle$ de un modo partícular con frecuencia ω. Sea $P_P(\omega)$ la probabilidad de que hayan p fonones con frecuencia ω. Entonces el promedio requerido es

$$\langle E(\omega)\rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_P(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_P(\omega)}$$

Aunque los fonones son discretos, el hecho de que haya tantos de ellos (y P_p se vuelve muy pequeño para valores grandes de p) nos permite extender la suma hasta $p = \infty$, con un error despreciable. Ahora la probabilidad P_p estará dada por la fórmula de Boltzmann.

$$P_p(\omega) \propto \exp(-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}),$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta de un cristal, la cual se considerará constante. La constante de proporcionalidad no depende de p.
Calcule la energía promedio para fonones con frecuencia ω.
[Tal vez la siguiente fórmula le sea útil: $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = \frac{df}{dx}e^{f(x)}$]

4. Ahora sería bueno calcular la energía *total* E_T de un cristal. En la parte anterior se encontró que la energía promedio $\langle E(\omega)\rangle$ para el modo de vibración ω. Para encontrar E_T debemos multiplicar $\langle E(\omega)\rangle$ por el número de modos de un cristal por unidad de frecuencia ω y después sumar todas las contribuciones para todo el rango de frecuencias desde $\omega = 0$ hasta $\omega_m ax$. Tome un intervalo Δk en el rango de los números de onda. Para grandes valores de N y para Δk mucho más grande que el espaciado entre valores sucesivos (y permitidos) de k. ¿Cuántos modos pueden ser encontrados en un intervalo Δk?.

5. Para hacer uso de los resultados de los incisos (1) y (2), aproxime Δk por $\frac{dk}{d\omega}d\omega$ y replace cualquier suma por una integral sobre ω. (Es más conveniente usar la variable ω en lugar de k en este punto.) Escriba el número total de modos en el cristal en esta aproximación. También obtenga una expresión para E_T, no es necesario evaluarla.

   [La siguiente integral podría ser de ayuda $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

6. La capacidad calorífica molar C_v de un cristal a volumen constante es experimentalmente accesible (puede medirse): $C_V = \frac{dE_T}{dT}$ (T = absolute temperature). Para el cristal en el que hemos trabajado determine la dependecia de C_V con T, para temperaturas muy altas y para temperaturas muy bajas (i.e., la dependencia es cosntante, lineal o una potencia dependiente de algún intervalo de temperatura etc.). Haga una gráfica cualitativa de C_V *vs* T, indicando las tendencias predecidas para temperaturas bajas y altas.