P1. Un calendario fósil.

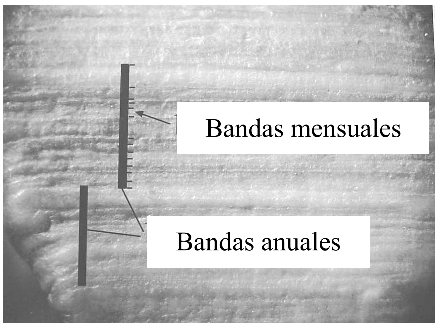


Fig. 1

Algunos corales generan en su esqueleto finas estrías a causa de las interrupciones diarias (día-noche) de su crecimiento. Estas estrías, posiblemente debidas a las variaciones de profundidad del mar por efecto de las mareas, se agrupan en estrechas bandas que corresponden a cada mes lunar. A su vez, las bandas mensuales se agrupan en otras, más anchas, con una periodicidad anual. Pueden apreciarse las citadas bandas en la fotografía de la figura 1, que corresponde a un coral fósil de *Calceola sandalina*, perteneciente al Museo Paleontológico de la Universidad de Zaragoza.

En definitiva, el sistema de estrías y bandas del esqueleto coralino equivale a un "calendario" de la época en la que el coral vivió y, a través de un estudio paleontológico, se deduce que entonces la duración del año era de unos 400 días. Por tanto, la Tierra giraba en torno a su eje con una velocidad angular mayor que en la actualidad. Puede suponerse que el periodo de rotación de la Tierra en torno al Sol no ha variado apreciablemente desde aquella época.

Por otra parte, mediciones muy precisas del tiempo de vuelo de pulsos láser emitidos desde la Tierra y reflejados en espejos colocados en la Luna, en misiones norteamericanas y de la antigua URSS, muestran que la distancia Tierra-Luna aumenta a razón de 3,8 cm/año.

La disminución de la velocidad angular de rotación de la Tierra y, en consecuencia, el paulatino aumento de la distancia entre la Luna y la Tierra, se deben a la enorme disipación de energía que se produce por la fricción del flujo y reflujo de las mareas oceánicas con los fondos marinos.

Dado que la masa de la Tierra es considerablemente mayor que la de la Luna y que la distancia entre sus centros es mucho mayor que cualquiera de sus radios, permite considerar la Luna como una partícula (puntual) de masa M_L que describe una órbita circular de radio R en torno al centro de la Tierra. En la figura 2 se representa a escala el sistema Tierra-Luna.

Fig. 2

Suponga la Tierra esférica, con su eje de rotación perpendicular al plano de la órbita lunar, y que la pequeña velocidad con la que la Luna se aleja de la Tierra ha permanecido constante a lo largo del tiempo. Tenga en cuenta también que la Luna, vista desde la Tierra, presenta siempre la misma cara.

Con los datos que se indican al final del enunciado,

a) Determine la distancia actual entre la Tierra y la Luna, R, en función de la velocidad angular orbital de la Luna, ω, del radio de la Tierra, R_T, y de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g. Calcule ω y R.

b) Calcule las velocidades angulares de la Tierra en torno a su eje en la actualidad, ω_T, y cuando el coral vivía. ω'_T.

c) Determine la distancia entre la Tierra y la Luna, R', en la época en la que vivió el coral, en función de las siguientes magnitudes: R, M_T, M_L, R_T, ω_T, ω'_T y ω. Calcule el valor de R'.

d) Haga una estimación de la "edad" del coral fósil, τ.

Datos:

Masas de la Tierra y de la Luna: $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg ;

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m

Periodo de revolución de la Luna en torno a su eje: $T_L = 2{,}36 \times 10^6$ s

Periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol: $T = 3{,}16 \times 10^7$ s

Día sidéreo: $T_T = 8{,}64 \times 10^4$ s

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Ayudas:

- De acuerdo con el modelo propuesto (Tierra rotatoria con su centro fijo y la Luna como masa puntual) el momento angular total del sistema respecto al centro de la Tierra es igual a la suma de los momentos angulares de los movimientos, de la Luna en torno a la Tierra y el de rotación de la Tierra en torno a su eje. Si el sistema está aislado, tal como se considera al sistema Tierra-Luna en este problema, su momento angular total debe conservarse.

- Para una esfera de masa m y radio a que gira con velocidad angular Ω en torno a un eje que pasa por su centro (figura 3), el módulo de su momento angular respecto a dicho centro es

  $$L_0 = I\,\Omega$$

  donde I es el llamado momento de inercia respecto a dicho eje, cuyo valor es

  $$I = \frac{2}{5} m a^2 .$$

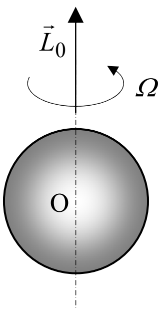


Fig.3

Solución

a) De acuerdo con el modelo que sugiere el enunciado y representado en la figura 2, la ecuación del movimiento de la Luna, considerada como una partícula de masa M_L, que describe una órbita de radio R en torno a la Tierra es,

$$G\frac{M_T M_L}{R^2} = M_L R\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\frac{M_T}{R^3}} \tag{1}$$

Como la aceleración de la gravedad es

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = R_T\sqrt{\frac{g}{R^3}}$$

por lo que

$$\boxed{R = \left(\frac{R_T^2 g}{\omega^2}\right)^{1/3}}$$

Dado que la Luna presenta siempre la misma cara, la velocidad angular de rotación de la Luna debe ser igual a su velocidad angular orbital, es decir

$$\omega = \frac{2\pi}{T_L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2{,}66\times 10^{-6}\ \text{rad/s}}$$

por lo que el valor de R es

$$\boxed{R = 3{,}83\times 10^{8}\ \text{m}}$$

b) La actual velocidad angular de la Tierra en torno a su eje es $\omega_T = 2\pi / T_T$. Como las estrías del coral indican que mientras la Tierra realizaba una revolución en torno al Sol daba 400 vueltas en torno a su eje, el periodo T' de revolución de la Tierra era

$$T' = \frac{3{,}16\times 10^7}{400} = 7{,}90\times 10^4\ \text{s}$$

y, en consecuencia, la velocidad angular de la Tierra cuando vivía el coral era

$$\omega_T' = \frac{2\pi}{T'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_T' = 7{,}95\times 10^{-5}\ \text{rad/s}}$$

c) Considerando la Tierra y la Luna como un sistema aislado, su momento angular se conserva, lo que significa que el momento angular respecto al centro de la Tierra en la actualidad debe ser igual que en la época en la que el coral estaba vivo. Por lo tanto, de acuerdo con el modelo que se propone, (Tierra rotatoria con su centro fijo y Luna masa puntual),

$$I_T\omega_T' + M_L R'^2\omega' = I_T\omega_T + M_L R^2\omega \tag{2}$$

De (1), la velocidad angular orbital de la Luna, en la actualidad y en cuando vivía el coral son respectivamente,

$$\omega = R_T\sqrt{\frac{g}{R^3}}\ , \qquad \omega' = R_T\sqrt{\frac{g}{R'^3}}$$

Por lo que, sustituyendo en (2),

$$I_T\omega_T' + M_L R_T\sqrt{gR'} = I_T\omega_T + M_L R_T\sqrt{gR}$$

De la "ayuda", el momento de inercia es $I_T = 2M_T R_T^2 / 5$, con lo que resulta,

$$\boxed{R' = \frac{1}{g}\left[\sqrt{gR} - \frac{2M_T R_T}{5M_L}\left(\omega_T' - \omega_T\right)\right]^2}$$

Con los valores obtenidos para ω_T , ω_T' y ω y los datos del enunciado, se obtiene

$$\boxed{R' = 3{,}65 \times 10^8 \text{ m}}$$

De acuerdo con el enunciado, la velocidad con la que la Luna se aleja de la Tierra es constante y de valor $v = 3{,}8\,\text{cm/año} = 1{,}2 \times 10^{-9}$ m/s. La "edad" del coral fósil puede estimarse como el tiempo que ha transcurrido desde que la distancia Tierra-Luna era *R´* hasta la actual *R*, es decir,

$$\tau = \frac{R - R'}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 1{,}5 \times 10^{16} \text{ s}}$$

En años es

$$\tau = \frac{1{,}5 \times 10^{16}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 4{,}8 \times 10^8 \text{ años} = 480 \text{ millones de años}$$

Realmente es algo menor puesto que en aquella época, el número de días por año era superior a 365, tal como se indica en la introducción del enunciado. Por lo tanto corresponde o está cercano al devónico inferior.

P 2. Electrómetro absoluto de Kelvin

Tres placas metálicas están en el vacío, colocadas como se indica en la figura 1. La placa C es circular de radio *a*; la B posee un orificio circular de radio ligeramente mayor que *a*, y en él esta colocada la placa C. La A, de radio igual al exterior de B, está separada de las anteriores una distancia *d* considerablemente menor que *a*.

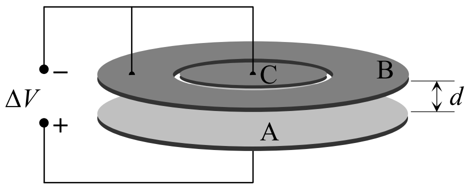


Fig. 1

Cuando las placas se conectan eléctricamente a unos bornes entre los cuales hay una diferencia de potencial ΔV, la placa B, llamada *anillo de guarda*, hace que el campo eléctrico en la región cilíndrica comprendida entre la C y la A sea uniforme.

Tomando como datos la diferencia de potencial ΔV, la distancia *d*, el radio *a* de la placa C y la permitividad eléctrica del vacío ε_0, determine:

a) El módulo, dirección y sentido del campo eléctrico uniforme *E*, en la región comprendida entre las placas C y A.

b) La carga eléctrica en la placa C.

c) El módulo, dirección y sentido de la fuerza que la placa A ejerce sobre la C.

Considérese ahora la figura 2, que es un esquema simplificado del instrumento con el cual Lord Kelvin en 1860, midió por primera vez la fuerza electromotriz de una asociación en serie de pilas Daniell.

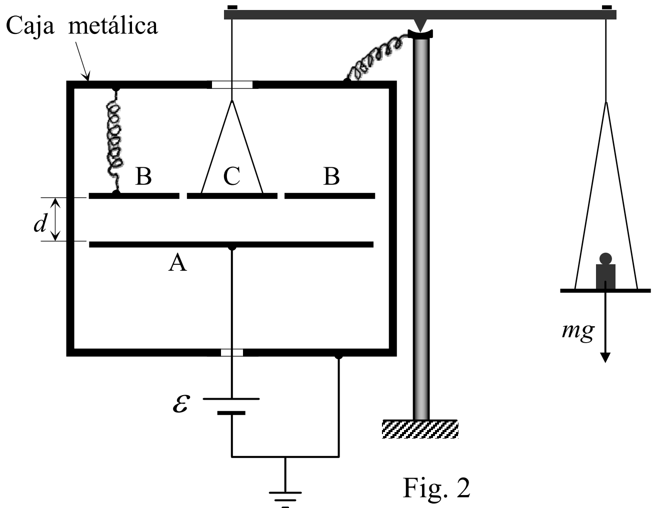


Fig. 2

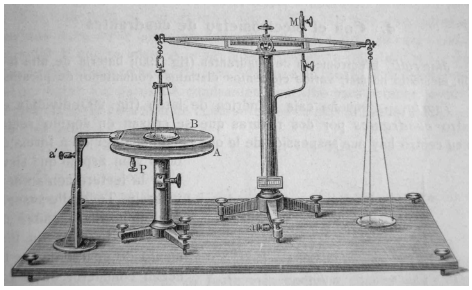


Fig. 3

El aparato consiste en una balanza, cuyo plato izquierdo suspendido por alambres conductores, es un disco metálico que juega el papel de la placa C de la figura 1. Coplanario con el disco C existe un anillo de guarda y a una distancia *d* por debajo se sitúa la placa fija A.

Para aislar al dispositivo de posibles influencias eléctricas externas se coloca dentro de una caja metálica (jaula de Faraday) conectada a tierra. La figura 3, tomada de un libro de Física de los años 30, muestra un electrómetro de este tipo sin la caja metálica.

Con este dispositivo, la batería cuya fem $\mathcal{E}$ se desea medir, se conecta como se indica en la figura 2. Como la placa A ejerce una fuerza sobre la C, para mantener la balanza en equilibrio es preciso añadir pesas en el platillo derecho de la balanza.

d) Si la masa requerida para equilibrar la balanza es $m = 2{,}21 \times 10^{-5}$ kg, empleando los datos que se indican a continuación, determine la fuerza electromotriz de la batería, $\mathcal{E}$.

e) ¿Cuál es el error $\Delta\mathcal{E}$ en la medida de la fem debido a una imprecisión $\Delta m = 0{,}5$ mg en la masa de la pesa?

Datos:

Separación entre las placas: $d = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m .

Radio de la placa C: $a = 1{,}00 \times 10^{-1}$ m ;

Pemitividad dieléctrica: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$.

Aceleración de la gravedad: $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-1}}$

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, el anillo de guarda (placa B) asegura que el campo eléctrico sea uniforme en la región comprendida entre la placa C y A. Por lo tanto, limitándonos a dicha región que es la de interés en el problema, la placa C por estar conectada al borne negativo, tendrá una carga negativa -Q, y la inferior, conectada al borne positivo, tendrá la misma carga pero positiva, +Q. Ambas placas, separadas la distancia d, tal como se muestra en la figura 4, tienen una superficie $S = \pi a^2$.

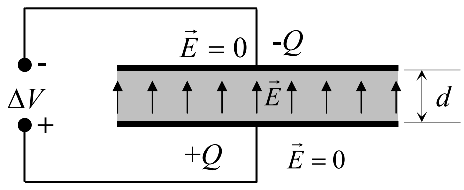


Fig.4

El campo estará dirigido de la placa positiva a la negativa y, dado que el potencial entre las placas es ΔV, su valor será $\Delta V = Ed$, por lo que el módulo del campo es

$$\boxed{E = \frac{\Delta V}{d}} \qquad (1)$$

y la dirección y sentido son las indicadas en la figura.

b) Cada una de las placas, consideradas como planos cargados con densidades de carga superficiales σ y $-\sigma$, crean sus respectivos campos. Su superposición es nula en puntos exteriores al espacio comprendido entre las placas y en los puntos interiores es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

En efecto, consideremos un punto P perteneciente al espacio entre placas y otros dos, P´ y P´´ exteriores, como se muestra en la figura 5a, y designamos por $\vec{n}$ al vector unitario perpendicular a ambas placas.

En la figuras 5b y 5c se representan los campos que crean individualmente las placas en los puntos señalados y se indican sus valores que pueden ser obtenidos mediante la ley de Gauss (aplicada a una "caja de píldoras" cilíndrica con su eje normal al plano y una base a cada lado). Por último, para obtener el campo total se suman en cada uno de los tres puntos los campos de cada placa. Es decir, se suman los

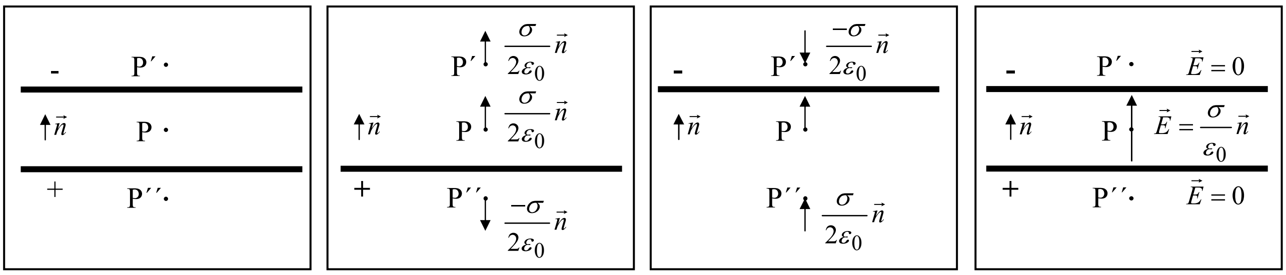


Fig.5a Fig.5b Fig.5c Fig.5d

valores indicados en las figuras 5b y 5c, obteniéndose los indicados en la figura 5d

Se deduce por tanto que el campo total en la región interior es $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, cuyo módulo es el dado en la expresión (2).

Por otra parte, eliminando E entre (1) y (2) se obtiene la densidad superficial de carga de las placas,

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\Delta V}{d} \qquad (3)$$

Por lo que la carga de la placa C, teniendo en cuenta que es negativa, será

$$Q = -\sigma \pi a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = -\varepsilon_0 \pi a^2 \frac{\Delta V}{d}}$$

c) Sobre cada una de las cargas de la placa C (Fig. 1 del enunciado) actúa una fuerza debida al campo eléctrico creado por la placa inferior, cuyo valor indicado en la figura 5b, es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Como el campo es uniforme y la distribución de carga (negativa) en C también lo es, la fuerza total sobre ella es

$$\vec{F} = -Q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = -\frac{\sigma}{2}\pi a^2 \frac{\Delta V}{d}\vec{n}$$

y teniendo en cuenta (3)

$$\boxed{\vec{F} == -\frac{1}{2}\pi a^2 \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2 \vec{n}}$$

d) Ahora la diferencia de potencial ΔV es la fuerza electromotriz de la batería, $\mathcal{E}$, que se pretende medir. La fuerza F desequilibra la balanza y para volverla a equilibrar será preciso colocar en el platillo derecho una masa m tal que el momento de su peso sea igual al de la fuerza. Si suponemos que los brazos de dicha balanza son iguales, se tendrá que $F = mg$, de donde resulta,

$$\mathcal{E} = d\sqrt{\frac{2mg}{\pi a^2 \varepsilon_0}} \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores numéricos que nos dan,

$$\boxed{\mathcal{E} = 79{,}0 \text{ V}}$$

e) El error $\Delta\mathcal{E}$ debido a una imprecisión Δm de la masa m puede obtenerse de la forma siguiente,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left| d\sqrt{\frac{2(m+\Delta m)g}{\pi a^2 \varepsilon_0}} - d\sqrt{\frac{2(m-\Delta m)g}{\pi a^2 \varepsilon_0}} \right|$$

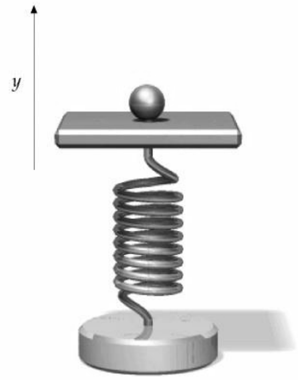
Se ha empleado este razonamiento por ser el más utilizado por los estudiantes de Bachillerato. Podría haberse obtenido más directamente por medio de procedimientos habituales de propagación de errores.

Si $\Delta m = 5{,}00\,\text{mg} = 5{,}00 \times 10^{-6}\,\text{kg}$, el resultado es

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = 0{,}9\ V}$$

P3. Oscilaciones.

Una pequeña bolita de masa m descansa sobre un plataforma que está oscilando verticalmente con un movimiento armónico simple dado por $y = A \operatorname{sen} \omega t$.



a) Deduzca las expresiones de la fuerza F_b que la plataforma ejerce sobre la bolita en función del tiempo, t, y de la posición, y. A partir de ellas, encuentre la relación que han de guardar los parámetros de este movimiento y la aceleración de la gravedad para que la bolita no se separe de la plataforma.

b) Siendo $\omega^2 A = 2g$ y $A = 15\,\text{cm}$ ¿en qué posición, y_d, e instante, t_d, se despega la bolita de la plataforma?

c) Para la aplicación numérica anterior, represente gráficamente y de forma cualitativa i) la fuerza por unidad de masa, F_b / m, en función de la posición de la plataforma, y; ii), la posición de la bolita y de la plataforma en función del tiempo, en el intervalo $0 \le t \le T = 2\pi / \omega$.

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre la bolita son su peso, mg, y la interacción con la plataforma, F_b, ambas verticales y con sentidos opuestos. En virtud de la 2ª ley de Newton

$$F_b - mg = ma$$

De acuerdo con el enunciado, mientras la bolita permanezca sobre la plataforma, su movimiento es oscilatorio armónico, $y = A \operatorname{sen} \omega t$. En consecuencia su aceleración es $a = -\omega^2 y$ y, por tanto, se tiene

$$F_b - mg = -m\omega^2 y = -m\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$$

De donde, las expresiones de F_b en función de y o el tiempo t son, respectivamente

$$\boxed{F_b = m\left(g - \omega^2 y\right)}, \quad \boxed{F_b = m\left(g - \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t\right)}$$

La separación tendrá lugar cuando $F_b = 0$. Como esta fuerza no puede ser negativa, la condición para que la bolita no se despegue es que, en todo instante, se verifique

$$\frac{F_b}{m} > 0 \quad \Rightarrow \quad g > \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$$

Es decir

$$\boxed{\omega^2 y < g} \quad \text{para todo } y$$

o bien

$$\omega^2 A sen\ \omega\, t < g \quad \text{en todo instante}$$

b) Tal como indica el enunciado, $\omega^2 A = 2g$, luego la bolita se tiene que desprender y lo hará para un valor y_d y un instante t_d, que hagan $F_b = 0$, esdecir

$$g = \omega^2 y_d = \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t_d$$

Por lo que dichos valores son

$$y_d = \frac{g}{\omega^2} = \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_d = 7{,}5 \times 10^{-2}\ \text{m} = 7{,}5\ \text{cm}}$$

$$\boxed{t_d = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_d = 4{,}58 \times 10^{-2}\ \text{s} = 45{,}8\,\text{ms}}$$

c$_i$) La de la fuerza por unidad de masa, F_b / m, depende linealmente de y/A, entre $0 \le y / A \le 0{,}5$. Una vez que se produce el despegue, es nula. La correspondiente grafica es la de la figura 1.

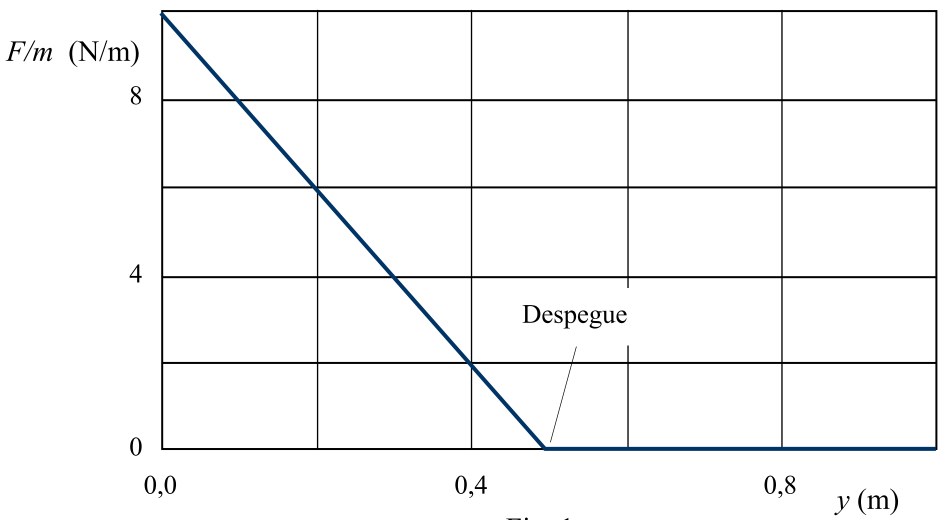


Fig. 1

c_{ii}) La velocidad de la plataforma viene dada por

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \operatorname{sen} \omega t \ \text{ siendo } \ \omega = \left(\frac{2g}{A} \right)^{1/2} = 11,4 \, \text{rad/s}$$

Luego la velocidad de la bola en el instante t_d en el que se despega será

$$v_d = v(t_d) = A\omega \operatorname{sen} \omega t_d \quad \Rightarrow \quad v_d = 1,49 \text{ m/s}$$

A partir de ese instante, la bola describirá un movimiento vertical que, despreciando la resistencia del aire, vendrá descrito por

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + At + B \qquad (1)$$

Donde A y B son constantes cuyo valor depende de la posición y velocidad de la bolita en el instante de su despegue.

Una representación del movimiento de la plataforma en función del tiempo se muestra en la figura 2. En esta figura, también se representa el movimiento armónico de dicha plataforma, de periodo $T = 5,49 \times 10^{-1}$ s. En el corte de ambas gráficas se produce el "reencuentro" de la bola con la plataforma. Como no se da ninguna información de las características del choque entre ambos, es imposible describir el movimiento posterior de la bolita.

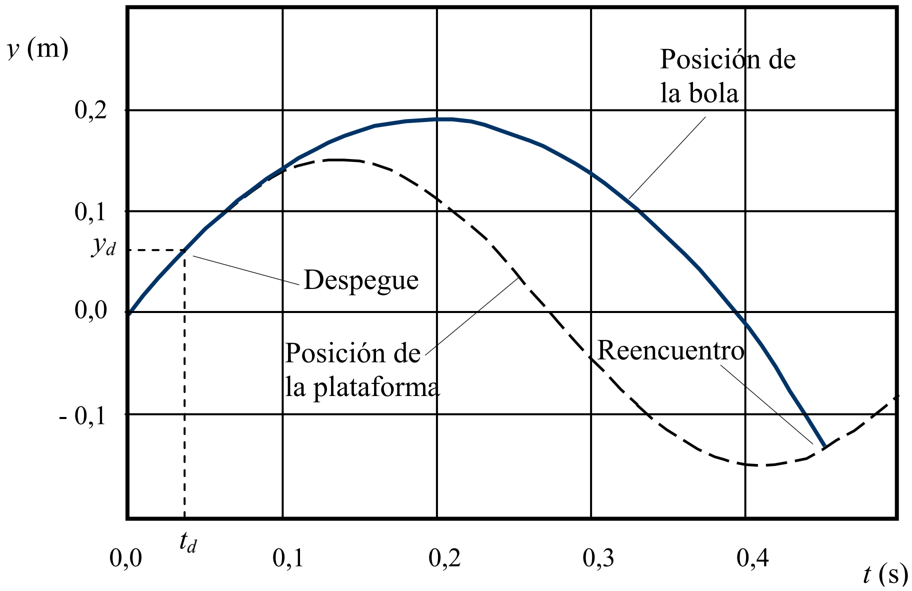


Fig. 2

Nota.

Una descripción detallada del movimiento de la bola (que no exige el enunciado) requiere el cálculo de las constantes A y B de la ecuación (1).

Teniendo en cuenta las condiciones en las que se inicia el movimiento "libre" de la bola, que son

$$y(t_d) = y_d$$
$$v(t_d) = v_d$$

La ecuación del movimiento es

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_d + g t_d) t + y_d + \frac{1}{2} g t_d^2 - (v_d + g t_d) t_d \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + 1,94 t - 3,30 \times 10 - 3$$