Tarea avanzada 1

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: X febrero 2016

Ideología y metodología

Muchas veces nos es fácil plantear un sistema de ecuaciones a resolver, una integral que nos de el campo eléctrico, la ecuación diferencial de un fluido etc, y lo que resulta realmente complicado no es la parte físcia del problema si no la parte de matemáticas.

La idea de estos problemas-tarea es adquirir velocidad tanto en manipulación algebráica y numérica como en el planteamiento de problemas matemáticos. No hay una forma consciza de adquirir velocidad o aumentar tu capacidad intelectual, pero lo que sí puede hacerse es adquirir práctica. La práctica, junto con la memoria, ayudan a economizar tiempo al momento de resolver un problema. Pues, si nos encontramos frente a una integral o ecuación previamente resuelta, nos llevará una décima parte del tiempo que nos hubiera tomado, claro, esto si recordamos como lo habíamos solucionado.

Estos problemas no son para volverse experto en resolver integrales ni algo por el estilo, en vez de ello se pretende abarcar una amplia variedad de temas y problemas a resolver. Esto con el fin de generar confianza y velocidad al momento de resolver un nuevo problema. Puede que el camino algébraico para resolver un problema parezca oscuro y que no encontraremos la solución, ¡ Pero esto no lo sabemos hasta intentarlo! La recomendación es que intenten todos los problemas, muchas veces al final se çancela"todo y llegamos a la respuesta, pero otras veces no somos tan afortunados, por lo cual debemos de desarrollar un criterio de cómo y cuándo podemos resolver un problema.

Por otro lado, los problemas físicos de estas tareas están enfocados a ser problemas "más pesados"de lo habitual, o bien más largos o más "talachudos". Si encuentran uno que hayan visto previamente aún así háganlo, si lo hacen con facilidad es que en verdad resolvieron el problema y si no inténtenlo de nuevo. Al intentar un problema nuevamente traten de hacerlo a contra-reloj, economizando su tiempo y encontrando la forma más rápida de resolverlo.

Hay que intentar todos los problemas y tratar de resolver los más que se pueda.

Problemas de matemáticas

Breve introducción

En física se define algo llamado vector, este debe tener un origen(opcional pues el marco de referencia es variable), una magnitud y un sentido. Las cantidades que solo tienen magnitud se les conoce como escalares. En general, un vector puede tener n dimensiones, pero ya que vivimos en un mundo de 3 dimensiones nos enfocaremos en ese caso. Además, trabajar con 3 dimensiones nos permite definir un producto entre vectores llamado producto vectorial o producto cruz. El concepto de producto vectorial no tiene una generalización trivial en dimensiones superiores, en cambio el producto punto sí.

Algunas formas de representar vectores son las siguientes

$$\mathbf{r} = (a_x, a_y, a_z) \tag{1}$$
$$\vec{r} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \tag{2}$$

En muchos libros los vectores son representados por letras en engritas, mientras que en otros se los agrega una flechita arriba. Para especificar las componentes de un vector se puede usar la forma matricial (la primera ecuación) o bien la forma algebrática (segunda ecuación).

Por último, recuerde que el producto punto y el producto cruz se definen como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{3}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \tag{4}$$

Y que el producto punto nos otorga un escalar mientras que el producto cruz es nuevamente un vector.

Problemas

1. Verifique la expresión
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

2. Muestre que
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

3. El momento angular orbital $\mathbf{L}$ de una partícula esta dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Si la velocidad lineal y la velocidad angular están relacionadas por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \ \times \mathbf{r}$ muestre que:
$$\mathbf{L} = mr^2[\mathbf{w} \ - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w})]$$

4. Muestre que
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

5. Usando los siguientes vectores en 2 dimensiones
$$\mathbf{A} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$$
$$\mathbf{B} = \cos\phi\hat{\imath} - \sin\phi\hat{\jmath}$$
$$\mathbf{C} = \cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}$$
demuestre las siguientes identidades
$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

6. Muestre que
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}))\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))\mathbf{D}$$

Problemas de física

Problemas cortos

1. Se tiene media esfera (sólida) de radio R y carga uniformemente distribuida Q. Calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera.

   [Hint: Recuerde que el diferencial de volúmen en coordenadas esféricas es $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$ y use argumetnos de simetría.]

2. Un objeto de masa M choca con otro objeto en reposo de masa m. Si $M < m$ entonces es posible que el objeto rebote, por el contrario si $M > m$ existe un ángulo de desviación máxima. Muestre que el ángulo de desviación máxima para el caso $M > m$ es $\theta = \sin^{-1}(\frac{m}{M})$

   [Hint (¡hay más formas que la propuesta!): Recuerde que las cantidades físicas son números estrictamente reales. Tal vez el siguiente problema le de una idea. Sean a, b, c números reales tales que

$$a^2 + b^2 + 3 = 2c + 2\sqrt{2a + 2b - 2c}$$

   demuestre que $a + b + c = 3$.]

Problema largo

1. Dos masas gravitacionales M y m (figura1), se desplazan describiendo cada una de ellas una órbita circular de radios R y r alrededor del centro de masas. Encontrar la velocidad angular ω_0 de la recta de unión M y m en función de R ,r , M, m y la constante de gravitación universal G.

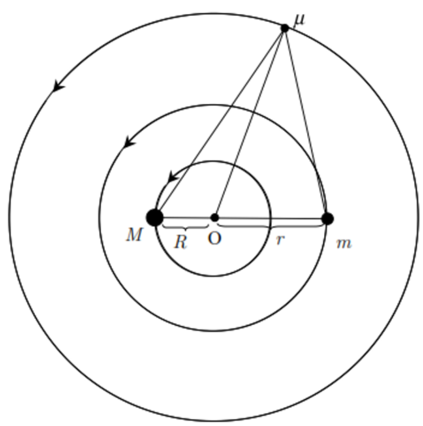

Figura 1

2. Un tercer cuerpo de masa infinitesimal μ se coloca en una órbita circular coplanar con M y m de modo que μ permanece estacionario relativo a ambas masas M y m, tal como se muestra en la figura 1. Se supone que μ no esta alineada en la recta $\overline{Mm}$. Calcular los siguientes valores en función de R y r.

   a) Distancia de μ a M.

   b) Distancia de μ a m.

   c) Distancia de μ al centro de masas O.

3. Considerar ahora que $M = m$. Si a μ se le da una pequeña perturbación radial (a lo largo de $\overline{O\mu}$).¿Cuál es la frecuencia angular de oscilación de μ respecto de la posición no perturbada en función de ω_0? Suponga que el momento angular de μ se conserva.

4. La Antena Espacial de Interferometría con Láser (abreviatura en inglés LISA) la forman tres vehículos espaciales idénticos destinados a la detección de ondas gravitatorias con baja frecuencia. Cada uno de los vehículos está colocado en los vértices de un triángulo equilátero, tal como se observa en las figuras 2 y 3. Los lados o brazos están a una distancia aproximada de cinco millones de kilómetros. La agrupación LISA sigue una orbita, al igual que la Tierra, alrededor del Sol siguiendo la senda terrestre con un ángulo de 20º. Cada uno de los vehículos se desplaza describiendo una orbita circular ligeramente inclinada alrededor del Sol. Los tres giran alrededor de su centro de masa con un periodo de un año. Entre ellos están constantemente recibiendo y emitiendo señales de láser. En conjunto detectan las ondas gravitacionales midiendo pequeños cambios en la longitud de los brazos utilizando medidas interferométricas. Una colisión entre objetos masivos, como pueden ser agujeros negros en galaxias próximas, es un ejemplo de fuentes de ondas gravitatorias.

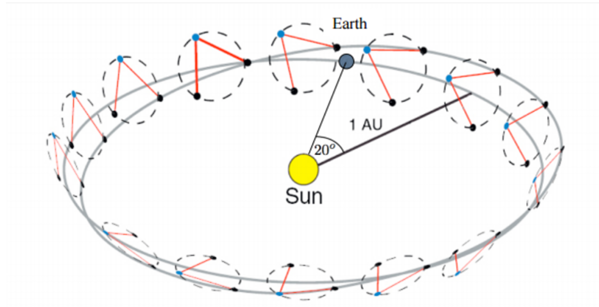

Figura 2: - Ilustración de la órbita descrita por LISA. Los tres vehículos espaciales giran alrededor de su centro de masas con un periodo de un año. Siguen la senda terrestre con un ángulo de 20º.(Dibujo de D.A. Shaddock. ¨¨An Overview of de Laser Interferometer Space Antenna¨, Publications of the Astronomical Society of Australia, 2009, 26, pp. 128-132.)

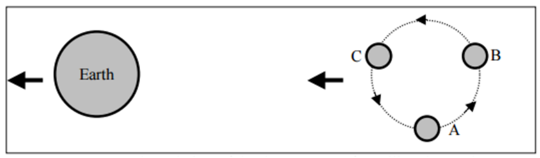

Figura 3: - Vista ampliada de los tres vehículos espaciales desde la órbita de la Tierra. A,B y C son los tres vehículos situados en los vértices de un triángulo equilátero.

En el plano que contiene a los tres vehículos espaciales, determinar cuál es la velocidad de un vehículo respecto de otro.