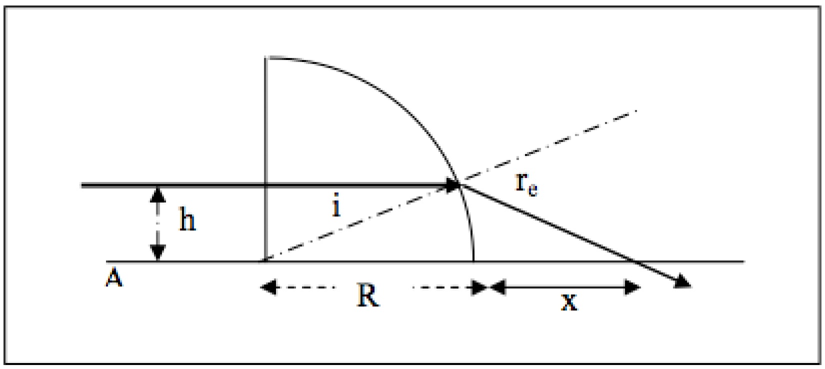
Entrenamiento selectivo 2014, Olimpiada Mexicana de Física
Tarea # 4 enviar viernes 14 febrero.

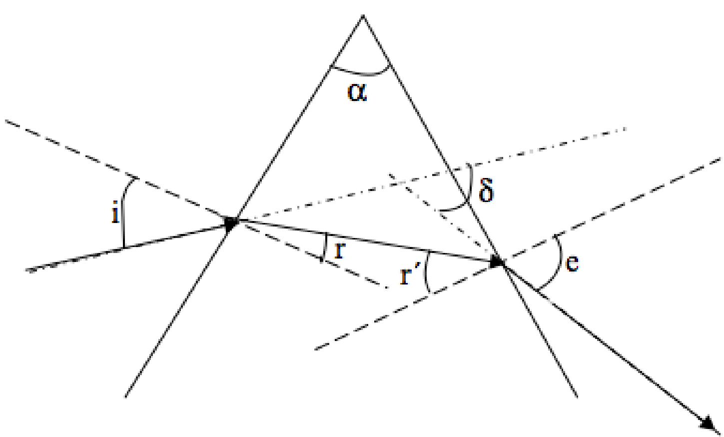
Problema 1

1.1 Un dispositivo óptico está fabricado con vidrio cuyo índice de refracción es $n = 1.5$ tiene la forma de un cuarto de cilindro. Sobre él y por la cara plana se hacen incidir rayos luminosos a distintas alturas h, los rayos de luz son refractados fuera del dispositivo y proyectados sobre la linea horizontal hasta una distancia x. Al aumentar la altura h la distancia x disminuye, sin embargo existe una distancia mínima x_{min} a partir de la cual los rayos ya no se proyectan sobre la linea horizontal. Calcula esta distancia mínima x_{min}



1.2 Encontrar la relación general entre el ángulo de desviación δ de un prisma, de ángulo α e índice de refracción n, situado en el aire ($n = 1$) en función de los parámetros α, n y los ángulo i, r, r', e (ver figura) y a partir de esa ecuación deducir la expresión para el ángulo de desviación mínima.

Determinar el ángulo de incidencia que produce desviación mínima en un prisma de $\alpha = 60°$ y $n = 1.5$



Problema 2

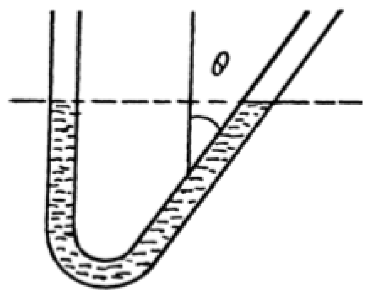
2.1 Los murciélagos de herradura emiten sonidos por las fosas nasales y luego escuchan la frecuencia del sonido reflejada de su presa para determinar la rapidez de está. Un murciélago que vuela con una rapidez v_{mur} emite sonidos de frecuencia f_{mur}; la frecuencia que oye reflejada de un insecto que vuela hacia él tiene un valor más alto f_{refl}

a) Demuestra que la rapidez del insecto es:

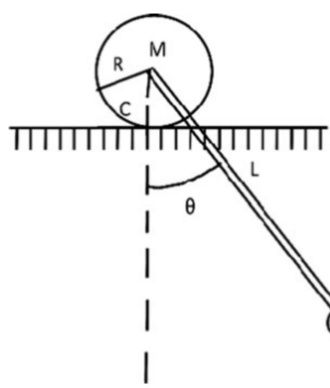
$$v_{inse} = v \left[\frac{f_{refl}\left(v - v_{mur}\right) - f_{mur}\left(v + v_{mur}\right)}{f_{refl}\left(v - v_{mur}\right) + f_{mur}\left(v + v_{mur}\right)} \right] \tag{1}$$

b) Si $f_{mur} = 80.7\,\mathrm{kHz}$, $f_{refl} = 83.5\,\mathrm{kHz}$ y $v_{mur} = 3.9\,\mathrm{m/s}$, calcula la rapidez del insecto.

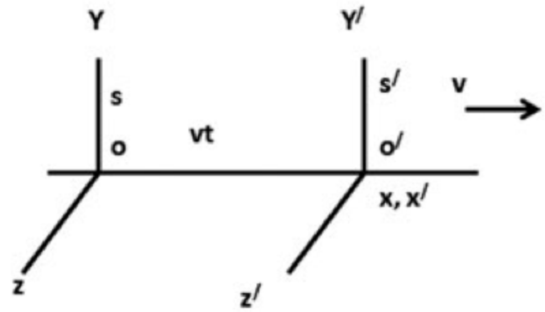
2.2 Determinar el período de las oscilaciones de una masa de mercurio $m = 200\,\mathrm{g}$ vertido en un tubo curvado, cuyo brazo derecho forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la vertical. El área de la sección transversal del tubo es $A = 0.5\,\mathrm{cm}^2$. Despreciar la viscosidad del mercurio.



2.3 Una masa m es sujeta en el extremo de una barra de longitud L y masa despreciable que se fija a un cilindro de masa uniforme M y radio R, ver figura. Suponiendo que el cilindro rueda sin resbalar, calcula la frecuencia de oscilación del sistema.



Problema 3



Transformación de Galileo.

Supongamos un sistema de referencia inercial S' que se mueve a lo largo del eje x con velocidad v respecto de un sistema fijo S. Las coordenadas espaciales x, y, z, y el tiempo t son medidos respecto del sistema S; de la misma forma x',y', z', t' son las coordenadas y el tiempo medidos respecto del sistema S'. Para simplificar, los ejes x y x' están sobre la misma linea horizontal y al tiempo inicial ($t = 0$) el origen de S y S' coinciden también.

Las transformación de Galileo entre las coordenadas y el tiempo en ambos sistemas se establecen a través de la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2}$$

Transformaciones de Lorentz

En la teoría de la Relatividad Especial, se establecen los siguientes dos postulados:

1. **Las leyes de la física son iguales en cualquier sistema inercial.**
2. **La velocidad de la luz en el vacío es la misma para cualquier observador inercial, c es una constante universal.**

Como consecuencia, las transformaciones de Galileo (2) que relacionan los sistemas S y S', descritos anteriormente, dejan de ser ciertas y ahora la transformaciones validas son las transformaciones de Lorentz:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) & \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \geq 1 \\ x' &= \gamma\,(x - vt) & & \\ y' &= y & \beta &\equiv \frac{v}{c} \leq 1 \\ z' &= z & & \end{aligned}} \tag{3}$$

3.1 Demuestra que las transformaciones de Lorentz (3) se pueden escribir de la siguiente manera (solo las dos primeras transformaciones):

$$\begin{aligned} ct' &= ct\,\cosh\alpha - x\,\sinh\alpha \\ x' &= -ct\,\sinh\alpha + x\,\cosh\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

Donde $\tanh \alpha = \beta = v/c$ y se definen las funciones hiperbólicas: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

De esta manera las ecuaciones de transformación (4) se asemejan a una rotación en términos de funciones hiperbólicas y son otra forma de representar a las transformaciones de Lorentz.

3.2 En un sistema inercial S un evento es observado que toma lugar en el punto A sobre el eje x, un tiempo 10^{-6} s después otro evento se produce en el punto B que se encuentra a 900 m de distancia de A. Encuentra la magnitud y dirección de la velocidad de un sistema S', que se mueve respecto de S, en el cual los dos eventos aparecen simultáneos.

3.2 En la teoría de la relatividad la masa de una partícula depende de su estado de movimiento, no será la misma si un observador mide la masa, cuando la partícula se encuentra en reposo que si ésta se mueve con cierta velocidad respecto de él. Se define entonces la masa en reposo de una partícula m_0 como aquella que es medida por un observador cuando la partícula esta en reposo respecto de él.

Así, en la teoría de la relatividad el momento de una partícula ya no es simplemente la masa por la velocidad: $\bar{p} \neq m\bar{v}$; de la misma manera la energía cinética de una partícula deja de ser $T \neq mv^2/2$.

La energía total de una partícula libre (en ausencia de cualquier campo de fuerzas) se puede escribir como la suma de la energía cinética más la energía de reposo $E_0 = m_0 c^2$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$E = T + m_0 c^2 \tag{5}$$

Otra manera de escribir la energía total es en términos del momento de la partícula $p = |\mathbf{p}|$ y su energía de reposo de la siguiente manera:

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{6}$$

Sin embargo, en la teoría de relatividad se sigue satisfaciendo la conservación de momento y energía (total).

Considera entonces una colisión relativista donde una partícula de masa en reposo m_0 incide sobre otra partícula idéntica pero en reposo. Después de la colisión ambas partículas salen disparadas con igual momento, igual energía cinética y ángulos $\theta/2$ y $-\theta/2$ medidos respecto de la linea de la partícula incidente. Demuestra que se satisface la siguiente relación:

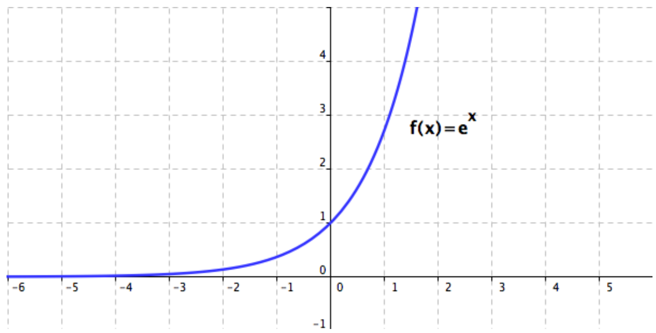
$$\cos \theta = \frac{T}{T + 4m_0 c^2} \tag{7}$$

Problema 1

Se define las funciones hiperbólicas a través de la función exponencial como:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \tag{8}$$

1.1 Conociendo la gráfica de la función exponencial (ver figura), esboza la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas.



1.2 A partir la definición (8), calcula lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sinh^2(z) + \cosh^2(z) &= \\ \sinh^2(z) - \cosh^2(z) &= \\ \cosh(x \pm y) &= \\ \sinh(x \pm y) &= \end{aligned} \tag{9}$$

encuentra (explícitamente) la paridad de las funciones hiperbólicas y verifica con las gráficas que esbozaste:

$$\begin{aligned} \sinh(-z) &= \\ \cosh(-z) &= \end{aligned} \tag{10}$$

Conociendo la derivada de la función exponencial $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, calcula las siguientes derivadas e integrales:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\cosh(z) &= \\ \frac{d}{dz}\sinh(z) &=, \\ \frac{d}{dz}\tanh(z) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int \cosh(z)\ dz &= \\ \int \sinh(z)\ dz &= \end{aligned} \tag{11}$$

Problema 2

2.1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, hazlo de manera algebraica y también de manera gráfica.

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 100 \\ 9x^2 + y^2 = 108 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} xy = 8 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

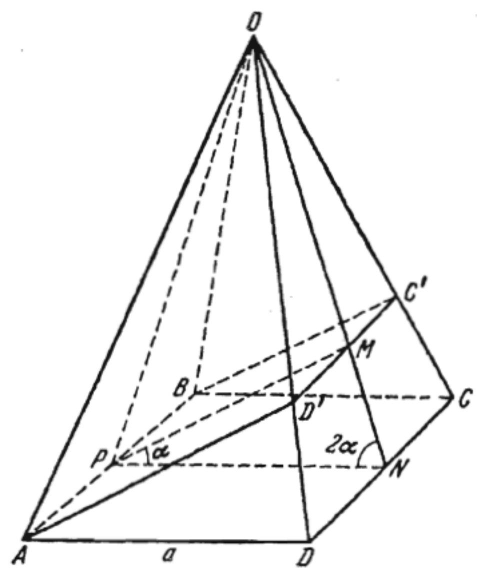
2.2 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2,3) y (-1,1) y cuyo centro está situada en la recta $x - 3y - 11 = 0$

2.3 Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros de altura y 24 de base, situado a una distancia de 8 metros del del arco.

2.3 La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse vale 1.485×10^8 km y que la excentricidad es aproximadamente 1/62 hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

Problema 3

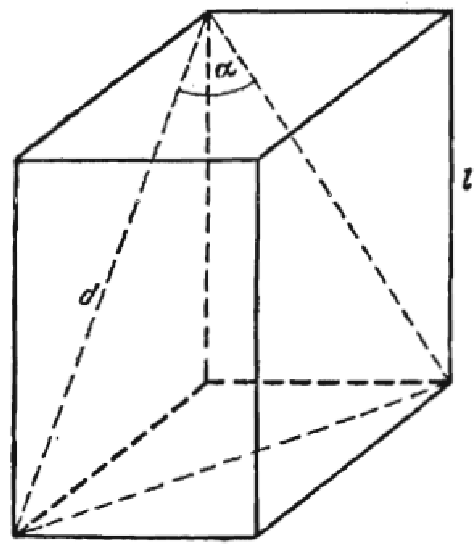
3.1 Una piramide regular cuadrangular con el lado de la base igual a a y el ángulo diedro de la base igual a 2α. Se ha cortado a la piramide por un plano que divide al ángulo diedro de la base por la mitad. Hallar el área de la sección.



Solución:

$$S = a^2 \frac{\sin^2(2\alpha)\cos\alpha}{\sin^3(3\alpha)} \tag{14}$$

3.2 De un prisma regular cuadrangular se ha cortado, por un plano que pasa por la diagonal de la base inferior y uno de los vertices de la base superior, una piramide cuya superficie total es S. Hallar la superficie total del prisma, si se conoce que el ángulo del vertice del triangulo, que se obtiene en la sección es igual a α.



Solución:

$$S_{prisma} = 4S \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}} \tag{15}$$