

## P1.- Torre de perdigones.

Los líquidos en ausencia de gravedad tienden a adoptar la forma esférica debido a los efectos de la tensión superficial. Este es el caso de las gotas de un líquido en caída libre puesto que, en estas circunstancias, experimentan una gravedad aparente nula.

En este fenómeno se ha basado, hasta bien entrado el siglo XX, la fabricación de perdigones esféricos de plomo en las llamadas *torres de perdigones*. El método, patentado por William Watts en 1782, no se utiliza en la actualidad, pero se conservan numerosas torres de perdigones, unas en ruinas, otras formando parte de museos y alguna, como la de Sevilla de 58 m de altura (figura 1), constituye un interesante motivo turístico.

El fundamento del método consiste en fundir plomo en lo alto de la torre<sup>1</sup> en un depósito cuyo fondo, a modo de colador, tiene numerosos orificios por los que caen chorros de plomo líquido. Los chorros son inestables<sup>2</sup> y la elevada tensión superficial del plomo fundido hace que al poco de iniciarse la caída se originen “rosarios” de gotas esféricas que se solidifican al enfriarse, formando perdigones. El diámetro de los orificios condiciona el de las gotas esféricas y, por consiguiente, el de los perdigones. En la base de la torre se recolectan los perdigones en un depósito con agua que amortigua los choques para evitar deformaciones y termina de enfriar el plomo.



Fig. 1

La torre tiene que estar bien ventilada para evitar el excesivo calentamiento del ambiente, de ahí sus numerosas ventanas. La distancia de caída de los perdigones en su interior tiene que ser suficiente para asegurar la solidificación del plomo y además su enfriamiento hasta una temperatura inferior a la de ebullición del agua. De esta forma se evita la producción de vapor de agua cuando los perdigones entran en el recipiente de recogida, que aumentaría notablemente la temperatura ambiente.

El objeto de este ejercicio es la descripción simplificada de algunos de los aspectos físicos que gobiernan este antiguo procedimiento industrial. En la “Tabla de datos” al final de este enunciado se encuentran los valores de las magnitudes necesarias para la resolución numérica de los siguientes apartados.

- a) Determine y calcule la energía (calor),  $Q$ , que un perdigón de plomo del nº 6, inicialmente líquido a la temperatura de fusión del plomo,  $T_i$ , tiene que transferir al aire del interior de la torre para que, durante su caída, se solidifique y se enfríe hasta la temperatura de ebullición del agua  $T_f$ .

En adelante admitiremos, por simplicidad, que las gotas esféricas de plomo fundido se forman prácticamente a la salida del depósito de la parte superior de la torre y que inician su caída con velocidad nula.

Pero el movimiento de dichas gotas (de los perdigones) no es una caída libre ya que, además de su peso, actúa sobre ellas el empuje hidrostático,  $E$ , y la fuerza de resistencia (fricción),  $F_r$ , que ejerce el fluido en el que se mueven (aire). En el caso real que nos ocupa, la fuerza  $F_r$  es proporcional al cuadrado de la velocidad del perdigón,  $v$ . Su expresión para una esfera de radio  $R$  es

$$F_r = \frac{1}{4} \pi R^2 \rho_a v^2$$

donde  $\rho_a$  es la densidad del aire.

- b) Plantee la ecuación del movimiento del perdigón en su caída (2ª ley de Newton), y justifique que se puede despreciar el empuje hidrostático que actúa sobre el perdigón.

<sup>1</sup> Hoy en día, en la cámara superior de la torre sevillana existe una “cámara oscura” en la que puede verse una espectacular vista panorámica de la ciudad.

<sup>2</sup> Inestabilidad de Rayleigh.

La velocidad inicial de caída es nula, y por tanto la aceleración inicial es  $g$ . A partir de entonces, como la velocidad va aumentando, la aceleración va disminuyendo y tiende a alcanzarse una velocidad uniforme, conocida como *velocidad límite*.

- c) Determine y calcule la velocidad límite de caída de los perdigones,  $v_L$ .

La energía (calor) que debe perder el perdigón durante su caída,  $Q$ , se transfiere al aire de la torre. De los tres procesos de transferencia de calor (convección, conducción y radiación) sólo tendremos en cuenta el de convección, que en este caso es dominante.

La potencia media transferida por convección del perdigón al aire viene dada por

$$\bar{P}_c = 4 \pi R^2 h (\bar{T} - T_a)$$

donde  $T_a$  es la temperatura ambiente dentro de la torre, que supondremos constante.  $\bar{T}$  es la temperatura media del perdigón durante la caída y  $h$  es el *coeficiente de transferencia de calor por convección*, dado por la relación empírica

$$h = \frac{0,185 \kappa}{R} \left( \frac{2 \bar{V} R \rho_a}{\mu} \right)^{0,6}$$

En esta expresión,  $\kappa$  y  $\mu$  son, respectivamente, la conductividad térmica y la viscosidad dinámica del aire, y  $\bar{V}$  es la velocidad media de los perdigones.

Considere que los perdigones parten del reposo y alcanzan prácticamente la velocidad límite  $v_L$  antes de llegar al depósito de agua. Suponga que los valores de  $\bar{V}$  y  $\bar{T}$  son los respectivos promedios de los valores iniciales y finales, cuando los perdigones alcanzan el agua.

- d) Calcule la potencia media disipada,  $\bar{P}_c$ , en la caída de un perdigón del nº 6.
- e) Determine y calcule la mínima altura  $H$  que han de caer los perdigones para que no se forme vapor de agua cuando llegan al depósito inferior.

TABLA DE DATOS	
Radio de los perdigones del nº 6	$R = 1,38 \text{ mm}$
Calor latente de fusión del Pb	$L = 24,7 \times 10^3 \text{ J/kg}$
Calor específico del Pb	$c = 1,28 \times 10^2 \text{ J/(kg K)}$
Temperatura de fusión del Pb	$T_i = 600 \text{ K}$
Temperatura de ebullición del agua	$T_f = 373 \text{ K}$
Temperatura ambiente	$T_a = 293 \text{ K}$
Densidad del Pb	$\rho_{\text{Pb}} = 1,13 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$
Densidad del Aire	$\rho_a = 1,29 \text{ kg/m}^3$
Coeficiente de conductividad térmica del aire	$\kappa = 2,60 \times 10^{-2} \text{ W/(m K)}$
Coeficiente de viscosidad del aire	$\mu = 1,80 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

## P1.-Solución

- a) Para que un perdigón líquido de masa  $m$  y que se encuentra a la temperatura de fusión del Plomo (Pb) pase a sólido a la misma temperatura, debe perder (transferir al aire) una energía

$$Q_1 = m L$$

siendo  $L$  el calor latente de fusión del Pb.

Además, para que posteriormente se enfríe hasta la temperatura  $T_f < T_i$  tendrá que ceder un calor

$$Q_2 = m c (T_i - T_f)$$

donde  $c$  es el calor específico del Pb.

En total, la cantidad de calor que deberá transferir es  $Q = Q_1 + Q_2$ ,

$$Q = m L + m c (T_i - T_f)$$

Si el radio del perdigón es  $R$  y la densidad del Pb es  $\rho_{\text{Pb}}$ , resulta

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}} [L + c (T_i - T_f)] \Rightarrow Q = 6,69 \text{ J}$$

- b) Cuando el perdigón de masa  $m$  inicia su caída en el interior de la torre, las fuerzas que actúan sobre él son su peso, el empuje hidrostático,  $E$ , y la fuerza de resistencia que ejerce el aire,  $F_r$ . Llamando  $a$  a la aceleración del perdigón, la ecuación del movimiento es

$$m a = m g - E - F_r$$

El peso del perdigón y el empuje hidrostático son, respectivamente,

$$m g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}} g, \quad E = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a g$$

por lo que, teniendo en cuenta la expresión de  $F_r$  dada en el enunciado, la ecuación queda

$$m a = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_{\text{Pb}} - \rho_a) g - \frac{1}{4} \pi R^2 \rho_a v^2$$

Como  $\rho_{\text{Pb}} \gg \rho_{\text{aire}}$ , el empuje puede despreciarse, y la ecuación del movimiento es

$$m a = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}} g - \frac{1}{4} \pi R^2 \rho_a v^2 \quad (1)$$

- c) De (1) resulta que la aceleración del perdigón en su movimiento de caída es

$$a = g - \frac{1}{4m} \pi R^2 \rho_a v^2$$

Como  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}}$ , resulta

$$a = g - \frac{3}{16} \frac{\rho_a}{\rho_{\text{Pb}}} v^2 \quad (2)$$

Si, como sugiere el enunciado, asumimos que en el comienzo de la caída la velocidad del perdigón es nula, de (2) se deduce que la aceleración inicial es  $g$ . Sin embargo, a medida que la velocidad aumenta la aceleración disminuye. Al cabo de un tiempo suficientemente largo, el segundo miembro de (2) tiende a anularse, y la velocidad de caída será constante (velocidad límite)

$$a = 0 \Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{16 \rho_{\text{Pb}} R g}{3 \rho_a}} \Rightarrow v_L = 25,1 \text{ m/s}$$

- d) De acuerdo con el enunciado, las expresiones de la potencia que el perdigón transfiere al aire y el coeficiente de transferencia de calor por convección, son

$$\bar{P}_c = 4\pi R^2 h(\bar{T} - T_a)$$

$$h = \frac{0,185\kappa}{R} \left( \frac{2\bar{V} R \rho_a}{\mu} \right)^{0,6}$$

Según se indica en el enunciado, admitiremos que la temperatura y velocidad medias del perdigón son

$$\bar{T} = \frac{T_i + T_f}{2} \quad \text{y} \quad \bar{V} = \frac{0 + v_L}{2} = \frac{v_L}{2}$$

Por tanto la potencia media transferida por convección es

$$\bar{P}_c = 0,370\pi\kappa R^{1,6} (T_{\text{in}} + T_{\text{fin}} - 2T_a) \left( \frac{v_L \rho_a}{\mu} \right)^{0,6} \Rightarrow \boxed{\bar{P}_c = 1,76 \text{ W}}$$

- e) Los perdigones deben solidificarse y enfriarse hasta  $T_f$ , como mínimo, antes de llegar al agua. Si  $\Delta t$  es el tiempo de caída de un perdigón, la potencia media que debe transferir al aire es  $Q / \Delta t$ , luego

$$\bar{P}_c = \frac{Q}{\Delta t}$$

Si la altura de caída es  $H$ , se tiene que

$$\Delta t = \frac{H}{\bar{V}}$$

Por lo que

$$\bar{P}_c = Q \frac{\bar{V}}{H}$$

De donde resulta

$$\boxed{H = \frac{Q}{\bar{P}_c} \bar{V}} \Rightarrow \boxed{H = 48 \text{ m}}$$

Esta altura, a la que hay añadir la de las cámaras superior e inferior dentro de la torre, es muy acorde con la altura real de la torre de perdigones de Sevilla.

**P1.- Tabla de respuestas**

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}} [L + c(T_i - T_f)]$	$Q = 6,69 \text{ J}$	2+0,5
b)	$ma = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Pb}} g - \frac{1}{4} \pi R^2 \rho_a v^2$ Como $\rho_{\text{Pb}} \gg \rho_{\text{aire}}$ Empuje hidrostático despreciable		1+0,5
c)	$v_L = \sqrt{\frac{16 \rho_{\text{Pb}} R g}{3 \rho_a}}$	$v_L = 25,1 \text{ m/s}$	1,5+0,5
d)		$\bar{P}_c = 1,76 \text{ W}$	2
e)	$H = \frac{Q}{\bar{P}_c} \bar{V}$	$H = 48 \text{ m}$	1,5+0,5

## P2.- El cañón magnético de raíles.

La idea del cañón de raíles (rail gun) es debida a un inventor francés, que la patentó en 1919. Alemania diseñó en los últimos meses de la segunda Guerra Mundial un prototipo operativo, como base de un arma antiaérea que no llegó a construirse. Las potencias militares actuales prosiguen su desarrollo como posible arma naval para disparar proyectiles sólidos, no explosivos, a muy alta velocidad. Una aplicación futurista más pacífica y natural sería el lanzamiento de cargas de material desde la superficie de la Luna, aprovechando la menor velocidad de “satelización” en torno a este astro, el vacío reinante y la posibilidad de generar en el mismo lugar la electricidad necesaria con paneles fotovoltaicos.

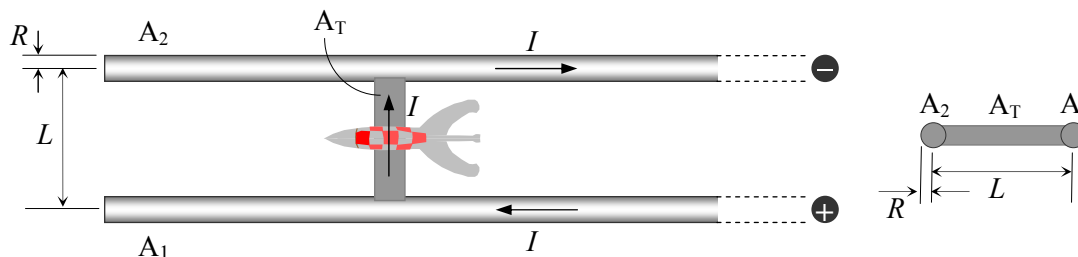


Fig. 1. Vistas superior y frontal del cañón de raíles

El dispositivo se basa en la fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente eléctrica. El campo magnético  $B$  lo produce (ley de Biot-Savart) la corriente  $I$  que circula por dos conductores rectilíneos y paralelos, los raíles  $A_1$  y  $A_2$ , alimentados por un generador con la polaridad indicada en la figura 1. Supondremos que los raíles son cilíndricos, de radio  $R$  y separados una distancia  $L$ , entre ejes. El circuito eléctrico lo cierra, formando una U, una armadura conductora transversal deslizante  $A_T$ , sobre la que actúa la fuerza impulsora magnética. Esta armadura, en su movimiento paralelo a los raíles, empuja al proyectil o carga que se quiere lanzar.

Seguramente conoce la expresión del campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida, pero esta expresión no puede aplicarse en nuestro caso para determinar el campo magnético en un punto de la armadura transversal, ya que sólo circula corriente por el tramo de los raíles entre la fuente de alimentación y la propia armadura (zona a la derecha de  $A_T$  en la figura 1).

Aplicando la Ley de Biot-Savart, puede demostrarse que el campo magnético producido por una corriente rectilínea finita en un punto P (véase la figura 2) puede expresarse en la forma

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}_\theta$$

donde  $\vec{u}_\theta$  es un vector unitario normal al plano de la figura 2 (regla del sacacorchos) y  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  es la permeabilidad magnética del vacío.

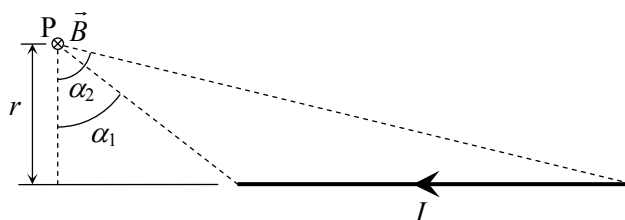


Fig. 2

Suponga que la longitud de los raíles por los que circula la corriente  $I$  es en todo momento mucho mayor que la separación  $L$  entre ellos, y que el campo magnético en el exterior de una corriente cilíndrica coincide con el de una corriente filiforme a lo largo del eje del cilindro.

- a) Determine el campo magnético total,  $\vec{B}(y)$ , producido por la corriente que circula por los dos raíles en un punto de  $A_T$  situado a una distancia  $y$  del eje de  $A_1$  (figura 3).

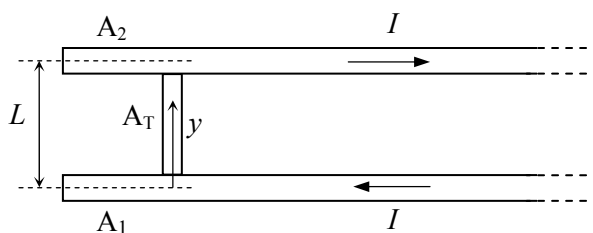


Fig. 3

Por la armadura transversal  $A_T$  circula la misma corriente  $I$ , en presencia del campo no uniforme  $\vec{B}(y)$ . Por tanto, sobre  $A_T$  va a actuar una fuerza no uniformemente distribuida.

- b) Considere un pequeño *elemento de corriente* en  $A_T$ , de longitud infinitesimal  $dy$ , situado a una distancia  $y$  del eje de  $A_1$ . Determine la fuerza magnética  $d\vec{F}(y)$  (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre este elemento de corriente.
- c) Determine la fuerza magnética neta  $\vec{F}$  que actúa sobre  $A_T$ .

Ayudas:

Tenga en cuenta que la longitud de la armadura deslizante no es  $L$ , sino  $L-2R$ .

Pueden serle útiles las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln y \qquad \int \frac{1}{L-y} dy = -\ln(L-y)$$

Vamos ahora a hacer algunos cálculos numéricos, para poner de manifiesto las extraordinarias características de un dispositivo de este tipo. En concreto, vamos a considerar un cañón de raíles diseñado para lanzar cargas desde la superficie de la Luna, con los raíles paralelos a la superficie. El radio de la Luna es  $R_L = 1,74 \times 10^6$  m, y la aceleración de la gravedad en su superficie es  $g_L = 1,62$  m/s<sup>2</sup>.

Considere un sistema con  $L = 1,0$  m y  $R = 10$  cm, que acelera una carga de masa  $m = 200$  kg hasta la *velocidad de escape* de la Luna, con la fuerza magnética  $F$  actuando a lo largo de una longitud de raíles  $D = 1000$  m. Suponga despreciables las fuerzas de fricción entre  $A_T$  y los raíles<sup>1</sup>.

- d) Calcule la velocidad de escape desde la superficie de la Luna,  $v_L$ .
- e) Calcule la intensidad  $I$  de la corriente que debe circular por los raíles.

Habría obtenido una corriente enorme, del orden del millón de amperios. Todos los valores de las magnitudes involucradas en este dispositivo son muy grandes, lo que provoca numerosos problemas prácticos de diseño. Por ejemplo, existe una gran fuerza de interacción entre los dos raíles, pues por ellos circulan intensas corrientes antiparalelas. Esto obliga a que el montaje real deba tener una gran resistencia mecánica, soportando grandes esfuerzos sin deformaciones apreciables.

- f) Haga una estimación de la fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre los raíles, en las proximidades de  $A_T$ .

Otro problema práctico es el calentamiento de los raíles por efecto Joule, y la consiguiente dilatación térmica. Suponga que los raíles son de cobre, que tiene una resistividad  $\rho = 1,7 \times 10^{-8}$   $\Omega$  m.

- g) Calcule la potencia disipada en forma de calor en la longitud efectiva de los dos raíles,  $2D = 2000$  m, cuando por ambos circula la corriente  $I$ . Calcule también la energía total disipada durante el lanzamiento y compárela con la energía cinética de la carga lanzada.

<sup>1</sup> Esta suposición no es muy realista. Precisamente uno de los problemas prácticos de este dispositivo es la abrasión mecánica de los raíles, debida a la fricción durante el lanzamiento.

## P2.- Solución

- a) Como la longitud de los raíles por los que circula  $I$  es siempre mucho mayor que  $y$ , se tiene  $\alpha_2 \approx 90^\circ$ . Además, en un punto de  $A_T$ ,  $\alpha_1 = 0^\circ$ . Entre los raíles, los dos campos magnéticos son paralelos (dirigidos hacia dentro).

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} \vec{u}_\theta + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L-y} \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} \right) \vec{u}_\theta}$$

- b)  $d\vec{F} = I d\vec{y} \times \vec{B}$

Esta fuerza es paralela a los raíles, dirigida hacia la izquierda (eje  $-X$ ) en las figuras.

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} \right) dy (-\vec{i})}$$

- c) Integrando a la longitud de  $A_T$ , entre  $y = R$  e  $y = L-R$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 (-\vec{i}) \int_R^{L-R} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} \right) dy = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 (-\vec{i}) \left( \ln \frac{L-R}{R} - \ln \frac{R}{L-R} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{L-R}{R} (-\vec{i})} \quad (1)$$

- d) La velocidad de escape desde la superficie de la Luna es

$$v_L = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{2g_L R_L} \Rightarrow \boxed{v_L = 2,4 \text{ km/s}}$$

- e) El movimiento es uniformemente acelerado a lo largo de una distancia  $D = 1000 \text{ m}$ .

$$v_L = \sqrt{2aD} \Rightarrow a = 2,8 \times 10^3 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F = ma = 5,6 \times 10^5 \text{ N}$$

Llevando este valor de la fuerza a (1), se obtiene

$$\boxed{I = 1,1 \times 10^6 \text{ A}}$$

- f) La fuerza de interacción entre los raíles es repulsiva. El campo magnético creado por un rail sobre el otro no es uniforme. En las proximidades de  $A_T$ , donde  $\alpha_1 \approx 0^\circ$ , el campo en el eje del otro rail es

$$B \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L}$$

Suponiendo que, en promedio, la corriente en el otro rail circula por su eje, la fuerza por unidad de longitud es

$$f \approx IB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I^2}{L} \Rightarrow \boxed{f \approx 1,3 \times 10^5 \text{ N/m}}$$

Lejos de  $A_T$ ,  $f$  se duplica porque  $B$  es el doble.



- g) La potencia disipada en forma de calor (efecto Joule) en una resistencia eléctrica  $R_e$  es

$$P = R_e I^2$$

$$R_e = \rho \frac{2D}{\pi R^2} = 1,1 \times 10^{-3} \, \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 1,4 \times 10^9 \, \text{W}}$$

El tiempo durante el que se acelera el proyectil se obtiene de

$$D = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0,84 \, \text{s}$$

Energía disipada:  $E = Pt \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 1,2 \times 10^9 \, \text{J}}$

La energía cinética de la carga acelerada hasta la velocidad de escape de la Luna,  $v_L$ , es

$$E_c = \frac{1}{2} m v_L^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_c = 5,6 \times 10^8 \, \text{J}}$$

Esta energía “útil” es del orden de la mitad de la disipada en los raíles en forma de calor.

## P2.- Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} \right) \vec{u}_\theta$		2
b)	$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} \right) dy (-\vec{i})$		1
c)	$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{L-R}{R} (-\vec{i})$		1,5
d)		$v_L = 2,4 \text{ km/s}$	1
e)		$I = 1,1 \times 10^6 \text{ A}$	1,5
f)		$f \approx 1,3 \times 10^5 \text{ N/m}$	1,5
g)		$P = 1,4 \times 10^9 \text{ W}$ $E = 1,2 \times 10^9 \text{ J}$ $E_c = 5,6 \times 10^8 \text{ J}$	0,5 0,5 0,5

### P3.- Ondas gravitacionales

El 11 de febrero de 2016 la colaboración aLIGO (advanced Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) anunció al mundo la primera detección directa de ondas gravitacionales, predichas desde hace un siglo por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. La señal con el código GW150914 (figura 1) se había detectado el 14 de septiembre de 2015 en los observatorios de Hanford y Livingston como una oscilación de unos 40 Hz de frecuencia inicial, que aumentó hasta unos 250 Hz en menos de 20 ms. El análisis de la señal, que llevó varios meses, permitió deducir que la onda se había producido a más de mil millones de años luz de la Tierra durante el proceso de fusión de dos agujeros negros moviéndose en órbitas espirales, es decir de radio decreciente, debido precisamente a la pérdida de energía por la emisión de una potente onda gravitacional (figura 2), hasta que el sistema colapsó en un único agujero negro de masa apreciablemente inferior a la suma de las masas de los dos agujeros negros originales.

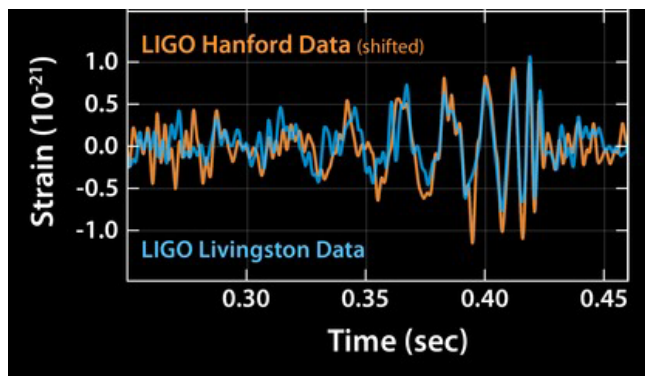


Fig. 1 Señales detectadas

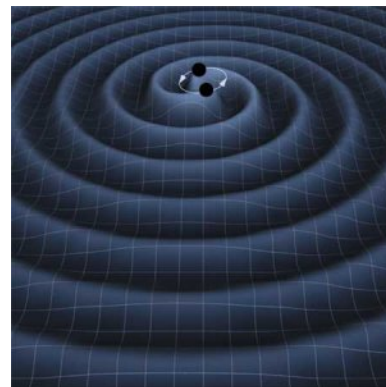


Fig. 2 Impresión artística de las ondas gravitacionales de dos agujeros negros en órbita.

Como sabrá, un agujero negro es un objeto de enorme masa que crea en su entorno un campo gravitatorio tan intenso que ninguna partícula, incluido un fotón que viaja a la velocidad de la luz  $c$ , puede escapar a su atracción si se encuentra a una distancia de su centro inferior a  $R_s$  (radio de Schwarzschild). En primera aproximación, podemos imaginar el agujero negro como una esfera masiva de radio  $R_s$ .

- a) Planteando que la velocidad de escape desde la distancia  $R_s$  es  $c$ , demuestre que el radio de Schwarzschild de un agujero negro de masa  $M$  es  $R_s = 2GM/c^2$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

Estudiaremos a continuación el movimiento orbital de dos agujeros negros de igual masa  $M$  que interaccionan gravitatoriamente. Suponga que ambos describen una trayectoria circular en torno al centro geométrico  $O$  del sistema (centro de masas), siendo  $R$  la distancia entre sus centros (figura 3).

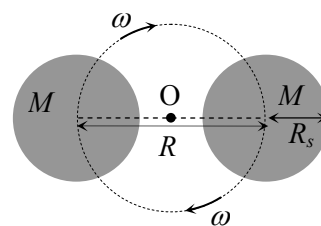


Fig. 3

- b) Determine la velocidad angular  $\omega$  con que giran ambos cuerpos, en función de  $G$ ,  $M$  y  $R$ .

Vamos a hacer algunos cálculos aproximados, cuando los agujeros negros están próximos a tocarse, es decir cuando la distancia entre sus centros es un poco superior a  $2R_s$ . Considere en concreto  $R = 3R_s$ . La frecuencia de la señal oscilante detectada en la Tierra<sup>1</sup> en estas circunstancias fue  $f_{\text{señal}} \approx 200$  Hz (situación en  $t \approx 0,42$  ms en la escala de la figura 1).

- c) Obtenga una expresión para  $\omega$  en este caso, en función de  $G$ ,  $M$  y  $c$ .
- d) Calcule la masa  $M$  de cada agujero negro. Exprese su resultado en kg y en masas del Sol.

<sup>1</sup> Ayuda: Tenga en cuenta que en cada revolución completa del sistema binario se emiten dos crestas de ondas gravitatorias, de forma que la frecuencia de la señal detectada en la Tierra es el doble de la frecuencia de la órbita de los agujeros negros.

La Teoría de la Relatividad General permite determinar la potencia  $P$  emitida en forma de ondas gravitacionales por un sistema de dos masas orbitando bajo la atracción gravitatoria mutua, como el que estamos considerando. Suponiendo que las dos masas son iguales y que la órbita es circular, se obtiene

$$P = \frac{64}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5}$$

La órbita real es espiral, con radio decreciente, pero pueden hacerse cálculos estimativos considerando la misma órbita circular con  $R = 3R_s$  de los apartados anteriores. En la figura 1 se observa que la onda gravitatoria se emitió principalmente durante un breve intervalo de tiempo, del orden de  $\Delta t = 10$  ms .

- e) Suponiendo que toda la energía emitida durante el proceso de interacción y colapso de los agujeros negros se traduce en una pérdida de masa del sistema, haga una estimación de esta pérdida,  $\Delta M$  . Exprese su resultado en kg y en masas del Sol.

Vamos a hablar ahora del sistema de detección. Se ha empleado un *interferómetro de Michelson*, que se esquematiza en la figura 4. Un haz de luz láser, de longitud de onda  $\lambda$ , incide a  $45^\circ$  sobre una lámina semiespejada (*divisor de haz*, D) donde se divide en dos haces, 1 y 2, que viajan en direcciones perpendiculares. Cada haz se refleja normalmente en un espejo plano,  $E_1$  y  $E_2$ , y vuelve hacia D. Parte del haz 1 se refleja y parte del 2 se transmite, de forma que en el haz 3 se superponen (interfieren) las ondas luminosas 1 y 2 que han ido y vuelto por cada uno de los *brazos* del interferómetro. La intensidad de la onda resultante depende de la diferencia de fase,  $\delta$ , entre estas dos ondas. Por ejemplo, si se superponen en contrafase ( $\delta = \pi$ ) la intensidad resultante  $I_3$  es nula (mínimo interferencial). Cualquier pequeña variación en la longitud de los brazos produce un cambio en el estado interferencial y por tanto en  $I_3$ , que se mide con un fotodetector, F.

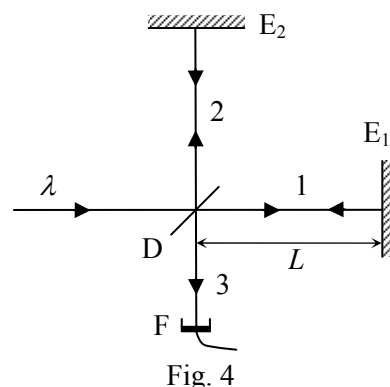


Fig. 4

Siguiendo con el ejemplo anterior, si partiendo de un mínimo interferencial la longitud de uno de los brazos aumenta en  $\lambda/4$ , el camino total recorrido por la luz en ese brazo (ida y vuelta) aumenta en  $\lambda/2$ , de forma que las ondas pasan a interferir en fase y se tiene un máximo interferencial. Si el aumento de longitud fuese  $\lambda/2$  se alcanzaría un nuevo mínimo nulo, en el *orden interferencial* siguiente al inicial.

En el interferómetro del observatorio de Livingston los dos brazos tienen la misma longitud  $L_0 = 4,0$  km. En la figura 5 se esquematiza, de forma muy exagerada, lo que ocurre cuando una onda gravitacional alcanza la superficie de la Tierra. Estas ondas acortan y alargan periódicamente la *fábrica del espacio tiempo* de forma que la longitud  $L$  de los brazos del interferómetro oscila entre  $L_0 + A$  y  $L_0 - A$ , con la particularidad de que estas oscilaciones están en contrafase, es decir cuando el brazo 1 alcanza su longitud máxima  $L_0 + A$ , el brazo 2 tiene la mínima,  $L_0 - A$ , y viceversa.

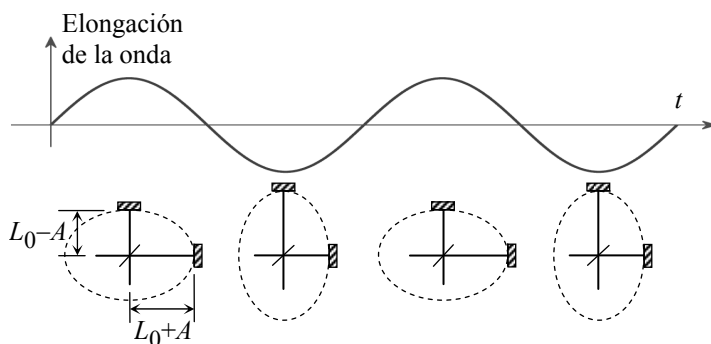


Fig. 5

Suele trabajarse en función de la deformación unitaria ("strain" en inglés) definida como  $h = \Delta L / L_0$ , donde  $\Delta L$  es la diferencia entre las longitudes de los dos brazos. Esta magnitud adimensional  $h$  es la que aparece en ordenadas de la gráfica de la figura 1, en la que se observan claramente las oscilaciones de  $h$  producidas por la llegada de la onda gravitacional. La amplitud de esta oscilación llega a alcanzar el valor  $h_{\max} \approx 10^{-21}$  cuando los agujeros negros empiezan a fusionarse.

- f) Haga una estimación de la máxima amplitud de oscilación de los brazos del interferómetro de Livingston,  $A_{\max}$ , cuando recibió esta señal. Compare su resultado con el radio de un protón.

La deformación a detectar es en la práctica tan pequeña que han sido necesarios extraordinarios esfuerzos técnicos para impedir que quede enmascarada por el “ruido” producido por microsismos o pequeñas variaciones térmicas.

Para poder detectar ondas muy débiles conviene que  $L_0$  sea lo mayor posible. Pero la longitud antes indicada,  $L_0 = 4,0$  km, no sería suficiente en la práctica para poder detectar las ondas producidas por la mayoría de los sucesos cósmicos previsibles. Para aumentar la longitud, se ha recurrido a situar otro espejo dentro de cada brazo, entre el divisor de haz y el espejo original del Michelson (figura 6). Estos espejos tienen una pequeña transmitancia, de forma que, en promedio, la luz realiza unos  $N \approx 280$  viajes de ida y vuelta entre los dos espejos enfrentados antes de volver a alcanzar el divisor de haz y contribuir a la interferencia en el haz 3. Con este procedimiento se consigue aumentar la longitud efectiva de los brazos del Michelson hasta

$$L_{\text{ef}} = NL_0 \approx 1100 \text{ km}.$$

Para terminar, vamos a caracterizar la extraordinaria sensibilidad del aparato. Observando la gráfica de la figura 1, se deduce que el sistema es capaz de detectar deformaciones, no enmascaradas por el ruido, con una amplitud mínima  $h_{\min} \sim 10^{-22}$ .

- g) Exprese la sensibilidad del instrumento en fracciones de orden interferencial<sup>2</sup>,  $\delta_{\min}/2\pi$ .

Datos: Constante de gravitación universal,  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$   
 Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$   
 Masa del Sol,  $M_{\text{Sol}} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$   
 Radio de un protón,  $r_p = 0,88 \times 10^{-15} \text{ m}$   
 Longitud de onda de la luz láser (Nd-YAG):  $\lambda = 1,06 \text{ }\mu\text{m}$

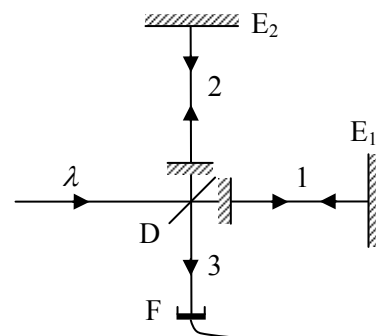


Fig. 6

<sup>2</sup> Ayuda: Cada nuevo orden interferencial corresponde a un cambio  $2\pi$  en la diferencia de fase  $\delta$  entre las dos ondas que se superponen en el haz 3.

### P3.- Solución

- a) El radio de Schwarzschild se obtiene planteando que la velocidad de escape (correspondiente a energía mecánica nula) es  $c$ .

$$E=0=\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{Mm}{R_s} \rightarrow \boxed{R_s = \frac{2GM}{c^2}}$$

b)  $G\frac{M^2}{R^2} = M\omega^2 \frac{R}{2} \rightarrow \boxed{\omega = \left(\frac{2GM}{R^3}\right)^{1/2}}$

c)  $R \approx 3R_s = \frac{6GM}{c^2} \rightarrow \boxed{\omega \approx \frac{c^3}{\sqrt{108} GM}}$

d)  $f_{\text{señal}} = 200 \text{ Hz} \rightarrow f_{\text{órbita}} = 100 \text{ Hz}; \omega = 200 \pi \text{ s}^{-1}$   
 $M \approx \frac{c^3}{\sqrt{108} G\omega} \rightarrow \boxed{M \approx 6,2 \times 10^{31} \text{ kg} = 31 M_{\text{Sol}}}$

Las masas deducidas del estudio detallado de la señal son  $M_1 = (36 \pm 5) M_{\text{Sol}}$ ,  $M_2 = (29 \pm 4) M_{\text{Sol}}$

e)  $R_s = \frac{2GM}{c^2} = 92 \text{ km}; \quad R = 3R_s = 276 \text{ km}$

$$P = \frac{64}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5} = 6,0 \times 10^{49} \text{ W}$$

$$\Delta E = P\Delta t \approx 6,0 \times 10^{47} \text{ J} = \Delta M c^2 \rightarrow \boxed{\Delta M \approx 6,7 \times 10^{30} \text{ kg} = 3,3 M_{\text{Sol}}}$$

La pérdida real estimada es  $\Delta M = (3 \pm 0,5) M_{\text{Sol}}$

- f) Amplitud de la deformación máxima detectada en  $L_0 = 4 \text{ km}$ :  $h_{\text{max}} \approx 10^{-21}$

$$h_{\text{max}} = \frac{\Delta L_{\text{max}}}{L_0} = \frac{2A_{\text{max}}}{L_0} \rightarrow A_{\text{max}} = \frac{h_{\text{max}} L_0}{2}$$

$$\boxed{A_{\text{max}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}}$$

$$\boxed{r_p / A_{\text{max}} \approx 440}$$

- g) Si la diferencia de longitudes de los brazos es  $\Delta L$ , la diferencia de caminos ópticos (ida+vuelta) es  $2\Delta L$ . Por tanto, la diferencia de fase entre las dos ondas es

$$\delta = k 2\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} 2h L_{\text{ef}}$$

Donde  $k$  es el número de ondas.

Cada cambio de fase  $2\pi$  corresponde a un nuevo orden interferencial. La amplitud mínima detectable es  $h_{\text{min}} \sim 10^{-22}$ . Por tanto, la sensibilidad del instrumento, en fracciones de orden interferencial es

$$\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} = \frac{2L_{\text{ef}}}{\lambda} h_{\text{min}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} \sim 2 \times 10^{-10}}$$

Nótese que, como se indica en el enunciado, para poder detectar señales muy débiles ( $h_{\text{min}}$  lo menor posible) interesa  $L_{\text{ef}}$  lo mayor posible.

### P3.- Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$R_s = \frac{2GM}{c^2}$		1
b)	$\omega = \left( \frac{2GM}{R^3} \right)^{1/2}$		1,5
c)	$\omega \approx \frac{c^3}{\sqrt{108} GM}$		1
d)		$M \approx 6,2 \times 10^{31} \text{ kg}$ $M \approx 31 M_{\text{Sol}}$	0,8 0,2
e)		$\Delta M \approx 6,7 \times 10^{30} \text{ kg}$ $\Delta M \approx 3,3 M_{\text{Sol}}$	1,8 0,2
f)		$A_{\text{max}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}$ $r_p / A_{\text{max}} \approx 440$	1,3 0,2
g)		$\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} \sim 2 \times 10^{-10}$	2