

# Olimpiada Mexicana de Física, 2015

## Problemas de Relatividad Especial

Rodrigo Pelayo Ramos

1. El sistema  $S'$  se mueve con velocidad  $0.6c$  respecto al  $S$ , como se muestra en la figura 1. Después de 10 s (tiempo medido en  $S$ ) de haber coincidido los orígenes  $O$  y  $O'$ , ocurre un suceso a  $4.2 \times 10^9$  m de  $O$ , a lo largo del eje  $X$  en su sentido positivo (distancia medida en  $S$ ). ¿A qué distancia de  $O'$  (medida en  $S'$ ) ocurre este suceso y cuánto tiempo después de coincidir sus orígenes (medido en  $S'$ )? ¿A qué distancia de  $O'$ , medida en  $S$ , ocurre el referido suceso?

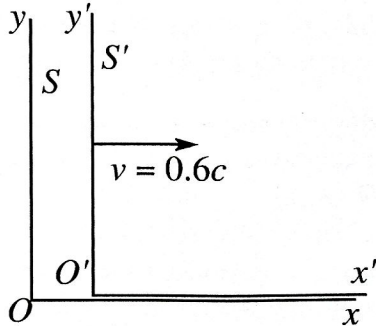


Figura 1: Problema 1

2. Se tiene un triángulo en que la longitud propia de cada uno de sus lados es igual a  $a$ . Calcular el perímetro de este triángulo en un sistema de referencia, que se mueve a una velocidad constante  $v$  con respecto a él a lo largo de : (a) uno de sus lados; (b) una de sus bisectrices.

Analizar los resultados obtenidos cuando  $v \ll c$  y  $v \rightarrow c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz.

3. Una barra se desplaza a una velocidad constante frente a una marca inmóvil en un sistema de referencia  $S$  durante  $\Delta t = 20$  ns. Mas en el sistema de referencia, ligado a la barra, la marca se

mueve a lo largo de ésta un intervalo de tiempo  $\Delta t' = 25$  ns. Determinar la longitud de la barra.

4. Se producen muones por el continuo bombardeo de los rayos cósmicos sobre los átomos de las capas superiores de la atmósfera. La velocidad de estos muones hacia abajo es de  $\mu c$  ( $\mu < 1$ ). A cierta altura  $h$  sobre el nivel del mar, un avión de investigaciones registra una lluvia de  $N_0$  muones por minuto. ¿Cuántos muones por minuto registra un barco a nivel del mar, sabiendo que el tiempo medio de vida de los muones es  $\tau$ ? ¿Qué fracción representa del total al nivel del avión?
5. Una barra se mueve a lo largo de una regla a cierta velocidad constante. Si en el sistema de referencia ligado a la regla se marca simultáneamente la posición de ambos extremos de la barra, la diferencia de las lecturas de estos extremos de la regla es  $\Delta x_1 = 4.0$  m. Ahora, si la posición de ambos extremos se señala simultáneamente en el sistema de referencia ligado a la barra, la diferencia de lecturas en la misma regla es  $\Delta x_2 = 9.0$  m. Determinar la longitud propia de la barra y su velocidad respecto a la regla.
6. El diagrama de espacio-tiempo de la figura 2 muestra tres acontecimientos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que tuvieron lugar en el eje  $x$  de cierto sistema inercial de referencia. Hallar:

- a) el intervalo de tiempo entre los acontecimientos  $A$  y  $B$  en aquel sistema de referencia en que ambos transcurren en un mismo punto.
- b) la distancia entre los puntos donde tuvieron lugar los acontecimientos  $A$  y  $C$ , en

el sistema de referencia en que estos son simultáneos.

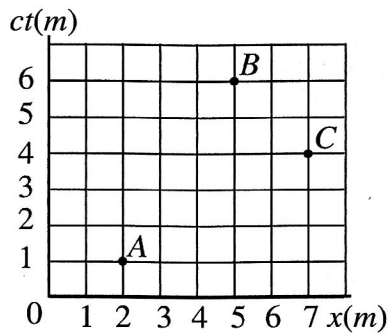


Figura 2: Problema 6

7. Dos partículas inestables se mueven respecto de un sistema de referencia  $S$  y en un mismo sentido a la velocidad  $v = 0.99c$ . La distancia entre ellas en este sistema de referencia es  $l = 120$  m. En cierto momento ambas partículas se desintegraron simultáneamente en el sistema de referencia ligado a ellas. ¿Qué lapso se observó entre los instantes de la desintegración de ambas partículas en el sistema  $S$  y qué partícula se percibió que se desintegraba antes?
8. Un cohete viaja a  $0.6c$  respecto a las estrellas fijas y a su encuentro viaja un meteorito a  $0.4c$  respecto a las mismas estrellas. Desde el cohete se disparan hacia el meteorito partículas muy energéticas con velocidad  $0.8c$  respecto al cohete.
  - a) ¿Qué velocidad tienen las partículas respecto al meteorito en el sistema de referencia fijo a éste?
  - b) ¿Qué velocidad de aproximación relativista tienen las partículas y el meteorito en un sistema ligado a las estrellas fijas?
9. Dos cohetes viajan al encuentro con velocidades de  $0.4c$  y  $0.6c$  respecto a las estrellas fijas. Al cruzarse, los observadores del cohete  $A$  registran que el cohete  $B$  es de la misma longitud que el  $A$ . ¿Cuál es la relación de las longitudes medidas desde el cohete  $B$  en el mismo cruce?
10. Una partícula  $A$  se mueve con velocidad  $+0.6c$  respecto al laboratorio, por el eje  $x$ , y otra,  $B$ , se

mueve a  $+0.8c$  por el eje  $y$ , respecto al sistema de laboratorio también. ¿Cuál es la velocidad de la partícula  $B$  respecto a la  $A$ ? Dé su módulo y dirección respecto a un sistema  $x'y'$  que se desplaza con la partícula  $A$ .

11. Un transmisor en la Tierra emite dos pulsos luminosos con un intervalo de tiempo  $T$ , y son recibidos por un cosmonauta que se aleja de la Tierra con velocidad  $v$ . (a) ¿Qué tiempo transcurre en la nave entre las dos recepciones? (b) ¿Con qué longitud de onda recibe el cosmonauta estos pulsos luminosos si en la tierra se emitieron con longitud  $\lambda$ ?
  12. Dos gemelos con 19 años viajan a un planeta que se encuentra a 12 años luz de la tierra. Asuma que el planeta y la tierra se encuentran en reposo uno respecto al otro. Los gemelos parten al mismo tiempo en diferentes naves espaciales. Uno de ellos viaja a una velocidad de  $0.90c$ , y el otro lo hace a  $0.45c$ . ¿Cuál es la diferencia entre las edades de los gemelos cuando se vuelven a encontrar y cuál de los dos es más viejo?
  13. Se tienen dos hermanos gemelos,  $A$  y  $B$ . El gemelo  $A$  permanece en Tierra (sistema casi inercial) y el  $B$  realiza un viaje de ida y vuelta, en línea recta, hasta una estrella a cierta distancia  $d$  de la Tierra, viajando en un cohete a velocidad  $v$ , muy alta, respecto a la Tierra.
    - a) ¿Qué tiempo mide  $A$  para sí durante el viaje de ida y vuelta de  $B$ ?
    - b) ¿Qué tiempo mide  $B$  para sí durante su viaje de ida y vuelta?
- Si los gemelos se mandan señales de radio todo el viaje, con frecuencia  $f$  igual a sus propias pulsaciones:
- c) Cuántas pulsaciones cuenta  $A$  para sí durante el viaje de  $B$ , y cuántas recibió de  $B$ ?
  - d) Cuántas pulsaciones cuenta  $B$  para sí durante el viaje, y cuántas recibió de  $A$ ?

14. El sistema  $S'$  se desplaza con velocidad constante  $V$  respecto del sistema  $S$ . Calcular en el



sistema  $S'$  la aceleración  $a'$  de una partícula que se mueve en el sistema  $S$  rectilíneamente con velocidad  $v$  y aceleración  $a$ :

- a) en la misma dirección que  $\mathbf{V}$ ;
- b) perpendicular al vector  $\mathbf{V}$ .

15. Un cohete imaginario que despegue de la Tierra, vuela con aceleración  $a = 10g$ , que es la misma en cualquier sistema de referencia que se desplace junto al cohete. La aceleración según el tiempo terrestre dura  $\tau = 1$  año. Averiguar: (a) En cuánto por ciento difiere la velocidad del cohete de la de la luz al final de la aceleración; (b) ¿Qué distancia habrá recorrido el cohete a este momento? (c) Calcular también el tiempo de aceleración del cohete  $\tau_0$  en un sistema de referencia ligado al cohete, tomando en cuenta que éste se define por la ecuación:

$$\tau_0 = \int_0^\tau \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt$$

16. Un protón se desplaza con un momento  $p = 10 \text{ GeV}/c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. ¿En cuánto por ciento diferirá la velocidad del protón de la de la luz?
17. Un haz de partículas relativistas con una energía cinética  $K$  incide sobre un blanco absorbente. La intensidad de la corriente del haz es  $I$ ; La carga y la masa en reposo de cada partícula son  $e$  y  $m_0$  respectivamente. Hallar la fuerza con que presiona el haz sobre el blanco y la potencia que se disipa.
18. Una partícula con masa en reposo  $m_0$ , se mueve a lo largo del eje  $x$  en un sistema inercial de referencia  $S$  según la ley  $x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$ , donde  $b$  es cierta constante,  $c$ , la velocidad de la luz y  $t$  el tiempo. Determinar la fuerza que actúa sobre la partícula en este sistema de referencia.
19. Un núcleo emite un fotón  $\gamma$  a costa de que su masa  $M$  se reduzca a  $M - \Delta M$ , además que el núcleo retrocede. Demuestre que la energía del fotón emitido es

$$h\nu = \Delta M \left(1 - \frac{\Delta M}{2M}\right) c^2.$$

20. ¿Cuál debe ser la energía cinética de un protón que choca contra otro que se encuentra en reposo, para que la energía cinética total en el sistema del centro de masas sea igual a la de los dos protones aproximándose mutuamente, si la energía cinética de cada uno de ellos es  $K = 25 \text{ GeV}$ ?

21. Una línea de carga muy larga tiene densidad de carga lineal  $\lambda$ . Calcule: (a) la intensidad del campo eléctrico  $E_0$  que mide un observador en reposo a una distancia  $r$  de la línea. (b) La intensidad de campo eléctrico y la inducción magnética  $B$  que mide un observador que viaja a la velocidad  $v$  paralelamente a la línea de carga, a una distancia  $r$ . Expresé los resultados en función de  $E$  y considere  $v$  próximo a  $c$ .

22. Dadas las transformaciones de los campos electromagnéticos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right), \end{aligned}$$

donde  $\parallel$  y  $\perp$  indican que el campo es paralelo y perpendicular a la velocidad relativa  $\mathbf{v}$ . Demostrar que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  y  $c^2 \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$  son invariantes.

23. Un electrón con velocidad  $v = 0.8c$  atraviesa una zona con campos eléctrico y magnético homogéneos, de línea mutuamente perpendiculares, sin desviarse. Si se dispara con esa misma velocidad perpendicularmente a las líneas del campo magnético solo, sufre cierta aceleración  $a_B$ , y si se dispara con esa misma velocidad paralelamente a las líneas del campo eléctrico solo, sufre otra aceleración  $a_E$ . Encuentre la relación  $a_E/a_B$ .

24. **Problema de la 26ª IPhO, Australia, 1995**  
Muestre que el cambio de frecuencia  $\Delta f$  de un fotón cuando escapa de la superficie de una estrella hasta el infinito está dado por:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2}.$$

donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M$  es la masa de la estrella y  $R$  su radio.

Imaginemos que se usa una nave espacial para medir la masa y el radio de una estrella lejana. Los fotones emitidos por los iones de  $\text{He}^+$  de la superficie de la esfera son monitoreados a partir de absorciones resonantes de iones de  $\text{He}^+$  en la nave. La absorción resonante solamente ocurre cuando a los iones en la nave se des da una velocidad hacia la estrella que compense el corrimiento al rojo gravitacional. Como la nave se aproxima radialmente a la estrella la velocidad  $v$  de los iones de  $\text{He}^+$  relativos a la estrella se miden como función de la distancia radial  $d$  a la superficie de la estrella. Los valores experimentales medidos se dan a continuación:

$\beta = v/c (\times 10^{-5})$	$d (\times 10^8 \text{ m})$
3.352	38.90
3.279	19.98
3.195	13.32
3.077	8.99
2.955	6.67

Utilice estos valores para determinar la masa y el radio de la estrella.

**25. Problema de la 26ª IPhO, Australia, 1995 (No usado)**

Luz con frecuencia  $f_i$  y velocidad  $c$  es dirigida a un espejo formando un ángulo  $\theta_i$  respecto a la normal, el espejo retrocede con velocidad  $u$  en la dirección de la normal (figura 3). Asumiendo que los fotones del haz de luz tienen una colisión elástica en el sistema de referencia del espejo, determinar en términos de  $\theta_i$  y  $u/c$ , el ángulo de reflexión  $\theta_r$  de la luz y la frecuencia reflejada  $f_r$  respecto del sistema original. (Nota: Considerar las transformaciones relativistas de la energía y del momento.)

**26. Problema del selectivo de E.U. del 2000.**

Una partícula relativista decae en dos fotones. Uno de ellos viaja en dirección  $x$ -positiva con una frecuencia  $f_1$  y el otro en dirección  $x$ -negativa con frecuencia  $f_2 < f_1$ .

a) ¿Cuál es la velocidad  $v$  de la partícula?

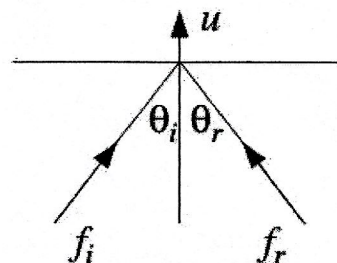


Figura 3: Problema 25

- b) ¿Cuál es la masa en reposo de la partícula?
- c) ¿Cuales son las frecuencias de los fotones en el sistema en que la partícula está en reposo?
- d) Se da la ecuación:

$$p'_x = F_1 p_x + F_2 \frac{E_\gamma}{c} \quad (1)$$

donde  $p'_x$  es la componente en  $x$  del momento de cada fotón en el sistema de referencia de laboratorio y  $E_\gamma$  y  $p_x$  la energía y el momento, respectivamente, del fotón en el sistema de reposo de la partícula. ¿Cuáles son las funciones  $F_1$  y  $F_2$  en términos de  $\beta$ ?