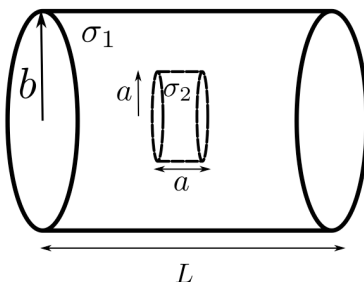


Problema 1

Se tiene un conductor de forma cilíndrica de radio b y longitud L , el material del conductor tiene conductividad σ_1 . Dentro del conductor, a la mitad de su longitud, se encuentra incrustado otro conductor cuya conductividad es σ_2 . El conductor interno tiene también forma cilíndrica, pero su radio y su longitud tienen el mismo valor a ($a < b$).



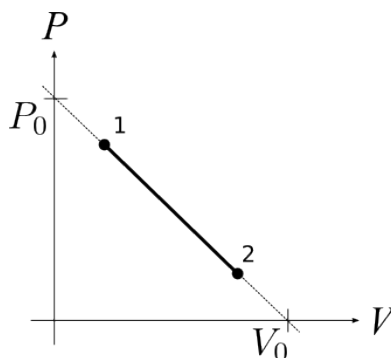
- Cuál es la resistencia total de ambos conductores en conjunto cuando $\sigma_1 = \sigma_2$
- Supón ahora que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, muestra que cuando $L, b \gg a$ la resistencia total es:

$$R_{tot} \approx \frac{L}{\sigma_1 \pi b^2} - \frac{a^3 (\sigma_2 - \sigma_1)}{\pi (\sigma_1 b^2)^2} \quad (1)$$

Problema 2

Un mol de un gas ideal monoatómico ($C_V = 3/2R$) ejecuta un proceso desde un estado inicial **1** hasta un estado final **2** que están unidos por una línea recta en el diagrama $P-V$, ver figura de abajo. Esta línea recta intercepta a los ejes de la presión y del volumen en los valores: P_0 y V_0 .

- Encuentra la máxima temperatura del gas durante el proceso **1**→**2**.
- Determinar para qué valor del volumen, Q es máximo.
- Dibuja las gráficas $T-V$ y $Q-V$, cuando $P_0 = 10 \text{ atm}$, $V_0 = 20 \text{ L}$, $P_1 = 8 \text{ atm}$ y $P_2 = 2 \text{ atm}$.



Problema 3, Interferencia de ondas.

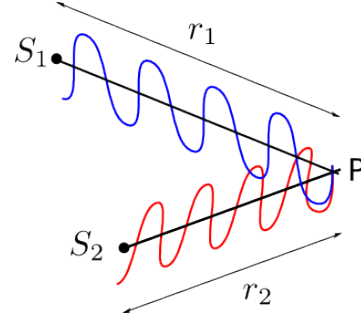
Considera la interferencia de dos ondas transversales de la misma frecuencia ω :

$$\begin{aligned} \psi_1(r_1, t) &= A_1 \cos(kr_1 - \omega t + \varphi_1) \\ \psi_2(r_2, t) &= A_2 \cos(kr_2 - \omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (2)$$

A_1 y A_2 es a la amplitud de cada onda; φ_1 y φ_2 corresponde a la fase inicial de cada onda ($t = 0$).

La distancia que recorre cada onda desde su “fuente” u origen hasta el punto P de interferencia es r_1 , r_2 , tal como se muestra en la figura.

$$\begin{aligned}\overline{S_1P} &= r_1 \\ \overline{S_2P} &= r_2\end{aligned}\quad (3)$$



Para simplificar supongamos que ambas ondas tienen la misma fase inicial (igual a cero): $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, se dice que ambas ondas son *coherentes*.

Distingamos la fases “espacial” de cada onda: $\phi_1 \equiv kr_1$, $\phi_2 \equiv kr_2$, en general serán diferentes y su diferencia determinará la interferencia de ambas ondas, como veremos a continuación.

La suma de ambas ondas (2) esta dada por la siguiente expresión:

$$\psi_T = \psi_1 + \psi_2 = A_T \cos(\phi_T - \omega t) \quad (4)$$

donde la amplitud total A_T y la fase de la onda resultante ϕ_T se encuentran a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}A_T &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\Delta)}, \\ \tan \phi_T &= \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}\end{aligned}\quad (5)$$

en la segunda igualdad de la amplitud total A_T , se ha identificado la diferencia de fase espacial:

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= kr_1 - kr_2 = k\Delta \\ \Delta &\equiv r_1 - r_2\end{aligned}\quad (6)$$

$\Delta = r_1 - r_2 = \overline{S_1P} - \overline{S_2P}$ es la *diferencia de camino*¹ que recorren las dos ondas ψ_1 y ψ_2 hasta el punto de interferencia.

Por otra parte, la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, por lo que la intensidad resultante de ambas ondas en el punto de interferencia esta dado por:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k\Delta, \quad \begin{cases} k\Delta = 2\pi m, & \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta = \pi(2m + 1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Los máximos y mínimos de interferencia (interferencia constructiva y destructiva, respectivamente) dependen de la diferencia de camino Δ . Si las amplitudes de cada onda son iguales ($A_1^2 = A_2^2 = I_0$), entonces la intensidad total es:

$$\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k\Delta}{2}\right)}, \quad \begin{cases} k\Delta = 2\pi m, & \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta = \pi(2m + 1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

¹Puede ser que cada onda se mueva en dos medios diferentes, entonces se define la *diferencia de camino óptico* como $\Lambda = n_1r_1 - n_2r_2$, donde n_1 y n_2 corresponde al índice de refracción del medio en el que se propaga cada onda.

En términos de la longitud de onda $k = 2\pi/\lambda$, la condición de máximos y mínimos de interferencia se obtienen cuando:

$$\begin{cases} \Delta = \lambda m, & \text{interferencia constructiva} \\ \Delta = \frac{\lambda}{2} (2m + 1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Ejercicio: Demuestra las relaciones (5) a partir de la suma de las dos ondas (2).
(puedes usar números complejos o una representación vectorial de cada onda)

3.1 Doble rendija.

Para el experimento de la doble rendija (ver figura 2.1) **encuentra** la diferencia de camino, $\Delta = \overline{S_1P} - \overline{S_2P}$, entre las dos ondas que atraviesan las rendijas S_1 y S_2 que interfieren en el punto P sobre la pantalla colocada a una distancia s de la rendija, a un ángulo θ_m sobre la horizontal.

A partir de la diferencia de camino Δ **encuentra** la expresión de altura y_m a la cual se obtienen los máximos de intensidad (interferencia constructiva) en términos únicamente de los parámetros s , λ , a .

Determina la separación entre dos máximos (o mínimos) sucesivos, en términos de los mismo parámetros s , λ , a . De esta manera, midiendo la separación entre dos máximos

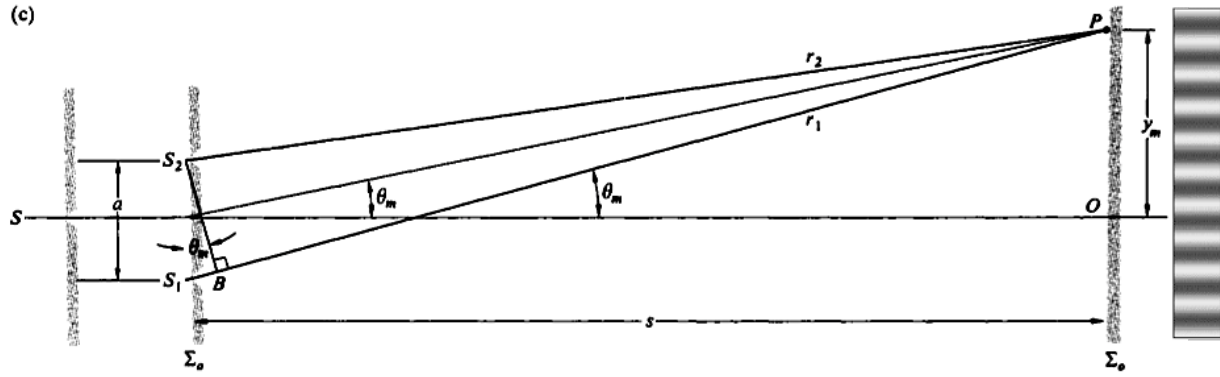


figura 2.1

3.2 Conjunto de rendijas.

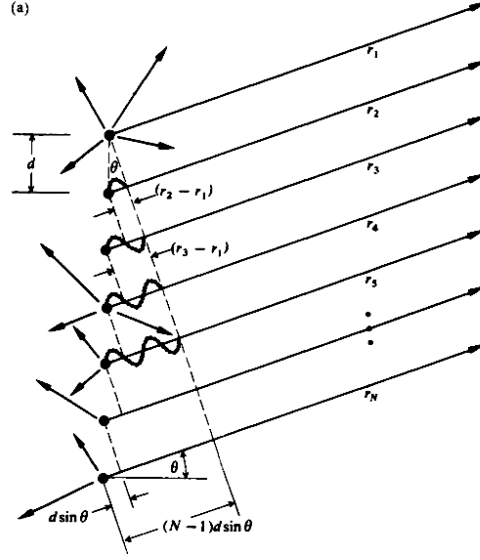


figura 2.2

Considera ahora un conjunto de N rendijas separadas una distancia d , cada rendija se puede considerar como una fuente puntual de ondas, ver la figura 2.2 Si las ondas que emergen de cada una de las fuentes tienen la misma frecuencia ω , la misma amplitud A y tienen la misma fase inicial (coherencia), **demuestra** que la suma de todas las ondas (interferencia) en un punto P sobre una pantalla que se encuentra muy lejos, similar al de la figura 2.1, está dado por:

$$\psi_T = A e^{-i\omega t} e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (10)$$

Donde se entiende que la onda total está representada por la parte real de la expresión anterior y δ está dada por:

$$\delta = kd \sin \theta \quad (11)$$

Si se denota con R a la distancia desde el centro del conjunto de rendijas hasta el punto P (comparar con la figura 2.1), entonces la onda total está descrita por:

$$\psi_T = A \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \cos(kR - \omega t) \quad (12)$$

Nuevamente se obtiene algo similar a la suma de dos ondas, ecuación (4), pero con una amplitud diferente. Así el patrón de intensidades, debido a la interferencia de todas las ondas, que se observa sobre la pantalla está dada por:

$$I = A^2 \frac{\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin \theta]} \quad (13)$$

Dibuja la gráfica de la expresión anterior, resalta los valores de intensidad máxima y mínima. A partir de este resultado comenta **cómo podrías medir la longitud de onda λ** de la fuente a través de este método.

3.2 Película delgada

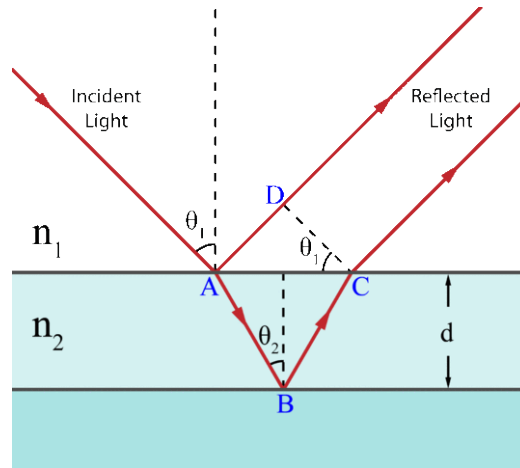


figura 2.3

La diferencia de camino entre dos ondas que interfieren puede depender también del medio donde se propaga cada una de las ondas. Un ejemplo de esto se observa en la interferencia de la luz reflejada por una película delgada, como se muestra en la figura. En este caso los rayos que interfieren son los dos rayos reflejados en A y C, el primero se debe a la reflexión directa del rayo incidente sobre la superficie que separa los dos medios de índices n_1 y n_2 ; mientras que la segunda reflexión corresponde a un rayo que se transmite \overline{AB} , se refleja en el punto B sobre la superficie inferior (en general la superficie inferior puede ser otro medio de índice n_3 o el mismo medio de arriba n_1) y finalmente se refracta en el punto C al medio superior.

En general se define el *camino óptico* Λ como el producto de la distancia l que recorre un rayo de luz en un medio por el índice de refracción n del medio: $\Lambda = ln$

Problema: Determina la diferencia de camino óptico entre los dos rayos reflejados por una película de índice de refracción n_2 , ver figura 2.2, en términos de los parámetros n_2 , d , θ_2 y d .

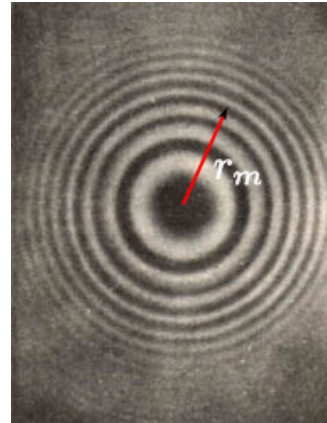
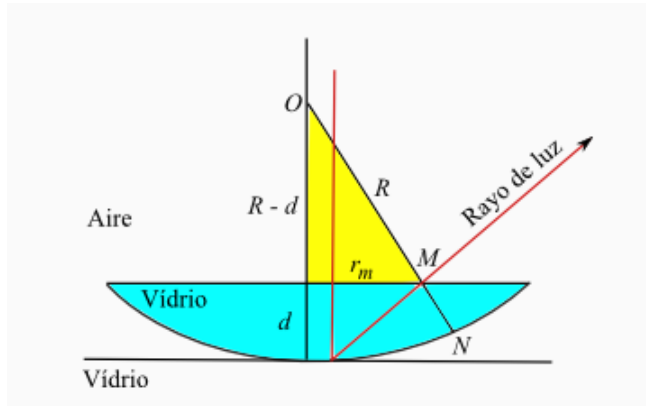
Cuando la luz es reflejada por una superficie que separa dos medios de índice de refracción n_1 , n_2 se puede presentar además un desfase relativo entre el rayo reflejado respecto del rayo incidente, si $n_2 > n_1$ el desfase relativo es de π .

Una burbuja de jabón, por ejemplo, tiene índice de refracción $n_b > 1$, encuentra en este caso las condiciones de interferencia constructiva y destructiva en términos del índice de refracción de la burbuja n_b , el grosor de la burbuja d y el ángulo de transmisión θ_2 .

3.4 Anillos de Newton

Cuando se coloca una lente sobre una superficie plana el patrón de interferencia que se observa, de los rayos de luz reflejados, consiste en una serie de anillos concéntricos como los que se muestran en la figura.

Empleando el resultado del inciso anterior, determina la posición r_m de los máximos y mínimos de intensidad (constructiva, destructiva) en términos del radio de curvatura de la lente R y la longitud de onda λ .



Problema 4. La bobina de inducción o carrete de Ruhmkorff.

(8 puntos)

La bobina de inducción construida por Ruhmkorff en 1851, antes del invento de los transformadores propiamente dichos, es un dispositivo destinado a producir en un circuito secundario una fuerza electromotriz (fem) inducida mucho mayor que la fem aplicada en un circuito primario. En la figura 1 se muestra una fotografía de un carrete de Ruhmkorff.

Las bobinas de inducción fueron básicas en los albores de los rayos X y de la “telefonía sin hilos”. Se han usado y todavía se usan en los motores de explosión para producir la chispa en las bujías.

Tal como se muestra en el esquema de la figura 2, el carrete consta esencialmente de un arrollamiento *primario*, formado por varias espiras de hilo grueso de cobre, aisladas entre sí y arrolladas sobre un núcleo de hierro dulce. Sus terminales se conectan a un generador de corriente continua de tensión V_p , intercalando un interruptor que continuamente abre y cierra el circuito de un modo automático.



Fig. 1

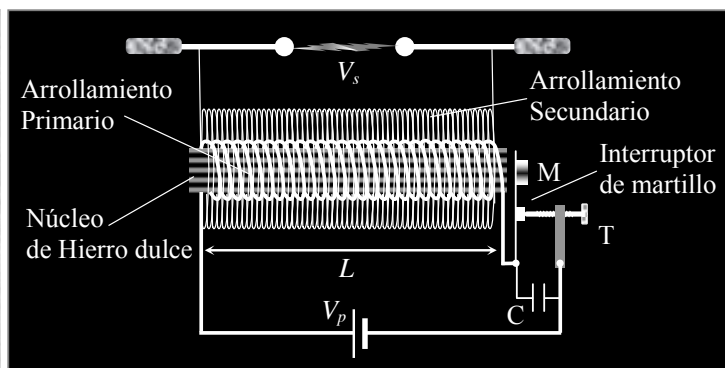


Fig. 2

Otro arrollamiento, llamado *secundario*, va dispuesto sobre el primario y está constituido por un gran número de espiras de hilo fino, muy bien aisladas eléctricamente entre sí y con el primario, cuyos terminales constituyen los bornes de la bobina, entre los cuales habrá un voltaje $V_s \gg V_p$.

En el carrete esquematizado en la figura 2, la bobina del primario tiene una longitud L y está formada por N_p espiras circulares de diámetro D_p . Estas espiras son de hilo de cobre, de resistividad ρ y de sección circular con diámetro d_p . Considerando que el circuito primario está cerrado:

- Obtenga la expresión de la intensidad de corriente continua que circularía por el primario, I_0 , si estuviese constantemente conectado a la batería de fem V_p .
- Si la corriente que circula por el primario es I_0 , despreciando los efectos de los extremos del arrollamiento, es decir, considerando al primario como un solenoide largo, obtenga la expresión del campo magnético dentro del solenoide, sin tener en cuenta el núcleo, B_0 .

Considere en adelante que en el interior del primario hay un núcleo de hierro dulce formado por un manojó de alambres aislados entre sí para reducir las pérdidas producidas por corrientes de Foucault. Su misión es aumentar la intensidad del campo magnético B_0 que crearía el primario sin núcleo hasta un valor $B = \mu_r B_0$. La relación entre las permeabilidades magnéticas relativa, μ_r , y absoluta, μ , del material del núcleo es $\mu_r = \mu / \mu_0$.

En la figura 2 aparece un interruptor de *martillo*. Su funcionamiento es simple: al pasar la corriente por el primario, la armadura M, montada sobre una lámina flexible, es atraída por el núcleo y se separa del tornillo T, con lo que el circuito primario se abre y la corriente tiende a anularse. En ese momento, cesa la atracción porque el núcleo se desmagnetiza (hierro dulce) y M vuelve a la posición inicial en la que el contacto del tornillo T cierra de nuevo el circuito.

Para evitar en parte las chispas que se forman entre los contactos en las interrupciones periódicas, se coloca un condensador (capacitor) C , que no se tendrá en cuenta en el desarrollo de este ejercicio.

Como el interruptor de martillo abre y cierra el circuito periódicamente, la corriente del primario es variable con el tiempo, $I_p(t)$, y lo hace periódicamente con una frecuencia $f = 1/T$.

La dependencia con el tiempo de I_p es difícil de describir analíticamente. Por sencillez, supondremos que varía con el tiempo como se muestra en la figura 3: en cada periodo T , la corriente crece linealmente desde 0 hasta I_0 en el intervalo $0 < t < 4T/5$ y decrece desde I_0 hasta 0 en el intervalo $4T/5 < t < T$. En consecuencia, el campo magnético creado también variará con el tiempo, $B(t)$.

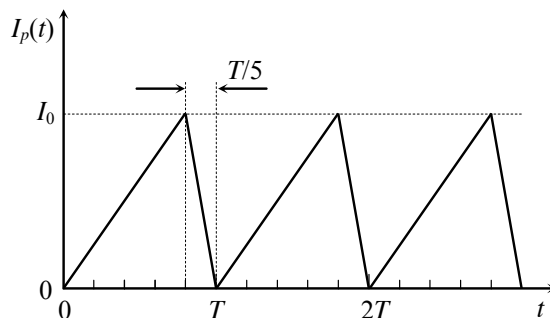


Fig. 3

- Determine las expresiones de la fem inducida en el circuito secundario, $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$, en los intervalos de tiempo $0 < t < 4T/5$ y $4T/5 < t < T$, respectivamente.
- Con los valores numéricos de la Tabla de datos, calcule los valores de $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$.
- Haga una representación gráfica de la fem inducida en el secundario, V_s , en función del tiempo.

Tabla de datos	
Fem de la batería	$V_p = 12,0 \text{ V}$
Longitud de la bobina	$L = 15,0 \text{ cm}$
Diámetro de las espiras del primario	$D_p = 2,00 \text{ cm}$
Diámetro del hilo del primario	$d_p = 0,600 \text{ mm}$
Resistividad del Cobre	$\rho = 1,70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Frecuencia del interruptor	$f = 1/T = 100 \text{ Hz}$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permeabilidad magnética relativa del núcleo	$\mu_r = 300$
Número de espiras del secundario	$N_s = 25\,000$