XXII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Guadalajara, Jal. 20-24 de noviembre de 2011

Prueba teórica SOLUCIÓN

---

1. **PROBLEMA Colisión de piedras (8 puntos)**

Una piedra esférica se deja caer desde un edificio alto de altura h (desde la calle) al tiempo $t = 0$. En el mismo instante otra piedra idéntica se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso de la calle con una velocidad u en la misma línea vertical del movimiento de la primera piedra.

Ecuaciones de movimiento para cada piedra (caída libre):

piedra que cae

$$y_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$
$$v_1(t) = -gt \tag{2}$$

piedra lanzada desde el suelo

$$y_2(t) = ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$
$$v_2(t) = u - gt \tag{4}$$

1.1	Calcule el tiempo t_c al cual las piedras chocan.	2 punto

De las expresiones para la posición de cada piedra:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2(t) &= ut - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{5}$$

en el tiempo t_c, las piedras chocan por lo que tienen la misma posición: $y_1(t_c) = y_2(t_c)$, igualando las expresiones anteriores:

$$h - \cancel{\frac{1}{2} g \left(t_c\right)^2} = u t_c - \cancel{\frac{1}{2} g \left(t_c\right)^2} \tag{6}$$

despejando se obtiene el tiempo en el que chocan ambas piedras:

$$\boxed{t_c = \frac{h}{u}} \tag{7}$$

1.2	Si al chocar, las piedras tienen la misma *magnitud* de la velocidad ¿cuales son los valores de u y t_c?	2 punto

La velocidad (en magnitud) para cada piedra al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned} \left|v_1\left(t\right)\right| &= gt \qquad \text{piedra que se deja caer} \\ \left|v_2\left(t\right)\right| &= u - gt \qquad \text{piedra que es lanzada desde el suelo} \end{aligned} \tag{8}$$

Si ahora en el momento del choque (a un tiempo t_c) la velocidades de ambas piedras son iguales:

$$g t_c = u - g t_c \quad \Rightarrow \quad u = 2 g t_c \tag{9}$$

sustituyendo este valor de u en (7) se obtiene el tiempo de choque:

$$t_c = \frac{h}{2 g t_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_c = \sqrt{\frac{h}{2g}}} \tag{10}$$

sustituyendo este valor en (9) se obtiene la velocidad u:

$$\boxed{u = 2g\sqrt{\frac{h}{2g}} = 2\sqrt{\frac{gh}{2}}} \tag{11}$$

con estos resultados se puede calcular la velocidad de ambas piedras en el momento del choque:

$$\begin{aligned} \left|v_1\left(t_c\right)\right| &= g t_c = g\sqrt{\frac{h}{2g}} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad & v_1\left(t_c\right) = -\sqrt{\frac{gh}{2}} \\ \left|v_2\left(t_c\right)\right| &= u - g t_c = 2\sqrt{\frac{gh}{2}} - g\sqrt{\frac{h}{2g}} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad & v_2\left(t_c\right) = \sqrt{\frac{gh}{2}} \end{aligned} \tag{12}$$

1.3	Continuando con el inciso anterior, si la colisión es elástica calcule los tiempos a los cuales las piedras golpean el piso. Exprese tales tiempos en términos de t_c. Recuerda que en una colisión elástica algunas cantidades se conservan.	2 puntos

Como se trata de una colisión elástica, entonces se conserva la energía y el momento. Pero además las piedras son identicas y en el momento del chocan tienen la misma velocidad, por lo tanto la velocidad de ambas piedras después del choque es la misma, pero ahora con direcciones opuestas:

$$\begin{aligned} v_1(t_c) &= \sqrt{\frac{gh}{2}} \\ v_2(t_c) &= -\sqrt{\frac{gh}{2}} \end{aligned} \tag{13}$$

El tiempo de caída al suelo **desde el momento que chocan**, se encuentra poniendo $y = 0$ en (1) y (3). Entonces teniendo en cuenta las velocidades de ambas piedras depués del choque (13), para cada piedra tenemos:

$$\begin{aligned} t_{s1} &= \frac{v_1(t_c)}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{[v_1(t_c)]^2} y_c}\right] && \text{piedra que se deja caer} \\ t_{s2} &= \frac{v_2(t_c)}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{[v_2(t_c)]^2} y_c}\right] && \text{piedra que es lanzada desde abajo} \end{aligned} \tag{14}$$

Donde y_c es la altura del choque, sustituyendo el valor de $t_c = \sqrt{h/2g}$ en cualquiera de (5):

$$y_c = h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{h}{2g}}\right)^2 = h - \frac{1}{2}\frac{h}{2} = \frac{3}{4} h \tag{15}$$

sutituyendo este valor (junto con $v_1(t_c)$ y $v_2(t_c)$) en (14):

$$\begin{aligned} t_{s1} &= \frac{1}{g}\sqrt{\frac{gh}{2}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{\left(\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)^2}\frac{3}{4}h}\right] = \sqrt{\frac{h}{2g}}\,[1+2] = 3\sqrt{\frac{h}{2g}} = 3t_c \\ t_{s2} &= -\frac{1}{g}\sqrt{\frac{gh}{2}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{\left(-\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)^2}\frac{3}{4}h}\right] = -\sqrt{\frac{h}{2g}}\,[1-2] = \sqrt{\frac{h}{2g}} = t_c \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora solo hay que sumar el tiempo de choque para obtener el tiempo total en que cada piedra cae al suelo desde el tiempo inicial:

$$\begin{aligned} t_{caida} &= \boxed{4t_c} \qquad \text{piedra que se deja caer} \\ t_{caida} &= \boxed{2t_c} \qquad \text{piedra lanzada desde el suelo} \end{aligned} \tag{17}$$

1.4	Haga un diagrama de la trayectoria (altura contra tiempo) para cada piedra y especifique claramente los tiempos y alturas en sus diagramas.	2 puntos

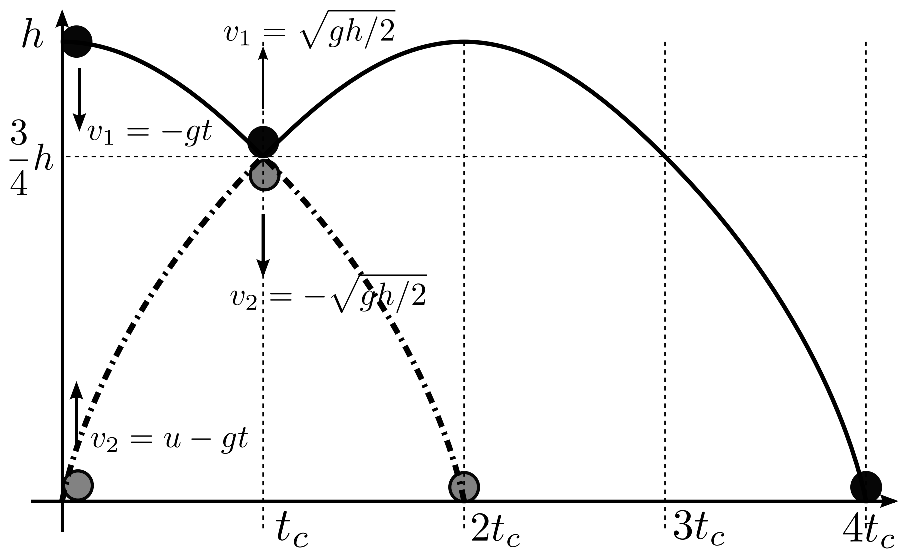


Figura 1: Trayectorias para ambas piedras, la linea continua para la piedra que se deja caer y la linea punteada para la piedra que se lanza desde el suelo.

2. **PROBLEMA Leyes de Kepler. (7 puntos)** Un planeta P de masa m se encuentra en una orbita elíptica alrededor de una estrella S de masa M, como se indica en la figura 2a. Cuando el planeta se encuentra a una distancia r de la estrella, tiene velocidad v. Considere que los semiejes mayor y menor de la elipse tienen longitudes $2a$ y $2b$.

2.1	Escriba una expresión para la energía E del planeta.	0.5 punto

$$E = E_{cinetica} + E_{potencial} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \tag{18}$$

2.2	De la expresión anterior, deduzca el punto donde la velocidad v es máxima y el punto donde es mínima.	1 punto

despejando la velocidad del resultado anterior:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}E + 2\frac{GM}{r}} \tag{19}$$

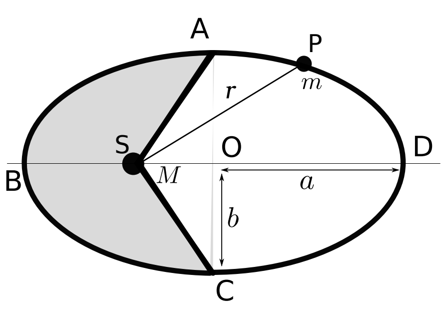
como la energía es constante la velocidad varía con la distancia r ($v \sim 1/\sqrt{r}$).

la velocidad máxima se obtiene cuando r es mínimo, es decir en el punto B.

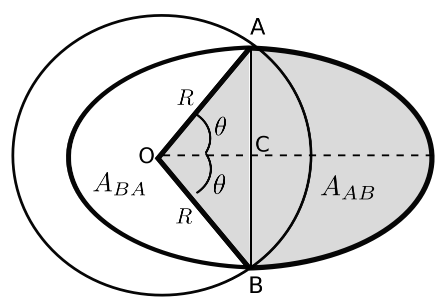
la velocidad mínima se obtiene cuando r es máximo, es decir en el punto D.

2.3	Discuta si el tiempo en que se recorre el arco A-B-C es el mismo que en el que se recorre el arco C-D-A, o si es diferente.	1 punto

De la Segunda Ley de Kepler, el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. El área que barre el planeta cuando recorre el arco A-B-C (área sombreada en la figura 2a) es diferente al área que barre cuando recorre el arco C-D-A (área sin sombrear), por lo tanto el tiempo en que recorre ambos arcos NO es el mismo.



(a)



(b)

Figura 2

La Tercera Ley de Kepler establece que el periodo T de una órbita elíptica está relacionada con el semieje mayor a por: $T^2 = ka^3$, donde k es una constante.

2.4	Determine el valor numérico de la constante usando el hecho que la orbita de la Tierra alrededor del Sol puede considerarse como circular, es decir, $a = b$, con el Sol en O. La distancia Tierra - Sol es $R_S = 1.5 \times 10^{11}$ m.	0.5punto

depejando k de la Tercera Ley de Kepler (con $a = R_s$):

$$k = \frac{T_{tierra}^2}{R_s^3} = \frac{(1 \text{ año})^2}{(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^3} \approx \boxed{2.9 \times 10^{-19} \text{s}^2/\text{m}^3} \tag{20}$$

2.5	El cometa Halley da una vuelta alrededor del Sol cada 76 años. Calcule la longitud del semieje mayor de la orbita del cometa. Exprésela en términos de R_S.	0.5 punto

De la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_{Halley}^2}{R_{Halley}^3} = \frac{T_{tierra}^2}{R_s^3} = k, \qquad \Rightarrow \quad R_{Halley} = \left(\frac{T_{Halley}}{T_{tierra}}\right)^{2/3} R_s = \left(\frac{76 \text{ años}}{1 \text{ año}}\right)^{2/3} R_s \approx \boxed{17.9\, R_s} \tag{21}$$

La Segunda Ley de Kepler nos dice que la línea r, del planeta P a la estrella S, barre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, el área que barre entre dos puntos de la órbita es proporcional al tiempo que tarda en ir de un punto al otro.

Considere ahora un cohete que es lanzado desde la superficie de un planeta esférico de radio R, desde un punto A y que regresa a la superficie en el punto B, vea la figura 2b. La separación angular entre el punto de lanzamiento A y el de aterrizaje B, con respecto al centro del planeta es 2θ. La trayectoria entre A y B es "media" elipse, es decir, el eje mayor es $2R$ y el menor la distancia entre A y B. (El área de la elipse es πab)

2.6	¿Cuánto tarda el cohete en recorrer la trayectoria de A a B, suponiendo que tardaría T_0 en recorrer la elipse completa?	2.5 punto

Sea A_{AB} y t_{AB} el área que barre de AB (área sombreada, figura 2b) y el tiempo en que la barre; de igual forma A_{BA} y t_{BA} el área que barre de BA (no sombreada) y el tiempo en que la barre. Por la Segunda Ley de Kepler:

$$\frac{t_{AB}}{A_{AB}} = \frac{t_{BA}}{A_{BA}} \qquad \Rightarrow \quad t_{AB} = \frac{A_{AB}}{A_{BA}} t_{BA} \tag{22}$$

como $t_{AB} + t_{BA} = T_0$, entonces:

$$t_{AB} = \frac{T_0}{1 + \frac{A_{BA}}{A_{AB}}} \tag{23}$$

ahora bien, el área total de la elipse es:

$$A_{AB} + A_{BA} = \pi ab = \pi \left(R\right) \left(R \operatorname{sen}\theta\right) = \pi R^2 \operatorname{sen}\theta \tag{24}$$

mientras que el área A_{AB} es la mitad del área de la elipse, más dos veces el área del triangulo OCA (figura 2b):

$$A_{AB} = \frac{\pi R^2 \operatorname{sen}\theta}{2} + 2\left(\frac{R\cos\theta \times R\operatorname{sen}\theta}{2}\right) = \frac{\pi R^2 \operatorname{sen}\theta}{2} + R^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = R^2 \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\pi}{2} + \cos\theta\right) \tag{25}$$

dividiendolos las ecuaciones (24) y (25), se obtiene:

$$\frac{A_{AB} + A_{BA}}{A_{AB}} = \frac{\pi \cancel{R^2 \operatorname{sen}\theta}}{\cancel{R^2 \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\pi}{2} + \cos\theta\right)} = \frac{2\pi}{\pi + 2\cos\theta} \tag{26}$$

de donde:

$$\frac{A_{BA}}{A_{AB}} = \frac{2\pi}{\pi + 2\cos\theta} - 1 \tag{27}$$

finalmente sustituyendo está relación en (23) se obtiene el tiempo que le toma al cohete el ir de A a B:

$$\boxed{t_{AB} = \frac{T_0}{\cancel{1} + \frac{2\pi}{\pi + 2\cos\theta} - \cancel{1}} = \frac{T_0}{\frac{2\pi}{\pi + 2\cos\theta}} = T_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{\pi}\right)} \tag{28}$$

2.7	El resultado anterior ¿se aplica al caso θ= 0? explique.	1 punto

Si se aplica, en este caso el cohete alcanza una altura R y regresa al mismo punto desde donde fue lanzado. El tiempo de vuelo del cohete es en este caso:

$$t_{AB}\left(\theta = 0\right) = T_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 0}{\pi}\right) = T_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) \approx 0.8\, T_0 \tag{29}$$

3. **PROBLEMA La brújula desviada (8 puntos)**

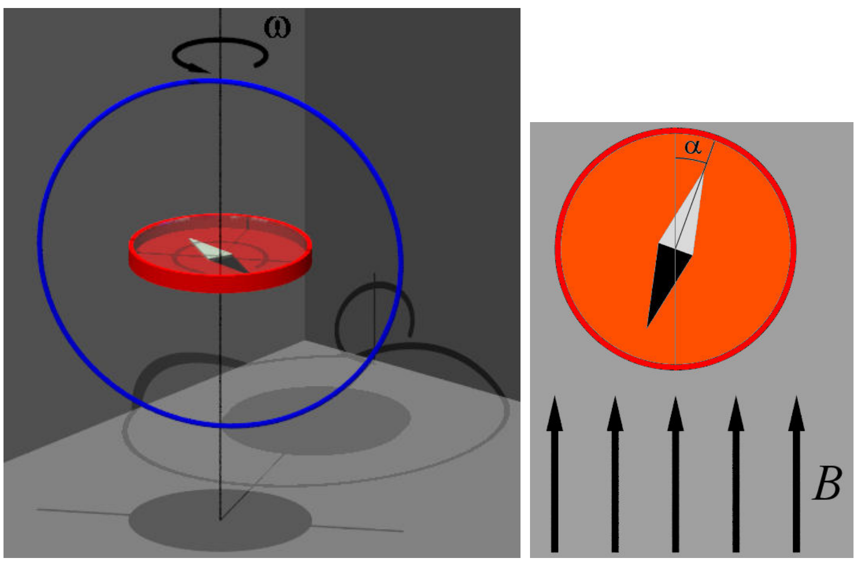
Supongamos que estamos en una posición en la superficie terrestre donde el campo magnético de la Tierra sólo tiene componente horizontal B. Una pequeña brújula (ver figura 3a) puede moverse libremente en el plano horizontal. En ausencia de otras fuerzas se alineará con las líneas del campo magnético apuntando hacia el norte magnético. Rodeando la brújula hay un anillo circular metálico de radio r que rota respecto al eje vertical (perpendicular al plano de la brújula) con frecuencia angular ω.

La permeabilidad del vacío es $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ Vs/Am

Pueden ser útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(a)\,\mathrm{sen}(a) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2a)$$

$$\mathrm{sen}^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\right]$$



(a) (b)

Figura 3

3.1	Ignorando la contribución de la brújula y tomando en cuenta que el anillo está rotando, el flujo magnético depende del tiempo. Suponga que para el tiempo inicial $t = 0$ el anillo tiene su plano perpendicular al campo magnético de la Tierra. ¿Cuál es el flujo magnético a través del anillo metálico?	1 punto

El flujo magnético se define como: $\Phi = \pi r^2 B \cos(\omega t)$

3.2	¿Cuál es el voltaje V inducido en el anillo?	1 punto

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 B\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.3	Si el anillo tiene resistencia R, ¿cuál será la corriente I inducida en el anillo?	1 punto

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\pi r^2 B\omega}{R} \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.4	Esta corriente fluyendo por el anillo inducirá un campo magnético B_I en el centro del anillo. ¿Cuál será su magnitud?	1 punto

$$B_I = \mu_0 \frac{I}{2r} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.5	La dirección del campo magnético B_I es perpendicular al plano del anillo y rota con él. ¿Cuánto vale B_{par}, la componente de B_I paralelo al campo magnético de la Tierra B? ¿Cuánto vale B_{per}, la componente de B_I perpendicular al campo magnético de la Tierra B?	1 punto

La componente paralela será:

$$B_{par} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R}\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\omega t)$$

mientras que la componente perpendicular será:

$$B_{per} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}^2(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{4R}\left[1 - \cos(2\omega t)\right]$$

3.6	Suponga que la respuesta de la brújula es lo suficientemente lenta para que los términos de los componentes de B_I que oscilan en el tiempo se promedien y se cancelen. Es decir, que términos que son proporcionales a $\operatorname{sen}(\alpha\theta)$ ó $\cos(\alpha\theta)$ (pero no producto de ellos) se pueden aproximar a cero. Encuentra la componente que sea constante en el tiempo y que por lo tanto pueda afectar la orientación de la brújula?	1 punto

Si, es el término:

a) $B'_{per} = \mu_0 \dfrac{\pi r B\omega}{4R}$

3.7	¿Cuál es el ángulo α (ver figura 3b) que esta componente constante en el tiempo a la brújula de su posición normal?	1 punto

$$\tan(\alpha) = \frac{B'_{per}}{B} = \mu_0 \frac{\pi r \omega}{4R}$$

3.8	Para el caso de $r = 0.1$ m, $\omega = 100$ s^{-1} , y $R = 10^{-4}$ ohms, ¿cuál será el valor de α?	1 punto

$$\alpha = \arctan\left[\mu_0 \frac{\pi r \omega}{4R}\right] = \arctan\left[1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{Vs/Am} \frac{\pi\,(0.1\ \mathrm{m})\left(100\ \mathrm{s}^{-1}\right)}{4\left(10^{-4}\ \mathrm{ohms}\right)}\right] \approx 5.6^\circ \tag{30}$$

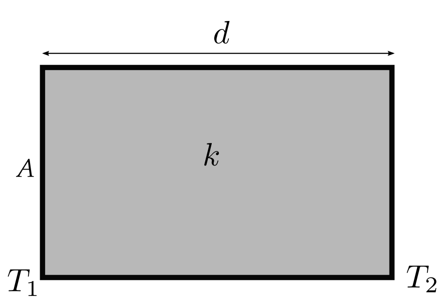
4. **PROBLEMA Conducción de calor (7 puntos)**

La transferencia de calor (razón de flujo de calor) a través de un solido, debido a la diferencia de temperaturas en sus caras opuestas, están regida por la ecuación:

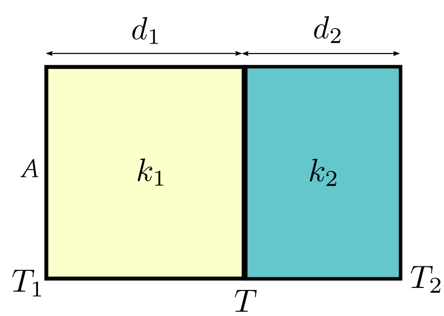
$$-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{d}\right) \tag{31}$$

donde k se define como la conductividad del material, A es el área transversal del sólido y d es el espesor del solido; T_1 y T_2 corresponde a la temperatura en ambas caras del solido (figura 4a).

La ecuación (31) establece que la razón del flujo de calor (lado izquierdo) es proporcional a la diferencia de temperaturas en el solido y su área transversal (lado derecho). La constante de proporcionalidad k se conoce como conductividad térmica.



(a)



(b)

Figura 4

Considera dos tablas de igual sección transversal A, con espesor d_1, d_2 y conductividad térmica k_1 y k_2 respectivamente. Se ponen en contacto en su sección transversal de forma paralela. La cara exterior a la primer tabla se mantiene a temperatura T_1, y la segunda a temperatura T_2 (figura 4b).

Si T es la temperatura en la unión de las dos tablas, calcula:

4.1	La razón de flujo de calor $\dfrac{\triangle Q}{\triangle t}$ a través de ambas tablas unidas	3 puntos

aplicando la ecuación (31) a cada tabla se obtiene la transferencia de calor a través de cada una de ellas:

$$-\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{k_1 A \left(T_1 - T\right)}{d_1} \tag{32}$$

$$-\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{k_2 A \left(T - T_2\right)}{d_2} \tag{33}$$

de ambas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} T_1 - T &= -\frac{d_1}{k_1 A}\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} \\ T - T_2 &= -\frac{d_2}{k_2 A}\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \end{aligned} \tag{34}$$

Como el flujo de calor se debe conservar, entonces:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{35}$$

aplicando esta relación al par de ecuaciones (34) y sumandolas se obtiene la razón de flujo de calor a través las tablas unidas:

$$\boxed{-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{A\left(T_1 - T_2\right)}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}} \tag{36}$$

4.2	La temperatura T en la interfase, en términos de los parámetros: k_1, d_1, T_1 y k_2, d_2, T_2	2 puntos

Eliminando $\Delta Q/\Delta t$ del par de ecuaciones (34), se encuentra la temperatura en la interfase de contacto :

$$\boxed{T = \frac{T_1\left(k_1/d_1\right) + T_2\left(k_2/d_2\right)}{\left(k_1/d_1\right) + \left(k_2/d_2\right)}} \tag{37}$$

4.3	La conductividad equivalente k_{eq} de ambas tablas unidas.	2 puntos

La ecuación (36) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$-\frac{\triangle Q}{\triangle t}=\frac{A\left(T_1-T_2\right)}{\frac{d_1}{k_1}+\frac{d_2}{k_2}}=\frac{d}{\frac{d_1}{k_1}+\frac{d_2}{k_2}}\frac{A\left(T_1-T_2\right)}{d}=k_{eq}\frac{A\left(T_1-T_2\right)}{d} \tag{38}$$

donde $d=d_1+d_2$, entonces la conductividad de la tabla compuesta es:

$$\boxed{k_{eq}=\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{k_1}+\frac{d_2}{k_2}}} \tag{39}$$