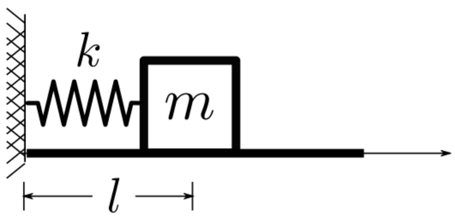
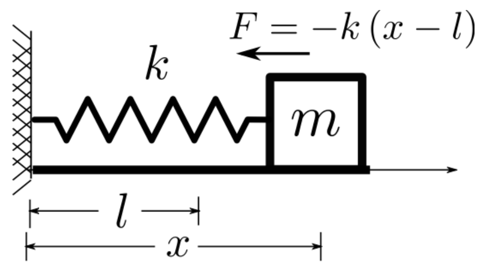
Tarea 4

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Fecha de entrega: viernes 17 de febrero

Problema 15, Oscilador Armónico.





Considera un bloque de masa m que se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento y esta sujeto a un resorte de constante elástica k. En su posición de equilibrio el resorte tiene longitud l. Cuando se desplaza el bloque desde su posición de equilibrio el resorte se estira (o comprime) y ejerce una fuerza sobre el bloque que es proporcional a la distancia que se desplaza el bloque y en dirección contraria al desplazamiento del bloque (sin sobrepasar el límite elástico del resorte), esto es la ley de Hooke.

$$F = -k\,(x - l) \tag{1}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton $F = ma$, como la aceleración es la segunda derivada respecto del tiempo de la posición, entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$ma = -k\,(x - l) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,(x - l) = 0 \tag{2}$$

Formalmente la última expresión es una *ecuación diferencial de segundo orden*; es decir, se trata de una ecuación donde la incógnita es la función . Al encontrar explícitamente la posición como función del tiempo $x\,(t)$ se ha resuelto la ecuación diferencial. Es una ecuación diferencial de segundo orden porque la derivada de más alto orden es la segunda derivada de la función incógnita (sería de primer orden si contuviera la primer derivada y así en general).

En física la ecuación ecuación diferencial del tipo (2) se le conoce como de *oscilador armónico* porque su solución varía periódicamente en el tiempo, se dice que es un *movimiento armónico simple.* A veces se suele simplificar y hacer $l = 0$, entonces la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

La solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico se puede escribir de diferentes maneras pero todas equivalentes, una de ellas es la siguiente:

$$x\,(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \tag{4}$$

La solución de una ecuación diferencial de segundo orden requiere dos constantes (las de primer orden requieren solo una constante), en este caso A y B, cuyo valor esta determinado por la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0, es decir al tiempo $t = 0$. La frecuencia angular de oscilación es ω

1. Sustituye la solución (4) en la ecuación diferencial (3) y encuentra el valor de la frecuencia angular ω en términos de los parámetros k y m.

2. En ocasiones es conveniente escribir la solución (4) de la siguiente manera:

$$x\left(t\right)=D\sin\left(\omega t+\phi\right) \tag{5}$$

   donde ahora D y ϕ son las constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales. En este caso D es la amplitud de oscilación y ϕ es una fase inicial del movimiento. Comparando ambas soluciones (4) y (5), encuentra las relaciones que deben satisfacer las constantes de ambas soluciones A, B con D, ϕ.

3. Considera el movimiento de un bloque de masa m sujeto a un resorte que al tiempo $t=0$ se suelta en la posición x_0 con velocidad v_0. Determina en este caso las constantes A y B de la solución (4), así como las constantes D y ϕ de la solución (5) en términos de los parámetros iniciales x_0 y v_0 (y de la frecuencia de oscilación).

4. Determina la energía total del bloque y verifica que se conserva, es decir que es constante en el tiempo.

5. Si se conocen las condiciones del bloque en dos puntos diferentes; es decir, si el bloque se encuentra en la posición x_1 con velocidad v_1 y en la posición x_2 su velocidad es v_2, encuentra bajo estas condiciones la frecuencia angular y la amplitud del movimiento.

6. Cómo cambia la solución (4) cuando la longitud de equilibrio del resorte no es cero, es decir $l\neq 0$.

Problema 16, Movimiento Armónico Simple.

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. Un bloque de madera cuya densidad respecto del agua es ρ tiene dimensiones a, b, c. Mientras está flotando en el agua con el lado a en la posición vertical, se empuja hacia abajo y se suelta. Encontrar el período de la oscilación resultante.

2. Encontrar, para un MAS los valores promedios de la posición: $\langle v\rangle$, y de su cuadrado: $\langle v^2\rangle$, donde los periodos se refieren en un periodo de tiempo, T.

   El promedio de una función $f\left(x\right)$ en un intervalo $[a,\, b]$ esta dado por:

$$\langle f\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\,dx \tag{6}$$

3. Una varilla metálica delgada y uniforme de masa m tiene un pivote (sin fricción) en su centro, como se muestra en la figura. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño θ con respecto a la vertical y se suelta. Demuestra que el movimiento de la varilla es MAS y calcula su periodo.

4. Determine el cambio del periodo ΔT de un péndulo simple cuando la aceleración debida a la gravedad cambia en Δg. (Sugerencia: el nuevo periodo $T+\Delta T$ se obtiene sustituyendo $g+\Delta g$ por g, desarrolla la expresión empleando el teorema del binomio y conserva los dos primeros términos) Expresa el resultado en cambio fraccionarios: $\Delta T/T$ en términos de $\Delta g/g$. Un reloj de péndulo da la hora correcta en un punto donde $g=9.800\,\mathrm{m/s^2}$, pero se atrasa 4 segundos cada día a una altura mayor, calcula el valor aproximado de g en este nuevo lugar.

5. Una varilla uniforme de longitud L oscila con ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x de su centro. (a) Demuestra que su frecuencia angular es $\sqrt{gx/\left[(L^2/2)+x^2\right]}$, (b) demuestra que su frecuencia angular máxima se da cuando $x=L/\sqrt{12}$, (c) ¿qué longitud tiene la varilla si la frecuencia angular máxima es $2/\pi$ rad/s ?

Problema 17, gravitación.

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas

1. En la novela "De la Tierra a la Luna" de Julio Verne de 1865 tres hombres viajaron a la Luna en un cascarón disparado desde un cañón gigante hundido en el suelo de Florida. (a) Calcule la rapidez inicial necesaria para disparar el cascarón verticalmente hasta una altura sobre la Tierra igual al radio de ésta. (b) Calcule la rapidez de escape, es decir, la rapidez inicial que permitiría al cascarón escapar de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y la atracción gravitacional de la Luna. El radio de la Tierra es $R_T = 6380\,\text{km}$ y su masa es $m_T = 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg}$.

2. Suponga que desea poner un satélite meteorológico de 1000 kg en órbita circular a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. (a) ¿Qué rapidez, periodo y aceleración radial debe tener? (b) ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita? (c) ¿Cuánto trabajo adicional se necesitaría para que el satélite escapara de la Tierra?

3. Deimos, una luna de Marte, tiene un diámetro aproximado de 12 km y una masa de 2.0×10^{15} kg. Suponga que está varado solo en Deimos y quiere jugar béisbol. ¡Usted mismo sería el lanzador y el bateador! (a) ¿Con qué rapidez tendría que lanzar la pelota para que entre en órbita y vuelva a donde usted está listo para batearla? ¿Cree que podría lanzarla con esa rapidez? b) ¿Cuánto tiempo (en horas) después del lanzamiento, la pelota debería estar lista para ser bateada?

4. Se tiene una varilla delgada uniforme tiene longitud L y masa M. Una esfera uniforme pequeña de masa m se coloca a una distancia x de un extremo de la varilla, sobre el eje de ésta. (a) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema varilla-esfera. Tome la energía potencial igual a cero cuando la varilla y la esfera están separadas una distancia infinita. Demuestre que su resultado se reduce al esperado cuando $x \gg L$ (quizá te sirva consultar la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln(1+x)$); (b) A partir de la relación entre la fuerza y la energía potencial: $F_x = -dU/dx$, calcula la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional que la varilla ejerce sobre la esfera.

5. Dos estrellas idénticas de masa M están en órbita alrededor de su centro de masa. Las dos órbitas son circulares con radio R, de modo que las dos estrellas siempre están en lados opuestos del círculo. (a) Calcule la fuerza gravitacional que una estrella ejerce sobre la otra. (b) Calcule la rapidez orbital de cada estrella y el periodo de la órbita. (c) ¿Cuánta energía se requeriría para separar las estrellas hasta el infinito?

Problema 18, gravitación

Resuelve uno de los siguientes problemas:

1. Si un satélite está en una órbita lo bastante baja, experimentará arrastre de la atmósfera terrestre. Dado que el arrastre realiza trabajo negativo (la dirección de la fuerza de arrastre es opuesta al movimiento), la energía mecánica disminuirá. La energía mecánica total en un satélite de masas m en órbita circular alrededor de la Tierra es:

$$E = -\frac{G m_T m}{2r} \tag{7}$$

donde r es la distancia desde el centro de la Tierra a la órbita del satélite.

Entonces, si E disminuye (se hace más negativa), el radio r de la órbita disminuirá. Si el arrastre es relativamente pequeño, puede considerarse que el satélite está en una órbita circular con radio continuamente decreciente.

Primero, demuestra que la velocidad de un satélite de masas m que se mueve en órbita circular de radio r es: $v = \sqrt{G\dfrac{m_T}{r}}$. (a) Si el radio de la órbita circular de un satélite disminuye, la rapidez orbital v del satélite aumenta. ¿Cómo puede conciliar esto con la afirmación de que la energía mecánica disminuye, ¿El arrastre es la única fuerza que realiza trabajo sobre el satélite al disminuir el radio orbital? (b) Debido al arrastre del aire el radio disminuye de r a $r - \Delta r$, donde $\Delta r \ll r$. Si la masa del satélite es m, demuestra que el aumento en la rapidez orbital es $\Delta v = \frac{\Delta r}{2}\sqrt{\frac{Gm_T}{r^3}}$; que el cambio de energía cinética es: $\Delta K = \frac{Gm_T m}{2r^2}\Delta r$; que el cambio de energía potencial gravitacional es $\Delta U = -2\Delta K$; y que la cantidad de trabajo efectuado por la fuerza de arrastre es $W = -\frac{Gm_T m}{r^2}\Delta r$; (c) un satélite de masa $m = 3000\,\mathrm{kg}$ está inicialmente en órbita circular a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre; a causa del arrastre del aire, la altura del satélite disminuye a 250 km. Calcula la rapidez inicial del satélite, el aumento en la rapidez, el cambio de energía cinética, potencial, el cambio de energía mecánica total y el trabajo realizado por el aire.

2. a) Demuestra que un objeto en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra tiene un periodo: $T =$ y una rapidez orbital es $v = \sqrt{G\frac{m_T}{r}}$ (b) demuestra que cuando el objeto se pasa a una órbita circular con radio un poco mayor $r + \Delta r$, donde $\Delta r \ll r$, su nuevo periodo es $T + \Delta T$ y su nueva rapidez orbital es $v + \Delta v$, donde Δr, ΔT, Δv son cantidades positivas:

$$\Delta T = \frac{3\pi\Delta r}{v} \qquad , \qquad \Delta v = \frac{\pi\Delta r}{T} \tag{8}$$

(te puede ser útil la aproximación: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, válida para $x \ll 1$)

(b) La Estación Espacial Internacional está en una órbita casi circular a una altitud de 398.00 km. Una cuadrilla de mantenimiento está a punto de llegar en un transbordador espacial que también está en una órbita circular en el mismo plano orbital que la ISS, pero con una altitud de 398.10 km. La cuadrilla acudió para retirar un cable eléctrico inutilizado con una longitud de 125 m que está unido a la ISS por un extremo, con el otro extremo flotando libre en el espacio. El plan es que el transbordador pesque el extremo libre en el instante en que la nave, la ISS y el centro de la Tierra están alineados. Al tensarse el cable, se soltará de la ISS. ¿Cuántos minutos después de que el transbordador atrapa el extremo suelto el cable se soltará de la ISS? (c) Demuestre que, si el transbordador no logra pescar el cable, la cuadrilla deberá esperar un tiempo $t \approx \frac{T^2}{\Delta T}$ para tener otra oportunidad. Calcule el valor numérico de t y explique si valdría la pena esperar.

Problema 18, matemáticas.

1) Una sucesión de números reales, es una progresión aritmética (PA) si la diferencia entre cada término y el anterior es constante. La constante en una PA se llama diferencia común, denotemos como d. Para que una PA quede completamente definida, además de especificar su diferencia común d, debemos especificar el primer término de la progresión que usualmente se denota a_1.

a) Sea $\{a_j\}_{j\epsilon\mathbb{N}}$ una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia común es d. Demostrar que la suma de los primeros n términos es:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right] \tag{9}$$

b) A partir de la igualdad anterior calcula la suma de los primeros 100 números naturales.

2) Una sucesión de números reales es una progresión geométrica (PG) si el cociente de cada término con el anterior es constante. Esta constante se llama razón común y la denotaremos con la letra r. Para que una PG quede completamente definida, debemos especificar el primer término de la progresión que denotaremos a_1 y la razón común r. De esta manera el n-esimo término de la progresión queda establecido por $a_n = a_1 r^{n-1}$.

La suma de los primeros n términos de la PG:

$$\begin{array}{rcllllllll}
S_n & = & a_1 & + & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \ldots & +a_1 r^{n-1} \\
rS_n & = & & & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \ldots & +a_1 r^{n-1} \quad + \quad a_1 r^n \\
\hline
S_n - rS_n & = & a_1 & -a_1 r^n & & & & & &
\end{array} \tag{10}$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}} \qquad \text{si} \begin{cases} |r| < 1 \\ n \to \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r}} \tag{11}$$

Ejercicios.

a) Calcula el valor de la siguientes suma:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = \tag{12}$$

b) Sabiendo que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcula la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\,(n+1)} = \tag{13}$$

c) Encuentra el valor de los enteros m y n de las siguientes fracciones escrita en su forma decimal:

$$\begin{aligned} 0.1\overline{83} = 0.1838383\ldots &= \frac{m}{n} \\ 1.4\overline{17} &= \frac{m}{n} \\ 0.\overline{61} &= \frac{m}{n} \end{aligned} \tag{14}$$

d) Se construye una pila de 20 cubos cuyas aristas forman una progresión geométrica de razón 4/5. Hallar el volumen de la pila en m^3 si el cubo mayor tiene una arista de 60 cm.

3) La **inducción matemática** es un método que permite demostrar una regla, propiedad, teorema, etc. que se cumple para cualquier entero positivo n. El principio de inducción matemática consiste en los siguientes dos "pasos":

1 Demostrar o verificar que se cumple para $n = 1$

2 Demostrar que si se cumple para $n = k \geq 1$ entonces debe cumplirse para $n = k + 1$

a) Demostrar por inducción matemática que:

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \tag{15}$$

b) Demostrar por inducción matemática que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots)^2 \tag{16}$$

Gravitación.

Sean dos partículas puntuales o cuerpos esféricos de masas m_1 y m_2 :

$$\text{Ley de Gravitación universal:} \qquad F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad G = 6.7 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \tag{17}$$

$$\text{Energía potencial gravitacional:} \qquad U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{18}$$

$$F_{grav} = -\frac{dU_g}{dr} \tag{19}$$

aceleración gravitacional:

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2}, \qquad m_T = 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg}\ ,\ R_T = 6.3 \times 10^{6}\,\text{m} \tag{20}$$

movimiento armónico simple

fuerza de restitución lineal
$$F_r = -kx$$

segunda ley de Newton
$$ma = -kx$$

ecuación movimiento armónico simple
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

posición (desplazamiento)
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

velocidad
$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

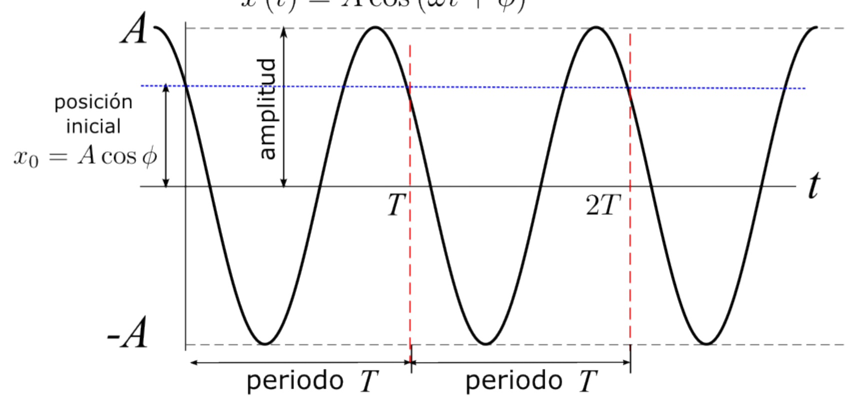
aceleración
$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2\, x$$

parámetros del movimiento armónico simple

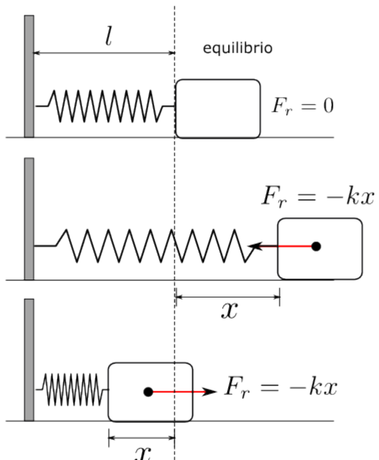
frecuencia: número de ciclos por unidad de tiempo f	
frecuencia angular: $\omega = 2\pi f$	amplitud: A
periodo: $T = 1/f$	ángulo de fase: ϕ

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$



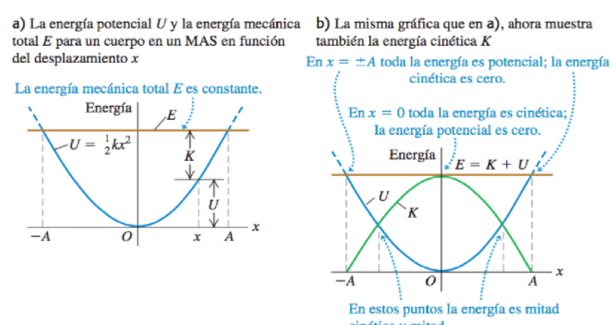
bloque unido a un resorte

Ley de Hooke
$$F_r = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



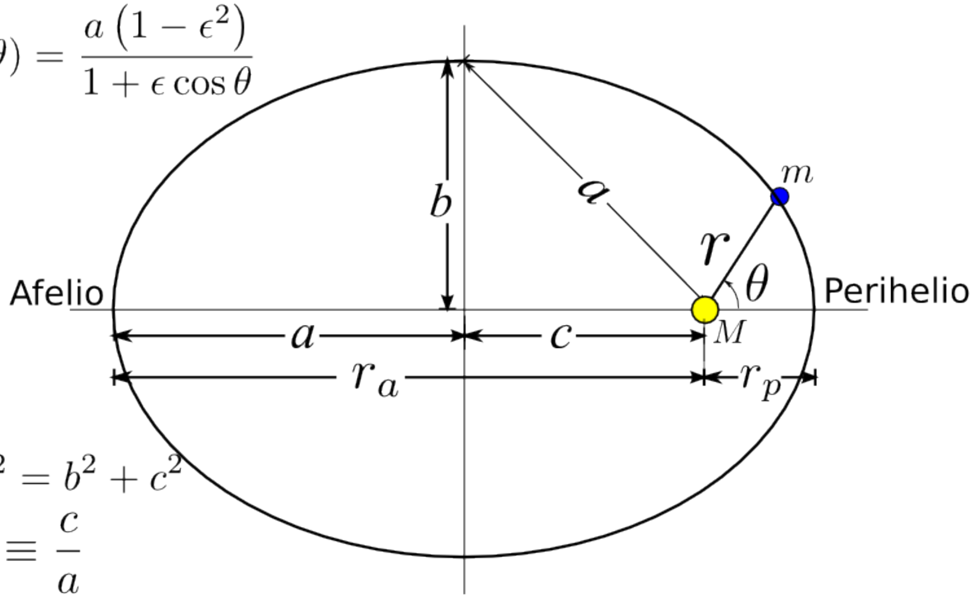
condiciones iniciales
$$x_0 = A\cos\phi$$
$$v_{0x} = -\omega A\sin\phi$$
$$\Updownarrow$$
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}$$
$$\tan\phi = -\frac{v_{0x}}{x_0\omega}$$

Energía $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$



primera ley de Kepler

$$r(\theta) = \frac{a\left(1-\epsilon^2\right)}{1+\epsilon\cos\theta}$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\epsilon \equiv \frac{c}{a}$$

la energía se conserva

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{D}{r} \qquad D \equiv GMm$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{D}{r^2}$$

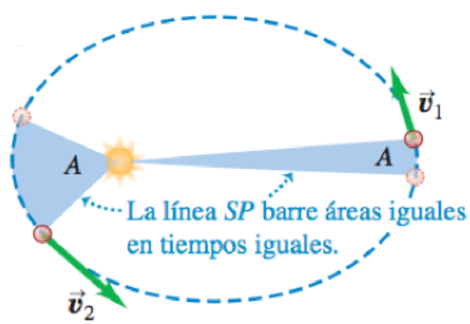
el momento ángular se conserva $L = mr^2\dot{\theta}$

segunda ley de Kepler

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = \text{constante}$$

tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$



$$\frac{L^2}{DM} = a\left(1-\epsilon^2\right)$$

$$E = \frac{D^2M}{2L^2}\left(\epsilon^2-1\right) = -\frac{GMm}{2a}$$