

Tarea 5

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF
Fecha de entrega: 11 marzo 2016

ENTRENAMIENTO 2016

Problema 18, ecuación de van der Waals

La ecuación de gas ideal: $PV = nRT$ es una aproximación a la descripción real de los gases que se satisface bien para bajas presiones y bajas densidades, la ecuación del gas ideal no depende del tipo de sustancia que esta compuesto el gas. El modelo microscópico del gas ideal es un sistema de partículas puntuales (sin dimensiones) que no interactúan entre ellas, es decir no ejercen ninguna tipo de fuerza unas a otras.

Por otra parte existe la ecuación de van der Waals que describe de mejor manera el comportamiento de los gases, sobre todo cerca del punto critico y en la coexistencia de la fase liquida y de vapor de una sustancia. El modelo microscópico en el que se basa la ecuación de van der Waals es que las partículas del gas tienen un volumen finito (no cero) y que interactúan atractivamente.

La ecuación de van der Waals esta dada por:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (1)$$

donde $v = V/n$ es el volumen molar (n es el número de moles del gas); a , b son dos constantes que dependen de la sustancia que esta compuesto el gas. La energía molar $u = U/n$ para el modelo de van der Waals esta dada por:

$$u = c_v T - \frac{a}{v} \quad (2)$$

18.1 Calcula la expresión de la compresibilidad isotérmica: $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ y el coeficiente de expansión volumétrica: $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

18.2 Demuestra que para la ecuación de van der Waals se obtiene que:

$$c_p - c_v = \frac{RT}{T - T_{esp}(v)}, \quad \text{donde: } T_{esp}(v) = \frac{2a(v-b)^2}{Rv^3} \quad (3)$$

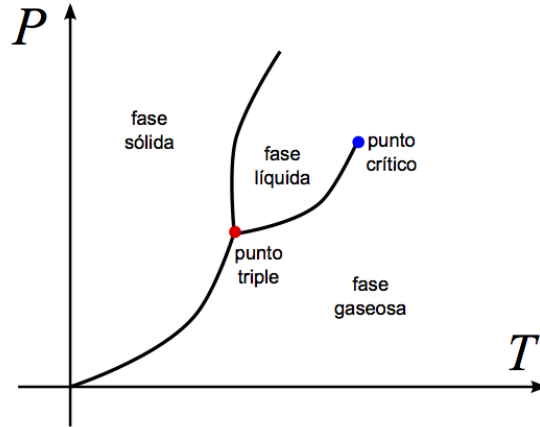
18.3 Determina la expresión de las curvas adiabáticas para el modelo de van der Waals en el espacio $p - v$ y determina la expresión del trabajo en un proceso adiabático desde un volumen molar inicial v_1 a un volumen final v_2 .

18.4 Determina la expresión de la entropía molar: $s(T, v)$ para el modelo de van der Waals (la entropía molar es $s = S/n$).

18.5 Demuestra que la expresión del calor en un proceso isotérmico realizado por un gas de van der Waals esta dado por:

$$Q_{isot} = nRT \ln \left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right) \quad (4)$$

El punto crítico de una sustancia es aquel donde coexisten en equilibrio la fase líquida y vapor (gas), caracterizado además por el hecho de no haber una interfase que separe ambas fases. Este punto es el límite de la curva de coexistencia liquido-gas (ver figura), en general sobre esta curva una sustancia se encuentra en fase líquida y gaseosa en equilibrio manteniéndose cada fase por separado a través de una interfase bien marcada. Sin embargo esta curva tiene un límite que termina en el punto crítico, donde ambas fases no están separadas por una interfase definida, sino que se trata de una mezcla de vapor saturado. El punto crítico es único para una sustancia pero es diferente para cada sustancia y está definido por: p_c , V_c , T_c (presión, volumen y temperatura críticas).



18.6 De manera general, para un gas con una ecuación de estado $p(V, T)$, el punto crítico está definido como un punto de inflexión:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Determina el punto crítico para la ecuación de van der Waals es decir encuentra: (p_c, V_c, T_c) en términos de los parámetros a , b de la ecuación de van der Waals, n el número de moles y la constante de los gases R .

18.7 Demuestra que la ecuación de Van der Waals se puede escribir en términos de las variables adimensionales: $\mathfrak{p} = p/p_c$, $\mathfrak{v} = V/V_c$, $\mathfrak{t} = T/T_c$, de la siguiente manera:

$$\left(\mathfrak{p} + \frac{3}{\mathfrak{v}^2} \right) (3\mathfrak{v} - 1) = 8\mathfrak{t} \quad (6)$$

Considerando que $1/3 \ll \mathfrak{v}$ y $8/(9\mathfrak{t}) \ll \mathfrak{v}$ demuestra que la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión, similar al gas ideal:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{v} \approx \frac{8}{3}\mathfrak{t} \quad (7)$$

Recuerda que de manera general para un gas la diferencia entre las calores específicas esta dada por la siguiente expresión:

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (8)$$

La forma diferencial de la primera ley se escribe como:

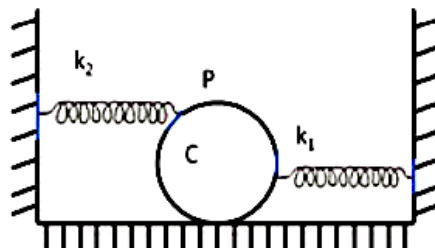
$$dU = dQ + dW \quad (9)$$

donde el trabajo termodinámico en un gas esta dado por: $dW = -pdV$

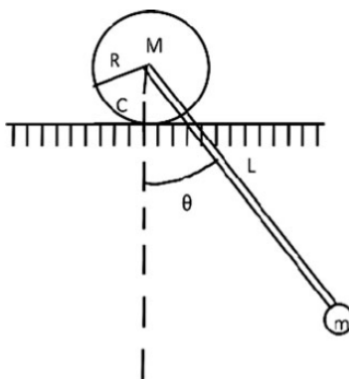
La entropía es una variable de estado cuya diferencial (exacta) es: $dS = \frac{dQ}{T}$

Problema 19, oscilaciones

- 19.1** Dos resortes de constante k_1 y k_2 están unidos a un cilindro sólido de masa m como se muestra en la figura. Cuando el cilindro es desplazado una pequeña distancia se deja en libertad y comienza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Asumiendo que el cilindro rueda sin resbalar sobre la superficie, encuentra el período de oscilación.



- 19.2** Una masa m es sujeta en el extremo de una barra de longitud L y masa despreciable que se conecta a un cilindro de masa uniforme M y radio R , ver figura. Suponiendo que el cilindro rueda sin resbalar, calcula la frecuencia de oscilación del sistema.

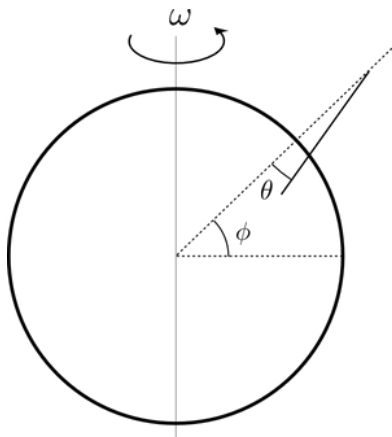


Problema 20, varios.

- 20.1** Prospecciones geofísicas indican que a una cierta profundidad de la corteza terrestre existe una cavidad aproximadamente esférica de radio medio $R = 2.1$ km. En su interior se supone que hay gas metano, con una densidad muy inferior a la de la Tierra. Una medida precisa de la gravedad en el punto P de la superficie más próximo a la cavidad da el valor $g = 0.9997g_0$, donde g_0 sería el valor de la gravedad en el punto P supuesta la Tierra esférica y homogénea, de radio $R_T = 6370$ km. Por simplicidad no se tendrá en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra.
- Haga una estimación de la distancia d entre el centro de la cavidad y el punto P de la superficie terrestre.
 - Suponga ahora que quiere medir g mediante un péndulo simple, cuya longitud conoce exactamente. Calcule la precisión relativa, $\Delta T/T$, con la que debe medir el período para poder obtener g con un error $\Delta g = 10^{-4}$ N/kg.
- 20.2** Determina una expresión para el ángulo de desviación θ de una plomada suspendida en la superficie de la Tierra, respecto la vertical, como función de la latitud ϕ . Considera que el radio de la Tierra es $R_T = 6.4 \times 10^6$ m y $g = 9.8$ m/s².
Demuestra que si $g \gg \omega^2 R$ entonces el ángulo de desviación se puede aproximar por:

$$\theta \approx \frac{\omega^2 R}{2g} \sin(2\phi) \quad (10)$$

Determina el valor máximo del ángulo de desviación, para latitud corresponde este valor máximo.



- 20.3** Considera un cascarón esférico de radio interno a y radio externo b ; tomando el potencial gravitacional cero en infinito, muestra que la razón entre el potencial gravitacional sobre un punto de la superficie externa del cascarón y un punto sobre la superficie interna esta dada por:

$$\frac{2(b^3 - a^3)}{3b(b^2 - a^2)} \quad (11)$$

- 20.4** En 1910 en su sexto viaje alrededor del Sol después de 1456, el cometa Halley fue observado durante su paso cerca del Sol a una distancia de 9×10^{10} m. Estima que tan lejos del Sol el cometa Halley viajara en el otro extremo de su órbita y determina la razón entre su velocidad máxima y mínima a lo largo de su órbita.

Problema 21, ecuaciones diferenciales de primer orden.

- 21.1** Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de **variables separables** si se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \quad (12)$$

recuerda que en una ecuación diferencial la incógnita es la función que satisface dicha ecuación. En la ecuación de arriba la incógnita es $y(x)$, el procedimiento para encontrar $y(x)$ en este caso es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= g(x) h(y) \\ \Rightarrow \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} &= g(x) \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} &= \int g(x) dx \end{aligned} \quad (13)$$

mientras sea posible integrar ambos lados de la ecuación, entonces el lado derecho solo depende de x y el lado izquierdo solo depende de y y por lo tanto queda determinada la solución buscada $y(x)$. En el proceso de integración hay una constante de que se puede determinar si en el problema se especifica además la condición inicial: $y(x_0) = y_0$. Si no se especifica alguna condición inicial entonces la solución de la ecuación diferencial determina una familia de curvas: $f(x, y) = c$, siendo c una constante.

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

- a) $y \ln x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$
- b) $\sin 3x dx + 2y \cos^3 3x dy = 0$
- c) $y \ln x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$
- d) $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
- e) $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$
- f) $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = y^2$
- g) $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$
- h) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(-1) = -1$

21.2 Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (14)$$

donde $P(x)$ y $f(x)$ son dos funciones dadas en el problema. El método para resolver esta ecuación es el siguiente:

1.- La solución general esta dada por:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \quad (15)$$

donde $y_c(x)$ es solución de la **ecuación homogénea** ($f(x) = 0$):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (16)$$

pero esta ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables (problema anterior 21.1) y por lo tanto es posible determinar $y_c(x)$:

$$y_c(x) = c e^{-\int P(x)dx} \quad (17)$$

donde c es la constante de integración.

2.- La otra parte de la solución, $y_p(x)$, es una solución particular de la ecuación diferencial original (14). Para encontrar esta parte de la solución, se emplea el **método de variación de parámetros** que consiste en partir de la solución de la ecuación homogénea $y_c(x)$ pero considerando que c ya no es una constante, sino una función $u(x)$ por determinar. Entonces sea $y_p = u(x) e^{-\int P(x)dx}$ y sustituyendo en (14) se llega a la siguiente ecuación (verificalo!!):

$$e^{-\int P(x)dx} \frac{du}{dx} = f(x) \quad (18)$$

pero esta ecuación es también del tipo de variables separables y por lo tanto es posible resolver (claro, si es posible integrar las funciones dadas en el problema). Formalmente la solución de (18) esta dada por:

$$u(x) = \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (19)$$

entonces la solución particular esta dada por:

$$y_p = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (20)$$

y la solución general de (14) es:

$$y(x) = c e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx \quad (21)$$

la constante de integración c se determina de la condición inicial que se da en el problema: $y_0 = y(x_0)$.

Al factor $e^{-\int P(x)dx}$ se le llama **factor integrante**, nota que si multiplicas por este factor la ecuación (14) entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-\int P(x)dx} y \right] = e^{-\int P(x)dx} f(x) \quad (22)$$

esta expresión es una ecuación diferencial en variables separables y cuyo resultado es nuevamente (21), simplemente es otra manera de abordar el problema. Lo importante no es recordar estas ecuaciones (que son de carácter general); sino entender el método de solución cuya idea es muy sencilla.

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

- a) $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$
- b) $\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y(0) = 4$
- c) $L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0) = i_0$
- d) $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$

21.3 La desintegración radiactiva es un proceso estadístico que depende de la inestabilidad de un radioisótopo particular y que para cualquier núcleo dado de una muestra es completamente impredecible. Si hay N núcleos radiactivos en un tiempo t , entonces, el número ΔN que se desintegraría en cualquier intervalo de tiempo Δt será proporcional a N :

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (23)$$

donde λ es la *constante de desintegración* ($\lambda > 0$). Si $N_0 = N(t=0)$ es el número de núcleos inicial ($t=0$) y se define la vida media de una sustancia radioactiva $T_{1/2}$ (a veces denotado simplemente como T) como el tiempo o periodo durante el cual el número de núcleos radioactivos disminuye a la mitad del número de núcleos que se tienen originalmente, responde los siguientes problemas:

- a) Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración (vida media) $T = 1.34$ días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante $q = 2.7 \times 10^{29}$ núcleos/s. Determinar cómo varía la actividad A de la muestra con el tiempo, la actividad nuclear es el número de núcleos que desaparecen por unidad de tiempo y representa la velocidad de desintegración: $A = \lambda N(t)$
- b) Si una sustancia radioactiva A se transforma por desintegración en una sustancia B también radioactiva y λ_A y λ_B son las respectivas constantes de desintegración, entonces se establecen el par de ecuaciones que rigen el decaimiento radioactivo para cada sustancia:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \quad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \quad (24)$$

Si inicialmente ($t=0$) se tienen N_{0A} núcleos de la sustancia A y cero núcleos de la sustancia B, determina las soluciones: $N_A(t)$ y $N_B(t)$.

Si adicionalmente la sustancia B se desintegra en una sustancia C, el número de núcleos de C aumenta uniformemente hasta que después de un tiempo muy largo (comparado con las vidas medias de A y B) es igual a N_{0A} . Demuestra que el número de núcleos de la sustancia C al tiempo t esta dada por:

$$N_C(t) = \frac{N_{0A}}{\lambda_B - \lambda_A} [\lambda_B (1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A (1 - e^{-\lambda_B t})] \quad (25)$$