XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Durango 17-21 de noviembre de 2013
Prueba teórica

Problema 1 Densidad del Sol	**(10 puntos)**

Uno de los experimentos más importantes de la física se remonta al año 1797 en el que Henry Cavendish logró medir experimentalmente la fuerza gravitacional entre dos esferas metálicas a través de un dispositivo llamado balanza de torsión. Con este experimento Cavendish logró medir la constante gravitacional, cuyo valor reportado actualmente es: $G = 6.7 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$. Al medir la constante gravitacional, Cavendish pudo determinar la masa de la Tierra! Una vez medida la masa de la Tierra, una pregunta nos salta: ¿cuál es la masa del Sol?

1.1	**Pregunta:** Si la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio $d = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$, determina una expresión para calcular la masa del Sol y calcula su valor con los datos de que dispones.	3 puntos

A continuación se propone un experimento muy sencillo a partir del cual se puede medir la densidad del Sol y que no necesita el conocimiento de la distancia Tierra-Sol.

Cuando se hace pasar la luz del sol a través de un pequeño orificio, por ejemplo el que se puede hacer con una aguja sobre una hoja de papel, es posible proyectar una imagen luminosa del Sol sobre una superficie más oscura tal como se muestra en la figura 1.

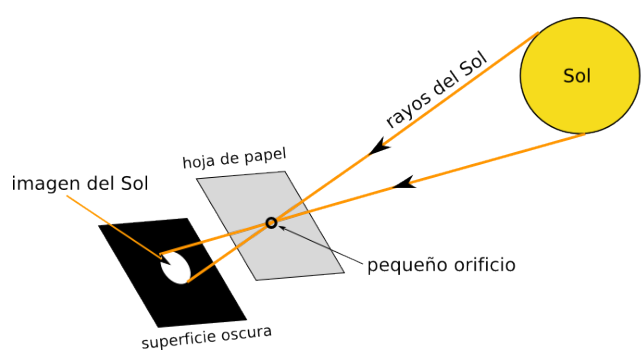

Figura 1: Proyección de Sol a través de pequeño orificio.

Para determinar la densidad del Sol a través de este experimento, en la figura 2 se hace un esquema del experimento con los parámetros geométricos involucrados: D_s es el diámetro del sol y D_i es el diámetro de la imagen del Sol que se proyecta sobre alguna superficie (la misma superficie oscura que se muestra en la figura 1), d es la distancia perpendicular desde el orificio hasta el Sol, que para fines prácticos corresponde a la distancia Tierra-Sol, mientras que L es la distancia perpendicular desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol y θ es el ángulo de paralaje que tiene su vértice en el orificio y tiene como rectas los rayos del Sol que pasan a través el orificio.

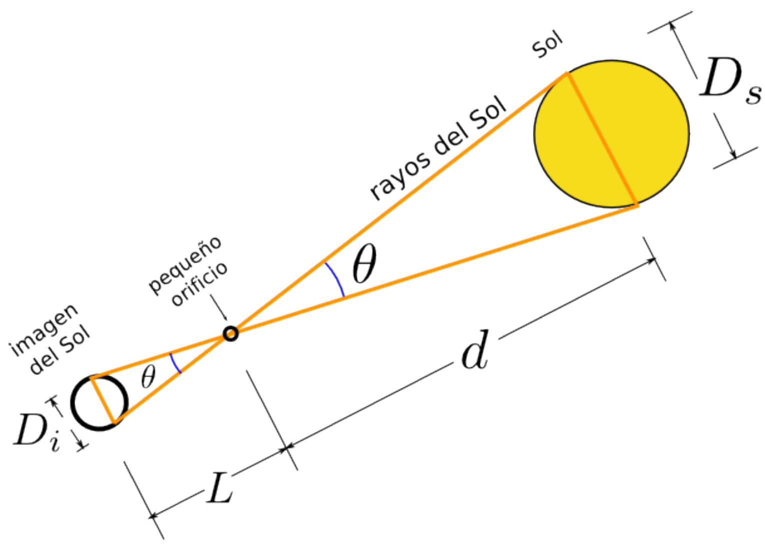

Figura 2: Parámetros geométricos de la imagen del Sol cuando pasa a través de un orificio.

Debes notar que la distancia Tierra-Sol d es mucho mayor que el diámetro del Sol D_s, de la misma manera se debe procurar que la distancia L, desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol debe ser mucho mayor que el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_i

$$d \gg D_s \qquad\qquad L \gg D_i \tag{1}$$

Esto significa que el ángulo de paralaje θ es muy pequeño. Para ángulos pequeños se pueden hacer las siguientes aproximaciones de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{2}$$

1.2	Usando la figura 2 determina una expresión para calcular el diámetro del Sol D_s en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia Tierra-Sol d. Haz lo mismo con el diámetro de la imagen proyectada del Sol, es decir encuentra una expresión para D_i en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia L.	2 punto

1.3	Determina una expresión para la densidad del sol ρ_s en términos únicamente de la constante gravitacional G, el periodo orbital T de la Tierra alrededor del Sol y algunos de los parámetros geometricos que se especifican en la figura 2, pero NO la distancia Tierra-Sol d , el proposito del problema es precisamente obtener una expresión para la densidad del Sol que no contenga la distancia Tierra-Sol. Debes usar la expresión de la masa del Sol que encontraste en el inciso (1.1), solo la expresión pero no su valor numerico que calculaste, (puede haber también factores constantes adicionales en tu formula final).	2 puntos

En una practica real, para medir la distancia L desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol, así como el ángulo de paralaje θ presentan algunas dificultades por lo que se proponen el esquema mostrado en la figura 3. Aquí se muestra la imagen proyectada del Sol sobre una superficie oscura que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo. H es la altura desde el centro de la imagen del Sol hasta el punto O (donde se encuentra el orificio por el que pasan los rayos del Sol), W es la distancia horizontal entre el centro de la imagen del Sol y la linea vertical que coincide con punto O y L sigue siendo la distancia entre la imagen del Sol y el orificio. La figura 4 es una imagen real donde se observa como se mide el ángulo de inclinación ϕ con un sextante, además el dispositivo cuenta con una regla graduada para medir el diámetro D_i de la imagen proyectada del Sol.

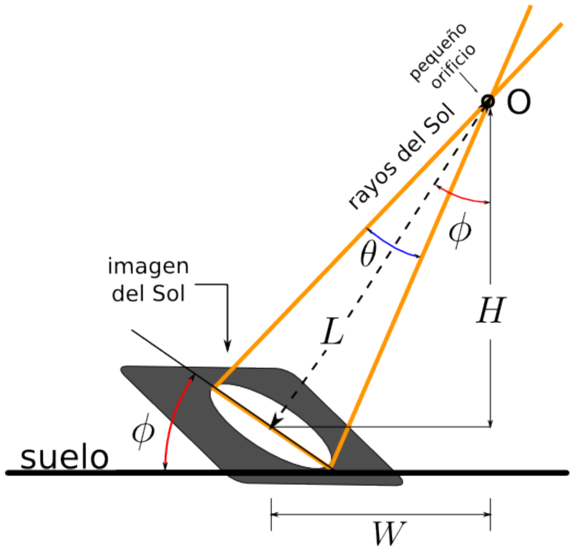

Figura 3: Proyección del Sol sobre una superficie que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo.

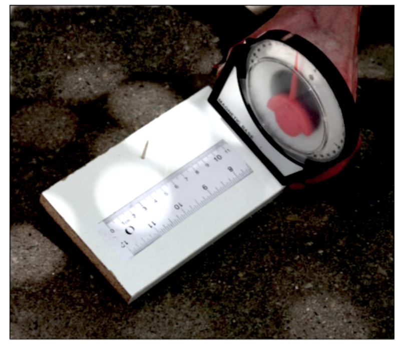

Figura 4: Sextante empleado para medir el ángulo de inclinación ϕ así como el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_s.

1.4	En un experimento real se midieron los siguientes valores: $W = 1.6\,\mathrm{m}$, $\phi = 15°$ y $D_i = 5.8\,\mathrm{cm}$ Con estos valores calcula el valor de la densidad del Sol.	3 puntos

Problema 2 Ondas en la superficie agua	**(10 puntos)**

Imagine una persona soltando piedritas muy pequeñas a una altura fija sobre la superficie (quieta) de un lago. Al caer una piedrita sobre el lago se producirá una onda en forma de círculo, de tal manera que el radio R de dicho círculo (llamada cresta) se propaga a una velocidad constante $v_s = 2.5\,\mathrm{m/s}$, ver figura 5

Suponga ahora que la persona suelta una piedrita cada segundo, es decir, a una frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Después de soltar varias piedritas observaremos varios círculos concéntricos cuyos radios están separados por una distancia λ (figura 6). Llamemos a esta cantidad λ la longitud de onda, que es la separación entre las crestas en cualquier dirección.

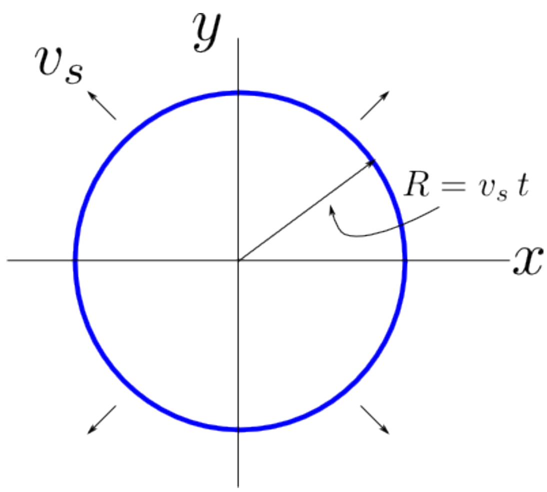

Figura 5: Onda que se propaga en el agua con velocidad v_s

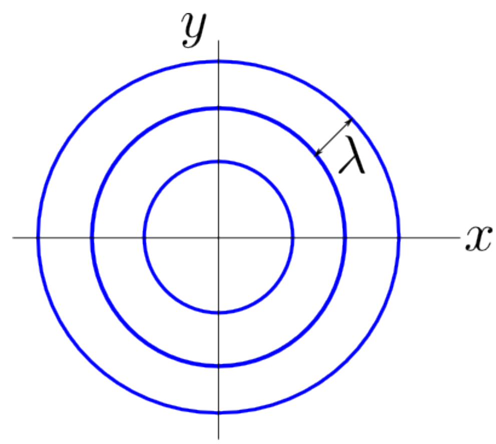

Figura 6: longitud de onda λ

2.1	Calcule el valor de λ	1 punto

Considere que a una distancia alejada de donde caen las piedritas, colocamos un “detector” de crestas. Por ejemplo, podría ser un corcho conectado a un dispositivo electrónico tal que registrara cuando el corcho subiera y bajara al pasar la cresta. Usando un sistema de coordenadas con el origen donde caen las piedritas, suponemos que el detector está en una posición D sobre el eje positivo de las x 's. Suponga que ponemos también otro detector a una distancia $-D$, en el mismo eje. Vea la figura 7

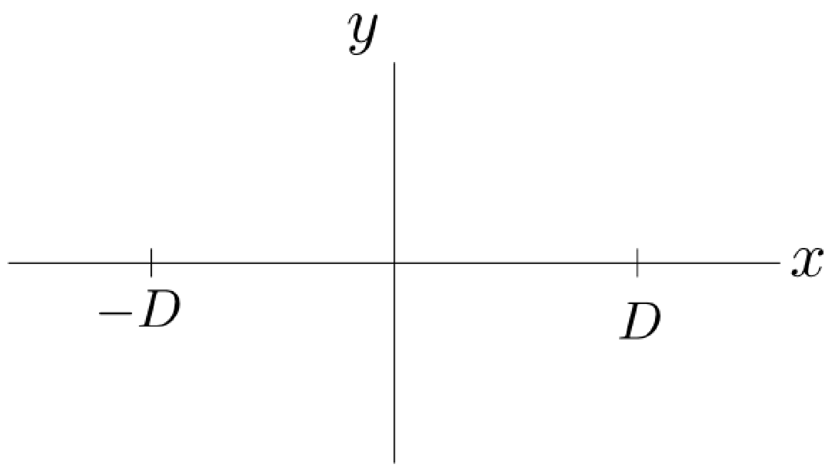

Figura 7: Detectores colocados en $-D$ y D

2.2	¿Qué frecuencia registran los detectores? es decir, con que frecuencia suben y bajan los corcho colocados en las posiciones $-D$ y D	1 punto

Ahora la persona que suelta las piedritas se mueve con velocidad $v_f = 1.5$ m/s en la dirección positiva de las x's (por ejemplo, la persona podría ir en un helicóptero volando a baja altura), sin embargo, las piedras las suelta, y caen en el agua, a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ Note que la persona se mueve a una velocidad menor que a la que se propagan las ondas, $v_f < v_s$. Para contestar las siguientes dos preguntas, le sugerimos que realice un dibujo de las ondas en este caso (usa el papel milimétrico que se te da).

2.3	Encuentre la frecuencia que registra el detector en D (es decir, la frecuencia con la que el corcho sube y baja). Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 punto

2.4	Encuentre la frecuencia que registra el detector en $-D$. Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 punto

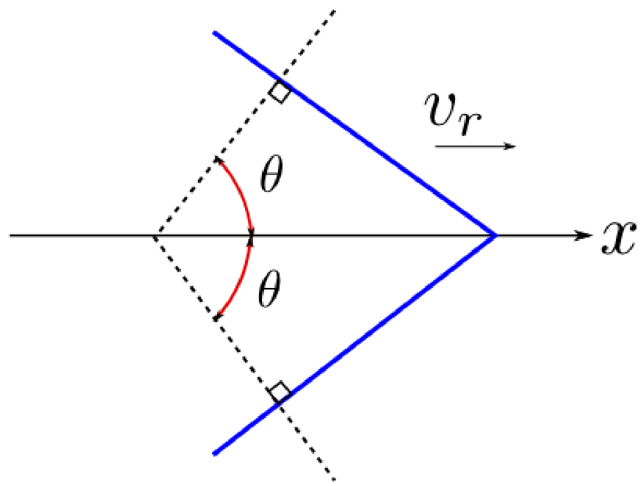

Figura 8: Después de muchas piedritas las crestas se "juntan" y el frente de todas las crestas se propaga como un línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x

Olvide los detectores y suponga que la persona se mueve ahora con velocidad $v_r = 5$ m/s en la dirección positiva de las x's y continúa soltando las piedritas a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. ¡Note que $v_r > v_s$! es decir, la persona se mueve más rápido que la velocidad a la que se propagan las ondas en el agua. Muestre que después de muchas piedritas las crestas se "juntan" formando un frente que se propaga como una línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x, vea la figura 8. Para hacer esta demostración siga los siguientes pasos:

2.5	Usando la hoja de papel milimétrico haga un dibujo aproximado de las crestas a un tiempo $t = 5$ s, suponiendo que la primera piedra golpeó el agua al tiempo $t = 0$	2 punto

2.6	Uniendo con una recta tangente los puntos más extremos y adelantados de las crestas, encuentre una expresión para el ángulo θ que hace la dirección de propagación de dicha tangente con el eje de las x, y evalúelo.	2 punto

Las preguntas (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) ilustran el efecto Doppler, mientras que las (2.5) y (2.6) el efecto Cerenkov. Este último provee una explicación sencilla de las estelas que dejan los barcos al moverse en el mar.

Problema 3 Modelo de Bohr, Centro de Masa (10 puntos)

Hace 100 años, en 1913 el físico danés Niels Bohr desarrolló un modelo para describir el átomo de hidrógeno. El principal motivo de Bohr fue el de explicar las lineas espectrales que se estaban observando en los gases de hidrógeno al hacer pasar una corriente eléctrica sobre ellos. Estas líneas espectrales tienen su origen en las propiedades cuánticas de los átomos. Cuando se hace pasar una corriente eléctrica en un gas, los electrones de cada átomo son excitados, esto quiere decir que adquieren energía (ganan energía), pero después de un breve lapso de tiempo pierden esta energía y regresan a su estado inicial emitiendo la energía que ganaron en forma de radiación (luz), lo que explica las lineas observadas en los espectros del gas de hidrógeno, en la figura 9 se muestra el espectro de un gas de hidrógeno donde se aprecian claramente las lineas espectrales.

Figura 9: Lineas espectrales en un gas de hidrógeno

El átomo de hidrógeno consiste en un protón que compone su núcleo y un electrón girando en órbitas circulares alrededor del protón, ver figura 10. El protón tiene una carga eléctrica $q_p = e$ y el electrón tiene la misma carga pero de signo contrario $q_e = -e$. Donde e es la carga eléctrica elemental cuyo valor es: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Al estar cargados eléctricamente, el protón y el electrón se atraen por ley de Coulomb.

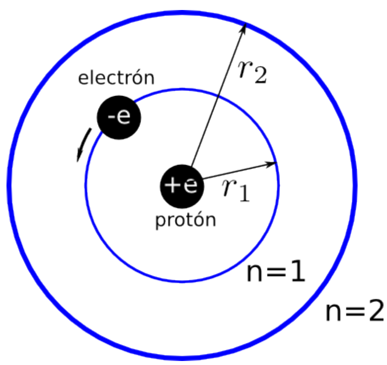

Figura 10: Modelo del átomo de Hidrógeno, el electrón gira en órbitas circulares alrededor del protón.

En su modelo del átomo de hidrógeno, Bohr estableció que el electrón gira alrededor del protón en órbitas circulares en las que su radio r_n, su velocidad v_n y su energía total E_n pueden tomar únicamente los siguientes valores:

$$\begin{aligned} r_n &= a_0 n^2 \\ v_n &= v_0 n \\ E_n &= -\frac{E_0}{n^2} \end{aligned}, \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Donde a_0, v_0 y E_0 son valores constantes y n puede tomar cualquier valor entero positivo. Cada órbita en la que gira el electrón representa un *estado* y esta determinado por el valor de n (*número cuántico principal*). En la figura 10 se muestra el esquema de las órbitas permitidas del átomo de hidrógeno para los dos primeros estados $n = 1$, 2.

Estas propiedades son el resultado de un principio único que establece que las órbitas en las que puede girar el electrón son aquellas cuyo momento angular L sea múltiplo de una constante: $L = n\frac{h}{2\pi}$, esta es la regla de cuantización del momento angular. El momento angular de una partícula se define como: $L = mvr$, donde m es la masa de la partícula, v es su velocidad tangencial y r es el radio orbital.

Primer estado $n = 1$

En el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por la siguiente ecuación:

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}, \tag{4}$$

donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s, es la constante de Planck y $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg es la masa del electrón; v_0 y a_0 corresponden a la velocidad y el radio orbital del electrón alrededor del protón en el primer estado ($n = 1$).

Si la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene al electrón girando en su órbita circular alrededor del protón.

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

3.1	Demuestra que el valor del radio orbital del electrón en su primer estado a_0, esta dado por la siguiente expresión y calcula su valor: $$a_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{m_e \pi e^2} \tag{5}$$ Si te sirve, puedes hacer uso de la siguiente definición: $$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \tag{6}$$	2 puntos

Movimiento respecto del centro de masa.

El modelo del átomo de hidrógeno descrito hasta ahora supone que el protón esta fijo y el electrón gira en torno al protón en una órbita circular. Sin embargo esto es solo una aproximación ya que en general tanto el protón como el electrón giran en torno a un punto fijo llamado Centro de Masa (CM). Analizaremos ahora como se modifican el valor de la separación entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$) calculado en el inciso anterior, pero tomando en cuenta el movimiento del protón y el electrón respecto de CM.

En la figura 11 se indica el movimiento del protón, cuya masa es $m_p = 1.6 \times 10^{-27}$ kg y el electrón m_e en torno al centro de masa CM. Respecto del CM, el protón gira en una órbita circular de radio r_p y el electrón en una órbita de radio mayor r_e. Ambas partículas giran con la misma velocidad angular ω y la separación entre el protón y el electrón r es siempre constante, ver figura 11.

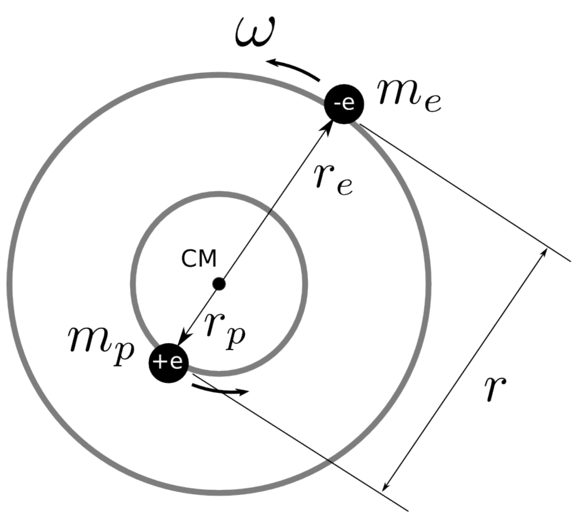

Figura 11: Movimiento del protón y del electrón en el átomo de hidrógeno respecto del centro de masa.

3.2	Encuentra las expresiones para el radio del electrón r_e y del protón r_p en términos de la masa del protón m_p, la masa del electrón m_e y la distancia que los separa r. Sugerencia: coloca el centro de masa en el origen.	1 puntos

3.3	Sea L_{cm} el momento angular total del protón y del electrón respecto del CM. Determina la expresión de L_{cm} en términos de las masas del protón y el electrón (m_p, m_e), de la distancia que los separa r y de la velocidad angular ω con que gira el sistema protón-electrón alrededor del centro de masa.	2 puntos

Consideremos nuevamente el primer estado del átomo de hidrógeno ($n = 1$), pero haciendo el análisis desde el centro de masa. Denotemos en este caso r_0 a la distancia entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$). Entonces en el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por:

$$L_{cm} = \frac{h}{2\pi} \tag{7}$$

Esta expresión es similar a la ecuación (4), excepto que ahora L_{cm} es el momento angular total del protón y del electrón respecto de CM (L_{cm} la obtuviste en el inciso anterior).

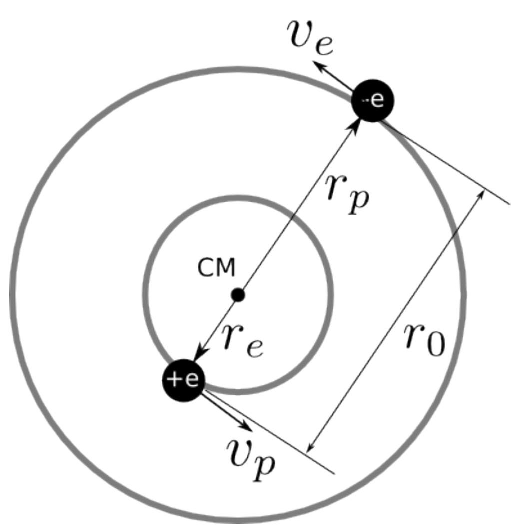

Figura 12: Primer estado $n = 1$ del átomo de hidrógeno visto desde el CM.

3.4	Usando la regla de cuantización del momento ángular respecto del centro de masa, ecuación (7), demuestra que la expresión de la distancia entre el protón y electrón r_0 esta dada por la siguiente expresión y calcula su valor: $$r_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{\mu\pi e^2}, \qquad \text{donde} \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \tag{8}$$ Considera de nuevo que la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM.	3 puntos

El positronio es un sistema de dos partículas, un positrón y un electrón, que giran alrededor de su centro de masa debido a la atracción eléctrica entre ambas partículas. El positrón es la antipartícula del electrón, esto significa que el positrón tiene la misma masa que el electrón: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, pero su carga es de signo contrario a la del electrón.

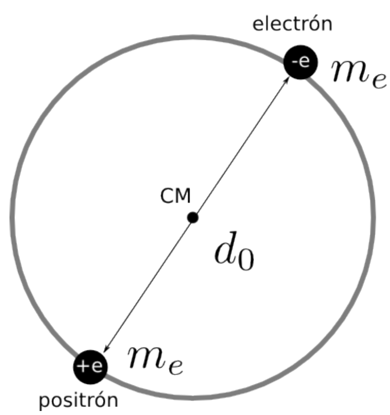

Figura 13: Primer estado del positronio: un electrón y un positrón girando alrededor de su centro de masa, ambas partículas tienen la misma masa $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg y la misma carga $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C pero de signos contrarios. La distancia de separación entre el prositrón y el electrón es d_0.

3.5	Si denotamos como d_0 a la distancia que separa al positrón del electrón en el positronio cuando esta en el primer estado ($n = 1$), como se muestra en la figura 13. Usando los resultados anteriores, calcula el valor de la distancia d_0.	2 puntos