Tarea 7

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF **ENTRENAMIENTO 2018**
Fecha de entrega: martes 10 de abril 2018.

Problema 27, electrostática.

Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas

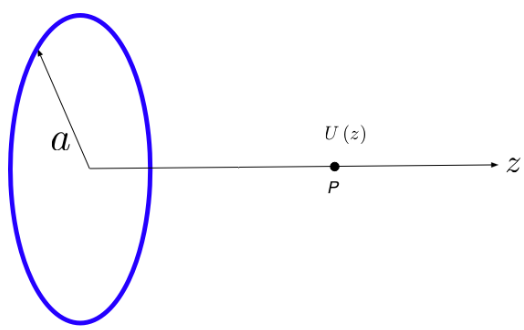
1. El potencial eléctrico en un punto P debido a una distribución de carga esta dado por:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} + U_0 \tag{1}$$

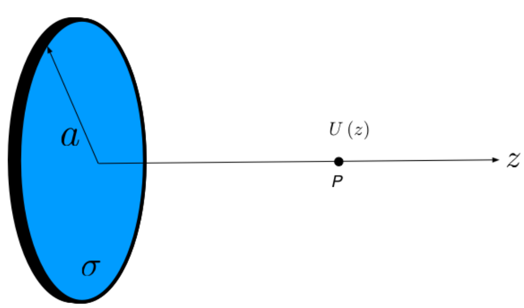
donde r es la distancia desde el elemento diferencial de carga dq al punto P, la integral se debe hacer sobre toda la distribución de carga. En general el diferencial de carga puede ser:

$$dq = \begin{cases} \rho dV & \rho \text{ (densidad volumetrica de carga)}, \quad dV \text{ (diferencial de volumen)} \\ \sigma dS & \sigma \text{ (densidad superficial de carga)}, \quad dS \text{ (diferencial de superficie)} \\ \lambda dl & \lambda \text{ (densidad lineal de carga)}, \quad dl \text{ (diferencial de longitud)} \end{cases} \tag{2}$$

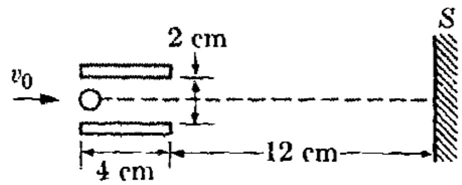
a) Considera un anillo circular de radio a y densidad lineal de carga constante λ. Determina el potencial electrostático en un punto P sobre el eje del anillo que se encuentra a una distancia z desde el centro del anillo. Estima la distancia z_0 a partir de la cual el anillo puede ser considerado como una carga puntual con un error del 1 %.



b) Determina el potencial electrostático de un disco circular de espesor despreciable, sobre el eje del anillo circular, cuya densidad de carga superficial (área) σ es constante.



2. Se lanza un electrón con una velocidad inicial de $v_0 = 2.0 \times 10^7$ m/s en la dirección de un eje equidistante de las placas de un tubo de rayos catódicos, ver figura. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una intensidad de 20000 N/C y está dirigido hacia arriba, de acuerdo a la figura. (a) determina la distancia perpendicular al eje que ha recorrido el electrón cuando pasa por el extremo de las placas; (b) ¿qué ángulo con el eje forma su velocidad cuando abandona las placas? (c) ¿A qué distancia por debajo del eje choca con la pantalla fluorescente S ?

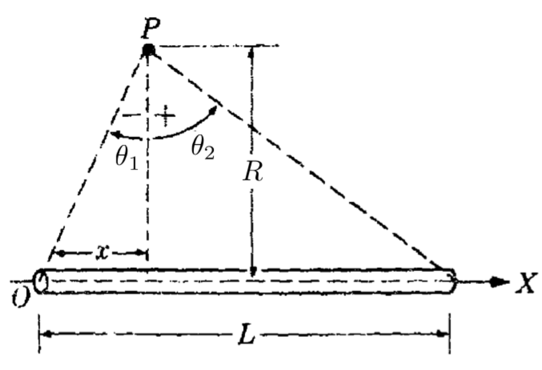


3. En un tubo de rayos X se acelera un electrón inicialmente en reposo al pasar desde el cátodo al ánodo a través de una diferencia de potencial de 18×10^4 V, al llegar al ánodo, (a) ¿cuál es su energía cinética en eV?, un electrón volt (eV) es la unidad de energía definida como la energía que adquiere un electrón cuando pasa a través de una diferencia de potencial de un volt; (b) su velocidad v (c) su masa relativista $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, donde m_0 es la masa en reposo del electrón, $\beta = v/c$ y $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío.

4. Se tiene un alambre de longitud L con una densidad de carga λ, (a) probar que el campo eléctrico en un punto a una distancia R del alambre del alambre esta dado por:

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) \\ E_{\parallel} &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

donde $E_{\perp}$ y $E_{\parallel}$ son las componentes del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en la dirección perpendicular y paralela respectivamente, θ_1 y θ_2 se muestran en la figura, así como sus signos. ¿Cuáles son los valores en un punto equidistante de los extremos?



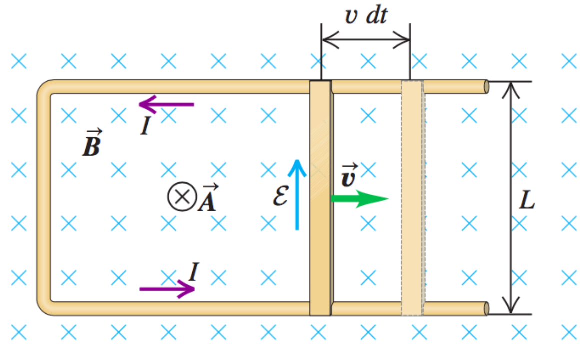
5. Se disponen en forma alternada un número infinito de cargas positivas y negativas $\pm q$ sobre una línea recta. La separación entre as cargas adyacentes es la misma, igual a r. Demostrar que la energía potencial de una carga es $-\frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}\ln(2)$

   Sugerencia: emplea el desarrollo de Taylor de la función $\ln(1+x)$

Problema 28, Inducción electromagnética.

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. La figura muestra un conductor en forma de U en un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la figura, dirigido hacia la página. Colocamos una varilla de metal con longitud L entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y movemos la varilla hacia la derecha con velocidad **v** constante. Esto induce una fem y una corriente.

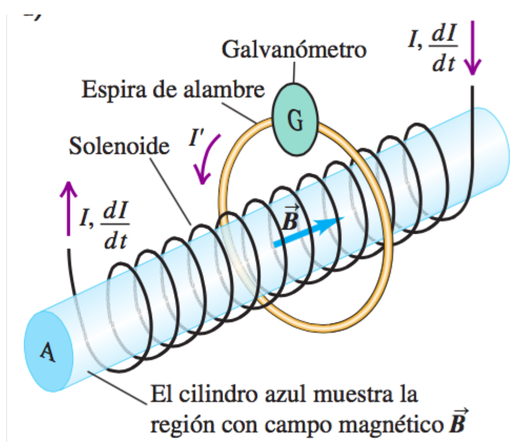


   a) Determine la magnitud y dirección de la fem inducida resultante.

   la energía se disipa en el circuito debido a su resistencia. Sea R la resistencia del circuito (constituido por conductor corredizo y el conductor en forma de U que conecta los extremos del conductor corredizo) en un punto dado del movimiento del conductor corredizo.

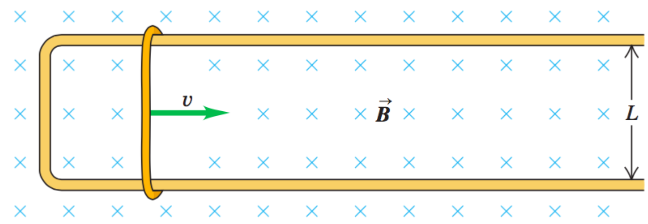
   b) Demuestra que la tasa a la que se disipa energía (potencia) en el circuito es exactamente igual a la tasa a la que se debe efectuar trabajo para desplazar la varilla a través del campo magnético.

2. El solenoide de la figura tiene 500 espiras por metro y la corriente en éstas crece a razón de 100 A/s. El área de la sección transversal del solenoide es de $4.0\,\mathrm{cm}^2$. a) Encuentre la magnitud de la fem inducida en la espira de alambre afuera del solenoide. b) Calcule la magnitud del campo eléctrico inducido dentro de la espira si su radio es de 2.0 cm.



3. Una espira cuadrada de cobre orientada verticalmente cae desde una región en la que el campo **B** es horizontal, uniforme y perpendicular al plano de la espira, hacia una región donde el campo es igual a cero. La espira se libera desde el reposo y al principio está por completo dentro de la región del campo magnético. Sea s la longitud lateral de la espira, y d el diámetro del alambre. La resistividad del cobre es ρ_R y su densidad es ρ_m. Si la espira alcanza su rapidez terminal mientras su segmento superior está aún en la región del campo magnético, encuentre una expresión para la rapidez terminal.

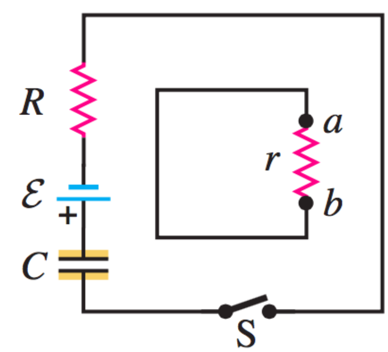
4. En la figura se muestra una espira rectangular con ancho L y un alambre corredizo con masa m. Un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ está dirigido en forma perpendicular al plano de la espira hacia el plano de la figura. Se da al alambre corredizo una velocidad inicial v_0 y luego se libera. No hay fricción entre el alambre y la espira; la resistencia de la espira es despreciable en comparación con la resistencia R del alambre corredizo.



a) Obtén la expresión de la fuerza F ejercida sobre el alambre mientras se mueve con velocidad v

b) Demuestra que la distancia que se mueve el alambre hasta llegar al reposos es $x = mv_0R/a^2B^2$

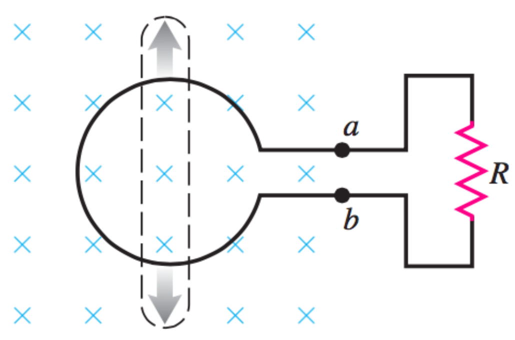
5. La figura muestra un circuito pequeño dentro de uno más grande, ambos sobre la superficie de una mesa. El interruptor se cierra en $t = 0$ con el capacitor inicialmente descargado. Suponga que el circuito pequeño no ejerce un efecto apreciable sobre el grande.



a) ¿Cuál es el sentido de la corriente (de a a b ó de b a a) en el resistor r i) en el instante después de que el interruptor se cierra y ii) una constante de tiempo después de haber cerrado el interruptor?

b) Dibuje la gráfica de la corriente en el circuito pequeño como función del tiempo, tomando como positivo el sentido horario.

6. Una espira circular flexible de 6.50 cm de diámetro está en un campo magnético con magnitud de 0.950 T, dirigido hacia el plano de la página, como se ilustra en la figura. Se tira de la espira en los puntos indicados por las flechas, para formar una espira de área igual a cero en 0.250 s.



a) Calcula la fem inducida media en el circuito.

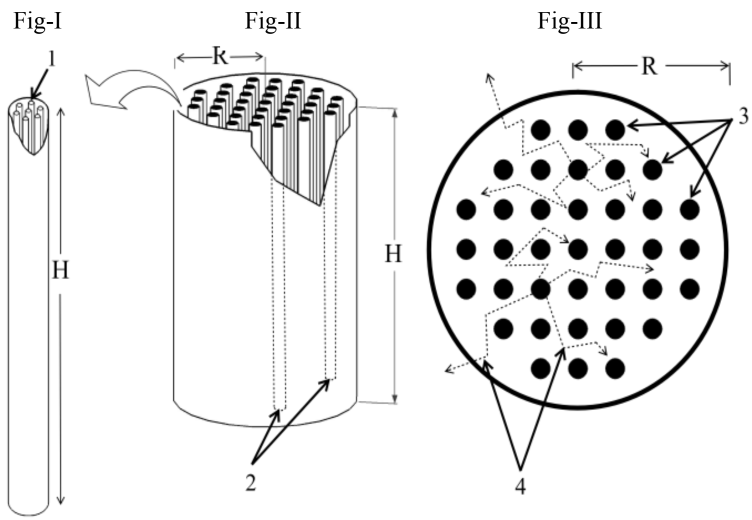
b) ¿Cuál es el sentido de la corriente en R (de a a b ó de b a a)?

Problema 29, Problema de olimpiada

El Diseño de un Reactor Nuclear **(Puntaje Total: 10)**

El uranio existe en la naturaleza como UO_2 donde sólo el 0.720% de los átomos son de uranio ^{235}U. La fusión inducida por neutrones ocurre de manera espontánea en ^{235}U con la emisión de 2-3 neutrones de fisión de alta energía cinética. Por otro lado, la probabilidad de que esta fisión ocurra aumenta cuando los neutrones que la inducen son de baja energía cinética. Así que, por medio de la reducción de la energía cinética de los neutrones de fisión, es posible inducir una cadena de fisiones en otros núcleos de ^{235}U. Esta es la base de un reactor nuclear generador de energía (RN).

Un RN típico consiste de un tanque cilíndrico de altura H y radio R lleno de un material llamado moderador. También incluye tubos cilíndricos, llamados canales de combustible, que a su vez contienen un conglomerado de espigas cilíndricas de combustible UO_2 natural en estado sólido con altura H, que se encuentran alineadas axialmente en un arreglo cuadrado. Los neutrones de fisión provenientes de los canales de combustible colisionan con el moderador, perdiendo energía y alcanzando a los canales de combustible adyacentes con una energía suficientemente baja como para disparar la fisión (Figs I-III). El calor generado por la fisión en las espigas se transmite a un fluido refrigerante que fluye a lo largo de estas. En este problema estudiaremos la física detrás de (A) las Espigas de Combustible, (B) el Moderador y (C) un RN de geometría cilíndrica.



Bosquejo esquemático de un Reactor Nuclear (RN)
Fig-I: Vista amplificada de un canal de combustible (1-*Espigas de combustible*)
Fig-II: Una vista del RN (2-Canales de Combustible)
Fig-III: Vista superior del RN (3-Arreglo cuadrado de los Canales de Combustible y 4-Trayectorias Típicas de los Neutrones).
Sólo se muestran los componentes relevantes al problema (e.g. no se muestran las barras de control ni el refrigerante).

A Espiga de Combustible

Datos del UO_2	1. Peso molecular $M_w = 0.270$ kg mol^{-1}	2. Densidad $\rho = 1.060\times10^4$ kg m^{-3}
	3. Punto de derretimiento $T_m = 3.138\times10^3$ K	4. Conductividad térmica $\lambda = 3.280$ W m^{-1} K^{-1}

A1	Considera la siguiente reacción de fisión de ^{235}U estático al de absorber un neutrón de energía cinética despreciable. $$^{235}U + {}^{1}n \rightarrow {}^{94}Zr + {}^{140}Ce + 2\,{}^{1}n + \Delta E$$ Estima la energía total de fisión liberada ΔE (en MeV). Las masa nucleares son: $m(^{235}U) = 235.044$ u; $m(^{94}Zr) = 93.9063$ u; $m(^{140}Ce) = 139.905$ u; $m(^{1}n) = 1.00867$ u, con 1 u = 931.502 MeV c^{-2}. Ignora la falta de balance en las cargas.	**0.8**
A2	Estima el número N de átomos de ^{235}U por unidad de volumen en el UO_2 natural.	**0.5**
A3	Supón que la densidad de flujo de neutrones, $\varphi = 2.000\times10^{18}$ m^{-2} s^{-1} es uniforme a lo largo del combustible. La sección eficaz (área efectiva de colisión) para la fisión de un núcleo de ^{235}U es $\sigma_f = 5.400\times10^{-26}$ m^2. Si el 80.00% de la energía de fisión está disponible en forma de calor, estima Q (en W m^{-3}), que es la taza de producción de calor en la espiga por unidad de volumen. 1MeV = 1.602×10^{-13} J	**1.2**
A4	En el estado estacionario la diferencia de temperatura entre el centro (T_c) y la superficie (T_s) de la espiga se puede expresar como $T_c - T_s = k\,F(Q,a,\lambda)$, donde $k = 1/4$ es una constante adimensional y a es el radio de la espiga. Obtén $F(Q,a,\lambda)$ por análisis dimensional. Nota que λ es la conductividad térmica del UO_2.	**0.5**
A5	La temperatura que se desea para el refrigerante es de 5.770×10^2 K. Estima el límite superior a_u para el radio a de la espiga.	**1.0**

Hoja de Datos Generales

Aceleración gravitacional de la Tierra	g	$9.807\ \mathrm{m\ s^{-2}}$
Presión atmosférica	P_{atm}	$1.013 \times 10^{5}\ \mathrm{Pa}$
Número de Abogadro	N_{A}	$6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	$1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$
Energía de amarre del átomo de hidrógeno	$-$	$13.606\ \mathrm{eV}$
Magnitud de la carga del electrón	e	$1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Masa del electrón	m_{e}	$9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Masa del protón	m_{p}	$1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masa del neutron	m_{n}	$1.675 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{H\ m^{-1}}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\ m^{-1}}$
Constante de Planck	h	$6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}$
Velocidad del sonido en el aire (a temperatura ambiente)	c_{s}	$3.403 \times 10^{2}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$
Constante de Gravitación Universal	G	$6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^{2}\ kg^{-2}}$
Constante universal de los gases	R	$8.315\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$

Problema 30, ecuaciones diferenciales de primer orden, variables separables.

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de **variables separables** si se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \tag{4}$$

esta ecuación se debe resolver para la función incógnita $y(x)$ y el procedimiento para resolverla es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx \end{aligned} \tag{5}$$

en la última expresión el lado derecho solo depende de x y el lado izquierdo solo depende de y y por lo tanto es posible integrar ambos lados de la ecuación para determinar la función $y(x)$. La constante de integración queda determinada por la condición inicial: $y(x_0) = y_0$. En general la solución de la ecuación diferencial determina una familia de curvas: $f(x, y) = c$, siendo c una constante.

Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas:

(a) $y\,\ln x\,\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

(b) $\sin 3x\,dx + 2y\,\cos^3 3x\,dy = 0$

(c) $y\,\ln x\,\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

(d) $e^x y\,\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

(e) $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

(f) $\left(e^x + e^{-x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y^2$

(g) $\dfrac{dx}{dt} = 4\left(x^2+1\right), \qquad x(\pi/4) = 1$

(h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \qquad y(-1) = -1$

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. La población de bacterias en un cultivo crece en razón proporcional al número de bacterias presentes en el instante t. Después de 3 h se observa que hay 400 bacterias presentes. Al cabo de 10 h hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era el número inicial de bacterias?

2. Inicialmente, 50 lb de sal se disuelven en un gran tanque que contiene 300 gal de agua. Una solución de salmuera se bombea hacia el tanque a razón de 3 gal/min, y luego la solución bien mezclada se extrae al mismo ritmo. Si la concentración de la solución que entra es 2 gal/lb, determine la cantidad de sal en el tanque en el instante t. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Y después de un tiempo muy largo?

3. La siguiente ecuación diferencial (no lineal) es un caso de las ecuaciones de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \tag{6}$$

   Mediante la sustitución $y = 1/u$, resuelve la ecuación diferencial anterior.

4. Cuando dos productos químicos A y B se combinan, se forma un compuesto C. La reacción de segundo orden resultante entre los dos productos químicos es modelada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = k\,(250 - X)\,(40 - X) \tag{7}$$

donde $X\,(t)$ denota el numero de gramos del compuesto C presentes al tiempo t.

a) Determine $X\,(t)$, si $X\,(0) = 0$ y $X\,(10) = 30\,\mathrm{g}$

b) Qué cantidad de compuesto C hay a los 15 minutos.

c) Las cantidades de los productos químicos A y B restantes en el instante t son $50 - X/5$ y $32 - 4X/5$, respectivamente. ¿Cuántos gramos del compuesto C se forman cuando $t \to \infty$?

5. Suponga que una esfera de hielo se funde a una razón proporcional a su área superficial. Determine el volumen V de la esfera en el instante t.