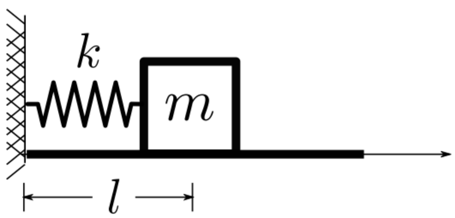
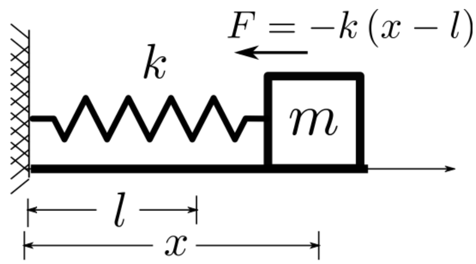
Tarea 4

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**
Fecha de entrega: lunes 23 de febrero 2015

Problema 10, oscilador armónico.





Supongamos un bloque de masa m que se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento y esta sujeto a un resorte de constante elástica k. En su posición de equilibrio el resorte tiene longitud l. Cuando se desplaza el bloque desde su posición de equilibrio el resorte se estira (o comprime) y ejerce una fuerza sobre el bloque que es proporcional a la distancia que se desplaza el bloque y en dirección contraria al desplazamiento del bloque (sin sobrepasar el límite elástico del resorte), esto es la ley de Hooke.

$$F = -k\,(x - l) \tag{1}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton $F = ma$, como la aceleración es la segunda derivada respecto del tiempo de la posición, entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$ma = -k\,(x - l) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,(x - l) = 0 \tag{2}$$

Formalmente la última expresión es una *ecuación diferencial de segundo orden*; es decir, se trata de una ecuación donde la incógnita es la función . Al encontrar explícitamente la posición como función del tiempo $x\,(t)$ se ha resuelto la ecuación diferencial. Es una ecuación diferencial de segundo orden porque la derivada de más alto orden es la segunda derivada de la función incógnita (sería de primer orden si contuviera la primer derivada y así en general).

En física la ecuación ecuación diferencial del tipo (2) se le conoce como de *oscilador armónico* porque su solución varía periódicamente en el tiempo, se dice que es un *movimiento armónico simple*. A veces se suele simplificar y hacer $l = 0$, entonces la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

La solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico se puede escribir de diferentes maneras pero todas equivalentes, una de ellas es la siguiente:

$$x\,(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{4}$$

La solución de una ecuación diferencial de segundo orden requiere dos constantes (las de primer orden requieren solo una constante), en este caso A y B, cuyo valor esta determinado por la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0, es decir al tiempo $t = 0$. La frecuencia angular de oscilación es ω

1. Sustituye la solución (4) en la ecuación diferencial (3) y encuentra el valor de la frecuencia angular ω en términos de los parámetros k y m.

2. En ocasiones es conveniente escribir la solución (4) de la siguiente manera:

$$x(t) = D \sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

   donde ahora D y ϕ son las constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales. En este caso D es la amplitud de oscilación y ϕ es una fase inicial del movimiento. Comparando ambas soluciones (4) y (5), encuentra las relaciones que deben satisfacer las constantes de ambas soluciones A, B con C, D.

3. Considera el movimiento de un bloque de masa m sujeto a un resorte que al tiempo $t = 0$ se suelta en la posición x_0 con velocidad v_0. Determina en este caso las constantes A y B de la solución (4), así como las constantes D y ϕ de la solución (5) en términos de los parámetros iniciales x_0 y v_0 (y de la frecuencia de oscilación).

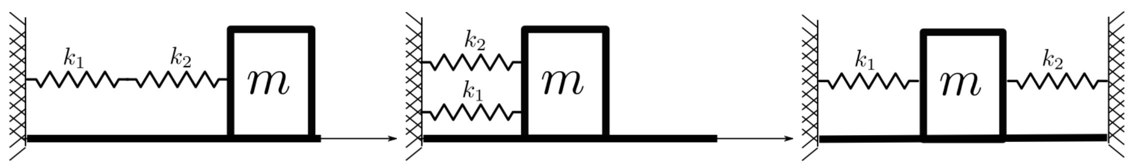
4. Determina la energía total del bloque y verifica que se conserva, es decir que es constante en el tiempo.

5. Si se conocen las condiciones del bloque en dos puntos diferentes; es decir, si el bloque se encuentra en la posición x_1 con velocidad v_1 y en la posición x_2 su velocidad es v_2, encuentra bajo estas condiciones la frecuencia angular y la amplitud del movimiento.

6. Cómo cambia la solución (4) cuando la longitud de equilibrio del resorte no es cero, es decir $l \neq 0$.

Problema 11, oscilaciones.

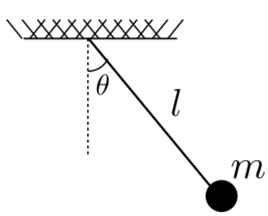
11.1) Cuál es la frecuencia de oscilación ω para un bloque de masa m cuando esta sujeto a un par de resortes, de constantes k_1 y k_2, conectados en serie y en paralelo; cuál es la frecuencia de oscilación del mismo bloque cuando esta conectado por los dos resortes pero en sus extremos.



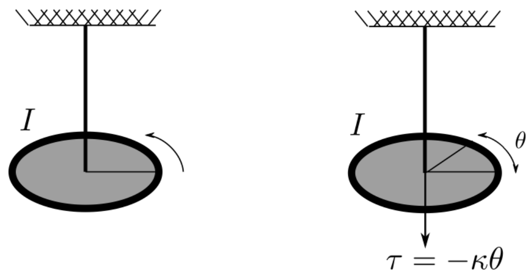
11.2) La ecuación de movimiento de un péndulo simple de masa m sujeto a una cuerda de longitud l es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{6}$$

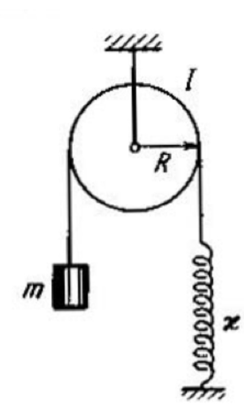
suponiendo que el movimiento se efectúa en ángulos muy pequeños, $\theta \approx 0$, encuentra la frecuencia angular de oscilación ω.



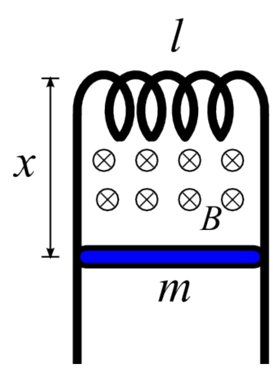
11.3) Un disco solido cuyo momento de inercia es I cuelga de una varilla como se muestra en la figura, el disco puede girar libremente sobre el punto de sujeción de la varilla y en la dirección perpendicular a está.



11.4) Hallar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del sistema mostrado en la figura siguiente. El radio de la polea es R, su momento de inercia respecto del eje de rotación es I, la masa m del bloque suspendido de la cuerda y k la constante del resorte. La masa del hilo y del resorte son despreciables, el hilo no resbala con la polea y no hay rozamiento en el eje de está última.



11.5) Una bobina de inductancia L une los extremos superiores de dos barras de cobre verticales separadas por una distancia l una de otra. A lo largo de las barras se desliza sin velocidad inicial un puente horizontal conductor, de masa m, que conecta siempre ambas barras. Todo el sistema se encuentra en un campo magnético homogéneo B, perpendicular al plano de las barras. Determinar la posición del puente que une las barras verticales como función del tiempo $x\,(t)$



Problema 12, vibración de moléculas.

12.1) El potencial de interacción entre dos átomos se ha observado experimentalmente que varia con la distancia r entre los átomos de la siguiente manera:

$$U\,(r) = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{6} \right] \tag{7}$$

A este potencial de interacción se le conoce como potencial de Lennard-Jones y se dice que representa una interacción tipo van der Waals. Cuando la distancia de separación es $r = R_0$ el potencial de interacción toma su valor mínimo U_0. Bajo estas condiciones la molécula esta en equilibrio mecánico ya que la fuerza de interacción es cero $F = -\dfrac{dU}{dr}$.

a) Obtén la expresión la expresión de la fuerza correspondiente al potencial (7)

a) Verifica explícitamente que el valor mínimo del potencial (7) es U_0 cuando $r = R_0$.

b) Esboza la gráfica del potencial de interacción $U(r)$ como función de la distancia de separación r.

c) Demuestre que cuando el desplazamiento x, con respecto a la posición de equilibrio ($r = R_0$), es pequeña, la energía potencial es aproximadamente $U \approx \dfrac{1}{2}kx^2 - U_0$, a partir de esta expresión determina el valor de k. Sugerencia: sea $r = R_0 + x$ y $u = x/R_0$. Emplea la aproximación de $(1+u)^n$ hasta los tres primeros términos. Solución: $k = \dfrac{72U_0}{R_0^2}$

d) Dos átomos de argón pueden formar una molécula débilmente unida Ar_2 debido a una interacción de Van der Waals con $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}$ y $R_0 = 3.82 \times 10^{10}\,\mathrm{m}$. Calcule la constante de fuerza k y la frecuencia de oscilaciones pequeñas de un átomo alrededor de su posición de equilibrio.

12.2) Dos átomos idénticos de una molécula diatómica vibran como osciladores armónicos; no obstante, su centro de masa que está justo a la mitad de separación entre los centros de los átomos, no se mueve.

a) Demuestra que, en cualquier instante, los momentos lineales de los átomos con respecto al centro de masa son $\mathbf{p}$ y $-\mathbf{p}$

b) Demuestra que la energía cinética total K de los dos átomos se puede escribir como la de un solo objeto de masa $m/2$ con momento lineal de magnitud p. Usando este resultado, ¿cual es la corrección en la frecuencia de oscilación de la molécula de argón del último inciso del problema anterior?

c) En el caso de que los átomos no sean idénticos y tienen masas m_1 y m_2, demuestra que se sigue cumpliendo el resultado del inciso (a) y lo mismo para el inciso (b) pero con un objeto de masa $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, esta cantidad se denomina masa reducida del sistema.

12.3) Cuando los átomos de una molécula de H_2 se desplazan del equilibrio, una fuerza de restitución actúa entre los átomos: $F = -kx$ con $k = 580\,\mathrm{N/m}$. Calcula la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2.

12.4) Muchas moléculas diatómicas (compuestas por dos átomos) están unidas por enlaces covalentes que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals, por ejemplo H_2, O_2 y N_2. De acuerdo a las observaciones experimentales, la interacción de tales moléculas se puede describir mediante una fuerza de la forma:

$$F = A\left[e^{-2b(r-r_0)} - e^{-b(r-r_0)}\right] \tag{8}$$

donde A y b son constantes positivas, r es la distancia de separación de los centros de las moléculas y R_0 es la separación de equilibrio. Para la molécula de H_2 los valores de las constantes son: $A = 2.97 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$, $b = 1.95 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$ y $R_0 = 7.4 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

Considerando pequeños movimientos alrededdor del punto de separación de equilibrio. Calcula la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2 y compara el resultado con el inciso anterior.