Tarea 6

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**
Fecha de entrega: miércoles 1 de abril 2015

Problema 16, termodinámica.

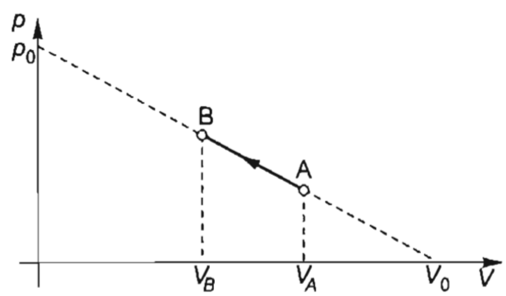
16.1 Un recipiente cilíndrico se encuentra dividido en dos mitades iguales mediante un pistón que carece de masa y puede moverse sin rozamiento. Ambas mitades contienen el mismo gas ideal ($c_v = 20.9\,\mathrm{J/mol \cdot K}$) a la misma presión $P = 1\,\mathrm{atm}$, temperatura $T = 300\,\mathrm{K}$ y volumen $V = 5\,\mathrm{L}$. Las paredes del cilindro así como el pistón son aislantes al calor. El gas contenido en la mitad izquierda recibe calor mediante una resistencia eléctrica alojada en esa mitad, de modo que su temperatura se eleva a $T_1 = 500\,\mathrm{K}$. El pistón se desplaza y comprime al gas de la parte derecha.

a) Calcular la presión, temperatura y volumen de cada gas una vez alcanzado el equilibrio,

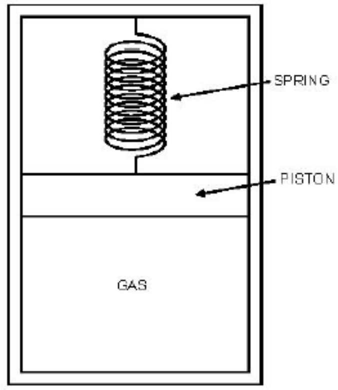
b) determinar el calor recibido por el gas de la izquierda

16.2 La figura de abajo muestra el diagrama $p\,(V)$ de un proceso llevado realizado a cierta cantidad de gas oxigeno. Se conocen los siguientes valores: $V_0 = 12\,\mathrm{dm}^3$, $p_0 = 1.2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Si en el estado inicial A el volumen es $V_A = \dfrac{2}{3}V_0$ y su temperatura es $T_A = 300\,\mathrm{K}$ y en el estado final B, $V_B = \dfrac{5}{12}V_0$.

Determina el calor que absorbe el gas y el calor que cede el gas durante el proceso $A \rightarrow B$



16.3 Considere $n = 2$ mol de gas helio ideal a presión P_0, volumen V_0 y temperatura $T_0 = 300$ K colocados en un contenedor cilíndrico vertical (vea la figura). Un pistón móvil horizontal sin fricción de masa $m = 10$ kg (asuma que $g = 9.8\mathrm{m/s}^2$) y sección transversal $A = 500\,\mathrm{cm}^2$ comprime al gas dejando a la sección superior del contenedor al vacío. Hay un resorte unido al pistón y a la pared superior del contenedor. Ignore cualquier fuga de gas a través de su superficie de contacto, y desprecie las capacidades caloríficas del contenedor, el pistón y el resorte. Inicialmente el sistema está en equilibrio y el resorte está sin estirar. Desprecie la masa del resorte.



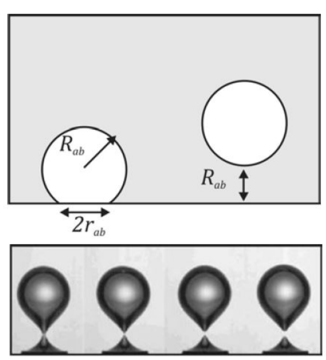
a) Calcule la frecuencia f de las pequeñas oscilaciones del pistón, cuando es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio. (2.0 puntos)

b) El pistón luego es empujado hacia abajo hasta que el volumen del gas se reduce a la mitad, y luego es soltado con velocidad cero. Calcule el valor (o los valores) del volumen del gas cuando la velocidad del pistón es $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$. (3.0 puntos)

Sea la constante del resorte $k = mgA/V_0$. Todos los procesos en el gas son adiabáticos. La constante de los gases es $R = 8.314\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$. Para el gas monoatómico (el helio) use la constante de $\gamma = 5/3$.

Problema 17, formación de burbujas.

Durante el calentamiento de un líquido en un recipiente es usualmente observar la formación de burbujas, en menor cantidad previo al punto de ebullición y de forma más activa al llegar a él. A temperatura ambiente, el agua pura está saturada con gas que con el aumento de temperatura forman las burbujas de la siguiente manera: al aumentar la temperatura, la presión del gas disuelto P_{ab} aumenta, el aire disuelto es liberado y las burbujas de aire (ABs) aparecen en el fondo y en las paredes de los recipientes. Durante su formación es usual modelar este sistema como una esfera truncada de radio R_{ab} y con base sin mojar de radio r_{ab}. Al calentarse más las ABs se expanden y tras alcanzar un tamaño límite pueden despegar del fondo, ascender hacia la superficie del agua y reventar ahí. Durante el calentamiento, también se generan burbujas de vapor (VBs), estas aparecen cuando la temperatura del agua en el fondo alcanza un valor crítico $T_w \approx T_{crit} = 100°C$ a la cual la presión del vapor saturado excede a la presión externa. Considere un recipiente calentando agua con densidad $\rho_w = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, a presión atmosférica $P_0 = 1.016 \times 10^5$ Pa y con un nivel $H = 10$ cm respecto del fondo.



a) Encuentre una condición de presiones que permita el crecimiento de una ABs con tensión superficial σ (fuerza por unidad de longitud) y radio R_{ab} en el fondo del recipiente lleno de agua con densidad ρ_w hasta una altura H.

b) Obtenga una expresión para la r_{ab} crítica, en la cual una ABs se desprende del fondo del recipiente. Tome en cuenta que $r_{ab} << R_{ab}$.

c) Considere una AB con radio R_b en el fondo del recipiente. Conforme el agua es hervida, la burbuja se satura de vapor y amplía su radio. Escriba el cociente $\eta = m_{aire}/m_{vapor}$ de las masa de aire y de vapor saturado dentro de la burbuja a una temperatura T. Calcule el coeficiente en el punto de ebullición $T = 100°C$ (R_b = 1 mm). A esta temperatura el vapor posee una densidad $\rho_{vapor} = 0.596\ kg/m^3$ y una presión $P_{vapor} = 1.016 \times 10^5$ Pa.

Datos de posible utilidad:

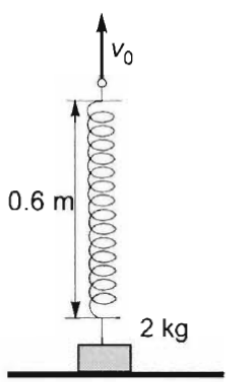
- Masa molar del aire ($\mu = 0.029\ kg/mol$).
- Constante de gas ideal ($R = 8.31\ J/mol\dot{K}$))
- Tensión superficial del agua ($\sigma = 0.0725\ N/m$)

Problema 18.

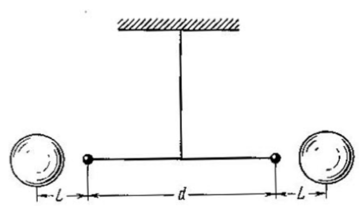
18.1 Un resorte de longitud normal $L_0 = 0.6$ m tiene una constante elástica $k = 80$ N/m. En la parte inferior del resorte se fija un bloque de masa $m = 2$ kg, el resorte se coloca verticalmente de tal manera que la masa descanse sobre el suelo como se muestra en la figura. Inicialmente, el resorte se encuentra sin estirar, después el extremo superior del resorte es levantado con una velocidad uniforme $v_0 = 0.5$ m/s. (considera que $g = 10$ m/s)

a) ¿Qué tanto alto puede subir el bloque m en 1.75 segundos? En este caso, ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza que levanta al resorte?

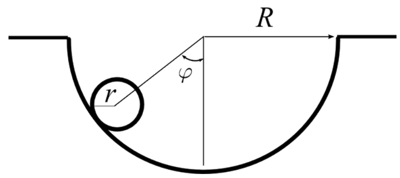
c) Encuentra la variación de la potencia como función del tiempo, $P(t)$, describe su comportamiento.



18.2 Una barra, de masa despreciable, tiene una longitud $d = 1$ m y en sus extremos están sujetas dos pequeñas masas de $m = 1$ g. La barra está colgada de su centro, de manera que puede girar sin rozamiento. Dos esferas grandes de masas $M = 20$ kg están fijas en la misma recta de la barra. La distancia entre los centros de las esferas grandes y pequeñas es $L = 16$ cm. Calcular el período de oscilaciones pequeñas de la barra.



18.3 Un aro de masa m y radio r puede girar, sin deslizamiento, sobre la superficie interna de un cilindro de radio R. Determina el período de oscilaciones del aro, considerando que el ángulo φ pequeño.



Problema 19, enfriando un gas con láser.

En 1997 el Premio Nobel de Física les fue concedido a Steven Chu, Claude Cohen- Tannoudji y Willian D. Philips por su contribución al desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle y Carl E. Wieman utilizaron estos métodos para obtener la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos, por lo que recibieron el Premio Nobel de Física en 2001. El fundamento de estos métodos es la técnica que se denomina *"láser cooling"*, en la cual se utiliza la colisión entre fotones (provenientes de un láser) y los átomos del gas que se pretende enfriar. El láser emite fotones con una energía tal que un fotón puede ser absorbido cuando colisiona con un átomo del gas.

Se pretende enfriar un gas de átomos de sodio (M=23 g/mol) que se encuentra a la temperatura de 300 K con un láser que emite fotones con una energía tal que un átomo de sodio, al absorber un fotón, salta del estado fundamental ($E_{fund} = -5.14$ eV) hasta el primer estado excitado ($E_{exc} = -3.04$ eV).

Puede considerar que la temperatura, T, del gas se relaciona con la energía cinética media, E_c, de los átomos de sodio a través de la expresión

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T \tag{1}$$

donde $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann

Datos: $N_A = 6.02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^-1$; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s; 1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J. Considere que los átomos son no relativistas.

(a) ¿Cuál es la velocidad media de un átomo de sodio en un gas a 300 K?

(b) Obtenga una expresión para la variación de la velocidad de un átomo de sodio cuando colisiona frontalmente con un fotón del citado láser. Calcule el valor numérico para esa variación, considerando que la energía del fotón absorbido es *exactamente igual* a la energía de la transición. ¿Cuántas colisiones de este tipo serían necesarias para detener un átomo de sodio?

(c) En realidad, como la variación de la energía cinética del átomo no es nula, la energía del fotón *no es exactamente igual* a la energía de la transición.

(c.1) Demuestre que la variación de la energía cinética del átomo asociada a la absorción del fotón en una colisión frontal se puede escribir como

$$\Delta E_c = -m\,|v_i|\,|\Delta v| + \frac{1}{2} m\,|\Delta v|^2\,, \tag{2}$$

donde las magnitudes $|v_i|$ y $|\Delta v|$ son los módulos de los vectores *velocidad inicial y variación de la velocidad del átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule la razón $\Delta E_c / E_{foton}$ para los átomos con la velocidad obtenida en (a), considerando que, en este caso, el primer término de la expresión anterior para ΔE_c es la dominante (es decir, que el segundo término del segundo miembro de esta expresión es despreciable) y que puede utilizar para la variación de la velocidad del átomo el resultado obtenido en la parte (b).

(d) La temperatura final alcanzada en un enfriamiento de este tipo está limitada inferiormente por lo que se denomina límite de retroceso (*recoil limit*) relacionado con el retroceso de los átomos en el proceso de absorción y emisión.

(d.1) Obtenga una expresión para la variación de la energía cinética de un átomo con velocidad inicial nula que absorbe un fotón y demuestre que, en este caso, la energía del fotón debe ser mayor que la energía de la transición atómica.

(d.2) Calcule la diferencia de energía cinética del apartado anterior, sabiendo que E^2_{foton}/mc^2 se puede aproximar por $E^2_{transición}/mc^2$, donde m representa la masa del átomo de sodio y $E_{fotón}$ la energía del fotón absorbido.

(d.3) Considere que el átomo que absorbió un fotón en las condiciones del apartado anterior, que quedó en estado excitado, emite un fotón en la misma dirección y en sentido opuesto al de su velocidad. Calcule la variación de la energía cinética del átomo. También en este caso puede utilizar la aproximación $\left(E'_{fotón}\right)^2/mc^2 \approx \left(E_{transición}\right)^2/mc^2$, en la que $E'_{fotón}$ es la energía del fotón emitido.

(d.4) Considerando este proceso de absorción y de emisión, calcule la ganancia de energía final del átomo y la temperatura a que corresponde. ¿Cuál es la importancia del proceso en el enfriamiento de átomos?

Problema 20,

20.1) Una piscina se llena de agua con ayuda dos grifos. Al principio, el primer grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo requerido para llenar la piscina valiéndose solamente del segundo grifo. Luego, al contrario, el segundo grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso sólo del primer grifo. Después de esto se llenó una $\frac{13}{18}$ parte de la piscina. Calcular el tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso de cada grifo por separado, si manteniendo abierto ambos grifos a la vez la piscina se llena en 3 horas 36 min.

20.2) Los puntos A y B se encuentran en la vía principal y rectilínea que va del Oeste al Este. El punto B se encuentra 9 km más al Este que A. Un coche parte del punto A hacia el Este y se desplaza uniformemente con una velocidad de 40 km/h. Al mismo tiempo, una motocicleta sale del punto B en la misma dirección con una aceleración constante $a = 32\,\mathrm{km/h^2}$. Hallar la distancia máxima entre el coche y la motocicleta en el curso de las dos primeras horas.