Tarea 7

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: 4 abril 2016

Problema 27, Gran Condensador.

La figura 1 muestra el esquema de un condensador ("capacitor") plano de características fuera de lo corriente. Sus placas tienen un área $A = 1.4 \times 10^5\,\mathrm{m}^2$ y están separadas una distancia $d_0 = 0.1\,\mathrm{mm}$. El condensador ha sido cargado con una fuente de tensión $V = 7.10\,\mathrm{kV}$, que posteriormente se ha desconectado. Entre las placas inicialmente hay aire, de permitividad $\varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m.

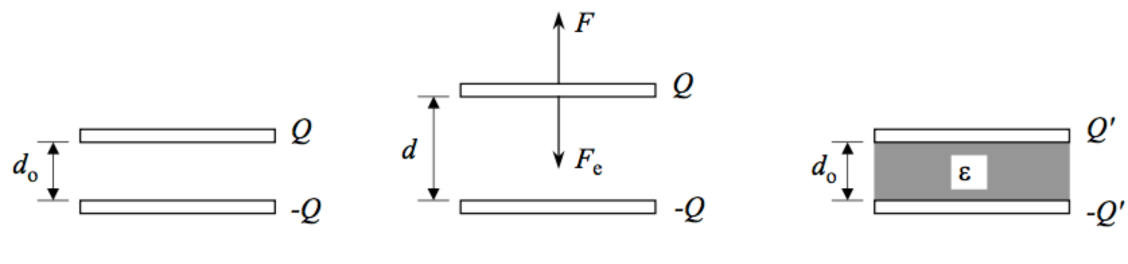


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Calcule la carga Q de las placas y el campo eléctrico E entre ellas.

b) Suponga que la placa inferior del condensador está fija y que separamos la superior hasta una distancia $d > d_o$ entre ambas (véase la figura 2). Obtenga, en función de d, una expresión para la energía eléctrica almacenada por el condensador, $U(d)$.

c) A partir de la variación de energía eléctrica entre la situación inicial (fig. 1) y la final (fig. 2), calcule la fuerza F con que hay que actuar sobre la armadura superior para contrarrestar la fuerza de atracción eléctrica, F_e, que ejerce sobre ella la placa inferior. ¿Depende F_e de d?

La fuerza F_e es muy grande, por lo que no parece muy fácil ni práctico mantener separadas las placas haciendo actuar continuamente la fuerza F. Otra solución más sencilla es colocar entre las placas una hoja de papel aislante, de grosor d_o, que impida que se junten dichas placas (véase la figura 3). Pero el papel tiene una permitividad $\varepsilon = 3.7\varepsilon_0$ que cambia las características electrostáticas del sistema. Suponga que la hoja de papel se ha situado entre las placas del condensador antes de cargarlo con la misma fuente de tensión V y, posteriormente, desconectarlo.

d) Calcule los nuevos valores de la carga en las placas del condensador, Q', del campo entre ellas, E', y de la energía eléctrica del sistema, U'.

e) Calcule la fuerza de compresión a la que está sometido el papel, F'_e, debido a las fuerzas e electrostáticas.

Problema 28, vibración de moléculas.

28.1) El potencial de interacción entre dos átomos se ha observado experimentalmente que varia con la distancia r entre los átomos de la siguiente manera:

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{6} \right] \quad (1)$$

A este potencial de interacción se le conoce como potencial de Lennard-Jones y se dice que representa una interacción tipo van der Waals. Cuando la distancia de separación es $r = R_0$ el potencial de interacción toma su valor mínimo U_0. Bajo estas condiciones la molécula esta en equilibrio mecánico ya que la fuerza de interacción es cero $F = -\frac{dU}{dr}$.

a) Obtén la expresión la expresión de la fuerza correspondiente al potencial (1)
a) Verifica explícitamente que el valor mínimo del potencial (1) es U_0 cuando $r = R_0$.
b) Esboza la gráfica del potencial de interacción $U(r)$ como función de la distancia de separación r.
c) Demuestre que cuando el desplazamiento x, con respecto a la posición de equilibrio ($r = R_0$), es pequeña, la energía potencial es aproximadamente $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$, a partir de esta expresión determina el valor de k.
Sugerencia: sea $r = R_0 + x$ y $u = x/R_0$. Emplea la aproximación de $(1+u)^n$ hasta los tres primeros términos.
Solución: $k = \frac{72U_0}{R_0^2}$
d) Dos átomos de argón pueden formar una molécula débilmente unida Ar_2 debido a una interacción de Van der Waals con $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}$ J y $R_0 = 3.82 \times 10^{-10}$ m. Calcule la constante de fuerza k y la frecuencia de oscilaciones pequeñas de un átomo alrededor de su posición de equilibrio.

28.2) Dos átomos idénticos de una molécula diatómica vibran como osciladores armónicos; no obstante, su centro de masa que está justo a la mitad de separación entre los centros de los átomos, no se mueve.
a) Demuestra que, en cualquier instante, los momentos lineales de los átomos con respecto al centro de masa son $\mathbf{p}$ y $-\mathbf{p}$
b) Demuestra que la energía cinética total K de los dos átomos se puede escribir como la de un solo objeto de masa $m/2$ con momento lineal de magnitud p. Usando este resultado, ¿cual es la corrección en la frecuencia de oscilación de la molécula de argón del último inciso del problema anterior?
c) En el caso de que los átomos no sean idénticos y tienen masas m_1 y m_2, demuestra que se sigue cumpliendo el resultado del inciso (a) y lo mismo para el inciso (b) pero con un objeto de masa $m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, esta cantidad se denomina masa reducida del sistema.

28.3) Cuando los átomos de una molécula de H_2 se desplazan del equilibrio, una fuerza de restitución actúa entre los átomos: $F = -kx$ con $k = 580$ N/m. Calcula la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2.

28.4) Muchas moléculas diatómicas (compuestas por dos átomos) están unidas por enlaces covalentes que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals, por ejemplo H_2, O_2 y N_2. De acuerdo a las observaciones experimentales, la interacción de tales moléculas se puede describir mediante una fuerza de la forma:

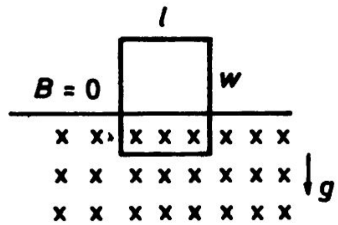
$$F = A \left[e^{-2b(r-r_0)} - e^{-b(r-r_0)} \right] \quad (2)$$

donde A y b son constantes positivas, r es la distancia de separación de los centros de las moléculas y R_0 es la separación de equilibrio. Para la molécula de H_2 los valores de las constantes son: $A = 2.97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1.95 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$ y $R_0 = 7.4 \times 10^{-11}$ m.

Considerando pequeños movimientos alrededdor del punto de separación de equilibrio. Calcula la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2 y compara el resultado con el inciso anterior.

Problema 29, electromagnetismo.

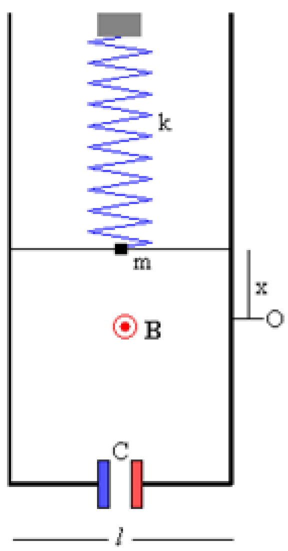
29.1 Una espira rectangular de dimensiones l y w se deja caer al tiempo $t = 0$ desde el reposo por encima de una región donde hay un campo magnético uniforme B_0, como se muestra en la figura. La espira tiene una resistencia R, autoinductancia L y masa m.



a) Considera que la autoinductancia puede ser ignorada pero no la resistencia, encuentra la corriente y la velocidad de la espira como función del tiempo.

b) Ahora considera que la resistencia puede ser ignorada pero no la autoinductancia, encuentra en este caso la corriente y la velocidad de la espira como función del tiempo.

29.2 Una varilla de masa M cuelga del techo sujeta por un muelle elástico de constante k. La varilla puede deslizarse a lo largo de dos vías paralelas colocadas en posición vertical y separadas por una distancia l, considere que no hay fricción en el sistema. En la parte inferior las vías se conectan a un condensador de capacitancia C. El sistema se encuentra en una región con campo magnético B y perpendicular al plano del sistema.



Considere primeramente que el campo magnético se encuentra apagado, la varilla descenderá hasta alcanzar el equilibrio y si se desplaza una distancia x esta comenzará a oscilar. Obtenga la distancia que se estira el resorte hasta el punto de equilibrio X_e y la frecuencia angular de las oscilaciones ω.

A partir de ahora consideraremos que el campo magnético se encuentra encendido, al moverse la varilla dentro del campo magnético esta generará una diferencia de potencial en la resistencia, tome en cuenta el origen de coordenadas en el punto donde el resorte no se encuentra deformado:

a) Determine la f.e.m. inducida ε y la intensidad i en el circuito en términos de C, B, l,$\dot{x}$,$\ddot{x}$

b) Haga un diagrama de fuerzas en la varilla y determine la ecuación de movimiento de esta. Asuma que al tiempo $t = 0$ se encuentra a x_0 del punto de equilibrio con una velocidad nula.

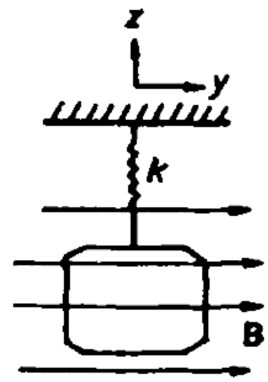
c) Haga un bosquejo de la intensidad y la f.e.m. de sistema en una misma gráfica.

29.3 Una espira de área A y resistencia R esta suspendida por un resorte de torsión de constante k, como se ve en la figura. En la región donde esta suspendida la espira hay un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{j}$, la espira se encuentra en el plano yz y puede rotar alrededor del eje z con un momento de inercia I, como se muestra en la figura. El resorte de torsión es aislante y se puede despreciar la autoinductancia de la espira.

Si la espira es desplazada un pequeño ángulo α_0 del equilibrio y dejada en libertad.

a) Determina la ecuación que describe el movimiento de la espira, explica cualitativamente los tipos de movimiento que puede tener la espira (puedes incluir gráficas).

b) Encuentra la dependencia con el tiempo del ángulo de giro de la espira respecto de la linea del resorte de torsión.



Problema 30, Molécula Diatómica.

Una molécula diatómica consta de dos átomos enlazados químicamente. Estos enlaces químicos sólo pueden estudiarse con exactitud utilizando mecánica cuántica. Sin embargo, se pueden hacer aproximaciones de mecánica clásica adecuadas para varias aplicaciones. Un modelo común de enlace diatómico es tratarlos como si los dos átomos estuvieran atados por un resorte de constante k a una separación de equilibrio r_0. Este modelo es muy usado para estudiar las vibraciones moleculares de baja energía, pero falla en donde hay rompimiento de enlaces o para vibraciones de alta energía. La energía potencial de este modelo, el cual no es más que el oscilador armónico, se puede escribir como:

$$U\left(r\right) = \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2 \tag{3}$$

donde r es la separación instantánea entre los dos átomos. De la expresión anterior podemos obtener la magnitud de la fuerza entre los dos átomos:

$$F\left(r\right) = -k\left(r - r_0\right)$$

Cuando se quiere modelar vibraciones de alta energía (o de alta amplitud) se puede recurrir al potencial de Morse:

$$U\left(r\right) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]$$

en donde D_e y a son cantidades constantes. Nótese que cuando la distancia interatómica crece hasta el infinito, la energía potencial tiende a D_e.

a) Considere una molécula diatómica con átomos de masas m_1 y m_2 y separación de equilibrio r_0. Determine la ubicación del centro de masas de la molécula respecto de m_1.

b) Si esta molécula, supuesta rígida, gira a una velocidad rotacional ω alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los átomos y pasa por su centro de masa, encuentre la expresión de la energía cinética rotacional en término de m_1, m_2, r_0, ω.

c) Suponga ahora que la molécula no rota pero sus átomos pueden vibrar. Determine su frecuencia angular de vibración ω_0 para bajas energías.

d) Un efecto muy estudiado en espectroscopia es el hecho de que el movimiento rotacional hace que la distancia entre los átomos aumente. Este fenómeno se conoce como distorsión centrífuga. Encuentre esta nueva distancia r_0' en función de ω, ω_0 y r_0, suponiendo que la molécula no vibra.

e) Para oscilaciones pequeñas el potencial de Morse se comporta de manera muy parecida al potencial del oscilador armónico. Encuentre la constante equivalente k en función de D_e y a para oscilaciones pequeñas del oscilador de Morse.

Problema 31, Termómetro flotante.

El sistema de la figura es un ligero flotador de vidrio formado por un tubo cilíndrico, cerrado en su extremo superior, y unido a una ampolla esférica. Ésta tiene, en su parte inferior, un orificio por el que puede entrar y salir el agua. A este dispositivo está unida una pequeña bola de plomo de manera que, en las condiciones de presión atmosférica P_0 y temperatura $T_0 = 17°\text{C}$, flota con la ampolla llena de agua exactamente hasta la mitad y sobresaliendo la mitad del tubo de la superficie del agua.

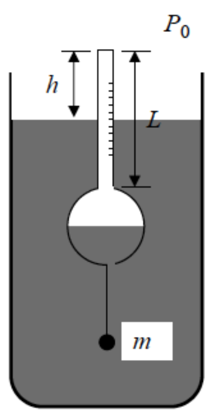
Datos:

diámetro de la ampolla: $D = 6$ cm,

diámetro y longitud del tubo: $d = 1$ cm, $L = 10$ cm

Densidad del plomo y del agua: $\rho_p = 11.3\ \text{g/cm}^3$, $\rho_a = 1.0\ \text{g/cm}^3$

Llama V_0 al volumen dentro del flotador, p_c la presión del aire dentro del flotador y T_0 a su temperatura. Considere al aire como un gas ideal.



a) Calcula la masa m de plomo necesaria para que el termómetro flote en las condiciones descritas. Por simplicidad, considere despreciables la masa y el grosor de las paredes del vidrio así como la masa del aire contenido en la cámara y la del hilo que sujeta el plomo.

b) Calcula la presión p_c del aire contenido en el flotador.

Un aumento de la temperatura producirá un aumento del volumen de la cámara de aire y el conjunto emergerá un poco (P_0 se mantiene constante). Observando la altura h de la parte de tubo que sobresale del agua y grabando una escala en su pared habremos construido un termómetro.

c) Calcula la separación de las marcas de la escala termométrica para que esté graduada en grados Celsius. Llame V_0 al volumen de la cámara de aire a presión p_c y temperatura T_0. Considere al aire como un gas perfecto.