Gravitación

1 Leyes de Kepler

1.1 Ejercicios

1. Demuestre que, en el fondo de un pozo vertical de mina cavado a una profundidad D, el valor medido de g será:
$$g = g_s\left(1 - \frac{D}{R}\right)$$
Donde g_s es el valor superficial. Suponga que la tierra es una esfera uniforme de radio R.

2. Demuestre que el período mínimo correspondiente a la rotación de planetas es:
$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$
La mayoría de planetas, satélites y asteroides poseen una densidad de 3 g/cm^3, Determine T, no se conoce objeto alguno de rota con un período menor al calculado.

3. Como se muestra en el dibujo, dos cuerpos de masas m y M que interactúan a través de su fuerza gravitacional mutua girarán con la misma rapidez angular ? alrededor de su centro de masas C.

   a) Demuestre que en este caso la ley de periodos de Kepler se convierte en:
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2$$

   b) Muestre el factor de corrección para el Sistema Tierra-Luna:
   Masa de la Tierra: $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg Masa de la Luna: $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg

4. La teoría de la relatividad General predice pequeñas correcciones de la ley de la gravitación universal de Newton. Para un planeta de masa m viajando a una velocidad v en una órbita de radio r, la expresión para la fuerza modificada se puede escribir como:
$$F = \frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{6v^2}{c^2}\right)$$
Donde c es la velocidad de la luz y $v/c << 1$.

   a) Encontrar que el periodo se puede escribir
$$T = T_0\left(1 - 12\pi^2 \frac{r^2}{c^2 T_0^2}\right)$$

b) Mostrar que en cada revolución el planeta avanza un ángulo respecto al caso Newtoniano

$$\Delta\phi = \frac{24\pi^3 r^2}{c^2 T_0^2}$$

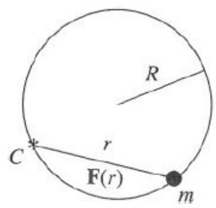
5. Sistemas de 3 cuerpos:

   a) Cierto sistema de estrellas triples consta de dos estrellas, con una masa m, que giran alrededor de una estrella central de masa M, en la misma órbita circular. Las dos permanecen en extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular. Obtenga una expresión del período de traslación de las estrellas; el radio de la órbita es r.

   b) Ahora las 3 estrellas de masa M están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L ¿Con qué velocidad deben moverse si todas giran bajo la influencia de la gravedad mutua en una órbita circular circunscrita, aunque preservando todavía el triángulo equilátero.

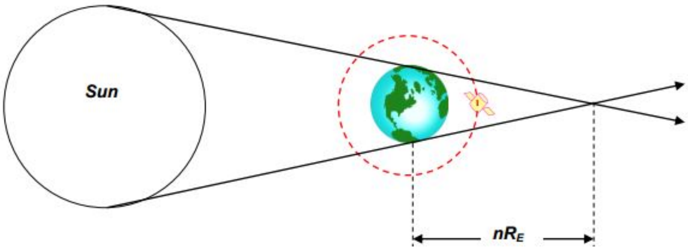
6. Una partícula se mueve en dos dimensiones bajo la influencia de una fuerza central con un potencial $V(r) = \alpha r^p + \beta r^q$. Encuentre los coeficientes p y q que hacen posible tener una órbita en espiral ($r = c\theta^2$ con c constante.

7. Una partícula m se mueve en una órbita circular de radio R bajo la influencia de una fuerza central F(r). El centro de la fuerza es C y se encuentra en un punto de la circunferencia. ¿Qué fuerza se sigue?

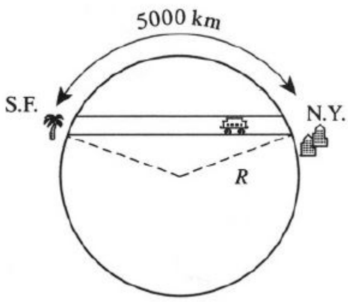


1.2 Problemas

1. Los satélites geosíncronos describen órbitas de forma tal que permanecen inmóviles sobre un determinado punto sobre el globo. Debido a la posición de la Tierra se observa que el tiempo de exposición de la luz solar en el satélite es mayor que el tiempo en oscuridad. La extensión de la parte oscura es 200 veces el radio de la Tierra ($R_E = 6300$ km). ¿Qué tiempo permanece en oscuridad el satélite?



2. Un tunel recto es cavado de Nueva York a San Francisco, una distancia de 5000 kilómetros medidos a través de la superficie de la Tierra. Un carro es dejado en libertad desde el extremo de Nueva York, y rueda a través del tunel hasta San Francisco.

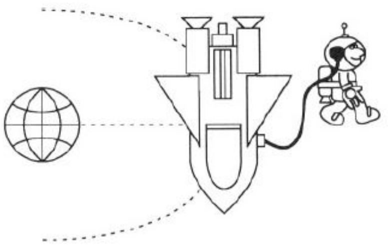


   a) Ignorando los efectos de fricción y la rotación de la Tierra, ¿Cuánto le toma en realizar tal trayectoria?. Tenga en cuenta que la aceleración gravitacional en la superficie es $g = 980\ cm/s^2$ y la tierra posee un radio $R = 64000\ km$.

   b) Suponga ahora que existe una fricción proporcional al cuadrado de la velocidad (continúe ignorando la rotación de la Tierra). ¿Cuál es la ecuación del espacio fase de la trayectoria?. Realice un bosquejo.

   c) Considere ahora los efectos de rotación. Estime la magnitud de la fuerza centrífuga y de los efectos de Coriolis relativos en relación a la fuerza gravitacional (ignore la fricción). Considere ambas ciudades en la misma latitud (40 N aproximadamente).

3. Un astronauta con masa total 110 kg (incluyendo equipo) estaba haciendo un EVA (tipo de caminata en el espacio) cuando su jetpack falló. Él se da cuenta que la única conexión con la nave espacial es a través del cable de comunicación de longitud L=100 m. Este cable puede soportar una tensión de 5 N antes de romperse. Estime si esta tensión es la suficiente para evitar que se rompa y se quede a la deriva en el espacio. Asuma que la altura de la órbita es despreciable comparada con el radio de la Tierra (R=6400 km).



4. Imagine un planeta de masa M con una luna pequeña de masa m y con un radio a que gira alrededor de ella y que conserva la misma cara hacia ella. Si la luna ahora se acerca al planeta ¿Habrá una distancia crítica con el centro del planeta en el cual sea levantado y expedido el material que se encuentra en la superficie lunar. Demuestre que esa distancia está dada por:

$$r_c = a\left(\frac{3M}{m}\right)^{1/3}$$

A esta distancia crítica se le conoce como límite de Roche.

5. Supóngase que pudiera cavarse un túnel a través de la tierra de un lado a otro sobre un diámetro. En la superficie se deja caer del reposo una partícula de masa m en el túnel.

   a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y que tiempo le tomará recorrer un radio de distancia.

   b) ¿Qué velocidad llevará el cuerpo cuando se encuentra en el centro del planeta?

   c) Suponga ahora que se realiza el mismo túnel en una cuerda de la circunferencia (mirando la esfera desde un lado) Determine el tiempo del viaje completo de una lado de la cuerda hasta el otro. $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg y $R_T = 6.37 \times 10^6$ m.

6. Varios planetas (los gigantes gaseosos) poseen anillos circundantes casi circulares, compuestos quizá de material que no ha formado un satélite. Además, muchas galaxias contienen estructuras anulares. Suponga un anillo homogéneo de masa M y radio R.

   a) Encuentre una expresión de la fuerza gravitacional ejercida por el anillo por el anillo sobre la partícula a lo largo del eje a una distancia d. item[b)]Suponga ahora que $d/r >> 1$, con velocidad atravesará la partícula el centro del anillo.

7. Suponga un objeto planetario de densidad uniforme ρ y de radio R.

   a) Demuestre que un esfuerzo compresivo (definido como fuerza por área transversal unitaria) cerca del centro está dado por:

$$S = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2$$

   b) ¿Cuál es el mayor tamaño posible de un satélite no esférico auto gravitante hecho con concreto? Suponga que el concreto tiene un esfuerzo máximo de compresión de $4.0 \times 10^7\ N/m^2$ y una densidad media de $\rho = 3,000\ kg/m^3$

8. El Sol es tan sólo una estrella que pertenece a la galaxia llamada Vía Lactea. El Sol se encuentra casi en la orilla de la galaxia a una distancia aproximada de 25,000 años luz del centro de la misma. Podemos suponer que el Sol viaja en un círculo dando una vuelta en un periodo de 170,000,000 años. Usando sólamente la información anterior y el hecho que la luz tarda en viajar 8 minutos del Sol a la Tierra, estime la masa de la galaxia. Para hacer el cálculo puede suponer que la masa de la galaxia puede concentrarse en el centro de la misma (esta no es una mala aproximación!). Exprese su resultado en términos de la masa del Sol, MS. Recuerde que un año luz es la distancia que la luz viaja en un año. RECUERDE: No puede usar más información que la que se da en el problema!

9. Considere un planeta esférico que se encuentra rotando. El eje de rotación pasa por los polos. Sea V la velocidad en un punto del ecuador del planeta. El efecto de la rotación del planeta es hacer que la aceleración de la gravedad g_e en el ecuador sea 1/2 de su valor en un polo g_p. ¿Cuál es la velocidad de escape para una partícula localizada en un polo? Exprese tal velocidad en términos de V . La velocidad de escape es la velocidad mínima en un punto de la superficie de un planeta para que venza a la fuerza gravitacional y no regrese al planeta.

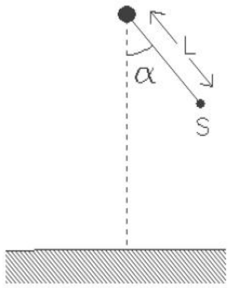
10. En su novela "De la tierra a la Luna" Julio Verne sugiere disparar una nave desde la Tierra hacia la Luna de tal forma que sólo avance debido a fuerzas gravitacionales, es decir, sin auxilio de motores. Bajo estos supuestos se calculará cuál debería ser la mínima velocidad inicial de disparo para asegurar que la nave llegue a la Luna y con qué velocidad debe llegar a su proximidad. La distancia Tierra-Luna es igual a 60 radios terrestres y la masa de la Tierra es igual a 81 veces la masa lunar.

    La idea clave en la propuesta de este escritor, se encuentra en que entre la Luna y la Tierra existe un punto tal que un cuerpo de masa indistinta queda en equilibrio y por cualquier perturbación caería a cualquier cuerpo celeste, ya sea la Tierra o la Luna.

    a) Determine a qué distancia se encuentra ese punto desde el centro de la Tierra. (En radios terrestres)
    b) ¿Cuál es la velocidad mínima que se requiere para que el cuerpo llegue a ese punto?
    c) Determine la velocidad de alunizaje que llevará la nave.

11. La masa de Caronte, un satélite de Plutón descubierto recientemente, es 8 veces menor que la masa de Plutón. Ambos cuerpos se mueven en una órbita circular alrededor de un centro de masas común, además ambos se miran el uno al otro siempre de tal manera que se mueven como un cuerpo único. La distancia entre el centro del planetoide y el centro de satélite es $R = 19640$ km, el radio del satélite $r = 593$ km Determine la diferencia relativa de la aceleración de la gravedad del satélite, entre los puntos de mayor y menor aproximación del satélite al planeta.

12. La estabilización automática de la orientación de los satélites utiliza los efectos gravitacionales para colocar dispositivos. Considere un satélite que describe una trayectoria circular con radio R con respecto al centro de la Tierra, en un determinado momento suelta un dispositivo S ligado a la nave mediante una barra rígida de masa despreciable con longitud L. La orientación del dispositivo es medido con un ángulo α como se muestra en la figura. Tenga en cuenta que $L << R$.



a) Obtenga la velocidad angular ω del satélite previo al lanzamiento del dispositivo.

b) Teniendo en cuenta que al soltarse el dispositivo la nave mantiene la velocidad angular ω. Determine para qué valores del ángulo α el sistema se halla en equilibrio.

c) De los valores obtenidos anteriormente determine cuáles están en equilibrio estable. Si se desvía un ángulo pequeño en la configuración estable el dispositivo comenzará a oscilar. Exprese el período de oscilación en función del período de revolución del satélite alrededor de la Tierra. Tenga en cuenta que $\sin\alpha \approx 1$ y $\cos\alpha \approx 1$.

Datos de posible utilidad:

- Constante de Gravitación Universal $G = 6.7 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$
- Masa de la Tierra $M = 6 : 0 \times 10^{24}$ kg
- Radio de la Tierra $R_T = 6370$ km