P 1. Murcia: Sol, mar y salinas.

La Región de Murcia disfruta de un privilegiado clima mediterráneo. Goza de inviernos suaves y veranos calurosos, teniendo en promedio 300 días de sol al año. Gracias a ello gran parte de su territorio es un vergel: la *huerta murciana*. Sin embargo, sus recursos hídricos no son especialmente abundantes, las precipitaciones son escasas y concentradas en pocos días. Por ello, a lo largo de toda su historia, los murcianos han sabido aprovechar hasta la última gota de agua, como lo demuestran los numerosos ingenios hidráulicos que han construido: molinos, norias, acequias, azudes, etc., parte de los cuales todavía están en uso. Podemos mencionar los molinos existentes en el río Segura, de visita obligada en el centro de la ciudad de Murcia, y las norias de Abarán y Alcantarilla.

Por otra parte, también han sabido aprovechar su abundante energía solar. Ejemplos de ello son los parques fotovoltaicos, entre los que destaca el existente en Jumilla, el mayor de Europa cuando fue inaugurado en 2008, y múltiples salinas como las de San Pedro del Pinatar en la laguna del Mar Menor, protagonista de este problema.

Refiriéndonos a la radiación solar, se denomina *constante solar* a la energía que, por unidad de tiempo y unidad de superficie normal a la dirección de propagación, llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. Esta constante, que es una densidad superficial de potencia, o intensidad de energía, tiene por valor $k = 1{,}366\ \mathrm{kW/m^2}$. Debido a la absorción y difusión en la atmósfera, a la superficie de la Tierra sólo llega, en días soleados, una fracción $\beta = 0{,}5$ de dicha intensidad solar.

Para simplificar el problema admitiremos que la trayectoria aparente del Sol está en un plano perpendicular a la superficie de la Tierra[1].

En un día soleado, la energía que se recibe en la superficie de la Tierra depende de la *altura angular* del Sol, es decir del ángulo θ que se muestra en la figura 1. Naturalmente, este ángulo varía a lo largo del día.

a) Para un día soleado y para una "altura" angular del Sol, θ, determine la potencia P que deposita la radiación solar en un área S de la superficie terrestre.

b) Determine la potencia media, $\langle P \rangle$, que recibe la superficie S a lo largo de un día, es decir para $0 \le \theta \le \pi$.

Véanse las Notas 1 y 2 al final del ejercicio.

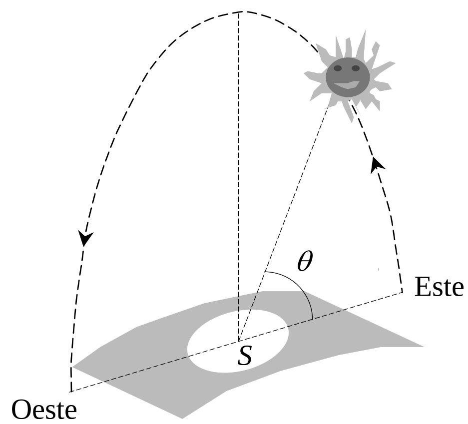

Fig.1

En las salinas, la energía solar se utiliza para evaporar el agua de mar y extraer la sal disuelta. El proceso es complejo y se lleva a cabo mediante la parcelación de las aguas en distintos estanques: almacenadores, calentadores y cristalizadores en los que se precipita la sal. Son estos últimos estanques los que centrarán la atención de este ejercicio.

Supongamos que los estanques de cristalización de las salinas de San Pedro tienen una profundidad media $h = 0{,}15\ \mathrm{m}$ y con una concentración de sal del 4,5% en masa, $c_m = 0{,}045$. En condiciones de presión y temperatura medias, la densidad del agua es $\rho = 1{,}03 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ y su calor de vaporización es $L = 2{,}4 \times 10^3\ \mathrm{kJ/kg}$.

c) Considerando que el tiempo medio de insolación en un día es $T_{1/2} = 12\ \text{horas}$, determine el número n de días soleados que se necesitan para evaporar el agua de los estanques de cristalización y calcule su valor.

---

[1] Realmente la latitud de Murcia es de unos 38º, y el ángulo que forma el plano ecuatorial de la Tierra con el de la eclíptica es de unos 23º. Por tanto, en verano, el plano de la órbita aparente del Sol forma un ángulo de unos 15º con la vertical.

Estudiemos ahora aspectos relativos a la emisión de energía por el Sol. Como se ha mencionado, la constante solar k es la densidad superficial de potencia que llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. A partir de este dato y sabiendo que la distancia Tierra-Sol es $R = 1{,}49 \times 10^{11}$ m,

d) Determine la potencia total emitida por el Sol, P_S, y calcule su valor.

La energía que emite el Sol conlleva una disminución de su masa de acuerdo con la conocidísima fórmula de Einstein $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz, $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s.

e) Determine la masa que pierde el Sol cada segundo, μ_S, y calcule su valor.

Por último, vamos a estudiar si esta pérdida de masa afecta de forma apreciable al radio de la órbita de la Tierra en torno al Sol.

f) Teniendo en cuenta la ley de Gravitación Universal y la conservación del momento angular de la Tierra respecto al Sol, determine la variación relativa del radio de la órbita terrestre, $\Delta R / R$, en función de la variación relativa de la masa del Sol, $\Delta M_S / M_S$.

g) Calcule la variación anual del radio de la órbita terrestre, sabiendo que la masa del Sol es $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Nota 1 .- El valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ se define como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Geométricamente este valor medio coincide con la altura de un rectángulo de base Δx y cuya área sea igual a la comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje X, entre x_1 y x_2, como se muestra en la figura 2.

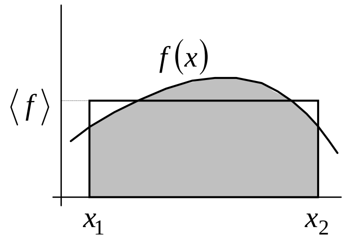

Fig. 2

Nota 2.-

$$\int \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -\cos \alpha$$

$$\int \cos \alpha \, d\alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, la intensidad que llega a la superficie de la Tierra procedente del Sol es una fracción $\beta = 0{,}5$ de la constante solar.

$$k' = \beta k \qquad (1)$$

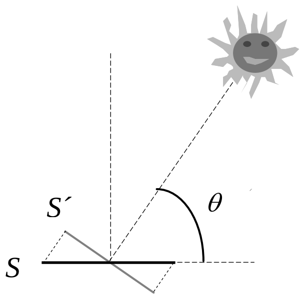

Fig.3

Para determinar la potencia instantánea que deposita la radiación sobre un área S cuando la altura del Sol es θ (figura 1 del enunciado), es preciso considerar la proyección de dicha superficie en dirección perpendicular a los rayos, como se muestra en la figura 3. Como $S' = S \operatorname{sen}\theta$, la potencia instantánea, P, en el área S, será

$$\boxed{P = \beta\, k\, S \operatorname{sen}\theta} \qquad (2)$$

b) Esta potencia P es función de θ, que varía a lo largo del día. La potencia media diaria se calcula, de acuerdo con la Nota 1 del enunciado, evaluando el valor medio de (2) desde que el Sol sale hasta que se pone, es decir desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

$$\langle P \rangle = \beta\, k\, S \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle P \rangle = \frac{2}{\pi} \beta\, k\, S} \qquad (3)$$

c) El volumen de agua de mar en los estanques cristalizadores de las salinas de San Pedro es $V = h\,S$, donde S es ahora el área de dichos estanques. Por lo tanto la masa de agua de mar que contienen es $m = \rho\, h\, S$. Como la concentración de sal es $c_m = 0{,}045$, la masa de agua que hay que evaporar es

$$m_{agua} = \rho\, h\, S \left(1 - c_m\right)$$

Por lo tanto, la energía que se necesita para la evaporación es

$$W = L\, m_{agua} = \rho\, L\, h\, S \left(1 - c_m\right)$$

Como la potencia que recibe la salina es $\langle P \rangle$, durante un día soleado la energía absorbida es igual al producto de $\langle P \rangle$ por $T_{1/2} = 12\ \text{horas} = 4{,}32 \times 10^4\ \text{s}$. En consecuencia, el número de días soleados necesarios para extraer la sal será

$$n = \frac{L\, h\, S\, \rho \left(1 - c_m\right)}{\langle P \rangle\, T_{1/2}} = \frac{L\, h\, S\, \rho \left(1 - c_m\right) \pi}{2\, \beta\, k\, S\, T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{L\, h\, \rho \left(1 - c_m\right) \pi}{2\, \beta\, k\, T_{1/2}}}$$

Teniendo en cuenta los datos numéricos del enunciado, resulta

$$\boxed{n = 19\ \text{dias}}$$

d) Dado que el Sol emite en todas las direcciones, si la constante solar k es la energía que llega a la Tierra por unidad de tiempo y unidad de superficie, a una esfera de radio R, igual a la distancia Sol-Tierra y centrada en el Sol le llegará toda la energía que el Sol emite por segundo, es decir, la potencia P_S que nos piden.

$$P_S = 4\pi R^2 k \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_S = 3{,}8 \times 10^{20}\ \text{MW}}$$

e) De acuerdo con el resultado anterior, en un intervalo de tiempo τ el Sol emite una cantidad de energía,

$$W_S = 4\pi R^2 k\, \tau$$

Y en virtud de la famosa ecuación de Einstein, esta emisión de energía supone que el Sol pierde en ese intervalo de tiempo una masa

$$\Delta M_S = \frac{W_S}{c^2} = \frac{4\pi R^2 k\, \tau}{c^2}$$

Por tanto en un tiempo $\tau = 1\,\text{s}$ el Sol pierde una masa

$$\boxed{\mu_S = \frac{4\pi R^2 k}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_S = 4{,}2\times10^9\ \text{kg/s}}$$

f) La ley de gravitación proporciona la relación entre la masa del Sol y el radio orbital R de la Tierra. Si M_T es la masa de la Tierra y ω su velocidad angular orbital, se tiene

$$G\frac{M_S M_T}{R^2} = M_T\,\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad M_S = \frac{\omega^2}{G}R^3 \tag{4}$$

Nótese que una variación de M_S afecta a R y a ω, pero estas dos variables no son independientes. La fuerza de interacción gravitatoria es central, luego debe conservarse el momento angular de la Tierra respecto al Sol

$$L_0 = M_T\,\omega R^2 \tag{5}$$

Eliminando ω entre (4) y (5), queda

$$M_S = \frac{L_0^2}{G M_T^2}\frac{1}{R} = \gamma\frac{1}{R} \tag{6}$$

donde $\gamma = L_0^2 / G M_T^2$ es una constante. Tomando incrementos en (6)

$$\Delta M_S = -\gamma\frac{\Delta R}{R^2} \tag{7}$$

El signo negativo de (7) significa que una perdida de masa del Sol implica un aumento de la distancia Sol-Tierra. ¡Nos alejamos del Sol poco a poco!

Dividiendo ambos miembros de (7) por la masa (actual) del Sol y teniendo en cuenta (6), se obtiene

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta M_S}{M_S}}$$

g) En un tiempo $T = 1\,\text{año} = 3{,}15\times10^7\ \text{s}$ la pérdida de masa del Sol es

$$\Delta M_S = -\mu_S T = -1{,}3\times10^{17}\ \text{kg}$$

Y el aumento de la distancia Tierra-Sol resulta

$$\Delta R = -R\frac{\Delta M_S}{M_S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta R = 1{,}0\ \text{cm}}$$

P2. Tablón oscilante.

Se coloca un tablón delgado y homogéneo, de masa M y longitud L, sobre un par de rodillos que giran con la misma velocidad angular constante, pero en sentidos opuestos. En la figura 1 se muestra este sistema cuando el tablón está colocado simétricamente respecto a los rodillos. La distancia entre los ejes de los rodillos es b y el coeficiente de rozamiento entre el tablón y dichos rodillos es μ.

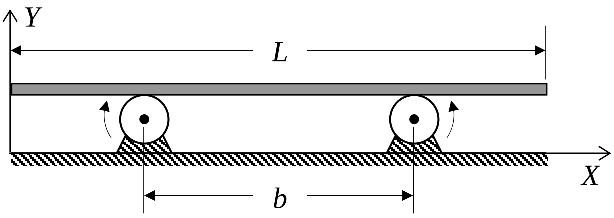

Fig. 1

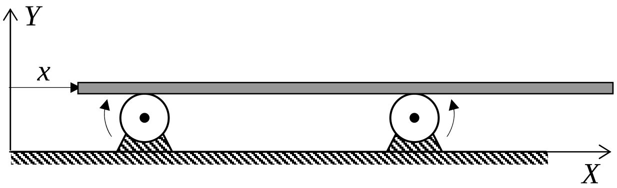

Fig. 2

a) Cuando el tablón se aparta una distancia x de la posición simétrica, como se representa en la figura 2, dibuje un diagrama en el que se muestren las fuerzas que actúan sobre el tablón.

b) Demuestre que el tablón permanece en equilibrio si se coloca exactamente en la posición simétrica respecto a los cilindros ($x = 0$).

Cuando el tablón se libera en una posición como la representada en la figura 2, es decir separado una distancia x de la posición de equilibrio, realiza un movimiento oscilatorio armónico. Se supone que la velocidad angular de los rodillos es lo suficientemente elevada para que en ningún momento el tablón deje de deslizar sobre ellos.

c) Determine el periodo T de las oscilaciones del tablón.

Estando el tablón en la posición de equilibrio, se le aplica un impulso horizontal de magnitud I, de forma que empieza a oscilar en torno a dicha posición de equilibrio.

d) Determine el máximo impulso que se puede aplicar al tablón, I_{max}, para que permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos.

Solución

Las fuerzas que actúan sobre el tablón son las representadas en la figura 3. Como en todo momento existe deslizamiento entre el tablón y los rodillos, el módulo de cada fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo:

$$F_{r1} = \mu N_1 \quad \text{y} \quad F_{r2} = \mu N_2$$

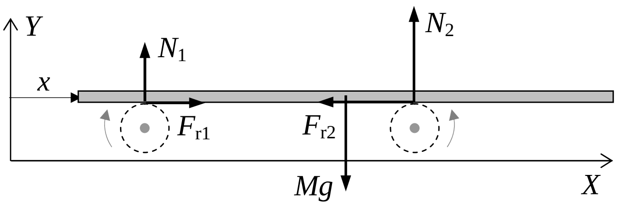

Fig. 3

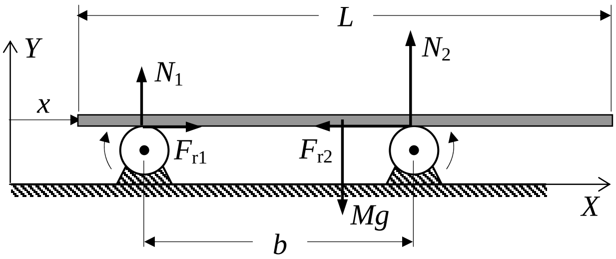

Fig. 4

a) En la posición simétrica ($x = 0$) las reacciones normales son iguales: $N_1 = N_2 = Mg/2$, por lo que las fuerzas de rozamiento (máximas puesto que existe deslizamiento) tienen el mismo módulo y, al ser de sentidos opuestos, la fuerza resultante horizontal es nula. En consecuencia el tablón permanece en equilibrio.

b) Si el tablón se aparta una distancia x de la posición de equilibrio, como se indica en la figura 4, las reacciones normales dejan de ser iguales, y por consiguiente las fuerzas de rozamiento. La fuerza neta horizontal que actúa sobre el tablero es

$$F_x = F_{r1} - F_{r2} = \mu (N_1 - N_2) \qquad (1)$$

Para determinar esta fuerza es necesario conocer el valor de las fuerzas normales. En primer lugar,

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad (2)$$

Por otra parte, como el tablón solo se desplaza horizontalmente, el momento de las fuerzas exteriores tiene que ser cero, respecto a cualquier punto. En particular, respecto al centro de masas del tablón, se puede escribir

$$N_1 \left(\frac{b}{2} + x \right) = N_2 \left(\frac{b}{2} - x \right) \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que

$$N_1 = Mg \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right) \qquad N_2 = Mg \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{b} \right)$$

Y, por tanto, la fuerza horizontal (1) sobre el tablón es

$$F_x = -\frac{2\mu M g}{b} x$$

y la aceleración con que se mueve viene dada por

$$a = -\frac{2\mu g}{b} x \qquad (4)$$

A la vista de la expresión (4) se deduce inmediatamente que el movimiento del tablón es oscilatorio armónico, independiente de la masa del tablón y con una pulsación y un periodo dados por

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{b}} \qquad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{2\mu g}}}$$

c) Dado que el tablón realiza un movimiento oscilatorio armónico, su elongación y su velocidad son

$$x(t) = A\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad (5a)$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (5b)$$

siendo A la amplitud y φ la fase en $t = 0$, cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

De acuerdo con el enunciado, el tablón está inicialmente en reposo (posición de equilibrio) y se pone en movimiento mediante un impulso horizontal I. Como el impulso es igual a la variación del momento lineal del sistema, se tiene

$$I = M\, v_0$$

donde v_0 es la velocidad con que comienza a desplazarse el tablón.

Por lo tanto, las condiciones iniciales son

$$x(t = 0) = 0$$

$$v(t = 0) = v_0$$

Aplicando estas condiciones en (5a) y (5b), se deduce que

$$0 = A\mathrm{sen}\,\varphi \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \qquad (6)$$

Si la longitud del tablón es L, para que al oscilar permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos la máxima amplitud de sus oscilaciones, tiene que cumplir la relación (figura 5)

$$2A_{max} + b = L \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \frac{L-b}{2} \qquad (7)$$

En consecuencia, la velocidad inicial máxima es

$$v_0 = \omega\frac{L-b}{2}$$

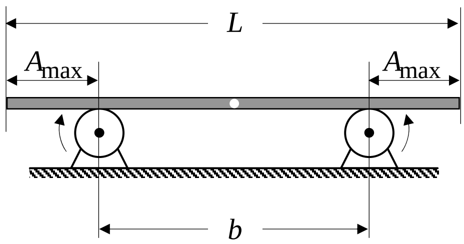

Fig. 5

Finalmente, el impulso máximo que se podrá aplicar es

$$I_{max} = M\omega\frac{L-b}{2}$$

y teniendo en cuenta el valor de ω queda

$$\boxed{I_{max} = \frac{1}{2}M(L-b)\sqrt{\frac{2\mu g}{b}}}$$

P3. El experimento de Millikan.

En el año 1909 Robert Millikan y Harvey Fletcher diseñaron y realizaron el primer experimento para medir la carga del electrón. Hasta entonces los electrones sólo habían podido ser observados en forma de rayos catódicos, pero con ellos sólo se podía determinar la relación entre su carga y su masa. Con este experimento, Millikan logró medir el valor de la carga y, por tanto, también el de la masa. Para ello supuso (por aquel entonces no estaba verificado) que la carga del electrón era la fundamental y, en consecuencia, la carga de cualquier cuerpo sería un múltiplo de dicha cantidad.

El equipo básico para realizar el experimento de Millikan está representado esquemáticamente en la figura 1. En una cámara cerrada se pulverizan pequeñas gotas de un aceite especial, de densidad ρ. Algunas de estas gotas se electrizan levemente en el momento de ser pulverizadas. Lógicamente, cada gota empieza a caer verticalmente por la acción de la gravedad, pero a su vez el aire ejerce sobre ellas una fuerza de resistencia que se opone a su movimiento y cuyo módulo es proporcional a la velocidad de caída. Esta fuerza, para un pequeño cuerpo esférico, satisface la ley de Stokes

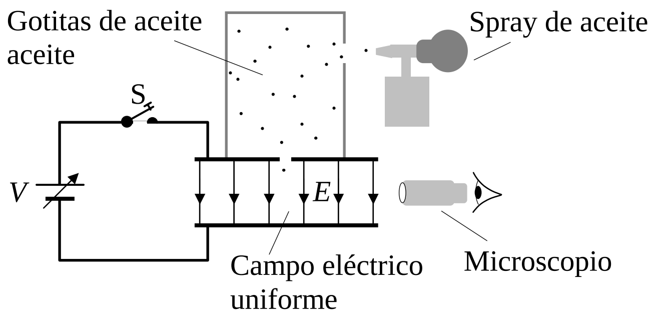

Fig. 1

$$F_r = 6\pi\eta r v$$

Donde η es la viscosidad del fluido (aire) en el que caen las gotas de aceite, r es el radio de las gotas y v su velocidad de caída.

Como las gotas se cargan ligeramente al capturar iones presentes en el aire, o simplemente por fricción con la boquilla del pulverizador, con este experimento se comprobó que las cargas son un múltiplo de la carga elemental *e*, y pudo determinarse su valor.

Dado que la densidad del aire es mucho menor que la del aceite, en este problema no se tendrá en cuenta el empuje hidrostático sobre las gotas (principio de Arquímedes).

a) Escriba la ecuación del movimiento de una gota de aceite, de masa m, que cae en el aire bajo la acción de la gravedad, g.

b) Transcurrido un corto intervalo de tiempo a partir del instante en el que la gota comienza su caída en el aire, su velocidad tiende a un valor constante, que se denomina *velocidad límite*, v_L. Determine dicha velocidad en función de la aceleración de la gravedad g, de la densidad ρ del aceite, de la viscosidad del aire η y del radio r de la gota.

c) Dibuje cualitativamente la grafica de la velocidad de caída de la gota en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.

La velocidad límite se puede medir por observación directa de la caída de la gota con un microscopio que dispone de una escala graduada. Sin embargo, no es fácil medir el radio y masa de las gotas.

En una experiencia de laboratorio en el que se utiliza un montaje como el descrito antes, se observa que, en ausencia de campo eléctrico $(E = 0)$, una determinada una gota cae con una velocidad límite $v = 1{,}20 \times 10^{-4}$ m/s. Sabiendo que la viscosidad del aire es $\eta = 1{,}80 \times 10^{-5}$ Pa s, la densidad del aceite es $\rho = 8{,}99 \times 10^{2}$ kg/m^3 y que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}81$ m/s^2

d) Determine la expresión de la masa m de la gota y calcule su valor.

Cerrando el interruptor S, se establece un campo eléctrico uniforme *E* como se muestra en la figura 1, cuyo valor se puede regular cambiando el potencial *V*. Ajustando este campo eléctrico se puede parar la gota, es decir, mantenerla en reposo.

e) Si el campo que mantiene a la gota en reposo es $E = 9{,}35 \times 10^4$ V/m, calcule el valor de esta carga q.

En la misma experiencia y siguiendo el mismo procedimiento, se determinaron las cargas de otras gotas. Los valores que se obtuvieron son $q' = 4{,}54 \times 10^{-19}$ C y $q'' = 3{,}05 \times 10^{-19}$ C. A partir de los valores de q, q' y q''

f) Calcule el valor e de la carga fundamental del electrón.

Nota: En el experimento original, Robert Millikan y Harvey Fletcher obtuvieron un valor ligeramente menor al conocido actualmente para la carga del electrón.

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre la gota son las representadas en la figura 2. En virtud de la 2ª ley de Newton la ecuación del movimiento es:

$$m\,a = m\,g - F_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\,a = m\,g - 6\pi\eta\, r\, v} \qquad (1)$$

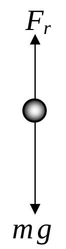

Fig. 2

b) De acuerdo con (1), conforme aumenta el módulo de la velocidad de caída de la gota, la aceleración disminuye. A partir del valor de la velocidad que anula la aceleración, el movimiento será uniforme y dicha velocidad será la llamada velocidad límite v_L

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = \frac{m\,g}{6\pi\eta\, r} \qquad (2)$$

Por otra parte, la masa de la gota en función de la densidad del aceite es

$$m = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho \qquad (3)$$

Eliminando r entre (2) y (3), se obtiene como velocidad límite

$$\boxed{v_L = \frac{2g\rho}{9\eta} r^2}$$

c) Tal como sugiere el enunciado, consideraremos que en el instante inicial la velocidad vertical de la gota es nula, por lo que la gráfica $v(t)$ pasa por el origen de coordenadas. Además, al eliminar en (1) el término dependiente de la velocidad en el instante inicial, se deduce que la pendiente en el origen es

$$\text{tg}\,\varphi = g$$

Además, con el transcurso del tiempo la velocidad tiende al valor límite, por lo que $v = v_L$ es una asíntota. Con todo ello, el aspecto de la gráfica es el representado en la figura 3.

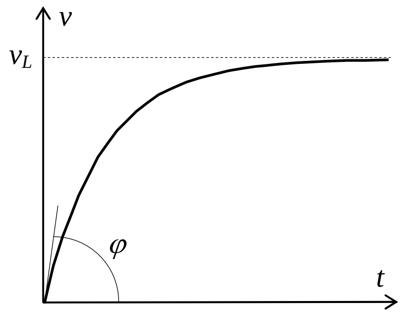

Fig. 3

d) Eliminando r entre las expresiones (2) y (3) y despejando la masa, se obtiene

$$\boxed{m = \sqrt{\frac{162\,\pi^2\,\eta^3\,v_L^3}{\rho\, g^3}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 4{,}36\times 10^{-15}\ \text{kg}}$$

e) Cuando la gota se encuentra en reposo por la acción del campo eléctrico E, se verificará que $mg = qE$. Por lo tanto

$$q = \frac{4{,}36\times 10^{-15}\times 9{,}81}{9{,}35\times 10^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 4{,}57\times 10^{-19}\ \text{C}}$$

f) Sabemos que las cargas q, q' y q'' deben ser múltiplos de una cantidad e menor, por lo que dividiendo la carga de las tres gotas por la menor de ellas podemos hallar proporciones simples entre ellas

$$\frac{q}{q''} \approx 1{,}50 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q \approx \frac{3}{2} q''$$

$$\frac{q'}{q''} \approx 1{,}49 \approx \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q' \approx \frac{3}{2} q''$$

$$\frac{q''}{q''} = 1$$

Las cargas no pueden ser fracciones de la carga elemental, por lo que concluimos que las cargas de cada gota deben ser:

$$\left.\begin{array}{l} q = 3e \\ q' = 3e \\ q'' = 2e \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e \approx 1{,}52 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}}$$