Entrenamiento selectivo 2014, Olimpiada Mexicana de Física
Tarea # 2 enviar viernes 31 enero

Problema 1 Modelo de Bohr.

En **1913** (hace 101 años!) Bohr propuso un modelo para describir el átomo de hidrógeno que fue motivado por dos ideas principales: el modelo planetario de Rutherford y la hipótesis cuántica de Einstein y Planck. Rutherford basandose en sus resultados experimentales había propuesto un modelo "planetario" para la estructura del átomo de hidrógeno; es decir, un núcleo formado por el protón y girando alrededor de esté, el electrón. Por otra parte, los trabajos de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico y el de Planck sobre la radiación de cuerpo negro habían establecido la cuantización de la energía.

Bohr toma estas dos ideas como parte central de su modelo del átomo de hidrógeno y establece los siguientes postulados:

I El electrón se mueve alrededor del núcleo en **órbitas circulares estacionarias** debido a la fuerza electrostática con el protón.

II Las únicas órbitas posibles sobre las que se mueve el electrón son tales que el momento angular del electrón esta *cuantizado*; es decir, solo puede tomar los siguientes valores:

$$L = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

donde se define $\hbar \equiv h/2\pi$, siendo $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s la constante de Planck. El *número cuántico* n denota los posibles *estados cuánticos* del electrón en el átomo de hidrógeno.

En ausencia de campos externos el electrón ocupa el estado de menor energía (el *estado base* corresponde a $n = 1$)

II La emisión o absorción de luz (un fotón) se presenta cuando el electrón cambia de órbita, se dice entonces que el átomo realiza una transición. El cambio de energía del átomo en la transición esta relacionada con la frecuencia del fotón ν, que se emite *emite* o *absorbe*:

$$\nu = \frac{|\Delta E|}{h} \tag{2}$$

Si el electrón pasa de una órbita de mayor a menor energía entonces el átomo emite un fotón; en caso contrario, cuando el átomo absorbe un fotón el electrón realiza una transición de un estado de menor a mayor energía.

Preguntas:

1.1 Calcula el radio de las órbitas estacionarias del electrón (es decir encuentra una expresión del radio en términos del número cuántico n). El primer valor $n = 1$, corresponde al radio de Bohr $a_0 = 5.3 \times 10^{-11}$ m.

Solución.

Igualando la fuerza electrostática y centrípeta,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \tag{3}$$

junto con la cuantización del momento angular $L = m_e v r = n\hbar$ se obtiene el radio de las órbitas estacionarias para el átomo de hidrógeno:

$$r_n = \left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\right) n^2 = a_0 n^2 \tag{4}$$

donde $a_0 = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.5 \times 10^{-10}$ m es el radio de Bohr. El radio de las orbitas circulares del electrón en el átomo de hidrógeno crecen con n^2; por ejemplo la segunda órbita esta a cuatro veces el radio de Bohr $r_2 = a_0 \, (2)^2 = 4a_0$.

1.2 Demuestra que la velocidad del electrón en las órbitas estacionarias, esta dada por:

$$v_n = \frac{\alpha}{n} c \tag{5}$$

donde $\alpha \approx 1/137$ y $c = 299,792,458$ m/s $\approx 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Calcula el valor de la velocidad del electrón en el estado base.

Solución.

De la cuantización del momento angular y la ecuación (4), se obtiene:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n\hbar}{m_e r_n} = \frac{n\hbar}{m_e}\frac{1}{a_0 n^2} = \frac{\hbar}{m_e a_0}\frac{1}{n} = \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)\frac{c}{n} \\ &= \frac{\alpha c}{n} \end{aligned} \tag{6}$$

donde:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2} = 137.521 \approx 137 \tag{7}$$

α se le conoce como *constante de estructura fina*, en el estado base ($n = 1$) la velocidad del electrón es:

$$v_1 = \alpha c = \frac{1}{137}\left(3 \times 10^8 \text{ m/s}\right) \approx 2.19 \times 10^6 \text{ m/s} \tag{8}$$

menor a la velocidad de la luz en el vacío, y por lo tanto no viola los postulados de la teoría de la relatividad.

1.3 Encuentra los valores de la energía E_n del electrón en cada una de las órbitas estacionarias en términos del número n, esto corresponde a la cuantización de la energía para el átomo de hidrógeno.

Solución.

La energía total del electrón en el n-esimo estado es:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2} \end{aligned} \tag{9}$$

donde se uso la ecuación (3), para obtener: $\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = m_e v_n^2$

Importante notar que la energía total del electrón moviéndose en una órbita circular debido a la fuerza electrostática es la mitad de la energía electrostática (con un signo negativo): $E_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}\right) = -\dfrac{1}{2}U_e$, lo cual es valido también para el caso gravitacional donde la fuerza también varia de la forma $\sim \dfrac{1}{r^2}$.

1.4 Cuál es el valor de la energía en el estado base $n = 1$, exprésala en unidades de electronvolts.

Solución.

La energía del n-esimo estado se puede expresar como:

$$E_n = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2} \tag{10}$$

donde E_1 es la energía del estado base del electrón en el átomo de hidrogeno.

$$E_1 \equiv \frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 = 2.16\times10^{-18}\ \text{J}, \quad \Rightarrow\ E_1 = 13.6\ \text{eV} \tag{11}$$

así, la energía del estado base $n = 1$ es: $E_1 = -13.6$ eV (esta energía es fundamental, hay que tenerla en cuenta).

1.5 Demuestra que la longitud de onda de los fotones emitidos por el electrón al pasar de un estados cuántico inicial con número n al estado final con $n' = 2$ $(n > n')$, esta dada por la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{12}$$

donde debes determinar la expresión de λ_e y calcular su valor numérico en metros (nota que tiene unidades de longitud).

Solución.

La frecuencia del fotón emitido cuando el electrón cambia del estado inicial n al estado $n' = 2$ tiene la frecuencia:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{h}\left(E_n - E_2\right) \tag{13}$$

usando el resultado (10) y la relación $c = \nu\lambda$ (donde c es la velocidad de la luz), se obtiene el inverso de la longitud de onda de los fotones emitidos:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{ch}\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{14}$$

comparando esta ecuación con (12) y la definición de la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ se obtiene:

$$\frac{1}{ch}\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e} = \frac{1}{2\lambda_e}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 \quad \lambda_e = \frac{h}{m_e c} \approx 2.4\times10^{-12}\ \text{m} \tag{15}$$

(λ_e se le llama *longitud de onda compton*).

Los fotones emitidos por el átomo del hidrógeno bajo esta regla de transición ($n \rightarrow n' = 2$) producen las lineas espectrales mostradas en la figura y se le conocen como serie (lineas) de Balmer.

Estas lineas se observa en un gas de hidrógeno a través de un espectroscopio y comprenden el rango de radiación entre el rojo $\lambda = 648$ nm (transición $3 \rightarrow 2$) y el ultravioleta $\lambda = 346$ nm (transición $\infty \rightarrow 2$)

`http://www.bigs.de/BLH/en/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=50&Itemid=221`

Problema 2

Una espira conductora cuadrada de lado a esta situada a una distancia x de un alambre recto que conduce una corriente I, como se muestra en la figura. La espira se mueve con velocidad constante v de forma perpendicular al alambre.

Encuentra la fuerza electromotriz en la espira, como función de la distancia x; explica el origen de esta fuerza electromotriz. Indica cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira.

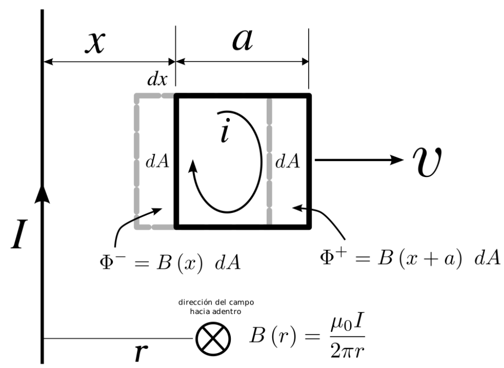


Figura 1:

Solución.

La fuerza electromotriz inducida en una espira esta definida por la ley de Faraday:

$$\text{FEM} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{16}$$

Esta FEM se induce debido a la variación del flujo magnético Φ, que atraviesa la espira. El flujo de campo de magnético es el producto de la intensidad del campo magnético B, que atraviesa el área de la espira, multiplicado por su área:

$$\Phi = BA \tag{17}$$

Por otra parte, el campo magnético producido por un alambre conductor recto que transporta una corriente I depende de la distancia radial r, desde la linea de corriente hasta el punto de observación:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{18}$$

(μ_0 es la permitividad magnética del vacío); su dirección, según la figura (1), es perpendicular al plano de la figura y hacia adentro.

Consideremos que la espira se ha movido una pequeña distancia horizontal dx, entonces si $dA = adx$ es el área que barre la espira al moverse, el cambio en el flujo de campo magnético esta dado por:

$$d\Phi = \Phi^{+} - \Phi^{-} = B\left(x+a\right)\, dA - B\left(x\right)\, dA = \left[B\left(x+a\right) - B\left(x\right)\right]\, adx \tag{19}$$

de donde se obtiene la variación temporal en el flujo del campo magnético:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left[B\left(x+a\right) - B\left(x\right)\right]\, a\frac{dx}{dt} = av\left[B\left(x+a\right) - B\left(x\right)\right]$$

finalmente, la fuerza electromotriz generada es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -av\left[B\left(x+a\right) - B\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}av\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}\right] = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x\left(x+a\right)} \end{aligned}$$

De acuerdo a la ley de Lenz la dirección de la corriente inducida i es según muestra la figura, en contra de las manecillas del reloj

Problema 3

3.1 Un tubo cilíndrico de sección transversal S y altura 76 cm, está cerrado por un extremo. El tubo está sobre mercurio (densidad ρ) de modo que éste penetra en el tubo hasta una altura h_x. Entre el extremo cerrado del tubo y el nivel del mercurio existen 0.001 mol de un gas ideal cuya capacidad calorífica molar es $C_v = 20.5\,\text{J/mol K}$. La presión exterior al tubo equilibra la de una columna de mercurio de 76 cm de altura. Si la temperatura del gas desciende 10 °C ¿cuánto calor cede dicho gas al ambiente?

$R = 8.31$ J/Kmol es la constante de los gases.

Solución:

$$\begin{aligned} P_1 + \rho g h_x &= P_{\text{atm}} = \rho g\left(76\,\text{cm}\right) \\ P_2 + \rho g h_y &= P_{\text{atm}} = \rho g\left(76\,\text{cm}\right) \end{aligned}, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P_1 &= P_{\text{atm}} = \rho g\left(76\,\text{cm} - h_x\right) = \rho g x \\ P_2 &= P_{\text{atm}} = \rho g\left(76\,\text{cm} - h_y\right) = \rho g y \end{aligned} \tag{20}$$

tenemos que $V_1 = S \cdot x$ y $V_2 = S \cdot y$, entonces:

$$\begin{aligned} P_1 V_2 &= \rho g x\, S \cdot y \\ P_2 V_1 &= \rho g y\, S \cdot x \end{aligned}, \quad \Rightarrow \quad P_1 V_2 = P_2 V_1 \tag{21}$$

Esta expresión es valida para cualquier estado intermedio P, V, a apartir de los valores iniciales P_1, V_1. Por lo tanto la ecuación del proceso es:

$$\frac{P}{V} = \frac{P_1}{V_1} \tag{22}$$

Para un gas ideal, el cambio de energía y la ecuación de estado son:

$$\Delta U = C_v \Delta T, \qquad PV = nRT \tag{23}$$

donde n es el numero de moles y $R = 8.31$ J/Kmol es la constante de los gases.
Entonces de acuerdo a la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q + W, \qquad \Rightarrow Q = nC_v\left(T_2 - T_1\right) - W \tag{24}$$

para el gas ideal el trabajo esta dado por:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV \tag{25}$$

Usando la ecuación de estado del gas ideal, la ecuación del proceso (22) y realizando la integral se obtiene el siguiente resultado:

$$W = -\frac{P_1}{V_1}\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}\right) = \ldots = \frac{nR}{2}\,(T_1 - T_2) \tag{26}$$

La espresión final del calor es:

$$Q = n\,(T_2 - T_1)\left(C_v + \frac{R}{2}\right) = -0.247\,\mathrm{J} \tag{27}$$

3.2 Un globo aerostático junto con su canasta tiene una masa de $m = 200$ kg (sin incluir el aire dentro del globo). El aire fuera del globo esta a 10°C. El volumen del globo aerostático es de 400 m^3. Suponiendo que la densidad del aire fuera del globo, a temperatura de 10°C es: $\rho_{out} = 1.25$ kg/m^3. A qué temperatura debe ser calentado el aire dentro del globo antes de que comience a levantarse.

Solución.

La fuerza de empuje que ejerce el aire de afuera, por principio de Arquímedes, es $\rho_{out} g V$ donde ρ_{out} es la densidad del aire fuera del globo. Entonces por equilibrio de fuerzas, si el globo esta en reposo:

$$\rho_{out} g V - \rho_{in} g V - mg = 0 \tag{28}$$

(el subíndice *in*, denota las variables dentro del globo) por otra parte de la ecuación del gas ideal:

$$\begin{aligned} \rho_{out} &= \frac{n}{V} = \frac{P_{out}}{RT_{out}} \\ \rho_{in} &= \frac{n}{V} = \frac{P_{in}}{RT_{in}} \end{aligned} \tag{29}$$

como la presión es la misma afuera que dentro del globo[1], se tiene que

$$\rho_{out} T_{out} = \rho_{in} T_{in} \tag{30}$$

entonces de esta ecuación junto con (28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{in} &= \rho_{out} - \frac{m}{V} \\ T_{in} &= T_{out}\,\frac{1}{1 - \frac{m}{V\rho_{out}}} = T_{out}\,\frac{1}{1 - \frac{\rho_{globo}}{\rho_{out}}} \end{aligned} \tag{31}$$

donde $\rho_{globo} = m/V = 200$ kg/400 m$^3 = 1/2$

sustituyendo los valores correspondientes, se obtiene (10 C = 283 K):

[1] Esto es un simplificación, en realidad la presión dentro del globo es mayor debido a la tensión superficial pero complica el problema.

El problema II de la IPhO (Olimpiada Internacional) 2004 Corea considera este hecho.

Los problemas oficiales de la IPhO se pueden consultar en el siguiente enlace:

`http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/problems-and-solutions_5.html`

El equipo de entrenadores de Yucatán tienen a disposición las traducciones de diferentes olimpiadas:

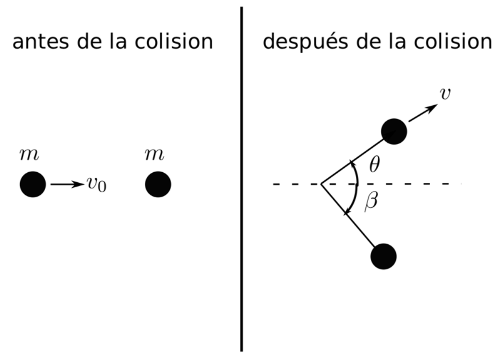
`http://time-chamber.herokuapp.com/olympiad?collection=aphos`

$$T_i \approx 471 \text{ K} \approx 198 \text{ C} \tag{32}$$

hay que calentar el aire dentro del globo a 200 C aproximadamente.

Problema 4

4.1 Una partícula con velocidad inicial v_0 y masa m colisiona con otra partícula de igual masa pero que se encuentra en reposo. Después de la colisión la primer partícula se mueve con velocidad v formando un ángulo θ, respecto a la linea con que incide. La segunda partícula es expulsada en un ángulo β, respecto a esta misma linea pero hacia abajo (ver siguiente figura).



Muestra que:

$$\tan\beta = \frac{v \sin\theta}{v_0 - v\cos\theta} \tag{33}$$

4.2 Un pequeño bloque de masa m se desliza sobre la superficie de una rampa desde una altura h y entra en un aro de radio R, como lo muestra la siguiente figura (la rampa y el aro no presentan fricción).

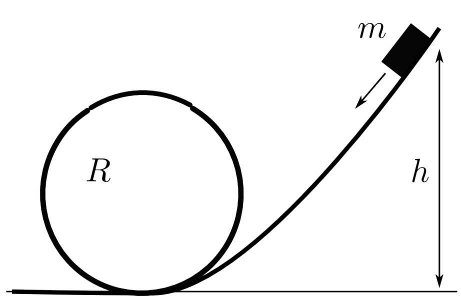


Figura 2:

a) Calcula la altura mínima h para que el bloque complete la vuelta a través del del aro sin despegarse.

Ahora supongamos que se elimina parte del aro, entre los punto A y B, como lo muestra la figura de abajo.

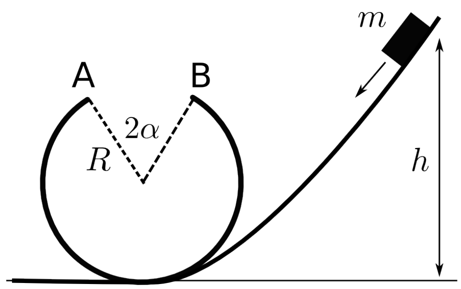


Figura 3:

b) Con el valor de h calculado en el inciso anterior, encuentra el valor del ángulo α necesario para que el bloque llegue hasta el punto B y complete de nuevo la vuelta sobre el aro ahora roto.

Solución

Para que complete la vuelta es necesario que llegue al punto más alto del aro, en este punto el equilibrio de fuerzas sobre el bloque esta dado por:

$$mg = \frac{mv^2}{R} \tag{34}$$

en este mismo punto la conservación de energía establece:

$$mgh = mg2R + \frac{mv^2}{R} \tag{35}$$

las dos ecuaciones anteriores determina la altura mínima a la que se debe de soltar el bloque para que llegue al punto más alto del aro y complete la vuelta dentro del aro.

$$h = \frac{5}{2}R \tag{36}$$

Para el inciso b se sustituyendo este valor de h, la conservación de energía en el punto A esta dada por:

$$mg\frac{5}{2}R = \frac{mv_A^2}{2} + mgR\,(1 + \cos\alpha) \tag{37}$$

despejando, se obtiene la velocidad del bloque en el punto A:

$$v_A^2 = 2gR\left(\frac{3}{2} - \cos\alpha\right) \tag{38}$$

A partir de este punto, el bloque describe un movimiento de tiro parabólico con velocidad v_A y ángulo α. Entonces para que llegue a B, debe recorrer la distancia horizontal AB

$$AB = \frac{v_A^2 \sin(2\alpha)}{g} \tag{39}$$

pero por otro lado de la geometría del problema:

$$AB = 2R\sin\alpha \tag{40}$$

de las dos últimas ecuaciones se encuentra que:

$$v_A^2 = \frac{2Rg\sin\alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{Rg}{\cos\alpha} \tag{41}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, igualando con (38) se obtiene el ángulo:

$$\alpha = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 60^\circ \end{cases} \tag{42}$$

cuando $\alpha < 60$ el bloque sale volando del aro sin regresar a él; si $\alpha > 60$ el bloque cae dentro del aro pero sin llegar al otro extremo del aro.

Problemas de matemáticas

Problema 1

Usando las siguientes formulas trigonométricas:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{43}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{44}$$

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{ángulo doble} \qquad \begin{cases} \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases} \tag{45}$$

$$\text{ángulo mitad} \qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} \\ \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases} \tag{46}$$

$$\text{producto} \Rightarrow \text{suma} \qquad \begin{cases} \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big] \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big] \\ \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big] \end{cases} \tag{47}$$

$$\text{suma} \Rightarrow \text{producto} \qquad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases} \tag{48}$$

Problema 2

Calcula las siguientes integrales:

2.1 $\int 3x\sqrt{1-2x}dx =$

2.2 $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx =$

2.3 $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx$

2.4 $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx =$

Problema 3

3.1 La distancia entre los centros de dos circunferencias que se cruzan, de radios R y r, es igual d. Hallar el área de intersección entre los dos círculos.

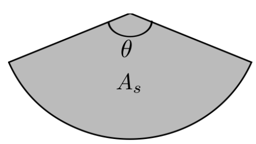
Solución:

$$A = R^2 \arccos\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right) + r^2 \arccos\left(\frac{d^2+r^2-R^2}{2rd}\right) - Rd\sqrt{1-\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right)^2} \quad (49)$$

Solucion:

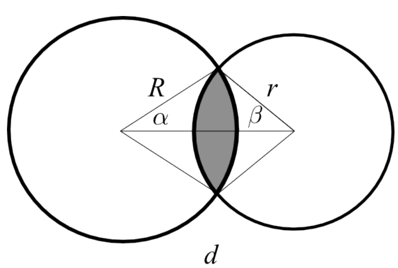
Usando la formula para calcular el área de un sector del circulo completo (el ángulo θ debe estar en radianes):

$$A_s = \frac{1}{2}\theta r^2 \quad (50)$$



Entonces el área es igual a la suma de las dos áreas de dos sectores cuyos ángulos son 2α y 2β menos el doble del área del triangulo con los lados R, r, d:

$$A = R^2\alpha + r^2\beta - Rd\sin\alpha \quad (51)$$



Para hallar los ángulos α y β tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} R\sin\alpha &= r\sin\beta \\ R\cos\alpha + r\cos\beta &= d \end{aligned} \tag{52}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd} \\ \cos\beta &= \frac{d^2+r^2-R^2}{2rd} \end{aligned} \tag{53}$$

Sustituyendo en (51) se obtiene el resultado final.

3.2 El volumen de un prisma triangular regular es V, el ángulo entre las diagonales de dos de sus caras, trazadas desde un mismo vértice, es igual a α. Hallar el lado a de la base del prisma.

Solución:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8V\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3-12\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \tag{54}$$

Solución:

Sea a el lado de la base, d la diagonal de la cara lateral del prisma y l la arista lateral.

$$d = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}l \tag{55}$$

Del ΔA_1BC_1 se desprende que $\frac{1}{2}a = d\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, por lo tanto:

$$l = \sqrt{d^2-a^2} = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{1-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{56}$$

por otra parte el volumen del prisma es:

$$V = \text{área}\,(\Delta ABC)\times l = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{1-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{57}$$

finalmente despejando a se obtiene el resultado final.