Tarea 3

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**
Fecha de entrega: lunes 16 de febrero 2015

Problema 7, termodinámica.

7.1) Dos contenedores rígidos y aislados térmicamente son conectados a través de una válvula que esta cerrada inicialmente, ambos contiene el mismo gas que puede considerarse como ideal. La temperatura, presión y volumen iniciales de cada recipiente son conocidos: p_1, V_1, T_1; p_2, V_2, T_2. Encuentra la temperatura y la presión después que se abre la válvula en términos de estos valores iniciales.

7.2) Un cilindro asislado de masa $m = 25\,\mathrm{kg}$ contiene gas de Helio en su interior, el cilindro tiene un pistón en la parte superior cuyo peso es $M = 25\,\mathrm{kg}$. La sección transversal del cilindro tiene un área de $0.4\,\mathrm{dm}^2$ (decimetros cuadrados) y el pistón se encuentra inicialmente a la altura de $8.96\,\mathrm{dm}$. El pistón esta atado a una cuerda (de masa despreciable) que esta enrollada alrededor de una polea de radio $0.2\,\mathrm{m}$ y momento de inercia $3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. El cilindro con el pistón se mueven hacia abajo con la misma aceleración constante. Si la presión atmosferica es $p_0 = 10\,\mathrm{N/cm}^2$, la temperatura es $0\,^\circ\mathrm{C}$ y $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$. Encuentra la masa del gas de Helio dentro del cilindro

7.3) Un cilindro vertical de sección trasnsversal $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ contiene agua hasta una altura de $h_1 = 25\,\mathrm{cm}$ (medida desde el fondo del cilindro), en la parte superior del agua hay de vapor de agua. En la parte superior del cilindro hay un pistón a la altura de $h_2 = 75\,\mathrm{cm}$ sobre el nivel del agua. Bajo estas condiciones de la temperatura la densidad del agua es el doble de la del vapor.

a) ¿Si la temperatura se mantiene constante, que distancia debe descender el pistón para que el volumen del vapor se disminuya hasta $V = 4.5 \times 100\,\mathrm{cm}^2$?

b) ¿Si la temperatura se mantiene constante, que distancia debe descender hasta que el vapor se condense completamente?

Hint: La suma de masas del agua y del vapor es constante en todo el proceso.

Problema 8, fluidos.

8.1) Un bloque cúbico con densidad ρ_b y lados de longitud L flota en un líquido con densidad mayor ρ_l.

a) ¿Qué fracción del volumen del bloque está sobre la superficie del líquido?

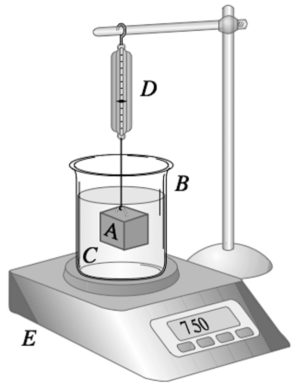
b) El líquido es más denso que el agua (densidad ρ_a) y no se mezcla con ella. Si se vierte agua en la superficie del líquido, ¿qué espesor (en términos de L, ρ_b, ρ_l y ρ_a) debe tener la capa de agua para que su superficie esté al ras de la cara superior del bloque?

c) Calcule la profundidad de la capa de agua en el inciso b) si el líquido es mercurio, el bloque está hecho de hierro y la longitud de su lado es de 10.0 cm.

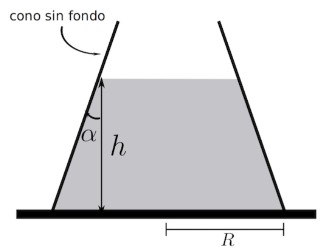
8.2) El bloque A de la figura cuelga mediante un cordón de la balanza de resorte D y se sumerge en el líquido C contenido en el vaso de precipitados B. La masa del vaso es 1.00 kg; la del líquido es 1.80 kg. La balanza D marca 3.50 kg, y la E, 7.50 kg. El volumen del bloque A es de $3.80 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

a) ¿Qué densidad tiene el líquido?

b) ¿Qué marcará cada balanza si el bloque A se saca del líquido?



8.3) Un recipiente cónico sin fondo se encuentra sobre una mesa, ver figura. Se vierte líquido dentro del recipiente y cuando su nivel alcanza la altura h, la presión del líquido eleva el recipiente. El radio de la base mayor del recipiente es R (base inferior del recipiente, según la figura), el ángulo entre la generatriz del cono y la vertical es α, la masa del recipiente es M. Encuentra la densidad del líquido es terminos de estos parámetros.



8.4) Un fluido incompresible con densidad ρ está en un tubo de ensayo horizontal con área transversal interior A. El tubo gira en un círculo horizontal en una ultracentrífuga con rapidez angular ω. Las fuerzas gravitacionales son insignificantes. Considere un elemento de volumen del fluido con área A y espesor dr', a una distancia r' del eje de rotación. La presión en su superficie interior es p, y en la exterior, $p + dp$
a) Aplica la segunda ley de Newton al elemento de volumen para demostrar que $dp = \rho\omega^2 r' dr'$
b) Si la superficie del fluido esta en un radio r_0 donde la presión es p_0, demuestre que la presión p a una distancia $r \geq r_0$ es $p = p_0 + \rho\omega^2 (r - r_0)/2$
c) Un objeto con volumen V y densidad ρ_{ob} tiene su centro de masa a una distancia R_{cmob} del eje. Demuestra que la fuerza horizontal neta que actúa sobre el objeto es $\rho V \omega^2 R_{cm}$, donde R_{cm} es la distancia del eje al centro de masa del fluido desplazado.
d) Explique por qué el objeto se mueve hacia dentro si $\rho R_{cm} > \rho_{ob} R_{cmob}$ y hacia fuera si $\rho R_{cm} < \rho_{ob} R_{cmob}$.
e) Para objetos pequeños con densidad uniforme, $R_{cm} = R_{cmob}$. ¿Qué sucede con una mezcla de objetos de este tipo con diferentes densidades en una ultra- centrífuga?

Problema 9, Calculo

Aproximación de funciones

La serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un valor x_0, se define a través de la siguiente expresión:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)\big|_{x_0}(x - x_0) + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_{x_0}(x - x_0)^3 + \dots \tag{1}$$

El símbolo de factorial: “ ! ” en el denominador de cada termino indica la operación matemática factorial y corresponde al producto de todos los enteros anteriores al numero indicado incluyendo el mismo número, con algunos ejemplos queda claro:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
ahora intenten calcular: $10! =?$

La importancia de la serie de Taylor radica en que podemos aproximar una función $f(x)$ como suma de potencias de la variable x y en la practica se usan solo algunos de los terminos de la serie de Taylor para hacer aproximaciones.

La serie de Taylor (1) se puede usar para aproximar un valor x cercano a x_0. Los factores que multiplica a cada una de las potencias $(x - x_0)^n$ son constantes que se calculan derivando la función tantas veces como se indica ($f^{(n)}$ es la n ésima derivada) y después se evaluando en el punto x_0. En el caso en que $x_0 = 0$ la serie (1) toma una forma más simple:

$$f(x) = f(0) + f'(x)\big|_0 x + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_0 x^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_0 x^3 + \ldots \tag{2}$$

Ejemplo, la función:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \tag{3}$$

Queremos el valor de la función cerca de $x_0 = 0$, supongamos en $x = 0.1$, es decir queremos calcular $f(0.1)$, una manera es hacer la fracción directamente:

$$\frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9} = 1.11111\ldots \tag{4}$$

haciendo la división $10/9$ se obtiene: 1.1111...

Ahora calculemos el valor $f(0.1)$ usando la serie de Taylor. Como el valor 0.1 es cercano al origen usamos la expresión (2), para ello se calcula cada una de los factores de la serie derivando y después evaluamos en cero:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1-x)^{-1} & f(0) = (1-0)^{-1} = 1 \\
f'(x) = (-1)(-1)(1-x)^{-2} & f'(0) = (-1)^2 (1-0)^{-2} = 1 \\
f''(x) = (-2)(-1)(-1)^2 (1-x)^{-3} & f''(0) = (-2)(-1)^3 (1-0)^{-3} = 2 = 2! \\
f'''(x) = (-3)(-2)(-1)(-1)^3 (1-x)^{-3} & f''(0) = 2 \cdot 3 (-1)^2 (-1)^4 (1-0)^{-3} = 3 \cdot 2 = 3! \\
\vdots & \vdots \\
f^n(x) = n! (1-x)^{-n} & f^n(0) = n! (1-0)^{-n} = n!
\end{array} \tag{5}$$

sustituyendo cada uno de estos términos se obtiene la serie de Taylor (2) de la función (3):

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{1-x} &= f(0) + f'(x)\big|_0 x + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_0 x^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_0 x^3 + \ldots \\
&= \frac{1}{1-0} + 1 \cdot x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned} \tag{6}$$

la ultima expresión es importante ya que representa la función $f(x) = 1/(1-x)$ como una suma de potencias x^n, en este caso se trata de una serie geométrica. Al expresar cualquier función como suma de potencias en la variable x entonces es posible calcular cualquier función en un valor dado, con el grado de aproximación que queramos dependiendo de cuantos términos incluyamos, con solo sumas y productos, es lo que hace una calculadora!

Ahora calculamos el valor $f(0.1)$ usando su serie de Taylor (6) empleando uno, dos y tres términos de la suma:

$$\begin{aligned}
f(0.1) = \frac{1}{1-0.1} &\approx 1 \qquad \text{orden cero de aproximación} \\
\frac{1}{1-0.1} &\approx 1 + 0.1 = 1.1 \qquad \text{primer orden de aproximación} \\
\frac{1}{1-0.1} &\approx 1 + 0.1 + (0.1)^2 = 1.11 + 0.01 = 1.11 \qquad \text{segundo orden de aproximación}
\end{aligned} \tag{7}$$

De las series de Taylor más importantes -y que deben saber- son los de las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ y el binomio $(1+x)^n$

9.1) Calcula los 3 primeros términos de la serie de Taylor alrededor del origen ($x = 0$) de la función seno y coseno,

Importante: la serie de Taylor para las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc) son validas en unidades de radianes, No en grados. Verifica que cuando $x \ll 1$ entonces se pueden aproximar las funciones seno y coseno por:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 \end{aligned} \tag{8}$$

9.2) Calcula el valor de $\sin(0.2)$ y $\cos(0.2)$ a diferentes ordenes de aproximación usando uno, dos y tres términos (No uses calculadora para hacer las fracciones)

9.4) Calcula los 3 primeros términos de la serie de Taylor alrededor del origen ($x = 0$) de la función $(1+x)^n$, verifica que a primer orden $(1+x)^n \approx 1+nx$

9.5) Calcula la serie de Taylor alrededor del origen $x_0 = 0$ de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función $g(x) = \ln(1+x)$