

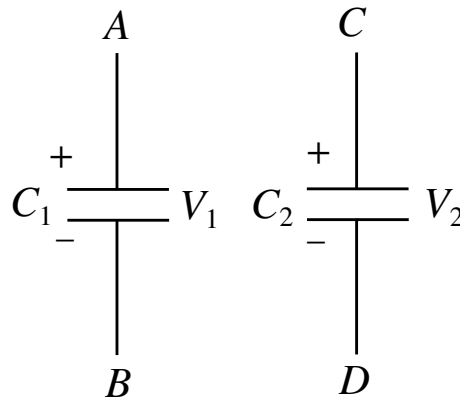
Problema 1. Capacitores

(10 puntos)

La capacitancia es una propiedad de cualquier conductor o conjunto de conductores de retener cargas eléctricas, y depende de la geometría de los conductores. Como consecuencia habrá diferencias de potencial (voltajes) entre los conductores. Cuando se agrega un medio dieléctrico entre los conductores, la capacitancia aumenta k -veces, siendo k la constante dieléctrica del medio (o permitividad relativa). Además al retener una carga, el sistema almacenará una energía $U = \frac{1}{2}QV$.

Primera Parte

En este problema tenemos dos capacitores de placas paralelas con capacitancias C_1 y C_2 que se cargan respectivamente con diferencias de potencial V_1 y V_2 , como se muestra en la figura.



Pregunta 1.1 ¿Cuál es la diferencia de potencial del sistema cuando se conectan las terminales AC y BD , y cuando se conectan AD y BC ? (4 puntos)

Pregunta 1.1 Solución Originalmente las cargas acumuladas en los capacitores son:

$$Q_1 = C_1 V_1, \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad (1)$$

(0.5 puntos)

La conectar las terminales los capacitores quedan conectados en paralelo, y los dos tendrán la misma diferencia de potencial, con distintas cargas, donde se cumple la identidad

$$V' = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2}, \quad (2)$$

(0.5 puntos)

Cuando se conecta AC y BD la carga total será

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2. \quad (3)$$

(1.0 puntos)

Despejando Q'_2 de la ecuación (2) y sustituyendo en (3) tenemos:

$$Q'_1 + \frac{C_2}{C_1}Q'_1 = C_1V_1 + C_2V_2. \quad (4)$$

Despejando Q'_1 tendremos

$$Q'_1 = C_1 \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} \quad (5)$$

(0.5 puntos)

Con este resultado y usando la ecuación (2) encontramos que el la nueva diferencia de potencial será:

$$V' = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}. \quad (6)$$

(0.5 puntos)

Cuando conectamos AD y BC tendremos que la carga total sería

$$Q''_1 + Q''_2 = Q_1 - Q_2 = C_1V_1 - C_2V_2. \quad (7)$$

(0.5 puntos)

Repitiendo todo el procedimiento, encontraremos que en este caso la diferencia de potencial sería

$$V'' = \frac{C_1V_1 - C_2V_2}{C_1 + C_2}. \quad (8)$$

(0.5 puntos)

Pregunta 1.2 ¿Cómo cambia la energía antes y después de hacer las conexiones mencionadas en la pregunta anterior? (3.0 puntos)

Pregunta 1.2 Solución La energía inicial de los dos capacitores es:

$$U_i = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2. \quad (9)$$

(0.5 puntos)

La energía final cuando se conectan AC y BD sería

$$U'_f = \frac{1}{2}C_1V'^2 + \frac{1}{2}C_2V'^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \left(\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2}, \quad (10)$$

(0.5 puntos)

y cuando se conectan AD y BC :

$$U''_f = \frac{1}{2}C_1V''^2 + \frac{1}{2}C_2V''^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1V_1 - C_2V_2)^2}{C_1 + C_2}, \quad (11)$$

(0.5 puntos)

Y el cambio de energías

$$\Delta U' = U'_f - U_i = \frac{1}{2} \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2} \frac{(C_1V_1^2 + C_2V_2^2)}{C_1 + C_2}, \quad (12)$$

(0.5 puntos)

Desarrollando algebraicamente llegamos a:

$$\Delta U' = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2 \quad (13)$$

(0.5 puntos)

Y para el otro caso

$$\Delta U'' = U_f'' - U_i = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 + V_2)^2. \quad (14)$$

(0.5 puntos)

Segunda Parte

Consideremos ahora que los dos capacitores son iguales, pero uno de ellos no está inicialmente cargado y además tiene el espacio entre sus placas lleno de un dieléctrico (no-lineal) cuya “constante” dieléctrica cambia con la diferencia de potencial de acuerdo a la relación $k = \alpha V$, siendo $\alpha = 1 \text{ V}^{-1}$. El otro capacitor está vacío pero ha sido cargado hasta una diferencia de potencial $V_0 = 156 \text{ V}$.

Pregunta 1.3 Determine el valor de la diferencia de potencial V al conectar los capacitores en paralelo. **(3.0 puntos)**

Pregunta 1.3 Solución Consideremos que la capacitancia del capacitor vacío sea C_0 y la del que está lleno del dieléctrico no lineal es $C = kC_0 = \alpha VC_0$. Si usamos la ecuación (6) con $C_1 = C_0$, $C_2 = \alpha VC_0$, $V_1 = V_0$ y $V_2 = 0$ tenemos

$$V = \frac{C_0 V_0}{C_0 + \alpha V C_0} = \frac{V_0}{1 + \alpha V} \quad (15)$$

(1.0 puntos)

Pasando todo a un lado de la ecuación

$$\alpha V^2 + V - V_0 = 0 \quad (16)$$

(0.5 puntos)

Ecuación cuadrática que podemos resolver con fórmula general

$$V = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha V_0}}{2\alpha}. \quad (17)$$

El voltaje no será negativo así que el resultado correcto será el de signo positivo y al sustituir valores llegamos a:

$$V = \frac{\sqrt{1 + 4\alpha V_0} - 1}{2\alpha} = 12 \text{ V}. \quad (18)$$

(1.0 puntos) Llegar al resultado.

(0.5 puntos) Cálculo numérico.

Problema 2. Funcionamiento de una chimenea

(10 puntos)

Las torres solares o chimeneas solares son construcciones que permiten aprovechar la energía solar mediante la convección de aire. El esquema de una chimenea solar se puede ver en la figura 1, en la base de la chimenea se encuentran unos colectores de aire por donde entra el aire de la atmósfera a la chimenea. Las chimeneas solares son pintadas de negro para absorber la radiación solar y con ello calentar el aire dentro de la chimenea, a su vez los colectores son contruidos de material reflejante para calentar el aire en la base de la chimenea. De esta manera, el aire al interior de la chimenea está a mayor temperatura que el aire del exterior. La diferencia de temperatura provoca que haya un flujo de aire desde los colectores, en la base de la chimenea, hasta la parte superior de la chimenea por donde sale el aire caliente de la chimenea. Este flujo de aire puede ser aprovechado colocando unas turbinas al interior de la chimenea.

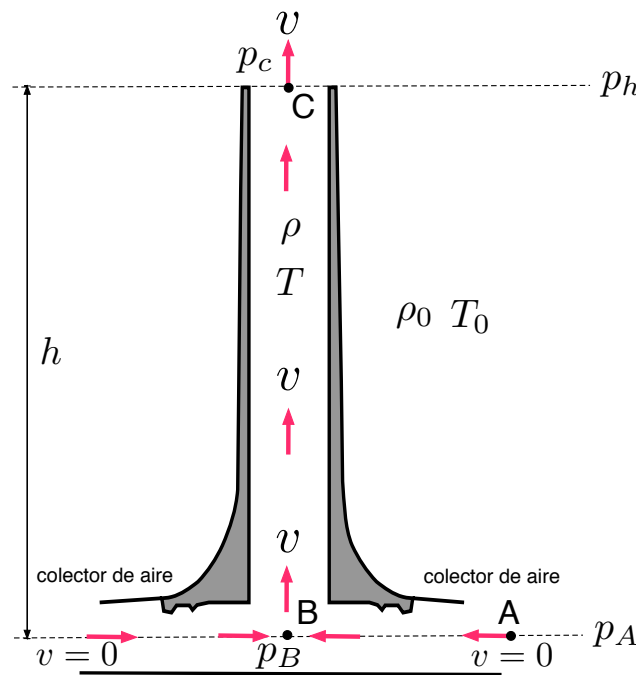


Figura 1: Esquema del funcionamiento de una chimenea.

El propósito de este problema es entender el funcionamiento de una chimenea a partir de un modelo sencillo. Considere el esquema simplificado de la figura 1.

Describamos el funcionamiento primero:

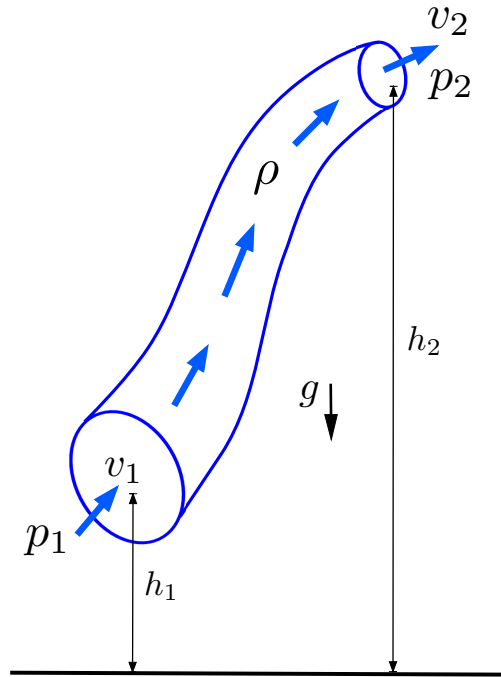
1) El aire fuera de la chimenea está en reposo $v = 0$, a una temperatura ambiente T_0 , con una densidad ρ_0 , y a una presión p_A . Este es sitio marcado como (A) en la figura 1.

2) Dentro de la chimenea el aire está, aproximadamente, a la misma temperatura T mayor que T_0 ($T > T_0$). Esta diferencia de temperaturas hace que la densidad del aire dentro de la chimenea ρ sea menor que la de afuera $\rho < \rho_0$. Esto a su vez genera un flujo de aire que, de velocidad $v = 0$ en la entrada, se acelere hasta un valor $v > 0$ en la base de la chimenea, marcada como (B) en la figura 1. Muy importante, esto también provoca que la presión en (B), p_B , sea menor que la presión en (A), $p_B < p_A$.

3) Dicha velocidad v en (B) se mantiene constante en todo el tiro de la chimenea (por conservación de masa). El aire entonces sube por la chimenea a velocidad constante v , pero al salir su presión p_C se iguala a la presión atmosférica a la altura h , que llamamos p_h .

Ahora estudiaremos que la explicación anterior es razonable, con ciertas aproximaciones y haciendo uso de la ecuación de Bernoulli, que es la ecuación que describe el flujo de un fluido, cuando la viscosidad no es muy grande (que es el caso del aire). Veamos: Si se tiene un fluido incompresible (densidad constante), que se mueve en el campo gravitacional y despreciamos su viscosidad, se halla que las presiones y velocidades en cada punto del flujo, a diferentes alturas, están relacionadas a través de la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{constante} \quad (19)$$



Se hace una medición de la temperatura ambiente y de la temperatura del aire en la chimenea y se hallan los valores $T_0 = 20^\circ\text{C}$ y $T = 50^\circ\text{C}$. Se sabe también que la densidad del aire a temperatura ambiente es $\rho_0 = 1.24\text{kg/m}^3$. Considere que la altura de la chimenea es $h = 100\text{m}$. Puede usar $g = 9.8\text{m/s}^2$. Con estos datos solamente, usted analizará el resto del problema.

Pregunta 2.1 Calcule el valor de la densidad del aire caliente (ρ) dentro de la chimenea (2.0 puntos)

Para hallar este resultado, hacemos una observación (y aproximación) muy importante. Notamos que en la entrada de la chimenea, punto (A) en la figura 1, se tiene la “unión” del gas caliente a

temperatura T y la del gas ambiente a temperatura T_0 . Ahora haga la suposición de que la presión es la misma en esos dos gases en el punto (A) y calcule la densidad ρ del gas caliente dentro de la chimenea. Suponga que el aire es un gas ideal.

Pregunta 2.1 Solución

El aire dentro y fuera de la chimenea satisfacen la ecuación de gas ideal; si en el punto A están a la misma presión p_A entonces:

$$p_A = \frac{R}{M} \rho_0 T, \quad p_A = \frac{R}{M} \rho T, \quad (20)$$

dividiendo ambas ecuaciones se obtiene la densidad del aire caliente:

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} = 1.24 \text{ kg/m}^3 \frac{(20 + 273.15) \text{ K}}{(50 + 273.15) \text{ K}} = 1.12 \text{ kg/m}^3 \quad (21)$$

(1.5 puntos) Uso de la ecuación de gas ideal, expresión final de la densidad.

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Pregunta 2.2 Determine la expresión para la diferencia de presiones $p_A - p_B$ entre los puntos A y B, en función de la velocidad v del aire en el punto B. Demuestre que: $p_A > p_B$. (2.0 puntos)

Pregunta 2.2 Solución

Tomando como cero de energía potencial la base de la chimenea y como los puntos A y B están a la misma altura, la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B esta dada por:

$$p_A + \frac{1}{2} \cancel{\rho v_A^2} = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2, \quad (v_A = 0, v_B = v) \quad (22)$$

de donde se obtiene:

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho v^2 > 0 \quad (23)$$

(1.5 puntos) Uso de la ecuación Bernoulli, expresión final de la diferencia de presiones

(0.5 puntos) Demostrar que $p_A > p_B$.

Es importante verificar que la ecuación de Bernoulli se aplique al aire dentro de la chimenea, cuya densidad es ρ . De esta ecuación solo se conoce el valor de la densidad del aire dentro de la chimenea ρ (inciso 2.1), por lo que no es posible determinar la velocidad v todavía.

Pregunta 2.3 Determine el valor numérico para la diferencia de presiones $p_B - p_C$ entre los puntos B y C. (2.0 puntos)

Pregunta 2.3 Solución

Si la velocidad del aire caliente en los puntos B y C es la misma ($v_B = v_C$), entonces la ecuación de Bernoulli entre los puntos B y C esta dada por:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 + \rho gh, \quad (24)$$

de donde se obtiene:

$$p_B - p_c = \rho gh = (1.12 \text{ kg/m}^3) (9.8 \text{ m/s}^2) (100 \text{ m}) = 1097.6 \text{ Pa} \quad (25)$$

(1.5 puntos) Uso de la ecuación Bernoulli, expresión final de la diferencia de presiones

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Pregunta 2.4 Calcule la diferencia de presiones del aire en la atmósfera, entre la base de la chimenea y la parte superior de la chimenea: $p_A - p_h$. Recuerde que el aire de la atmósfera a la altura h , pero alejado de la salida de la la chimenea, está en reposo. (2.0 puntos)

Pregunta 2.4 Solución Usamos de nuevo la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y h , pero en la atmósfera, recordando que ésta está en reposo en ambos puntos,

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_h + \frac{1}{2}\rho v_h^2 + \rho gh. \quad (26)$$

a partir de la cual se obtiene la diferencia de presiones:

$$p_A - p_h = \rho gh = (1.24 \text{ kg/m}^3) (9.8 \text{ m/s}^2) (100 \text{ m}) = 1215.9 \text{ Pa} \quad (27)$$

(1.5 puntos) Uso de la ecuación Bernoulli, expresión final de la diferencia de presiones.

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Pregunta 2.5 Determine el valor de la velocidad v con la que sale el aire caliente de la chimenea. Recuerda que la presión del aire caliente en C es aproximadamente igual a la presión atmosférica a la altura h . (2.0 puntos)

Pregunta 2.5 Solución

Combinando las ecuaciones (23) y (25) se obtiene:

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\ p_B - p_c &= \rho gh \end{aligned} \Rightarrow p_A - p_c = \rho \frac{1}{2}v_B^2 + \rho gh \quad (28)$$

como $p_c = p_h$ y $v_B = v_c$, despejando se obtiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_A - p_h - \rho gh)} \quad (29)$$

(1.0 puntos) Planteamiento de las ecuaciones (con $p_c = p_h$)

(0.5 puntos) Expresión final de la diferencia de presiones

empleando el resultado del inciso 2.4: $p_A - p_h = \rho gh$, también se puede escribir como:

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho_0 g h - \rho g h)} = \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right)} \quad (30)$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\begin{aligned} v_c &= \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right)} = \sqrt{2 (9.8 \text{ m/s}^2) (100 \text{ m}) \left(\frac{1.24 \text{ kg/m}^3 - 1.12 \text{ kg/m}^3}{1.12 \text{ kg/m}^3} \right)} \\ &= 14.5 \text{ m/s} = 52.2 \text{ km/h} \end{aligned} \quad (31)$$

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Otra manera de obtener el resultado es escribir la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C:

$$p_A + \frac{1}{2} \cancel{\rho} v_A^2 = p_c + \frac{1}{2} \rho v_c^2 + \rho h g, \quad (v_A = 0) \quad (32)$$

tomando en cuenta que $p_c = p_h$ y despejando se obtiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_A - p_h - \rho g h)} \quad (33)$$

(1.5 puntos) Uso de la ecuación Bernoulli, expresión final de la velocidad v_c

(0.5 puntos) Valor numérico correcto.

Problema 3. Sistema de tres cargas

(10 puntos)

Se tienen dos partículas fijas en el espacio cargadas, ambas partículas tienen la misma carga Q (mismo signo y mismo valor) separadas una distancia d . Una tercer partícula con carga q , de signo contrario a las otras dos cargas, esta restringida a moverse sobre la línea media entre las dos partículas y esta separada una distancia y respecto del punto medio de las partículas fijas como se muestra en la figura.

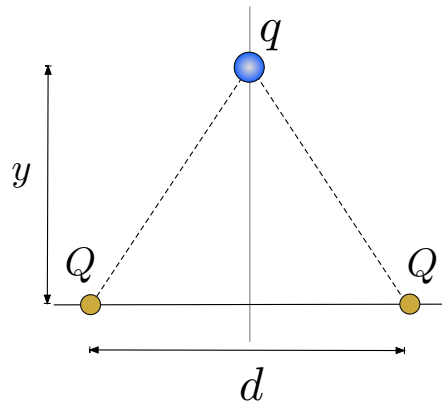
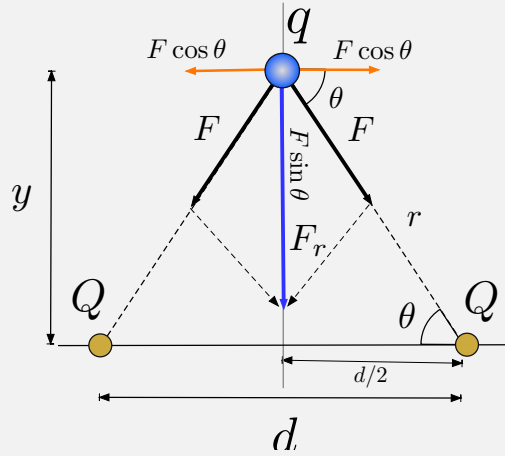


Figura 2: Sistema de tres carga, las cargas Q y q son de signo contrario.

En todo el problema desprecia la fuerza gravitacional entre las partículas.

Pregunta 3.1 Dibuje el diagrama de cuerpo libre para la partícula de carga q , determine la expresión de la fuerza resultante sobre esta partícula indicando la dirección de la fuerza resultante. **(3.0 puntos).**

Pregunta 3.1 Solución



De acuerdo a la ley de Coulomb, cada una de las cargas Q ejercen una fuerza de atracción (diferente signo) sobre la carga q en la línea que une ambas cargas y cuya magnitud es:

$$F = k_e \frac{Qq}{r^2} \quad (34)$$

donde $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ y r es la distancia que separa las cargas Q y q .

(1.0 puntos) Diagrama de cuerpo libre

(0.5 puntos) Escribir ley de Coulomb

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre las componentes horizontales de la fuerza sobre q se cancelan y las componentes verticales se suman. Así, la fuerza resultante sobre la carga q está en dirección vertical apuntando hacia el centro de las partículas fijas de masas q ; su magnitud está dada por:

$$F_r = 2F \sin \theta = 2k_e \frac{Qq}{r^2} \sin \theta \quad (35)$$

donde, de acuerdo a la geometría del sistema de cargas:

$$\sin \theta = \frac{d/2}{r}, \quad r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \quad (36)$$

por lo que la fuerza resultante se puede escribir como:

$$F_r = 2k_e \frac{Qq}{r^3} y = \frac{2k_e Qq y}{\left[(d/2)^2 + y^2\right]^{3/2}} \quad (37)$$

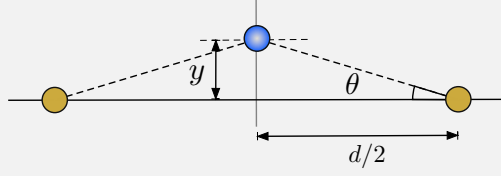
Cualquiera de las expresiones para la fuerza resultante son válidas.

(1.0 puntos) Uso del diagrama de cuerpo libre para obtener la fuerza resultante.

(0.5 puntos) Expresión final de la fuerza resultante.

Pregunta 3.2 Demuestre que si la distancia y es despreciable en comparación con la distancia de separación d , es decir: $y \ll d$, entonces la fuerza eléctrica sobre la partícula q es proporcional a la distancia y , escriba la expresión de la fuerza resultante en este caso. **(3.0 puntos)**

Pregunta 3.2 Solución



Si y es despreciable ($y \ll d$) entonces son válidas las siguientes aproximaciones:

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{d/2}, \quad r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2} \approx \frac{d}{2} \quad (38)$$

(1.5 puntos) Por escribir una o ambas aproximaciones, según sea el caso.

Sustituyendo ambas aproximaciones en la expresión (35) se obtiene:

$$F_r = 2k_e \frac{Qq}{r^2} \sin \theta \approx 2k_e \frac{Qq}{(d/2)^3} y = \frac{16k_e Qq}{d^3} y \quad (39)$$

Sustituyendo solo la segunda aproximación en la ecuación (37) también se obtiene el mismo resultado:

$$F_r = \frac{2k_e Qq y}{\left[(d/2)^2 + y^2\right]^{3/2}} \approx \frac{16k_e Qq}{d^3} y \quad (40)$$

(1.0 puntos) Por sustituir las aproximaciones en la fuerza resultante y expresión final de la fuerza

En este caso ($y \ll d$), cuando la fuerza eléctrica sobre la carga q es proporcional a la distancia y , la fuerza es similar a la ley de Hooke. La ley de Hooke establece que la fuerza sobre un cuerpo de masa m sujeto a un resorte, de constante k , es proporcional a la distancia x que se estira el resorte: $F = -kx$. Se sabe además que un cuerpo, de masas m , sometido a la fuerza de un resorte (ley de Hooke) describe un movimiento armónico simple de frecuencia: $\omega = \sqrt{k/m}$.

Si en la aproximación ($y \ll d$) la fuerza eléctrica sobre la carga q es semejante a la ley de Hooke, entonces al liberar la carga q describe también un movimiento armónico simple.

Pregunta 3.3 Si m es la masa de la partícula de carga q , determine la expresión para la frecuencia de oscilación de la partícula de carga q en la aproximación: $y \ll d$. (2.0 puntos)

Pregunta 3.3 Solución

La fuerza eléctrica sobre la carga q en la aproximación $y \ll d$, ecuación (40), se puede escribir como:

$$F = k' y, \quad \text{donde: } k' = \frac{16k_e Qq}{d^3} \quad (41)$$

comparando con la frecuencia de oscilación para la ley de Hooke, se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{k_e Qq}{md}} \quad (42)$$

Una molécula de hidrógeno diatómico ionizada esta compuesta por dos protones y un electrón. La

distancia de separación entre los dos protones es: $d = 1.06 \times 10^{-10}$ m; la masa del protón y electrón son, respectivamente: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $m_e = 9.10 \times 10^{-31}$ kg y la carga elemental tiene el valor: $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C.

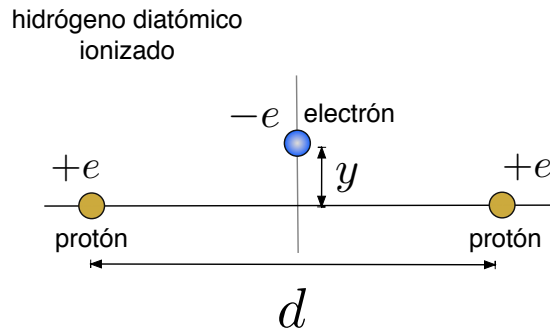


Figura 3: Hidrógeno diatómico ionizado, los protones están fijos en el espacio y el electrón está restringido a moverse en la línea media entre los protones.

Para aplicar los resultados obtenidos en los incisos anteriores, considera que los protones están fijos en el espacio y que el electrón está restringido a moverse en la línea media entre los protones. Bajo estas condiciones, si se libera al electrón a una distancia y en la aproximación: $y \ll d$, describe un movimiento armónico simple, responde entonces las siguientes preguntas:

Pregunta 3.4 Calcule el valor de la frecuencia de oscilación del electrón cuando se libera a una distancia y en la aproximación: $y \ll d$. (1.0 punto)

Pregunta 3.4 Solución

Sustituyendo los valores que se dan:

$$\omega = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{k_e e^2}{m_e d}} = \frac{4}{1.06 \times 10^{-10} \text{ m}} \sqrt{\frac{(8.98 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(9.10 \times 10^{-31} \text{ kg}) (1.06 \times 10^{-10} \text{ m})}} = 5.83 \times 10^{16} \text{ 1/s} \quad (43)$$

De acuerdo a la teoría electromagnética, cuando una partícula cargada se acelera emite ondas electromagnéticas (luz). Por otra parte, para cualquier onda electromagnética se satisface la relación: $c = f\lambda$, donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz, f la frecuencia de la onda y λ su longitud de la onda. En el ejemplo del inciso anterior, si el movimiento armónico del electrón genera ondas electromagnéticas con la misma frecuencia con la que oscila, entonces:

Pregunta 3.5 Calcule el valor de la longitud de onda de las ondas electromagnéticas emitidas por el electrón, de acuerdo al espectro electromagnético (ver figura del espectro) ¿en que banda se localizan estas ondas? (1.0 punto)

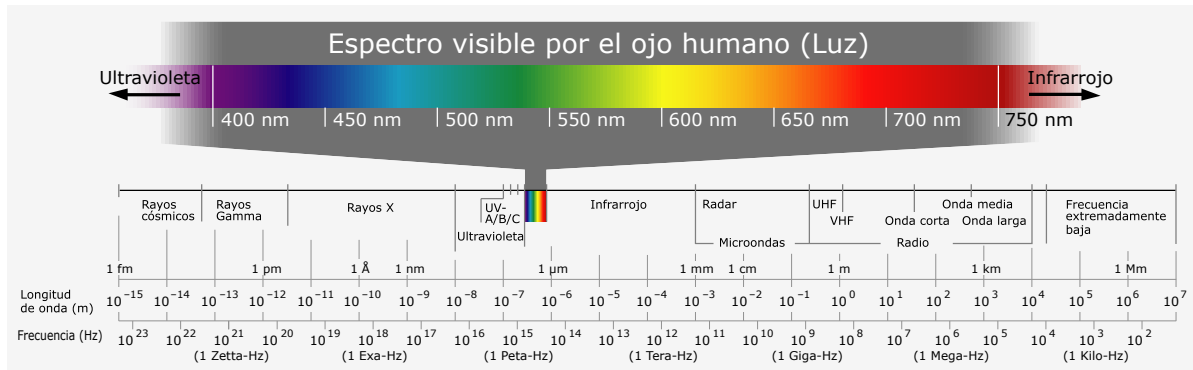


Figura 4: Espectro electromagnético.

Pregunta 3.5 Solución

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.83 \times 10^{16} \text{ 1/s}} = 5.14 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (44)$$

la longitud de onda pertenece a la banda de rayos X.