Tarea 12

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Fecha de entrega: antes del martes 27 de junio.

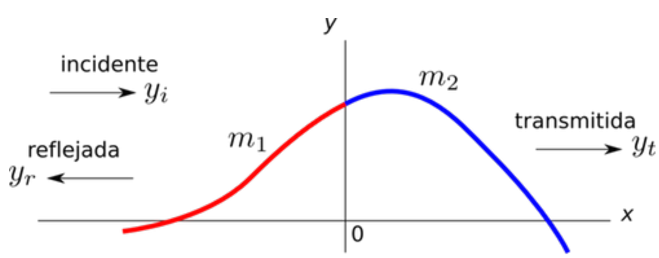
Problema 42 Reflexión de ondas en una cuerda.

Se tienen dos cuerdas de diferente densidad unidas en un punto ($x = 0$), la cuerda que se extiende a la izquierda del eje x ($x \leq 0$) tiene densidad lineal de masa m_1, por otra parte la cuerda que extiende a la derecha del eje x ($x \geq 0$) tiene densidad lineal de masa m_2. Una onda incidente que viaja en el sentido positivo del eje x, a través de la cuerda de la izquierda, es reflejada y transmitida en el punto de unión de ambas cuerdas. La onda transmitida se propaga a través de la cuerda de la derecha y en el mismo sentido que la onda incidente, mientras que la onda reflejada se propaga en sentido contrario de la onda incidente sobre la cuerda de la izquierda (ver figura).

Sea:

$$\begin{aligned} \text{onda incidente:} \quad & y_i(x,t) = A_i \sin(\omega t - k_1 x) \qquad & x \leq 0 \\ \text{onda reflejada:} \quad & y_r(x,t) = A_t \sin(\omega t + k_1 x) \qquad & x \leq 0 \\ \text{onda transmitida:} \quad & y_t(x,t) = A_r \sin(\omega t - k_2 x) \qquad & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde A_i, A_r, A_t corresponde a las amplitudes de las onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente. Nota que la frecuencia de oscilación ω de las ondas es la misma en ambas cuerdas (o medios), sin embargo la velocidad de propagación es diferente $v_1 = \omega/k_1$, $v_2 = \omega/k_2$ (la velocidad de una onda que se propaga en una cuerda esta dada por $v = \sqrt{T/m}$, donde T es la tensión y m la densidad lineal de masa).



El problema consiste en determinar los coeficientes de reflexión y transmisión definidos de la siguiente manera:

$$R \equiv \frac{A_r}{A_i} \qquad T \equiv \frac{A_t}{A_i} \tag{2}$$

Para ellos considera las dos condiciones que se deben satisfacer cuerdas en el punto de unión ($x = 0$):

- Las dos cuerdas no se despegan, es decir que siempre se mantienen unidas.
- Si no hay ninguna fuerza externa en el punto de unión, entonces la componente transversal de la fuerza en ambas cuerdas debe ser la misma en el punto de unión, ¿por qué? Puedes verificar que, en general, cuando una onda se propaga en una cuerda la fuerza, en la componente transversal, en cualquier punto sobre la cuerda esta dada por: $F_y = T\dfrac{dy}{dx}$, donde T es la tensión en la cuerda (no confundir con coeficiente de transmisión).

Responde las siguientes preguntas y problemas:

1. Demuestra que los coeficientes de reflexión y transmisión: R y T, en términos de las velocidades de propagación de la onda en cada cuerda, v_1 y v_2 estan dados por:

$$R = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}, \qquad T = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \tag{3}$$

   Hint: Escribe las dos condiciones descritas antes como dos ecuaciones en términos de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas. Nota que a la izquierda de $x = 0$ la onda total es la suma de la onda incidente y reflejada.

   De acuerdo a los resultados obtenidos, podrás verificar que el coeficiente de transmisión es siempre positivo. Sin embargo, el coeficiente de reflexión R puede tomar valores negativos, ¿cuando sucede esto? En esté caso significa que la onda reflejada esta desfasada un valor de π respecto de la onda incidente. Esto mismo sucede para cualquier tipo de onda, en especial para las ondas electromagnéticas -es decir, la luz- dependiendo de el cambio del índice de refracción entre dos medios, el índice de refracción, a su vez, esta relacionado con la velocidad de propagación de las ondas en el medio.

2. Determina los coeficientes de reflexión y transmisión: R y T, ahora en términos de las densidades lineales de masa de cada cuerda.

3. Ahora considera el caso donde solo esta la cuerda de la izquierda y en $x = 0$ la cuerda esta fija al origen, en $x \geq 0$ hay una pared. Considera una onda que se propaga en la cuerda y describe la situación, ¿hay un cambio de fase en la onda reflejada? Considera la misma situación pero ahora la cuerda no esta fija en $x = 0$, sino que esta libre de moverse verticalmente, ¿hay un cambio de fase?

4. Por conservación de energía y de momento (en la dirección transversal) en el punto de unión de la cuerda, determina las expresiones de las velocidades de propagación de la onda en cada cuerda: v_1 y v_2, en términos de las densidades lineales de masa m_1 y m_2. El resultado es análogo a la colisión de dos partículas de masas m_1 y m_2.

5. Considera la colisión de dos partículas 1 y 2 de masas m_1 y m_2 respectivamente, antes de la colisión la partícula 2 esta en reposo y la partícula 1 se mueve con velocidad v_1. Si ambas partículas se mueven únicamente en el eje x, determina las velocidades de ambas partícula, v_1' y v_2', después de la colisión en términos de las masas de la partículas, compara con el resultado anterior.

Problema 43, Polarización de las ondas electromagnéticas.

La polarización es una propiedad de las ondas transversales, en especial de las ondas electromagnéticas (EM), y hace referencia al plano de vibración de la onda. En las ondas electromagnéticas por convención el plano de polarización lo define el plano que contiene al campo eléctrico $\mathbf{E}$.

En la figura (0.1) se muestra una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje z (la dirección de propagación de la onda esta determinada por el vector $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$) ; el campo eléctrico $\mathbf{E}$ oscila en la dirección del eje x mientras que el campo magnético oscila en la dirección y (en una onda electromagnética que se propaga en el vacío, el vector del campo magnético $\mathbf{B}$ siempre es perpendicular campo $\mathbf{E}$).

La onda que se muestra en la figura esta polarizada linealmente en la dirección del eje x . Cuando el vector del campo eléctrico $\mathbf{E}$ oscila siempre en la misma dirección se conoce como **polarización lineal.**

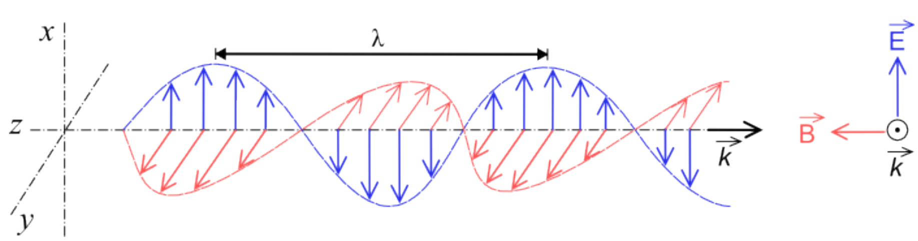


Figura 0.1: Polarización lineal de una onda electromagnética, para todo tiempo el campo eléctrico esta contenido en el plano $z\,x$.

Estado de polarización de las ondas electromagnéticas.

En general el vector del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en una onda electromagnética puede cambiar de dirección y girar sobre el plano perpendicular al de propagación de la onda y describir una circunferencia o una elipse, como se muestra en la figura siguiente:

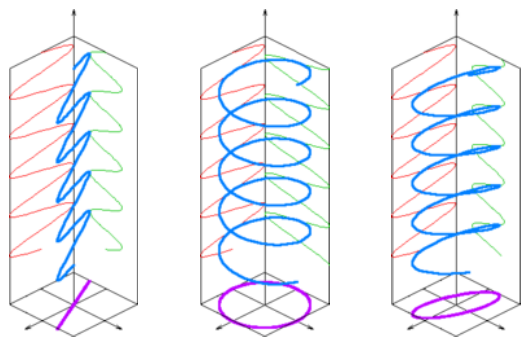


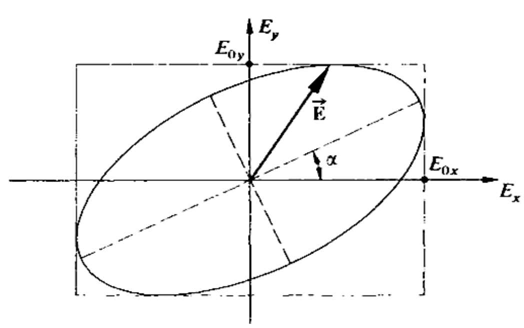
Figura 0.2: Estados de polarización de las ondas electromagnéticas, polarización lineal, circular y elíptica.

Para analizar el estado de polarización general de una onda supongamos una onda electromagnética que se propaga en la dirección z. El vector de campo eléctrico $\mathbf{E}$ esta contenido en el plano $x-y$. Cada una de sus componentes, sobre cada eje, se comporta como una onda de frecuencia ω:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\cos\left(kz-\omega t+\phi_1\right) \\ E_y &= E_{0y}\cos\left(kz-\omega t+\phi_2\right) \end{aligned} \tag{4}$$

E_{0x} y E_{0y} corresponde a la amplitud de las componentes en los ejes x, y respectivamente. Supongamos que ambas componentes difieren en una fase $\Delta \equiv \phi_1-\phi_2$. De esta manera el campo eléctrico queda determinado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x\hat{\mathbf{i}}+E_y\hat{\mathbf{j}} \\ |\mathbf{E}|^2 &= E_1^2\cos^2\left(kz-\omega t+\phi_1\right)+E_2^2\cos^2\left(kz-\omega t+\phi_2\right) \end{aligned} \tag{5}$$



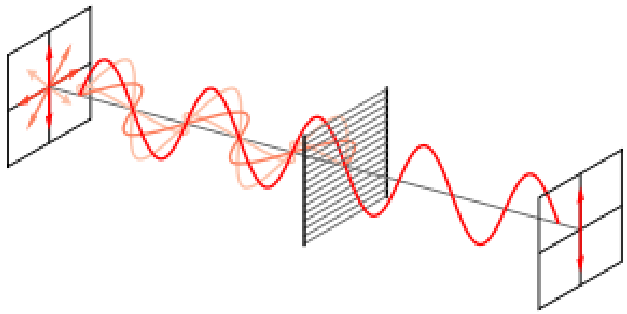
1 Demuestra a partir de las componentes del campo eléctrico (4), que el vector el campo eléctrico $\mathbf{E}$ describe una elipse rotada cuya ecuación es:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2=\sin^2\left(\phi_1-\phi_2\right) \tag{6}$$

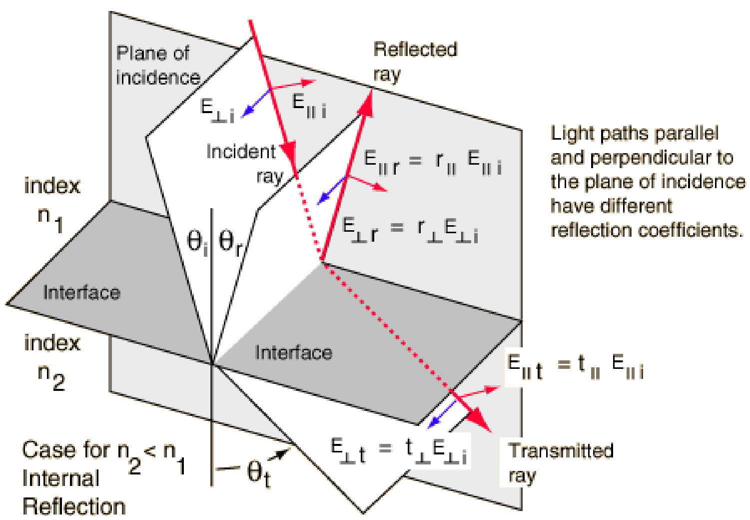
Determina el ángulo α en función de los parámetros E_{0x}, E_{0y} y $\Delta=\phi_1-\phi_2$

2 Verifica el estado de polarización de la onda cuando $|\Delta| = 0, \pi, \pi/2$; cómo modifica las propiedades de propagación de la onda el signo de la diferencia de fase Δ, es decir que pasa cuando $\Delta < 0$ ó $\Delta > 0$.

En general las ondas electromagnéticas de una fuente de luz no están polarizadas (¿la luz de un láser esta polarizada?). Sin embargo al hacerla pasar a través de un medio que absorbe todas la componentes del campo que están fuera de un *eje óptico,* característico del material, la luz queda polarizada. Estos dispositivos se conocen como *polarizadores*.



Otra manera de obtener luz polarizada es a través de reflexión de la luz. Cuando la luz incide sobre un material, una parte de la luz es reflejada y otra transmitida, las propiedades de reflexión y transmisión de la luz en cada una de las componentes del vector del campo eléctrico están determinadas por las ecuaciones de Fresnel. Si descomponemos al vector **E** en dos componentes, una de ellas perpendicular al plano de incidencia $E_\perp$ y otra paralela al plano $E_\parallel$.



Las componentes paralela y perpendicular del campo eléctrico reflejadas y transmitidas obedece las ecuaciones de Fresnel, que se obtiene a partir de las condiciones que deben satisfacer los campos electricos en la frontera de dos medios de índice de refracción diferente, nota la analogia con el problema anterior de la onda que se propaga en una cuerda de diferente densidad. Las ecuaciones de Fresnel son las siguientes:

$$\text{componente perpendicular}\begin{cases} r_\perp \equiv \left(\dfrac{E_{\perp r}}{E_{\perp i}}\right) = \dfrac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \\ t_\perp \equiv \left(\dfrac{E_{\perp t}}{E_{\perp i}}\right) = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\end{cases} \quad \text{componente paralela}\begin{cases} r_\parallel \equiv \left(\dfrac{E_{\parallel r}}{E_{\parallel i}}\right) = \dfrac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i} \\ t_\parallel \equiv \left(\dfrac{E_{\parallel t}}{E_{\parallel i}}\right) = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}\end{cases} \tag{7}$$

Se definen los coeficientes de reflexión perpendicular $r_\perp$, reflexión paralela $r_\parallel$; transmisión perpendicular $t_\perp$ y transmisión paralela $t_\parallel$.

3 Demuestra que los coeficientes de reflexión y transmisión se puedes escribir como:

$$\begin{aligned} r_\perp &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \qquad & r_\parallel &= -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_\perp &= -\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \qquad & t_\parallel &= -\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \tag{8}$$

4 Responde lo siguiente, justifica tus respuestas:

- ¿Hay un cambian de fase en las componentes transmitidas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?
- ¿Hay un cambian de fase en las componentes reflejadas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?
- ¿es posible que haya un cambio de fase en las ondas transmitidas?

En general, una onda EM puede tener ambas componentes del campo eléctrico: $E_\perp$, $E_\parallel$, es decir no estar polarizada. Una manera sencilla de obtener una onda polarizada es empleando polarizadores, pero hay otra manera a través de una reflexión sobre una superficie. Para ello es necesario eliminar una de las componentes del campo eléctrico reflejado, lo cual se puede hacer eliminando la componente paralela: $E_{\parallel r}$.

5 Demuestra que la condición: $E_{\parallel r} = 0$ se satisface cuando los rayos reflejado y refractados son perpendiculares. En este caso el rayo reflejado está polarizado linealmente en la dirección perpendicular al plano de incidencia.

6 El ángulo de Brewster θ_B se define como el ángulo de incidencia para el cual la luz reflejada esta polarizada linealmente en el plano perpendicular al plano de incidencia. Demuestra que:

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{9}$$

7 Calcula los coeficientes de reflexión y de transmisión para las ondas electromagnéticas en la región del visible para el vidrio crown (índice de refracción n =1.52) y un ángulo de incidencia 30°, ¿hay un cambio de fase en alguna de las componentes del campo?, calcula también el ángulo de Brewster para el vidrio crown.

Problema 44, Interferencia de ondas.

Sean dos ondas con la misma frecuencia y la misma fase inicial que emergen de dos puntos diferentes S_1 y S_2. Consideremos el caso general donde la amplitud de cada onda es diferente:

$$\begin{aligned} \psi_1(r_1, t) &= A_1\cos(kr_1 - \omega t) = A_1\cos(\phi_1 - \omega t) \\ \psi_2(r_2, t) &= A_2\cos(kr_2 - \omega t) = A_2\cos(\phi_2 - \omega t) \end{aligned} \tag{10}$$

Donde r_1, r_2 corresponde a la distancia que recorre cada onda desde los puntos donde emergen S_1 y S_2 hasta un punto P donde interfieren:

$$\begin{aligned} \overline{S_1P} &= r_1 \\ \overline{S_2P} &= r_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Las fases espaciales de cada onda: $\phi_1 = kr_1$, $\phi_2 = kr_2$, son diferentes en general y las que determinan las propiedades de interferencia entre ambas ondas. La suma de ambas ondas esta dada por:

$$\psi_T = \psi_1 + \psi_2 = A\cos(\phi - \omega t) \tag{12}$$

donde la amplitud y la fase de la onda resultante se encuentran a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(k\Delta)}, \\ \tan\phi &= \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \end{aligned} \tag{13}$$

la diferencia de fases expaciales esta dada por:

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 = kr_1 - kr_2 = k\Delta \\ \Delta \equiv r_1 - r_2\end{aligned} \tag{14}$$

$\Delta = \overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}}$ es la diferencia de camino que recorren las dos ondas ψ_1 y ψ_2 hasta el punto de interferencia. La intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, por lo que la intensidad resultante en el punto de interferencia esta dado por:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k\Delta, \qquad \begin{cases} k\Delta &= 2\pi m, \quad \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta &= \pi\,(2m+1)\,, \quad \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Los máximos (interferencia constructiva) y mínimos (interferencia destructiva) de interferencia dependen de la diferencia de camino Δ, Una caso importante sucede cuando las amplitudes de cada onda es la misma ($A_1^2 = A_2^2 = I_0$), en cuyo caso la intensidad total es:

$$\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k\Delta}{2}\right)}, \qquad \begin{cases} k\Delta &= 2\pi m, \quad \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta &= \pi\,(2m+1)\,, \quad \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Este caso puede ser aplicado cuando la distancia de separación entre las fuentes $\mathrm{S_1}$ y $\mathrm{S_2}$ es pequeña en comparación con r_1 y r_2.

En términos de la longitud de onda $k = 2\pi/\lambda$, los máximos y mínimos de interferencia se obtienen cuando:

$$\begin{cases} \Delta &= \lambda m, \quad \text{interferencia constructiva} \\ \Delta &= \frac{\lambda}{2}\,(2m+1)\,, \quad \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Ejercicios:

1. Demuestra las relaciones (13) que corresponden a la amplitud y fase de la suma de las dos ondas (10). Hint: puedes usar un método empleando números complejos o una representación vectorial.

2. **Doble rendija.**

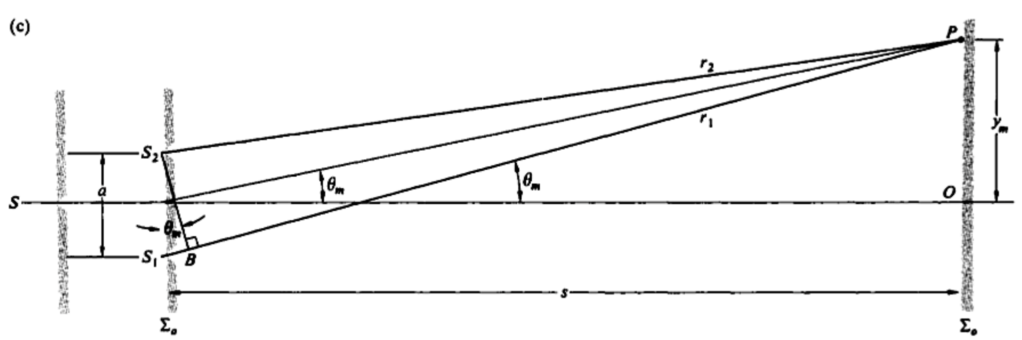


figura 2.1

Problema: Para el experimento de la doble rendija (ver figura 2.1), encuentra la diferencia de camino: $\Delta = \overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}}$, entre las dos ondas que atraviesan las rendijas $\mathrm{S_1}$ y $\mathrm{S_2}$ y que interfieren en el punto P sobre una pantalla lejana a un ángulo θ_m sobre la horizontal.

Encuentra la altura y_m a la cual se obtienen los máximos de intensidad (interferencia constructiva), así como la distancia de separación entre dos máximos sucesivos, en términos de los siguientes parámetros: s distancia entre la doble rendija y la pantalla; a separación entre las dos rendijas y λ la longitud de onda. Considera que la pantalla se encuentra muy lejos de la doble rendija.

3. **Conjunto de rendijas:**

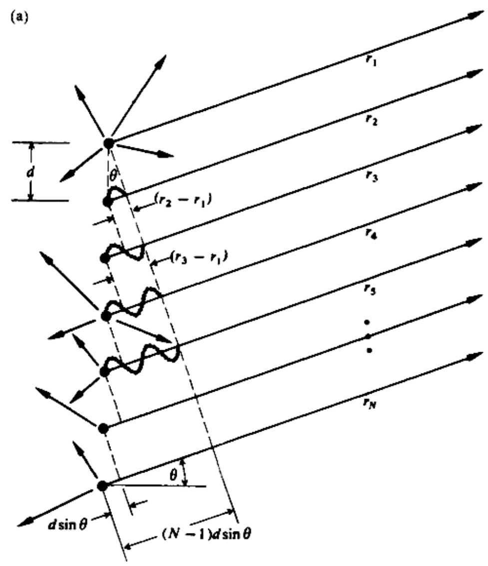


figura 2.2

Considera ahora un conjunto de N rendijas separadas una distancia d, cada rendija se puede considerar como una fuente puntual de ondas, ver la figura 2.2 Si las ondas que emergen de cada un de las fuentes tienen la misma frecuencia ω, la misma amplitud A y tienen la misma fase inicial (coherencia), demuestra que la suma de todas las ondas (interferencia) en un punto P sobre una pantalla que se encuentra muy lejos, similar al de la figura 2.1, esta dado por:

$$\psi_T = Ae^{-i\omega t} e^{i[kr_1+(N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \tag{18}$$

Donde se entiende que la onda total esta representada por la parte real de la expresión anterior y δ esta dada por:

$$\delta = kd \sin\theta \tag{19}$$

Si se define R a la distancia desde el centro del conjunto de rendijas hasta el punto P (comparar con la figura 2.1), entonces la onda total esta descrita por:

$$\psi_T = A \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \cos(kR - \omega t) \tag{20}$$

Hint: Emplea la representación compleja de las ondas y después suma todas las ondas, nota que cada fuente puntual tiene un defase respecto del anterior. Además recuerda la expresión para la suma de una progresión geométrica: $\sum a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots a_1 r^n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

Nuevamente se obtiene algo similar a la suma de dos ondas, ecuación (12), pero con una amplitud diferente. Así el patrón de intensidades, debido a la interferencia de las ondas, que se observa sobre la pantalla esta dada por:

$$I = A^2 \frac{\sin^2 [N (kd/2) \sin\theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin\theta]} \tag{21}$$

Dibuja nuevamente la gráfica de la expresión anterior, resalta los valores de intensidad máxima y mínima. A partir de este resultado comenta cómo podrías medir la longitud de onda λ de una fuente de luz a través de este método.

4. **Película delgada**

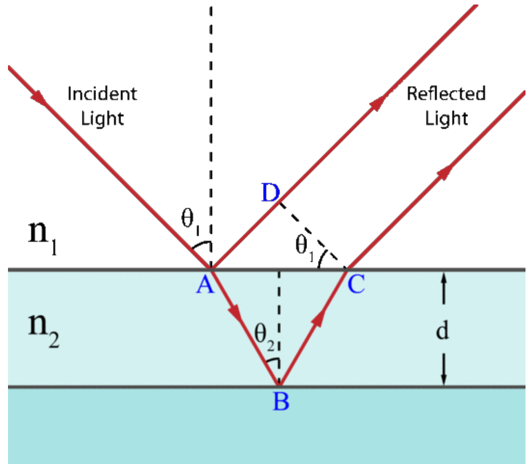


figura 2.3

La diferencia de camino entre dos ondas que interfieren puede depender también del medio donde se propaga cada una de las ondas. Un ejemplo de esto se observa en la interferencia de la luz reflejada por una película delgada, como se muestra en la figura. En este caso los rayos que interfieren son dos rayos reflejados en A y C, el primero se debe a la reflexión directa del rayo incidente sobre la superficie que separa los dos medios de indices n_1 y n_2; mientras que la segunda reflexión corresponde a un rayo que se transmite AB, se refleja en el punto B sobre la superficie inferior (en general la superficie inferior puede ser otro medio de índice n_3 o el mismo medio de arriba n_1) y finalmente se refracta en el punto C.

En general se define al *camino óptico* Λ como el producto de la distancia l que recorre un rayo de luz en un medio por el índice de refracción n del medio $\Lambda = ln$

Problema: Determina la diferencia de camino óptico entre los dos rayos reflejados por la película de indice de refracción n_2 que se muestra en la figura 2.2:

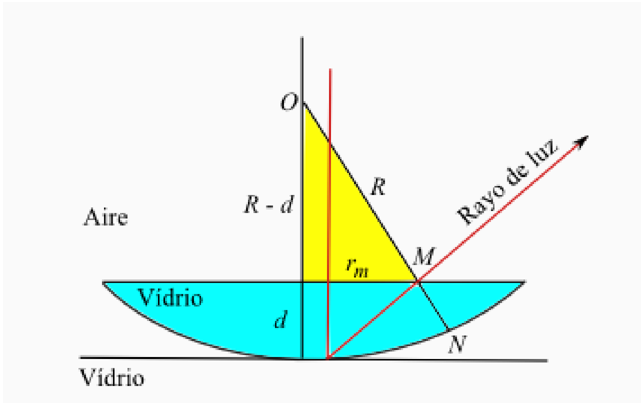
$$\Lambda = n_2 \left(\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}\right) - n_1 \overline{\mathrm{AD}} \tag{22}$$

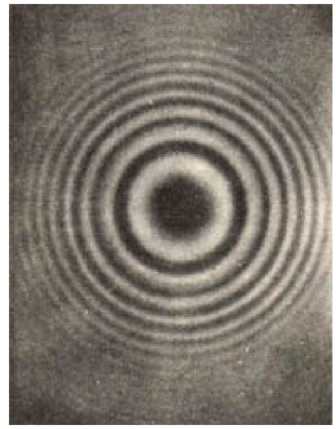
en términos de los parámetros n_2, d, θ_2 y d.

En general cuando la luz es reflejada por una superficie que separa dos medios de índice de refracción n_1, n_2 se puede presentar además un desfase relativo entre el rayo reflejado respecto del rayo incidente, si $n_2 > n_1$ el desfase relativo es de π.

Una burbuja de jabón, por ejemplo, tiene indice de refracción $n_b > 1$, encuentra en este caso las condiciones de interferencia constructiva y destructiva en términos del índice de refracción de la burbuja n_b, el grosor de la burbuja d y el ángulo de transmisión θ_2.

5. **Anillos de Newton**





Cuando se coloca una lente sobre una superficie plana el patrón de interferencia que se observa, de los rayos de luz reflejados, consiste en una serie de anillos como los que se muestran en la figura.

Empleando el resultado del inciso anterior, determina la posición r_m de los máximos y mínimos de intensidad (constructiva, destructiva) en términos del radio de curvatura R de la lente y la longitud de onda λ.