Tarea avanzada 3

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha propuesta de entrega: 9 de Marzo 2016

Nota: Los problemas son complicados y requieren su tiempo. Si sólo van a entregar una parte, entreguen los problemas que alcancen a escribir, pero traten de intentarlos todos. Si van a entregar todo pueden tomarse el tiempo que necesiten.
Suerte :).
P.D. Cualquier duda pueden enviarme un mail a sidd.morales@ciencias.unam.mx.

Problemas de matemáticas

Integrales

Calcule las siguientes integrales.

1. $\int \ln x^3 dx$
2. $\int e^{ax}(\cos bx + \sin bx)dx$
3. $\int x \arctan x dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}dx$
5. $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

Números complejos

Los números complejos forman un campo al igual que $\mathbb{R}$, es decir los números complejos tienen todas las propiedades que tienen los números reales (asociatividad, conmutatividad, inverso aditivo, neutro, inverso multiplicativo, neutro y regla de distribución). Se define cada número complejo z como un par ordenado de números reales: $z = (a, b) = a + ib$, donde $i = \sqrt{-1}$. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = \mathrm{Re}(z)$; el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = \mathrm{Im}(z)$. Luego en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, se definen tres operaciones y la relación de igualdad:

- Suma

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\, b + d)$$
$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- Producto por escalar

$$r(a, b) = (ra,\, rb)$$
$$r(a + ib) = (ra + irb)$$

- Multiplicación

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$
$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

- Igualdad

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \,\&\, b = d$$

A partir de estas operaciones podemos deducir otras como las siguientes:

- Resta.

$$(a,b)-(c,d) = (a-c,\, b-d)$$

- División

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{(ac+bd,\, bc-ad)}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

Representación polar El argumento ϕ y módulo r localizan un punto en un diagrama de Argand; $r(\cos\phi + i\sin\phi)$ $o\, re^{i\phi}$ es la expresión polar del punto. Pues, según la Fórmula de Euler, vemos que:

$$\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi = e^{\mathrm{i}\phi};\ z = re^{i\phi}$$

En esta representación, r es el módulo del número complejo y el ángulo ϕ es el argumento del número complejo.

$$arg\ z = \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) = -\arctan\left(-\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$
$$\cos\phi = \frac{a}{r}\ ,\ \sin\phi = \frac{b}{r}$$

Problemas

1. Demuestre la fórmua de De Moivre, $n \in \mathbb{N}$ (sin usar la fórmula de Euler. Hint: inducción)

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

2. Si z y w son dos números complejos. Demuestre que

$$arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

A todas las soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$, $\{1, w, w^2, w^3, ..., w^{n-1}\}$ donde $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$ se les llama raíces de unidad.

3. Si $w \neq 1$ es raíz n-ésima de la unidad, muestre que
   a) $1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{n-1} = 0$

b) $1 + 2w + 3w^2 + ... + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$

c) Encuentre el valor de $\frac{1}{1-w} + \frac{1}{1-w^2} + ... + \frac{1}{1-w^{n-1}}$

4. Escriba al $\cos(3n)$, $\mathrm{sen}(3n)$, $\cos(5n)$, $sen(5n)$ en términos del $\cos n$ y del $\mathrm{sen}\, n$.
(Tal vez le sea útil la fórmula de De Moivre)

5. Muestre la siguiente identidad

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n} \cdot \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} \cdot ..... \mathrm{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

6. Muestre las siguientes identidades trigonométricas de Lagrange

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin(n\theta) = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$

Identidades trigonométricas

Demuestre las identidades trigonométricas mencionadas en la tarea normal.

Problemas de física

Problemas cortos

1. Se tiene un polígono regular de n, $n \in \mathbb{N}$ lados. En cada vértice se coloca una cargaa pututal de carga q. Encuentre el campo eléctrico en el centro del polígono.
Ahora, una carga es retirada de uno de los vértices. Calcule de nuevo el campo eléctrico en el centro del polígono.

2. Ahora, imagine que los lados de un polígono regular de n lados son alambres conductores que conducen una corriente I. Calcule el campo magnético en el centro del polígono.
Para corroborar el resultado realice el límite $n \to \infty$

3. La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA $= l$, OB $= 10l$. a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa M está situada a una distancia h del punto O b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B

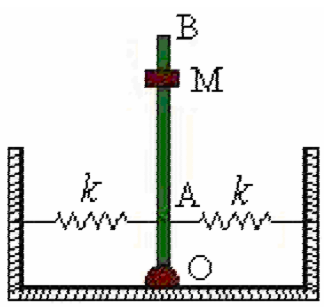

Figura 1: Metrónomo invertido

4. Si la masa de las poleas mostradas en la figura es pequeña y la cuerda inextensible, encontrar la frecuencia natural del sistema.

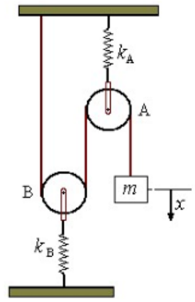

Figura 2:

5. Un mísil balístico es lanzado desde el polo norte, el blanco se encuentra a una latitud Φ (> 0, si está en el polo norte, < 0 en otro caso). ¿A qué ángulo (con respecto a la horizontal) el misil tiene que ser lanzado de forma que tenga la mínima velocidad de lanzamiento?.

6. Suponga que en un instante dado la tierra deja de girar en torno al sol. Calcule el tiempo que tardaría la tierra en colisionar con el sol.
   Se supone al sol lo suficientemente masivo para nunca moverse de su posición.

7. Las masas m_1 y m_2 que están unidas entre sí por una cuerda que pasapor una polea, están situadas en lo más alto de una cuña que tiene forma de dos planos inclinados. La masa de la cuña es M y los ángulos de los planos son α_1 y α_2 respectivamente.

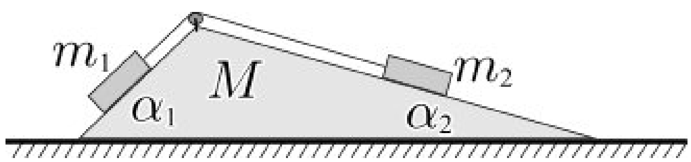

Figura 3:

   Inicialmente el sistema se encuentra en reposo ¿Cuál es la aceleración de la cuña y de las masas m_1 y m_2 cuando el sistema se deja en libertad? ¿Cuál es la condición para que la cuña permanezca en reposo?.
   Se supone que los rozamientos son nulos.

Problema Largo

Este problema trata de las dificultades que existen para detectar ondas gravitacionales generadas por sucesos astronómicos. Parece cierto que la explosión de una supernova distante puede producir fluctuaciones en la intensidad del campo gravitatorio terrestre del orden de $10^{-19}\,Nkg^{-1}$. Un modelo de detector de ondas gravitacionales consiste (Veáse la siguiente figura)

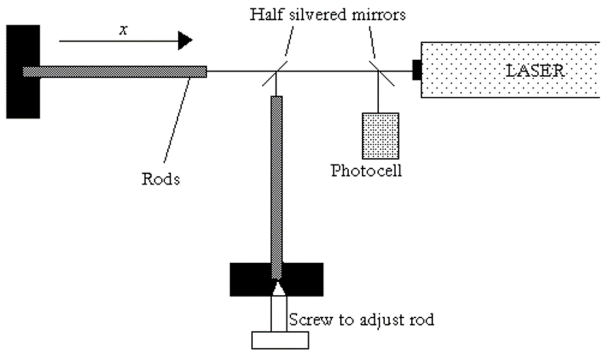

Figura 4:

en dos barras metálicas de 1m de longitud cada una que se mantienen de forma rígida en ángulo recto entre sí. Uno de los extremos de cada barra ha sido pulido y perfectamente aplanado y el otro se mantiene de forma rígida. Las barras reciben un impulso longitudinal breve mediante un dispositivo piezoeléctrico. A consecuencia de ello los extremos libres de las barras oscilan con un desplazamiento longitudinal dado por la ecuación

$$\Delta x_1 = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

donde a, μ y ω son constantes.

1. Si la amplitud del movimiento se reduce un 20 % al cabo de 50 segundos, calcule el valor de μ.
2. La velocidad de la onda longitudinal es $v = \frac{E}{\rho}$. Se debe calcular el valor mínimo de ω. Las barras son de aluminio cuya densidad es 2700 $Kg\ m^{-3}$ y módulo de Young $E = 7.1 \cdot 10^{10} Pa$.
3. Es imposible construir dos barras que tengan exactamente la misma longitud, de modo que la señal de la fotocélula tiene un batido de $5 \cdot 10^{-3} Hz$.¿Cuál es la diferencia de longitud de las barras?
4. Para una barra de longitud l, obtenga una expresión algebraica que relacione un cambio de longitud δl con un cambio en la intensidad del campo gravitatorio Δg. La expresión vendrá dada en función de l y otras constantes del material de la barra. La respuesta del detector a este cambio tiene lugar en la dirección de una de las ruedas.
5. La luz producida por un láser es monocromática y de longitud de onda 656 nm. Si el mínimo desplazamiento en las franjas de interferencia que se puede medir es 10^{-4} de la longitud de onda del láser, calcular el mínimo valor de l para que el dispositivo sea capaz de detectar una variación en g del orden de $10^{-19}\ N * kg^{-1}$.

Problema largo 2

1. Un fotón emitido desde la superficie del Sol (masa M, radio R) es desplazado hacia el rojo. Suponiendo que la energía del fotón es equivalente a una masa en reposo, aplique la teoría gravitacional de Newton para mostrar que la efectiva (o medida) frecuencia del fotón en el infinito es reducida (corrimiento gravitacional al rojo) por el factor
$$1 - \frac{GM}{Rc^2}$$
2. Una reducción de la frecuencia del fotón equivale a un incremento en su periodo, o utilizando el fotón como un reloj estándar, una dilatación del tiempo. Además se puede demostrar que una dilatación del tiempo está siempre acompañada por una contracción en la unidad de longitud por el mismo factor.
Ahora estudiaremos el efecto que esto tiene sobre la propagación de la luz en las proximidades del Sol. Vamos a definir como índice de refracción efectivo n_r en un punto r cercano a la superficie solar, al cociente
$$n_r = \frac{c}{c_r}$$

donde c es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas muy lejos del sol y c_r es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas a una distancia r del centro del Sol.
Demostrar que n_r se puede aproximar a

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2}$$

cuando $\frac{GM}{rc^2}$ es pequeño, siendo α una constante cuyo valor debe de calcular.

3. Utilizando esta expresión de nr , calcule en radianes la deflexión que sufre un rayo de luz respecto de su trayectoria recta cuando pasa por el borde del Sol.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67.10^{-11} Nm^2kg^{-2}$. Masa del Sol, $M = 1,99.10^30kg$; Radio del Sol , $R = 6,95.10^8m$ Velocidad de la luz, $c = 3,00.10^8m/s$