Problemas de relatividad

1 El pión negativo π^- es una partícula inestable con una vida media de 2.60×10^{-8} s (medida en el marco en reposo del pión).
a) Si se obliga al pión a viajar con gran rapidez con respecto a un laboratorio, su vida media medida en el laboratorio es de 4.20×10^{-7} s. Calcule la rapidez del pión expresada como fracción de c.
b) ¿Qué distancia, medida en el laboratorio, recorre el pión durante su vida media?

2 ¿Por qué somos bombardeados por los muones? Los muones son partículas subatómicas inestables que se desintegran para convertirse en electrones con una vida media de 2.2 ms. Se producen cuando los rayos cósmicos bombardean la atmósfera superior aproximadamente a 10 km por arriba de la superficie de la Tierra y viajan con una rapidez muy cercana a la de la luz. El problema que nos interesa es por qué vemos algunos de ellos en la superficie terrestre.
a) ¿Cuál es la distancia máxima que un muón puede viajar durante su vida de 2.2 ms?
b) De acuerdo con su respuesta en el inciso a), parecería que los muones nunca tocan tierra, pero la vida de 2.2 ms se mide en el marco del muón, y los muones viajan muy rápido. A una rapidez de 0.999c, ¿cuál es la vida media de un muón medida por un observador en reposo sobre la Tierra? ¿Qué distancia viajaría el muón en ese tiempo? ¿Explica este resultado por qué encontramos muones en los rayos cósmicos?
c) Desde el punto de vista del muón, su vida sigue siendo de sólo 2.2 ms, de manera que ¿cómo logra llegar al suelo? ¿Cuál es el grosor de la atmósfera de 10 km a través de la cual debe viajar el muón, medida desde la perspectiva de este último? ¿Queda claro ahora cómo el muón logra llegar a tierra?

3 Dígaselo al juez. a) ¿Con qué rapidez debe usted aproximarse a un semáforo en rojo (λ =675 nm) para que éste aparezca amarillo (λ =575 nm)? b) Si usted utilizara esto como excusa para no recibir una infracción por pasarse un semáforo en rojo, ¿qué multa le impondrían por exceso de velocidad? Suponga que la multa es de un dólar por cada kilómetro por hora en exceso del límite señalado de 90 km/h.

4 Creación de una partícula. Dos protones (cada uno con masa en reposo $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg se desplazan inicialmente con la misma rapidez en sentidos opuestos. Los protones continúan existiendo después de una colisión que también produce una partícula η^0, cuya masa en reposo es $m = 9.75 \times 10^{-28}$ kg.
a) Si los dos protones y η^0 se encuentran en reposo después del choque, halle la rapidez inicial de los protones, expresada como fracción de la rapidez de la luz.
b) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón? Exprese su respuesta en MeV
c) ¿Cuál es la energía en reposo de la η^0, expresada en MeV?
d) Analice la relación entre las respuestas a los incisos b) y c).

Aquí les dejo más **material de relatividad**, los siguientes enlaces son de un sitio que contiene explicaciones muy didácticas de la teoría de la relatividad, diagramas de espacio-tiempo, transformaciones de Lorentz, etc.

Revisen principalmente los siguientes temas:

Diagramas de espacio-tiempo:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/6-el-espacio-y-el-tiempo-unificados.html`

Transformaciones de Lorentz:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/7c-las-transformaciones-de-lorentz.html`

Efecto Doppler relativista:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/9b-el-efecto-doppler-relativistico.html`

Dinámica relativista:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/11-dinamica-relativistica.html`

Desintegraciones y colisiones atómicas relativistas:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/fisica-atomica-relativista.html`

Suma de velocidades:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/7b-suma-relativistica-de-velocidades.html`

Cuadrivectores:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/los-4-vectores.html`

Invariantes:
`http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.mx/2009/03/7d-invariantes.html`

Problema 1: El arrastre de un imán que cae

Una discusión clara y detallada discusión sobre corrientes parásitas fue por primera vez provista por el físico británico Sir James H. Jeans (1877-1946) en su célebre libro *The mathematical theory of electricity and magnetism* (1925). El presente problema está basado en electricidad y magnetismo.

James H. Jeans
(1877-1946)

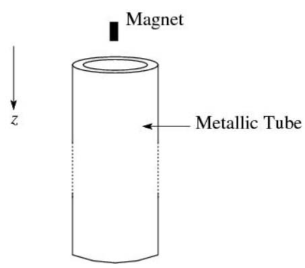

Figura 1:

Un imán pequeño con momento dipolar de magnitud p y masa m a través de un largo tubo metálico no magnético sostenido verticalmente como se muestra en la Figura 1 (no está a escala). En general la caída está gobernada por

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \tag{1}$$

Aquí g es la aceleración debida a la gravedad. Note que el parámetro de amortiguamiento k se debe a la generación de corrientes parásitas en el tubo.

I.1. Obtenga la velocidad terminal del imán. **[0.5 puntos]**

I.2. Obtenga $z(t)$, i.e. la posición del imán al tiempo t. Tome $v(0) = 0$ y $z(0) = 0$. **[1.0 puntos]**

Hemos de intentar entender la dinámica de la caída. Para lograr esto, consideramos en las partes I.3-I.8 un problema simplificado del imán cayendo axialmente hacia un anillo metálico no magnético fijo de radio a, resistencia R e inductancia L como se muestra en la Figura 2. En este problema, hemos de ignorar efectos de radiación.

En nuestro caso es conveniente cambiar las coordenadas de referencia a un sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) como se muestra en la Figura 2 donde el eje z es el eje del anillo, el imán está inicialmente en reposo en el origen y el centro del anillo está a una distancia z_0 del origen. Los ejes cartesianos (x, y, z) también se muestran en la figura. El imán tiene momento dipolar $\vec{p}$ en la dirección z positiva ($\vec{p} = p\hat{k}$) donde $\hat{k}$ es vector unitario en la dirección z. Asumiremos que durante la caída, el momento magnético se mantiene en la misma dirección. La componente axial B_z y la componente radial B_ρ del campo magnético en un punto arbitrario (ρ, φ, z) cuando el imán está en el origen están dadas por

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left[\frac{3z^2}{\rho^2+z^2} - 1\right]$$
$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3p\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío.

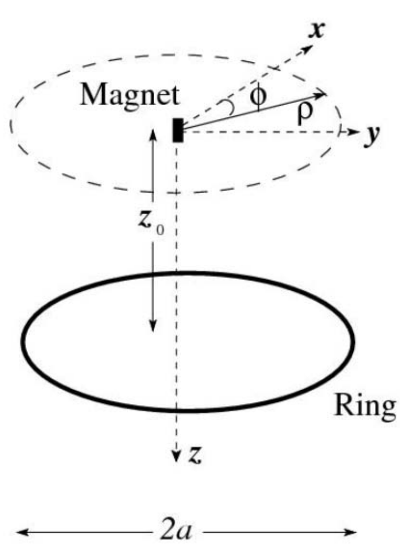

Figura 2:

I.3. Sea v la velocidad instantánea del imán. Obtenga la magnitud de la fem inducida $\mathcal{E}_i$ en el anillo.

[1.5 puntos]

I.4. Esta fem dará lugar a una corriente inducida i en el anillo. Obtenga la magnitud de la fuerza electromagnética instantánea f_{em} en el anillo en términos de i.

[1.0 puntos]

I.5. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en el imán debida a este anillo? **[0.5 puntos]**

I.6. Exprese la fem en el anillo en términos de L, R e i. No resuelva para i. **[0.5 puntos]**

I.7. Conforme el imán cae pierde energía potencial gravitatoria. Identifique las tres principales formas de energía en las cuales la energía potencial gravitatoria es convertida y escriba la expresiones que usaría para calcular cada una de esas tres contribuciones. **[1.0 puntos]**

I.8. ¿El campo magnético del imán realiza algún trabajo en el proceso? **[0.5 puntos]**

A continuación estimaremos el parámetro de amortiguamiento k debido al tubo (vea la Ecuación (1)). Tome un tubo infinitamente largo con radio a, pequeño grosor w, y conductividad eléctrica σ. Para esta y la siguiente parte, tomaremos la inductancia del tubo como despreciable. Es útil que considere al tubo como si estuviera hecho de muchos anillos cada uno con altura $\Delta z'$, radio a, pequeño grosor w y conductividad eléctrica σ (vea la Figura 3). Por simplicidad, los dos extremos del tubo están en $z = -\infty$ y $z = \infty$, respectivamente.

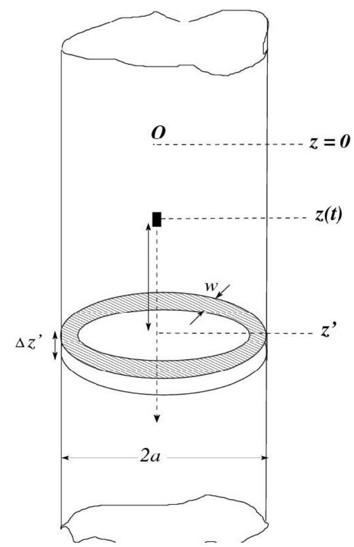

Figura 3:

I.9. Obtenga la resistencia de un anillo individual. **[0.5 puntos]**

I.10. Obtenga el parámetro de amortiguamiento k debido al tubo entero en términos de p, σ y los parámetros geométricos del anillo. Debido a que el anillo es muy delgado, puede tomar al campo magnético como constante a través del grosor del anillo e igual a $B_\rho(a)$. Asuma que en el instante t, el imán tiene una coordenada $z(t)$ y una velocidad instantánea $\dot{z}$. Debe expresar su respuesta en términos de una integral adimensional I que involucre una variable adimensional $u = (z - z')/a$. **[2.0 puntos]**

I.11. Asuma que la constante de amortiguamiento k depende de lo siguiente

$$k = f(\mu_0,\, p,\, R_0,\, a)$$

donde R_0 es la resistencia efectiva para un tubo largo. Use el análisis dimensional para obtener una expresión de k. Tome que la constante adimensional correspondiente sea la unidad. **[1.0 puntos]**

La siguiente integral podría serle útil:

$$\int \frac{u\,du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2}\frac{\left(u^2 + a^2\right)^{1-n}}{1-n} + C \qquad (n > 1)$$