

## P1. Olas de altura en Galicia.

*Olas de casi 13 metros sacuden Galicia / LA VOZ DE GALICIA - 2 de febrero de 2014*

*"El temporal en el mar que provocó la ciclogénesis explosiva Nadja, que se profundizó hasta los 954 milibares, volvió a registrar ayer, por segunda vez en menos de un mes, olas de impresionantes dimensiones, de hasta casi 13 metros de altura significativa. Fue la marca alcanzada a las nueve de la noche en la boya de Estaca de Bares, que superó la del día de Reyes, cuando se rozaron los 12 metros. En la de cabo Silleiro se registraron cerca de 9 metros."*

Antiguamente el oleaje se medía mediante estimaciones visuales, pero hoy en día se puede conocer con exactitud la altura de las olas gracias a los avances de la física y sus aplicaciones.

Para conocer los datos del oleaje en las costas y en las zonas marítimas españolas, contamos con las Redes de Medida de Puertos del Estado, en concreto con la Red costera de boyas, que proporciona datos en la línea de costa, y con la Red de boyas en aguas profundas, que informa del estado mar adentro.

Estas boyas, ancladas en el fondo marino, son verdaderas estaciones meteorológicas sobre la superficie del agua. Proporcionan en tiempo real datos como la velocidad y dirección del viento, la altura de las olas, el período del oleaje, la dirección de la corriente, la temperatura del mar, etc. La Red de aguas profundas en España consta de catorce boyas tipo *Seawatch* y tres boyas de tipo *Wavescan*.

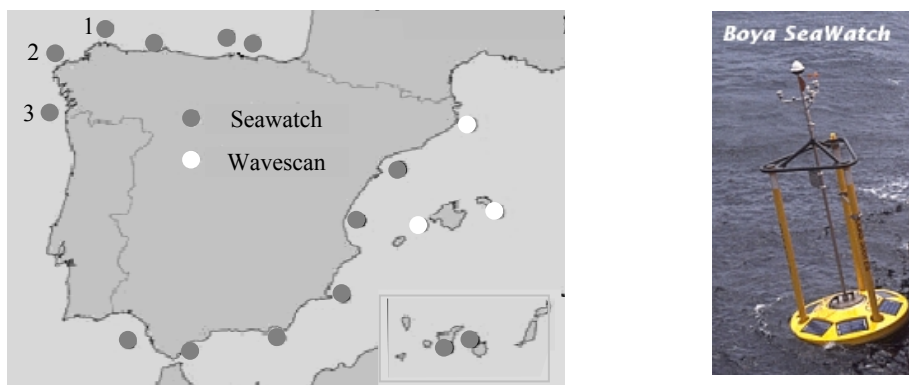


Fig. 1

En la costa gallega hay tres de ellas (figura 1):

- (1) Boya de Estaca de Bares (profundidad del mar: 1800 m)
- (2) Boya de Villano Sisargas (profundidad del mar: 386 m)
- (3) Boya de Cabo Silleiro (profundidad del mar: 323 m)

Las olas son el fenómeno de propagación de ondas superficiales en el agua. Las boyas miden las elevaciones instantáneas de la superficie del mar respecto a su nivel medio. En este problema vamos a estudiar algunos aspectos de olas en aguas profundas de la costa gallega.

Asumiremos, por simplicidad, que las olas antes de “romper” en la costa se comportan como una onda sinusoidal, como la de la figura 2, con una longitud de onda  $\lambda$ , un periodo  $T$  y una amplitud  $A$ . En el fenómeno de las olas, en lugar de la amplitud  $A$ , se acostumbra a utilizar la “altura de la ola”,  $h = 2A$ .

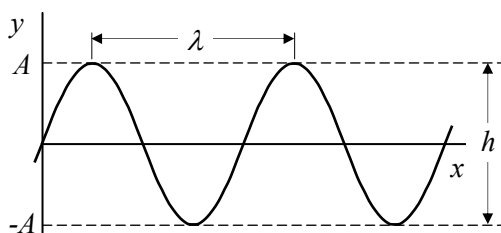


Fig. 2

Si no se tienen en cuenta las “olas de rizado”, de longitudes de onda muy pequeñas (del orden de 15 mm), la velocidad de propagación de las olas depende de su longitud de onda,  $\lambda$ , de la gravedad,  $g$  y de la profundidad del mar,  $H$ , en la forma:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right) \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} \quad (1)$$

En la que  $\tanh$  es la función *tangente hiperbólica*, que se define como

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \begin{cases} \tanh(x > \pi) \approx 1 \\ \tanh(x < \pi/10) \approx x \end{cases} \quad (2)$$

En el fenómeno de propagación de las olas, se habla de aguas profundas o poco profundas (*someras*) cuando se compara la profundidad  $H$  con la longitud de onda,  $\lambda$ . Según esto, teniendo en cuenta (2), se pueden hacer aproximaciones en (1) para obtener la velocidad de propagación en cada uno de estos dos casos.

- Obtenga la expresión de la velocidad de las olas en aguas profundas, en función del periodo  $T$  de las olas.
- ¿Cuál es la velocidad de las olas en aguas someras? ¿Hasta que profundidad es válida esta aproximación?

A la 01:00 h del día 14 de febrero, la boya de Estaca de Bares (<http://cma.puertocoruna.com/>), registró olas de periodo  $T = 8,0$  s y altura  $h = 5,2$  m.

- Calcule la velocidad de las olas, en km/h. Suponga que esta boya se encuentra en aguas profundas.
- Calcule la longitud de onda de las olas,  $\lambda$ . Compruebe que, efectivamente, la boya está en aguas profundas.
- Escriba la ecuación de onda de las olas registradas en la boya de Estaca de Bares,  $y(x, t)$  en función de los valores numéricos de  $T$ ,  $\lambda$  y  $h$ .

La relación entre la velocidad del viento y la altura de las olas depende de muchos factores. La *Escala de Beaufort* es una relación empírica entre la velocidad del viento y un número,  $B$ , que se asigna al estado del mar dependiendo de la altura de las olas. La relación, expresada en unidades del SI, es la siguiente

$$v_{\text{viento}} = 0,836 B^{3/2}$$

En la Tabla I están indicados los números de Beaufort correspondientes a la altura de las olas y la denominación del estado del mar.

Tabla I

$B$	Estado del mar	$h$ (m)
0	Calma	0
1	Rizada	0 a 0,1
2	Marejadilla	0,1 a 0,5
3 a 4	Marejada	0,5 a 1,25
5	Fuerte marejada	1,25 a 2,5
6	Mar gruesa	2,5 a 4
7 a 8	Muy gruesa	4 a 7,5
9 a 10	Arbolada	7,5 a 12,5
11	Montañosa	12,5 a 14
12	Enorme	> 14

- f) Según la noticia de La Voz de Galicia, en la boya de Cabo Silleiro, se registraron olas de unos 9 m. ¿Cuál era aproximadamente la velocidad del viento (en km/h)?

En realidad las boyas no miden directamente la altura de las olas, sino la aceleración de la superficie del agua en su movimiento vertical.

El acelerómetro de la boya de Cabo Silleiro registró, en un momento del temporal, la siguiente aceleración (en unidades del SI):

$$a(t) = -1,23 \cos(0,524 t)$$

- g) ¿Cuál era la altura de las olas en ese momento?
- h) Calcule la energía mecánica del agua por unidad de volumen.

Dato: densidad del agua del mar  $\rho = 1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

### Solución

- a) Cuando  $H > \lambda$ , el argumento de la  $\tanh$  es  $2\pi H / \lambda > 2\pi > \pi$ , de forma que

$$\tanh \frac{2\pi H}{\lambda} \approx 1$$

Por tanto, la velocidad de propagación en aguas profundas es

$$v = \sqrt{\left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)}$$

Teniendo en cuenta que  $\lambda = vT$ , se obtiene

$$\boxed{v = \frac{gT}{2\pi}} \quad (3)$$

Nótese que la velocidad depende de la longitud de onda. Las aguas profundas se comportan como un *medio dispersivo*.

- b) Para que sea aplicable la segunda aproximación de (2) debe cumplirse

$$\frac{2\pi H}{\lambda} < \frac{\pi}{10} \Rightarrow \boxed{H < \frac{\lambda}{20}}$$

Entonces

$$\tanh \frac{2\pi H}{\lambda} \approx \frac{2\pi H}{\lambda} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gH}}$$

Esta velocidad no depende de  $\lambda$ . Las aguas someras se comportan como un medio *no dispersivo*.

- c) Suponiendo aguas profundas, se cumple (3). Sustituyendo los datos se obtiene

$$\boxed{v = 12,5 \text{ m/s} = 45 \text{ km/h}}$$

- d) Como  $\lambda = vT$ , resulta

$$\boxed{\lambda = 100 \text{ m}}$$

La suposición de “aguas profundas” es correcta pues en la boya de Estaca de Bares la profundidad es 1800 m, mucho mayor que  $\lambda$ .

- e) La ecuación de una onda armónica es

$$y(x, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

La altura de las olas es  $h = 5,2 \text{ m}$ , por lo tanto la amplitud es  $A = 2,6 \text{ m}$ . El periodo es  $T = 8 \text{ s}$  y la longitud de onda es  $\lambda = 100 \text{ m}$ , obtenida en el apartado anterior,

La ecuación de onda, expresada en unidades del SI, resulta

$$\boxed{y(x, t) = 2,6 \cos 2\pi \left( \frac{x}{100} - \frac{t}{8} \right)}$$

- f) Una altura de olas de 9 m, según la Tabla I, corresponde a mar arbolada con un número de Beaufort comprendido entre 9 y 10. Haciendo una interpolación lineal, puede tomarse  $B = 9,3$ . Con la expresión del enunciado se obtiene una velocidad del viento

$$v_{\text{viento}} = 23,7 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{v_{\text{viento}} \approx 85 \text{ km/h}}$$

- g) En un movimiento oscilatorio armónico de amplitud  $A$  y frecuencia angular  $\omega = 2\pi/T$ , la aceleración es

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

En nuestro caso

$$a(t) = -1,23 \cos(0,524 t)$$

Por lo tanto, identificando términos,  $\omega^2 A = 1,23 \text{ m/s}^2$  y  $\omega = 0,524 \text{ s}^{-1}$

$$A = \frac{1,23}{0,524^2} = 4,5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{h = 9,0 \text{ m}}$$

- h) Cuando un volumen  $V$  de agua, de masa  $m$ , realiza un movimiento armónico, su energía mecánica es constante e igual a la energía cinética máxima. Su valor es

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho V \omega^2 A^2$$

Donde  $\rho$  es la densidad del agua.

La energía por unidad de volumen (densidad de energía,  $\rho_E$ ) resulta

$$\boxed{\rho_E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2}$$

Con los datos del apartado anterior y la densidad del agua de mar, se obtiene

$$\boxed{\rho_E = 2,9 \times 10^3 \text{ J/m}^3}$$

## P2. Las mareas oceánicas.

### Introducción.

La marea es el movimiento periódico de ascenso y descenso de las aguas del mar, producido por las perturbaciones gravitatorias del Sol y de la Luna en la Tierra. Su frecuencia es de dos veces por día aproximadamente, y su amplitud, que también varía de día a día, depende de la fase de la Luna, siendo máxima con *luna llena* o *luna nueva*. En estos casos, se dice que hay *mareas vivas* (o *sizigias*). Cuando la marea sube y llega a su máximo nivel se dice que se ha alcanzado la *pleamar*; cuando a continuación desciende y llega al mínimo se llama *bajamar*. La *amplitud de marea* es la diferencia entre los niveles de pleamar y bajamar.

Isaac Newton, en 1687, dio la explicación científica de las mareas en su obra “*Principia Mathematica*”, constituyendo un importante éxito de su teoría de la Gravitación, ya que permitió una acertada predicción cualitativa de las mareas en cualquier época del año y en cualquier latitud.

Sin embargo, en el cálculo de la amplitud de marea la teoría newtoniana se queda notablemente corta, pues predice una máxima amplitud del orden de medio metro, muy inferior a los registros experimentales reales. Por ejemplo, en Europa son famosas las mareas en las costas del Canal de la Mancha, en las que la amplitud de marea puede alcanzar los 15 m. En particular, son especialmente espectaculares las mareas en la abadía del Mont Saint Michel. En pleamar es una isla (figura 1) y, debido a la escasa pendiente de la playa, en marea baja el mar se aleja varios kilómetros y la abadía queda “en seco” (figura 2). En España las mayores alturas de marea se registran en el puerto de Pasajes (San Sebastián), donde se superan los 5 m.



Fig. 1



Fig. 2

Por otra parte, las grandes olas rompiendo en la costa son espectaculares, pero sus consecuencias pueden ser catastróficas. Durante el pasado invierno, el norte de España ha sufrido los estragos de sucesivos temporales, siendo el poder destructor de las olas mucho mayor en pleamar, y aun más cuando las mareas son vivas, como ha sucedido en alguno de estos temporales.

El estudio del fenómeno de las mareas es muy complejo. Intervienen muchos parámetros que no pueden contemplarse en el planteamiento newtoniano. Por ejemplo, depende de la forma y características de la costa, de si el mar es interior, de factores climáticos ocasionales, etc. El estudio cuantitativo se realiza considerando las mareas como un fenómeno ondulatorio, en muchos casos resonante. Pero el origen del fenómeno es gravitatorio, y algunos de sus aspectos van a ser tratados en este ejercicio.

### El problema de dos cuerpos que interaccionan gravitatoriamente y orbitan en torno a su centro de masas.

Consideremos dos cuerpos esféricos, de masas  $M_1$  y  $M_2$  que giran en torno a su centro de masas (C.M.) con velocidad angular  $\omega$ . La separación entre los centros de las esferas es  $R$ , y las distancias del C.M. a dichos centros son  $R_1^*$  y  $R_2^*$ , como se muestra en la figura 3. Estas distancias vienen dadas por

$$R_1^* = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R$$

$$R_2^* = \frac{M_1}{M_1 + M_2} R$$

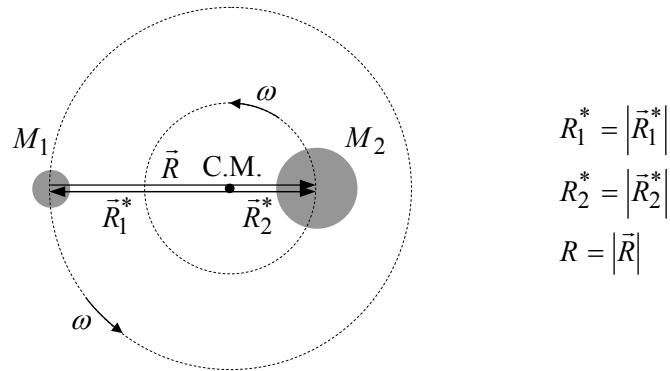


Fig. 3

Supuesto que los dos cuerpos esféricos interaccionan gravitatoriamente,

- Determine la expresión de la velocidad angular,  $\omega$ , con que giran en torno al C.M.
- Si el cuerpo 1 es la Luna y el 2 es la Tierra, con los datos que figuran al final del enunciado, calcule el valor de  $\omega$ .
- La Luna gira en torno a su eje, que es perpendicular al plano de la figura 3, de forma que, vista desde la Tierra, la Luna presenta siempre la misma cara. ¿Cuál es su periodo de rotación,  $T_L$ , expresado en días?

### La generación de las mareas.

Como modelo físico consideraremos una Tierra esférica, de masa  $M_T$ , completamente cubierta por una delgada capa de agua (hidrosfera). Supondremos la existencia de un astro próximo de masa  $M$  (que más adelante identificaremos primero con la Luna y después con el Sol). Ambos cuerpos giran en torno a su C.M. con la velocidad angular  $\omega$  determinada en el apartado (a). De momento, no tendremos en cuenta la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur,  $\omega_T$ .

Empleando la notación que se indica en la figura 4, se puede demostrar que la fuerza que actúa sobre una partícula de fluido de la hidrosfera, de masa  $m$ , viene dada por la expresión<sup>1</sup>

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + G \frac{M m}{R^3} \vec{R} \quad (1)$$

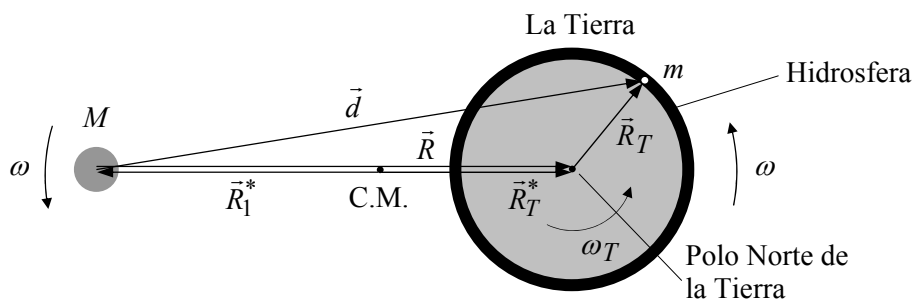


Fig. 4

Los dos primeros términos de (1) corresponden, respectivamente, a la atracción gravitatoria de la propia Tierra y de  $M$  sobre la partícula  $m$ . El tercer término describe el efecto centrífugo producido por la rotación del sistema en torno al C.M.

Como  $R = |\vec{R}|$  y  $d = |\vec{d}|$  son mucho mayores que el radio de la Tierra,  $R_T = |\vec{R}_T|$ , el primer término de (1) es mucho mayor que los otros dos. Si se despreciasen estos dos términos, la expresión (1) se reduciría al “peso” de la partícula  $m$ , radial y uniforme en cualquier punto de la hidrosfera (figura 5). Con esta aproximación, la hidrosfera tendría simetría esférica y ¡no existirían las mareas!

<sup>1</sup> El vector unitario  $\vec{u}$  que define la dirección y sentido de un vector  $\vec{A}$ , frecuentemente se escribe  $\vec{u} = \vec{A}/|\vec{A}| = \vec{A}/A$



En consecuencia, el origen de las mareas radica en los términos segundo y tercero de (1). Llamaremos *fuerza generadora de mareas* (fgm) a la fuerza por unidad de masa correspondiente a estos dos términos:

$$\vec{f} = GM \left( \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right)$$

La fuerza  $\vec{f}$  “tira” de las partículas de la hidrosfera en la forma que, exagerada y aproximadamente, se muestra en la figura 6. Esta distribución de fuerzas provoca una ligera deformación de la hidrosfera, que también se muestra exagerada en la figura 6. Obsérvese que en los puntos A y A' el nivel del agua es mayor que en B y B'. En A y A' habrá *pleamar*, mientras que en B y B' habrá *bajamar*.

Suponga que el astro de masa  $M$  es la Luna, es decir,  $M = M_L$ . Teniendo en cuenta las dimensiones reales del sistema, y haciendo las aproximaciones que crea oportunas,

- d) Determine, en función de  $G$ ,  $M_L$ ,  $R_{LT}$  y  $R_T$ , las expresiones de los módulos de la fgm en los puntos A y B,  $(f_L)_A$  y  $(f_L)_B$ , respectivamente.

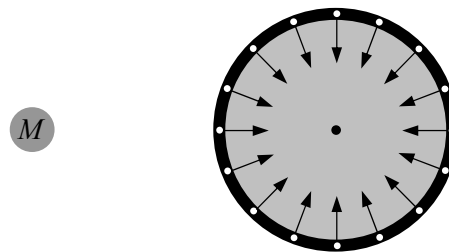


Fig. 5

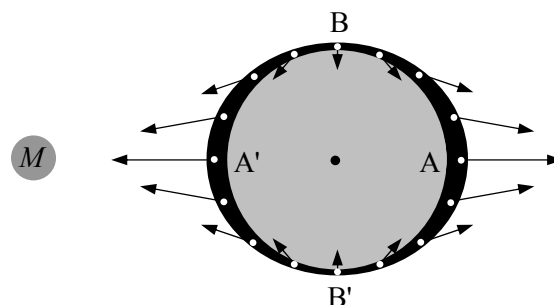


Fig. 6

### Las influencias del Sol y de la Luna.

La masa de la Luna es mucho menor que la del Sol, pero está mucho más cerca de la Tierra. Por ello ambos contribuyen a la formación de las mareas. Esto es un “privilegio” de la Tierra: es el único caso del sistema solar en el que dos astros compiten en las mareas de un tercero.

- e) Suponiendo ahora que el astro de masa  $M$  es el Sol ( $M = M_S$ ), determine la expresión del módulo de la fgm en el punto A,  $(f_S)_A$ , en función de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R_{ST}$  y  $R_T$ . Como en el apartado anterior, haga las aproximaciones que crea oportunas.
- f) Usando los datos del final del enunciado, calcule el valor del cociente  $(f_L)_A / (f_S)_A$ .
- g) En el enunciado se indica que las mareas vivas se producen con luna nueva o luna llena. ¿Por qué?

### El periodo de las mareas.

Vamos a ampliar nuestro modelo, considerando que la Tierra gira en torno a su eje Norte-Sur, perpendicular al plano de la figura 4, con una velocidad angular  $\omega_T$  (periodo  $T_T = 24$  h).

En el punto A de la figura 6, existe marea alta, tal como se ha indicado anteriormente. Al cabo de 12 h, debido a la rotación terrestre, el punto A ocupará el lugar A'. Pero en A' no se habrá alcanzado todavía la pleamar porque durante esas 12 horas el sistema Tierra-Luna habrá girado un cierto ángulo en torno al centro de masas y, por tanto, el punto A' no estará alineado con los centros de la Luna y de la Tierra. Será preciso esperar un poco más de tiempo para que se alineen y se alcance la siguiente marea alta.

- h) Calcule el periodo  $\tau$  de las mareas lunares.

### Datos:

Masas de la Tierra, la Luna y el Sol,  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg,  $M_L = 7,36 \times 10^{22}$  kg,  $M_S = 1,99 \times 10^{30}$  kg. Distancia Luna-Tierra,  $R_{LT} = 3,84 \times 10^8$  m. Distancia Sol-Tierra,  $R_{ST} = 1,50 \times 10^{11}$  m. Radio de la Tierra,  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m. Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>.



### Solución

- a) Consideremos uno de los dos cuerpos de la figura 3, por ejemplo el de masa  $M_2$ . Su centro describe una órbita circular de radio  $R_2^*$  con una velocidad angular constante  $\omega$ , bajo la acción de la fuerza de atracción gravitatoria del astro de masa  $M_1$ . Por tanto

$$G \frac{M_1 M_2}{R^2} = M_2 \omega^2 R_2^* \Rightarrow \omega^2 = G \frac{M_1}{R_2^* R^2}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $R_2^*$ , se obtiene

$$\omega = \left( G \frac{M_1 + M_2}{R^3} \right)^{1/2} \quad (2)$$

- b) En el caso del sistema Tierra-Luna,

$$M_1 \equiv M_L, \quad M_2 \equiv M_T, \quad R \equiv R_{LT}$$

Se obtiene

$$\omega = 2,67 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

- c) Como la Luna vista desde la Tierra presenta siempre la misma cara, la velocidad angular de rotación en torno a su eje tiene que ser la misma que la de rotación del sistema Tierra-Luna en torno al C.M. En consecuencia, el periodo de rotación de la Luna es

$$T_{Luna} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_L = 2,35 \times 10^6 \text{ s} = 27,2 \text{ días}$$

- d) En el sistema Tierra-Luna, la fgm en el punto A de la figura 6 es

$$(\vec{f}_L)_A = GM_L \left( \frac{\vec{R}_{LT}}{R_{LT}^3} - \frac{\vec{d}_A}{d_A^3} \right) \quad (3)$$

Como todos los vectores que aparecen en la expresión (3) tienen la misma dirección, el módulo de la fgm en A es

$$(f_L)_A = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) = GM_L \frac{d_A^2 - R_{LT}^2}{R_{LT}^2 d_A^2} = GM_L \frac{(d_A - R_{LT})(d_A + R_{LT})}{R_{LT}^2 d_A^2}$$

Teniendo en cuenta las dimensiones reales del sistema, tal como sugiere el enunciado,  $R_T \ll R_{LT}$ . Por tanto  $d_A = R_{LT} + R_T \approx R_{LT}$ , por lo que  $d_A + R_{LT} \approx 2R_{LT}$ . Además,  $d_A - R_{LT} = R_T$ . Con todo ello

$$(f_L)_A \approx GM_L \frac{2R_T}{R_{LT}^3} \quad (4)$$

La fgm en el punto B es

$$(\vec{f}_L)_B = GM_L \left( \frac{\vec{R}_{LT}}{R_{LT}^3} - \frac{\vec{d}_B}{d_B^3} \right)$$

Ahora los vectores  $\vec{R}_{LT}$  y  $\vec{d}_B$  no son paralelos, como puede apreciarse en la figura 7. Es preciso determinar las componentes de la  $(\vec{f}_L)_B$  en las direcciones paralela y perpendicular a  $\vec{R}_{LT}$ .

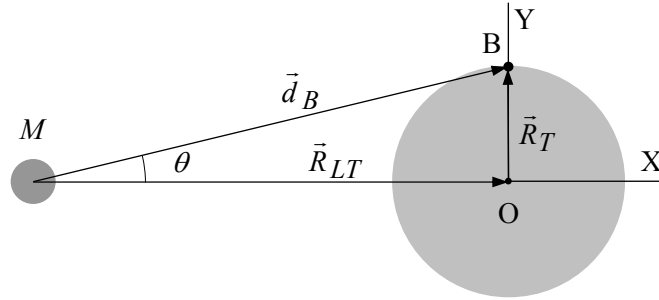


Fig. 7

En la dirección OX

$$\left[ (\vec{f}_L)_B \right]_x = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{(\vec{d}_B)_x}{d_B^3} \right), \quad \text{donde } (\vec{d}_B)_x = d_B \cos \theta \approx d_B$$

$$\left[ (\vec{f}_L)_B \right]_x = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{1}{d_B^2} \right)$$

Como  $d_B \approx R_{LT}$  resulta  $\left[ (\vec{f}_L)_B \right]_x \approx 0$ .

En cuanto a la componente según OY

$$\left[ (\vec{f}_L)_B \right]_y = GM_L \left( 0 - \frac{(\vec{d}_B)_y}{d_B^3} \right)$$

Como  $(\vec{d}_B)_y = d_B \sin \theta \approx d_B \tan \theta = d_B \frac{R_T}{R_{LT}}$

$$\left[ (\vec{f}_L)_B \right]_y = -GM_L \frac{R_T}{R_{LT} d_B^2} \approx -GM_L \frac{R_T}{R_{LT}^3}$$

En definitiva, la  $(\vec{f}_L)_B$  está aproximadamente dirigida hacia el centro de la Tierra, y su módulo es

$$(f_L)_B \approx GM_L \frac{R_T}{R_{LT}^3}$$

e) Considerando ahora sistema Sol-Tierra, la  $(f_S)_A$  vendrá dada por

$$(f_S)_A = GM_S \left( \frac{1}{R_{ST}^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) = GM_S \frac{(d_A - R_{ST})(d_A + R_{ST})}{R_{ST}^2 d_A^2}$$

Los razonamientos para aproximar y escribir  $(f_S)_A$  en función de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R_{ST}$  y  $R_T$  son idénticos a los del apartado (d). Basta cambiar el subíndice L por S, por lo que se tiene

$$(f_S)_A \approx GM_S \frac{2R_T}{R_{ST}^3} \quad (5)$$

f) Dividiendo (4) y (5) se obtiene el cociente buscado

$$\frac{(f_L)_A}{(f_S)_A} \approx \frac{M_L}{M_S} \left( \frac{R_{ST}}{R_{LT}} \right)^3$$

Con los datos numéricos del enunciado,

$$\frac{(f_L)_A}{(f_S)_A} = 2,2$$

La influencia de la Luna es aproximadamente el doble que la del Sol, pero ambas son del mismo orden de magnitud.

- g) Lógicamente, cuando el Sol, la Luna y la Tierra estén alineados, las fgm tienen el mismo sentido en A, y sus módulos se suman. Por tanto, las correspondientes mareas son las más intensas (vivas). Esto ocurre sólo cuando hay luna llena o luna nueva.

Las mareas menos intensas ocurren cuando la pleamar lunar coincide con la bajamar solar, es decir, cuando las visuales desde la Tierra al Sol y a la Luna formen un ángulo de  $90^\circ$ . Las correspondientes mareas se denominan *muertas o de cuadratura* y las fases de la luna correspondientes son *cuarto creciente o cuarto menguante*.

- h) Para que en el punto A (figura 7a) vuelva a haber pleamar, es necesario que este punto esté nuevamente alineado con los centros de la Luna y de la Tierra. Podría pensarse que el tiempo que transcurre entre dos pleamares consecutivas es de 12 h, pues en este tiempo el punto A alcanza la posición A', pero será preciso esperar un poco más porque, mientras tanto, la Luna ha seguido girando en torno al C.M. Para que vuelvan a estar alineados, la Tierra tiene que haber girado un ángulo  $\pi + \varphi$ , como se indica en la figura 7b, donde  $\varphi$  es el ángulo girado por la Luna durante el mismo tiempo,  $\tau$ , hasta el nuevo alineamiento. Si  $\omega_T$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, se cumple

$$\pi + \varphi = \omega_T \tau$$

$$\varphi = \omega \tau$$

Eliminando  $\varphi$  entre estas dos ecuaciones y despejando  $\tau$ , se obtiene

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_T - \omega}$$

Como  $\omega = 2,67 \times 10^{-6}$  rad/s y  $\omega_T = 2\pi / (24 \text{ h}) = 7,27 \times 10^{-5}$  rad/s, resulta finalmente que el periodo de las mareas es

$$\tau = 4,48 \times 10^4 \text{ s} = 12 \text{ h } 27 \text{ min}$$

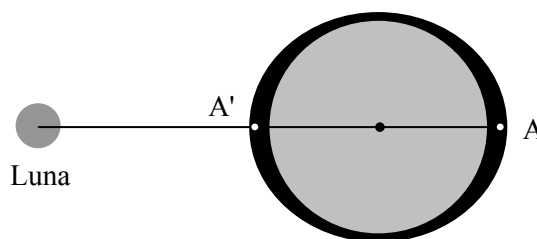


Fig. 7a

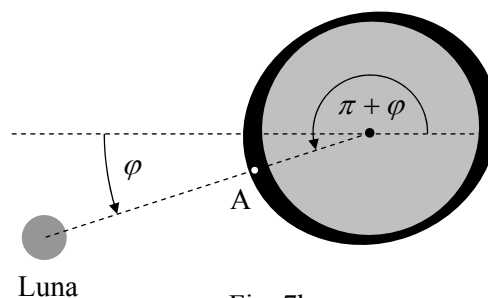


Fig. 7b

## Apéndice

La deducción de la expresión (1) está fuera del contexto “olímpico”. No obstante, merece ser incorporada a la solución de este ejercicio.

La ecuación del movimiento de una masa  $m$  sometida a una fuerza de ligadura  $\vec{F}_l$  (reacción normal de empuje hidrostático) y a las fuerzas gravitatorias de un astro de masa  $M$  y de la Tierra es

$$-G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{Mm}{d^3} \vec{d} + \vec{F}_l = m \vec{a} \quad (4)$$

En la que  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula, referida a un sistema de referencia inercial centrado en el C.M. y no representado en la figura 8.

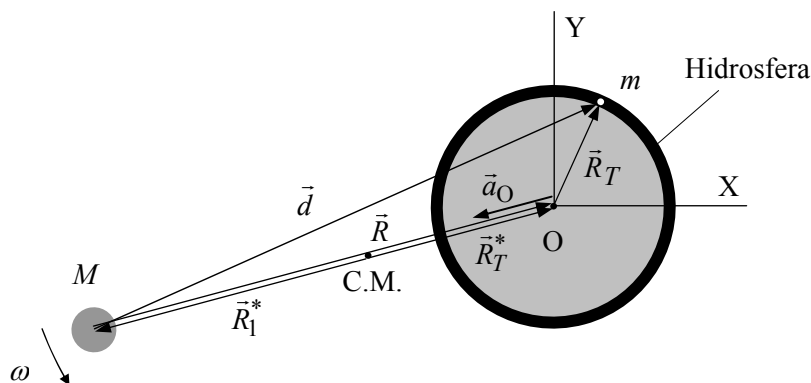


Fig. 8

Consideraremos también otro sistema de referencia OXY, con origen O en el centro de la Tierra, que describe una trayectoria circular de radio  $R_T^*$ , pero cuyos ejes mantienen siempre su orientación en el espacio. Este sistema es no inercial, pues su origen está acelerado.

La relación general entre las aceleraciones referidas a dos sistemas, uno inercial y otro no inercial, es

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

Donde

$\vec{a}_0$  : aceleración del origen del sistema de referencia no inercial (N.I.).

$\vec{\Omega}$  : velocidad angular de rotación del sistema N.I..

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$  : aceleración de Coriolis. ( $\vec{v}'$  es la velocidad de la partícula respecto al sistema N.I.)

$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}')$  : aceleración centrípeta.

En el caso que nos ocupa,

- La partícula está en reposo en el sistema N.I.:  $\vec{a}' = 0$  y  $\vec{v}' = 0$ .
- El sistema N.I. no es giratorio:  $\dot{\vec{\Omega}} = 0$  y  $\vec{\Omega} = 0$ .
- El centro O del sistema describe una circunferencia de radio  $\vec{R}_T^*$  con una velocidad angular  $\omega$ :

$$\vec{a}_0 = -\omega^2 \vec{R}_T^*$$

En este caso, la expresión (4) se reduce a

$$-G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + \vec{F}_l = -m \omega^2 \vec{R}_T^*$$

O lo que es lo mismo,

$$\vec{F}_l + \left( -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + m \omega^2 \vec{R}_T^* \right) = \vec{0}$$

La fuerza  $\vec{F}_m$  que, “tira” de  $m$ , y que está equilibrada con la de ligadura, es

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + m \omega^2 \vec{R}_T^* \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{R}_T^* = \frac{M}{M + M_T} \vec{R} \quad \text{y} \quad \omega^2 = G \frac{M + M_T}{R^3}$$

y sustituyendo en (5), resulta finalmente la expresión (1) del enunciado.

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R} - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + G \frac{M m}{R^3} \vec{R}$$

### P3. ¡Y se hizo la luz!

La energía eléctrica empezó a utilizarse a partir del descubrimiento por Michael Faraday de la ley de inducción electromagnética en 1833, aunque en aquel momento no podía sospecharse la enorme trascendencia del descubrimiento. En menos de medio siglo se desarrollaron las tecnologías para la producción y aprovechamiento de la energía eléctrica.

En las centrales hidroeléctricas se genera esta energía mediante un salto de agua, es decir transformando en eléctrica la energía potencial gravitatoria del agua. La primera central de este tipo funcionó en Wisconsin (EEUU) en el año 1882. En China se ha puesto recientemente en marcha la central hidroeléctrica más grande del mundo (presa de las Tres Gargantas), con una potencia de 22,5 GW. En Galicia puede citarse la central de San Esteban, en el río Sil, la más potente de Europa cuando fue inaugurada en 1956, con 0,26 GW. La figura 1 muestra las partes principales de una central hidroeléctrica.

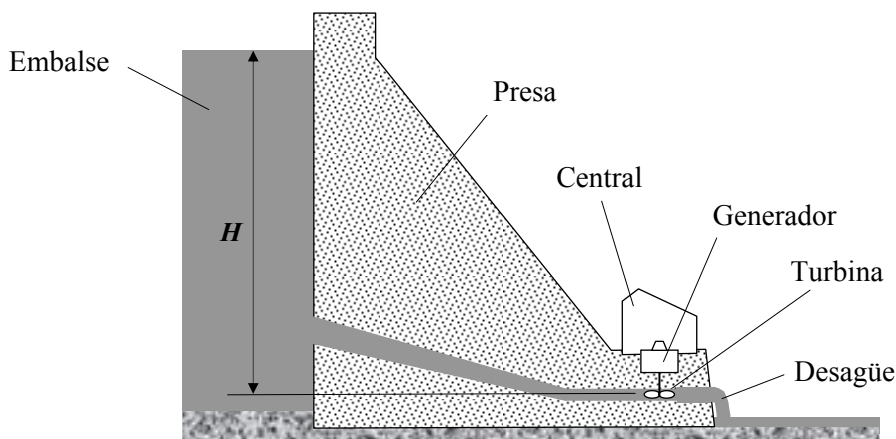


Fig. 1

La energía eléctrica ha sustituido en muchos casos a la térmica (máquinas de vapor) en la industria, y la tendencia actual es electrificar el transporte de mercancías (ferrocarril) y pasajeros. El primer motor eléctrico de potencia apreciable fue inventado por Tesla en 1888, pasando así la energía eléctrica a ser protagonista de la segunda revolución industrial.

También es bien conocido el invento de la lámpara de incandescencia (patentada por Edison en 1879). En la década siguiente se inició el alumbrado público mediante energía eléctrica en diversas ciudades norteamericanas y europeas, extendiéndose rápidamente a las viviendas. Quizá por ello el invento de la bombilla eléctrica se considera uno de los más trascendentales del siglo XIX. Aunque las bombillas tradicionales han sido sustituidas por fuentes de luz de mayor rendimiento energético (bajo consumo), bien merece nuestra atención la lámpara de incandescencia, como la vieja bombilla de la figura 2.



Fig. 2

En este problema se plantean algunas cuestiones relacionadas con la energía eléctrica, su producción y sus aplicaciones.

Considere una central hidroeléctrica de desnivel  $H$ , entre el nivel del embalse y la salida de las turbinas. La velocidad del agua, tanto antes del salto como después de atravesar la turbina, en el desagüe, es prácticamente nula. El caudal de agua (volumen por unidad de tiempo) que alimenta la turbina es  $C$ . La densidad del agua es  $d$ .

- a) Suponiendo que el rendimiento energético<sup>1</sup> de la central es  $\eta$ , determine la potencia eléctrica que produce,  $P_e$ .

<sup>1</sup> Se define rendimiento energético como la relación entre la cantidad de energía útil resultante de un proceso y la cantidad aportada al mismo.

Los generadores de las centrales hidroeléctricas son sistemas muy complejos. En esencia, la rotación del generador, accionado por la turbina, produce un campo magnético giratorio que induce corriente eléctrica en uno o varios conjuntos de espiras en reposo.

Consideremos, como modelo muy simplificado, una bobina fija de  $N$  espiras de área  $A$ , cada una, en presencia de un campo magnético uniforme de intensidad  $B$  que gira con velocidad angular  $\omega$ , como se muestra en la figura 3.

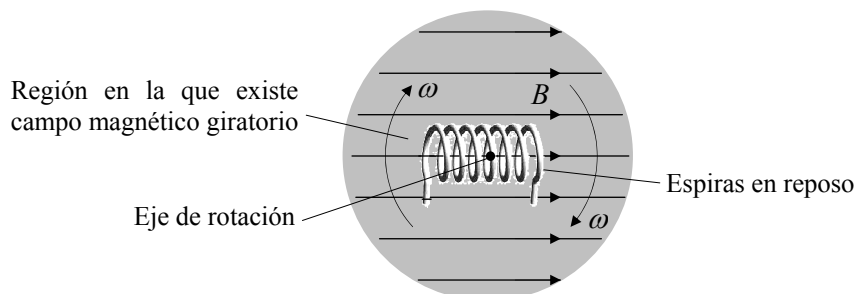


Fig. 3

- b) Determine el flujo magnético que atraviesa la bobina,  $\Phi$ , y la fuerza electromotriz inducida entre sus bornes,  $\mathcal{E}$ .

El surtidor de una fuente pública expulsa un chorro vertical de agua mediante una bomba impulsora que trabaja en circuito cerrado. La bomba eleva un caudal  $C' = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  hasta una altura  $h = 5,0 \text{ m}$  respecto a la superficie libre del agua, con un rendimiento de bombeo  $\eta' = 0,8$ . La densidad del agua es  $d = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

- c) Determine y calcule la potencia consumida por el motor eléctrico de la bomba.

El motor de la bomba consume la potencia correspondiente a una parte  $\Delta H$  del desnivel  $H$  de la central que le suministra la electricidad. Las características de la central<sup>2</sup> son: altura de caída del agua  $H = 902 \text{ m}$ , caudal  $C = 2,59 \times 10^{-1} \text{ m}^3/\text{s}$  y rendimiento  $\eta = 0,87$ .

- d) Determine y calcule  $\Delta H$ .

El filamento de una bombilla de incandescencia es un fino hilo cilíndrico de Wolframio enrollado en hélice. Cuando se alimenta con una tensión  $V$ , su resistencia eléctrica a la temperatura de trabajo es  $R$ .

Si el filamento incandescente se comportase como un  *cuerpo negro* , la potencia radiante emitida vendría dada por la ley de Stefan-Boltzmann:  $P_n = \sigma ST^4$ , donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann,  $S$  es el área de la superficie total emisora, y  $T$  su temperatura absoluta. En la práctica, dependiendo del material y de la temperatura, la potencia radiante emitida por el filamento,  $P_f$ , es inferior a  $P_n$  en un factor  $e < 1$ , llamado *emisividad*, es decir la potencia real emitida es  $P_f = e\sigma ST^4$ . Asuma que la potencia eléctrica que consume la bombilla,  $P_c$ , es igual a la que emite,  $P_f$ .

- e) Determine las expresiones del radio,  $r$ , y de la longitud total,  $l$ , del filamento de una bombilla, en función de  $P_c$ ,  $V$ ,  $e$ ,  $\sigma$ ,  $T$  y de la resistividad<sup>3</sup> del material,  $\rho$ , a la temperatura de trabajo.
- f) Calcule los valores numéricos de  $r$  y de  $l$  del filamento de una bombilla de  $P_c = 60 \text{ W}$  y  $V = 220 \text{ V}$ .

Datos:  $T = 2500 \text{ K}$ ;  $\rho = 7,4 \times 10^{-7} \text{ } \Omega \text{ m}$ ;  $e = 0,4$ ;  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

<sup>2</sup> Central hidroeléctrica de Ip, en Canfranc (Huesca), de 2 MW de potencia. El agua desciende por una tubería de presión desde un lago (*ibón* de Ip), mucho más elevado que la central.

<sup>3</sup> La relación entre la resistencia  $R$  de un conductor cilíndrico y la resistividad  $\rho$  del material de que está construido es  $R = \rho l/a$ , donde  $l$  es la longitud del cilindro y  $a$  es el área de su sección circular.



## Solución

- a) Supongamos un elemento de masa de agua  $\Delta m$ , inicialmente en reposo, que desciende una altura  $H$  desde la superficie libre del embalse. Idealmente, toda la energía potencial gravitatoria perdida por este  $\Delta m$ , se transforma en energía eléctrica, ya que su energía cinética final es prácticamente nula. El proceso de conversión se realiza en el generador, movido por la turbina. Es decir, se produce una energía eléctrica

$$\Delta E = \Delta m g H = d \Delta V g H$$

Donde  $d$  es la densidad del agua y  $\Delta V$  es el volumen que ocupa  $\Delta m$ . Para obtener la energía producida por unidad de tiempo (potencia teórica,  $P_t$ ) basta dividir por el tiempo  $\Delta t$  que tarda el volumen  $\Delta V$  en atravesar una sección transversal de la corriente

$$P_t = \frac{\Delta E}{\Delta t} = d g H \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Como  $\Delta V / \Delta t$  es el caudal de agua que alimenta la central,  $C$ , queda  $P_t = d g H C$ . Teniendo en cuenta el rendimiento de la central, la potencia eléctrica  $P_e$  que produce es, finalmente

$$\boxed{P_e = \eta d g H C} \quad (1)$$

- b) De acuerdo con el sencillo modelo que describe el enunciado, el flujo del campo magnético uniforme,  $B$ , que gira con velocidad angular  $\omega$ , y que atraviesa un conjunto de  $N$  espiras de área  $A$  es

$$\boxed{\Phi = N A B \cos \omega t}$$

En virtud de Faraday, la fem inducida viene dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = N A B \omega \sin \omega t}$$

- c) El bombeo de un caudal  $C'$  hasta una altura  $h$  requiere el consumo de una potencia eléctrica  $P'$ . Este proceso es el inverso al *turbinado* de un caudal  $C$  de agua para producir energía eléctrica, estudiado en el apartado (a). Por tanto, teniendo en cuenta el rendimiento del proceso, puede escribirse

$$\boxed{P' = \frac{d g h C'}{\eta'}} \Rightarrow \boxed{P' = 123 \text{ W}} \quad (2)$$

- d) Una parte de la potencia eléctrica generada por la central,  $\Delta P_e$ , tiene que destinarse a la alimentación del motor de la bomba de la fuente, es decir

$$\Delta P_e = P' \quad (3)$$

Por otra parte, a  $\Delta P_e$  le corresponde una altura  $\Delta H$  que se obtiene a partir de (1)

$$\Delta P_e = \eta d g \Delta H C \quad (4)$$

Teniendo en cuenta (2), (3) y (4) se tiene

$$d g h C' = \eta \eta' d g \Delta H C$$

De donde la fracción que se pide y su valor numérico son

$$\boxed{\Delta H = \frac{1}{\eta \eta'} \frac{C'}{C} h} \Rightarrow \boxed{\Delta H = 5,5 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

- e) Según el enunciado, la potencia emitida por la bombilla es

$$P_f = e\sigma ST^4$$

donde  $S$  es la superficie total emisora, es decir la superficie lateral de un cilindro de longitud  $l$  y radio  $r$ .

$$S = 2\pi rl \Rightarrow P_f = 2\pi e\sigma r l T^4$$

Igualando la potencia emitida a la consumida,  $P_c$ , se obtiene

$$l = \frac{P_c}{2\pi e\sigma r T^4} \quad (5)$$

Por otra parte, la potencia eléctrica consumida por una resistencia  $R$  es

$$P_c = \frac{V^2}{R}$$

con  $R = \rho \frac{l}{\pi r^2} \Rightarrow P_c = \pi \frac{r^2 V^2}{\rho l}$

Teniendo en cuenta (5)

$$P_c = 2\pi^2 \frac{e\sigma r^3 V^2 T^4}{\rho P_c} \Rightarrow r = \left( \frac{\rho P_c^2}{2\pi^2 e\sigma V^2 T^4} \right)^{1/3}$$

Sustituyendo en (5) se obtiene la longitud del hilo

$$l = \left( \frac{P_c V^2}{4\pi \rho e^2 \sigma^2 T^8} \right)^{1/3}$$

- f) Con los valores numéricos del enunciado

$$r = 15 \mu\text{m}$$

$$l = 0,74 \text{ m}$$