Olimpiadi Svizzere di Fisica

Secondo Turno

Lugano, 17 gennaio 2018

Prima parte	:	**Multiple Choice – 22 domande**
Seconda parte	:	**Problemi – 3 domande**
Materiale autorizzato	:	Calcolatrice non programmabile Materiale per scrivere e disegnare

Buon lavoro !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung und Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Quantum Science and Technology
SISF (BASF, Novartis, Roche, Syngenta (Basel))
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2{\cdot}s^4{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-3}}$
Costante di Planck	h	$=$	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$
Carica elementare	e	$=$	$1.602\,176\,565\,(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A{\cdot}s}$
Costante gravitazionale	G	$=$	$6.673\,84\,(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	$=$	$9.81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,141\,29\,(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,8\,(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$=$	$5.670\,373\,(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$
Massa dell'elettrone	m_e	$=$	$9.109\,382\,6\,(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protone	m_p	$=$	$1.672\,621\,71\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutrone	m_n	$=$	$1.674\,927\,28\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Domande a risposta multipla: foglio risposte

Durata: 60 minuti
Punteggio: 22 punti (1 punto per ogni risposta corretta)
Riportate le vostre risposte nelle caselle previste su questa pagina.
Ciascuna domanda ammette una sola risposta corretta

Cognome :

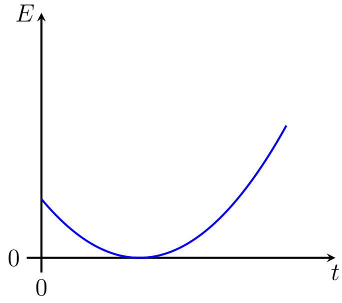
Nome :

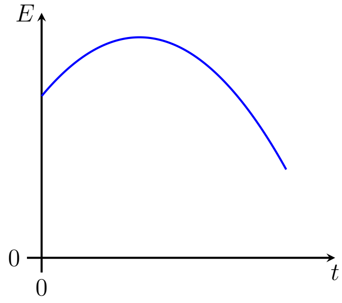
Totale :

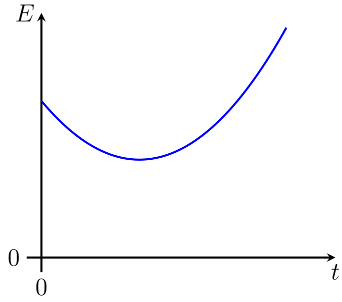
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Domanda 1	☐	☐	☐	☐		
Domanda 2	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 3	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 4	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 5	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 6	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 7	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 8	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 9	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 10	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 11	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 12	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 13	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 14	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 15	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 16	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 17	☐	☐	☐	☐		
Domanda 18	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 19	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 20	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 21	☐	☐	☐	☐		
Domanda 22	☐	☐	☐	☐	☐	☐

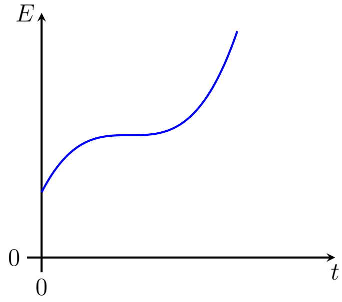
Domanda 1

Lanciamo una palla verticalmente verso l'alto. Quale grafico rappresenta meglio l'evoluzione dell'energia cinetica della palla nel corso del tempo?

a) 

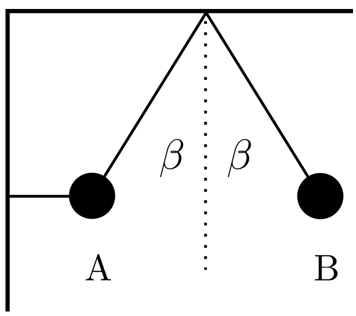
c) 

b) 

d) 

Domanda 2

Una palla è tenuta a riposo nella posizione A da due corde che sono molto leggere. Tagliamo la corda orizzontale, in modo che la palla oscilla come un pendolo. La posizione B rappresenta la distanza massima raggiunta da questa palla, opposta al punto A.



Qual'è la relazione tra la forza di tensione nella corda del pendolo nella posizione A, prima di tagliare la corda orizzontale, e quella nella posizione B ?

a) 1

b) $1/\cos^2(\beta)$

c) 2

d) $\tan(\beta)$

e) $1/\sin(\beta)$

Domanda 3

Un blocco di massa $m = 10\,\text{kg}$ è posto su un piano inclinato con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale. Questo blocco viene lanciato verso la cima del piano con una velocità iniziale $v = 14\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$. La forza di attrito risultante è di 20 $20\,\text{N}$. Dopo quanto tempo il blocco tornerà alla sua posizione iniziale?

a) $2\,\text{s}$
b) $3\,\text{s}$
c) $5\,\text{s}$
d) $8\,\text{s}$
e) $13\,\text{s}$
f) $21\,\text{s}$

Domanda 4

Consideriamo una velocità v, una massa M e una lunghezza L. Le unità $v^\alpha M^\beta L^\gamma$ sono quelle di una pressione per che valori degli esponenti?

a) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -4$
b) $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 0$
c) $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 3$
d) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -2$
e) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 3$
f) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -3$

Domanda 5

Due biglie di massa m et $2m$ subiscono una collisione elastica. Prima della collisione, la biglia di massa $2m$ è a riposo, mentre la biglia di massa m si sposta verso destra con una velocità v. Quali sono le velocità dopo la collisione?

a) $v_m = -v, \quad v_{2m} = 0$
b) $v_m = -v/3, \quad v_{2m} = 2v/3$
c) $v_m = -v/2, \quad v_{2m} = v/2$
d) $v_m = v/3, \quad v_{2m} = 4v/3$
e) $v_m = -v/3, \quad v_{2m} = v/3$

Domanda 6

Ogni primo mercoledì di febbraio in Svizzera viene effettuato un test di allarme in tutto il paese. L'allarme dell'acqua è consiste per esempio da una successione di 12 suoni da 20 secondi, emessi ad una frequenza di $200\,\text{Hz}$. Un automobilista alla guida sente questo allarme, ma a una frequenza di $215\,\text{Hz}$. A quale velocità si muove l'automobilista? Consideriamo la velocità del suono $340\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$.

a) $23\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$
b) $38\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$
c) $51\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$
d) $85\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$
e) $92\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$
f) $117\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$

Domanda 7

Possediamo tre blocchi aventi ciascuno una massa di 100 g: un blocco di ferro (calore specifico $c_{\text{Fe}} = 460\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$), un blocco di alluminio (calore specifico $c_{\text{Al}} = 870\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$) e un blocco in cartone (calore specifico $c_{\text{c}} = 1340\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$). Questi tre blocchi hanno una temperatura iniziale di 20 °C. Ora li mettiamo in un frigorifero avente una temperatura di 3 °C per 12 h. Cosa possiamo dire sulla relazione tra la temperatura dei blocchi?

a) $T_{\text{Fe}} < T_{\text{Al}} < T_{\text{c}}$

b) $T_{\text{Fe}} > T_{\text{Al}} > T_{\text{c}}$

c) $T_{\text{Fe}} = T_{\text{Al}} > T_{\text{c}}$

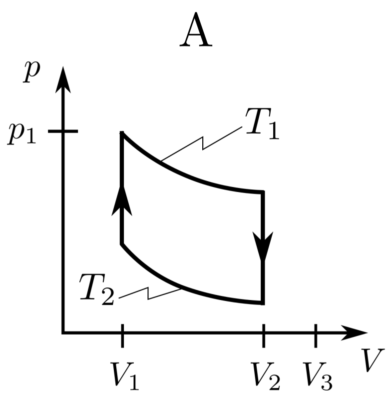
d) $T_{\text{Fe}} = T_{\text{Al}} < T_{\text{c}}$

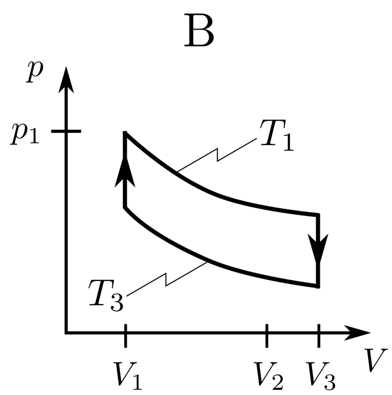
e) $T_{\text{Fe}} = T_{\text{Al}} = T_{\text{c}}$

f) Nessuna delle risposte precedenti.

Domanda 8

Due macchine termiche A e B hanno dei cicli p–V come indicato negli schemi sottostanti. Entrambe le macchine lavorano con l'azoto come gas (che è considerato un gas perfetto).





Quale affermazione è falsa?

a) Il rendimento della macchina A è inferiore al rendimento della macchina B.

b) Le due macchine lavorano la stessa quantità (mole) di azoto.

c) T_2 è inferiore a T_3.

d) Durante le trasformazioni isotermiche, del calore viene scambiato con l'esterno.

e) Durante le trasformazioni isocore, non viene eseguito alcun lavoro.

Domanda 9

Per un gas perfetto, quale espressione vale

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \quad ?$$

a) 2

b) 0

c) -1

d) nR

e) nRT

f) p

Domanda 10

Considera due stelle A e B. Il raggio della stella A è il doppio di quello della stella B. Inoltre, la temperatura sulla superficie della stella A è anche il doppio della temperatura sulla superficie della stella B. Qual è il rapporto P_A/P_B tra le potenze totali della radiazione di A e B?

a) 4
b) 8
c) 16
d) 32
e) 64

Domanda 11

Nel 1883 l'esplosione del vulcano Krakatoa (Indonesia) fu così grande che fu possibile rilevare l'onda d'urto in tutto il pianeta! Dopo quanti secondi un abitante di Bogotà, agli antipodi dell'Indonesia, ha "sentito" l'eruzione?

a) $6\,\mathrm{s}$
b) $60\,\mathrm{s}$
c) $6 \times 10^2\,\mathrm{s}$
d) $6 \times 10^3\,\mathrm{s}$
e) $6 \times 10^4\,\mathrm{s}$
f) $6 \times 10^5\,\mathrm{s}$

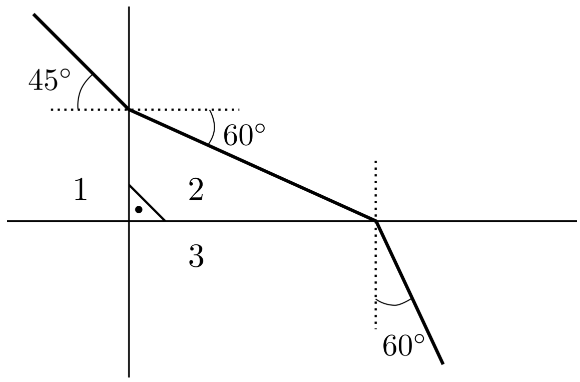
Domanda 12

Due corde di pianoforte identiche, di lunghezza L, sono accordate a 440 Hz. Riduciamo leggermente la lunghezza di una corda, del 0.5%, ma manteniamo la sua tensione iniziale. Eccitiamo le due corde alla loro frequenza fondamentale. Qual' è la frequenza di battimento?

a) 5.9 Hz
b) 2.2 Hz
c) 1.0 Hz
d) 441 Hz
e) 220.5 Hz
f) Il n'y a pas de battements.

Domanda 13

L'indice di rifrazione del mezzo 1 è $n_1 = 1.0$. Qual'è l'indice di rifrazione n_3 del mezzo 3?



a) $n_3 \approx 1.41$
b) $n_3 \approx 0.82$
c) $n_3 = 0.5$
d) $n_3 \approx 0.47$
e) $n_3 \approx 0.16$

Domanda 14

Un fascio parallelo raggiunge una lente convessa avente una distanza focale di 15 cm. A quale distanza da questa prima lente bisogna posizionare una seconda lente con distanza focale 5 cm affinché i raggi risultanti siano di nuovo paralleli?

a) 3.75 cm
b) 10 cm
c) 15 cm
d) 20 cm
e) Non esiste nessuna distanza del genere.

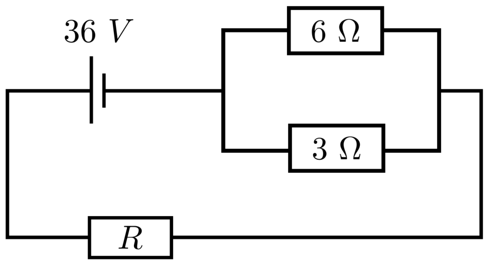
Domanda 15

Dopo 168 s l'attività di un elemento radioattivo è solo 1/8 del suo valore iniziale. Quel'è il tempo di dimezzamento di questo elemento?

a) 10.5 s
b) 28 s
c) 42 s
d) 56 s
e) 80.79 s
f) 84 s

Domanda 16

Si consideri il circuito seguente:



La corrente totale nel circuito è di 3 A. La resistenza interna della sorgente di tensione è considerata trascurabile. La resistenza R è:

a) 3 Ω
b) 4 Ω
c) 9 Ω
d) 10 Ω
e) 18 Ω

Domanda 17

Su due lampadine A e B si trovano le indicazioni 6 V/0.3 A, rispettivamente 60 W/230 V. Le connettiamo in serie a una sorgente di tensione 230 V. Che cosa succede?

a) Le due lampadine si illuminano.
b) Solo la lampadina A si illumina.
c) Solo la lampadina B si illumina.
d) A si illumina per un piccolo istante, poi le due lampadine si spengono.

Domanda 18

Un condensatore da $3.0\,\mu$F è collegato in serie con uno da $6.0\,\mu$F. Se si applica una differenza di potenziale di $300\,$V al blocco formato dai due condensatori, qual è l'energia totale immagazzinata?

a) $0.09\,$J
b) $0.18\,$J
c) $0.27\,$J
d) $0.41\,$J
e) $0.81\,$J

Domanda 19

Un elettrone inizialmente a riposo viene accelerato ad una distanza d da una tensione elettrica di U. La sua velocità finale è v. Ripetiamo l'esperimento, ma questa volta con una tensione di $4U$. Qual' è la nuova velocità finale dell'elettrone?

a) v
b) $\sqrt{2}v$
c) $2v$
d) $4v$
e) $8v$
f) $16v$

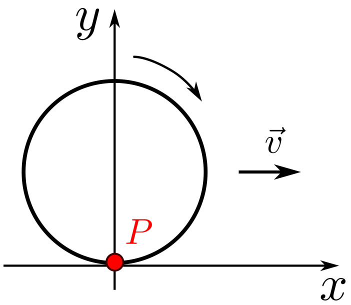
Domanda 20

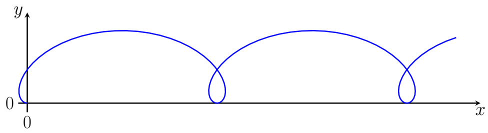
Una massa puntiforme m di carica q si muove in un campo magnetico $\vec{B}_1$, con una quantità di moto $\vec{p}_1$ perpendicolare al campo magnetico. Descrive quindi un cerchio di raggio r_1. Una seconda massa puntiforme m della stessa carica q si posiziona dentro un altro campo magnetico $\vec{B}_2$, ma questa volta con una quantità di moto $\vec{p}_2 = 3\vec{p}_1$ (e quindi abbiamo $\vec{p}_2 \perp \vec{B}_2$). Quale dovrebbe essere la normale B_2 del campo magnetico in modo tale che il raggio della traiettoria sia di nuovo r_1?

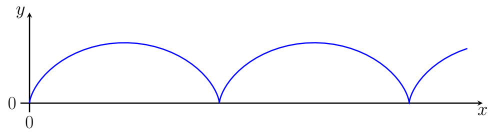
a) $3B_1$
b) $\sqrt{3}B_1$
c) $9B_1$
d) $B_1/3$
e) $B_1/\sqrt{3}$
f) $B_1/9$

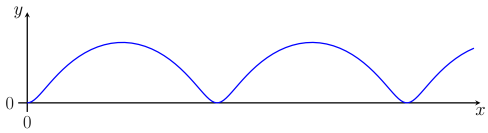
Domanda 21

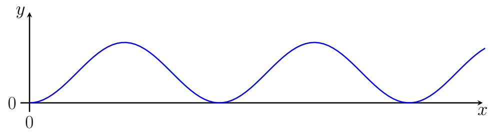
Si consideri un punto P situato al bordo di una strada. All'istante $t = 0$ il punto P si trova all'origine del sistema di riferimento. La strada si sposta verso destra con una velocità costante verso destra e parallela all'asse x (vedi schema). Qual'è la traiettoria del punto P?



a) 

c) 

b) 

d) 

Domanda 22

Si considerino due vettori $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ e si definisca $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Tra le cinque affermazioni seguenti:

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$
2. $\vec{a} \perp \vec{c}$
3. $\vec{c} \perp \vec{b}$
4. $\vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{c}\| \leq \|\vec{a}\|^2$
5. $\vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{c}\| > \|\vec{a}\|^2$

quali sono sempre corrette ?

a) 1,2,3,4

b) 2,3,4

c) 2,3,5

d) 1,2,5

e) 1,2,4

f) Non ci sono abbastanza informazioni.

Problemi teorici

Durata : 120 minuti
Valutazione : 48 punti

Cominciate ogni problema su un nuovo foglio, al fine di facilitarne la correzione.

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2{\cdot}s^4{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-3}}$
Costante di Planck	h	$=$	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$
Carica elementare	e	$=$	$1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A{\cdot}s}$
Costante gravitazionale	G	$=$	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	$=$	$9.81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,141\,29(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante dei gas	R	$=$	$8.314\,459\,8(48)\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,8(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$=$	$5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$
Massa dell'elettrone	m_e	$=$	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protone	m_p	$=$	$1.672\,621\,71(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutrone	m_n	$=$	$1.674\,927\,28(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Esercizio 1 : Che pressione ! *(16 punti)*

Parte A. Tubo aperto (4 punti)

Consideriamo il sistema nella figura Fig. 1 : un tube in vetro è riempito di mercurio e immerso in un recipiente contenente anch'esso mercurio. In seguito si apre la parte inferiore del tubo. Si osserva quindi che il livello del mercurio di abbassa di un'altezza h.

i. (1 pt) Cosa contiene la parte superiore del tubo, di altezza h ?

ii. (1 pt) Cosa si può misurare con questo dispositivo ? Spiega brevemente il suo funzionamento.

Immaginiamo di essere su una spiaggia, a bordo del mare, con un bicchiere d'acqua e una cannuccia. Se aspirate con la cannuccia, l'acqua del bicchiere sale.

iii. (1.5 pt) Determinate la lunghezza teorica massima di una cannuccia per bere dal vostro bicchiere d'acqua, poi calcolatene il valore numerico.

iv. (0.5 pt) In pratica la lunghezza sarà più corta di quella calcolata. Proponi una spiegazione possibile.

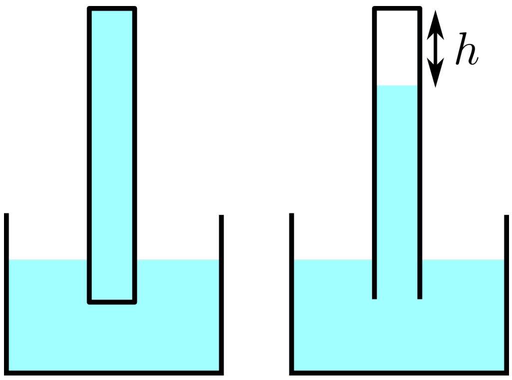


Fig. 1 – A sinistra : tubo chiuso. A destra : con il tubo aperto.

Parte B. Tubo chiuso (12 punti)

Un tubo di vetro, a forma di U e di sezione uniforme, contiene del mercurio (densità $\rho_{Hg} = 1.36 \times 10^4\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$). Le due estremità del tubo sono sigillate e un ramo del tubo contiene un gas A, mentre l'altro ramo contiene un gas B, entrambi considerati come gas perfetti.

Quando il tubo viene mantenuto verticale con le estremità rivolte verso l'alto (parte sinistra della figura Fig. 2), le parti del tubo occupate dai gas A e B hanno una lunghezza rispettivamente $l_1 = 12\,\text{cm}$ e $l_2 = 18\,\text{cm}$.
Quando invece il tubo viene capovolto (parte destra della figura Fig.2), la lunghezza della parte del tubo occupata dal gas A é $l_1' = 6\,\text{cm}$.
In questo problema supponiamo sempre di conoscere l_1, l_2 et l_1'. Se sono richieste delle applicazioni numeriche, si assuma che $l_1 = 12\,\text{cm}$, $l_2 = 18\,\text{cm}$ e $l_1' = 6\,\text{cm}$. La temperatura ambiente è $T = 20\,°\text{C}$.

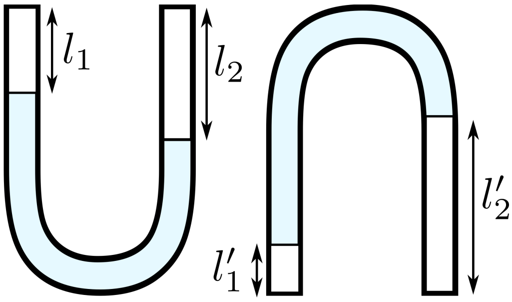


Fig. 2 – Due orientamenti del tubo.

i. (1 pt) Determinare la lunghezza l_2' occupata dal gas B quando il tubo è girato. Calcolare in seguito il suo valore numerico.

ii. (3.5 pt) Determinare le pressioni p_1, p_2, p_1' e p_2' del gas per il tubo in verticale e girato, poi calcolarne i valori numerici.

Si dispone ora il tubo in orizzontale, vale a dire che il piano su cui è sdraiato il tubo è parallelo al suolo.

iii. (1.5 pt) Determinare e calcolare le lunghezze l_1'', l_2'' e le pressioni p_1'' e p_2'' corrispondenti.

Si consideri di nuovo la situazione del tubo verticale (parte sinistra della figura Fig. 2), ma questa volta di aumenta la temperatura ambiente di $\Delta T = 20\,°\text{C}$, che provocherà un cambiamento di lunghezza Δl_i e pressione Δp_i, $i = 1, 2$.

iv. (6 pt) Determinare algebricamente le variazioni Δl_1 e Δl_2 un funzione delle grandezze conosciute, poi calcolarne il valore. Indicare esplicitamente le ipotesi di calcolo di cui avete avuto bisogno.

Esercizio 2 : Sistema trasportatore a rulli *(16 punti)*

Un sistema trasportatore a rulli è realizzato da tanti rulli omogenei posti su un piano inclinato di un angolo α, come mostrato in figura Fig.3. Gli assi dei ruli sono perpendicolari al foglio e ognuno di essi può ruotare indipendentemente dagli altri (si ipotizzi, cioè, che i rulli non siano direttamente a contatto, ma siano separati da una distanza trascurabile). Ogni rullo ha massa m e raggio R.

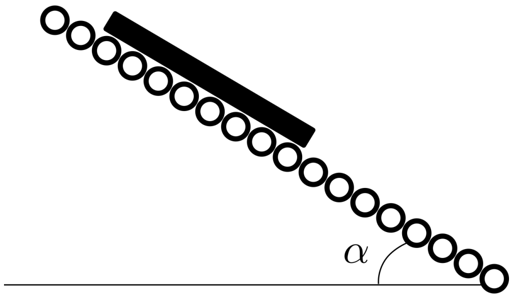


Fig. 3 – Sistema trasportatore a rulli.

Una lastra omogenea di massa M si sposta sopra i rulli. La lunghezza della lastra è $l = 4NR$. Si ipotizzi inoltre che in ogni istante la lastra sia a contatto con esattamente $2N$ rulli, anche nel momento in cui il retro della lastra si stacca da un rullo e il fronte si appoggia sul successivo che è fermo. Quando ciò accade la lastra rallenta e il rullo inizia a ruotare fino a quando le loro velocità soddisfano la condizione di non slittamento ; per tutto questo tempo i rulli che si muovevano già con la lastra ruoteranno in modo da non farla slittare. L'effetto finale sarà dunque di rallentare la lastra e i rulli che si muovevano con essa e di accelerare il rullo inizialmente fermo. Nel nostro cas si faccia l'ipotesi che tutto questo avvenga in un tempo trascurabile cosicché le forze di interazione si possano trattare come impulsive : si tratta quidi di un "urto".

Inizialmente tutti i rulli sono fermi e la lastra viene appoggiata su di essi e poi lasciata scorrere.

Sia g il modulo dell'accelerazione di gravità e si indichi con v il modulo della velocità del centro di massa della lastra e con ω il modulo della velocità angolare dei rulli. Si ipotizzi che l'attrito statico tra un rullo e la lastra sia sufficiente a non far slittare la lastra.

i. (1 pt) Trovare una relazione tra v e ω, che valga nel lasso di tempo che intercorre tra un urto ed il successivo, e dire se le velocità angolari dei rulli a contatto con la lastra sono tutte uguali.

Si indichino con v_n e v'_n i moduli delle velocità subito prima e subito dopo un urto tra la lastra e il rullo n-esimo.

ii. (3.5 pt) Si consideri il moto della lastra tra un urto e l'altro. Calcolare di quanto aumenta v^2 tra due urti, cioè trovare $v^2_{n+1} - v'^2_n$.

iii. (4 pt) Si consideri ora il processo di urto della lastra con un rullo. Trovare una relazione che lega v'_n e v_n.

Nell'ipotesi che la distanza percorsa dalla lastra sia sufficientemente lunga, la lastra raggiungerà una condizione di regime.

iv. (4 pt) Nel caso particolare $M/m = 8$, calcolare i moduli v_l e v'_l delle velocità limite raggiunte dalla lastra subito prima e subito dopo ciascun urto.

v. (1.5 pt) Nella condizione di regime, di quanto varia la velocità della lastra tra due urti consecutivi ?

vi. (2 pt) Tracciare un grafico che esprima l'andamento temporale della velocità della lastra in condizione di regime.

Esercizio 3 : Pendolo Elettrico *(16 punti)*

Consideriamo un condensatore piatto composto da due placche parallele e verticali che non si possono muovere. Queste placche sono separate da una distanza d, hanno un'altezza h e un'area $A \gg d^2$. In questo problema, si considera l'ipotesi per cui la resistenza dell'aria può venire trascurata.

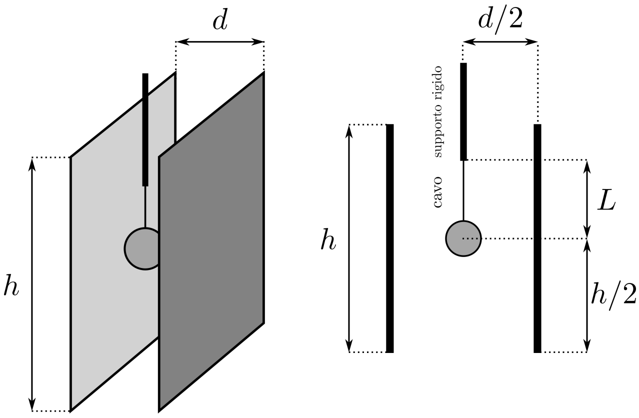


Fig. 4 – Vista del condensatore piatto e posizione iniziale della sfera metallica.

Parte A. Riscaldamento (1.5 punti)

Concentriamoci prima di tutto sul condensatore.

i. (0.5 pt) Come varia la capacità C del condensatore se si raddoppia la distanza d tra le placche ?

ii. (0.5 pt) Se l'aria tra le placche possiede una resistività elettrica uniforme ρ, quale sarà la resistenza tra le placche ?

iii. (0.5 pt) Se le placche sono inizialmente caricate da una sorgente con tensione costante V_0, quale sarà l'energia immagazzinata nel condensatore ?

Parte B. Tensione costante (7.5 punti)

Una sfera metallica di massa M e di carica q è appesa ad un cavo fissato ad un supporto rigido. Quando il condensatore non è carico, la sfera si trova al centro del condensatore (a una distanza $d/2$ da ciascuna placca, e a un'altezza $h/2$ al di sopra del fondo delle placche). Per contro, applicando una tensione V_0 tra le placche, il cavo farà un angolo θ_0 con la verticale, nel momento in cui la sfera si troverà in equilibrio.

i. (2 pt) Determinate l'angolo θ_0 in funzione delle misure date e delle costanti fondamentali.

Si sollevi leggermente la sfera metallica, in modo che faccia un angolo θ con la verticale, ma con θ appena più grande di θ_0. Si rilascia allora la sfera.

ii. (3.5 pt) Determinate il periodo d'oscillazione in funzione dei valori conosciuti e delle costanti fondamentali. Qual'è il rapporto tra questo periodo e il periodo che avrebbe il pendolo se non ci fosse tensione tra le due placche ?

Quando la sfera è in equilibrio, tagliamo il cavo.

iii. (2 pt) Qual'è il valore massimo di V_0 per far sì che la sfera non tocchi nessuna piastra durante la sua caduta fino a che non esce dal basso del condensatore ? Esprimete la risposta in funzione delle misure date e delle costanti fondamentali.

Parte C. Tensione variabile (7 punti)

Consideriamo nuovamente la nostra sfera di massa M e di carica q, inizialmente situata esattamente alla stessa distanza dalle due placche, a un'altezza di $h/2$ dal fondo delle placche. Al tempo $t = 0$, tagliamo nuovamente il cavo.

i. (1 pt) Quanto tempo servirebbe alla sfera per uscire dal fondo del condensatore se non ci fosse tensione tra le placche ?

Questa volta, applichiamo una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ tra le placche.

ii. (6 pt) Per quale frequenza angolare ω la sfera riesce a fuoriuscire dal fondo del condensatore, ma senza toccare le placche ? Per fare questo, studiate i due casi $g \gg h\omega^2$ e $g \ll h\omega^2$. Esprimete i vostri risultati in funzione delle grandezze conosciute e delle costanti fondamentali.

Multiple-choice : solution

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Question 1	■	□	□	□		
Question 2	□	■	□	□	□	
Question 3	□	□	■	□	□	□
Question 4	□	□	□	□	□	■
Question 5	□	■	□	□	□	
Question 6	□	□	□	□	■	□
Question 7	□	□	□	□	■	□
Question 8	■	□	□	□	□	
Question 9	□	□	■	□	□	□
Question 10	□	□	□	□	■	
Question 11	□	□	□	□	■	□
Question 12	□	■	□	□	□	□
Question 13	□	□	□	■	□	
Question 14	□	□	□	■	□	
Question 15	□	□	□	■	□	□
Question 16	□	□	□	■	□	
Question 17	■	□	□	□		
Question 18	■	□	□	□	□	
Question 19	□	□	■	□	□	□
Question 20	■	□	□	□	□	□
Question 21	□	□	■	□		
Question 22	□	■	□	□	□	□

Problème 1 : Quelle pression ! *(16 points)*

Partie A. Tube ouvert (4 points)

i. (1 pt) Que contient la partie supérieure du tube, de hauteur h ?

This part can only contain vacuum. **1 pt**

ii. (1 pt) Que peut-on mesurer avec ce dispositif ? Expliquez brièvement son fonctionnement.

This setup can be used as a barometer to measure pressure. **0.5 pt**

The mercury in the tube is maintained at its position by the effect of the atmospheric pressure p_{atm} pushing on the surface. Any variation of the p_{atm} will lead to a variation of h, that can then be used to "read" the pressure (after calibration). **0.5 pt**

Any coherent (and correct) explanation gives full mark.

iii. (1.5 pts) Déterminez la longueur théorique maximale d'une paille utilisée pour boire votre verre d'eau, puis calculez sa valeur numérique.

At the equilibrium, the atmospheric pressure is compensated by the weight of the liquid within the tube: **0.5 pt**

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{atm}} &= \rho g h \\ \Rightarrow h &= \frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho g} \end{aligned}$$ **0.5 pt**

One can estimate the height with $p_{\mathrm{atm}} \sim 10^3\,\mathrm{hPa} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\rho \sim 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $g \sim 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, and find $h_{\max} \sim 10\,\mathrm{m}$. **0.5 pt**

As long as their numerical values are physically meaningful, full mark. Normally it should not deviate more than ∼20%.

iv. (0.5 pts) En pratique, la longueur serait plus courte que celle calculée. Citez une explication possible.

The friction between the liquid and the tube will reduce the maximal height. **0.5 pt**

They could also comment on the temperature, etc. As long as it is physically meaningful, full mark.

Partie B. Tube fermé (12 points)

i. (1 pt) Déterminez la longueur l_2' occupée par le gaz B lorsque le tube est retourné. Calculez ensuite sa valeur numérique.

By assuming that the mercury and the glass from the tube don't change, the total volume occupied by both gas will remain constant, i.e.

$$\begin{aligned} Sl_1 + Sl_2 &= Sl_1' + Sl_2' \\ l_1 + l_2 &= l_1' + l_2' \end{aligned}$$ **0.5 pt**

where we used the fact that the section S remains constant along the tube. It follows

$$\begin{aligned} l'_2 &= l_1 + l_2 - l'_1 \\ &= 12 + 18 - 6 = 24\,\text{cm} \end{aligned}$$ **0.5 pt**

ii. (3.5 pts) Déterminez les pressions p_1, p_2, p'_1 et p'_2 des gaz pour le tube vertical/retourné, puis calculez les valeurs numériques correspondantes.

We assume that the gas is ideal and the temperature does not change, thus p_iV_i is conserved ($i = 1, 2$): **0.5 pt**

$$\begin{aligned} p_iV_i &= p'_iV'_i \\ p_iSl_i &= p'_iSl'_i \\ p_il_i &= p'_il'_i \end{aligned} \tag{1}$$ **0.5 pt**

In the case of the vertical tube ("U"), one can look at the pressure variation between the two parts:

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} + p_1 + \rho_{Hg}g(l_2 - l_1) &= p_{\text{atm}} + p_2 \\ p_2 - p_1 &= \rho_{Hg}g(l_2 - l_1) \end{aligned} \tag{2}$$ **0.5 pt**

And similarly when turning the tube around:

$$\begin{aligned} p'_2 + \rho_{Hg}g(l'_2 - l'_1) &= p'_1 \\ p'_1 - p'_2 &= \rho g_{Hg}(l'_2 - l'_1) \end{aligned} \tag{3}$$ **0.5 pt**

If $p'_2 - p'_1$ instead: -0.5

With (1), (2) and (3), we have 4 equations to determine 4 unknowns. We expect them to solve algebraically at least for 1 unknown. E.g. inserting (1) in (3) and rewriting (2):

$$\frac{p_1l_1}{l'_1} - \frac{p_2l_2}{l'_2} = \rho g_{Hg}(l'_2 - l'_1) \tag{4}$$

$$p_2 = p_1 + \rho g_{Hg}(l_2 - l_1) \tag{5}$$

(5) in (4) and solving for p_1:

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{l_1}{l'_1} - \frac{l_2}{l'_2}\right) - \rho_{Hg}g\frac{(l_2 - l_1)l_2}{l'_2} &= \rho_{Hg}g(l'_2 - l'_1) \\ p_1 &= \rho_{Hg}g\left(l'_2 - l'_1 + \frac{l_2}{l'_2}(l_2 - l_1)\right)\left(\frac{l_1}{l'_1} - \frac{l_2}{l'_2}\right)^{-1} \end{aligned}$$ **1 pt**

Numerically, with $l_1 = 12\,\text{cm} = 1.2 \times 10^{-1}\,\text{m}$, $l_2 = 18\,\text{cm} = 1.8 \times 10^{-1}\,\text{m}$, $l'_1 = 6\,\text{cm} = 6 \times 10^{-2}\,\text{m}$, $l'_2 = 24\,\text{cm} = 2.4 \times 10^{-2}\,\text{m}$, $\rho_{Hg} = 1.36 \times 10^4\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9.81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, on finally finds:

$$\begin{aligned} p_1 &= 24\,\text{kPa} \\ p_2 &= 32\,\text{kPa} \\ p'_1 &= 48\,\text{kPa} \\ p'_2 &= 24\,\text{kPa} \end{aligned}$$ **0.5 pt**

They only need to find one unknown algebraically, and can calculate the three others from there.

iii. (1.5 pts) Déterminez et calculez les longueurs l_1'', l_2'' et les pressions p_1'' et p_2'' correspondantes.

Similarly to the previous question, we find:

$$p_1 l_1 = p_1'' l_1'' \quad (6)$$

$$p_2 l_2 = p_2'' l_2'' \quad (7) \quad \textbf{0.25 pt}$$

$$l_1 + l_2 = l_1'' + l_2'' \quad (8) \quad \textbf{0.25 pt}$$

Moreover, we have in that case:

$$p_1'' = p_2'' \quad (9) \quad \textbf{0.5 pt}$$

In this part, we made a simplification by assuming that the two gases don't mix (hence the two different lengths). It is not clear how they will solve this part...

We thus have 4 equations for 4 unknowns. For instance for l_1'':

$$\begin{aligned} p_1'' = \frac{p_1 l_1}{l_1''} &= p_2'' = \frac{p_2 l_2}{l_2''} \\ l_2'' &= \frac{p_2 l_2}{p_1 l_1} l_1'' \\ l_1 + l_2 &= l_1'' \left(1 + \frac{p_2 l_2}{p_1 l_1}\right) \end{aligned}$$

We finally have:

$$\begin{aligned} l_1'' &= \frac{l_1 + l_2}{1 + \frac{p_2 l_2}{p_1 l_1}} \approx 10\,\mathrm{cm} \\ l_2'' &= \frac{l_1 + l_2}{1 + \frac{p_1 l_1}{p_2 l_2}} \approx 20\,\mathrm{cm} \\ p_1'' = p_2'' &= \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{l_1 + l_2} \approx 28.8\,\mathrm{kPa} \end{aligned} \quad \textbf{0.5 pt}$$

iv. (6 pts) Déterminez algébriquement les variations Δl_1 et Δl_2 en fonction de grandeurs connues, puis calculez ces deux valeurs. Indiquez explicitement les hypothèses de calcul dont vous avez besoin.

Three variables are changing: **0.5 pt**

$$\begin{aligned} T &\to T + \Delta T \\ p_i &\to p_i + \Delta p_i \\ l_i &\to l_i + \Delta l_i \end{aligned}$$

We can rewrite the ideal gas law in term of the new variables ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} (p_i + \Delta p_i)(l_i + \Delta l_i) S &= n_i R (T + \Delta T) \quad \textbf{1 pt} \\ \underbrace{p_i l_i S}_{= n_i RT} + (p_i \Delta l_i + \Delta p_i l_i) S + \underbrace{\Delta p_i \Delta l_i}_{\ll} S &= n_i RT + n_i R \Delta T \end{aligned}$$

At this point, we can make two simplifications :

- Using the ideal gas law $p_i(l_iS) = n_iRT$, we can remove those two terms from the equation
- We neglect the second order term $\Delta p_i \Delta l_i$ **0.5 pt**

Then, dividing by $n_iR = \frac{p_il_iS}{T}$, we get

$$\frac{\Delta l_i}{l_i} + \frac{\Delta p_i}{p_i} = \frac{\Delta T}{T} \tag{10}$$ **0.5 pt**

We can do a similar work for the pressure variation:

$$\begin{aligned}
(p_2 + \Delta p_2) - (p_1 + \Delta p_1) &= \rho_{Hg} g((l2 + \Delta l_2) - (l_1 + \Delta l_1)) \\
\underbrace{(p_2 - p_1)}_{=\rho_{Hg}g(l_2-l_1)} + (\Delta p_2 - \Delta p_1) &= \rho_{Hg} g(l_2 - l_1) + \rho_{Hg} g(\Delta l_2 - \Delta l_1) \\
\Delta p_2 - \Delta p_1 &= \rho_{Hg} g(\Delta l_2 - \Delta l_1) \qquad (11)
\end{aligned}$$

0.5 pt **0.5 pt**

Finally, we assume that the volume of the mercury/glass does not change:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \tag{12}$$ **0.5 pt**

With the 4 equations (10), (11) and (12), we can determine Δl_i and Δp_i ($i = 1, 2$; we however only ask for Δl_i in the exercise):

$$\begin{aligned}
(10) \Rightarrow \Delta p_i &= \left(\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta l_i}{l_i}\right) p_i \\
(12) \Rightarrow \Delta l_1 &= -\Delta l_2
\end{aligned}$$

Inserting those two relations in (11) reads:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta l_2}{l_2}\right) p_2 - \left(\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta l_2}{l_1}\right) p_1 &= \rho_{Hg} g(\Delta l_2 + \Delta l_2) \\
\frac{\Delta T}{T}(p_2 - p_1) &= \Delta l_2 \left(2\rho_{Hg} + \frac{p_2}{l_2} + \frac{p_1}{l_1}\right) \\
\Delta l_2 &= = \frac{\Delta T(p_2 - p_1)}{T\left(2\rho_{Hg} + \frac{p_2}{l_2} + \frac{p_1}{l_1}\right)}
\end{aligned}$$ **1 pt**

The numerical evalution gives, with $T = 293\,\mathrm{K}$, $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$: **0.5 pt**

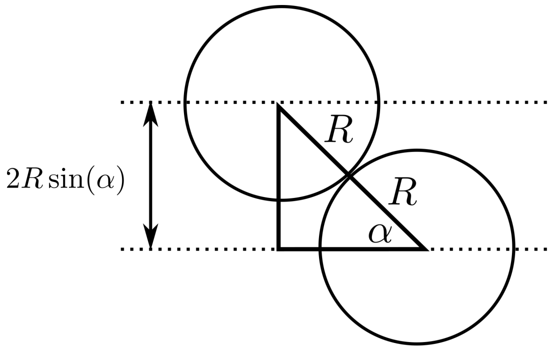
$$\begin{aligned}
\Delta l_2 &= 0.085\,\mathrm{cm} \qquad (13) \\
\Delta l_1 &= -\Delta l_2 \approx -0.085\,\mathrm{cm} \qquad (14)
\end{aligned}$$ **0.5 pt**

Problème 1 : Comme sur des roulettes *(16 points)*

i. (1 pt) Déterminez une relation entre v et ω, qui est valide durant la période entre un impact et le suivant. Les vitesses angulaires des rouleaux en contact avec la plaque sont-elles toutes identiques ?

- No sliding condition at each point of contact between the board and the roll (tangential): $v = R\omega$ **0.5 pt**
- v is the same at each point of the board $\Rightarrow \omega$ is the same for each roll **0.5 pt**

ii. (3.5 pts) Considérez le mouvement de la plaque entre un impact et un autre. Déterminez l'augmentation de v^2 entre deux impacts, autrement dit déterminez $v_{n+1}^2 - v_n'^2$.



We need to take the (translational) energy of the board into account, as well as the (rotational) energy of the $2N$ rolls under the board. And of course the variation of the potential energy:

$$E_n' = \frac{1}{2}Mv_n'^2 + 2N\cdot\left(\frac{1}{2}I\omega_n'^2\right) + Mg\cdot 2R\sin(\alpha) \quad (1) \quad \textbf{1 pt}$$

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}Mv_{n+1}^2 + 2N\cdot\left(\frac{1}{2}I\omega_{n+1}^2\right) \quad (2) \quad \textbf{1 pt}$$

with

$$\omega_n' = \frac{v_n'}{R}$$
$$\omega_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{R}$$
$$I = \frac{1}{2}mR^2 \quad \textbf{0.5 pt}$$

Gravitational energy missing: -0.5. With a $\cos(\alpha)$: -0.25. Only MgR or $2MgR$: -0.5.
Rotational energy completely missing: -0.5 each time.
Factor $2N$ missing in the rotational energy: -0.5 only once.
Wrong factor in the moment of inertia: -0.25 only once (for the whole problem).

The energy conservation reads:

$$E_n' = E_{n+1}$$

$$\frac{1}{2}Mv_n'^2 + \frac{1}{2}mR^2N\frac{v_n'^2}{R^2} + 2MgR\sin(\alpha) = \frac{1}{2}Mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mR^2N\frac{v_{n+1}^2}{R^2}$$

$$v_{n+1}^2 - v_n'^2 = \frac{4MgR\sin(\alpha)}{M+mN} \quad (3) \quad \textbf{1 pt}$$

iii. (4 pts) On considère à présent le processus de l'impact entre la plaque et un rouleau. Déterminez une relation entre v'_n et v_n.

We have:

- Δp_1: momentum variation of the board caused by the next roll (at the "bump")
- Δp_2: momentum variation of the board caused by each of the $(2N-1)$ rolls still in contact with the board
- ΔJ_1: angular momentum variation of the next roll (initially at rest)
- ΔJ_2: angular momentum variation of each of the $(2N-1)$ rolls still in contact with the board

During a bump, we have the apparition of friction between the board and the rolls, parallel to the motion of the board. The momentum (of the forces) generated by the rolls will change the momentum of the board:

$$M(v'_n - v_n) = \underbrace{\Delta p_1}_{\text{Next roll}} + \underbrace{(2N-1)\Delta p_2}_{\text{Rolls still touching the board}} \tag{4}$$ **1 pt**

Now let's find a relation between Δp and ΔJ. If $F_{r\to b}$ is the force exerted by a roll on the board during a very short instant Δt, then $\Delta p = F_{r\to b}\Delta t$. Similarly, if $F_{b\to r}$ is the force exerted by the board on a roll, then

$$\Delta J = F_{b\to r}R\Delta t = -F_{r\to b}R\Delta t = -R\Delta p \tag{5}$$

We thus have for both cases :

$$-R\Delta p_1 = \Delta J_1 = I(\omega'_n - \omega_n) = I\omega_n \tag{6}$$ **1 pt**

$$-R\Delta p_2 = \Delta J_2 = I(\omega'_n - \omega_n) \tag{7}$$ **1 pt**

In (6), the next roll is initially at rest, hence the simplification.

Negative sign missing: -0.5 only once.

Inserting (6) and (7) in (4) and applying again $\omega_n = \frac{v_n}{R}$ and $I = \frac{1}{2}mR^2$:

$$\begin{aligned}
M(v'_n - v_n) &= -\frac{I\omega'_n}{R} - (2N-1)I\frac{\omega'_n - \omega_n}{R} \\
&= -\frac{1}{2}mv'_n - \frac{1}{2}(2N-1)m(v'_n - v_n) \\
v'_n(2M + m + (2N-1)m) &= v_n(2M + (2N-1)m) \\
v'_n &= \left(\frac{2M + (2N-1)m}{2M + 2Nm}\right)v_n = \left(1 - \frac{m}{2M + 2Nm}\right)v_n
\end{aligned} \tag{8}$$ **1 pt**

Both forms (or something similar) is accepted for the last line, they don't need to do the same simplification.

iv. (4 pts) Dans le cas particulier $M/m = 8$, déterminez les normes v_l et v'_l des vitesses limites de la plaque juste avant et juste après un impact.

Combining the two previous results (3) and (8), we have:

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= \frac{4MgR\sin(\alpha)}{M+mN} + v_n'^2 \\ &= \frac{4MgR\sin(\alpha)}{M+mN} + \left(1 - \frac{m}{2M+2Nm}\right)^2 v_n^2 \\ &= \frac{32gR\sin(\alpha)}{8+N} + \left(1 - \frac{1}{2(8+N)}\right)^2 v_n^2 \end{aligned}$$ **1 pt**

where we used $M/m = 8$ in the last step.

In the stable regime, we have $v_n = v_{n+1} =: v_s$ **1 pt**

This leads to:

$$v_s = (64 + 8N)\sqrt{\frac{2gR\sin(\alpha)}{(8+N)(31+4N)}} \qquad (9)$$ **1 pt**

and

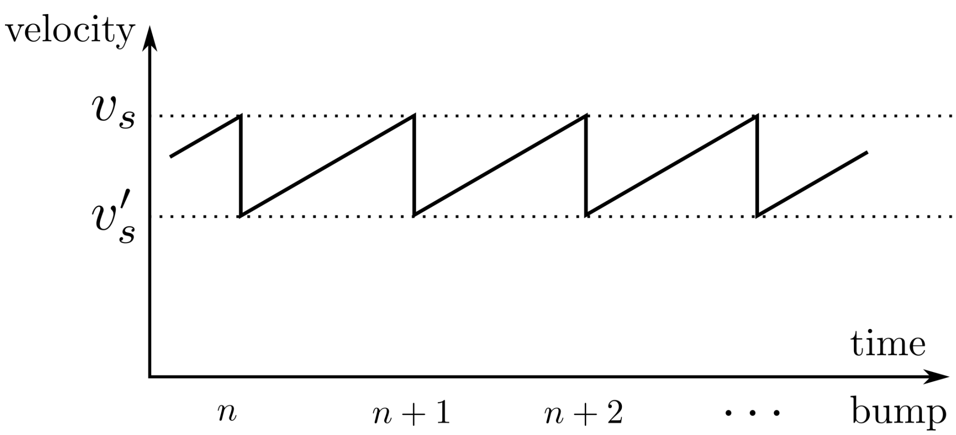
$$v_s' = (60 + 8N)\sqrt{\frac{2gR\sin(\alpha)}{(8+N)(31+4N)}} \qquad (10)$$ **1 pt**

The final form is up to them, as long as the answer is correct.

v. (1.5 pts) Dans le cas de ce régime stable, quelle est la variation de la vitesse entre deux impacts consécutifs ?

$$\Delta v_s = v_s - v_s' = 4\sqrt{\frac{2gR\sin(\alpha)}{(8+N)(31+4N)}} \qquad (11)$$ **1.5 pt**

vi. (2 pts) Tracez dans un graphique l'évolution temporelle de la vitesse de la plaque en régime stable.



v_s and v_s' as upper and lower limit: 0.5 pt
Periodic behaviour: 0.5 pt
Sudden change at each bump: 0.5 pt
Linear pieces between each bump: 0.5 pt

Problème 1 : Pendule électrique *(16 points)*

Partie A. Echauffement (1.5 points)

i. (0.5 pts) Comment varie la capacité C du condensateur si l'on double la distance d entre les plaques ?

The capacity of the plane condensator reads (S being the surface area of each plate):

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \propto \frac{1}{d} \tag{1}$$

If we double d, then C is divided by 2. **0.5 pt**

ii. (0.5 pts) Si l'air entre les plaques possède une résistivité électrique uniforme ρ, quelle sera la résistance entre les plaques ?

By definition, the resistivity is written as

$$\rho = R\frac{A}{d} \Leftrightarrow R = \rho\frac{d}{A} \tag{2}$$ **0.5 pt**

iii. (0.5 pts) Si les plaques sont initialement chargées via une source de tension constante V_0, quelle sera l'énergie stockée dans le condensateur ?

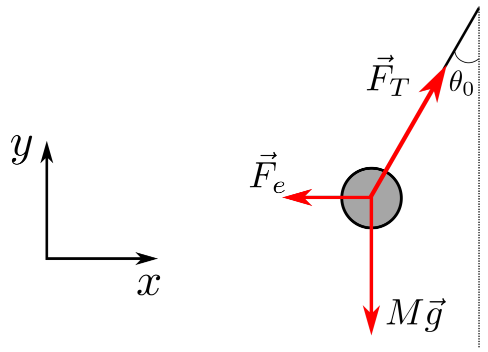
The energy stored in a condensator of capacity C, charged with a tension V_0 is given by

$$E = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{A}{d}V_0^2 \tag{3}$$ **0.5 pt**

Either the first or the second formula are considered correct, the important aspect is the squared tension.

Partie B. Tension constante (7.5 points)

i. (2 pts) Déterminez cet angle θ_0 en fonction des quantités données et de constantes fondamentales.



1 pt

The three forces acting on the ball are the electric force $\vec{F}_e$ generated by the condensator, the weight $M\vec{g}$ and the tension $\vec{F}_T$ in the string.

Better to have a schema, but a good description also works.
However -0.4 per missing force.

The projection of the forces on both axis Ox Oy reads:

$$\begin{aligned} F_T \sin(\theta_0) &= F_e = q\vec{E} = q\frac{V_0}{d} && (4) \quad \textbf{0.5 pt} \\ F_T \cos(\theta_0) &= Mg && (5) \end{aligned}$$

It is 0.25 per line.

Dividing both equations to get rid of F_T gives the angle:

$$\tan(\theta_0) = \frac{qV_0}{Mgd} \qquad (6) \quad \textbf{0.5 pt}$$

ii. (3.5 pts) Déterminez la période des oscillations de ce mouvement harmonique en fonction des quantités connues et de constantes fondamentales. Quel est le rapport entre cette période et la période qu'aurait le pendule lorsqu'il n'y a pas de tension entre les plaques ?

Without any electrical tension between the plates, the period T_0 of the pendulum is simply

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (7) \quad \textbf{0.5 pt}$$

With the electrical tension V_0, the instantaneous acceleration of the ball would be $g_{\text{new}} = \frac{F_T}{M}$ (colinear to F_T), so that we can write the new period as

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{\text{new}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{LM}{F_T}}$$

The modulus of the tension at the equilibrium is given by Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_T\|^2 &= \|M\vec{g}\|^2 + \|\vec{F}_e\|^2 \\ &= (Mg)^2 + \left(\frac{qV_0}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

and we thus get the period:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{LM}{\sqrt{(Mg)^2 + \left(\frac{qV_0}{d}\right)^2}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(\frac{M^2}{M^2 + \left(\frac{qV_0}{gd}\right)^2}\right)^{1/4} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \left(\underbrace{\frac{qV_0}{Mgd}}_{=\tan(\theta_0)}\right)^2\right)^{-1/4} && (8) \quad \textbf{1 pt} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L\cos(\theta_0)}{g}} && (9) \end{aligned}$$

In the last step, we used the trigonometric relation $1 + \tan^2(\theta_0) = 1/\cos^2(\theta_0)$.

Both (8) and (9) are accepted as a correct answer, i.e. they do not need to do the full simplification with the $\cos$ *(the variant with* $\tan(\theta_0)$ *is also accepted).*

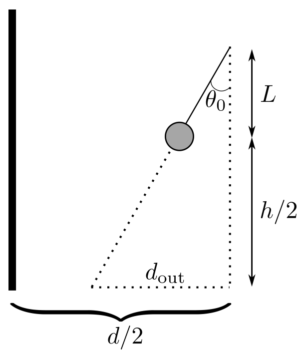
Finally, the ratio between the period with the electrical tension and the period without it is simply:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\cos(\theta_0)} \quad (10) \quad \textbf{0.5 pt}$$

$$= \left(1 + \left(\frac{qV_0}{Mgd}\right)^2\right)^{-1/4} = \left(1 + \tan^2(\theta_0)\right)^{-1/4} \quad (11)$$

Any variation is again accepted.

iii. (2 pts) Quelle est la valeur maximale de V_0 de sorte à ce que la boule ne touche pas une plaque en sortant du condensateur ? Exprimez votre réponse en fonction des quantités données et de constantes fondamentales.



As soon as we cut the string, the ball will move in a straight line colinear to the string orientation. The horizontal distance upon leaving the plates is simply

$$d_{\text{out}} = \tan(\theta_0)\left(L + \frac{h}{2}\right) \quad (12) \quad \textbf{1 pt}$$

If they forget the L but the rest of the formula is correct, they only get 0.2 pt.

The maximal possible distance would be $d/2$, this gives us the equality:

$$\frac{d}{2} = \tan(\theta_0)\left(L + \frac{h}{2}\right) \quad (13) \quad \textbf{0.5 pt}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{qV_{\text{max}}}{Mgd}\left(L + \frac{h}{2}\right)$$

$$V_{\text{max}} = \frac{Mgd^2}{2q(L + h/2)} \quad (14) \quad \textbf{0.5 pt}$$

Partie C. Tension variable (7 points)

i. (1 pt) Combien de temps faudrait-il à la balle pour sortir du condensateur s'il n'y avait pas de tension entre les plaques ?

Without any tension, the ball will only fall under the effect of gravity. One thus has:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} \tag{16}$$ **1 pt**

ii. (6 pts) Pour quelles fréquences angulaires ω la balle va-t-elle pouvoir s'échapper du condensateur en tombant sous l'effet de la gravité, mais sans toucher les plaques ? Pour ce faire, étudiez les deux cas $g \gg h\omega^2$ et $g \ll h\omega^2$. Exprimez vos résultats en fonction des grandeurs connues et de constantes fondamentales.

The ball will experience an electrical force in the x direction:

$$F_e = q\vec{E}(t) = q\frac{V_0 \sin(\omega t)}{d} \tag{17}$$ **0.5 pt**

and thus an acceleration in the x direction

$$a_x(t) = \frac{qV_0}{Md}\sin(\omega t) \tag{18}$$ **0.5 pt**

On can find the trajectory in the x-direction by integrating two times:

$$v_x(t) = \int_0^t a_x(t')\, dt' = \frac{qV_0}{Md} \cdot \frac{1}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \tag{19}$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\, dt' = \frac{qV_0}{Md\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) \tag{20}$$ **1 pt**

NB: The students can also guess the solution and only work with derivatives.

Once again, the maximal horizontal distance the ball could travel without touching a plate would be $d/2$, which gives the condition

$$\frac{d}{2} = \frac{qV_0}{Md\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\frac{Md^2}{2qV_0} \cdot \omega = t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \tag{21}$$ **0.5 pt**

The time t is the one derived in the previous question (a simple falling ball). However, since we cannot directly solve for ω, we consider the two suggested regimes:

- First we have

$$g \ll h\omega^2 \quad \sim \quad \sqrt{\frac{g}{h}} \ll \omega$$

In the RHS of (21), the second term $\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ is thus dominated by t, and we have (by writing the explicit expression (16) for t):

$$\frac{Md^2}{2qV_0} \cdot \omega \approx t = \sqrt{\frac{h}{g}} \tag{22}$$ **1 pt**

$$\omega_h = \frac{2qV_0}{Md^2}\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{23}$$ **0.5 pt**

The ball will not hit the plates for frequencies higher than ω_h.

- If we consider the other regime:

$$g \gg h\omega^2 \quad \sim \quad \sqrt{\frac{g}{h}} \gg \omega$$

we actually have low-frequencies and can expand the sine in (21):

$$\sin(\omega t) = \omega t - \frac{1}{6}(\omega t)^3 + \mathcal{O}((\omega t)^5) \tag{24}$$ **1 pt**

Correct idea but wrong sign: they only get 0.3 pt

which leads to (we have multiplied both sides by ω):

$$\begin{aligned}
\frac{Md^2}{2qV_0}\omega^2 &= \omega t - \sin(\omega t) && (25)\\
&\approx \omega t - \omega t + \frac{1}{6}(\omega t)^3 && (26)\\
&= \frac{1}{6}\omega^3 \left(\frac{h}{g}\right)^{3/2} && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}$$

where we used (16) in the last step. This finally gives us the limit frequency:

$$\omega_l = \frac{3Md^2}{qV_0}\left(\frac{g}{h}\right)^{3/2} \tag{29}$$ **0.5 pt**

The ball will not hit the plates for frequencies lower than ω_l.