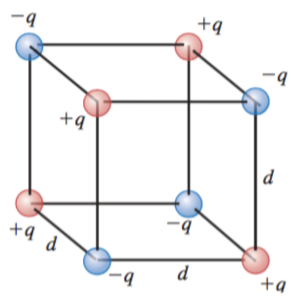
Tarea 3

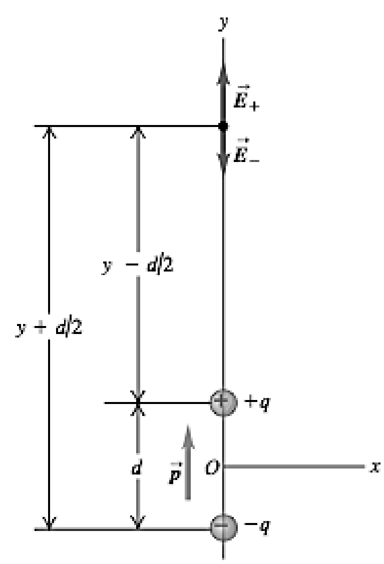
Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: antes del 9 febrero 2016

Problema 10 electrostática.

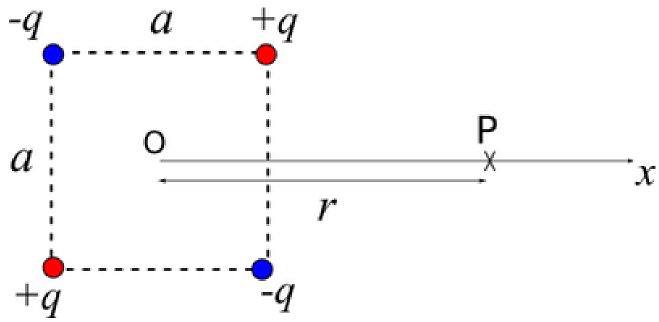
10.1 Un cristal iónico esta formado por ocho cargas puntuales colocadas en las esquinas de un cubo de lado a. Los valores de las cargas se indican en la figura. Calcula la energía potencial de la configuración del conjunto de cargas.



10.2 Dos cargas de signo contrario están colocadas a lo largo del eje y, separadas por una distancia d, como se muestra en la figura de abajo. Calcula la componente vertical del campo eléctrico E_y, a la distancia y desde el origen, producido por el par de cargas (emplea el sistema de ejes descrito en la figura). Verifica que cuando la distancia y es muy grande, comparada con la distancia de separación entre las cargas ($y \gg d$), el campo eléctrico se reduce a la expresión: $E_y = \dfrac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$, donde $p = qd$ es la magnitud del dipolo eléctrico del par de cargas.



10.3 Un cuadrupolo eléctrico esta formado por cuatro cargas puntuales colocadas en las esquinas de un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura. Encuentra la expresión del campo eléctrico en un punto P sobre el eje de x mostrado en la figura, considera que r es la distancia desde el centro del cubo al punto P. Demuestra que cuando $r \gg a$ (en un punto muy alejado) el campo eléctrico (magnitud) varia como $\sim 1/r^4$.

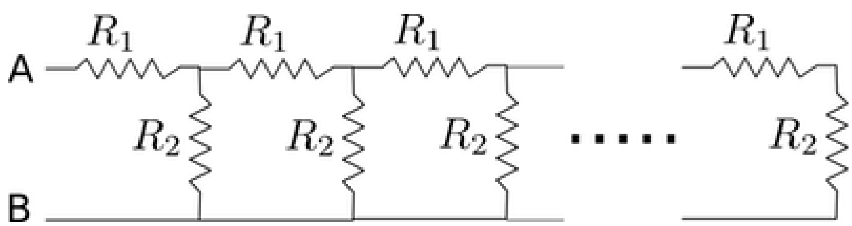


Problema 11 problemas variados.

11.1 Una esfera de radio$R = 10\,\text{cm}$ flota en el agua, cuya densidad es $\rho_a = 10^3\,\text{kg/m}^3$. El centro de la esfera se encuentra 9 cm por encima de la superficie del agua. Calcular el trabajo que debe realizarse para sumergir la esfera hasta que su centro se encuentre justamente en la superficie del agua.

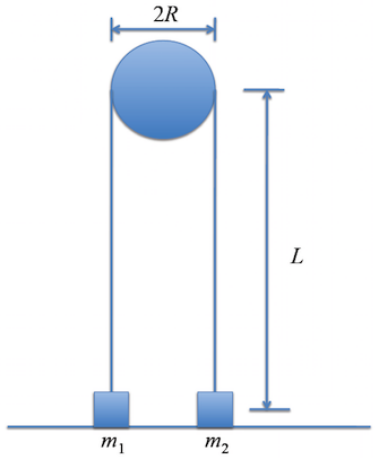
El volumen de un casquete esférico (radio R) de altura h es: $V(R) = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$

11.2 El circuito mostrado en la figura es una sucesión repetitiva de resistencias R_1,R_2 conectadas como se muestra en la figura, los puntos suspensivos indican que hay una infinidad de resistencias conectadas de la misma manera. Calcula el valor de la resistencia equivalente del circuito completo. Si $R_1 = 1\,\text{M}\Omega$ y $R_2 = 470\,\Omega$, cual es el valor de la resistencia entre los puntos A y B.



11.3 Dos cargas, Q y $-2Q$, son colocadas a una distancia fija. Demuestra que las curvas de potencial eléctrico cero, o de manera general a un potencial constante, debido a las dos cargas son círculos.

11.4 Considere una polea de masa despreciable y de radio $R = 0.2$ m, con una cuerda inextensible, también sin masa, a la cuál se hallan atados dos objetos pequeños de las mismas dimensiones pero con diferentes masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg. Inicialmente $(t = 0)$ las masas están en reposo sobre el suelo y la cuerda se encuentra extendida. La distancia entre el centro de las masas y el centro de la polea es $L = 10$ m, vea la figura. En el tiempo inicial la polea empieza a ser jalada hacia arriba con una fuerza constante $F = 24$ N por un tiempo igual a 1 segundo. Después de ese intervalo de tiempo, la fuerza se duplica instantáneamente. Describa cuantitativamente el movimiento de las masas. Halle el tiempo en el que la masa más ligera alcanza a la polea. Para facilitar el cálculo aproxime la aceleración de la gravedad como $g \approx 10$ m/seg^2.



11.5 Considera un planeta de forma esférica rotando alrededor de un eje fijo, sea V la velocidad de un punto sobre el ecuador del planeta. La rotación del planeta provoca que la aceleración de la gravedad g_e en el ecuador sea $1/2$ de su valor en uno de sus polos g_p. ¿Cuál es la velocidad de escape del planeta de una partícula localizada en el polo? Exprese tal velocidad en términos de V. La velocidad de escape es la velocidad mínima en un punto de la superficie del planeta tal que vence la fuerza gravitacional y no regrese al planeta.

Problema 12, campo eléctrico.

En general es complicado calcular el campo eléctrico de una distribución de carga arbitraria[1] -a veces conviene emplear la ley de Gauss, que revisaremos más adelante-. Pero hay ciertos ejemplos básicos sencillos de calcular y que deben conocer.

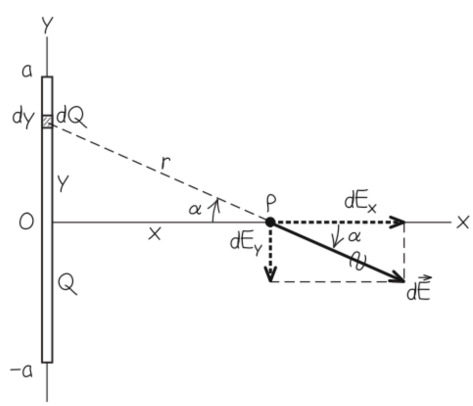
Ejemplo: **campo eléctrico de una linea recta** (una varilla con carga Q de longitud $2a$). La geometría del problema se especifica en la siguiente figura.

densidad lineal de carga : $\lambda = \dfrac{dQ}{dy} \quad \Rightarrow \quad dQ = \lambda dy$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

diferencial del campo producido por la diferencial de carga $dQ = \lambda dy$:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}$$



Integrado sobre toda la longitud de la varilla se obtiene el campo eléctrico en cada una de las componentes:

$$E_x = \int dE\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}\cos\alpha \qquad\qquad E_y = -\int dE\,\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}\sin\alpha \tag{2}$$

[1]El campo eléctrico de una distribución de carga arbitraria se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dQ}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ es la distancia entre la fuente de carga en la posición $\mathbf{r}'$ hasta el punto donde se calcula el campo $\mathbf{r}$, dQ es la diferencial de carga de las fuente y $1/4\pi\epsilon_0 = 9.00\times10^9$ m/F es una constante del sistema MKS.

Se aprovecha la simetría de la configuración de carga, en este caso si se calcula el campo sobre el eje de simetría de la varilla, las componentes verticales (paralelas al eje y) se anulan. La componente x del campo resultante esta dada por:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)} \cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{x\, dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} \tag{3}$$

Límites:

- Cuando el punto P esta muy lejano $(a \ll x) \Rightarrow E_x = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{x^2}$, el campo eléctrico es como el de una carga puntual.
- En el límite cuando la varilla es muy larga $(a \to \infty)$ el campo se reduce a la expresión: $E_x = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda}{x}$ (verifícalo)

12.1) Calcular la integral $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x\, dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ y verificar el resultado final de la ecuación (3).

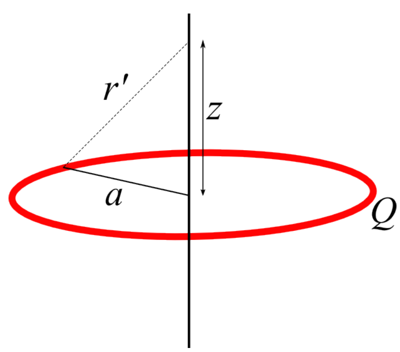
12.2) Dos varillas delgadas de longitud L están a lo largo del eje x, entre $x = a/2$ y $x = a/2 + L$ y la otra entre $x = -a/2$ y $x = -a/2 - L$
Cada varilla tiene carga positiva Q distribuida uniformemente en toda su longitud.
a) Calcula el campo eléctrico producido por la segunda varilla en puntos a lo largo del eje x positivo
b) Demuestre que la magnitud de la fuerza que ejerce una varilla sobre la otra es

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \ln\left[\frac{(a+L)^2}{a\,(a+2L)}\right] \tag{4}$$

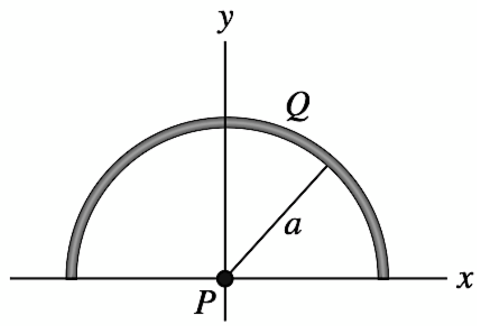
c) Demuestra que cuando $a \gg L$, la fuerza se reduce a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. Interpreta este resultado.

Sugerencia, usa la expansión $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots$ válida para $|z| \ll 1$ ()

12.3) Para un anillo de radio a y carga total Q, calcular el campo eléctrico sobre el eje del anillo. Suponer que la carga esta distribuida de manera uniforme en el anillo. Verifica que cuando la distancia z es muy grande, en comparación con el radio del anillo, el campo eléctrico del anillo se reduce al de una carga puntal: $E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{z^2}$



12.4) Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un semicírculo de radio a. Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el centro de curvatura P.



12.5) Un disco de radio R tiene una carga total Q distribuida uniformemente. El disco se está colocado en el plano $x - y$, con su centro en el origen de coordenadas. Encuentra el campo eléctrico en un punto z a los largo del eje del disco.

Problema 13, problemas geometría analítica.

13.1 Dadas las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, hallar el área del triángulo que forman.

13.2 Considera el siguiente par de rectas en el plano xy:

$$\begin{aligned}(ax + by)\cos\theta + (bx - ay)\sin\theta + cx + dy = 0\\ (cx + dy)\cos\theta - (dx - cy)\sin\theta + ax + by = 0\end{aligned} \tag{5}$$

Demuestra que el ángulo entre las dos rectas es θ.

13.3 Considera dos circunferencias de radios R y r, tangentes interiores entre sí. Por el punto de contacto T, se traza la tangente común y sobre ella se toma una distancia TA$=d$.

Determina el ángulo que formará con la tangente, una secante trazada desde A, que corta a las circunferencias de tal manera que las semicuerdas CB y C'B' satisfacen la relación: $CB = 4C'B'$ (suponiendo $R > r$). Considera el caso $R = 2r$, $d = 2r/3$.

O y O' son los centros de las dos circunferencias de radio R y r, respectivamente.