Tarea 10

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2015**
Fecha de entrega: 8 junio 2015

Problema 30, relatividad.

30.1 Una patícula cosmica se aproxima a la Tierra a lo largo de su eje con velocidad $0.9c$ hacia el polo norte y otra con velocidad $0.5c$ hacia el polo sur (en sentido contrario a la primer partícula). Determina la velocidad relativa de aproximación de una partícula respecto de la otra.

30.2 Una partícula de masa m colisiona con otra partícula identica en reposo. Muestra que para la colisión relativista:

$$\tan\theta\tan\varphi = \frac{2}{\gamma+1} \tag{1}$$

donde θ y φ son los angulos de en que son desviadas las partículas después de la colisión, con respecto de la dirección de la partícula incidencidente. Muestra también que $\theta + \varphi \leq \pi/2$, donde la igualdad es valida en el limite clásico.

30.3 Muestra que si $v/c \ll 1$, la energía cinética de la partícula es mucho menor a la energía en reposo de la partícula. Muestra además, que en esté limite, la energía relativista se reduce a la energía clásica para bajas velocidades.

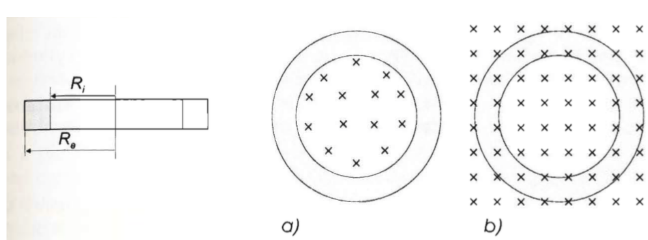
Problema 31, corriente eléctrica en un anillo.

Considera un anillo sólido hecho de cobre, la sección transversal del anillo es cuadrada y tiene un radio interno $R_i = 5\,\mathrm{cm}$ y un radio externo $R_e = 7\,\mathrm{cm}$. El anillo se encuentra en un campo magnético uniforme paralelo al eje del anillo, la intensidad del campo es $B = 0.2\,\mathrm{T}$ y en un momento dado cambia completamente de dirección, es decir "apunta" en dirección contraria, en un lapso de tiempo $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$

Expresa la velocidad de arrastre v y la velocidad angular ω de los electrones de conducción dentro del anillo en términos de la distancia r desde el eje del anillo. La velocidad de arrastre de los electrones es la velocidad promedio con la que se mueven dentro de un conductor. Considera los siguientes casos:

a) Cuando el campo magnético solo esta confinado dentro del radio interior del anillo.

b) Cuando el campo magnético se encuentra presente en todo el anillo.



Datos:

La masa molar del Cu es $M_{Cu} = 0.0635\,\mathrm{kg/mol}$, su densidad es $\rho_{Cu} = 8960\,\mathrm{kg/m^3}$ y su resistividad es $\sigma_{Cu} = 1.78 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$, la carga del electrón es $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Hint:

1- La resistencia en un conductor de sección transversal A y longitud l se puede expresar en términos de la conductividad σ como $R = l\sigma/A$

2- De manera general, la ley de Ohm establece que la densidad de corriente J (corriente por unidad de área) en un conductor es proporcional al campo eléctrico E que genera la corriente. La constante de proporcionalidad es el inverso de la conductividad, es decir la ley de Ohm se puede expresar como: $E = \sigma J$

Problema 32, mecánica.

La segunda ley de Newton para una partícula que se mueve es una dimensión, se establece a través de las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,v,t) \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{dv}{dt} = F(x,v,t) \tag{2}$$

donde la fuerza sobre la partícula en general es función de la posición, la velocidad y del tiempo.

Cuando la fuerza solo depende tiempo $F(t)$, se puede integrar la segunda ecuación para encontrar $x(t)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int dv &= \frac{1}{m}\int F(t)\,dt \\
v - v_0 &= \frac{1}{m}\int F(t)\,dt \\
v = \frac{dx}{dt} &= v_0 + \frac{1}{m}\int F(t)\,dt \\
\int dx &= \int v_0 dt + \frac{1}{m}\int \left[\int F(t)\,dt\right] dt \\
x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t''} F(t')\,dt'\right] dt''
\end{aligned} \tag{3}$$

Problema: Una partícula de masa m restringida a moverse en el eje x, parte del reposo al tiempo $t = 0$ y esta sujeta a la fuerza $F(t) = F_0 \sin^2 \omega t$

32.1 Esboza la forma que esperas para $v(t)$ y $x(t)$, para varios periodos de oscilación de la fuerza.

32.2 Encuentra explícitamente las expresiones de la velocidad y la posición: $v(t)$ y $x(t)$.

Por otra parte, el problema general de una partícula que se mueve en una dimensión sometida a un potencial externo $V(x)$ se puede resolver a través de la conservación de la energía, de la siguiente manera:

La energía total de una partícula esta dada por la suma de energía cinética y potencial:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \tag{4}$$

despejando, la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left[E_0 - V(x)\right]}{m}} \tag{5}$$

como la energía es una constante (se conserva), el lado derecho de está ecuación solo depende de la variable x y por lo tanto integrando se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t} dt = t = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{2\left[E_0 - V(x')\right]}}\,dx' \tag{6}$$

Para un potencial dado $V(x)$, en pricipio, es posible realizar la integral derecha y determinar así $x(t)$. Derivando se obtiene la velocidad de la partícula: $v(t) = dx/dt$.

32.3 A través del método de la energía resuelve el problema de una partícula sujeta a una fuerza que satisface la ley de Hooke:

$$F = -kx \tag{7}$$

es decir, calcula $x(t)$ y $v(t)$. Identifica la frecuencia de oscilación ω.

Problema 33, polarización atmosfera.

1. Una onda electromagnética que incide en la ionosfera, la cual tiene una alta densidad de electrones libres, se ve modificada en su propagación por la presencia de estas cargas libres. En especifico, la velocidad de fase de la onda se ve modificada. Para entender esto sigamos el siguiente modelo.

   Sea una onda electromagnética polarizada en la dirección x de la forma:

   $$E_x = E_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{8}$$

   Suponiendo que la ionosfera esta compuesta de electrones libres.

   a) Encuentra las expresiones de $x(t)$ y $v(t)$ para un electrón sujeto al campo eléctrico de la onda (8), supón que el electrón esta en reposo a $t = 0$.

   b) Debido al movimiento oscilatorio del electrón se genera un momento dipolar eléctrico en la dirección x dado por: $p_x = -ex$, donde x es la posición del electrón (en general el momento dipolar es un vector $\bar{p}$, en este caso solo tiene componente x).

   Se define de forma general el momento dipolar total por unidad de volumen como:

   $$\bar{P} = N\bar{p} \tag{9}$$

   donde N es el numero de dipolos $\overline{p}$ por unidad de volumen.

   El movimiento de un electrón dentro de la ionosfera sometido al campo (8) deberá tener un término que oscile con la misma frecuencia que el campo eléctrico. Considerando únicamente este término (de tu resultado en el primer inciso) a la contribución del momento dipolar eléctrico, escribe una expresión para $\overline{P}$ debido a los electrones libres en la ionosfera.

   c) Por otra parte, se define el desplazamiento eléctrico como:

   $$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \tag{10}$$

   donde ε_0 es la constante dieléctrica en el vacío. Sí la constante dieléctrica ε para un medio se define a través de la ecuación:

   $$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \tag{11}$$

   y la velocidad de fase de una onda electromagnética depende de la constante ε del medio a través de la siguiente ecuación:

   $$v = c\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \tag{12}$$

   donde $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la onda en el vacío.

   Encuentra la velocidad de la onda electromagnética en la ionosfera y verifica que es mayor a c -¿contradice esto algún principio de la teoría de la relatividad?-.

Problema 34, varios.

34.1 Una Progresión Geométrica es una sucesión de números reales donde el cociente de cada término con el anterior es una constante, llamada *razón común* y se denota por r.

Encuentra una expresión para la suma de los primeros n términos S_n de una progresión geométrica con razón común r. Cual es la condición sobre r para que la suma S_n sea finita cuando $n \to \infty$.

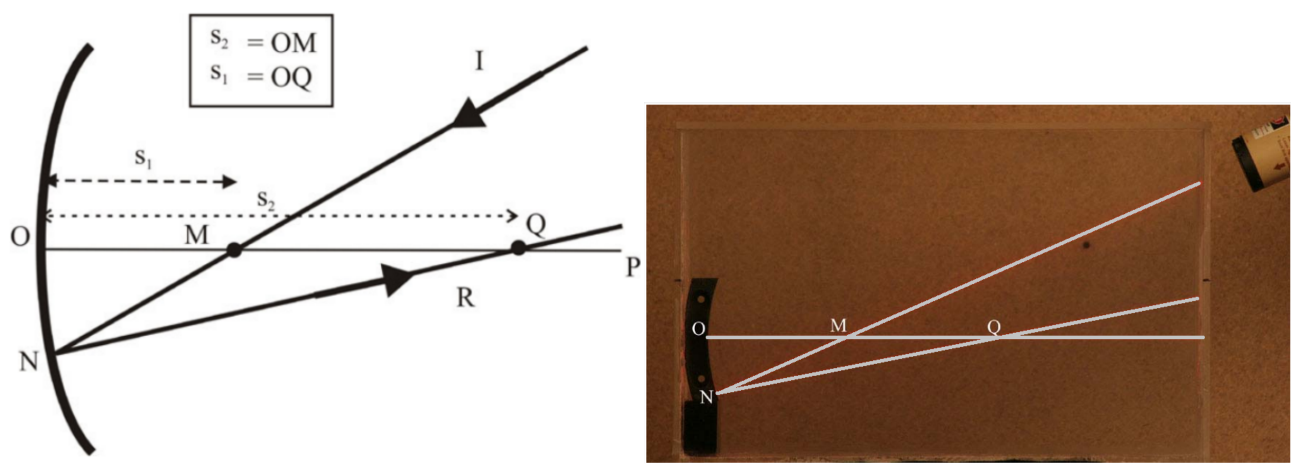
34.2 Encuentra la expresión como número racional de la forma $\frac{a}{b}$, para el número en forma decimal: $0.\bar{3} = 0.3333\ldots$

34.3 Lo mismo para el número $0.1\overline{83} = 0.183838383\ldots$

34.4 Una estrella de neutrones es una colección de neutrones ligados entre ellos mismo debido a la fuerza gravitacional con una densidad comparable con el núcleo atómico $\approx 10^{12}\mathrm{g/cm}^3$. Suponiendo que la estrella de neutrones es una esfera, muestra que la frecuencia máxima con la puede rotar, sin que la masa sobre el ecuador no salga expulsada de la estrella, es $f = (\rho G/3\pi)^{1/2}$. Donde ρ es la densidad, calcula f para una densidad de $10^{12}\mathrm{g/cm}^3$. Se ha sugerido que los pulsares, que emiten chorros de radiación repetidamente a una razón de hasta 30/seg, son estrellas de neutrones rotando.

Problema 35, espejos cóncavos, análisis de datos

En la figura 0.1a está representado el esquema de una sección de un espejo cóncavo. Desde el punto de vista óptico, dos de las características más destacadas de este espejo son: su radio de curvatura, y su eje principal OP. El eje principal se materializa con un rayo luminoso que incide sobre el centro del espejo y después de reflejarse en él, regresa por el mismo camino, esto se muestra en la figura 0.1b con un espejo real.



(a) (b)

Figura 0.1

En la figura 0.1a se ha dibujado un rayo luminoso IN, que corta al eje principal en el punto M, y que después de reflejarse en el espejo sigue la trayectoria NR y corta el eje principal en el punto Q. En la figura 0.1b está la representación real. Imaginemos que M es un punto luminoso y que envía el rayo MN si nos situamos en Q veríamos ese punto luminoso o lo recogeríamos sobre una pantalla allí situada; decimos que **M es un objeto** y **Q una imagen** de ese objeto. La distancia del centro del espejo al objeto se designa por s_1 y la distancia desde el centro del espejo a la imagen por s_2 . Entre ambas distancias existe una relación que se denomina ecuación del espejo.

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R} \tag{13}$$

En la ecuación anterior R es el radio del espejo cóncavo y para un determinado espejo es una cantidad constante. En este experimento se envían rayos luminosos con distintas inclinaciones a un mismo punto del espejo o lo que es igual con distintos valores de s_1. En cada caso se miden s_1 y s_2 y se comprueba si la suma de los valores obtenidos cumple la ecuación

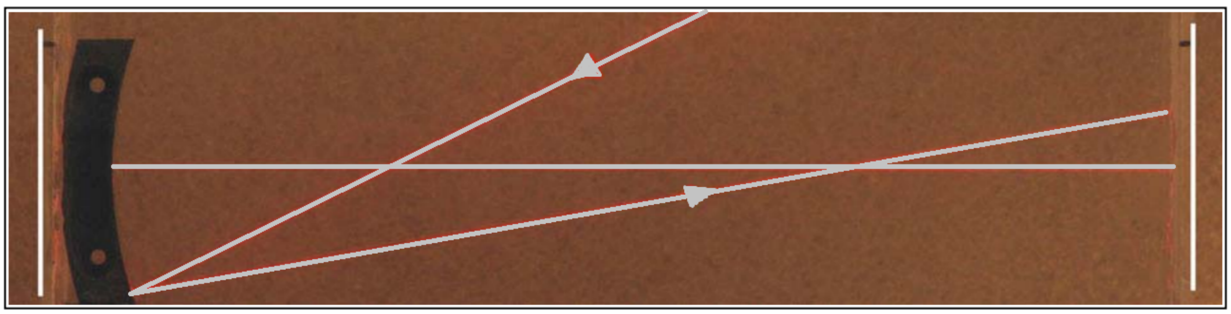
Medidas

incluye las incertidumbres en los valores que reportes.

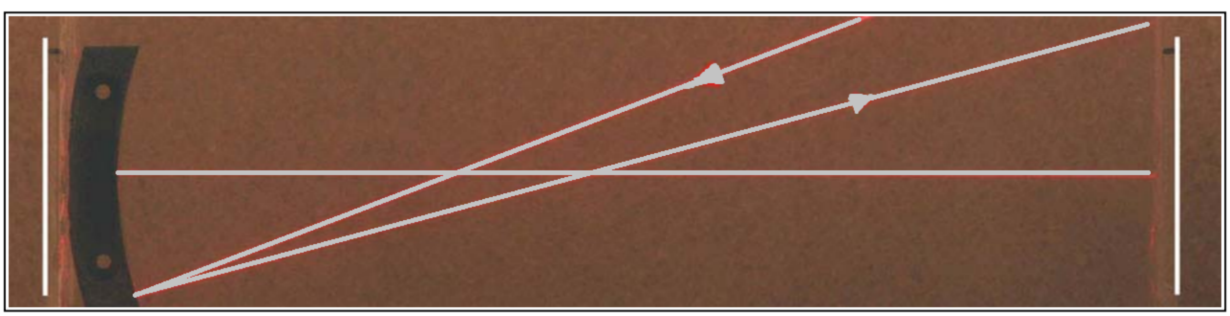
1. A partir de las fotografías de la 1 a la 8, determina el radio de curvatura del espejo R . Para ello en cada fotografía aparecen dos rayas blancas verticales, una a la izquierda y otra a la derecha, siendo la distancia real entre ellas de 40.0 cm.

2. En la fotografía 9 el rayo que corta al eje principal regresa por el mismo camino, lo cual indica que el ángulo de incidencia es nulo y por consiguiente también el de reflexión. Esto significa que ese rayo incide por la normal al espejo, que es uno de sus radios. Determine el valor de R y calcule el porcentaje de diferencia del valor obtenido por medida directa en la fotografía, respecto del obtenido en el apartado 1.

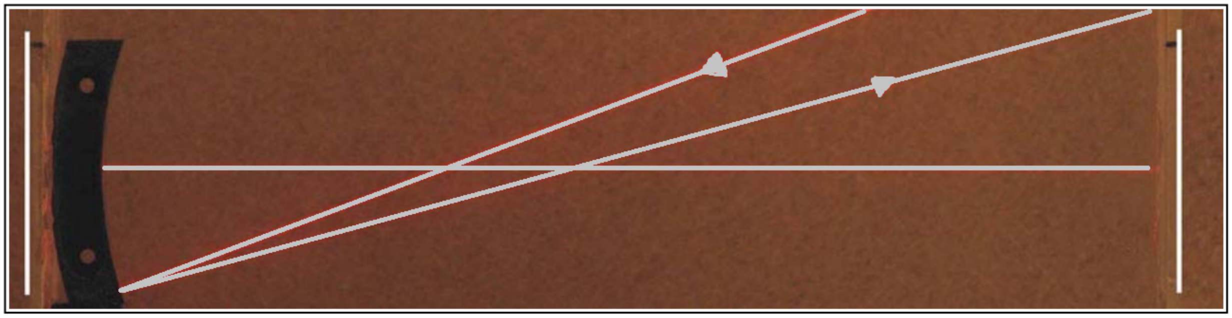
3. Reporta la distancia focal del espejo.



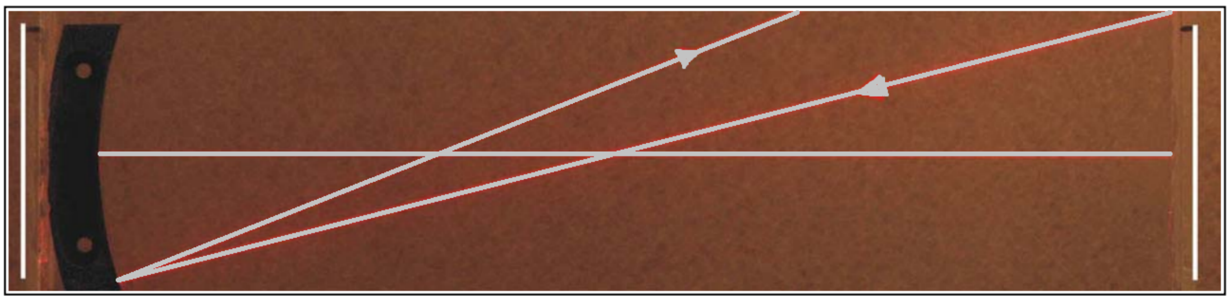
Fotografía 1



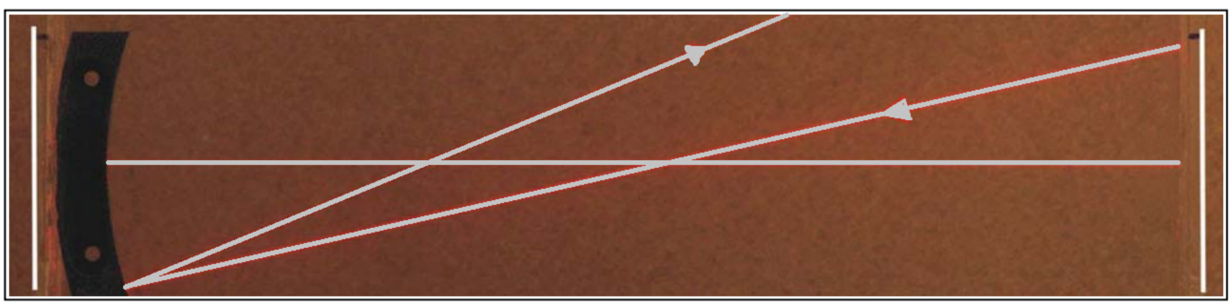
Fotografía 2



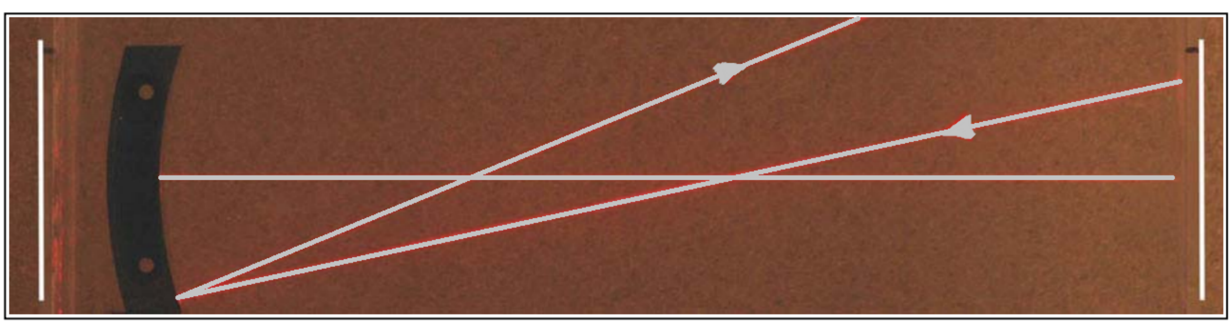
Fotografía 3



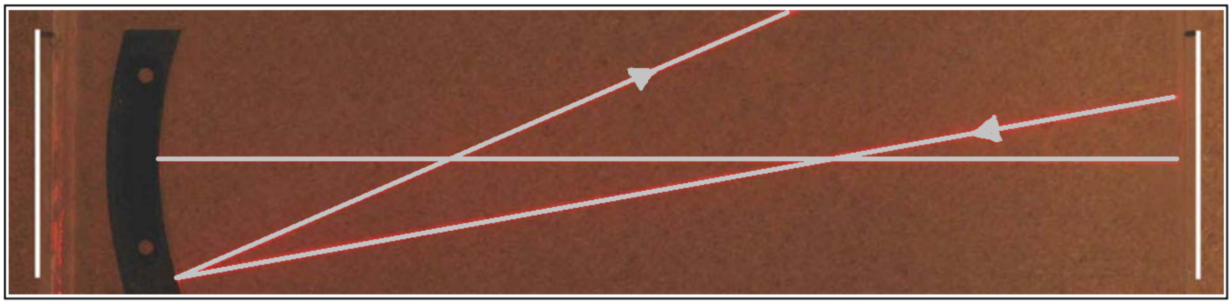
Fotografía 4



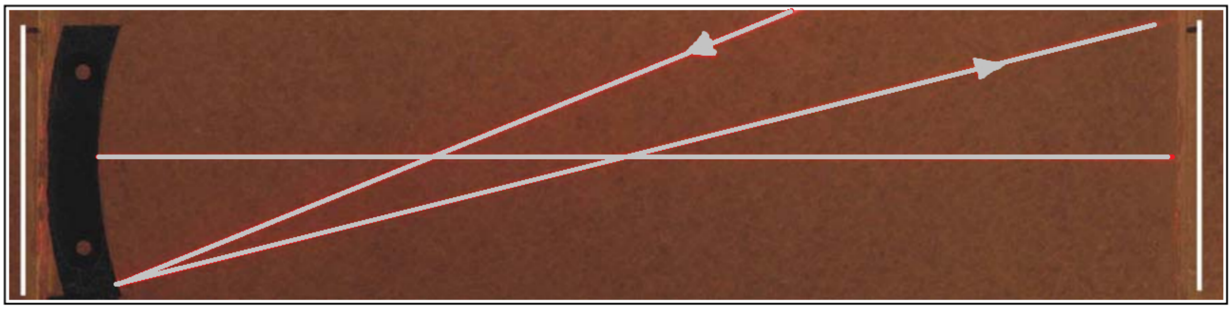
Fotografía 5



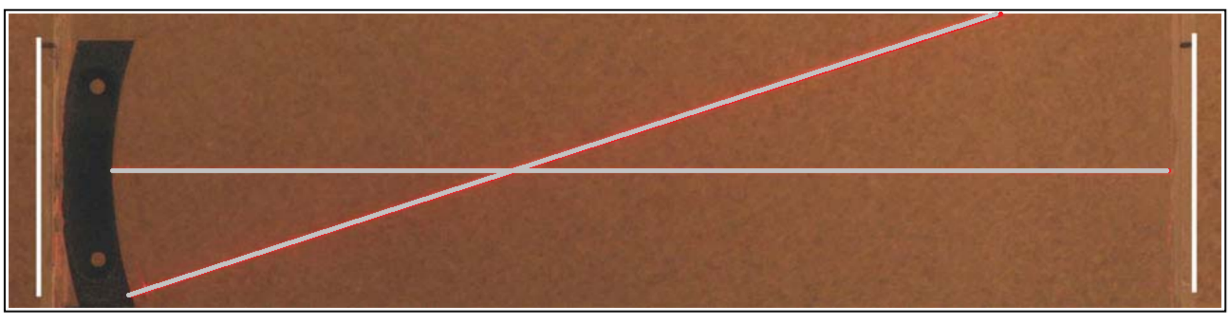
Fotografía 6



Fotografía 7



Fotografía 8



Fotografía 9