Tarea 10

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Fecha de entrega: martes 22 de mayo 2017.

Problema 36, varios de física moderna.

1. Cuál es la mínima energía que se requiere para romper un núcleo de ^{12}C, de masa 11.996 u , en tres núcleos de ^{4}He, de masa 4.001 u

   $1\,\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

2. Determina la expresión del periodo T de una partícula que se mueve en órbita circular en presencia de un campo magnético uniforme B, si m y q son la masa y la carga de la partícula; considera que se mueve con rapidez v cercana a c, es decir considera el límite relativista. Un electrón de 10 eV se mueve en una órbita circular en un campo magnético uniforme $B = 2.2\,\mathrm{T}$; Determina: (a) el radio de la órbita del electrón en el caso clásico, (b) el radio de la órbita correcto (considerando relatividad), (c) el periodo clásico y (d) el periodo correcto considerando efectos relativistas.

   Hint: Para velocidades relativistas, la expresión del radio orbital de una partícula de carga q que se mueve en un campo magnético uniforme B se puede expresar como: $r = p/\left|q\right|B$, donde p es el momento lineal de la partícula.

3. Un radar transmisor T esta fijo en un sistema de referencia S' que se mueve a la derecha con velocidad v respecto de un sistema de referencia S. Un mecanismo que funciona con un reloj permite que el transmisor T emita pulsos, con un periodo τ_0 (medido en S'), que viajan a la velocidad de la luz y son recibidos por un receptor R fijo en el sistema S. (a) ¿Cuál es el periodo τ detectado por un observador A fijo en el sistema S? en el sistema S? (b) Muestra que en el receptor R el intervalo de tiempo entre pulsos que llegan de T es:

$$\tau_R = \tau_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{1}$$

   Hint: El reloj y el radar no son la misma cosa.

4. Un modelo simple del átomo de helio tiene dos electrones, cada uno con masa m_e, que se mueven en torno al núcleo (de carga $+2e$) en la misma órbita circular. Cada electrón tiene cantidad de movimiento angular orbital $\hbar$ (esto es, la órbita es la de Bohr con radio mínimo), y los dos electrones siempre están en los lados opuestos del núcleo. No tenga en cuenta los efectos del espín. a) Determine el radio de la órbita, y la rapidez orbital de cada electrón. [Cada electrón siente una fuerza de atracción hacia el núcleo, y una fuerza de repulsión hacia el otro electrón.] b) ¿Cuál es la energía cinética total de los electrones? c) ¿Cuál es la energía potencial del sistema, el núcleo y los dos electrones? d) En este modelo, ¿cuánta energía se necesita para llevar los dos electrones al infinito? ¿Cómo se compara con el valor experimental de 79.0 eV?

5. a) Una partícula libre no relativista, de masa m, tiene energía cinética K. Deduzca una ecuación de la longitud de onda de De Broglie de la partícula, en función de m y K. b) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 800 eV?

   a) Si un fotón y un electrón tienen la misma energía de 20.0 eV cada uno, determine su longitud de onda. B) Si un fotón y un electrón tienen la misma longitud de onda de 250 nm cada uno, calcule su energía. c) Va a estudiar una molécula orgánica de unos 250 nm de longitud, ¿usará un microscopio óptico o uno electrónico? Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de onda que debe usar y qué técnica, los fotones o los electrones? Probablemente, ¿cuál de los dos dañará menos la molécula?

6. ¿A través de qué diferencia de potencial se deben acelerar los electrones para que tengan la misma longitud de onda que un rayo x de 0.150 nm? ¿y para que tengan la misma energía que el rayo x?

   Aproximadamente con qué velocidad debe moverse un electrón para que tenga una longitud de onda con la que se pueda medir la distancia entre átomos adyacentes en los cristales normales (unos 0.10 nm)? ¿Cuál es la energía cinética del electrón en este caso? ¿Cuál sería la energía de un fotón de la misma longitud de onda que el electrón? ¿Cuáles de ellos, electrones o fotones, serían un detector más efectivo en estructuras pequeñas? ¿Por qué?

7. **Energía del protón en un núcleo**. Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. a) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un protón, si se confina dentro de un núcleo. b) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre la energía y la cantidad de movimiento, para obtener una estimación de la energía cinética de un protón confinado dentro de un núcleo. c) Para que un protón permanezca enlazado dentro de un núcleo, ¿cuál debe ser la magnitud de la energía potencial (negativa)? Exprese su respuesta en eV y en MeV Compárela con la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, cuya magnitud es de algunas decenas de eV. (Esto explica por qué la interacción que mantiene unido al núcleo se llama "fuerza nuclear fuerte".)

8. **Energía del electrón en un núcleo**. Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. a) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un electrón, si está confinado dentro de un núcleo. b) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre energía y cantidad de movimiento para obtener un estimado de la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo. c) Compare la energía calculada en el inciso b) con la magnitud de la energía potencial de Coulomb de un protón y un electrón separados una distancia de 5.0×10^{-15} m. Con base en su resultado, ¿podría haber electrones dentro del núcleo? compara con el problema anterior.

9. La gigante roja Betelgeuse. La gigante roja Betelgeuse tiene una temperatura de 3000 K en su superficie y 600 veces el diámetro de nuestro Sol. (Si nuestro Sol tuviera esas dimensiones, ¡estaríamos dentro de él!) Suponga que Betelgeuse irradia como un cuerpo negro ideal. a) Si Betelgeuse irradiara toda esta energía en la longitud de onda de máxima intensidad, ¿cuántos fotones por segundo irradiaría? b) Determine la razón entre la potencia que irradia Betelgeuse y la potencia que irradia nuestro Sol (a 5800 K).

10. Un átomo de masa m emite un fotón de longitud de onda λ. a) ¿Cuál es la rapidez de retroceso del átomo? b) ¿Cuál es la energía cinética K del átomo en retroceso? c) Calcule la relación K/E, donde E es la energía del fotón emitido. Si esta relación es mucho menor que la unidad, se puede despreciar el retroceso del átomo en el proceso de emisión. ¿El retroceso del átomo es más importante para masas atómicas pequeñas o grandes? ¿Y para longitudes de onda largas o cortas? d) Calcule K (en electrón volts) y K/E para un átomo de hidrógeno (masa 1.67×10^{-27} kg) que emite un fotón ultravioleta de 10.2 eV de energía. En este proceso de emisión, ¿es el retroceso una consideración importante?

11. Cuando un átomo emite un fotón, el átomo debe retroceder para conservar la cantidad de movimiento. Eso quiere decir que el fotón y el átomo que retrocede comparten la energía de transición. a) Calcule, para un átomo con masa m, la corrección $\Delta\lambda$ debida al retroceso de la longitud de onda de un fotón emitido. Sea λ la longitud de onda del fotón si no se tiene en cuenta el retroceso. (Sugerencia: la corrección es muy pequeña por lo que $|\Delta\lambda|/\lambda \ll 1$ Use esto para obtener una ecuación aproximada de $\Delta\lambda$. b) Evalúe la corrección para un átomo de hidrógeno en el que un electrón en el nivel n regresa al nivel fundamental. ¿Cómo depende el resultado de n?

Problema 37, modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

En 1913 Bohr propuso un modelo para describir el átomo de hidrógeno que fue motivado por dos ideas principales: el modelo planetario de Rutherford y la hipótesis cuántica de Einstein y Planck. Rutherford basado en sus resultados experimentales había propuesto un modelo "planetario" para la estructura del átomo de hidrógeno; es decir, un núcleo formado por el protón y girando alrededor de esté, el electrón. Por otra parte, los trabajos de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico y el de Planck sobre la radiación de cuerpo negro habían establecido la cuantización de la energía.

Bohr toma estas dos ideas como parte central de su modelo del átomo de hidrógeno y establece los siguientes postulados:

I El electrón se mueve alrededor del núcleo en **órbitas circulares estacionarias** debido a la fuerza electrostática con el protón.

II Las únicas órbitas posibles sobre las que se mueve el electrón son tales que el momento angular del electrón esta *cuantizado*; es decir, solo puede tomar los siguientes valores:

$$L = n\hbar, \qquad n = 1,\, 2,\, 3, \dots \tag{2}$$

donde se define $\hbar \equiv h/2\pi$, siendo $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ la constante de Planck. El *número cuántico* n denota los posibles *estados cuánticos* del electrón en el átomo de hidrógeno.

En ausencia de campos externos el electrón ocupa el estado de menor energía (el *estado base* corresponde a $n = 1$)

II La emisión o absorción de luz (un fotón) se presenta cuando el electrón cambia de órbita, se dice entonces que el átomo realiza una transición. El cambio de energía del átomo en la transición esta relacionada con la frecuencia del fotón ν, que se emite *emite* o *absorbe*:

$$\nu = \frac{|\Delta E|}{h} \tag{3}$$

Si el electrón pasa de una órbita de mayor a menor energía entonces el átomo emite un fotón; en caso contrario, cuando el átomo absorbe un fotón el electrón realiza una transición de un estado de menor a mayor energía.

Ejercicios:

1. Calcula el radio de las órbitas estacionarias del electrón (es decir encuentra una expresión del radio en términos del número cuántico n). El primer valor $n = 1$, corresponde al radio de Bohr $a_0 = 5.3 \times 10^{-11}$ m.

2. Demuestra que la velocidad del electrón en las órbitas estacionarias, esta dada por:

$$v_n = \frac{\alpha}{n} c \tag{4}$$

donde $\alpha \approx 1/137$ y $c = 299,792,458$ m/s $\approx 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Calcula el valor de la velocidad del electrón en el estado base.

3. Encuentra los valores de la energía E_n del electrón en cada una de las órbitas estacionarias en términos del número n, esto corresponde a la cuantización de la energía para el átomo de hidrógeno.

4. Cuál es el valor de la energía en el estado base $n = 1$, exprésala en unidades de electronvolts.

5. Demuestra que la longitud de onda de los fotones emitidos por el electrón al pasar de un estados cuántico inicial con número n al estado final con $n' = 2$ ($n > n'$), esta dada por la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{5}$$

donde debes determinar la expresión de λ_e y calcular su valor numérico en metros (nota que tiene unidades de longitud).

Problema 38, Inconsistencia del modelo de Bohr con la radiación electromagnética.

En el modelo atómico de Bohr considera que el electrón gira alrededor del núcleo en órbitas estacionarias; sin embargo esta hipótesis esta totalmente en desacuerdo con la física clásica ya que toda partícula cargada al estar acelerada emite radiación electromagnética, este es un resultado general de la teoría electromagnética. Entonces por conservación de energía esta radiación debe ser compensada por la energía cinética del movimiento del electrón, lo que debería provocar que el electrón se "frene" hasta finalmente "caer" al núcleo y el átomo de hidrógeno se colapsaría.

El modelo de Bohr postula entonces que cuando el electrón se mueve en una de sus órbitas estacionarias NO emite radiación electromagnética. El electrón solo emite radiación -un fotón- cuando cambia de órbita (de mayor energía a menor), se dice entonces que el electrón ***realiza una transición*** entre dos estados cuánticos. La frecuencia del fotón emitido esta determinada por el cambio de energía entre los dos estados (*niveles cuánticos*):

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_f - E_i}{h} \tag{6}$$

Donde la energía final E_f e inicial E_i corresponden a los posibles valores de los estados de energía del átomo de hidrogeno E_n.

El siguiente problema tiene por objeto hacer una estimación, clásica y no relativista, del tiempo que tardaría en aniquilarse un átomo de hidrógeno según las teorías clásicas de la mecánica y de la radiación, partiendo del hecho de que la energía de ionización de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental o no excitado es $E_0 = -13.6$ eV.

1. Suponiendo que la órbita del electrón es circular de radio r, obtenga las expresiones de la energía total del electrón E, de su velocidad v, de su aceleración a y de su periodo de revolución T, en función de la energía total E_0 del átomo de hidrógeno en el estado base y del radio r_0 de la órbita circular en dicho estado.

2. Determine y calcule E_0 y r_0 así como la velocidad, la aceleración y el periodo en esta órbita, v_0, a_0, y T_0, respectivamente.

   Cuando un electrón se mueve con aceleración a, la potencia radiante que emite viene dada por la fórmula de Larmor:

   $$P = \frac{2}{3}\frac{ke^2}{c^3}a^2 \tag{7}$$

   en la que $k = 1/4\pi\epsilon_0$ es la constante de Coulomb, c la velocidad de la luz y e la carga elemental.

3. Al perder energía, el electrón irá describiendo órbitas de radio cada vez menor. Halle la expresión de la potencia emitida P en función del radio r de la órbita circular del electrón, de r_0 y de E_0. Puede comprobar que tanto $E(r)$ como $P(r)$ tienden a infinito cuando $r \to 0$.

   Este absurdo físico es consecuencia de que en las antiguas teorías se idealizaba al electrón y al protón considerándolos como partículas puntuales. Pasemos por alto estos inconvenientes y vayamos al objetivo de este ejercicio:

4. ¿Cuál es el tiempo τ que le costaría a un electrón "caer" sobre el núcleo desde la órbita del estado fundamental de radio r_0?