ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2014, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA
TAREA # 2 ENVIAR VIERNES 31 ENERO

Problema 1 Modelo de Bohr.

En **1913** (hace 101 años!) Bohr propuso un modelo para describir el átomo de hidrógeno que fue motivado por dos ideas principales: el modelo planetario de Rutherford y la hipótesis cuántica de Einstein y Planck. Rutherford basandose en sus resultados experimentales había propuesto un modelo "planetario" para la estructura del átomo de hidrógeno; es decir, un núcleo formado por el protón y girando alrededor de esté, el electrón. Por otra parte, los trabajos de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico y el de Planck sobre la radiación de cuerpo negro habían establecido la cuantización de la energía.

Bohr toma estas dos ideas como parte central de su modelo del átomo de hidrógeno y establece los siguientes postulados:

I El electrón se mueve alrededor del núcleo en **órbitas circulares estacionarias** debido a la fuerza electrostática con el protón.

II Las únicas órbitas posibles sobre las que se mueve el electrón son tales que el momento angular del electrón esta *cuantizado*; es decir, solo puede tomar los siguientes valores:

$$L = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

donde se define $\hbar \equiv h/2\pi$, siendo $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s la constante de Planck. El *número cuántico* n denota los posibles *estados cuánticos* del electrón en el átomo de hidrógeno.

En ausencia de campos externos el electrón ocupa el estado de menor energía (el *estado base* corresponde a $n = 1$)

II La emisión o absorción de luz (un fotón) se presenta cuando el electrón cambia de órbita, se dice entonces que el átomo realiza una transición. El cambio de energía del átomo en la transición esta relacionada con la frecuencia del fotón ν, que se emite *emite* o *absorbe*:

$$\nu = \frac{|\Delta E|}{h} \tag{2}$$

Si el electrón pasa de una órbita de mayor a menor energía entonces el átomo emite un fotón; en caso contrario, cuando el átomo absorbe un fotón el electrón realiza una transición de un estado de menor a mayor energía.

Preguntas:

1.1 Calcula el radio de las órbitas estacionarias del electrón (es decir encuentra una expresión del radio en términos del número cuántico n). El primer valor $n = 1$, corresponde al radio de Bohr $a_0 = 5.3 \times 10^{-11}$ m.

1.2 Demuestra que la velocidad del electrón en las órbitas estacionarias, esta dada por:

$$v_n = \frac{\alpha}{n} c \tag{3}$$

donde $\alpha \approx 1/137$ y $c = 299,792,458$ m/s $\approx 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Calcula el valor de la velocidad del electrón en el estado base.

1.3 Encuentra los valores de la energía E_n del electrón en cada una de las órbitas estacionarias en términos del número n, esto corresponde a la cuantización de la energía para el átomo de hidrógeno.

1.4 Cuál es el valor de la energía en el estado base $n = 1$, exprésala en unidades de electronvolts.

1.5 Demuestra que la longitud de onda de los fotones emitidos por el electrón al pasar de un estados cuántico inicial con número n al estado final con $n' = 2$ $(n > n')$, esta dada por la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{4}$$

donde debes determinar la expresión de λ_e y calcular su valor numérico en metros (nota que tiene unidades de longitud).

Problema 2

Una espira conductora cuadrada de lado a esta situada a una distancia x de un alambre recto que conduce una corriente I, como se muestra en la figura. La espira se mueve con velocidad constante v de forma perpendicular al alambre.

Encuentra la fuerza electromotriz en la espira, como función de la distancia x; explica el origen de esta fuerza electromotriz. Indica cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira.

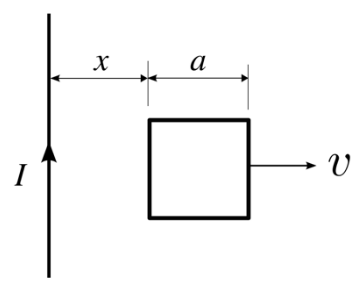


Figura 1:

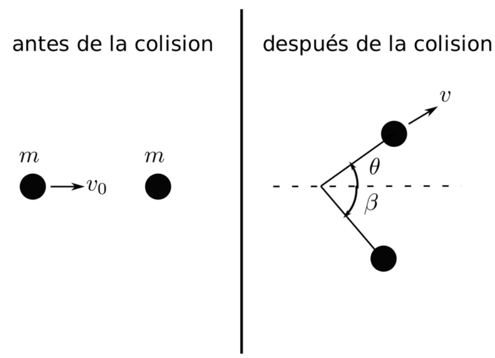
Problema 3

3.1 Un tubo cilíndrico de sección transversal S y altura 76 cm, está cerrado por un extremo. El tubo está sobre mercurio (densidad ρ) de modo que éste penetra en el tubo hasta una altura h_x. Entre el extremo cerrado del tubo y el nivel del mercurio existen 0,001 mol de un gas ideal cuya capacidad calorífica molar es $C_v = 20.5$ J/mol K. La presión exterior al tubo equilibra la de una columna de mercurio de 76 cm de altura. Si la temperatura del gas desciende 10 °C ¿cuánto calor cede dicho gas al ambiente?

3.2 Un globo aerostático junto con su canasta tiene una masa de $m = 200$ kg (sin incluir el aire dentro del globo). El aire fuera del globo esta a 10°C. El volumen del globo aerostático es de 400 m^3. Suponiendo que la densidad del aire fuera del globo, a temperatura de 10°C es: $\rho_{out} = 1.25$ kg/m^3. A qué temperatura debe ser calentado el aire dentro del globo antes de que comience a levantarse.

Problema 4

4.1 Una partícula con velocidad inicial v_0 y masa m colisiona con otra partícula de igual masa pero que se encuentra en reposo. Después de la colisión la primer partícula se mueve con velocidad v formando un ángulo θ, respecto a la linea con que incide. La segunda partícula es expulsada en un ángulo β, respecto a esta misma linea pero hacia abajo (ver siguiente figura).



Muestra que:

$$\tan\beta = \frac{v\,\sin\theta}{v_0 - v\cos\theta} \tag{5}$$

4.2 Un pequeño bloque de masa m se desliza sobre la superficie de una rampa desde una altura h y entra en un aro de radio R, como lo muestra la siguiente figura (la rampa y el aro no presentan fricción).

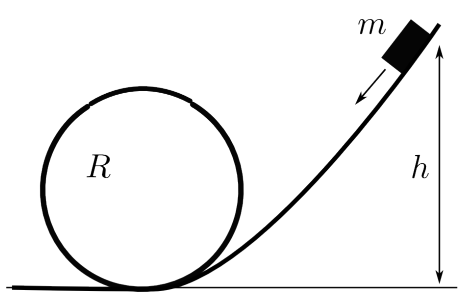


Figura 2:

a) Calcula la altura mínima h para que el bloque complete la vuelta a través del del aro sin despegarse.

Ahora supongamos que se elimina parte del aro, entre los punto A y B, como lo muestra la figura de abajo.

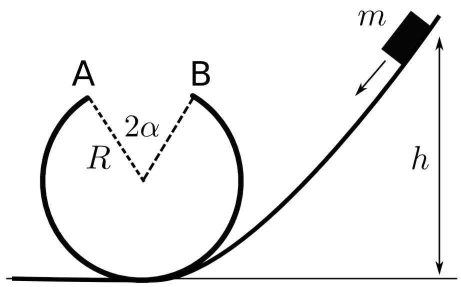


Figura 3:

b) Con el valor de h calculado en el inciso anterior, encuentra el valor del ángulo α necesario para que el bloque llegue hasta el punto B y complete de nuevo la vuelta sobre el aro ahora roto.

Problemas de matemáticas

Problema 1

Usando las siguientes formulas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{7}$$

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{ángulo doble} \qquad \begin{cases} \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases} \tag{8}$$

$$\text{ángulo mitad} \qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} \\ \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases} \tag{9}$$

$$\text{producto} \Rightarrow \text{suma} \qquad \begin{cases} \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big] \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big] \\ \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big] \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{suma} \Rightarrow \text{producto} \qquad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases} \tag{11}$$

Problema 2

Calcula las siguientes integrales:

2.1 $\int 3x\sqrt{1-2x}dx =$

2.2 $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx =$

2.3 $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx$

2.4 $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx =$

Problema 3

3.1 La distancia entre los centros de dos circunferencias que se cruzan, de radios R y r, es igual d. Hallar el área de intersección entre los dos círculos.

Solución:

$$A = R^2 \arccos\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right) + r^2 \arccos\left(\frac{d^2+r^2-R^2}{2rd}\right) - Rd\sqrt{1-\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right)^2} \quad (12)$$

3.2 El volumen de un prisma triangular regular es V, el ángulo entre las diagonales de dos de sus caras, trazadas desde un mismo vértice, es igual a α. Hallar el lado a de la base del prisma.

Solución:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8V\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3-12\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad (13)$$