Tarea 7

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2017**
Fecha de entrega: lunes 3 de abril 2017.

Problema 26, ecuación de van der Waals

La ecuación de gas ideal: $PV = nRT$ es una aproximación a la descripción real de los gases que se satisface bien para bajas presiones y bajas densidades, la ecuación del gas ideal no depende del tipo de sustancia que esta compuesto el gas. El modelo microscópico del gas ideal es un sistema de partículas puntuales (sin dimensiones) que no interactúan entre ellas, es decir no ejercen ninguna tipo de fuerza unas a otras.

Por otra parte existe la ecuación de van der Waals que describe de mejor manera el comportamiento de los gases, sobre todo cerca del punto critico y en la coexistencia de la fase liquida y de vapor de una sustancia. El modelo microscópico en el que se basa la ecuación de van der Waals es que las partículas del gas tienen un volumen finito (no cero) y que interactúan atractivamente.

La ecuación de van der Waals esta dada por:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \tag{1}$$

donde $v = V/n$ es el volumen molar (n es el número de moles del gas); a, b son dos constantes que dependen de la sustancia que esta compuesto el gas . La energía molar $u = U/n$ para el modelo de van der Waals esta dada por:

$$u = c_v T - \frac{a}{v} \tag{2}$$

26.1 Calcula la expresión de la compresibilidad isotérmica: $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ y el coeficiente de expansión volumétrica: $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

26.2 Demuestra que para la ecuación de van der Waals se obtiene que:

$$c_p - c_v = \frac{RT}{T - T_{esp}(v)}, \qquad \text{donde: } T_{esp}(v) = \frac{2a}{R}\frac{(v-b)^2}{v^3} \tag{3}$$

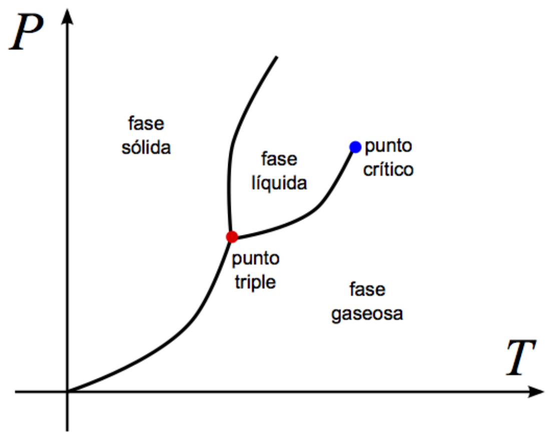
26.3 Determina la expresión de las curvas adiabáticas para el modelo de van der Waals en el espacio $p - v$ y determina la expresión del trabajo en un proceso adiabático desde un volumen molar inicial v_1 a un volumen final v_2.

26.4 Determina la expresión de la entropía molar: $s(T, v)$ para el modelo de van der Waals (la entropía molar es $s = S/n$).

26.5 Demuestra que la expresión del calor en un proceso isotérmico realizado por un gas de van der Waals esta dado por:

$$Q_{isot} = nRT \ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) \tag{4}$$

El punto crítico de una sustancia es aquel donde coexisten en equilibrio la fase liquida y vapor (gas), caracterizado además por el hecho de no haber una interfase que separe ambas fases. Este punto es el límite de la curva de coexistencia liquido-gas (ver figura), en general sobre esta curva una sustancia se encuentra en fase líquida y gaseosa en equilibrio manteniéndose cada fase por separado a través de una interfase bien marcada. Sin embargo esta curva tiene un límite que termina en el punto crítico, donde ambas fases no están separadas por una interfase definida, sino que se trata de una mezcla de vapor saturado. El punto critico es único para una sustancia pero es diferente para cada sustancia y está definido por: p_c, V_c, T_c (presión, volumen y temperatura criticas).



26.6 De manera general, para un gas con una ecuación de estado $p\left(V,T\right)$, el punto critico está definido como un punto de inflexión:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right) &= 0\\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right) &= 0\end{aligned} \tag{5}$$

Determina el punto critico para la ecuación de van der Waals es decir encuentra: (p_c,V_c,T_c) en términos de los parámetros a, b de la ecuación de van der Waals, n el número de moles y la constante de los gases R.

26.7 Demuestra que la ecuación de Van der Waals se puede escribir en términos de las variables adimensionales: $\mathfrak{p} = p/p_c$, $\mathfrak{v} = V/V_c$, $\mathfrak{t} = T/T_c$, de la siguiente manera:

$$\left(\mathfrak{p} + \frac{3}{\mathfrak{v}^2}\right)(3\mathfrak{v} - 1) = 8\mathfrak{t} \tag{6}$$

Considerando que $1/3 \ll \mathfrak{v}$ y $8/\left(9\mathfrak{t}\right) \ll \mathfrak{v}$ demuestra que la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión, similar al gas ideal:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{v} \approx \frac{8}{3}\mathfrak{t} \tag{7}$$

Recuerda que de manera general para un gas la diferencia entre las calores específicos esta dada por la siguiente expresión:

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{8}$$

La forma diferencial de la primera ley se escribe como:

$$dU = \text{đ}Q + \text{đ}W \tag{9}$$

donde el trabajo termodinamico en un gas esta dado por: $\text{đ}W = -pdV$

La entropía es una variable de estado cuya diferencial (exacta) es: $dS = \frac{\text{đ}Q}{T}$

Por ejemplo, la entropía de un gas ideal se puede calcula a partir de la primera ley en su forma diferencial, la ecuación del gas ideal: $pV = nRT$ y la ecuación de la energía para el gas ideal: $U = C_V T$. Así, para el gas ideal se tiene que la diferencial de la entropía es:

$$dS = \frac{\text{đ}Q}{T} = \frac{1}{T}\left(dU - \text{đ}Q\right) = \frac{1}{T}\underbrace{C_V dT}_{dU = C_V dT} - \frac{1}{T}\left(\underbrace{-pdV}_{\text{đ}Q = -pdV}\right) = \frac{C_V}{T}dT + \underbrace{\frac{nR}{V}}_{p/T = nR/V} dV \tag{10}$$

integrando la ecuación anterior se puede llegar a la expresión de la entropía:

$$S = S_0 + C_V \ln\left(T/T_0\right) + \frac{n}{R}\ln\left(V/V_0\right) \tag{11}$$

donde T_0 y V_0 son los valores correspondientes a la entropía S_0 y en general representan los valores iniciales de cualquier proceso termodinámico.

**Muestra que la expresión

Problema 27, electrostática.

Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas

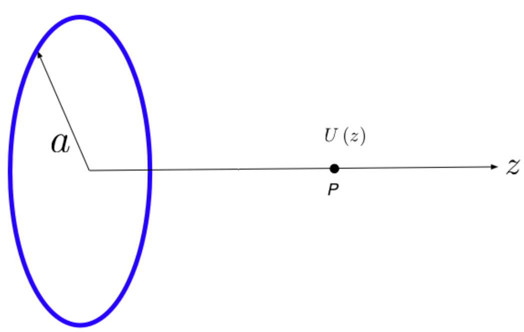
El potencial eléctrico en un punto P debido a una distribución de carga esta dado por:

$$U\left(P\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} + U_0 \tag{12}$$

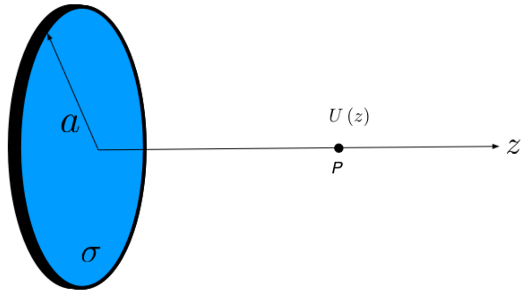
donde r es la distancia desde el elemento diferencial de carga dq al punto P, la integral se debe hacer sobre toda la distribución de carga. En general el diferencial de carga puede ser:

$$dq = \begin{cases} \rho dV & \rho \text{ (densidad volumetrica de carga)}, \quad dV \text{ (diferencial de volumen)} \\ \sigma dS & \sigma \text{ (densidad superficial de carga)}, \quad dS \text{ (diferencial de superficie)} \\ \lambda dl & \lambda \text{ (densidad lineal de carga)}, \quad dl \text{ (diferencial de longitud)} \end{cases} \tag{13}$$

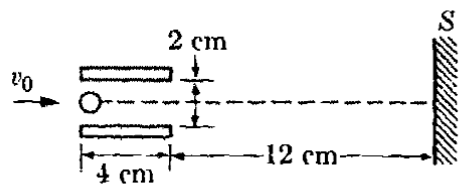
1. Considera un anillo circular de radio a y densidad lineal de carga constante λ. Determina el potencial electrostático en un punto P sobre el eje del anillo que se encuentra a una distancia z desde el centro del anillo. Estima la distancia z_0 a partir de la cual el anillo puede ser considerado como una carga puntual con un error del 1 %.



2. Determina el potencial electrostático de un disco circular de espesor despreciable, sobre el eje del anillo circular, cuya densidad de carga superficial (área) σ es constante.



3. Se lanza un electrón con una velocidad inicial de $v_0 = 2.0 \times 10^7$ m/s en la dirección de un eje equidistante de las placas de un tubo de rayos catódicos, ver figura. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una intensidad de 20000 N/C y está dirigido hacia arriba, de acuerdo a la figura. (a) determina la distancia perpendicular al eje que ha recorrido el electrón cuando pasa por el extremo de las placas; (b) ¿qué ángulo con el eje forma su velocidad cuando abandona las placas? (c) ¿A qué distancia por debajo del eje choca con la pantalla fluorescente S ?

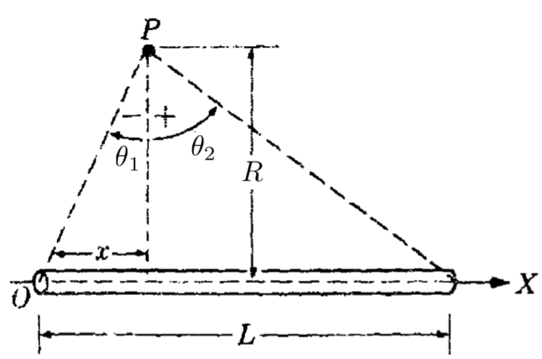


4. En un tubo de rayos X se acelera un electrón inicialmente en reposo al pasar desde el cátodo al ánodo a través de una diferencia de potencial de 18×10^4 V, al llegar al ánodo, (a) ¿cuál es su energía cinética en eV?, un electrón volt (eV) es la unidad de energía definida como la energía que adquiere un electrón cuando pasa a través de una diferencia de potencial de un volt; (b) su velocidad v (c) su masa relativista $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, donde m_0 es la masa en reposo del electrón, $\beta = v/c$ y $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío.

5. Se tiene un alambre de longitud L con una densidad de carga λ, (a) probar que el campo eléctrico en un punto a una distancia R del alambre del alambre esta dado por:

$$\begin{aligned} E_\perp &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) \\ E_\parallel &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) \end{aligned} \tag{14}$$

donde $E_\perp$ y $E_\parallel$ son las componentes del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en la dirección perpendicular y paralela respectivamente, θ_1 y θ_2 se muestran en la figura, así como sus signos. ¿Cuáles son los valores en un punto equidistante de los extremos?



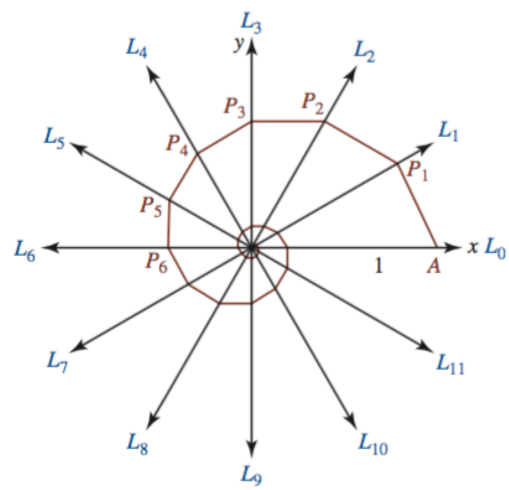
6. Se disponen en forma alternada un número infinito de cargas positivas y negativas $\pm q$ sobre una línea recta. La separación entre as cargas adyacentes es la misma, igual a r. Demostrar que la energía potencial de una carga es $-\frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}\ln(2)$

   Sugerencia: emplea el desarrollo de Taylor de la función $\ln(1+x)$

Problema 27, varios

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

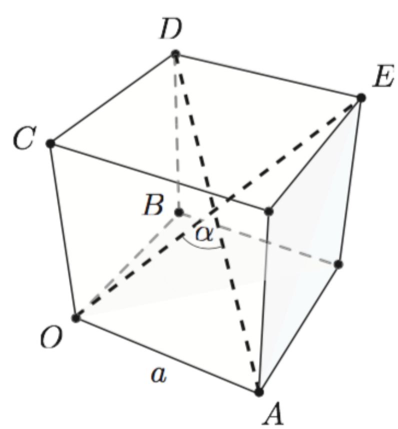
1. Si se deja caer una pelota desde una altura s ¿cuál es el tiempo de caída de la pelota? Supón ahora que la pelota rebota siempre hasta cierta fracción fija β $(0 < \beta < 1)$ de su altura previa. Encuentre el tiempo T que tarda la pelota en llegar al reposo.
2. Hay doce rayos que emanan del origen y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es 30°. Se construye un polígono a partir del segmento de recta AP_1 perpendicular al rayo L_1, después se continua con el segmento de recta P_1P_2 perpendicular al rayo L_2, y así sucesivamente. Encuentra la longitud de la trayectoria poligonal completa $AP_1P_2P_3\ldots$



3. Encuentra las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 2y + y^2 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

4. Encuentra el ángulo α que se forma entre las diagonales de un cubo de lado a... usa vectores!



Problema 28, ecuaciones diferenciales de primer orden, variables separables.

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de **variables separables** si se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \tag{16}$$

esta ecuación se debe resolver para la función incógnita $y(x)$ y el procedimiento para resolverla es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx \end{aligned} \tag{17}$$

en la última expresión el lado derecho solo depende de x y el lado izquierdo solo depende de y y por lo tanto es posible integrar ambos lados de la ecuación para determinar la función $y(x)$. La constante de integración queda determinada por la condición inicial: $y(x_0) = y_0$. En general la solución de la ecuación diferencial determina una familia de curvas: $f(x, y) = c$, siendo c una constante.

Resuelve al menos 4 de los siguientes problemas:

(a) $y\,\ln x\,\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

(b) $\sin 3x\,dx + 2y\,\cos^3 3x\,dy = 0$

(c) $y\,\ln x\,\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

(d) $e^x y\,\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

(e) $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

(f) $\left(e^x + e^{-x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y^2$

(g) $\dfrac{dx}{dt} = 4\left(x^2+1\right), \qquad x(\pi/4) = 1$

(h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \qquad y(-1) = -1$

Resuelve al menos 3 de los siguientes problemas:

1. La población de bacterias en un cultivo crece en razón proporcional al número de bacterias presentes en el instante t. Después de 3 h se observa que hay 400 bacterias presentes. Al cabo de 10 h hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era el número inicial de bacterias?

2. Inicialmente, 50 lb de sal se disuelven en un gran tanque que contiene 300 gal de agua. Una solución de salmuera se bombea hacia el tanque a razón de 3 gal/min, y luego la solución bien mezclada se extrae al mismo ritmo. Si la concentración de la solución que entra es 2 gal/lb, determine la cantidad de sal en el tanque en el instante t. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Y después de un tiempo muy largo?

3. La siguiente ecuación diferencial (no lineal) es un caso de las ecuaciones de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \tag{18}$$

Mediante la sustitución $y = 1/u$, resuelve la ecuación diferencial anterior.

4. Cuando dos productos químicos A y B se combinan, se forma un compuesto C. La reacción de segundo orden resultante entre los dos productos químicos es modelada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = k\,(250 - X)\,(40 - X) \tag{19}$$

donde $X\,(t)$ denota el numero de gramos del compuesto C presentes al tiempo t.

a) Determine $X\,(t)$, si $X\,(0) = 0$ y $X\,(10) = 30\,\mathrm{g}$

b) Qué cantidad de compuesto C hay a los 15 minutos.

c) Las cantidades de los productos químicos A y B restantes en el instante t son $50 - X/5$ y $32 - 4X/5$, respectivamente. ¿Cuántos gramos del compuesto C se forman cuando $t \to \infty$?

5. Suponga que una esfera de hielo se funde a una razón proporcional a su área superficial. Determine el volumen V de la esfera en el instante t.