

# Tarea avanzada VIII

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA, SMF  
Fecha de entrega: 22 de Junio 2016

ENTRENAMIENTO 2016

---

## Problemas de matemáticas

### Métodos numéricos: Encontrar raíces

Existen muchos métodos para encontrar los ceros de una función, también se les llama raíces pues muchas veces se busca las raíces de un polinomio. A continuación los más comunes (y más sencillos, pueden buscar Método  $\Delta^2$  de Aitken, Método de Steffensen, Método de Müller, etc.).

### Método de bisección

Este método sólo funciona para funciones continuas en un intervalo cerrado  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ , pues el Teorema del Valor Intermedio nos asegura que toda función continua alcanza todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . El método consiste en lo siguiente:

- Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .
- A continuación se verifica que  $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Se calcula el punto medio  $m$  del intervalo  $[a, b]$  y se evalúa  $f(m)$  si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada
- En caso de que no lo sea, verificamos si  $f(m)$  tiene signo opuesto con  $f(a)$  o con  $f(b)$
- Se redefine el intervalo  $[a, b]$  como  $[a, m]$  ó  $[m, b]$  según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo.
- Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada

Es decir, para aplicar el método consideremos tres sucesiones  $a_n \leq p_n \leq b_n$  definidas por las siguientes relaciones:

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}$$

Donde los valores iniciales vienen dados por:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

Se puede probar que las tres sucesiones convergen al valor de la única raíz del intervalo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Una cota superior para el error (que tan buena es nuestra aproximación) estará dada por:

$$\varepsilon = \frac{|b - a|}{2^n}$$

donde  $n$  es el número de iteraciones

### Regula Falsi

Como en el método de bisección, se parte de un intervalo inicial  $[a_0, b_0]$  con  $f(a_0)$  y  $f(b_0)$  de signos opuestos, lo que garantiza que en su interior hay al menos una raíz (véase Teorema del Valor Intermedio). El algoritmo va obteniendo sucesivamente en cada paso un intervalo más pequeño  $[a_k, b_k]$  que sigue incluyendo una raíz de la función  $f$ .

A partir de un intervalo  $[a_k, b_k]$  se calcula un punto interior  $c_k$ :

$$c_k = \frac{f(b_k)a_k - f(a_k)b_k}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Dicho punto es la intersección de la recta que pasa por  $(a, f(a_k))$  y  $(b, f(b_k))$  con el eje de abscisas (igual a como se hace en el método de la secante).

Se evalúa entonces  $f(c_k)$ . Si es suficientemente pequeño,  $c_k$  es la raíz buscada. Si no, el próximo intervalo  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  será:

- $[a_k, c_k]$  si  $f(a_k)$  y  $f(c_k)$  tienen signos opuestos;
- $[c_k, b_k]$  en caso contrario.

### Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que no está garantizada su convergencia global. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor puesto cercano a la raíz. Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Sea  $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$  función derivable definida en el intervalo real  $[a, b]$ . Empezamos con un valor inicial  $x_0$  y definimos para cada número natural  $n$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Error: No hay una forma precisa de saber cual es el error exacto de nuestra aproximación. Lo que sí sabemos es que el error por Newton-Raphson es cuadrático. Es decir, si en algún punto nuestro error fuese de 0.1 la siguiente iteración nos arrojaría un error de a lo más 0.01, una iteración más nos daría un error de 0.0001 etc.

## Método de la secante

Es una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior. Basta ver a la derivada como la pendiente de la recta tangente.

El método se define por la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Como se puede ver, este método necesitará dos aproximaciones iniciales de la raíz para poder inducir una pendiente inicial.

Al igual que el método de Newton-Raphson, no se tiene una forma de calcular el error de forma explícita. Mas se puede decir que el orden de convergencia es de  $\approx 1.6$ , un poco más bajo que el de Newton que tiene orden de convergencia 2.

## Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios, usando al menos 2 métodos distintos.

1. Hállese una raíz positiva de la ecuación  $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  con una exactitud de 0.0002.
2. Encuentre la raíz positiva de  $f(x) \equiv x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  con una exactitud de 0.0001.
3. Obtener una raíz de la función  $f(x) = 3x^{-1} - 2.7$  en el intervalo  $[1, 2]$ , con tres cifras decimales correctas.
4. Obtener una raíz de la función  $f(x) = 4x^{-7}$  en el intervalo  $[1, 2]$ , con tres cifras decimales correctas.
5. Obtener una raíz positiva de la función  $f(x) = e^{4x} - 121.5$ , con tres cifras decimales correctas.
6. Obtener una raíz negativa de la función  $f(x) = 5^x - 0.1$ , con un error de  $1 \times 10^{-4}$ .
7. Obtener una raíz de la función  $f(x) = 3^x - 3.7$  en el intervalo  $[0, 2]$ , con un error de  $1 \times 10^{-5}$ .
8. Obtener una raíz de la función  $f(x) = \frac{3}{x+1} - 1.8$ , con al menos 4 cifras decimales correctas.

## Problemas de Física

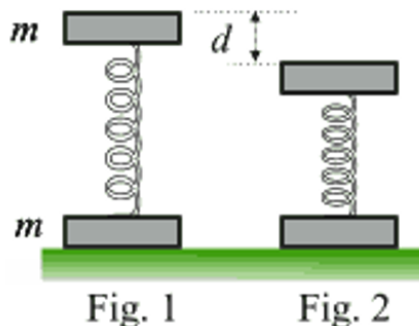
### Problemas cortos

1. Imagine dos bloques idénticos de masa  $m$  unidos a los extremos de un resorte ideal de constante elástica  $k$  y longitud natural  $L_0$ . El sistema se sitúa en posición vertical apoyado sobre una mesa como se indica en la figura 1.

El bloque superior se desplaza hacia abajo una distancia  $d$ , partiendo de su posición de equilibrio (fig. 2) y a continuación se libera sin velocidad inicial.

- a) Determine el máximo valor de la reacción de la mesa sobre el bloque inferior.

- b) Determine el mínimo valor de la distancia  $d$  para que el bloque inferior llegue a separarse de la mesa.



## 2. Absorción de radiación

Podemos tener alguna idea sobre la absorción de radiación por la materia considerando un sistema de oscilador armónico forzado y amortiguado. Considere una partícula de masa  $m$ , en un medio viscoso, sujeta a una fuerza disipativa proporcional a su velocidad ( $f_{\text{disip}} = -\alpha v$ ) y ligada a una pared por un resorte de constante elástica  $k = m\omega_0^2$ .

- a) Una fuerza armónica externa  $f = f_0 \cos(\omega t)$  es aplicada a la partícula, en la misma dirección de su movimiento. La potencia media transferida a la partícula en un período es

$$\bar{P} = \frac{\alpha f_0^2 \omega^2}{2[m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2 \omega^2]}$$

Describa el comportamiento de  $\bar{P}$  con respecto a  $\omega$

- b) Considere que la partícula ya no está ligada a la pared. ¿Cuál sería, en esta situación, la expresión para la potencia media  $\bar{P}$ ?

## 3. Ondas sonoras y dilatación térmica

El estudio de los modos normales de vibración en una columna de aire puede ser realizado a través de una experiencia de resonancia. Un altavoz, de frecuencia conocida  $f$  (variable), emite ondas sonoras en un tubo de vidrio con líquido en el fondo (ver fig. 3). Consideremos que el líquido sea mercurio (¡cuidado: el mercurio es tóxico. Si quisiera hacer la experiencia, use agua!).

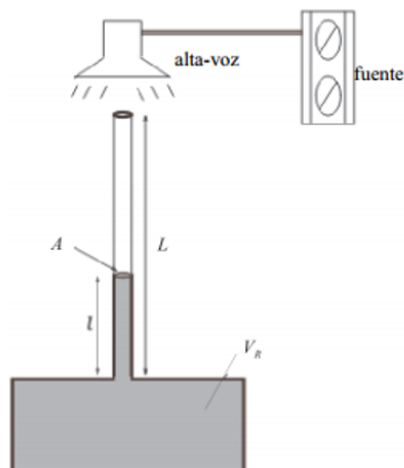


Figura 3: Montaje del experimento de resonancia.

- a) Suponga que a la temperatura  $T_1$ , la altura de la columna de mercurio (Hg) es  $l_1$ . La velocidad del sonido, a esa temperatura, es  $v_1$ . Si la altura total del tubo es  $L$ , escriba la expresión de la frecuencia fundamental de resonancia  $f_1$  en función de  $L$ ,  $l_1$  y  $v_1$ .
- b) La misma experiencia se realiza a la temperatura  $T_2$ , mayor que  $T_1$ . Sabiendo que la sección recta del tubo tiene área  $A$  y el coeficiente de dilatación volumétrica del Hg es  $\beta$ , obtenga la expresión de la nueva altura de la columna de mercurio,  $l_2$ . Desprecie la dilatación del vidrio, así como efectos de capilaridad. Considere que el volumen  $V_R$  contenido en el recipiente inferior es mucho mayor que el volumen ocupado por la columna de mercurio.
- Nota: Tenga en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica es

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T},$$

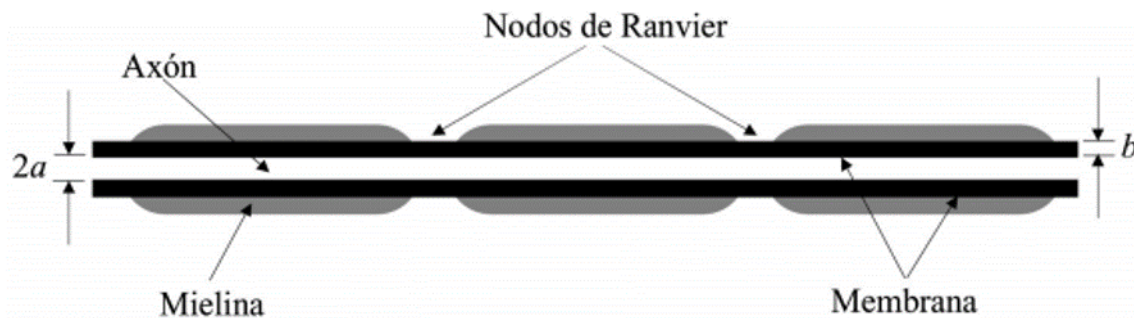
donde  $V_0$  es el volumen inicial,  $\Delta V$  es la variación de volumen y  $\Delta T$  es la variación de temperatura.

- c) Sabiendo que la velocidad del sonido puede ser escrita en la forma  $v = C\sqrt{T}$ , donde  $C$  es una constante y  $T$  es la temperatura dada en Kelvin, obtenga la expresión de la velocidad  $v_2$  a la temperatura  $T_2$  en función de  $v_1$ .
- d) Obtenga la expresión de la nueva frecuencia fundamental de resonancia  $f_2$ .
- e) Suponga que, a las temperaturas de  $T_1 = 17^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 27^\circ\text{C}$  y  $T_3 = 37^\circ\text{C}$ , las frecuencias fundamentales de resonancia respectivamente son  $f_1 = 200\text{Hz}$ ,  $f_2 = 210\text{Hz}$  y  $f_3 = 225\text{Hz}$ . Sabiendo que la razón entre  $V_R$  y el área  $A$  es  $9,0\text{ m}$  y que a la temperatura de  $17^\circ\text{C}$   $(L - l_1) = 42.8\text{ cm}$ , calcule el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio.

#### 4. Un modelo físico sencillo del funcionamiento del axón de una neurona

En la naturaleza hay una enorme cantidad de fenómenos que pueden representarse mediante circuitos eléctricos simples, como por ejemplo el flujo de iones a través de una membrana celular. Un sistema un poco más complejo es el axón o cilindro eje de una neurona. A pesar de que el sistema nervioso es una maravilla en lo que se refiere a la transmisión de la información, vamos a considerar un circuito simple que represente la transmisión de la señal a lo largo del axón. Una membrana celular, cuyo espesor es  $b = 7.00\text{nm}$ , cubre un axón que tiene forma de cilindro de radio  $a = 5.00\mu\text{ m}$ . La diferencia de potencial entre el exterior y el

interior de la membrana es  $V_0 = 70.0$  mV. La sustancia con la que está hecha la membrana (lípidos) es un dieléctrico no ideal de constante  $k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 8.00$ , ( $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m) y de resistividad  $\rho_m = 1.60 \times 10^7 \Omega m$ . Con esos datos podemos modelar la membrana como un circuito RC. El plasma del axón es conductor (no perfecto), con resistividad  $\rho_a = 0.500 \Omega m$ . En vista de que la membrana tiene corrientes de fuga radiales, cuando se transmite un impulso eléctrico por el axón, este impulso se atenúa. Por ello la naturaleza ha provisto una sustancia aislante que cubre la membrana del axón, llamada mielina, que juega el papel de plástico aislante del hilo conductor. En este caso la atenuación se debe solamente a la resistencia del plasma del axón y no a las corrientes de fuga que se transmiten por la membrana. Por esa razón el impulso debe ser regenerado cada cierta distancia. Para ello se origina un intercambio de carga entre el exterior y el interior del axón (flujo de iones) a través de canales en la membrana. En esos canales se tiene ausencia de mielina, y son llamados nodos de Ranvier.



- a) Suponiendo que la membrana se puede considerar un condensador plano de espesor  $b$ , determina:
  - 1) la magnitud del campo eléctrico en el interior de la membrana del axón
  - 2) la densidad superficial de carga.
- b) ¿Cuál es la capacidad (capacitancia) por unidad de superficie de la membrana?
- c) Calcula la conductancia radial (inversa de la resistencia) de la membrana por unidad de superficie.
- d) Calcula la constante de tiempo  $\tau$  del circuito RC equivalente
- e) Calcula la resistencia axial (longitudinal) del axón por unidad de longitud.
- f) Calcula la longitud crítica  $L_C$  del axón para la cual su resistencia longitudinal es igual a la resistencia radial de la membrana.
- g) ¿Qué implicaciones tendría que la longitud del axón fuese mayor que la longitud crítica?

## Problemas largos

## Efecto Hall cuántico

El Efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE, por sus siglas en inglés) fue descubierto por D.C. Tsui y H. Stormer en Bell Labs en 1981. En el experimento se confinaron electrones en dos dimensiones en el lado GaAs por el potencial interfacial de una heterounión de GaAs/AlGaAs fabricada por A.C. Gossard (aquí despreciamos el grosor de la capa bidimensional de electrones). Un campo magnético  $B$  fuerte y uniforme se aplicó perpendicular al sistema bidimensional de electrones. Como se ilustra en la Figura 1, cuando una corriente  $I$  estaba pasando por la muestra, el voltaje  $V_H$  a través del camino en curso mostró una meseta cuantizada inesperada (correspondiente a una resistencia de Hall  $R_H = 3 h/e^2$ ) a temperaturas suficientemente bajas. La aparición de la meseta implicaría la presencia de cuasipartículas fraccionalmente cargadas en el sistema, lo cual analizamos abajo. Para fines de simplicidad, despreciamos la dispersión de electrones por potencial aleatorio, así como el giro del electrón.

- a) En el modelo clásico, los electrones bidimensionales se comportan como bolas de billar cargadas en una mesa. Sin embargo, en la muestra de GaAs/AlGaAs la masa de los electrones es reducida a una masa efectiva  $m^*$  debido a su interacción con iones.
  - i. Escribe la ecuación que describa el movimiento de un electrón en un campo eléctrico perpendicular  $\vec{E} = -E_y \hat{y}$  y en un campo magnético  $\vec{B} = B \hat{z}$ .
  - ii. Determina la velocidad  $v_s$  de los electrones en el caso estacionario.
  - iii. ¿A qué dirección está apuntando la velocidad?
- b) La resistencia de Hall se define como  $R_H = V_H/I$ . En el modelo clásico, encuentra  $R_H$  como una función del número de electrones  $N$  y del flujo magnético  $\phi = BA = BWL$ , en donde  $A$  es el área de la muestra, y  $W$  y  $L$  el ancho y largo efectivos de la muestra, respectivamente.
- c) Sabemos que los electrones se mueven en órbitas circulares en el campo magnético. En la representación mecánico cuántica, el campo magnético incidente  $B$  podría ser visto como creando pequeños remolinos, llamados vórtices, en el mar de electrones (un remolino por cada cuanto de flujo  $h/e$  del campo magnético), en donde  $h$  es la constante de Planck y  $e$  es la carga elemental de un electrón. Para el caso de  $R_H = 3h/e^2$ , que fue descubierto por Tsui y Stormer, deriva el radio del número de electrones  $N$  entre el número del cuanto de flujo  $N_\phi$ , conocido como el factor de relleno  $\nu$ .

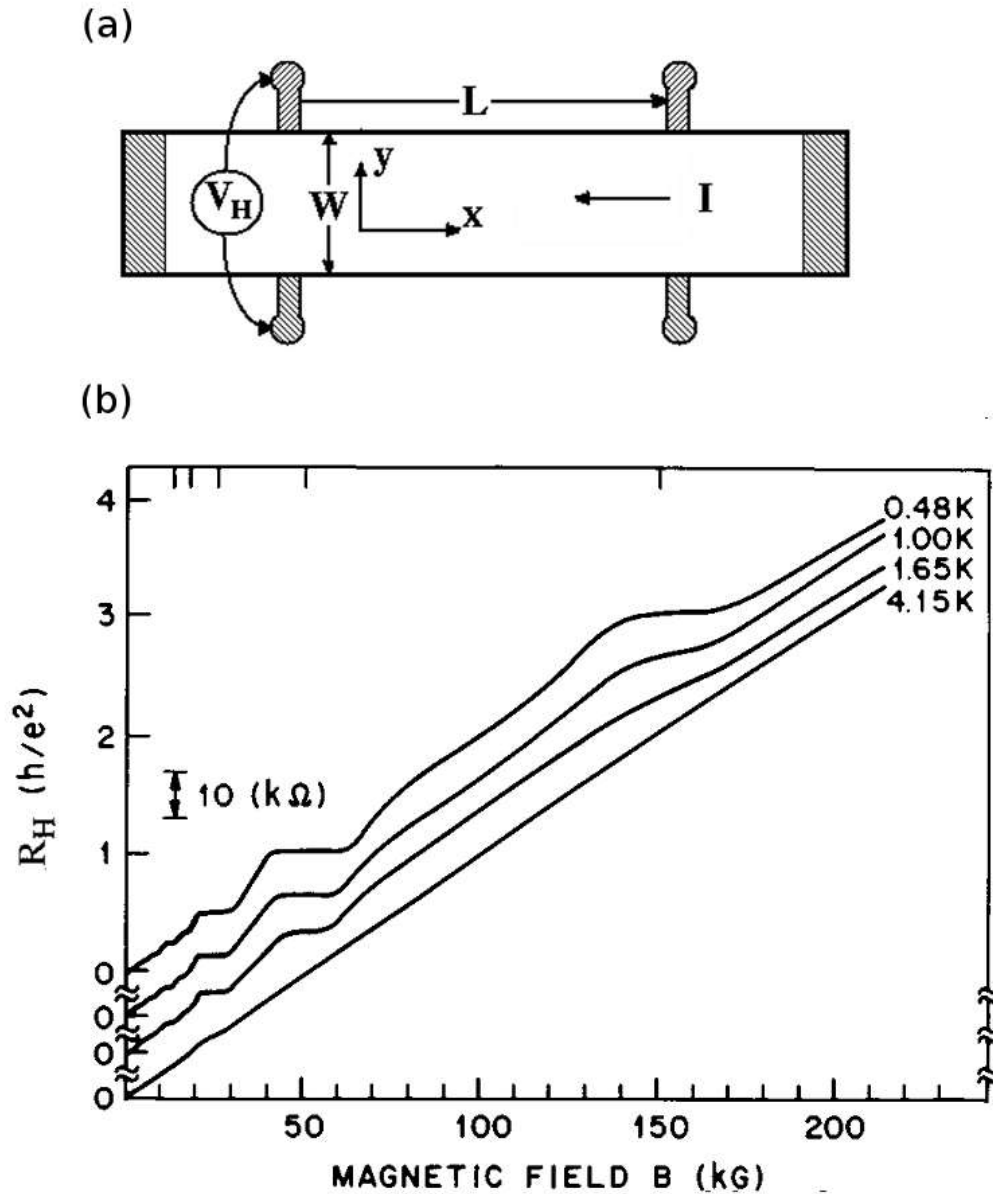


Figura 1: (a) Bosquejo de un arreglo experimental para la observación del FQHE. Como se indica, una corriente  $I$  está pasando a través de un sistema bidimensional de electrones en dirección longitudinal con un largo efectivo  $L$ . El voltaje de Hall  $V_H$  es medido en la dirección transversa con un ancho efectivo  $W$ . Adicionalmente, un campo magnético uniforme  $B$  se aplica perpendicular al plano. La dirección de la corriente es dada para fines meramente ilustrativos y podría no ser correcta. (b) La resistencia de Hall  $R_H$  versus  $B$  a cuatro temperaturas diferentes (curvas desplazadas por claridad) en la publicación original sobre el FQHE. Las características a  $R_H = 3h/e^2$  son debidas al FQHE.

- d) Resulta que unir un número entero de vórtices ( $n > 1$ ) con cada electrón genera un remolino circundante más grande, por lo tanto, empuja a todos los otros electrones. Por consiguiente, el sistema puede reducir considerablemente su energía electrostática de Coulomb al factor de relleno correspondiente. Determina el exponente  $\alpha$  de la cantidad de ganancia de energía para cada electrón  $\Delta U(B) \propto B^\alpha$ .



- e) Al mismo tiempo que el campo magnético se desvía del relleno exacto  $\nu = 1/n$  hacia un campo más alto, más vórtices (remolinos en el mar de electrones) son creados. No están atados a los electrones y se comportan como partículas que tienen cargas efectivamente positivas, por lo tanto se conocen como cuasiagujeros, comparados con los electrones cargados negativamente. La cantidad de falta de carga de cualquiera de estos cuasiagujeros asciende a exactamente  $1/n$  de una carga electrónica. Un argumento análogo se puede hacer para los campos magnéticos ligeramente debajo de  $\nu$  y la creación de cuasielectrones de carga negativa  $e^* = -e/n$ . En la meseta de Hall cuantizada de  $R_H = 3h/e^2$ , calcula la cantidad de carga en  $B$  que corresponde a la introducción de exactamente un cuasiagujero fraccionalmente cargado. (cuando su densidad es baja, las cuasipartículas son confinadas por el potencial aleatorio generado por impurezas e imperfecciones, por lo tanto la resistencia de Hall permanece cuantizada por un rango finito de  $B$ .)
- f) En el experimento de Tsui *et al.*, el campo magnético correspondiente al centro de la meseta de Hall cuantizada  $R_H = 3h/e^2$ ,  $B_{\frac{1}{3}} = 15 \text{ Tesla}$ , la masa efectiva de un electrón en GaAs,  $m^* = 0.067 m_e$ ,  
 La masa del electrón,  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  
 La constante de Coulomb,  $k = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ,  
 La permitividad del vacío,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  
 La permitividad relativa (el ratio entre la permitividad de una sustancia y la permitividad del vacío) of GaAs,  $\epsilon_r = 13$ ,  
 La carga elemental,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  
 La constante de Planck,  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  
 La constante de Boltzmann,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ .  
 En nuestro análisis, despreciamos varios factores, de los cuales sus escalas correspondientes de energía, comparados con  $\Delta U(B)$  discutido en d), son o muy grandes para ser excitadas o muy pequeñas para ser relevantes.
- Calcula la energía térmica  $E_{th}$  a la temperatura  $T = 1.0 \text{ K}$ .
  - Los electrones espacialmente confinados en los remolinos (o vórtices) tienen una energía cinética muy grande. Usando la relación de incertidumbre, estima el orden de magnitud de la energía cinética. (Esta cantidad también sería la penalización energética adicional si pusiéramos dos electrones en el mismo remolino, en lugar de en dos remolinos separados, debido al principio de exclusión de Pauli.)
- g) También hay una serie de mesetas en  $R_H = h/ie^2$ , en donde  $i = 1, 2, 3, \dots$  en el experimento de Tsui *et al.* como se muestra en la Figura 1(b). Estas mesetas, conocidas como el efecto Hall cuántico entero (IQHE, por sus siglas en ingles), fueron reportadas previamente por K. von Klitzing en 1980. Repitiendo c)-f) para las mesetas enteras, uno se da cuenta que la novedad del FQHE yace críticamente en la existencia de cuasipartículas fraccionalmente cargadas. R. de-Picciotto *et al.* y L. Saminadayar *et al.* reportaron independientemente la observación de cargas fraccionales en el relleno  $\nu = 1/3$  en 1997. En los experimentos, ellos midieron el ruido en la corriente de carga a través de una constricción estrecha, el llamado contacto de punto cuántico (QPC, por sus siglas en inglés). En un modelo estadístico simple, los transportadores con una carga discreta  $e^*$

pasan a través del QPC y generan una corriente de carga  $I_B$  (encima de un fondo trivial). El número de transportadores  $n_\tau$  que llegan al electrodo durante un intervalo de tiempo suficientemente pequeño  $\tau$  obedece a la distribución de probabilidad de Poisson con un parámetro  $\lambda$

$$P(n_\tau = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

En donde  $k!$  es el factorial de  $k$ . Es posible que necesites la siguiente sumatoria

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- i. Determina la corriente de carga  $I_B$ , la cual mide la carga total por unidad de tiempo, en términos de  $\lambda$  y  $\tau$
- ii. El ruido de corriente es definido como las fluctuaciones de carga por unidad de tiempo. Uno puede analizar el ruido midiendo la desviación cuadrada promedio del número de las cargas de las corrientes transportadoras. Determina el ruido de corriente  $S_I$  debido a la discretitud de las cargas de las corrientes transportadoras en términos de  $\lambda$  y  $\tau$ .
- iii. Calcula el radio del sonido respecto a la corriente  $S_I/I_B$ , el cual fue verificado por R. de-Picciotto *et al.* y L. Saminadayar *et al.* en 1997. (Un año después, Tsui y Stormer compartieron el Premio Nobel en Física con R.B. Laughlin, quien propuso un ansatz elegante para la función de onda del estado fundamental en  $\nu=1/3$ .)

## Problema 2: Límite de Chandrasekhar

En un famoso trabajo llevado a cabo en 1930, el físico indio Prof Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) estudió la estabilidad de las estrellas. Este problema le ayudará a construir una versión simplificada de su análisis.

Podría encontrar útiles los siguientes símbolos y valores.

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Masa en reposo del electrón	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa en reposo del protón	$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$



S. Chandrasekhar  
(1910-1995)

- II.1. Considere una estrella esférica de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$ . Obtenga una expresión para su energía potencial gravitacional  $E_G$  debida a su propio campo gravitacional (autoenergía gravitacional).

[1.0 puntos]

- II.2. Asumimos que la estrella está hecha sólo de hidrógeno y que todo el hidrógeno está en forma ionizada. Consideramos la situación en la que la producción de energía de la estrella por fusión nuclear se ha detenido. Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli y su energía total puede calcularse usando estadística cuántica. Puede tomar que esta energía electrónica total (ignorando la energía protónica) es:

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}$$

donde  $N_e$  es el número total de electrones y  $\hbar = h/2\pi$ . Obtenga la condición de equilibrio de la estrella relacionando su radio  $R_{\text{wd}}$  con su masa. Este radio se llama radio de la enana blanca.

[2.0 puntos]

- II.3. Evalúe numéricamente  $R_{\text{wd}}$  dado que la masa de la estrella es la misma que la masa solar ( $M_S = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$ ).

[1.5 puntos]

- II.4. Asumiendo que la distribución de los electrones es homogénea, obtenga una estimación del orden de magnitud de la separación promedio  $r_{\text{sep}}$  entre los electrones si el radio de la estrella es  $R_{\text{wd}}$  como lo obtuvo en la parte II.3.

[1.0 puntos]

- II.5. Permitámonos estimar la velocidad de los electrones. Para ese propósito, asuma que cada electrón forma una onda estacionaria en una caja unidimensional de longitud  $r_{\text{sep}}$ . Estime la velocidad del electrón  $v$  en el estado de más baja energía usando la hipótesis de de Broglie.

[1.0 puntos]

- II.6. Considere ahora una modificación al análisis de la parte II.2. Si tomamos a los electrones en el límite ultrarelativista ( $E = pc$ ), un análisis similar lleva a

$$E_{e \text{ rel}} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}$$

Obtenga la expresión de la masa para la cual la estrella estará en equilibrio, en términos de las constantes dadas al inicio del problema. Llamamos a ésta la masa crítica  $M_C$ .

[1.5 puntos]

- II.7. Si la masa  $M$  de la estrella es mayor que la masa crítica  $M_C$  obtenida en la parte II.6, diga si la estrella se va a expandir o a contraer.

[0.5 puntos]

- II.8. Calcule un estimado numérico de esta masa crítica en unidades de la masa solar  $M_S$ . (Nota: Su respuesta puede diferir del famoso resultado de Chandrasekhar debido a las aproximaciones hechas en este análisis).

[1.5 puntos]

### Problema 3: La fase de Pancharatnam

Este problema lidia con los fenómenos de dos rayos asociados con la luz, su interferencia, polarización y superposición. El contexto particular del problema fue estudiado por el físico indio S. Pancharatnam (1934-1969).



S. Pancharatnam  
(1934-1969)

Considere el montaje experimental mostrado en la Figura 1. Dos rayos de luz monocromática coherentes (marcados como rayo 1 y rayo 2), viajando en la dirección  $z$ , inciden en dos rendijas angostas separadas por una distancia  $d$  ( $S_1S_2 = d$ ). Después de pasar a través de las rendijas, los dos rayos interfieren y el patrón es observado en la pantalla  $S$ . La distancia entre las rendijas y la pantalla es  $D$  y  $D \gg d$ . Asuma que el ancho de cada rendija  $S_1$  y  $S_2$  es mucho menor que la longitud de onda de la luz.

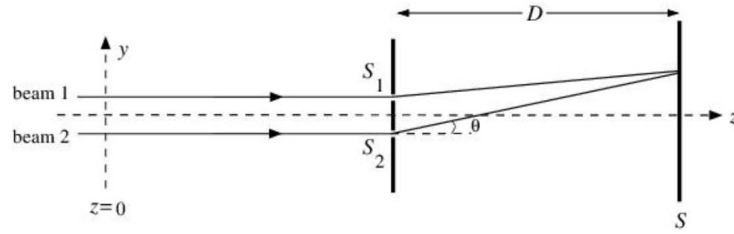


Figura 1:

- III.1. Sean los rayos 1 y 2 linealmente polarizados en  $z = 0$ . Los correspondientes vectores del campo eléctrico están dados por

$$\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad (1a)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad (1b)$$

donde  $\hat{i}$  es el vector unitario a lo largo del eje  $x$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular de la luz y  $E_0$  es la amplitud. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz  $I(\theta)$  que será observada en la pantalla, donde  $\theta$  es el ángulo mostrado en la Figura 1. Expresé su respuesta en términos de  $\theta$ ,  $d$ ,  $E_0$ ,  $c$  y  $\omega$  (donde  $c$  es la velocidad de la luz). Además, note que la intensidad es proporcional al promedio en el tiempo del cuadrado del campo eléctrico. Aquí puede denotar a la constante de proporcionalidad como  $\beta$ . Puede ignorar la atenuación en la magnitud de los campos eléctricos con la distancia desde las rendijas a cualquier punto en la pantalla.

**[1.0 puntos]**

- III.2. Una losa de vidrio perfectamente transparente de grueso  $w$  e índice de refracción  $\mu$  es introducida en el camino del rayo 1 antes de las rendijas. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz  $I(\theta)$  que será observada en la pantalla. Expresé su respuesta en términos de  $\theta$ ,  $d$ ,  $E_0$ ,  $c$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  y  $w$ .

**[1.0 puntos]**

- III.3. Un dispositivo óptico (conocido como lámina de cuarto de onda (QWP)) es introducida en el camino del rayo 1, antes de las rendijas, reemplazando a la losa. Este dispositivo cambia la polarización del rayo del estado de polarización lineal  $\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t)$  al estado de polarización circular, el cual está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[iE_0 \cos(\omega t) + \hat{j}E_0 \sin(\omega t)] \quad (2)$$

donde  $\hat{j}$  es el vector unitario a lo largo del eje  $y$ .

Asuma que el dispositivo no introduce diferencia de camino alguna y que es perfectamente transparente. Note que la punta del vector del campo eléctrico traza un círculo conforme el tiempo transcurre y por ende, se dice que el rayo está circularmente polarizado. Asumimos que el ángulo  $\theta$  es lo suficientemente pequeño de modo que la intensidad desde la rendija uno no dependa de  $\theta$  incluso para polarización  $\hat{j}$ .

- III.3.a. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz  $I(\theta)$  que será observada en la pantalla. Expresé su respuesta en términos de  $\theta$ ,  $d$ ,  $E_0$ ,  $c$  y  $\omega$ .
- III.3.b. ¿Cuál es la máxima intensidad  $I_{\max}$ ?
- III.3.c. ¿Cuál es la mínima intensidad  $I_{\min}$ ?

[2.0 puntos]

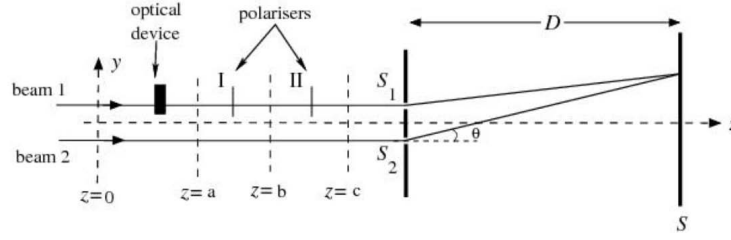


Figura 2:

- III.4. Ahora considere el montaje experimental (vea la Figura 2) en el que el rayo 1 está sujeto a:

- el dispositivo (QWP) descrito en la parte III.3,
- un polarizador lineal (marcado como I), entre  $z = a$  y  $z = b$  que permite que sólo pase la componente del campo eléctrico paralela a un eje ( $\hat{i}'$ ). El vector unitario  $\hat{i}'$  está definido como  $\hat{i}' = \hat{i} \cos \gamma + \hat{j} \sin \gamma$ , y
- otro polarizador lineal (marcado como II) entre  $z = b$  y  $z = c$  que polariza al rayo de vuelta a la dirección  $\hat{i}$ .

De ese modo el rayo 1 está de vuelta en su estado original de polarización. Asuma que los polarizadores no introducen diferencia de camino alguna y son perfectamente transparentes.

- III.4.a. Escriba una expresión para el campo eléctrico del rayo 1 después del primer polarizador en  $z = b$  [ $\vec{E}_1(b)$ ].
- III.4.b. Escriba una expresión para el campo eléctrico del rayo 1 después del segundo polarizador en  $z = c$  [ $\vec{E}_1(c)$ ].
- III.4.c. ¿Cuál es la diferencia de fase  $\alpha$  entre los dos rayos en las rendijas?

[2.0 puntos]

El tipo más general de polarización es la polarización elíptica. Una manera conveniente de expresar a la polarización elíptica es considerarla como una superposición de dos componentes ortogonales linealmente polarizadas, i.e.

$$\vec{E} = \hat{i}' E_0 \cos e \cos(\omega t) + \hat{j}' E_0 \sin e \sin(\omega t) \quad (3)$$

donde  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y este estado de polarización son representados en la Figura 3.

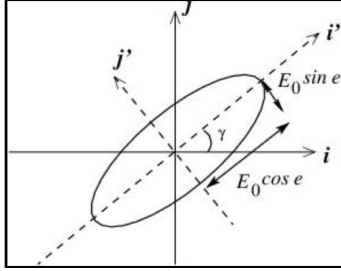


Figura 3:

La punta del vector del campo eléctrico traza una elipse conforme transcurre el tiempo. Aquí  $e$  representa la elipticidad y está dada por:

$$\tan e = \frac{\text{Semieje menor de la elipse}}{\text{Semieje mayor de la elipse}}$$

La polarización lineal (Ecuaciones (1)) y la polarización circular (Ecuación (2)) son casos especiales de la polarización elíptica (Ecuación (3)). Los dos parámetros  $\gamma \in [0, \pi]$  y  $e \in [-\pi/4, \pi/4]$  describen completamente el estado de polarización.

El estado de polarización también puede ser representado por un punto en una esfera de radio unitario llamada esfera de Poincare. La polarización del rayo descrita en la Ecuación (3) es representado por el punto  $P$  en la esfera de Poincare (vea la Figura 4), así la latitud es  $\angle PCD = 2e$  y la longitud es  $\angle ACD = 2\gamma$ . Aquí  $C$  es el centro.

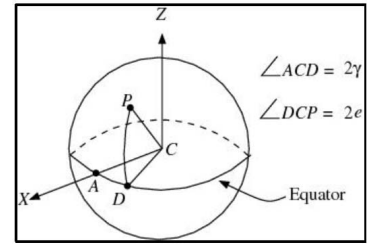


Figura 4:

III.5. Considere un punto en el ecuador de la esfera de Poincare.

III.5.a. Escriba el campo eléctrico  $\vec{E}_{eq}$  que corresponde a dicho punto.

III.5.b. ¿Cuál es su estado de polarización?

[0.5 puntos]

III.6. Considere un punto en el polo norte de la esfera de Poincare.

III.6.a. Escriba el campo eléctrico  $\vec{E}_{NP}$  que corresponde a dicho punto.

III.6.b. ¿Cuál es su estado de polarización?

[0.5 puntos]

III.7. Ahora, considere los tres estados de polarización del rayo 1 como fueron dados en la parte III.4. Represente a la polarización inicial (en  $z = 0$ ) por un punto  $A_1$  en la esfera de Poincare; después del dispositivo óptico, represente al estado (en  $z = a$ ) por el punto  $A_2$ ; y después del primer polarizador (en  $z = b$ ), el estado es representado por el punto  $A_3$ . En  $z = c$ , la polarización regresa a su estado original que es representado por  $A_1$ . Localice estos puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  en la esfera de Poincare.

[1.5 puntos]

III.8. Si estos tres puntos ( $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de la parte III.7) son unidos por grandes círculos en la esfera, un triángulo en la superficie de la esfera es obtenido. (Nota: Un gran círculo es una circunferencia en la esfera cuyo centro coincide con el centro de la esfera). La diferencia de fase  $\alpha$  obtenida en la parte III.4 y el área  $S$  de la superficie curva delimitada por el triángulo están relacionadas entre sí. Relacione  $S$  con  $\alpha$ .

Esta relación es general y fue obtenida por Pancharatnam, y la diferencia de fase es llamada *fase de Pancharatnam*.

[1.5 puntos]