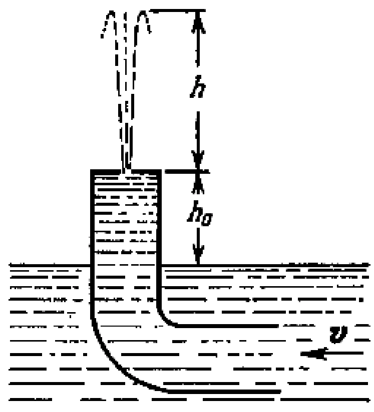
Entrenamiento selectivo 2014, Olimpiada Mexicana de Física
Tarea # 3 enviar viernes 7 febrero

Problema 1

1.1 En un contenedor se mantiene la altura del agua constante H. Por un orificio situado a una altura $H/3$ surge un chorro de agua, el cual alcanza una cierta distancia del contenedor. Calcula a que altura se debe hacer un segundo orificio para que el agua alcance la misma distancia del contenedor.

1.2 En un torrente de agua se sumergió un tubo doblado, según muestra la figura. La velocidad de la corriente respecto del tubo es $v = 2.5\,\mathrm{m/s}$. La parte superior del tubo se encuentra a $h_0 = 12\,\mathrm{cm}$ sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero. ¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?



Problema 2

2.1 Con un alambre conductor, de masa por unidad de longitud λ, se forma un circuito como el indicado en la figura, el cual se encuentra en el plano yz. En los puntos A y B el alambre puede oscilar. Por el alambre circula una corriente de intensidad I en la dirección que se indica en la figura, además en la dirección del eje z y en sentido positivo existe un campo magnético constante B. El circuito oscila y se desvía del plano yz hasta formar un ángulo α y quedar en equilibrio. Determina el valor del ángulo α si las dimensiones del circuito son AC=DB= a ; CD= $2a$.

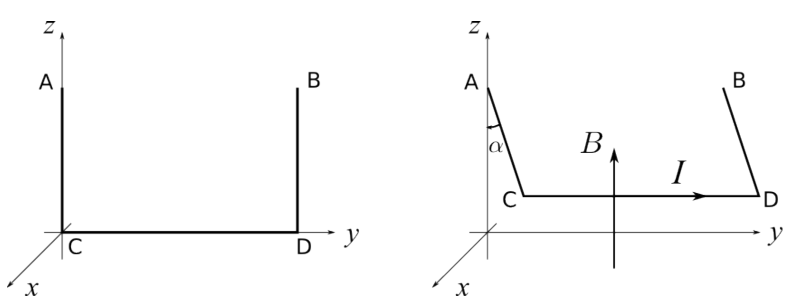
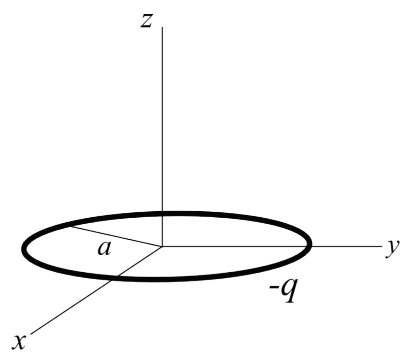


figura 2

2.2 El potencial eléctrico a lo largo del eje z de un anillo de radio a cargado uniformemente $-q$ que se encuentra en el plano xy esta dado por la siguiente expresión:

$$\phi(z) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{1/2}} \tag{1}$$

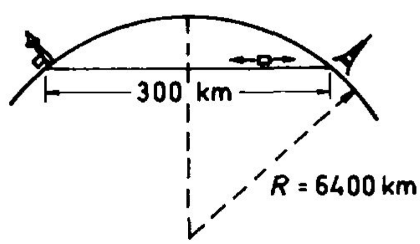


Si adicionalmente se coloca una carga puntual q en el centro del anillo, demuestra que el campo eléctrico a lo largo del eje z debido al anillo y la carga en su centro, cuando $z \gg a$, esta dado por la expresión:

$$\mathbf{E} \approx \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{qa^2}{z^4} \hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Problema 3

3.1 París y Londres están conectados por un túnel subterráneo, un tren viaja a través del túnel impulsado únicamente con la fuerza gravitacional ejercida por la tierra.



a Calcula la velocidad máxima que alcanza el tren.

b Calcula el tiempo que le toma al tren viajar desde Londres a Paris si la distancia entre las dos ciudades es de 300 km.

(radio terrestre) $R_T = 6.3 \times 10^6\,\mathrm{m}$

3.2 Una partícula se mueve en el plano yx con una aceleración constante w en el sentido negativo del eje y. La ecuación de la trayectoria de la partícula es $y = ax - bx^2$, donde a y b son constantes positivas. Determinar la velocidad de la partícula en el origen de coordenadas.

3.3 Una partícula se mueve en el plano xy con velocidad $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j} = (a, bx)$ (las letras negritas indican vector) donde $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los vectores unitarios en el eje x y el eje y respectivamente, a y b son constantes. En el momento inicial la partícula se encontraba en el punto $x = y = 0$. Hallar:

a) La ecuación de la trayectoria de la partícula $y\,(x)$

b) El radio de curvatura de la trayectoria en función de x

El radio de curvatura se define de la siguiente manera:

$$R \equiv \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right|} \tag{3}$$

Problema 4

Para determinar la dependencia entre diferentes variables físicas de un sistema se suele emplear un análisis dimensional (las dimensiones corresponden a las diferentes magnitudes físicas). Algunas de las magnitudes fundamentales en la física son: [longitud]=L, [tiempo]=T, [masa]=M, [temperatura]=θ. El análisis dimensional consiste en encontrar cada uno de los exponentes de todas las magnitudes físicas que intervienen en una ecuación, lo cual se consigue imponiendo que ambos lados de la ecuación sean consistentes en sus dimensiones. Este es un método sencillo para obtener la dependencia de las diferentes magnitudes que involucran un sistema físico, pero del cual no es posible obtener los factores constantes que intervengan en la ecuación, si es que los tiene.

4.1 Empleando el análisis dimensional, encuentra la velocidad de propagación del sonido v_s en un gas cuyas variables son: la presión p, la densidad ρ y la temperatura T.

4.2 La viscosidad η de un fluido depende de la masa m, del diámetro d y la velocidad promedio v de las partículas que lo componen. Encuentra la dependencia de la viscosidad con estas variables.

Por otra parte, se observa que a la misma temperatura para el metano (CH_4) su viscosidad tiene un valor de $\eta_m = 2.0 \times 10^{-5}$ kg/ms, mientras que para el Helio es $\eta_h = 1.1 \times 10^{-5}$ kg/ms. Si el diámetro de un átomo de Helio es 2.1×10^{-10} m, estima el diámetro de la molécula de metano.

Problemas de matemáticas

Problema 1, Aproximación de funciones

La serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un valor x_0, se define a través de la siguiente expresión:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)\big|_{x_0}(x-x_0) + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_{x_0}(x-x_0)^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_{x_0}(x-x_0)^3 + \ldots \tag{4}$$

El símbolo ! en el denominador de cada factor indica la operación matemática factorial y corresponde al producto de todos los enteros anteriores al numero indicado incluyendo el mismo número, con algunos ejemplos queda claro: $2! = 1\cdot 2 = 2$ $\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ $\quad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ ahora intenten calcular $10! = ?$

La serie de Taylor corresponde a la expresión matemática de una función $f(x)$ como una suma de potencias de la variable x, esto es de gran importancia ya permite calcular el valor de cualquier función con solo sumas y productos. Debido a que la serie de Taylor es una suma infinita, en general se emplea para hacer aproximaciones.

La serie de Taylor (4) se satisface para todos los valores de x cercanos a un valor dado x_0. Los factores que multiplica a cada una de las potencias de $(x-x_0)^n$ es un valor constante y se calcula derivando la función tantas veces como se indica ($f^{(n)}$ es la n ésima derivada) y después se evaluando en el punto x_0. La serie (4) toma una forma más simple y clara cuando $x_0 = 0$, ya que entonces se obtiene:

$$f(x) = f(0) + f'(x)\big|_0 x + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_0 x^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_0 x^3 + \ldots \tag{5}$$

Veamos un ejemplo: Supongamos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \tag{6}$$

Queremos el valor $f(0.1)$, lo cual es inmediato:

$$\frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9} = 1.11111\ldots \tag{7}$$

haciendo la división $10/9$ se obtiene: 1.1111...

Ahora calculemos el valor $f(0.1)$ usando la serie de Taylor. Como el valor 0.1 es cercano al origen usamos la expresión (5), entonces para calcular cada una de los factores de la serie primero derivamos y después evaluamos en cero:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^{-1} & f(0) &= (1-0)^{-1} = 1\\
f'(x) &= (-1)(-1)(1-x)^{-2} & f'(0) &= (-1)^2(1-0)^{-2} = 1\\
f''(x) &= (-2)(-1)(-1)^2(1-x)^{-3} & f''(0) &= (-2)(-1)^3(1-0)^{-3} = 2 = 2!\\
f'''(x) &= (-3)(-2)(-1)(-1)^3(1-x)^{-3} & f''(0) &= 2\cdot 3(-1)^2(-1)^4(1-0)^{-3} = 3\cdot 2 = 3!\\
&\vdots & &\vdots\\
f^n(x) &= n!\,(1-x)^{-n} & f^n(0) &= n!\,(1-0)^{-n} = n!
\end{aligned} \tag{8}$$

sustituyendo cada uno de estos términos se obtiene la serie de Taylor (5) de la función (6):

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{1-x} &= f(0) + f'(x)\big|_0 x + \left.\frac{f''(x)}{2!}\right|_0 x^2 + \left.\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|_0 x^3 + \dots \\
&= \frac{1}{1-0} + 1 \cdot x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned} \tag{9}
$$

la función $f(x) = 1/1 - x$ es una serie geométrica. Ahora calculamos el valor $f(0.1)$ usando su serie de Taylor (9) empleando uno, dos y tres términos de la suma:

$$
\begin{aligned}
f(0.1) = \frac{1}{1-0.1} &\approx 1 \qquad \text{orden cero de aproximación} \\
\frac{1}{1-0.1} &\approx 1 + 0.1 = 1.1 \qquad \text{primer orden de aproximación} \\
\frac{1}{1-0.1} &\approx 1 + 0.1 + (0.1)^2 = 1.11 + 0.01 = 1.11 \qquad \text{segundo orden de aproximación}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Como han notado el uso de las series de Taylor conduce a la aplicación de una serie de pasos muy claros y por lo tanto muy fácil de programar con una computadora, es lo que hace su calculadora! con las funciones trigonométricas, exponencial, logaritmo, etc.

Lo que ustedes deben saber (es indispensable) son las aproximación de las funciones trigonométricas que, a primer orden, están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\sin x &\approx x \\
\cos x &\approx 1
\end{aligned} \tag{11}
$$

Estas aproximaciones se obtienen por medios geométricos, pero también con el uso de las series de Taylor.

Tareas:

1.1 Calcula los 3 primeros términos de la serie de Taylor alrededor del origen de las funciones seno y coseno, verifica que a primer orden corresponden a las expresiones de la ecuación (11).

Importante: la serie de Taylor para las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc) son validas en unidades de radianes, No en grados.

1.2 Calcula el valor de $\sin(0.2)$ y $\cos(0.2)$ a los diferentes ordenes de aproximación, es decir usando uno, dos o los tres términos.

1.3 Calcula la serie de Taylor alrededor del origen de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logaritmo $g(x) = \ln(1+x)$

Problema 2, Planteamiento de ecuaciones.

2.1 Una piscina se llena de agua con ayuda dos grifos. Al principio, el primer grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo requerido para llenar la piscina valiéndose solamente del segundo grifo. Luego, al contrario, el segundo grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso sólo del primer grifo. Después de esto se llenó una $\frac{13}{18}$ parte de la piscina. Calcular el tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso de cada grifo por separado, si manteniendo abierto ambos grifos a la vez la piscina se llena en 3 horas 36 min.

2.2 Los puntos A y B se encuentran en la vía principal y rectilínea que va del Oeste al Este. El punto B se encuentra 9 km más al Este que A. Un coche parte del punto A hacia el Este y se desplaza uniformemente con una velocidad de 40 km/h. Al mismo tiempo, una motocicleta sale del punto B en la misma dirección con una aceleración constante $a = 32\,\mathrm{km/h}^2$. Hallar la distancia máxima entre el coche y la motocicleta en el curso de las dos primeras horas.

2.3 Un tubo cilíndrico con pistón se encuentra sumergido en un recipiente con agua; entre el pistón y el agua hay una columna de aire de altura h a la presión atmosférica. Luego, el pistón se eleva hasta una altura b sobre el nivel del agua en el recipiente. Calcular la altura x del agua en el tubo después que se ha subido el pistón. Se sabe que la altura de la columna de líquido en el barómetro de agua a presión atmosférica es igual a H.