

Entrenamiento Olimpiada de Física México 2013

El presente trabajo recopila las tareas asignadas a los estudiantes que participan en las olimpiadas de física 2013. En total se asignarán un total de 18 tareas desde el mes de enero hasta el mes de septiembre, así como los cuatro exámenes aplicados en dos diferentes selectivos llevados a cabo durante los meses de marzo y abril.

La selección de los problemas se ha basado en el temario de la Olimpiada Internacional de Física¹ que proporciona una guía en la planeación para la asignación de los problemas incluidos en cada una de las tareas, y marca un límite para el nivel de dificultad de los problemas. Sin embargo, como se puede constatar en algunos de los problemas incluidos en las tareas, el nivel y los temas superan lo establecidos en dicho temario, pero que motiva a los estudiantes y los familiariza en el contexto de la física. Algo importante en la asignación de las tareas ha sido incluir problemas de matemáticas generales, esto es de gran importancia ya que los exámenes de las competencias internacionales, en general cualquier problema de física con este nivel, requieren tener habilidad con las matemáticas, ya sea plantear una ecuación diferencial, establecer una aproximación necesaria, resolver una integral, plantear y resolver un sistema de ecuaciones, etc.

Los problemas incluidos en cada una de las tareas, así como los diferentes exámenes aplicados a los estudiantes, han sido seleccionados de diferentes fuentes: libros de física general, por ejemplo Resnick-Halliday (Física Vol. 1, 2), Alonso-Finn (Física Vol. I, II, III), Sears-Zemansky (Física Universitaria), etc; problemarios de física general (Iridov-Problemas en Física General, etc), así como los problemas que han sido aplicados en diferentes olimpiadas (internacional, iberoamericana, asiática, española, etc). Otra fuente importante de donde se han obtenido ideas para el planteamiento de problemas han sido los diferentes recursos disponibles en la red.

A continuación se presenta una breve descripción del seguimiento del trabajo de preparación de los estudiantes, desde que son seleccionados en la Olimpiada Nacional de Física hasta semanas previas de su participación en la Olimpiada Internacional (cinco de los seleccionados) y en la Olimpiada Iberoamericana (cuatro seleccionados).

- De la tarea 1 hasta la 8 para los 30 estudiantes seleccionados de la Olimpiada Nacional.
Primer selectivo 11-15 de marzo 2013 en las instalaciones del CIMAT de la ciudad de Guanajuato.
- Tareas 9 y 10 para los 20 estudiantes que pasaron al segundo selectivo.
Segundo selectivo 15-20 abril 2013 en las instalaciones de la BUAP en la ciudad de Puebla. Aquí los estudiantes tuvieron un día con prácticas de laboratorio en la Facultad de
- De la tarea 11 hasta la tarea 13 para los 9 seleccionados. Cinco de ellos para la Olimpiada Internacional y cuatro para la olimpiada iberoamericana.
Entrenamiento experimental 10-14 de junio 2013 en la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Tres exámenes de preparación en el mes de junio, previo a la Olimpiada Internacional
- A partir de la tarea 14 y hasta la tarea 18 solamente los cuatro seleccionados de la Olimpiada Iberoamericana.

¹El temario de la Olimpiada Internacional se puede consultar aquí: <http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/syllabus.html>

Parte I.

Tareas de entrenamiento

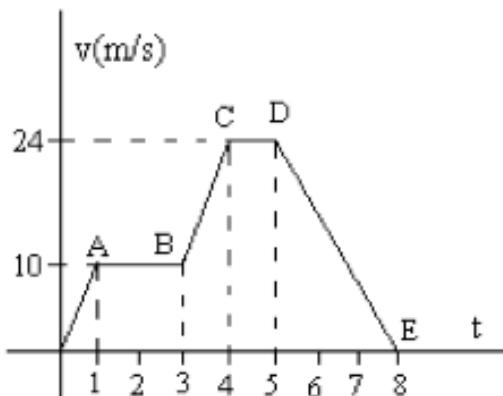
ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 1

ENVIAR: VIERNES 18 DE ENERO 2013

1. Un móvil describe un movimiento rectilíneo. En la figura, se representa su velocidad en función del tiempo. Sabiendo que en el instante $t = 0$, parte del origen $x = 0$.



- Dibuja una gráfica de la aceleración en función del tiempo.
- Calcula el desplazamiento total del móvil, hasta $t = 8$ s.
- Escribe la expresión de la posición x del móvil en función del tiempo t , en los tramos AB y BC.

2. **Tiro Parabólico.**

- Un bateador golpea una pelota de modo que está adquiere una rapidez inicial $v_0 = 37$ m/s con ángulo inicial $\theta = 53.1^\circ$
 - Calcula la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2$ s
 - Determine en qué instante la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto.
 - Encuentra el alcance horizontal cuando la pelota llega al suelo.
- Un mono se encuentra sobre las ramas de un árbol en un zoológico, mientras que el cuidador intenta sedarlo con un dardo. El cuidador apunta hacia el mono, pero en el instante en que dispara el dardo, el mono se deja caer.
Demuestra que independientemente de la rapidez con que sale disparado el dardo, siempre alcanza al mono antes de que llegue al suelo.

3. **Átomo de Hidrógeno.**

Considera el siguiente modelo para el átomo de hidrógeno, el electrón se mueve alrededor del protón (para simplificar suponemos que el protón está fijo) en una órbita circular de radio r .

- Calcula la energía total del electrón en su movimiento orbital alrededor del protón.

- b) Para ionizar al átomo es necesario expulsar al electrón de su órbita y llevarlo muy lejos del protón ($r \rightarrow \infty$), se conoce experimentalmente que está energía de ionización es:

$$\Delta E = 13.6 \text{ eV} \quad (1)$$

donde la unidad de energía eV (electronvolt) tiene la siguiente equivalencia:

$$1 \text{ J} = 6.2 \times 10^{18} \text{ eV}.$$

Calcula el radio r de la órbita del electrón antes de ser expulsado, este valor se le conoce como radio de Bohr y es una estimación del tamaño de un átomo, ¿es lo que esperabas?.

Problemas de matemáticas.

1. Calcula las siguientes sumas de números naturales:

- a) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (10 + 9 + 8 + 7 + 6) =$
- b) $(1 + 16) + (2 + 15) + (3 + 14) + (4 + 13) + (5 + 12) + (6 + 11) + (7 + 10) + (8 + 9) =$
- c) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 35 =$
- d) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1000 =$

2. Esboza la gráfica la siguiente función (calculando varios valores):

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2)$$

- a) Calcula los valores (los valores de x están en radianes): $f(0.2)$, $f(0.1)$, $f(0.01)$
- b) Cuál es el valor de la función en $x = 0$, para responder no uses conocimientos de calculo (puedes estimar su valor).
- c) Calcula la derivada de la función: $\frac{d}{dx} f(x) =$
- d) Esboza el cuadrado de la función: $[f(x)]^2 = \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^2$

3. Las funciones trigonométricas $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad \text{suma de ángulos} \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \quad \text{suma de ángulos} \end{aligned} \quad (3)$$

La paridad¹ de las funciones trigonométricas es:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \quad \text{función impar} \\ \cos(-x) &= \cos(x) \quad \text{función par} \end{aligned} \quad (4)$$

Las derivadas de las funciones trigonométricas son:

¹Una función con la siguiente propiedad $f(-x) = f(x)$ se dice que es par (en este caso la función es simétrica respecto del eje vertical en el origen), en caso contrario si $f(-x) = -f(x)$ la función es impar (en este caso la función es asimétrica).

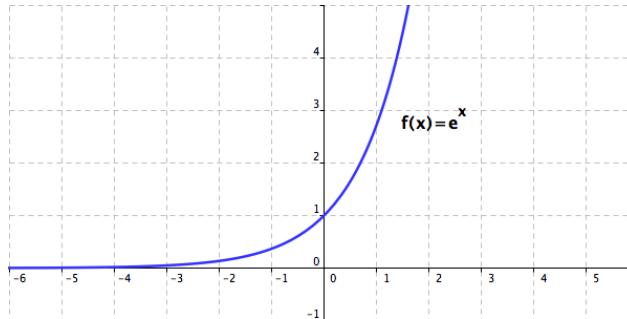
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sin(x) &= \cos(x) \\
 \frac{d}{dx} \cos(x) &= -\sin(x) \\
 \frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Por otro lado, se define las funciones hiperbólicas a través de la función exponencial como:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \tag{6}$$

¿Tendrán las funciones hiperbólicas las mismas propiedades de las funciones trigonométricas?. Para responderlo y conocer las diferencias y semejanzas entre ambas funciones, realiza los siguientes ejercicios:

- a) Conociendo la gráfica de la función exponencial (ver figura), esboza la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas.



- b) A partir la definición (6), calcula lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sinh^2(z) + \cosh^2(z) &= \\
 \sinh^2(z) - \cosh^2(z) &= \\
 \cosh(x \pm y) &= \\
 \sinh(x \pm y) &=
 \end{aligned} \tag{7}$$

encuentra (explícitamente) la paridad de las funciones hiperbólicas y verifica con las graficas que esbozaste:

$$\begin{aligned}
 \sinh(-z) &= \\
 \cosh(-z) &=
 \end{aligned} \tag{8}$$

Conociendo la derivada de la función exponencial $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, calcula las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \cosh(z) &= \\
 \frac{d}{dz} \sinh(z) &= \\
 \frac{d}{dz} \tanh(z) &=
 \end{aligned} \tag{9}$$

Para hacer una evaluación del nivel de conocimiento de ustedes y mejorar las tareas de entrenamiento es necesario que respondan las siguientes preguntas al final de cada problema.

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te parecio interesante el problema?

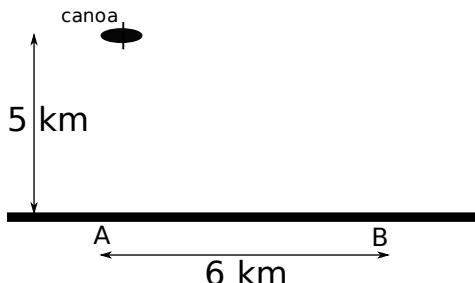
ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

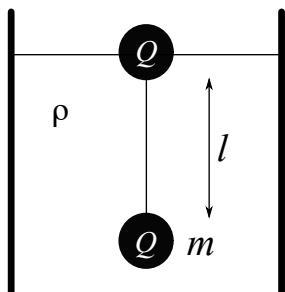
TAREA # 2

ENVIAR: VIERNES 25 DE ENERO 2013

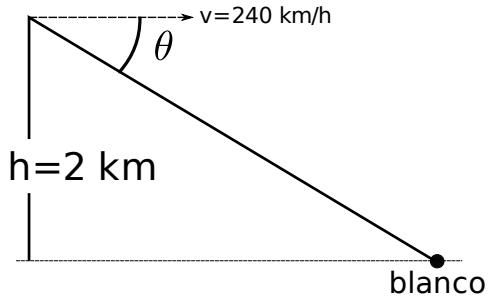
1. Un satélite de comunicaciones debe permanecer sobre el mismo punto de la superficie de la terrestre sin ningún tipo de propulsión.
 - a) ¿A qué distancia R sobre la superficie de la tierra deberá estar ?
 - b) ¿Podría permanecer constantemente sobre un punto fijo de la tierra?
 - c) ¿Cuántos satélites de este tipo se necesitarán para abarcar todos los puntos del ecuador? (las ondas ultracortas se propagan de forma rectilínea).
 - d) ¿Cuál es el punto más septentrional que se podría alcanzar?
2. Una persona sobre una canoa se encuentra remando en un río que no tiene corriente -el río está muy “calmado” de tal manera que no afecta el movimiento de la canoa-. La canoa se encuentra a una distancia de 5 km de la costa y desea llegar en el menor tiempo posible al punto B que se encuentra al borde de la costa a una distancia vertical de 6 km desde la canoa (ver figura). Determinar el camino que debe seguir, sabiendo que puede remar en el río a una velocidad de 2 km/hr y andar a paso veloz sobre la costa a una velocidad de 4 km/hr.



3. Calcula la tensión del hilo que une dos esferas idénticas que radio r y carga Q . Una de las cuales flota sobre un líquido de densidad ρ y su masa es despreciable; mientras que la otra se halla sumergida en el líquido y tiene masa m . La distancia entre las esferas es l .



4. El piloto de un bombardero, que vuela a 2 km de altura y a una velocidad de 240 km/h, observa un blanco terrestre hacia el que se dirige y apunta un sensor óptico que mide el ángulo $\theta = 30^\circ$. El sensor óptico se encarga de dirigir la bomba para dar justo en el blanco, calcular la velocidad a la que debe girar el sensor óptico para acertar en el blanco.



Problemas de matemáticas.

1. Resolver los dos siguientes sistemas de ecuaciones:

a) .

$$\begin{aligned} 2(x-y) + \frac{x-y}{3} &= 3x+1 \\ x-y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

b) .

$$\begin{aligned} \frac{2x-y}{5} &= x-1 \\ 3x - \frac{2x-y}{5} &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 3x\sqrt{1-2x}dx =$

b) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx =$

c) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}}dx =$

d) $\int \sin^2(x) dx =$

3. En una plaza hay 5 altavoces distribuidos en dos postes, uno de ellos consta de 2 altavoces, y el otro, de 3. La distancia que separa los dos postes es de 50 m. ¿Dónde habrá que colocarse para que el sonido de ambos grupos se oigan con la misma intensidad? (la intensidad del sonido disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia).

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.

2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 3

ENVIAR: VIERNES 1 DE FEBRERO 2013.

1. Modelo de Bohr para el átomo de Hidrógeno.

En **1913** (hace 100 años!) Bohr propuso un modelo para describir el átomo de hidrógeno que fue motivado por dos ideas principales: el modelo planetario de Rutherford y la hipótesis cuántica de Einstein y Planck. Rutherford en base a sus resultados experimentales había propuesto un modelo “planetario” para la estructura del átomo de hidrógeno; es decir, un núcleo formado por el protón y girando alrededor de este, el electrón. Por otra parte, los trabajos de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico y el de Planck sobre la radiación de cuerpo negro establecían la cuantización de la energía.

A partir de estas dos ideas Bohr establece los siguientes postulados para describir su modelo del átomo de hidrógeno.

- a) El electrón se mueve alrededor del núcleo en **órbitas circulares estacionarias** bajo la fuerza electrostática con el protón.
- b) Las únicas órbitas posibles sobre las que se mueve el electrón son tales que el momento angular del electrón está *cuantizado*; es decir, solo puede tomar los siguientes valores:

$$L = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

donde se define $\hbar \equiv h/2\pi$, siendo $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ la constante de Planck. El *número cuántico* n denota los posibles *estados cuánticos* del electrón en el átomo de hidrógeno.

- c) En ausencia de campos externos, el electrón tiende a estar en su estado base (el *estado base* corresponde a $n = 1$)
- d) La emisión o absorción de luz puede ser posible solo cuando el electrón realiza una transición entre dos órbitas posibles diferentes. Cuando el electrón cambia de órbita, entonces *emite* o *absorbe* un cuadro de luz (fotón) de frecuencia:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (2)$$

Donde ΔE corresponde al cambio de energía del electrón al cambiar de órbita.

Preguntas.

- a) Calcula el radio de las órbitas estacionarias del electrón (es decir encuentra una expresión del radio en términos del número cuántico n). El primer valor $n = 1$, corresponde al radio de Bohr $a_0 = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ (se calcula en la tarea 1).
- b) Demuestra que la velocidad del electrón en las órbitas estacionarias, está dada por:

$$v_n = \frac{\alpha}{n} c \quad (3)$$

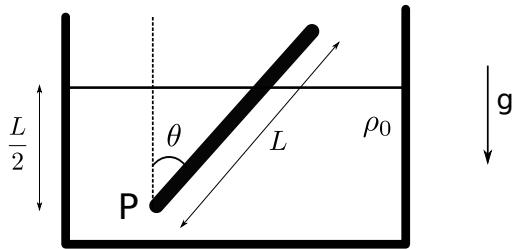
donde $\alpha \approx 1/137$ y $c = 299,792,458 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Cuál es el valor de la velocidad del electrón en el estado base.

- c) Encuentra los valores de la energía E_n del electrón en cada una de las órbitas estacionarias en términos del número n , esto corresponde a la cuantización de la energía para el átomo de hidrógeno.
- d) Cuál es el valor de la energía en el estado base $n = 1$, exprésala en unidades de electronvolts y verifica con el problema 3 de la primera tarea.
- e) Demuestra que la longitud de onda de los fotones emitidos por el electrón al pasar de un estados cuántico inicial con número n al estado final con $n' = 2$ ($n > n'$), esta dada por la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_e} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4)$$

donde debes determinar la expresión de λ_e y calcular su valor numérico en metros (nota que tiene unidades de longitud).

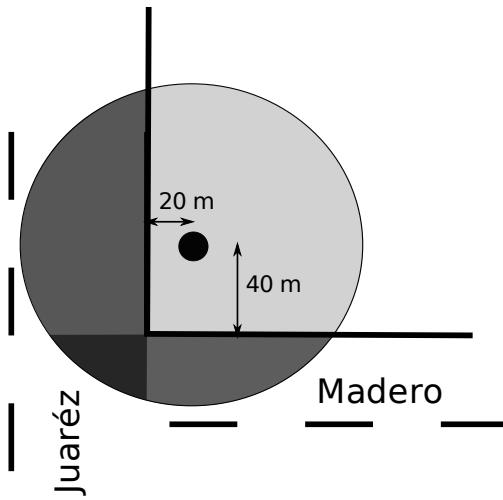
2. Una barra uniforme de longitud L , sección transversal de área A y densidad ρ está sumergida parcialmente en agua (densidad $\rho_0 = 1 \text{ gr/cm}^3$). Uno de los extremos de la barra está sujeto en un punto P a una distancia $L/2$ por debajo de la superficie del líquido. Todo el sistema está sujeto a la gravedad en la dirección vertical hacia abajo.



- a) Cuál debe ser la densidad de la barra, necesaria para que se mantenga fija a 45° .
- b) De manera general, entre qué rango de valores debe estar la densidad de la barra ρ , para que sea posible estar en equilibrio.

Matemáticas.

1. Dos autos parten del mismo lugar y al mismo tiempo, uno se dirige hacia el este en línea recta y el otro hacia el norte de la misma forma. Ambos autos viajan a velocidad constante de 30 m/s.
- a) Encuentra la distancia en kilómetros que separa los dos autos cuando ha transcurrido 1 hora con 30 minutos desde que iniciaron su recorrido.
- b) El tiempo necesario para que la separación entre ambos sea de un kilómetro.
2. Una lámpara que se coloca a la altura recomendada por el fabricante ilumina sobre el suelo un área circular bien definida de 120 metros de diámetro. Si lámpara se coloca cerca de una esquina, digamos a 20 metros al este de la avenida Juaréz y 40 metros al norte de la calle Madero. Encuentra el área iluminada en cada una de las calles y que está delimitada por las aristas de la esquina (el área más sombreada en la figura).



Hints:

El área de un sector circular comprendido entre un ángulo θ es:

$$A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360}$$

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

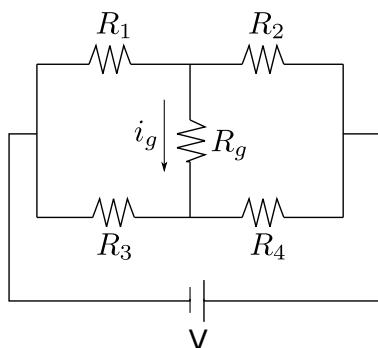
TAREA # 4

ENVIAR: VIERNES 8 DE FEBRERO 2013.

1. Problemas de circuitos, ...nunca faltan. Una bombilla de 0.4 watts se diseña para que trabaje con dos volts entre sus terminales. Una resistencia R se coloca en paralelo con la bombilla y la combinación se coloca en serie con un resistencia de 3 ohms y una batería de 3 volts (resistencia interna, $\frac{1}{3}$ ohm).

¿Cuál deberá ser el valor de R si la lampara ha de funcionar al voltaje diseñado?

2. .



- a) Del circuito mostrado en la figura de arriba, encuentra el valor de la corriente i_g
b) Encuentra la relación entre los valores de las resistencias bajo la cual: $i_g = 0$, se designa esta como *condición de equilibrio* del circuito.
c) Si la resistencia R_2 varía, entonces se define la *sensibilidad* del circuito como:

$$S = CR_4 \left(\frac{di_g}{dR_4} \right)_0 \quad (1)$$

donde C es una constante y el subíndice 0 significa que se debe evaluar la derivada en la condición de equilibrio determinada en el inciso anterior. Demuestra que la sensibilidad del circuito esta dada por la expresión:

$$S = \frac{CV}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_g (1 + R_3/R_4) (1 + R_2/R_1)} \quad (2)$$

3. Una red cristalina es una estructura de átomos o iones con un ordenamiento geométrico simétrico de tal forma que a partir de la repetición sucesiva de una unidad básica (*celda unitaria*) se obtiene la red cristalina completa.

La sal es el ejemplo más cercano de un material con estructura cristalina, la celda unitaria del Cloruro de Sodio (NaCl) es un cubo compuesto de iones de sodio (Na^+) y cloro (Cl^-) ordenados según la figura 1a. Así, el cristal de la sal esta compuesto por la repetición sucesiva de las celdas unitarias mostradas en la figura 1b.

La arista de la celda unitaria del NaCl mide 5.6 \AA , la masa atómica del sodio es 23 y del cloro es 35.5, la densidad de la sal es $2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Con estos datos calcula la masa del átomo de hidrógeno.

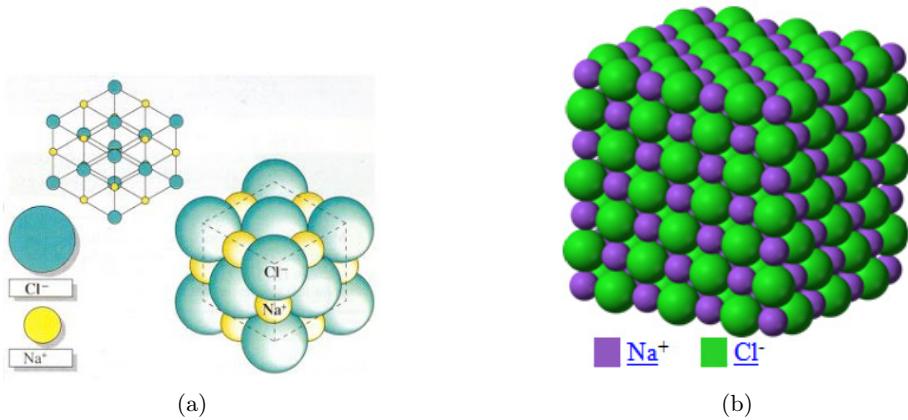
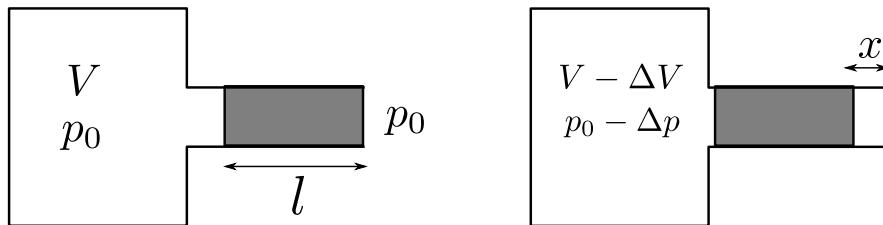


Figura 1

4. El recipiente mostrado en la figura tiene un volumen V y contiene en su interior un gas a la presión atmosférica p_0 . El recipiente tiene un cuello donde está alojado un tapón cuyas dimensiones son: largo l y área de sección transversal A , la masa del tapón es m . El tapón se puede deslizar sin rozamiento.

En cierto instante se empuja ligeramente el tapón una distancia x ($x \ll L$) debido a lo cual el volumen dentro del recipiente disminuye una cantidad ΔV y su presión aumenta la cantidad Δp . A continuación se libera el sistema y el tapón realiza un movimiento de oscilador armónico.



Suponiendo que el gas se comporta idealmente (gas ideal).

- a) Demuestra que la frecuencia angular de oscilación del tapón es:

$$\omega = \sqrt{\frac{A^2}{mV\kappa}} \quad (3)$$

donde κ es el coeficiente de compresibilidad del aire, que se define como $\kappa \equiv -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$

- b) El valor del cociente $\Delta V/\Delta p$, y por tanto el del coeficiente de compresibilidad, depende del tipo de transformación termodinámica que experimenta el gas. En el caso del aire que contiene el recipiente, la transformación puede considerarse adiabática, puesto que es despreciable la cantidad de energía (calor) que intercambia con su entorno en el breve tiempo de cada expansión o compresión. En las transformaciones adiabáticas, las variaciones de la presión y del volumen están relacionadas en la forma:

$$\gamma p \Delta V + V \Delta p = 0 \quad (4)$$

donde γ se le llama *índice adiabático*. Determina en este caso la dependencia de κ con la presión y el índice adiabático, así como la frecuencia de oscilación.

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

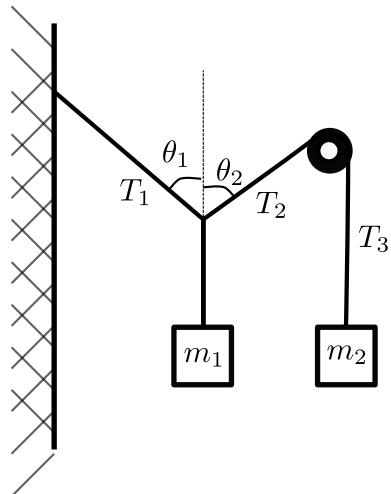
ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

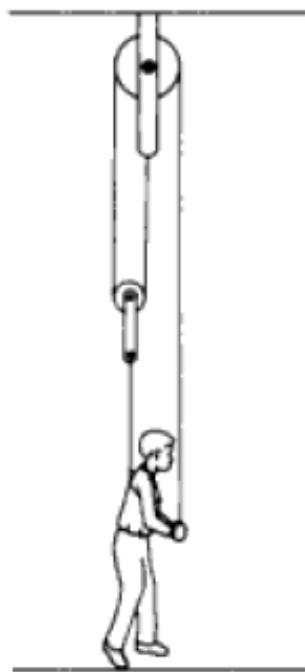
TAREA # 5

ENVIAR: VIERNES 15 DE FEBRERO 2013.

1. Equilibrio de fuerzas.



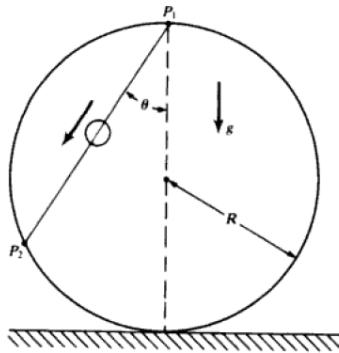
(a)



(b)

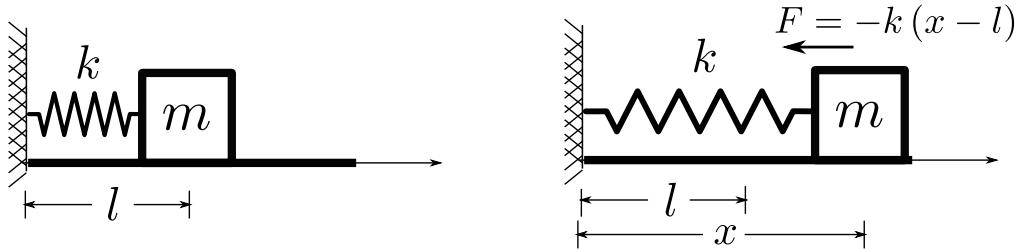
Figura 1

- a) De la figura 1a encuentra las tensiones T_1 , T_2 , T_3 sobre las cuerdas cuando el sistema esta en equilibrio si $\theta_1 = \theta_2$.
 - b) Una persona de masa 80 kg se levanta del suelo mediante un sistema de poleas como se muestra en la figura 1b, calcula la fuerza necesaria para lograr que la persona se levante (la fuerza que aplica es vertical hacia abajo).
2. En la figura se muestra una cuenta (bolita) que se desliza libremente hacia abajo sobre un alambre delgado y recto entre los puntos P_1 y P_2 que se encuentran situados sobre un circulo de radio R . Si la cuenta parte del reposo en el punto P_1
- a) Encuentra la velocidad v al llegar al punto P_2
 - b) Encuentra el tiempo que tarda en llegar al punto P_2 y muestra que este tiempo es el mismo que se requiere para llegar cualquier punto sobre la circunferencia.



3. Oscilador armónico.

Un bloque de masa m se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento y esta sujeto a un resorte de constante elástica k . En su posición de equilibrio el resorte tiene longitud l . Cuando se desplaza el bloque desde su posición de equilibrio el resorte se estira (o comprime) y ejerce una fuerza sobre el bloque que es proporcional a la distancia que se desplaza el bloque y en dirección contraria al desplazamiento del bloque (sin sobrepasar el límite elástico del resorte), esto es la ley de Hooke.



La segunda ley de Newton aplicada al movimiento del bloque esta dada por:

$$ma = -k(x - l) \quad (1)$$

donde a es la aceleración del bloque, si recordamos que la aceleración es la segunda derivada respecto del tiempo de la posición, entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - l) = 0 \quad (2)$$

Formalmente esta es una *ecuación diferencial de segundo orden*; es decir, se trata de una ecuación donde la incógnita es la función $x = x(t)$. Al encontrar explícitamente la posición como función del tiempo se ha resuelto la ecuación diferencial. Se dice que es una ecuación diferencial de segundo orden porque la ecuación contiene la segunda derivada de la función incógnita (sería de primer orden si contuviera la primera derivada y así en general).

La ecuación (2) se le conoce como de *oscilador armónico* porque su solución varía periódicamente en el tiempo.

Para simplificar, en lo que sigue supongamos que $l = 0$, entonces la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3)$$

cuya solución esta dada por:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (4)$$

donde A y B son dos constantes que se determinan por la posición y la velocidad inicial (tiempo $t = 0$) del bloque y ω es la frecuencia angular de oscilación.

- a) Sustituye la solución (4) en la ecuación diferencial (3) y encuentra el valor de la frecuencia angular ω en términos de los parámetros k y m .
- b) En ocasiones es conveniente escribir la solución (4) como:

$$x(t) = D \sin(\omega t + \phi) \quad (5)$$

donde ahora D y ϕ son las constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales. En este caso D es la amplitud del movimiento oscilatorio y ϕ es la fase inicial del movimiento. Comparando ambas soluciones (4) y (5), encuentra las relaciones que deben satisfacer las constantes de ambas soluciones.

- c) Considera que al tiempo $t = 0$ el bloque se suelta en la posición x_0 con velocidad v_0 . Determina en este caso las constantes A y B de la solución (4), así como las constantes D y ϕ de la solución (5) en términos de los parámetros iniciales y de la frecuencia de oscilación.
- d) Encuentra la energía total del bloque y verifica que se conserva, es decir que es constante.
- e) Si se conocen las condiciones del bloque en dos puntos diferentes; es decir, si el bloque se encuentra en la posición x_1 con velocidad v_1 y en la posición x_2 su velocidad es v_2 , encuentra bajo estas condiciones la frecuencia angular y la amplitud del movimiento.
- f) Cómo cambia la solución (4) cuando la longitud de equilibrio del resorte no es cero $l \neq 0$.

4. Un ejemplo concreto del oscilador armónico

Considera un bloque de masa $m = 0.5$ kg, sujeto a un resorte de constante $k = 200$ N/m bajo las siguientes condiciones iniciales (al tiempo $t = 0$): el bloque se suelta a una distancia $x_0 = 0.02$ m a la derecha de su posición de equilibrio y con velocidad inicial $v = 0.4$ m/s hacia la derecha.

- a) Determina las constantes para cada solución (4) y (5).
- b) Encuentra las velocidades máxima y mínima que alcanza el bloque.
- c) Calcula la aceleración máxima del bloque.
- d) Determina la energía total, potencial y cinética del bloque.

5. Aplicaciones del oscilador armónico.

- a) Encuentra la frecuencia de oscilación ω para un bloque de masa m sujeto a un par de resortes conectados en serie y de constantes k_1 y k_2 , haz lo mismo si los resortes están conectados en paralelo.

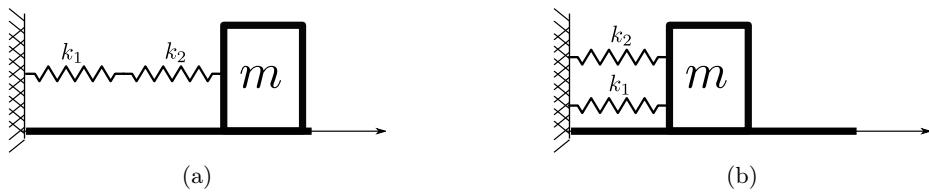
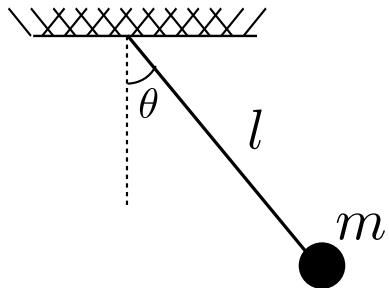


Figura 2

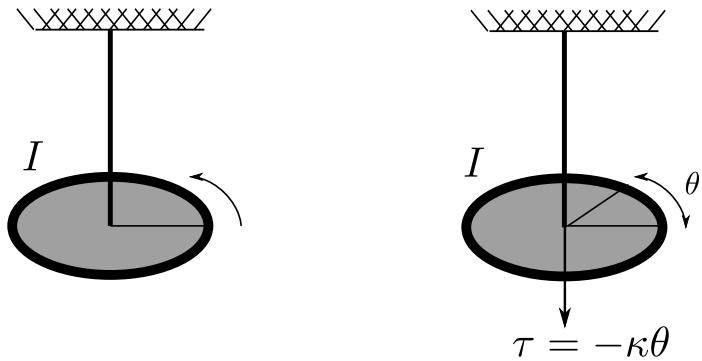
- a) La ecuación de movimiento de un péndulo simple de masa m sujeto a una cuerda de longitud l es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (6)$$

suponiendo que el movimiento se efectúa para ángulos muy pequeños, $\theta \approx 0$, encuentra la frecuencia angular de oscilación ω .



- b) Un disco sólido cuyo momento de inercia es I cuelga de una varilla como se muestra en la figura, el disco puede girar libremente sobre el punto de sujeción de la varilla y en la dirección perpendicular a ésta.



Cuando el disco gira un pequeño ángulo θ , dentro de los límites de validez de la ley de Hooke, la varilla ejerce una torca sobre el disco proporcional al ángulo de giro:

$$\tau = -\kappa\theta \quad (7)$$

donde κ es la *constante de torsión* de la varilla. Esta torca origina un movimiento oscilatorio del disco, encuentra en este caso la frecuencia angular ω .

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 6

ENVIAR: VIERNES 22 DE FEBRERO 2013.

1. Tiro parabólico.

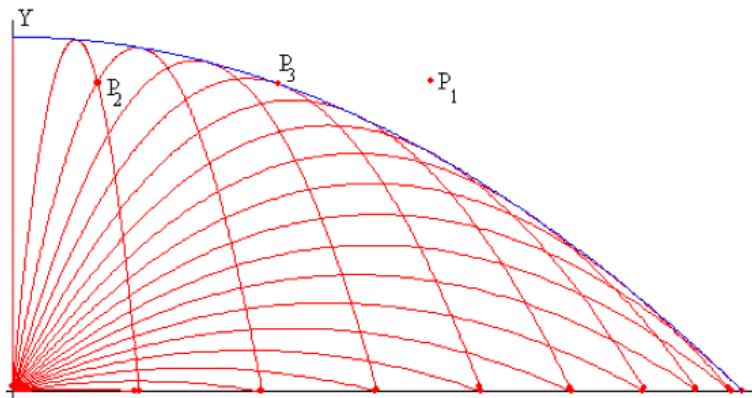
Una partícula de masa m sujeta únicamente a la fuerza de gravedad (o cualquier otra fuerza constante) describe en general un movimiento parabólico al ser disparada desde una posición inicial y velocidad inicial arbitrarias, este movimiento se le conoce como tiro parabólico. En el tiro parabólico la velocidad en la dirección horizontal es constante, es decir se trata de un movimiento uniforme; mientras que en la dirección vertical se trata de un movimiento acelerado debido a la acción de la fuerza de gravedad.

Suponiendo un sistema de coordenadas donde la dirección vertical está en el eje x y la altura en el eje y , las ecuaciones básicas del tiro parabólico están dadas por:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{0x}t & v_x(t) &= v_{0x} \\y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 & v_y(t) &= v_{0y} - gt\end{aligned}\tag{1}$$

Donde (x_0, y_0) corresponde a la coordenada de la partícula en su posición inicial y v_{0x}, v_{0y} son las componentes de la velocidad \mathbf{v}_0 con que sale disparada inicialmente la partícula.

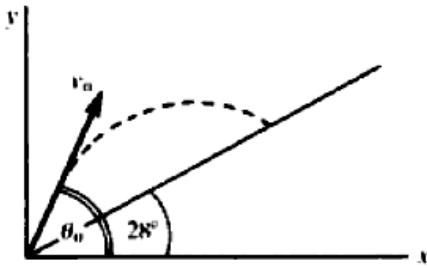
- Para unas condiciones iniciales arbitrarias (x_0, y_0) y (v_{0x}, v_{0y}) encuentra el alcance horizontal R cuando la partícula llega al suelo y altura máxima H de la partícula.
- Considera una partícula que es disparada con la misma rapidez v_0 pero a diferentes ángulos de disparo. La partícula describe una serie de paráolas dependiendo del ángulo de disparo, la envolvente de todas estas paráolas es también una parábola como se muestra en la figura. Encuentra la ecuación de esta parábola (los parámetros que describen esta parábola son v_0 y g).



- cuál es el ángulo de disparo para el cual el alcance es máximo, ¿es único este valor?

2. Problemas de aplicación del tiro parabólico.

- Una partícula es disparada desde la base de un plano inclinado de ángulo 28° hacia la parte superior del plano. La partícula es disparada con una rapidez inicial $v_0 = 33$ m/s y un ángulo $\theta_0 = 65^\circ$ con respecto a la horizontal. Calcula la distancia a la que cae la partícula sobre el plano inclinado.



- b) Un proyectil es disparado desde el suelo con una rapidez $v_0 = 95 \text{ m/s}$ y ángulo $\theta_0 = 50^\circ$. Después de 5 segundos colisiona sobre la cima de una montaña. Calcula la altura desde el suelo hasta la cima de la montaña.
- c) Dos cuerpos se lanzan verticalmente hacia arriba con la misma velocidad $v_0 = 100 \text{ m/s}$, separados un intervalo de tiempo $\Delta t = 4 \text{ s}$. ¿Qué tiempo transcurrira desde que se lanzo el primero para que se vuelvan a encontrar?
- d) Se deja caer caer una piedra desde lo alto de una torre, el sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 5.2 segundos más tarde. Cuál es la altura de la torre considerando que la velocidad del sonido es $v_s = 340 \text{ m/s}$.

3. Tiro parabólico cuántico.

Un haz de neutrones es expulsado a través de una fuente W hacia una cavidad donde se encuentra un par de placas horizontales paralelas M y A, como se muestra en la figura (1a); la placa inferior (M) actúa como un espejo ya que los neutrones rebotan elasticamente sobre ella, por otra parte la placa superior (A) absorbe todos los neutrones que llegue hasta ella y no vuelven a salir. A la derecha de las placas se encuentra un detector de neutrones D que mide la tasa de neutrones (número de neutrones por unidad de tiempo) que llegas hasta él.

Las placas tienen una longitud L y están separadas separadas por una distancia H .

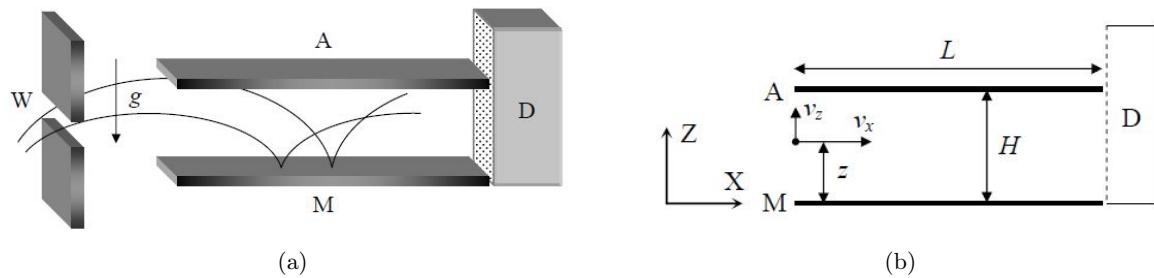


Figura 1

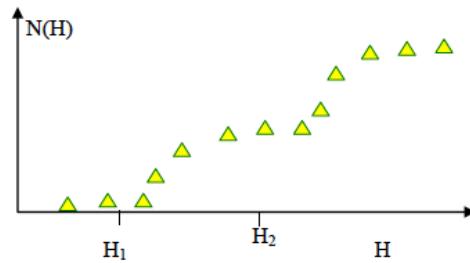
Todos los neutrones que salen de la fuente tienen la misma velocidad constante en la dirección horizontal v_x , sin embargo en la dirección vertical su velocidad v_z no es fija, sino que puede abarcar un amplio rango de valores tanto positivos como negativos. El sistema esta aislado de campos externos y solo actúa la gravedad de la tierra g .

- a) Para un neutrón que entra a la cavidad a una altura z por arriba de la placa inferior, figura (1b), cuál es la velocidad máxima y mínima que debe tener en la componente vertical v_z de tal manera que no llegue a la placa superior y sea absorbido.
- b) La tasa de neutrones que llegan hasta el detector depende de la separación de las placas, es de esperar que si la separación es pequeña la mayoría de los neutrones sean absorbidos por la placa superior por lo tanto la tasa será menor y al contrario, si la separación es mayor la tasa de neutrones que lleguen al detector sera mayor. Si definimos ρ como el número de neutrones que entran a la cavidad por unidad de velocidad vertical v_z , unidad de tiempo y unidad de longitud, entonces la tasa de neutrones que llegan al detector varía de acuerdo a la altura z con que entran a la cavidad de la siguiente manera:

$$\frac{dN}{dz} = \rho \Delta v_z \quad (2)$$

Donde Δv_z es el intervalo de valores en la componente vertical de la velocidad para que los neutrones no sean absorbidos. Suponiendo que ρ es constante encuentra la tasa de neutrones que llegan al detector si la altura del detector es H , es decir calcula $N(H)$ y haz una grafica.

- c) Experimental se encuentra que la tasa de neutrones que llegan al detector se comporta como se muestra en la siguiente figura.



Estos resultados están en desacuerdo con la gráfica que obtuviste en el inciso anterior!!, la tasa de neutrones que llegan al detector se mantiene constante a intervalos bien definidos, el primero hasta un valor H_1 , el segundo hasta un valor H_2 y así sucesivamente.

El resultado del experimento se puede entender suponiendo que el movimiento de los neutrones en la dirección vertical esta cuantizado. Para analizar esto consideremos el movimiento vertical de los neutrones de forma análoga a como se hizo con el electrón en el modelo de Bohr en la tarea pasada; es decir aplicaremos una regla de cuantización (en el modelo de Bohr se aplico la regla de cuantizar el momento angular), esta regla la estableceremos a través de la cuantización de la siguiente integral:

$$2 \int_0^H p_z dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

donde p_z es el momento lineal en la dirección vertical y $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js es la constante de Planck

A través de la ecuación (3) encuentra la “cuantización” de H_n y sustituye en $N(H)$ que calculaste en el inciso anterior. Con esta modificación en la tasa $N(H)$, ¿se reproduce el comportamiento de la gráfica experimental?.

- d) Encuentra los niveles cuánticos de la energía potencial E_n de los neutrones asociados al movimiento vertical.

- e) Calcula el valor de la energía potencial E_n y H_n en el primer estado $n = 1$ (estado base), para la energía expresala en unidades de electronvoltos
masa del neutrón $m_n = 1.6 \times 10^{-27}$ kg
- f) El movimiento de los neutrones debe satisfacer el principio de incertidumbre de Heisenberg que establece una relación entre el cambio de energía ΔE que puede tener el neutrón en un intervalo de tiempo Δt :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (4)$$

donde $\hbar = h/2\pi$. Calcula el tiempo mínimo que pueden estar los neutrones durante su trayectoria en la cavidad hasta llegar al detector y ser medidos dentro del intervalo H_1 , calcula en este caso también la longitud que debe tener la cavidad. Considera que la componente horizontal de la velocidad de los neutrones es $v_x = 10$ m/s.

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 7

ENVIAR: VIERNES 1 DE MARZO 2013.

1. Un modelo realista de la atmósfera de la Tierra considera que “bolsas” de aire al subir o bajar de altura se expanden o contraen sin recibir o ceder calor a los alrededores, ya que dicha transferencia es muy lenta. A tales procesos en los que no se recibe o cede calor se les llama *adiabáticos*.

En tales circunstancias, y por la presencia de la fuerza de gravedad, la presión p , la densidad de masa ρ y la temperatura T del aire dependen de la altura z sobre el nivel medio del mar ($z = 0$), es decir

$$p = p(z), \quad \rho = \rho(z), \quad T = T(z) \quad (1)$$

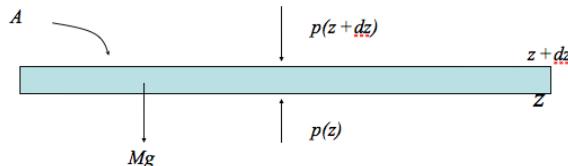
Si la atmósfera la suponemos en equilibrio mecánico, sin vientos ni corrientes, la condición de adiabaticidad es

$$p(z)[\rho(z)]^{-\gamma} = \text{constante} \quad (2)$$

donde $\gamma = 1.4$, es una constante. Suponiendo que el aire puede aproximarse como un gas ideal y compuesto tan sólo de nitrógeno, con μ la masa de un mol de tal sustancia.

Parte I: Equilibrio mecánico del aire en la atmósfera.

Considere un elemento o “rebanada” de atmósfera como se muestra en la figura. Tal elemento se encuentra a una altura z ; tiene un ancho dz y es de sección transversal A arbitraria. Establezca la condición de equilibrio mecánico del aire en la atmósfera, es decir, encuentre la ecuación diferencial que satisface la presión $p(z)$ en términos de la densidad del aire $\rho(z)$ y constantes fundamentales, al tomar el límite $dz \rightarrow 0$. Llame g a la aceleración de la gravedad.



Parte II: Presión, densidad y temperatura a una altura z .

Suponiendo que la presión y la temperatura tienen los valores p_0 y T_0 al nivel medio del mar ($z = 0$), resuelva las siguientes preguntas

- a) Encuentre una expresión para la presión $p(z)$
- b) Encuentre una expresión para la densidad $\rho(z)$
- c) Encuentre una expresión para la temperatura $T(z)$
- d) Encuentre una expresión para la altura máxima z_{max} , hasta donde este modelo puede ser válido.

Parte III: Estimación de la altura de una montaña.

Es un hecho experimental que la temperatura a la que hiere un líquido depende de la presión a la que se encuentra. Del inciso anterior observamos que la presión atmosférica cambia con la altura. Por lo tanto, a diferentes alturas los líquidos hierven a diferentes temperaturas.

Considere la ecuación de Clausius-Clapeyron que nos indica cómo cambia la presión de un líquido como función de la temperatura, al momento de la ebullición,

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{ebullition} = \frac{l}{T(V_g - V_l)} \quad (3)$$

donde l es el calor necesario para convertir un mol de líquido en un mol de vapor (calor latente). T es la temperatura de ebullición medida en grados Kelvin. V_l y V_g son los volúmenes que ocupa un mol cuando es líquido y cuando es vapor, respectivamente, a la temperatura de ebullición correspondiente. Típicamente el volumen molar del gas es muchísimo más grande que el volumen molar del líquido.

Se sabe que un líquido hierva a la temperatura de 105 C° en la base de una montaña y que lo hace a 95 C° en la parte más alta. Estime la altura de la montaña. Indique las suposiciones y aproximaciones que haga. El calor latente del líquido es $l=1000$ calorías/mol.

Las siguientes cantidades pueden ser de utilidad:

$$1 \text{ Caloría} = 4.186 \text{ J}$$

$$R = 8.314 \text{ J/mol K} \text{ (Constante Universal de los Gases)}$$

$$\mu = 0.014 \text{ kg/mol} \text{ (masa molar del nitrógeno)}$$

$$g = 9.81 \text{ kg/m s}^2 \text{ (aceleración de la gravedad)}$$

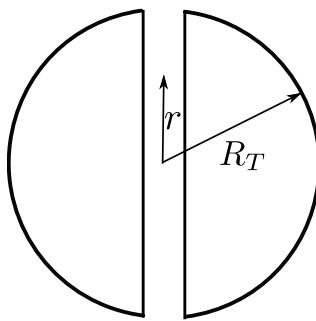
2. Sí la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre es $g \approx 9.8 \text{ m/s}$. A qué altura sobre la superficie terrestre se debe elevar un cuerpo para que la aceleración de la gravedad cambie en 1 %, a qué profundidad de la tierra debe penetrarse para que se observe el mismo cambio.
3. Calcula la gravedad sobre la superficie de los siguientes cuerpos celestes:
 - a) La luna, cuyo radio es $R=1.7410\ 6 \text{ m}$ y masa $m=7.3510\ 22 \text{ kg}$.
 - b) El sol, su radio es 110 veces el de la tierra $R_T = 6.3 \times 10^6 \text{ m}$ y su masa es 330,000 veces la masa de la tierra $M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
4. La velocidad de escape de un planeta es la velocidad mínima con la cual debe lanzarse un objeto desde su superficie para que escape del potencial gravitacional del planeta, es decir a una distancia muy lejana ($r \rightarrow \infty$).
 - a) Calcular la velocidad de escape de un cuerpo lanzado desde la tierra.
 - b) Calcular la velocidad de escape de un cuerpo lanzado desde la luna.
 - c) Ahora considera que la velocidad de escape de cierto planeta es igual a la velocidad de la luz, ¿Cuál debe ser la masa de ese planeta, si su radio es el de la tierra? (expresa esta masa en unidades de masas solares).
5. Si se hiciera un túnel a través del diámetro de la tierra, ver figura

- a) Demuestra que la fuerza sobre un cuerpo de masa m situado a la distancia r del centro de la tierra es:

$$F = -\frac{mg}{R_T}r \quad (4)$$

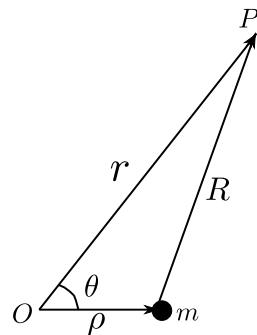
considera que la densidad de la tierra es uniforme.

- b) Demuestra que el movimiento del cuerpo bajo esta fuerza es armónico simple, determina la frecuencia de oscilación ¿depende de la masa del cuerpo?.
- c) Cuál es el tiempo que tarda en regresar un cuerpo que se deja caer dentro del túnel desde la superficie de la tierra.



6. Una cuerda de masa m se encuentra a una distancia ρ de un punto O usando como referencia (ver figura). Demostrar que el potencial gravitacional en P , debido al cuerpo, a una distancia R de m ($R \gg \rho$), puede expresarse en función de la distancia $OP = r$ y el ángulo θ por la serie:

$$V = -\frac{Gm}{r} \left[1 + \frac{\rho \cos \theta}{r} + \frac{\rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^2} + \dots \right] \quad (5)$$



Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,
OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 8
ENVIAR: VIERNES 8 DE MARZO 2013.**

1. Proceso adiabático.

En general un proceso adiabático es aquél donde el sistema no intercambia calor con su entorno. Para conseguir un proceso adiabático es necesario aislar al sistema de tal manera que no intercambie calor con el exterior. Las variables del sistema en un proceso adiabático cambian de acuerdo a una ecuación que depende del sistema, por ejemplo para un gas ideal:

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (1)$$

o equivalentemente en el espacio de las variables (p, T):

$$pT^{\gamma/1-\gamma} = \text{constante} \quad (2)$$

donde $\gamma \equiv C_p/C_V$ es el coeficiente adiabático, siendo C_p, C_V corresponden a la capacidad calorífica del gas a presión y volumen constante respectivamente.

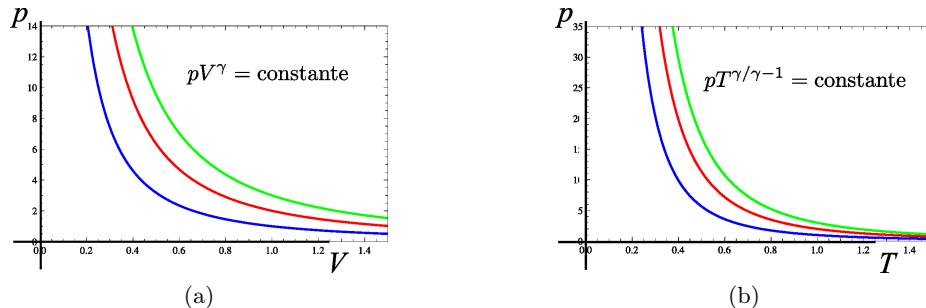


Figura 1

Ambas curvas (1) y (2) representan el proceso adiabático en un gas ideal en el espacio de las variables (p, V) y (p, T) respectivamente.

A continuación se hace la deducción de la ecuación del proceso adiabático.

De acuerdo a la primera ley de la termodinámica:

$$dU = dW + dQ \quad (3)$$

para un proceso adiabático, el sistema no intercambia calor con su entorno ($dQ = 0$) y por lo tanto se debe satisfacer:

$$dU = dW \quad (4)$$

En general para cualquier sistema la ecuación anterior es valida y es la que determina la ecuación del proceso adiabático.

Consideremos el caso de un gas ideal, en un gas ideal hay dos ecuaciones fundamentales:

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ U &= U_0 + C_V T \end{aligned} \quad (5)$$

La primera corresponde a la ecuación de estado del gas ideal y la segunda a la energía del gas ideal, donde U_0 es una constante (notar que solo depende de la temperatura), donde C_V para el gas ideal toma los siguientes valores:

$$C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{gas monoatómico} \\ \frac{5}{2}nR & \text{gas diatómico} \end{cases} \quad (6)$$

Por otra parte, el trabajo para el gas ideal esta dado por:

$$dW = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV \quad (7)$$

Sustituyendo la diferencial del trabajo y de la energía ($dU = C_V dT$) en (4) se obtiene la siguiente ecuación:

$$C_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \quad (8)$$

que se puede integrar directamente, siguiendo los pasos:

$$\begin{aligned} C_V dT &= -\frac{nRT}{V} dV \\ C_V \frac{dT}{T} &= -\frac{nR}{V} dV \\ C_V \int \frac{dT}{T} &= -nR \int \frac{1}{V} dV \\ C_V \ln(T) &= -nR \ln(V) + \ln(k) \\ \ln(T^{C_V}) &= \ln(V^{-nR}) + \ln(k) \\ T^{C_V} V^{nR} &= k \end{aligned} \quad (9)$$

donde k es una constante de integración, usando la siguiente relación valida únicamente para el gas ideal:

$$C_p - C_V = nR \quad (10)$$

y la definición de $\gamma \equiv C_p/C_V$ se obtiene:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (11)$$

que corresponde a la ecuación del proceso adiabático del gas ideal en el espacio (T, V) . Empleando la ecuación de estado (5) se obtienen las otras dos ecuaciones equivalentes (1) y (2), estas tres ecuaciones corresponden al proceso adiabático del gas ideal sus diferentes variables.

I. Gas de fotones.

Consideremos el sistema compuesto por la radiación electromagnética confinada en una cavidad de volumen V , este sistema puede ser entendido como un gas de fotones (“partículas de luz”) que interactúan con las paredes de la cavidad, es decir los átomos que componen a las paredes emiten y absorben fotones continuamente. De esta manera un gas de fotones se puede analizar de forma parecida al gas ideal de partículas, es decir el gas de fotones tiene las mismas variables que un gas: presión p , volumen V (volumen de la cavidad) y temperatura T .

A través de la teoría electromagnética se puede demostrar que la radiación electromagnética también ejerce presión (fuerza por unidad de área) sobre los objetos. Para la radiación confinada en una cavidad de volumen V , la presión está relacionada con la energía U de la siguiente forma:

$$p = \frac{1}{3} \frac{U}{V} \quad (12)$$

por otra parte, experimentalmente se observa que la densidad de energía de la radiación electromagnética confinada en la cavidad depende de la temperatura a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{U}{V} = aT^4 \quad (13)$$

donde $a \equiv \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3}$ es una constante. Es importante notar que la energía de un gas de fotones depende de la temperatura y del volumen, a diferencia del gas ideal que solo depende de la temperatura.

Si las variables termodinámicas del gas de fotones son p, V, T, U y el trabajo sobre un gas de fotones es:

$$dW = -pdV \quad (14)$$

Encuentra la ecuación del proceso adiabático para el gas de fotones en las variables (p, V) y haz una gráfica de este proceso. ¿Hay una ecuación para el proceso adiabático del gas de fotones en las variables (p, T) o (T, V) ? si es así esribelas y graficalas.

II. Solido magnético ideal.

Cuando un cuerpo sólido es sometido a un campo magnético externo B se induce sobre él una magnetización M . La magnetización se define como la densidad de momentos dipolares magnéticos contenidos en el cuerpo, así un sólido magnético se puede entender como un conjunto de una gran cantidad de pequeños imanes individuales que se encuentran contenidos en todo el sólido. Estos pequeños imanes son en realidad el resultado del movimiento de los electrones sobre las órbitas alrededor del núcleo de los átomos, pero además y en mayor medida al “movimiento sobre su propio eje” (esto es el espín).

Experimentalmente se observa que la magnetización M de un cuerpo en equilibrio termodinámico varía con la temperatura y el campo externo aplicado B de la siguiente manera:

$$M = \frac{C}{T}B \quad (15)$$

donde C es una constante, por otra parte se encuentra que la energía de un sólido magnético está dada por:

$$U = C_M T \quad (16)$$

donde C_M es otra constante (calor específico a magnetización constante) Si las variables termodinámicas del sólido magnético son B, M, T, U , y el trabajo sobre el sólido está definido como:

$$dW = -B dM \quad (17)$$

- a) Encuentra la ecuación de un proceso adiabático del sólido magnético en las variables (T, M) y (B, M) y haz una gráfica de ella en ambos espacios de variables.

III. Gas de Van der Waals.

El gas ideal es un modelo teórico para la descripción de los gases, así la ecuación del gas ideal $PV = nRT$ es solo una aproximación para reproducir el comportamiento de los gases. Esta ecuación se basa en dos suposiciones principales: que las partículas del gas son puntuales (sin dimensiones) y que no interactúan entre ellas, es decir no ejercen ninguna tipo de fuerza entre ellas.

La ecuación de Van der Waals:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn) = nRT \quad (18)$$

es una mejor aproximación para la descripción real de los gases. Esta ecuación corrige las suposiciones del gas ideal ya que toma en cuenta que las partículas del gas tienen un volumen finito y además ejercen un tipo de fuerza entre ellas. Estas propiedades se ven reflejadas en las constantes a y b de la ecuación (18).

Encuentra la ecuación del proceso adiabático para la ecuación de Van der Waals en el espacio de las variables (T, V) y (p, V) .

2. Formación estelar por colapso gravitacional.

Supongamos una nube de gas de forma esférica se colapsa debido a su atracción gravitacional. Inicialmente el gas tiene un radio $r_0 = 10^4$ ua donde $1\text{ua} \approx 10^{11}$ m, masa $m = 10^{30}$ kg y temperatura $T_0 \approx 5000$ K. El gas que compone la nube se puede considerar como ideal, con una densidad molar μ y coeficiente adiabático γ .

$R = 8.31$ J/Kmol es la constante de los gases y $G = 6.7 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ constante gravitacional.

- a) Si durante el colapso la nube se mantiene en equilibrio térmico con el exterior y el calor generado es radiado al exterior. Cuál es la presión final de la nube después que su radio disminuye a la mitad.
- b) Si la nube reduce su radio una cantidad muy pequeña, entonces la aceleración de la gravedad sobre su superficie es prácticamente la misma antes y después de reducir su tamaño, ¿por qué?. Realiza una estimación del tiempo que tarda la nube en reducir su radio al valor: $r_2 = 0.95 r_0$.
- c) Calcula el tiempo que tarda en colapsarse la nube hasta convertirse en un solo punto.

Para ello considera que la aceleración gravitacional sobre la superficie de un cuerpo esférico depende su radio, así como la 3a ley de Kepler:

$$\frac{T^3}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (19)$$

T es el periodo de un objeto que gira en una orbita elíptica alrededor de un objeto central de masa M y a es el semieje mayor de la orbita elíptica que describe el objeto.

- d) Calcule la cantidad de calor Q radiada durante el colapso desde un radio r_0 hasta $r_3 = 1$ ua, suponiendo que durante el proceso la nube de gas se mantiene a la misma temperatura T_0 .
- e) A partir de r_3 el gas se vuelve suficientemente denso e impide la emisión de radiación térmica (calor). Si la nube se sigue colapsando, determina en este caso la dependencia de la temperatura T en la nube como función de su radio r ($r < r_3$).
- f) Llegado un cierto momento el efecto de la presión en la dinámica del gas ya no puede despreciarse y el colapso se detiene en $r = r_4$ (con $r_4 \ll r_3$). Si en este proceso la radiación de la nube continua siendo nula estima el radio final r_4 y la respectiva temperatura T_4 . Para ello considera que la fuente de energía proviene del colapso gravitacional.

Las preguntas de sondeo:

1. ¿Conocías los conceptos físicos del problema, antes de realizarlo? comenta.
2. ¿Sabías las herramientas matemáticas del problema, antes de realizarlo? comenta.
3. Si no hiciste o pudiste hacer el problema, comenta por qué.
4. ¿Te pareció interesante el problema?

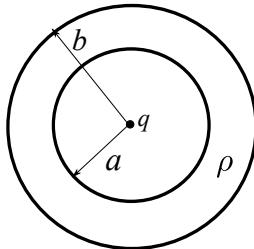
ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 9

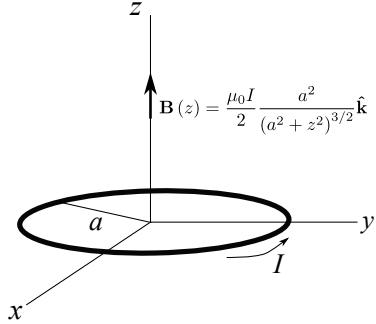
ENVIAR: LUNES 8 DE ABRIL 2013.

1. Una carga eléctrica q se encuentra ubicada en el centro de un cascarón esférico de radio interior a y radio exterior b . El cascarón contiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ .



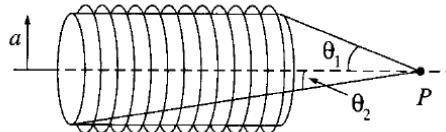
- a) Determina el campo eléctrico, tanto en magnitud como en dirección, del sistema en un punto a la distancia r medida desde el centro del cascarón para todos los valores de r : dentro del cascarón ($r < a$), en el interior del cascarón ($a < r < b$) y fuera del cascarón ($b < r$).
- b) Haz una gráfica en papel milimétrico de la intensidad del campo eléctrico como función de la distancia r indicando las unidades así como la escala empleada (etiqueta correctamente los ejes). Emplea los puntos que consideres pertinentes para poder apreciar el comportamiento de la gráfica. Considera los siguientes valores: $\rho = 4 \text{ nC/m}^3$, $q = 2 \text{ nC}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 2a$ (permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$).
- c) Determina el potencial eléctrico $V(r)$ en todos los puntos del espacio (de la misma forma que el inciso anterior), considera que el potencial eléctrico muy lejos es cero $V(r \rightarrow \infty) = 0$.
- d) Haz una gráfica del potencial $V(r)$ como función de r considerando las misma indicaciones y datos del inciso b.
- e) Ahora considera que el cascarón esta hecho de material conductor y esta libre de cargas, responde para este caso todos los incisos anteriores.
2. El campo magnético producido por una espira circular de radio a que conduce una corriente I a lo largo del eje z , como se muestra en la figura, tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} \quad (1)$$

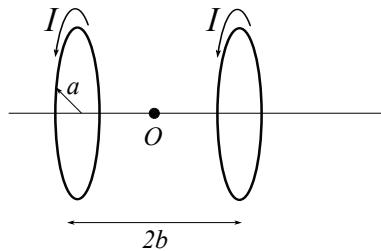


donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ es la permeabilidad magnética del vacío.

A partir de la expresión (1) calcula el campo magnético en un punto P sobre el eje de un solenoide que está formado por una densidad de n espiras por unidad de longitud. El solenoide tiene forma cilíndrica de radio a . Expresa tu respuesta en términos de los ángulos θ_1 y θ_2 que están indicados en la figura.



3. Dos espiras circulares de radio a conducen una corriente de la misma intensidad I y el mismo sentido, como se muestra en la figura. Ambas espiras están separadas una distancia $2b$.



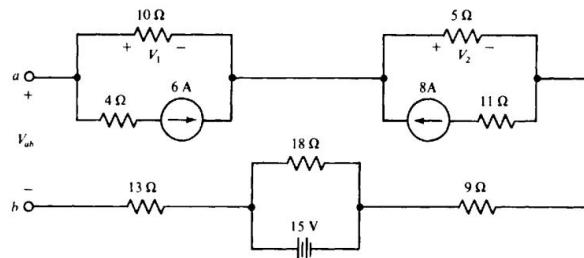
- a) Calcula la expresión del campo magnético sobre el eje de las bobinas y probar que se puede escribir como:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{(4b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} x^2 + \frac{15}{8} \frac{(8b^4 - 12a^2b^2 + a^4)}{(a^2 + b^2)^4} x^4 + \dots \right] \quad (2)$$

donde x se mide a partir del punto medio entre las dos corrientes (punto O).

- b) Verificar que para $a = 2b$, el campo en el centro es independiente de x hasta la tercera potencia. Esto permite generar un campo magnético uniforme en una pequeña región del espacio.
- c) Suponiendo que se satisface la condición señalada en el inciso anterior, encuentra el valor de x (en función de a) para el cual el campo difiere en 1 % del campo en el punto medio.

4. Determina el voltaje V_{ab} del circuito mostrado en la figura 1



5. Serie de Balmer.

En la tarea 3 (problema 1) se analizo el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno que establece la cuantización de las orbitas del electrón alrededor del núcleo y con ello los niveles discretos de la energía. Uno de los motivos principales de la aparición del modelo de Bohr fue la observación experimental de las líneas en el espectro de emisión de los gases. De acuerdo a la física clásica, el espectro debería ser un continuo, sin embargo lo que se observó fue una serie de líneas discretas bien definidas. En la siguiente figura se muestra el espectro de emisión para un gas de hidrógeno.



figura 1

De acuerdo a los resultados obtenidos en el problema 1 de la tarea 3, la longitud de onda de la radiación emitida por el electrón al realizar la transición de un estado inicial con número cuántico n al estado final con n' ($n > n'$) en el átomo de hidrógeno se puede escribir como:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3)$$

donde R_H es una constante que se puede determinar experimentalmente.

Para el átomo de hidrógeno la serie de líneas espectrales en el rango del visible consiste en las transiciones con $n' = 2$ y $n = 3, 4, 5, 6, 7$ (para $n > 8$ las líneas espectrales están en el rango del ultravioleta). Esta serie es conocida como *serie de Balmer* y son las que se muestran en la figura de arriba, en este caso:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4)$$

Una serie de mediciones experimentales de las líneas espectrales de emisión en un gas de hidrógeno (las corresponden a las líneas mostradas en la figura 1) reportarán los datos de la siguiente tabla.

λ (nm)	transición cuántica $n \rightarrow n'$	línea espectral
656.1	$3 \rightarrow 2$	rojo
486.0	$4 \rightarrow 2$	cyan
433.9	$5 \rightarrow 2$	azul
410.0	$6 \rightarrow 2$	azul
396.2	$7 \rightarrow 2$	azul

A partir de los datos experimentales de la tabla anterior determina la medición experimental de la constante R_H a través de un análisis gráfico de los datos.

- a) La gráfica de los datos experimentales debe estar correctamente etiquetada en cada eje con su variable correspondiente, debe contener las unidades y la escala usada.
- b) Debes reportar la constante R_H con su incertidumbre correspondiente.

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 10

ENVIAR: SÁBADO 13 ABRIL 2013

1. La fuerza sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} en una región donde hay un campo magnético \mathbf{B} está dada por la fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

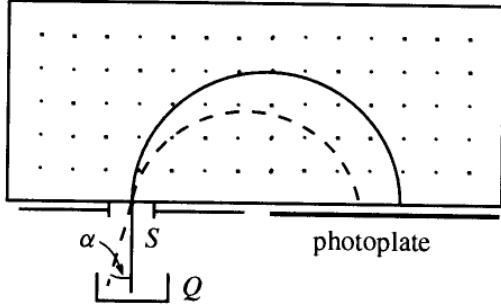
Debido a que esta fuerza actúa en dirección perpendicular a la velocidad de las partículas la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético uniforme son circunferencias.

Como la fuerza magnética \mathbf{F}_m es perpendicular al campo magnético y la velocidad de la partícula entonces el trabajo que realiza del campo magnético es cero.

- a) Determina la frecuencia de oscilación de una carga q y masa m que se mueve dentro de una región donde existe un campo magnético uniforme de magnitud B_0 .
- b) En 1897 J. J. Thomson descubrió el electrón midiendo la relación carga-masa en un tubo de rayos catódicos (haz de electrones con carga q y masa m) como sigue:
 - Primero pasó el haz de electrones a través de dos campos uniformes \mathbf{E} y \mathbf{B} mutuamente perpendiculares entre ellos y perpendiculares a su vez al haz de electrones. Cuál es la velocidad de los electrones necesaria para que los electrones no se desvíen en términos de los campos.
 - Despues apagó el campo eléctrico \mathbf{E} y midió el radio de curvatura R del haz cuando se deflectó únicamente por el campo magnético. Determina entonces la relación q/m de las partículas, en términos de la intensidad de los campos y de R .

2. Medición de la masa de partículas cargadas

Partículas de masa M y carga e son aceleradas por un voltaje V desde una fuente Q . Las partículas entran por una rendija S a una cavidad donde hay un campo magnético uniforme \mathbf{B} que es perpendicular a su trayectoria. En la figura, el campo está representado por los puntos que indican que el campo apunta en dirección perpendicular y hacia fuera de la figura. Debido a la presencia del campo magnético las partículas cargadas son desviadas y proyectadas sobre una pantalla capaz de detectarlas (photoplate).



- a) Si las partículas entran de forma perpendicular a la rendija S , linea continua en la figura, y la distancia desde la rendija S hasta el punto donde inciden las partículas sobre la pantalla es D . Determina la masa de las partículas M en términos de los parámetros $V, e, D, |\mathbf{B}|$
- b) Si ahora las partículas entran con un ángulo de desviación $\alpha \ll 1$, linea punteada en la figura, encuentra la distancia de separación Δ a la que inciden las partículas respecto de las que inciden de manera perpendicular.
3. La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico Robert Millikan entre 1909-1913. En su experimento, se rocía aceite en forma de gotas muy finas (aproximadamente 10^{-4} mm de diámetro) en el espacio entre dos placas paralelas horizontales separadas por una distancia d se mantiene una diferencia de potencial V_{AB} entre las placas paralelas que crea un campo eléctrico entre ellas. Algunas de las gotas de aceite adquieren carga negativa por efectos de fricción. Se observan las gotas a través de un microscopio.
- a) Si se ajusta el potencial entre las placas V_{AB} de tal manera que las gotas cargadas permanezcan estáticas entre las placas (qué polaridad debe tener el potencial V_{AB} si las gotas adquieren carga negativa).
- Determina la carga de las gotas. Desprecia la fuerza de flotación debido al aire, considera ρ_0 la densidad de la gota, el radio r de las gotas.
- b) Las gotas de Millikan eran demasiado pequeñas para medir su radio directamente. En cambio Millikan determinó r cortando el campo eléctrico y midiendo la rapidez terminal v_t de la gota durante su caída.
- La fuerza viscosa F sobre una esfera de radio r que se desplaza con la rapidez v a través de un fluido de viscosidad η está dada por la ley de Stokes $F = 6\pi\eta rv$.
- Cuando la gota cae con v_t , la fuerza viscosa compensa exactamente el peso mg de la gota. Demuestra que la magnitud de la carga de la gota es:

$$q = 18\pi \frac{d}{V_{AB}} \sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}} \quad (2)$$

- c) Dentro de los límites de su error experimental, cada una de las miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron tenía una carga igual a algún múltiplo entero de carga básica e . Es decir, hallaron gotas con carga de $\pm 2e, \pm 5e$, etc. Pero ninguna con valores como por ejemplo $0.76e$ o $2.46e$. Una gota cuya carga es $-e$ ha adquirido un electrón adicional; si su carga es $-2e$, ha adquirido dos electrones adicionales, y así sucesivamente.
- Se observa que una gota de aceite con carga en un aparato de gotas de aceite de Millikan cae 1 mm con rapidez constante de 39.3 m/s, si $V_{AB} = 0$. La misma gota se mantiene en reposo entre dos placas separadas por 1.00 mm si $V_{AB} = 9.16$ V. ¿Cuántos electrones en exceso ha adquirido la gota y cuál es el radio de ésta? La viscosidad del aire es 1.81×10^{-5} Ns/m y la densidad del aceite es de $\rho = 824$ kg/m³.

1. Practica 1, Espectrómetro de masas.

En el siguiente enlace:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/espectrometro/espectro.html>

se encuentra una breve explicación del espectrómetro de masas. Este dispositivo permite medir la masa de partículas atómicas cargadas.

- a) De acuerdo a lo que se expone en la pagina, ¿Cuál es la finalidad del campo magnético B_1 ?
- b) ¿Qué sucede si las partículas cargadas no inciden de manera perpendicular por la rendija del espectrómetro?.

Realiza la actividad que se propone al final de la explicación con el *applet* que simula un espectrómetro de masas. Determina la masa de al menos 5 elementos (diferentes del hidrógeno), incluidos los isótopos que se “detectan” y llena la siguiente tabla para cada elemento que “midas”.

Incluye las incertidumbres que creas necesario.

- Si tuvieras el dispositivo experimental y la practica consistiera en medir la masa de una serie de elementos que se te dieran. ¿Qué más hubieras hecho además de lo planteado aquí?

Elemento:			
campo E (N/C)	campo B_1 (T)	campo B_2 (T)	velocidad v (m/s)
Isótopos			
radio r (m)	masa m (kg)	masa m (uma)	

1. Practica 2, Experimento de Millikan.

Revisa el siguiente enlace:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/millikan/millikan.html>

donde se hace una descripción del experimento de Millikan para medir la carga del electrón. Realiza la actividad que se describe en la pagina con el *applet* que simula el dispositivo experimental de Millikan y llena la tabla de abajo con tus “mediciones”, haz una gráfica de los datos: carga q contra radio r . usa las unidades que te parezcan convenientes.

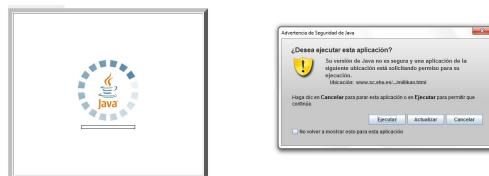
- a) A partir de los datos graficados, ¿puedes apreciar el carácter discreto de la carga eléctrica?.
b) Para llenar la quinta columna considera conocida la carga del electrón $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, comenta tus observaciones

La velocidad de caída v se refiere cuando el campo eléctrico esta desconectado y la velocidad de subida cuando el campo eléctrico esta conectado.

- Para visualizar en applet de las prácticas es necesario darle clic con el mouse sobre la pantalla del applet (a veces es necesario instalar el plugin).



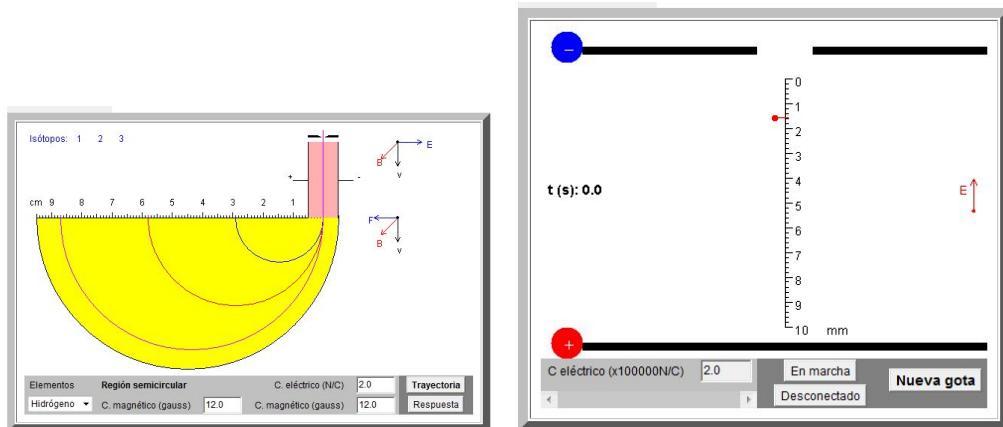
- Si esta instalado el plugin, aparece la siguiente ventana a la que hay que darle ejecutar:



- Si no puedes ver el applet de la simulación del espectrómetro para realizar la actividad, prueba lo siguiente

- Utiliza otro navegador e instala los complementos que se te piden (en especial el java, los navegadores lo instalan automáticamente). Navegadores alternos: firefox, opera, google crome, etc.
- Intenta recargar la pagina, hasta que aparezca la simulación.
- Sube y/o bajas un poco la pantalla de la pagina.

Las simulaciones deben aparecer como las siguientes figuras.



ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013,

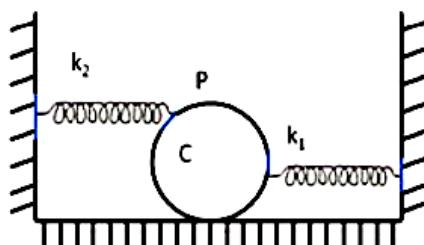
OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 11

ENVIAR: VIERNES 10 MAYO 2013

Problema 1, oscilaciones.

1.1 Dos resortes de constante k_1 y k_2 están unidos a un cilindro sólido de masa m como se muestra en la figura. Cuando el cilindro es desplazado una pequeña distancia se deja en libertad y comienza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Asumiendo que el cilindro rueda sin resbalar sobre la superficie, encuentra el período de oscilación.

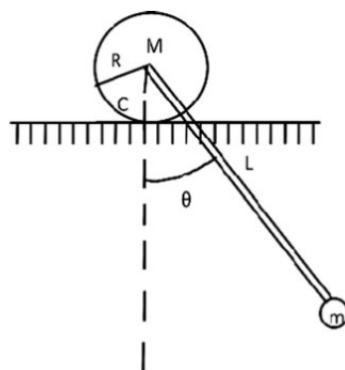


1.2 Una partícula de masa m está localizada en un potencial unidimensional:

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \quad (1)$$

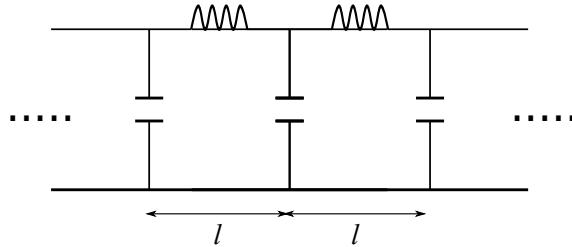
donde a y b son constantes positivas. Encuentra el período de oscilación de la partícula alrededor del punto de equilibrio bajo este potencial, si la partícula se mueve una pequeña distancia alrededor del punto de equilibrio.

1.3 Una masa m es sujetada en el extremo de una barra de longitud L y masa despreciable que se conecta a un cilindro de masa uniforme M y radio R , ver figura. Suponiendo que el cilindro rueda sin resbalar, calcula la frecuencia de oscilación del sistema.



Problema 2, circuito LC infinito.

Cuando una onda senoidal se propaga a través de un circuito LC infinito (como se muestra en la figura) se presenta un desfase ϕ en el voltaje entre dos capacitores adyacentes.



La relación entre voltaje y la corriente para una inductancia y una capacitor esta dada por:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2)$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \quad (3)$$

2.1 Determina el desfase ϕ en términos de los parámetros: L , ω , C , donde ω es la frecuencia de la onda senoidal.

2.2 Determina la velocidad de propagación de la onda si la longitud entre cada unidad básica del circuito es l .

Problema 3, velocidad de la luz.

A través de observaciones sucesivas de los eclipses del satélite Io de Júpiter, entre los años 1668-1674, Ole Römer pudo medir la velocidad de la luz. La idea consiste esencialmente en medir la variación del periodo $T(t)$ con que se observan dos eclipses consecutivos, este periodo cambia conforme la tierra se mueve en su órbita alrededor del Sol y esta variación se debe al tiempo adicional que le toma a la luz viajar entre las dos posiciones de la tierra en la observación de los dos eclipses consecutivos.

Datos:

Radio orbital de la tierra alrededor del Sol: $R_t = 1.5 \times 10^8$ km,

Periodo orbital de Júpiter alrededor del Sol: 11.9 años

Masa de Júpiter $M_j = 1.9 \times 10^{27}$ kg

Radio orbital del satelite Io alrededor de Júpiter: $r_{Io} = 4.2 \times 10^8$ m

3.1 Determina el periodo orbital del satélite Io alrededor de Júpiter y la distancia R_j entre Júpiter y el Sol.

3.2 Determina la velocidad angular relativa de la tierra ω respecto de un marco de referencia cuyo eje principal esta sobre la recta que une el Sol y Júpiter (marco SJ), en este sistema Júpiter esta en reposo respecto del Sol.

3.3 Si al tiempo $t = 0$ la distancia entre la Tierra y Júpiter es mínima, estima la distancia $d(t)$ entre la Tierra y Júpiter en el sistema SJ. Calcula entonces el periodo de tiempo $T(t)$ que transcurre entre la observación de dos eclipses sucesivos y realiza una gráfica cualitativa del $T(t)$.

3.3 A través de mediciones experimentales desde la tierra se observa que la variación máxima en el periodo real T_{Io} entre dos eclipses sucesivos es $T_{Io} + 15$ s. Con este dato determina la velocidad de la luz.

Problema 4, Análisis de datos.

En este problema, se tiene un cubo sólido con densidad uniforme en cuyo centro, largo del eje de simetría, se encuentra un hueco cilíndrico de radio b como se muestra en la figura 3.1.

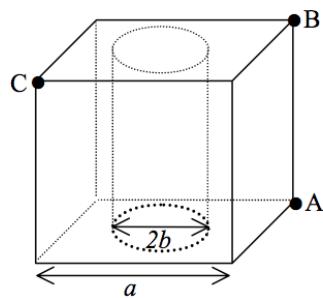


Figura 3.1

Los puntos A, B y C representan pequeños agujeros en las esquinas del cubo. Estos agujeros son utilizados para suspender el cubo en dos posibles configuraciones, como se muestra en las figuras 3.2, de tal manera que el cubo puede oscilar como un péndulo bifilar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de masa del cubo.

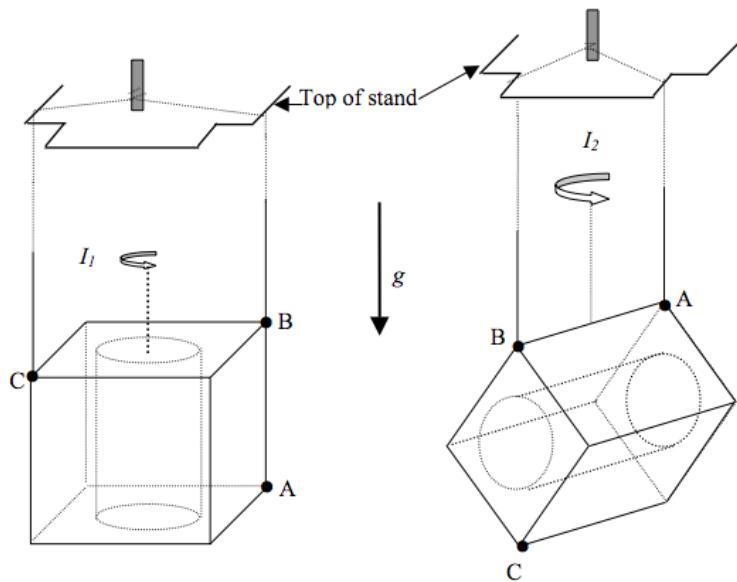


Figura 4.2

Experimento:

El experimento consiste en determinar la relación b/a a través de mediciones del período de oscilación en cada una de las dos configuraciones posibles.

4.1 Determina el momento de inercia I_1 e I_2 y el período de oscilación T_1 y T_2 alrededor del eje vertical de oscilación que pasa por el centro de masa del cubo para cada una las configuraciones mostradas en

la figura 4.2, en términos de los parámetros ℓ , d , b , a y g donde ℓ es la longitud de cada una de las cuerdas que sostiene al cubo y d es la distancia de separación entre las cuerdas.

4.2 Para la configuración I_1 un grupo de estudiantes realizó las mediciones reportadas en la tabla 1, donde T_1 representa el tiempo medido sobre 40 oscilaciones del péndulo. Si la distancia de separación entre las cuerdas es $d = 7.0$ cm, emplea los datos de la tabla 1 para hacer un análisis gráfico y determinar la relación b/a .

ℓ (cm)	T_1 for 40 oscillations(s)		
16.5	20.60	20.50	20.70
17.9	21.35	21.35	21.30
22.6	24.05	24.00	24.00
27.4	26.55	26.45	26.55
29.0	27.40	27.40	27.40
34.2	29.75	29.70	29.65
36.1	30.60	30.60	30.50
43.0	33.40	33.35	33.50

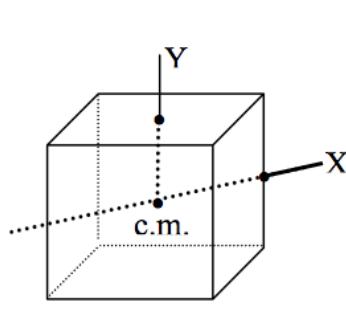
tabla 1

4.2 Para la configuración I_2 se realizaron las mismas mediciones que en el inciso anterior y están reportadas en la tabla 2. Si en este caso la distancia de separación entre las cuerdas es $d = 4.9$ cm, emplea ahora los datos de la tabla 2 para hacer el análisis gráfico y determinar la relación b/a .

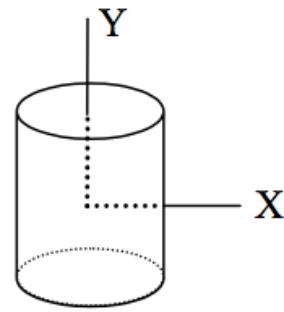
ℓ (cm)	T_2 for 40 oscillations (s)		
43.8	46.95	46.90	46.80
36.0	42.70	42.45	42.50
30.9	39.60	39.40	39.35
26.5	36.40	36.30	36.45
19.5	30.80	30.85	30.75

tabla 2

Formulas útiles:



(a)



(b)

Para un cubo sólido de lado a y masa M el momento de inercia alrededor de cada uno de los ejes X y Y que pasan por el centro de masa y se muestran en la figura esta dado por:

$$I = \frac{1}{6}Ma^2 \quad (4)$$

Para un cilindro de radio b , longitud a y masa m el momento de inercia alrededor de cada eje mostrado en la figura son:

$$\begin{aligned} I_Y &= \frac{1}{2}mb^2 \\ I_X &= \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{4}mb^2 \end{aligned} \quad (5)$$

ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.

TAREA # 12, ENVIAR: LUNES 27 MAYO 2013.

Problema 1, Interferencia de ondas

Sean dos ondas con la misma frecuencia y la misma fase inicial que emergen de dos puntos diferentes S_1 y S_2 . Consideremos el caso general donde la amplitud es diferente en cada onda:

$$\begin{aligned}\psi_1(r_1, t) &= A_1 \cos(kr_1 - \omega t) = A_1 \cos(\phi_1 - \omega t) \\ \psi_2(r_2, t) &= A_2 \cos(kr_2 - \omega t) = A_2 \cos(\phi_2 - \omega t)\end{aligned}\quad (1)$$

Donde r_1, r_2 corresponde a la distancia que recorre cada onda desde los puntos donde emergen S_1 y S_2 hasta un punto P donde interfieren:

$$\begin{aligned}\overline{S_1P} &= r_1 \\ \overline{S_2P} &= r_2\end{aligned}\quad (2)$$

De esta forma las fases de cada onda $\phi_1 = kr_1$, $\phi_2 = kr_2$ son en general diferentes y las que determinan las propiedades de la interferencia entre ambas ondas. La suma de ambas ondas esta dada por:

$$\psi_T = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\phi - \omega t) \quad (3)$$

donde la amplitud y la fase de la onda resultante se encuentran a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\Delta)}, \\ \tan \phi &= \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}\end{aligned}\quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= kr_1 - kr_2 = k\Delta \\ \Delta &\equiv r_1 - r_2\end{aligned}\quad (5)$$

$\Delta = \overline{S_1P} - \overline{S_2P}$ es la diferencia de camino que recorren las dos ondas ψ_1 y ψ_2 hasta el punto de interferencia.

La intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, por lo que la intensidad resultante en el punto de interferencia esta dado por:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k\Delta, \quad \begin{cases} k\Delta = 2\pi m, & \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta = \pi(2m+1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Los máximos (interferencia constructiva) y mínimos (interferencia destructiva) de interferencia dependen de la diferencia de camino Δ . Una caso importante sucede cuando las amplitudes de cada onda es la misma ($A_1^2 = A_2^2 = I_0$), en cuyo caso la intensidad total es:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{k\Delta}{2} \right), \quad \begin{cases} k\Delta = 2\pi m, & \text{interferencia constructiva} \\ k\Delta = \pi(2m+1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Este caso puede ser aplicado cuando la distancia de separación entre las fuentes S_1 y S_2 es pequeña en comparación con r_1 y r_2 .

En términos de la longitud de onda $k = 2\pi/\lambda$, los máximos y mínimos de interferencia se obtienen cuando:

$$\begin{cases} \Delta = \lambda m, & \text{interferencia constructiva} \\ \Delta = \frac{\lambda}{2}(2m+1), & \text{interferencia destructiva} \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

1.1 Ejercicio: Demuestra las relaciones (??) que corresponden a la amplitud y fase de la suma de las dos ondas (??). Hint: puedes usar un método empleando números complejos o una representación vectorial.

1.2 Doble rendija.

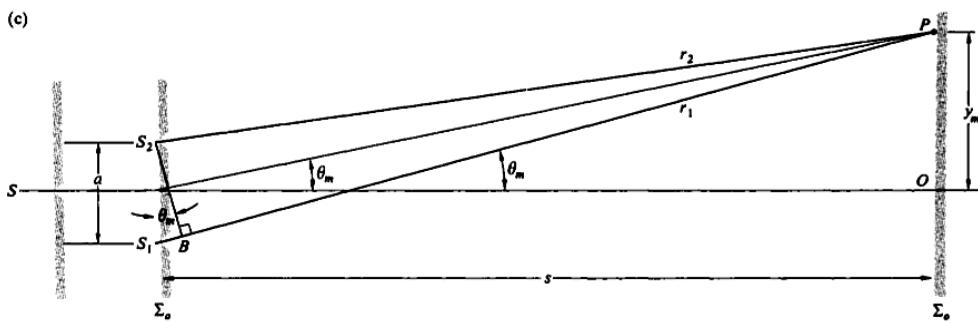


figura 2.1

Problema: Para el experimento de la doble rendija (ver figura 2.1), encuentra la diferencia de camino:

$$\Delta = \overline{S_1 P} - \overline{S_2 P} \quad (9)$$

entre las dos ondas que atraviesan las rendijas S_1 y S_2 y que interfieren en el punto P sobre una pantalla lejana a un ángulo θ_m sobre la horizontal.

Encuentra la altura y_m a la cual se obtienen los máximos de intensidad (interferencia constructiva), así como la distancia de separación entre dos máximos sucesivos, en términos de los siguientes parámetros: s distancia entre la doble rendija y la pantalla; a separación entre las dos rendijas y λ la longitud de onda. Considera que la pantalla se encuentra muy lejos de la doble rendija.

Conjunto de rendijas:

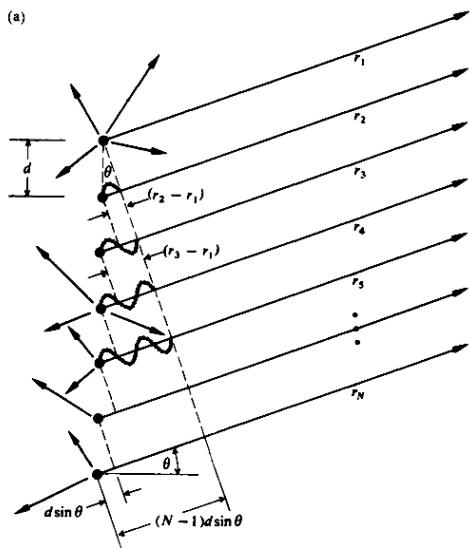


figura 2.2

Considera ahora un conjunto de N rendijas separadas una distancia d , cada rendija se puede considerar como una fuente puntual de ondas, ver la figura 2.2 Si las ondas que emergen de cada una de las fuentes tienen la misma frecuencia ω , la misma amplitud A y tienen la misma fase inicial (coherencia), demuestra que la suma de todas las ondas (interferencia) en un punto P sobre una pantalla que se encuentra muy lejos, similar al de la figura 2.1, esta dado por:

$$\psi_T = Ae^{-i\omega t} e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (10)$$

Donde se entiende que la onda total esta representada por la parte real de la expresión anterior y δ esta dada por:

$$\delta = kd \sin \theta \quad (11)$$

Si se define R a la distancia desde el centro del conjunto de rendijas hasta el punto P (comparar con la figura 2.1), entonces la onda total esta descrita por:

$$\psi_T = A \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \cos(kR - \omega t) \quad (12)$$

Nuevamente se obtiene algo similar a la suma de dos ondas, ecuación (??), pero con una amplitud diferente. Así el patrón de intensidades, debido a la interferencia de las ondas, que se observa sobre la pantalla esta dada por:

$$I = A^2 \frac{\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin \theta]} \quad (13)$$

Dibuja nuevamente la gráfica de la expresión anterior, resalta los valores de intensidad máxima y mínima. A partir de este resultado comenta cómo podrías medir la longitud de onda λ de una fuente de luz a través de este método.

1.2 Película delgada

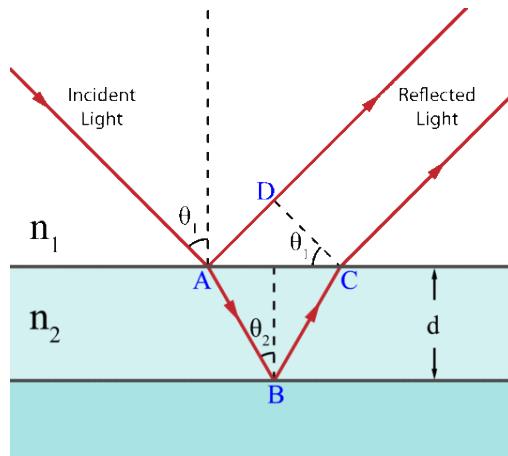


figura 2.3

La diferencia de camino entre dos ondas que intercambian puede depender también del medio donde se propaga cada una de las ondas. Un ejemplo de esto se observa en la interferencia de la luz reflejada por una película delgada, como se muestra en la figura. En este caso los rayos que intercambian son dos rayos reflejados en A y C, el primero se debe a la reflexión directa del rayo incidente sobre la superficie que separa los dos medios de índices n_1 y n_2 ; mientras que la segunda reflexión corresponde a un rayo que se transmite AB, se refleja en el punto B sobre la superficie inferior (en general la superficie inferior puede ser otro medio de índice n_3 o el mismo medio de arriba n_1) y finalmente se refracta en el punto C.

En general se define al *camino óptico* Λ como el producto de la distancia l que recorre un rayo de luz en un medio por el índice de refracción n del medio $\Lambda = ln$

Problema: Determina la diferencia de camino óptico entre los dos rayos reflejados por la película de índice de refracción n_2 que se muestra en la figura 2.2:

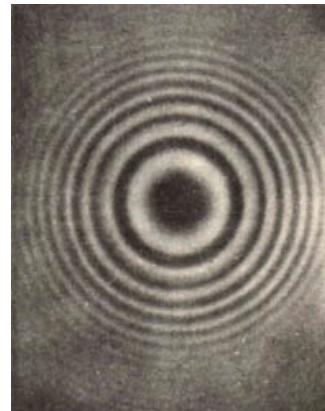
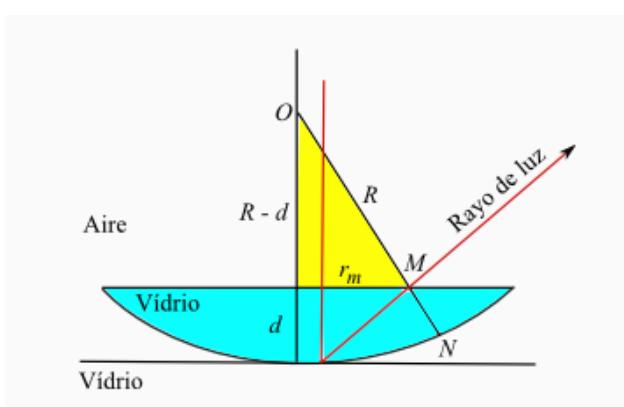
$$\Lambda = n_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AD} \quad (14)$$

en términos de los parámetros n_2 , d , θ_2 y d .

En general cuando la luz es reflejada por una superficie que separa dos medios de índice de refracción n_1 , n_2 se puede presentar además un desfase relativo entre el rayo reflejado respecto del rayo incidente, si $n_2 > n_1$ el desfase relativo es de π .

Una burbuja de jabón, por ejemplo, tiene índice de refracción $n_b > 1$, encuentra en este caso las condiciones de interferencia constructiva y destructiva en términos del índice de refracción de la burbuja n_b , el grosor de la burbuja d y el ángulo de transmisión θ_2 .

1.3 Anillos de Newton

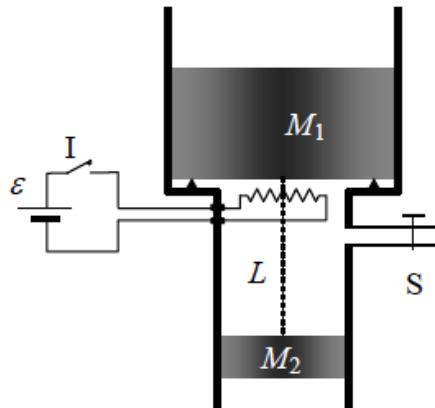


Cuando se coloca una lente sobre una superficie plana el patrón de interferencia que se observa, de los rayos de luz reflejados, consiste en una serie de anillos como los que se muestran en la figura.

Empleando el resultado del inciso anterior, determina la posición r_m de los máximos y mínimos de intensidad (constructiva, destructiva) en términos del radio de curvatura R de la lente y la longitud de onda λ .

Problema 2, Termodinámica

Un estudiante aficionado a la física y a la tecnología ha ideado un dispositivo capaz de funcionar como un gato que permite levantar cuerpos a pequeñas alturas. El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico vertical con secciones diferentes; en la parte superior tiene un radio $r_1 = 9 \text{ cm}$ y en la inferior $r_2 = 7 \text{ cm}$, tal como se representan en la figura. Dentro del tubo hay dos émbolos de masas $M_1 = 4 \text{ kg}$ y $M_2 = 0.9 \text{ kg}$, unidos mediante una cadena inextensible, de longitud $L = 1 \text{ m}$ y masa $m_c = 0.1 \text{ kg}$. Los émbolos, que ajustan perfectamente en el tubo, pueden deslizar sin fricción. Todos los materiales con los que se ha construido el sistema son perfectos aislantes del calor.



Mediante la llave S se puede igualar la presión del espacio comprendido entre los émbolos con la atmosférica del exterior. Con la llave S abierta, la base inferior de M_1 se apoya sobre unos pequeños pivotes que tienen como objeto, entre otros, dejar espacio para alojar una resistencia eléctrica de calefacción que se alimenta con una batería ε cuando se cierra el interruptor I .

Se supone que en el estado inicial (que es el representado en la figura), la temperatura de todo el sistema es la ambiente, $T_a = 300$ K. A continuación, se cierra la llave S y se mantiene cerrada en todo lo que sigue. Considera que el aire se comporta como un gas perfecto diatómico de densidad $\rho = 1.29$ kg/m³.

$$P_a = 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Para un gas diatómico: } C_p = \frac{7}{2}R, C_V = \frac{5}{2}R$$

2.1 Determina la masa de aire m_{aire} encerrada entre los émbolos. Comprueba que esta masa es mucho menor que la del sistema deslizante (émbolos + cadena) y por este motivo no se considerará en el resto del problema.

2.1 Con objeto de levantar los émbolos (gato termodinámico), al aire encerrado entre ambos se le suministra lentamente calor mediante una resistencia eléctrica. En consecuencia, la presión interior variará. ¿Cuál es el valor de la presión crítica p_c para la cual los émbolos comenzarán su ascenso? (Toma $g = 9.81$ m/s²).

2.2 Cuál es la temperatura T_1 del aire al iniciar el ascenso y el calor suministrado Q_1 necesario para que empiece a ascender.

2.3 Una vez que M_1 despegue, se produce la acción útil del gato elevando este émbolo hasta una altura $h = 20$ cm. Supóngase que la elevación es muy lenta para poder despreciar la energía cinética del sistema.

Cuál es la temperatura final T_2 al final del proceso y el calor adicional Q_2 necesario para elevar hasta esa altura.

2.4 Si se considera como trabajo útil el necesario para levantar el émbolo M_1 la altura h , calcula la relación, expresada en %, entre dicho trabajo y el calor total suministrado, es decir la eficiencia η del proceso.

2.5 Para que el sistema evolucione lentamente, el suministro de calor se realiza mediante una resistencia $r=1$ kΩ conectada a una batería, de resistencia interna despreciable y fuerza electromotriz $\varepsilon = 50$ V. Calcula el tiempo t , que deberá estar conectada la batería durante todo el proceso.

2.6 Representa en un diagrama p, V el proceso seguido por el gas (aire) desde el estado inicial hasta que M_1 haya subido la altura h .

Problema 3, Cuantización del momento magnético.

En la tarea 3 se analizo el modelo atómico de Bohr para describir el átomo de hidrógeno, en este modelo se considera que el electrón gira en órbitas circulares alrededor del núcleo. Los estados de energía del átomo están determinados por un número entero $n = 1, 2, 3, \dots$, este valor se le denomina *número cuántico principal*

$$E_n = -\frac{m_e}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad (15)$$

Momento magnético del átomo de hidrógeno.

3.1 Debido al movimiento orbital del electrón, el átomo de hidrógeno posee un momento magnético μ . Demuestra que la relación entre el momento magnético del electrón μ debido a su movimiento orbital alrededor del núcleo atómico y su momento angular \mathbf{L} esta dado por:

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \quad (16)$$

En general, el factor de proporcionalidad entre el momento magnético μ y el momento angular \mathbf{L} de una partícula recibe el nombre de *razón giromagnética* y se denota con la letra g . En el caso del movimiento orbital del electrón $g = -e/2m_e = \mu_B/\hbar$, donde se define el magnetón de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$,

3.2 Calcula el valor numérico del magnetón de Bohr.

Campo magnético externo.

3.3 Considera ahora que el átomo de hidrógeno se encuentra en una posición fija y confinado en una región donde existe un campo magnético uniforme (supongamos en la dirección z) $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{k}}$.

Calcula la energía magnética U_{mag} del átomo de hidrógeno debido a la presencia del campo magnético.

Uno de los resultados de la mecánica cuántica establece que el momento angular, debido al movimiento orbital, del electrón está cuantizado tanto en su magnitud como en una de sus componentes:

$$|\mathbf{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots (n-1) \quad (17)$$

$$l_z = m_l\hbar \quad m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l$$

El *número cuántico orbital* l toma los valores enteros $0, 1, 2, \dots$ hasta $n-1$, (donde n es el número cuántico principal), por otra parte el *número cuántico magnético* m_l toma los valores comprendidos entre $-l$ y l aumentando en una unidad.

De esta manera el *estado cuántico* del átomo de hidrógeno está determinado por tres números: n , l , m_l . De las reglas anteriores se obtiene que para un estado de energía dado E_n , puede haber varios estados cuánticos con la misma energía (*degeneración cuántica*), por ejemplo:

$$E_2 \quad (n=2) \quad \text{estados cuánticos: } \begin{cases} n & l & m_l \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & +1 \end{cases} \quad (18)$$

Hay tres estados con la misma energía.

d) Establece todos los estados cuánticos que tienen energía E_3 ($n=3$), haz lo mismo para E_4 ($n=4$).

Determina en general cual es el valor de la degeneración para un valor de n ; es decir, cuantos estados posibles hay con la misma energía para un valor dado n .

4 Problemas (varios).

4.1 Supongamos por el momento que el electrón tiene un tamaño finito y su estructura es el de una esfera, con los conocimientos que tienes haz una estimación de su radio.

4.2 La dualidad onda-partícula hace referencia a la propiedad de que las partículas de materia manifiestan también propiedades ondulatorias. La relación de de Broglie establece la relación que hay entre la longitud de onda λ asociada con una partícula y su momento lineal, a través de la siguiente igualdad:

$$p = \frac{\lambda}{h} \quad (19)$$

donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js es la constante de Planck. Usando la relación de de Broglie deriva la condición de cuantización del momento angular en las órbitas del electrón del átomo de hidrógeno:

$$L = n\hbar \quad (20)$$

4.3A partir de los estados de energía E_n del átomo de hidrógeno:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (21)$$

¿Cómo se modifica esta expresión en el caso del ion de berilio triplemente ionizado Be^{+3} ($Z=4$)?

Calcula la energía de ionización del Be^{+3} , expresa esta energía en unidades de eV.

4.4 Una partícula que se mueve a velocidades muy inferiores a c (*partícula no relativistas*) en órbitas circulares alrededor del origen sujeta una fuerza tipo oscilador:

donde k es una constante y r es la distancia de la partícula al origen.

Considerando las condiciones de cuantización del momento angular de Bohr, determina lo siguiente:

- a) Los posibles valores de la velocidad de la partícula v_n (en términos de los valores $n = 1, 2, 3 \dots$)
- b) Las órbitas permitidas, es decir el radio de las partículas r_n
- c) Los estados de energía E_n
- d) Si $m = 3 \times 10^{-26}$ kg y $k = 1180$ N/m, determina la longitud de onda del fotón (en nanómetros) que podría causar la transición del la partícula entre dos estados de energía sucesivos.

4.5 Un pion viaja con velocidad constante $|\mathbf{v}| = v$ y decae en un muon μ y un neutrino ν

$$\pi \rightarrow \mu + \nu$$

Si el neutrino emerge en ángulo recto respecto \mathbf{v} , encuentra la expresión del ángulo θ_μ al que el muon emerge.

4.6 La energía total relativista de una partícula con momento lineal p y masa en reposo m_0 esta dada por:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (22)$$

- a) Escribe la expresión de la energía cinética E_k de una partícula relativista y demuestra que para $p \ll m_0 c^2$, se reduce a la expresión conocida $E_k = p^2/2m$,
- b) Calcula la primer corrección a los estados de energía para el átomo de hidrógeno al considerar los efectos relativistas.

**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 13, ENVIAR: VIERNES 7 DE JUNIO.**

Problema 1, Polarización ondas electromagnéticas

La polarización es una propiedad de las ondas transversales, en especial de las ondas electromagnéticas, y hace referencia al plano de vibración de la onda. En las ondas electromagnéticas por convención el plano de polarización lo define el plano que contiene al campo eléctrico \mathbf{E} .

En la figura (1) se muestra una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje z (la dirección de propagación de la onda esta determinada por el vector \mathbf{k} ($|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$) ; el campo eléctrico \mathbf{E} oscila en la dirección del eje x mientras que el campo magnético oscila en la dirección y (en una onda electromagnética que se propaga en el vacío, el vector del campo magnético \mathbf{B} siempre es perpendicular campo \mathbf{E}).

La onda que se muestra en la figura esta polarizada linealmente en la dirección del eje x . Cuando el vector del campo eléctrico \mathbf{E} oscila siempre en la misma dirección se conoce como **polarización lineal**.

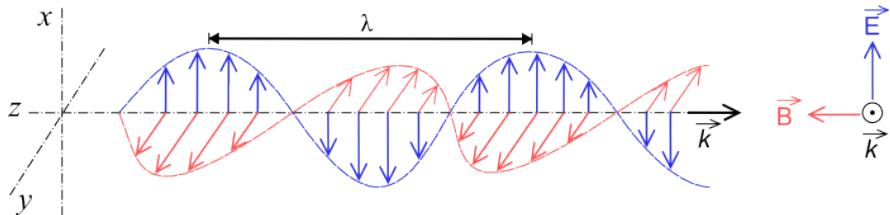


Figura 1: Polarización lineal de una onda electromagnética, para todo tiempo el campo eléctrico esta contenido en el plano $z - x$.

Estado de polarización de las ondas electromagnéticas.

En general el vector del campo eléctrico \mathbf{E} en una onda electromagnética puede cambiar de dirección y girar sobre el plano perpendicular al de propagación de la onda y describir una circunferencia o una elipse, como se muestra en la figura siguiente:

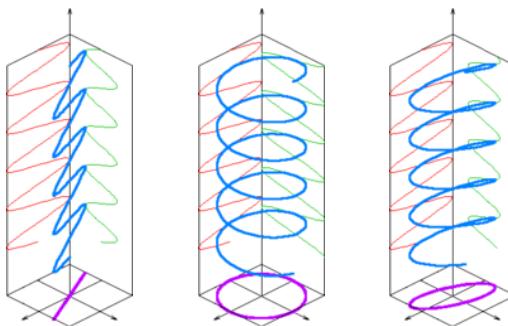


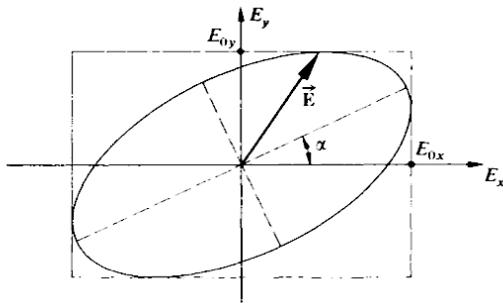
Figura 2: Estados de polarización de las ondas electromagnéticas, polarización lineal, circular y elíptica.

Para analizar el estado de polarización general de una onda supongamos una onda electromagnética que se propaga en la dirección z . El vector de campo eléctrico \mathbf{E} esta contenido en el plano $x - y$. Cada una de sus componentes, sobre cada eje, se comporta como una onda de frecuencia ω :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_1) \\ E_y &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (1)$$

E_{0x} y E_{0y} corresponde a la amplitud de las componentes en los ejes x , y respectivamente. Supongamos que ambas componentes difieren en una fase $\Delta \equiv \phi_1 - \phi_2$. De esta manera el campo eléctrico queda determinado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} \\ |\mathbf{E}|^2 &= E_1^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_1) + E_2^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2)$$



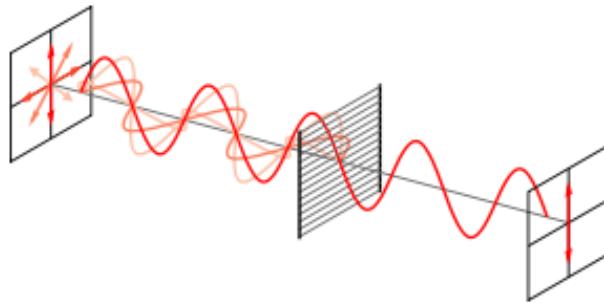
1.1 Demuestra a partir de las componentes del campo eléctrico (1), que el vector el campo eléctrico \mathbf{E} describe una elipse rotada cuya ecuación es:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2(\phi_1 - \phi_2) \quad (3)$$

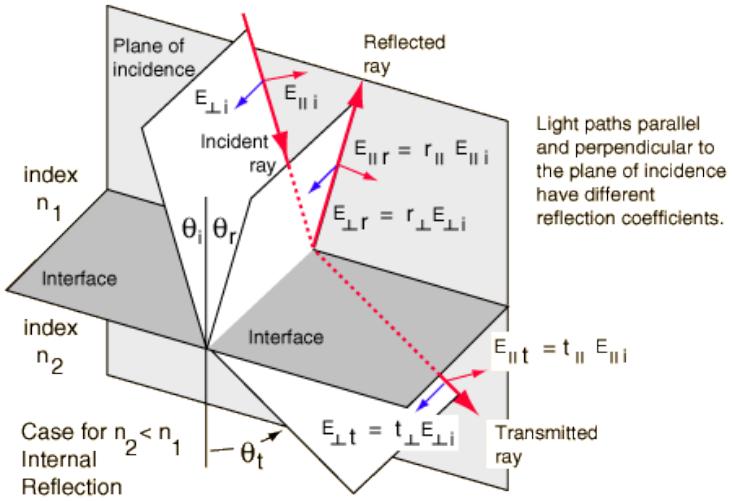
Determina el ángulo α en función de los parámetros E_{0x} , E_{0y} y $\Delta = \phi_1 - \phi_2$

1.2 Verifica el estado de polarización de la onda cuando $|\Delta| = 0, \pi, \pi/2$; cómo modifica las propiedades de propagación de la onda el signo de la diferencia de fase Δ , es decir que pasa cuando $\Delta < 0$ ó $\Delta > 0$.

En general las ondas electromagnéticas de una fuente de luz no están polarizadas (¿la luz de un láser está polarizada?). Sin embargo al hacerla pasar a través de un medio que absorbe todas las componentes del campo que están fuera de un eje óptico, característico del material, la luz queda polarizada. Estos dispositivos se conocen como *polarizadores*.



Otra manera de obtener luz polarizada es a través de reflexión de la luz. Cuando la luz incide sobre un material, una parte de la luz es reflejada y otra transmitida, las propiedades de reflexión y transmisión de la luz en cada una de las componentes del vector del campo eléctrico están determinadas por las ecuaciones de Fresnel. Si descomponemos al vector \mathbf{E} en dos componentes, una de ellas perpendicular al plano de incidencia E_{\perp} y otra paralela al plano E_{\parallel} .



Las componentes del campo eléctrico reflejadas y transmitidas obedece las siguientes ecuaciones para cada componente del campo (ecuaciones de Fresnel):

$$\begin{array}{ll} \text{componente perpendicular} & \left\{ \begin{array}{l} r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{\perp r}}{E_{\perp i}} \right) = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{\perp t}}{E_{\perp i}} \right) = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \end{array} \right. \\ & \text{componente paralela} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{\parallel r}}{E_{\parallel i}} \right) = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \\ t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{\parallel t}}{E_{\parallel i}} \right) = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \end{array} \right. \end{array} \quad (4)$$

Donde se definen los coeficientes de reflexión perpendicular r_{\perp} , reflexión paralela r_{\parallel} ; transmisión perpendicular t_{\perp} y transmisión paralela t_{\parallel} .

1.2 Demuestra que los coeficientes de reflexión y transmisión se pueden escribir como:

$$\begin{array}{ll} r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} & r_{\parallel} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} = -\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} & t_{\parallel} = -\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{array} \quad (5)$$

1.3 Determina el ángulo de incidencia θ_B (en función de los índices n_1 y n_2) para el cual la luz reflejada esta polarizada linealmente en el plano perpendicular al plano de incidencia.

1.4 Responde a las siguientes preguntas, justifica tus respuestas:

- ¿Hay un cambio de fase en las componentes transmitidas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?
- ¿Hay un cambio de fase en las componentes reflejadas (paralela y perpendicular) del campo eléctrico?

Nota:

En la Olimpiada Asiática 2012, el problema 3 esta relacionado con la polarización de la luz.

Problema 2, Medición de la masa de una estrella a través del corrimiento al rojo de los fotones.

Un fotón es una partícula con la propiedad de que su masa es nula $m = 0$ y se mueve siempre a velocidad de la luz en el vacío c . En este sentido los fotones no son afectados gravitacionalmente. Sin embargo experimentalmente se observa que los fotones emitidos sobre la superficie de estrellas muy masivas tienen un corrimiento hacia el rojo en su frecuencia, esto se puede entender como si los fotones fueran atraídos gravitacionalmente por la estrella.

Para entender el corrimiento al rojo en la frecuencia de los fotones emitidos sobre la superficie de una estrella, un modelo muy simple consiste en asociarle a un fotón de frecuencia f una “masa inercial” m determinada por su energía, esta masa se puede suponer también que es igual a su “masa gravitacional”. En consecuencia, un fotón emitido sobre la superficie de una estrella pierde su energía cuando se escapa del campo de gravedad de la estrella.

La energía total relativista de una partícula con de masa en reposo m_0 y que se mueve a una velocidad v esta dada por:

$$E = \gamma m_0 c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (6)$$

donde $c = 299,792,458$ m/s, o en términos del momento de la partícula:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (7)$$

Por otro lado, la energía de un fotón en términos de su frecuencia f y en términos de su momento lineal esta dada por:

$$\begin{aligned} E &= hf \\ E &= pc \end{aligned} \quad (8)$$

de donde el momento lineal de un fotón como función de su frecuencia esta dado por:

$$p = \frac{hf}{c} \quad (9)$$

2.1 Determina la “masa gravitacional” m de un fotón de frecuencia f y demuestra que el cambio en la frecuencia del fotón cuando escapa del potencial gravitacional de la estrella esta dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\Delta f}{f_i} = -\frac{GM}{Rc^2} \quad (10)$$

Donde f_i es la frecuencia inicial del fotón, cuando se encuentra sobre la superficie de la estrella; M y R corresponde a la masa y el radio de la estrella, G es la constante gravitacional y c la velocidad de la luz en el vacío.

Si se mide el corrimiento hacia el rojo de una línea espectral conocida de una estrella muy lejana, se puede utilizar este dato para determinar la razón M/R . El conocimiento del radio de la estrella R permite entonces calcular la masa M de la estrella.

2.2 Una sonda espacial se emplea para medir la masa M y el radio R de una estrella de nuestra galaxia. Los fotones emitidos por el ion He+ en la superficie de la estrella pueden ser detectados mediante *absorción resonante* con otros iones He+ que se encuentran contenidos en una cámara de pruebas situada en la nave. Para que sean detectados por absorción resonante, la frecuencia de los fotones emitidos en la superficie estelar cuando llegan a la sonda debe ser la necesaria para que sean absorbidos por los iones contenidos en la sonda.

A medida que la nave espacial se aproxima a la estrella directamente (radialmente) se mide la velocidad relativa $v = \beta c$ de la sonda que lleva la cámara de prueba respecto de la estrella, como función de la distancia d entre la sonda y la superficie de la estrella. Los datos experimentales están recogidos en la tabla de abajo.

Utilizar los datos de la tabla para hacer un análisis gráfico (en papel milimétrico) y determinar la masa M y el radio R de la estrella. Con estos valores, calcula el cambio de frecuencia (10).

Suponer $\Delta f \ll f$, Hint: efecto Doppler.

$\beta (\times 10^{-5})$	$d (\times 10^8 \text{ m})$
3.352	38.90
3.297	19.98
3.195	13.32
3.077	8.99
2.955	6.67

Con el fin de determinar R y M en el experimento, es usual considerar una corrección a la frecuencia debido al retroceso de los iones que emiten los fotones, este retroceso se debe al movimiento térmico ¹

2.3 Suponiendo que los átomos se encuentran inicialmente en reposo y al emitir un fotón retroceden. Encuentra la expresión de la energía hf del fotón emitido en términos de la diferencia de energía ΔE entre los niveles atómicos del átomo en reposo y la masa en reposo inicial del átomo m_0 .

¹En la práctica, el movimiento térmico de los átomos no causa el desplazamiento de las líneas de emisión, sino que provoca que las líneas de emisión sean en realidad bandas y por lo cual se puede considerar que los efectos térmicos son tomados en cuenta.

Problema 3, Cuestiones sobre el modelo de Bohr.

En el modelo atómico de Bohr que hemos estado revisando en tareas pasadas se considera que el electrón gira alrededor del núcleo en órbitas estacionarias. Esta suposición está totalmente en desacuerdo con la física clásica ya que toda partícula cargada al estar acelerada emite radiación electromagnética, este es un resultado de la teoría electromagnética, entonces por conservación de energía esta radiación debe ser compensada por la energía cinética del movimiento del electrón, lo que debería provocar que el electrón tienda a frenarse y finalmente “caer” hasta el núcleo.

El modelo de Bohr postula entonces que cuando el electrón se mueve en una de sus órbitas estacionarias NO emite radiación electromagnética. El electrón solo emite radiación -un fotón- cuando cambia de órbita (de mayor energía a menor), se dice entonces que el electrón **realiza una transición** entre dos estados cuánticos. La frecuencia del fotón emitido está determinada por el cambio de energía entre los dos estados (*niveles cuánticos*):

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_f - E_i}{h} \quad (11)$$

Donde la energía final E_f e inicial E_i corresponden a los posibles valores de los estados de energía del átomo de hidrógeno E_n .

El siguiente problema tiene por objeto hacer una estimación, clásica y no relativista, del tiempo que tardaría en aniquilarse un átomo de hidrógeno según las teorías clásicas de la mecánica y de la radiación, partiendo del hecho de que la energía de ionización de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental o no excitado es $E_0 = -13.6$ eV.

3.1 Suponiendo que la órbita del electrón es circular de radio r , obtenga las expresiones de la energía total del electrón E , de su velocidad v , de su aceleración a y de su periodo de revolución T , en función de la energía total E_0 del átomo de hidrógeno en el estado no excitado y del radio r_0 de la órbita circular en dicho estado.

3.2 Determine y calcule E_0 y r_0 así como la velocidad, la aceleración y el periodo en esta órbita, v_0 , a_0 , y T_0 , respectivamente.

Cuando un electrón se mueve con aceleración a , la potencia radiante que emite viene dada por la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} a^2 \quad (12)$$

en la que k es la constante de Coulomb, c la velocidad de la luz y e la carga elemental.

3.3 Al perder energía, el electrón irá describiendo órbitas de radio cada vez menor. Halle la expresión de la potencia emitida P en función del radio r de la órbita circular del electrón, de r_0 y de E_0 . Puede comprobar que tanto $E(r)$ como $P(r)$ tienden a infinito cuando $r \rightarrow 0$.

Este absurdo físico es consecuencia de que en las antiguas teorías se idealizaba al electrón y al protón considerándolos como partículas puntuales. Pasemos por alto estos inconvenientes y vayamos al objetivo de este ejercicio:

3.4 ¿Cuál es el tiempo τ que le costaría a un electrón “caer” sobre el núcleo desde la órbita del estado fundamental de radio r_0 ?

Problema 4, óptica geométrica.

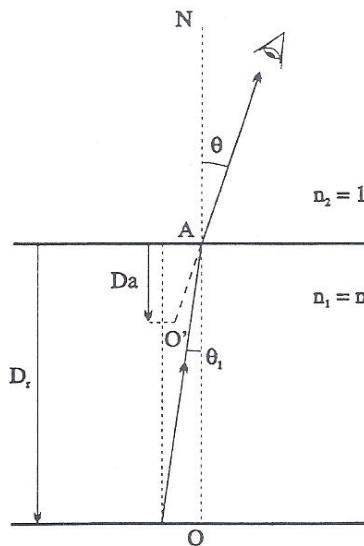
4.1 Un observador está situado cerca de una balsa llena de un líquido de índice n y mira un objeto situado en el fondo con un ángulo θ (respecto a la normal a la superficie), como se muestra en la figura. A partir del principio de Fermat que nos dice que el camino óptico es un extremal, i.e.

$$\frac{d}{d\theta} L = 0 \quad (13)$$

donde $L = nd$ y d es la distancia recorrida en el medio de índice de refracción n .

a) Calcular la profundidad aparente del recipiente D_a donde ve el objeto cuando la profundidad real de la balsa es D_r .

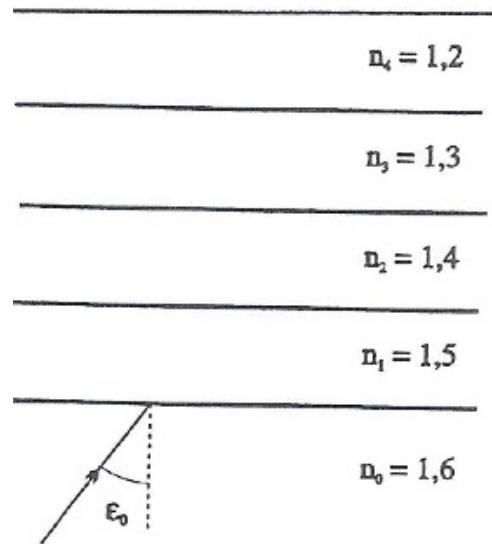
b) Demostrar que en el caso de incidencia normal ($\theta = 0^\circ$), el valor de D_a esta determinado por la expresión $D_a = D_r/n$. Esto se puede encontrar como un caso particular de la relación encontrada en el inciso anterior.



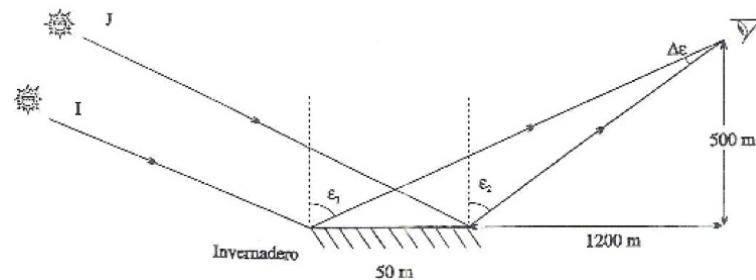
4.2 En un sistema compuesto por un conjunto de capas homogéneas, cada una de 10 cm de espesor como se observa en la figura, incide un rayo sobre la primera capa con un ángulo de $\epsilon_0 = 50^\circ$.

Determinar:

1. La trayectoria que seguirá en el interior de las capas.
2. La inclinación del rayo emergente del sistema.
3. La distancia entre el punto extremo de incidencia y el punto extremo de emergencia del sistema.
4. La posible relación que existe entre esta situación y los espejismos.



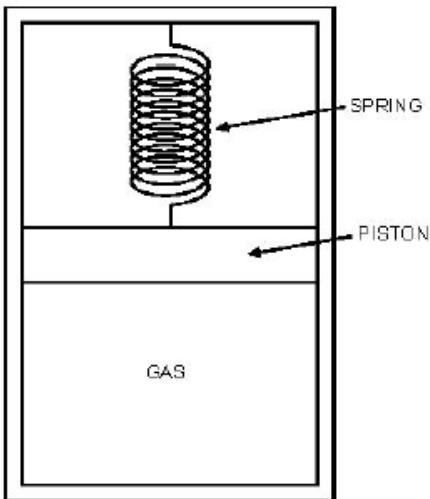
4.3 Un observador se encuentra en la cima de una montaña de 500 m de altura, a 1200 m de dicha cima se encuentra un enorme invernadero que tiene un techo plano de 50 m de largo. El observador ve el Sol reflejándose en el techo del invernadero y lo percibe de color dorado. ¿Durante cuánto tiempo puede ver el reflejo del Sol sobre el techo del invernadero?



**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 14, ENVIAR: VIERNES 16 DE AGOSTO.**

Problema 1

Considere $n = 2$ mol de gas helio ideal a presión P_0 , volumen V_0 y temperatura $T_0 = 300$ K colocados en un contenedor cilíndrico vertical (vea la figura). Un pistón móvil horizontal sin fricción de masa $m = 10$ kg (asuma que $g = 9.8\text{m/s}^2$) y sección transversal $A = 500\text{cm}^2$ comprime al gas dejando a la sección superior del contenedor al vacío. Hay un resorte unido al pistón y a la pared superior del contenedor. Ignore cualquier fuga de gas a través de su superficie de contacto, y desprecie las capacidades caloríficas del contenedor, el pistón y el resorte. Inicialmente el sistema está en equilibrio y el resorte está sin estirar. Desprecie la masa del resorte.



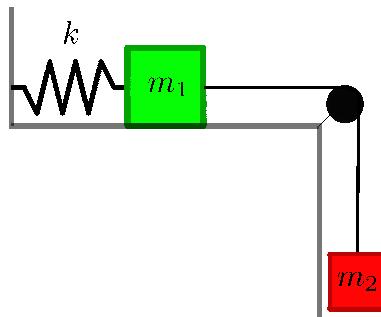
- Calcule la frecuencia f de las pequeñas oscilaciones del pistón, cuando es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio. (2.0 puntos)
- El pistón luego es empujado hacia abajo hasta que el volumen del gas se reduce a la mitad, y luego es soltado con velocidad cero. Calcule el valor (o los valores) del volumen del gas cuando la velocidad del pistón es $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$. (3.0 puntos)

Sea la constante del resorte $k = mgA/V_0$. Todos los procesos en el gas son adiabáticos. La constante de los gases es $R = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$. Para el gas monoatómico (el helio) use la constante de $\gamma = 5/3$.

Problema 2

- 1) Prospecciones geofísicas indican que a una cierta profundidad de la corteza terrestre existe una cavidad aproximadamente esférica de radio medio $R = 2.1$ km. En su interior se supone que hay gas metano, con una densidad muy inferior a la de la Tierra. Una medida precisa de la gravedad en el punto P de la superficie más próximo a la cavidad da el valor $g = 0.99997g_0$, donde g_0 sería el valor de la gravedad en P supuesta la Tierra esférica y homogénea, de radio $R_T = 6370$ km. Por simplicidad no se tendrá en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra.
- Haga una estimación de la distancia d entre el centro de la cavidad y el punto P de la superficie terrestre.
 - Suponga ahora que quiere medir g mediante un péndulo simple, cuya longitud conoce exactamente. Calcule la precisión relativa, $\Delta T/T$, con la que debe medir el período para poder obtener g con un error $\Delta g = 10^{-4}$ N/kg.
- 2) En el sistema descrito en la figura de abajo se tienen dos bloques de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible. El bloque m_1 está unido a un resorte de constante elástica k . El coeficiente de fricción estática entre el bloque de masa m_1 y la superficie sobre la cual se desliza es μ_s , mientras que μ_k el coeficiente de fricción dinámica.

El sistema se libera con velocidad inicial cero desde la posición donde el resorte se encuentra en su longitud propia (es decir sin restirarse). Encuentra la velocidad máxima de los bloques.



Problema 3 Solenoide de enfoque magnético.

Parte A.

La Figura 3.1 muestra un solenoide largo donde se “inyectan” electrones desde una fuente situada dentro (casi en medio) del solenoide. Los electrones pasan a través de un pequeño agujero en el ánodo de tal manera que emergen con una pequeña componente horizontal de la velocidad v_x ; así los electrones siguen una trayectoria helicoidal dentro del solenoide como se muestra en la figura. Después de una vuelta completa, electrón regresará al eje que conecta al agujero del anodo desde donde sale el electrón con el punto F. Ajustando correctamente el campo magnético B dentro del solenoide, todos los electrones convergerán al mismo punto F después de una vuelta completa. Use los siguientes datos:

- La diferencia de voltajes que acelera a los electrones, $V = 10 \text{ kV}$
- La distancia entre el ánodo y el punto de enfoque F es $L = 0.50 \text{ m}$
- La masa del electrón, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- La carga del electrón, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

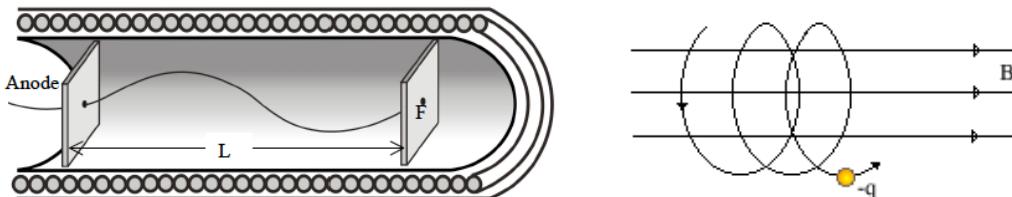


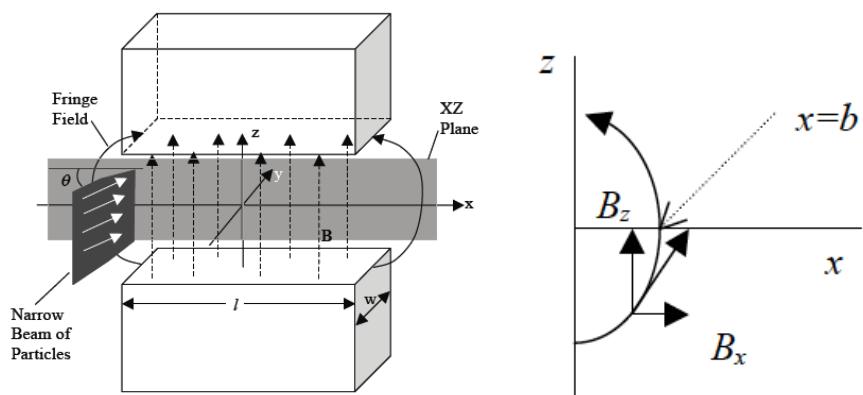
Figura 3.1

- Calcule la intensidad del campo magnético B necesaria para que el electrón regrese al eje en el punto F después de una vuelta completa.
- Encuentre la corriente en el solenoide si éste tiene 500 vueltas por metro.

Parte B

Dos magnetos colocados en planos horizontales están separados por cierta distancia tal que el campo magnético entre ellos es B en la dirección vertical (vea la Figura 3.2). Las caras de los polos son rectángulos con longitud l y ancho w .

figura 3.2



Considera el *campo magnético de borde* cerca de las orillas de los polos (el *campo de borde* es el campo asociado a los efectos de borde). Suponiendo que la extensión del *campo de borde* llega hasta una distancia b desde la orilla de los magnetos (vea la Figura 3.2). El *campo de borde* tiene dos componentes, B_x y B_z en las direcciones de los ejes x y z respectivamente. Por simplicidad, supongamos que $B_x = B \frac{|z|}{b}$, donde $z = 0$ es el plano en medio de la brecha.

Un haz de partículas cargadas de un espesor muy angosto (*narrow beam of particles*), cada una con masa m y carga q entra a la región del campo magnético generado por el par de magnetos (cerca del centro) con una alta velocidad v paralela al plano horizontal. El tamaño vertical del haz es comparable con la distancia entre los polos magnéticos. El haz de partículas entra a la región entre los magnetos con un ángulo θ respecto a la línea central del magneto y sale de él con un ángulo $-\theta$ (vea la Figura 3.3, y asuma que θ es muy pequeño). Asuma también que el ángulo con el que la partícula entra al *campo de borde* es el mismo ángulo con el que entra al campo uniforme.

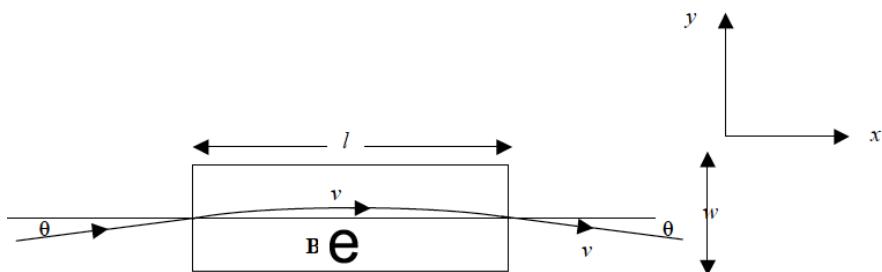


figura 3.3

El haz de partículas puede ser enfocado en un punto, como se muestra en la figura con los magnetos a través de la acción del *campo de borde*. Calcule la longitud focal aproximada, si definimos a la longitud focal f como se ilustra en la Figura 3.4 (asuma que $b \ll l$ y que la componente z de la desviación en el campo magnético uniforme B es muy pequeña).

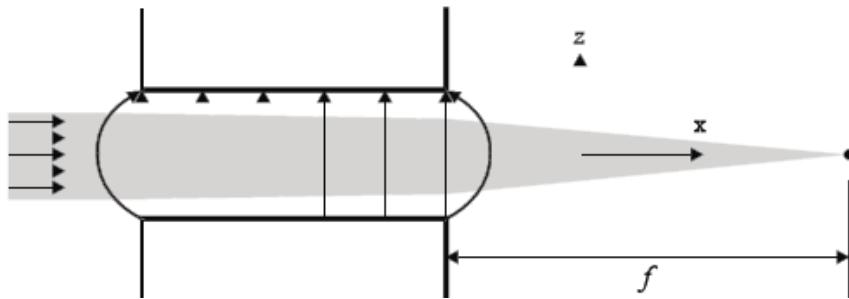


figura 3.4

Hint:

Considera el viaje que hace una de las partículas que componen el haz hasta el punto de enfoque:

- 1.- La partícula entra inicialmente por la orilla izquierda de los magnetos (figura 3.4) donde actúa el *campo de borde*, descrito anteriormente, en esta región la partícula sufre un cambio de momento lineal Δp_z en la dirección z debido a la fuerza que ejerce el *campo de borde* sobre la partícula cargada.

2.- Después la partícula entra en el espacio entre los magnetos, donde el campo magnético es uniforme, en esta región la partícula sigue una trayectoria circular debido al campo uniforme.

3.- La partícula abandona el espacio entre los magnetos y pasa nuevamente por la región del *campo de borde*, pero en la orilla de contraria de los magnetos, y por lo tanto vuelve a cambiar su momento lineal.

**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 15, ENVIAR: LUNES 26 DE AGOSTO.**

Problema 1, Rayos cósmicos ultraenergéticos.

El proyecto Auger es una colaboración internacional que busca entender a los rayos cósmicos ultraenergéticos, partículas que viajan por el espacio a velocidades muy cercanas a la de la luz. Estas partículas se detectan indirectamente, por los chubascos (lluvias) de otras partículas y de fotones que se producen al llegar a la parte alta de nuestra atmósfera y chocar con las moléculas del aire ahí existentes. Sus energías son de muchos órdenes de magnitud mayores que las de las partículas más energéticas creadas en los aceleradores terrestres y existe gran interés en comprender cómo se aceleran a estas velocidades tan cercanas a las de la luz y de qué cuerpos cósmicos provienen.

Se sabe que los rayos cósmicos por encima de cierto umbral de energía NO pueden provenir de cuerpos cósmicos muy remotos. Esto se debe a que por encima de una cierta energía (conocida como el “corte” GZK por las iniciales de los físicos que predijeron este efecto en 1966), estos rayos cósmicos ultraenergéticos pueden chocar con fotones de la radiación cósmica de fondo, perdiendo parte de su energía al crear nuevas partículas. En otras palabras, en estas colisiones dejan de ser ultraenergéticos.

En este problema calculamos cuál es el umbral de energía para que los rayos cósmicos puedan tener estas colisiones que los degradan a menores energías y la distancia que pueden recorrer como ultraenergéticos, antes de sufrir una de estas colisiones.

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

La radiación cósmica de fondo es una energía en forma de fotones que llena el espacio y se produjo cuando el Universo era muy joven. Su intensidad como función de la longitud de onda del fotón se ajusta a un cuerpo negro con temperatura T de 2.7 K. La radiación de cuerpo negro tiene la propiedad, descrita por la ley de desplazamiento de Wien, en la cual su máximo de emisión ocurre a una longitud de onda inversamente proporcional a la temperatura:

$$\lambda_{max} = \frac{0.0029}{T} \quad (1)$$

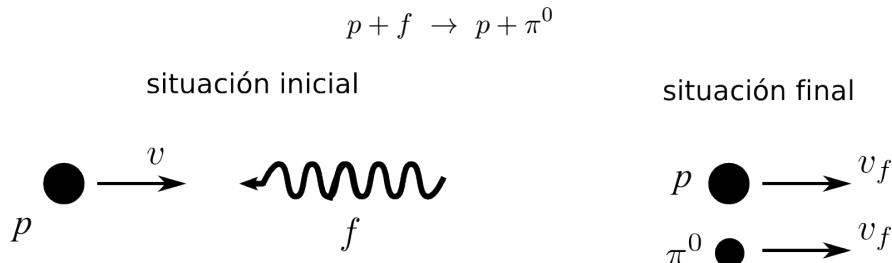
donde λ_{max} está en metros y T en Kelvins.

(I.a) Suponga que los fotones de λ_{max} son típicos de la radiación de cuerpo negro de fondo y calcule esta longitud de onda. [0.3 puntos]

(I.b) Calcule la energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo. La constante de Planck es $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s y la velocidad de la luz es $c = 3 \times 10^8$ m/s. [0.7 puntos]

Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

Por simplicidad suponga que el proceso de pérdida de energía es debido a que un protón (p) colisiona de frente con uno de los fotones (f) de la radiación cósmica de fondo, resultando de esta colisión el protón más un pión neutro (π^0):



La velocidad inicial del protón es v y su momento es $p = \gamma m_p v$, donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2)$$

Las masas de las partículas son: $m_p = 1.6 \times 10^{-27}$ kg, $m_{\pi^0} = 2.4 \times 10^{-28}$ kg

Suponga que el problema es en una sola dimensión y que el protón y el pión neutro se mueven con la misma velocidad v_f después de la colisión. Se trata de determinar cuál es la energía mínima que debe de tener el protón para lograr producir al pión neutro.

(II.a) Escriba las ecuaciones que rigen la colisión. [2.0 puntos]

(II.b) Determine la energía inicial del protón ultraenergético, $E = \gamma m_p c^2$. Dado que $v \approx c$, puede usar la aproximación $1 + \beta \approx 2$

(II.c) Encuentre el valor de la energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts.

Para esto necesita saber la siguiente equivalencia $1 \text{ J} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$. Los protones a ésta y mayores energías son considerados ultraenergéticos porque pueden producir partículas al chocar con los fotones de la radiación cósmica de fondo. [1.0 puntos]

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía (la energía en fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo está dada por:

$$u_E = aT^4 \quad (3)$$

donde $a = 7.6 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3}\text{K}^{-4}$ es la constante de radiación. Calcule la densidad de energía de la radiación cósmica de fondo. [0.3 puntos]

(III.b) Determine la densidad de fotones u_f (el número de fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo. [1.0 puntos]

(III.c) La sección eficaz para estas colisiones entre protones y fotones es $\sigma = 2.0 \times 10^{-32} \text{ m}^2$. El camino libre medio está definido como la distancia promedio que recorre una partícula entre una colisión y la siguiente y puede estimarse como la altura de un cilindro que tiene como base la sección eficaz de colisión y que contiene a un fotón en su volumen. Los protones ultraenergéticos no pueden viajar distancias mucho más grandes que este camino libre medio sin perder energía y dejar de ser ultraenergéticos.

Estime el camino libre medio l , de un protón antes de sufrir una colisión con un fotón. [1.2 puntos]

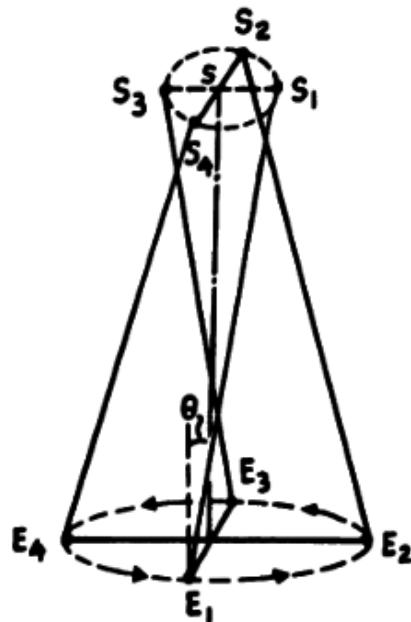
(III.d) Los cuásares son objetos cósmicos que tienen fenómenos de altas energías y que podrían ser responsables de la producción de los rayos cósmicos ultraenergéticos. Los cuásares son objetos lejanos, el más cercano está a una distancia de 2.0×10^{25} m. ¿Pueden los rayos cósmicos ultraenergéticos provenir de los cuásares o no? ¿Por qué? [0.5 puntos]

Problema 2

- A) La aberración de la luz emitida por las estrellas, conocida como *aberración estelar*, es el movimiento aparente de las estrellas en el firmamento. Este movimiento aparente se debe al movimiento de la tierra en su órbita alrededor del Sol, por lo que depende de la posición de la tierra en su órbita.

En la figura de abajo, la estrella S parece estar en las posiciones S_1, S_2, S_3, S_4 cuando la tierra se encuentra en los puntos E_1, E_2, E_3, E_4 sobre su órbita alrededor. El telescopio debe estar ligeramente inclinado un ángulo θ para observar la estrella, este es el *ángulo de aberración* debido a la luz de las estrellas y su valor es aproximadamente 20.47 segundos de arco.

A partir del ángulo de aberración calcula la velocidad de la luz.



- B) El haz del láser se puede considerar como un conjunto de fotones moviéndose en la misma dirección de propagación del haz. Los fotones, se sabe, tienen energía dada por la expresión: $E = hf$, donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js es la constante de Planck y f su frecuencia; además el fotón tiene momento lineal dado por la expresión $p = E/c$, en la misma dirección de movimiento del fotón, $c = 299,792,458$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío.

Debido a que el fotón conlleva momento lineal entonces también ejerce presión¹ sobre cualquier superficie sobre la que se refleje, esto es semejante a los átomos de un gas que chocan con las paredes del recipiente que los contiene y razón por la cual un gas ejerza presión.

Un láser de He-Na con intensidad $I = 0.20$ W/cm² incide sobre una superficie plana a un ángulo de 45°. Encuentra la presión producida por el láser sobre la superficie plana en los siguientes casos:

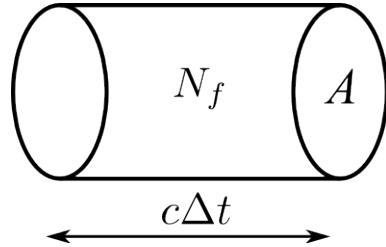
- B.1)** Si la superficie es blanca y refleja el 100 % de los fotones incidentes.
- B.2)** Si la superficie es negra y absorbe el 100 % de los fotones incidentes.

¹A la presión que ejercen las ondas electromagnéticas (fotones), se le conoce como *presión de radiación*.

Sugerencia: La intensidad del láser se puede escribir como:

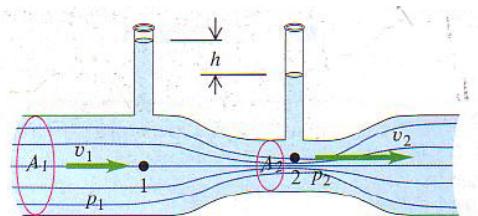
$$I = En, \quad n = \frac{N_f}{A\Delta t} \quad (4)$$

donde n es el número de fotones N_f que atraviesan un área transversal A por unidad de tiempo Δt (n es un flujo de fotones) y E la energía de cada fotón (el flujo de fotones del láser es constante). Es decir, durante un tiempo Δt el numero de fotones que atraviesan la superficie A son aquellos que estan contenidos en el cilindro de longitud $c\Delta t$ como se muestra en la figura de abajo.



Problema 3

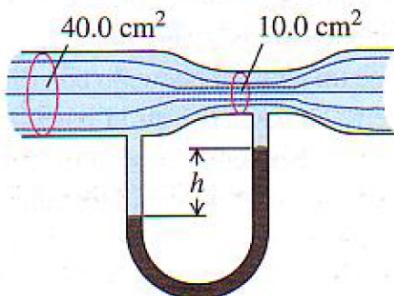
- a) La siguiente figura representa un dispositivo donde fluye cierto líquido, el dispositivo es un tubo de forma cilíndrica, pero que en su parte central la sección transversal es más angosta, esta parte del tubo se llama *garganta*. El tubo tiene además dos tubos más pequeños con la parte superior abierta como se muestra en la figura. De acuerdo a los datos geométricos que se muestran en la figura y a partir de la ecuación de Bernoulli, determina la rapidez del flujo v_1 en la parte más ancha del tubo. ¿En qué parte del tubo es mayor la presión, en la garganta o en la sección más ancha del tubo?



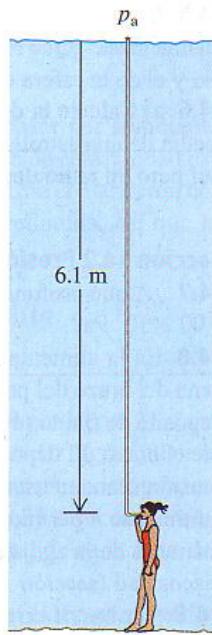
En la siguiente figura se muestra otro dispositivo parecido al anterior. El área transversal del dispositivo es 40 cm^2 en su parte más ancha y 10 cm^2 en su parte más angosta. En el dispositivo fluye agua con una descarga de $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 6 \text{ L/s}$.

Calcula:

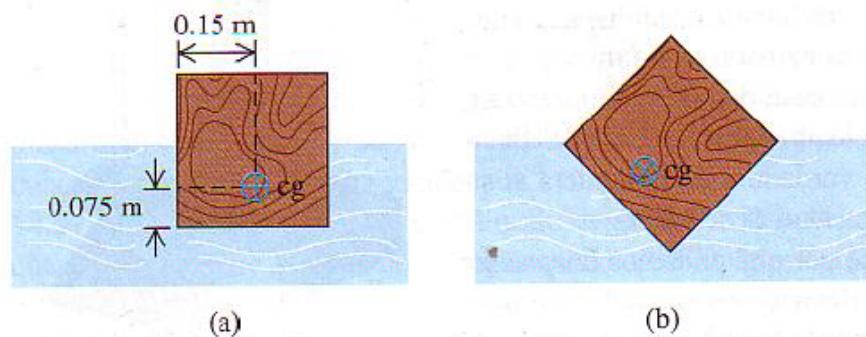
- La rapidez de flujo en las ambas partes del tubo, la ancha y la angosta.
- La diferencia de presión entre ambas partes del tubo.
- La diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U



- b) Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un snorkel, esto se debe al aumentar la profundidad la diferencia de presión tiende a colapsar los pulmones. Dado que el snorkel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcula la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce (un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayor profundidades que uno que usa snorkel porque la presión dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).



- c) Un bloque cúbico de madera de 0.3 m por lado tiene pesos que hacen que su centro de gravedad esté en el punto que se indica en la figura de abajo. El bloque flota en agua con la mitad de su volumen sumergido, el bloque se ladea con un ángulo de 45° , calcula la torca o momento de torsión neto respecto de un eje horizontal perpendicular al bloque y que pasa por su centro geométrico.



Problema 4

El efecto fotoeléctrico es un fenómeno en el que se pone de manifiesto una de las propiedades cuánticas de la materia, este fenómeno consiste esencialmente en la emisión de electrones de una superficie metálica cuando incide sobre ella radiación electromagnética, es decir, ondas electromagnéticas (incluidas la luz). Una de las principales propiedades que se observa en el efecto fotoeléctrico es que solamente se emiten electrones de la superficie metálica cuando se ilumina con ciertos valores específicos de la longitud de onda de la radiación incidente y que la emisión de los electrones no depende de la intensidad de la luz. El efecto fotoeléctrico representa por otra parte una manera para medir experimentalmente el valor de la constante de Planck $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$

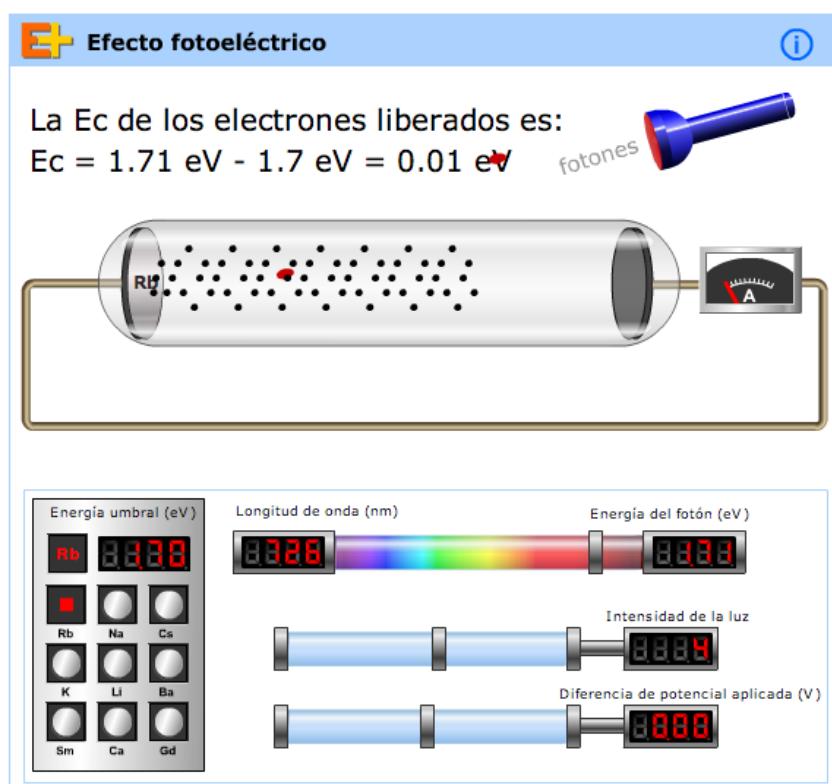
En el siguiente enlace:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/fotoelectrico/fotoelectrico.htm>

se da una explicación del efecto fotoeléctrico muy ilustrativa, donde además, se pueden simular datos experimentales. Lee con atención la explicación que se da sobre el efecto fotoeléctrico y realiza la práctica que se planeta en el sitio. En la actividad del sitio se puede ver la gráfica de los datos “medidos”; sin embargo, mas acorde al entrenamiento de olimpiadas de física, que representa esta tarea, realiza el análisis gráfico en papel milimétrico de los datos que se pueden obtener de la simulación del sitio y determina el valor de la constante de Planck así como su incertidumbre obtenida a través del análisis gráfico. Hazlo para al menos dos metales diferentes, reporta tus tablas de datos con unidades, etc.

Aquí les dejo otro sitio que incluye también una simulación del efecto fotoeléctrico y del cual también se pueden obtener datos simulados.

<http://www.educapplus.org/play-112-Efecto-fotoeléctrico.html>



**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 16, ENVIAR: LUNES 2 DE SEPTIEMBRE.**

Problema 1

- a) Los cohetes espaciales son propulsados por la combustión de diferentes materiales inflamables. Considera un cohete de masa total m_1 que viaja a velocidad v_1 en una región del espacio donde los efectos gravitacionales son despreciables.

- a1) Supón que el material utilizado en la combustión, es expulsado a una velocidad constante v_r relativa al cohete. Si el cohete reduce su masa total a m_1 durante la expulsión del material combustible. Demuestra que el incremento en la velocidad v_2 del cohete esta dada por la siguiente expresión:

$$v_2 - v_1 = v_r \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \quad (1)$$

- a2) Supongamos que durante un intervalo de tiempo 1.5×10^2 s, el cohete consume una cantidad de combustible 2.1×10^6 kg. Si durante esta fracción de tiempo, la propulsión del combustible imprime al cohete una fuerza constante de magnitud 3.4×10^7 N, calcula la velocidad v_r . Calcula también el incremento en la velocidad del cohete si su masa inicial es 2.8×10^6 kg.
- a3) ¿Cuál es la aceleración vertical inicial del cohete cuando es lanzado desde la superficie terrestre, si su masa inicial es 2.8×10^6 kg?

- b) Para un objeto de masa m que se lanza verticalmente sobre la superficie terrestre y que regresa a la misma posición, en presencia de la resistencia del aire, el tiempo de ascenso t_1 no es el mismo que el tiempo de descenso t_2 . De la misma manera, la velocidad inicial u con la que se lanza al ascender, no es la misma que la velocidad final v con la que regresa a la posición inicial.

Asumiendo que la fuerza F debido a la resistencia del aire es constante, demuestra las siguientes expresiones:

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{g + F/m}{g - F/m}}, \quad \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{g - F/m}{g + F/m}} \quad (2)$$

- c) Determina el movimiento de un cuerpo cayendo bajo la acción de la gravedad de la tierra, es decir, calcula las expresiones de la posición $y(t)$ y de la velocidad $v(t)$ como función del tiempo, en los siguientes casos:

- c1) Asumiendo que la fuerza de la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Cuál es la velocidad terminal en este caso.
- c2) Asumiendo que la fuerza de la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo. ¿En este caso, hay una velocidad terminal?, si es así determina su expresión.

Problema 2

Una bobina cerrada circular de N vueltas, radio a y resistencia total R gira con velocidad angular uniforme ω alrededor de un diámetro vertical, en un campo magnético horizontal $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{x}}$

- 2.1** Calcule la fuerza electromotriz \mathcal{E} inducida en la bobina, también la potencia promedio $\langle P \rangle$ necesaria para mantener la bobina en movimiento. Desprecie la autoinductancia de la bobina

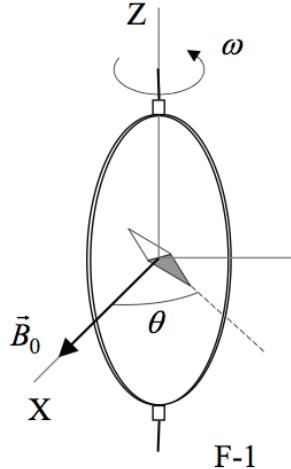
El valor promedio $\langle X \rangle$ de una cantidad $X(t)$ en un sistema periódico de periodo T es:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (3)$$

Podrías necesitar una o más integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x dx &= \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi \end{aligned} \quad (4)$$

Una pequeña aguja magnética es colocada en el centro de la bobina, como se muestra en la figura F-1. Es libre de girar lentamente alrededor del eje Z en el plano horizontal, pero no puede seguir la rápida rotación de la bobina.



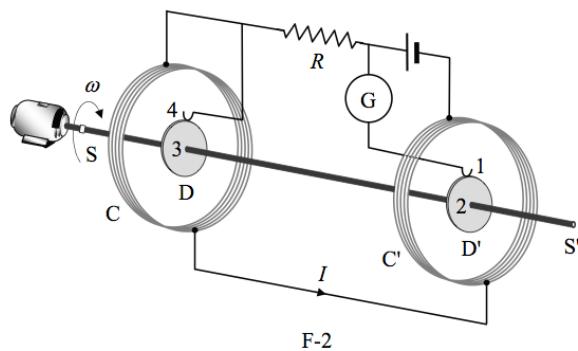
F-1

- 2.2** Una vez que se alcanza el régimen estacionario, la aguja se fijará en una dirección haciendo un pequeño ángulo θ con \mathbf{B}_0 . Compute la resistencia R de la bobina en términos de este ángulo y de los otros parámetros del sistema.

Determinación del ohm (Rayleigh, Sidgwick)

Lord Kelvin usó este método en 1860 para establecer un estándar absoluto del ohm. Para evitar hacer rotar la bobina, Lorentz ideó un método alternativo usado por Lord Rayleigh y Ms. Sidgwick, el cual analizamos en los siguientes párrafos.

La configuración experimental experimental se muestra en la Figura F-2. Consta de dos discos idénticos D y D' de radio b montados en un eje conductor SS'. Un motor rota el sistema a una velocidad angular ω , que puede ajustarse para medir R . Dos bobinas idénticas C y C' (de radio a y N vueltas cada una) rodean a los discos. Están conectadas de tal forma que la corriente fluye a través de ellas en direcciones opuestas. El aparato completo sirve para medir la resistencia R .



- 2.3** Asuma que la corriente I que pasa por las bobinas C y C' crea un campo magnético uniforme B alrededor de D y D', igual al del centro de cada bobina. Calcule la fuerza electromotriz \mathcal{E} inducida entre las misioneras 1 y 4, asumiendo que la distancia entre las bobinas es mucho mayor que el radio de las bobinas y que $a \gg b$.

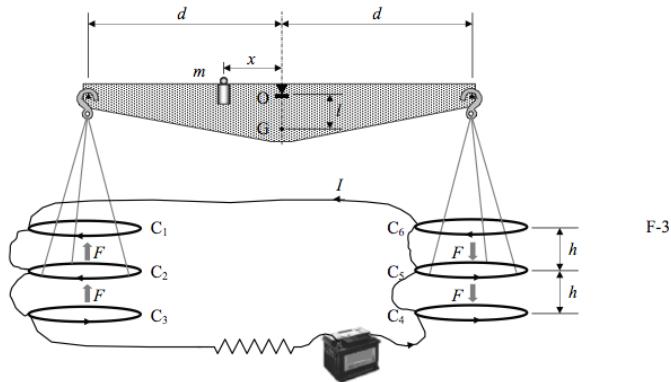
Los discos están conectados al circuito por contactos escobilla en sus bordes 1 y 4. El galvanómetro G detecta el flujo de corriente a través del circuito 1-2-3-4

- 2.4** La resistencia R es medida cuando G da lectura cero. Determina la resistencia R en términos de los parámetros físicos del sistema.

Determinación del Ampere

Al hacer pasar una corriente eléctrica a través de dos cables conductores y medir la fuerza entre ellos representa una manera en la cual se define la unidad del Ampere. La *Balanza de Corriente* diseñada por Lord Kelvin en 1882 explota este método. El dispositivo consiste en seis bobinas de una sola vuelta C_1, \dots, C_6 y de radio a conectadas en serie, como se muestra en la Figura F-3. Las bobinas fijas C_1, C_3, C_4 y C_6 están en planos horizontales separados por una pequeña distancia $2h$. Las bobinas C_2 y C_5 son cargados por brazos de balanza de longitud d y equidistan de las otras bobinas.

La corriente I fluye a través de las diferentes bobinas en una dirección tal que la fuerza magnética en C_2 apunta hacia arriba mientras que la fuerza sobre C_5 va hacia abajo, como se muestra en la figura F-3. Una masa m se coloca a una distancia x del pivote de la balanza, que se encuentra en el centro O. Esta masa m es la necesaria para regresar la balanza a su posición de equilibrio descrita anteriormente cuando la corriente pasa por el circuito.



- 3.5** Calcula la fuerza F sobre la bobina C_2 debida a la interacción magnética con C_1 . Por simplicidad, asume que la fuerza por unidad de longitud es la misma que corresponde a dos cables rectos y largos que conducen corrientes paralelas.
- 3.6** La corriente I es medida cuando la balanza está en equilibrio. Dé el valor de I en términos de los parámetros físicos del sistema. Las dimensiones del aparato son tales que se pueden despreciar los efectos mutuos entre las bobinas en la izquierda y en la derecha.

Sea M la masa de la balanza solamente (exceptuando m y las partes colgantes), G su centro de masa y l la distancia OG que se muestra en la figura F-3.

- 3.7** El equilibrio de la balanza es estable contra variaciones que producen pequeños cambios δz en la altura de C_2 y $-\delta z$ en la de C_5 . Calcule el valor máximo δz_{max} tal que la balanza regrese a la posición de equilibrio cuando es soltada.

Considera que los centros de las bobinas permanecen siempre aproximadamente alineados. Las siguientes aproximaciones te pueden ser útiles:

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2, \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2, \quad \text{si } \beta \ll 1 \quad (5)$$

Problema 3, Duración de una gota.

El propósito es estimar el tiempo de vida de una gota semiesférica de un líquido yaciendo sobre una muy delgada capa de vapor que está aislando térmicamente a la gota de la placa muy caliente que está debajo.

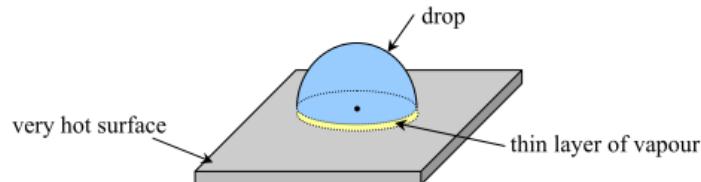


Figure 1

Aquí se asumirá que el flujo de vapor debajo de la gota es línea de corriente y se comporta como un fluido newtoniano con coeficiente de viscosidad η y conductividad térmica K . El calor latente de vaporización del líquido es l . Para un fluido newtoniano tenemos que el esfuerzo cortante es $\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dz}$, donde $\frac{dv}{dz}$ es la velocidad de corte, v es la velocidad de flujo, z es la distancia perpendicular a la dirección del flujo y F es la fuerza tangencial a la superficie A .

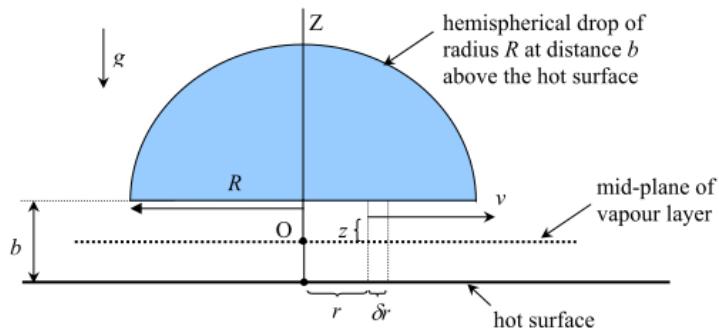


Figure 2

v es la velocidad del vapor en la dirección radial a una altura z por encima del plano medio. La presión P dentro del vapor debe ser mayor cerca del centro O. Esto resultará en el desbordamiento del vapor y de la fuerza que sostiene a la gota contra el empuje de la gravedad. El grosor de la capa delgada de vapor debajo de la gota, en equilibrio térmico y mecánico, es b .

Para un flujo newtoniano de vapor podemos aproximar que

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z}{\eta} \frac{dP}{dz} \quad (6)$$

- 3.1) Demuestre que $v(z) = \frac{z^2}{2\eta} \frac{dP}{dr} + C$ donde C es una constante arbitraria de integración. (0.5 puntos)

- 3.2) Referente a la Figura 2, encuentre el valor de C en términos de η , $\frac{dP}{dr}$, y b usando la condición de frontera $v = 0$ para $z = \pm \frac{b}{2}$. (0.5 puntos)

- 3.3)** Calcule el ritmo de flujo de volumen de vapor a través de la superficie cilíndrica definida por r .
(Sugerencia: El cilindro es de radio r y altura b debajo de la gota.) (1.0 puntos)
- 3.4)** Asumiendo que el ritmo de producción de vapor con densidad ρ_V se debe al flujo de calor desde la superficie caliente hasta la gota, encuentre la expresión para la presión $P(r)$. Use P_a para representar la presión atmosférica y use ΔT para la diferencia de temperaturas entre la superficie caliente y la gota. Asuma que el sistema ha alcanzado el estado estacionario. (2.0 puntos)
- 3.5)** Calcule el valor de b igualando el peso de la gota con la fuerza neta debido a la diferencia de presión las partes de arriba y de abajo de la gota. La densidad de la gota es ρ_0 . (2.0 puntos)
- 3.6)** ¿Cuál es el ritmo total de vaporización? (2.0 puntos)
- 3.7)** Asuma que la gota mantiene una forma semiesférica, ¿cuál es el tiempo de vida de la gota? (2.0 puntos)

**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 17, ENVIAR: LUNES 9 DE SEPTIEMBRE.**

Repaso de Relatividad

Postulados:

1. Las leyes de la física son iguales en cualquier sistema inercial.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para cualquier observador inercial, es una constante universal.

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

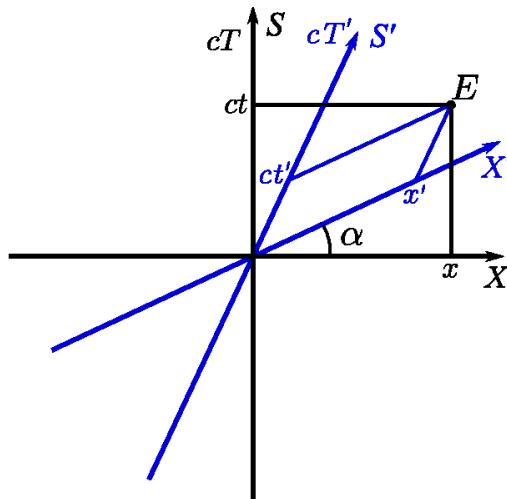
$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) & \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \\ x' &= \gamma(x - vt) & \beta &\equiv \frac{v}{c} \leq 1 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1)$$

Diagrama de Minkowski

En relatividad un evento queda descrito en general por cuatro coordenadas: tres coordenadas espaciales (x, y, z) y una coordenada temporal (ct):

$$\text{evento: } E(ct, x, y, z) \quad (2)$$

Un evento E se puede representar en un diagrama (*diagrama de Minkowski*) como el mostrado en la figura de abajo (por simplicidad se usa solo una dimensión espacial x y la coordenada temporal ct). En el diagrama se representan dos sistemas de referencia iniciales S y S' : el sistema S está fijo y tiene ejes X y cT ; mientras que el sistema S' se mueve a lo largo del eje X con velocidad uniforme v respecto del sistema fijo S .



El ángulo α está determinado por las transformaciones de Lorentz (1) que comparan las coordenadas de un evento cualquiera E en ambos sistemas, se puede demostrar que el ángulo α está dado por la siguiente expresión:

$$\tanh \alpha \equiv \frac{v}{c} = \beta \quad (3)$$

Donde se emplean la función hiperbólica definidas como: $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Sean dos eventos E_1, E_2 cuyas coordenadas en los sistemas S y S' están dadas por:

	sistema \mathbf{S}	sistema \mathbf{S}'
evento E_1	(x_1, t_1)	$(x'_1, t'_1) = \begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$
evento E_2	(x_2, t_2)	$(x'_2, t'_2) = \begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$

Usando las transformaciones de Lorentz (1), se encuentra la “distancia” espacial y temporal que separa los dos eventos E_1 y E_2 comparados en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= \gamma(x_1 - x_2) - \gamma v(t_1 - t_2) \\ t'_1 - t'_2 &= \gamma(t_1 - t_2) - \gamma \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

A partir de las expresiones anteriores se obtiene algunos de los resultados de la relatividad, que se resumen en los siguientes cuadros.

\Rightarrow Si los eventos son simultaneos en \mathbf{S} $t_1 - t_2 = 0$ \Rightarrow en general NO son simultaneos en \mathbf{S}' $t'_1 - t'_2 = \gamma \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$	(4)
--	-----

\Rightarrow Si ocurren en el mismo lugar en \mathbf{S} $x_1 - x_2 = 0$ \Rightarrow en general NO ocurren en el mismo lugar en \mathbf{S}' $x'_1 - x'_2 = -\gamma v(t_1 - t_2)$	(5)
---	-----

dilatación del tiempo

Sean dos eventos que ocurren en el mismo sitio en el sistema \mathbf{S} , $(x_1 - x_2 = 0)$ entonces:

$$\begin{array}{lll} \text{sistema } \mathbf{S} & \Delta t = t_2 - t_1 & \\ \text{sistema } \mathbf{S}' & \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \Delta t & \Delta t' > \Delta t \end{array} \quad (6)$$

El intervalo de tiempo para un observador en movimiento es más lento respecto del tiempo medido por un observador en reposo.

contracción de Lorentz

Sea $L_0 = x'_2 - x'_1$ una distancia medida en el sistema \mathbf{S}' , $(t_1 - t_2 = 0)$ entonces:

$$\begin{array}{lll} \text{sistema } \mathbf{S}' & L_0 \equiv x'_2 - x'_1 & \\ \text{sistema } \mathbf{S} & L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} L_0 & L_0 \leq L \end{array} \quad (7)$$

una barra moviéndose esta contraída respecto de un observador en reposo

Cinemática.

A partir de las transformaciones de Lorentz (13) para las coordenadas de un evento, se encuentran las transformaciones de la velocidad y de los ángulos dadas por las siguientes expresiones:

transformación de velocidades	$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} v_x\right)} \\ v'_z = \frac{v_{xz}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} v_x\right)} \end{cases} \quad (8)$
----------------------------------	---

transformación de angulos	$\begin{cases} \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta/\beta_0)} \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' - \beta/\beta'_0)} \end{cases} \quad (9)$
------------------------------	--

Dinámica

Definición de las principales cantidades dinámicas relativistas:

vector de momento lineal	$\mathbf{p} \equiv \gamma m \mathbf{v}$
energía relativista	$E \equiv \gamma mc^2$
cuadrivector de momento	$P_\mu \equiv (E/c, \mathbf{p})$

(10)

Donde m es masa de la partícula, algunos libros la denotan como m_0 y le denominan *masa en reposo* o *masa propia*; el vector velocidad esta dado por su expresión clásica: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$

También se definen las siguientes cantidades:

energía en reposo	$E_0 \equiv mc^2$
energía cinética	$E_k \equiv E - E_0 = mc^2 (\gamma - 1) \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \dots$

(11)

De las definiciones del momento lineal y la energía relativistas, ecuación (10), se puede obtener la relación entre la energía y el momento de una partícula:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4 c^4} + \dots\right) \quad (12)$$

Importante:

En un sistema cerrado, la energía total relativista y el momento se conservan.

Una cantidad invariante es aquella que tiene el mismo valor en cualquier sistema inercial.

Una cantidad conservada es aquella que tiene el mismo valor antes y después de algún proceso físico (por ejemplo una colisión).

- .) La energía es una cantidad que se conserva pero no es un invariante;
- .) La carga eléctrica es ambas, invariante y conservada;
- .) La velocidad no es una cantidad conservada ni invariante.

EJERCICIOS

- 1 Demuestra que las transformaciones de Lorentz (1) se pueden escribir como (solo las dos primeras transformaciones):

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \alpha - x \sinh \alpha \\ x' &= -ct \sinh \alpha + x \cosh \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Donde $\tanh \alpha = \beta = v/c$ y se definen las funciones hiperbolicas: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Quizá te pueden servir las propiedades de las funciones hiperbolicas que se revisarón en la tarea 1.

Las ecuaciones de transformación (1) son semejantes A una rotación, excepto que en este caso se emplean las funciones hiperbolicas. Las ecuaciones (13) son otra manera de representar a las transfromraciones de Lorentz.

- 2 Sean dos eventos: E_1 de coordenadas (ct_1, x_1, y_1, z_1) y E_2 de coordenadas (ct_2, x_2, y_2, z_2) . Demuestra que la siguiente cantidad:

$$I = -c(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (14)$$

es un invariante, es decir demuestra la siguiente igualdad:

$$-c(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -c(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \quad (15)$$

La cantidad definida en (14) representa el *intervalo* entre los dos eventos E_1 y E_2 . Dependiendo de los eventos el intervalo puede representar los siguientes casos:

- i) Si $I < 0$, se le denomina intervalo temporaloide (*timelike*)
- ii) Si $I > 0$, se le denomina intervalo espacialoide (*spacelike*)
- iii) Si $I = 0$, se le denomina intervalo luminoide (*lightlike*)

Si el evento E_1 es el origen, y nos limitamos a una dimensión espacial x , entonces el intervalo $I = -ct^2 + x^2 = -ct'^2 + x'^2$ representan una familia de hipérbolas, una para cada valor de I , representadas en el diagrama de Minkowski.

- 3 Deduce la última expresión de la energía cinética (11), que representa una aproximación cuando $\beta \ll 1$, y obtén el siguiente termino de esa suma aproximada. El primer término de la suma representa la energía cinética clásica.
- 4 A partir de las definiciones del momento y la energía, ecuación (10) obten la relación energía-momento: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. Deduce también la expresión aproximada cuando $\beta \ll 1$ (última igualdad de la ecuación (12)).

PROBLEMAS

- 1 En la ecuación de la transformación de la velocidad v_x (primer ecuación de (8)), demuestra que si $v_x < c$ y $v < c$ entonces $v'_x < c$.
- 2 Se tienen dos eventos: E_1 de coordenadas $(ct_1, x_1, 0, 0)$ y E_2 de coordenadas $(ct_2, x_2, 0, 0)$, suponiendo que el intervalo entre ambos eventos es de tipo espacialoide, encuentra la velocidad del sistema en el cual ambos eventos son simultáneos.

- 3 Sea S un sistema inercial fijo y S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto del sistema fijo. De acuerdo al principio de relatividad galileana (mecánica clásica), la adición de velocidades está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \quad (16)$$

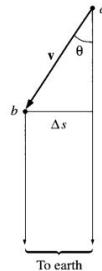
Considera la siguiente colisión simétrica en el sistema fijo S : una partícula A de masa m_A y velocidad \mathbf{v}_A colisiona con otra partícula B, masa m_B y velocidad \mathbf{v}_B . Durante la colisión la masa de las partículas A y B se transforma dando lugar a otro par de partículas C y D, de masas m_C, m_D con velocidades velocidades v_C, v_D respectivamente. Asumiendo que el momento lineal total durante la colisión se conserva en el sistema S :

- i) Demuestra que el momento lineal total se conserva también en el sistema S' que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto del sistema S .
 - ii) Suponiendo que la colisión es elástica en el sistema S ; muestra que también es elástica en el sistema S'
- 4 Cada dos años, aproximadamente, el diario estadounidense *The New York Times* publica un artículo en el cual algún astrónomo declara haber encontrado un objeto que viaja más rápido que la velocidad de la luz. Muchos de esos reportes resultan de no saber distinguir entre aquello que *ven* y aquello que es *observado*; esto surge de no tomar en cuenta el tiempo que le toma a la luz viajar de un punto a otro. Aquí un ejemplo, una estrella A viaja con velocidad v a un ángulo θ respecto de la linea que se le observa.

- i) ¿Cuál es la velocidad aparente de la estrella sobre el cielo?

Sugerencia: Supón que la señal de luz que viene desde el punto b llega a la tierra un tiempo Δt después que la señal procedente del punto a . Durante este tiempo la estrella ha recorrido sobre la esfera celeste la distancia Δs . La velocidad aparente de la estrella es precisamente $\Delta s/\Delta t$.

- ii) ¿Cuál es el valor del ángulo al cual la velocidad aparente es máxima?
- iii) Muestra que la velocidad aparente puede ser mayor a la velocidad de la luz c , aún si la velocidad de la estrella v es menor a c .



- 5 Una nave espacial es lanzada desde la tierra a una velocidad de $\frac{3}{5}c$. Cuando ha pasado una hora, medido por un reloj dentro de la nave, la nave manda una señal luminosa a la tierra. Considerando los efectos relativistas contesta las siguientes preguntas:

- i) De acuerdo a un reloj situado en la tierra, ¿cuánto tiempo después que partió la nave fue mandada la señal?
- ii) De acuerdo a un reloj situado en la tierra, ¿cuánto tiempo después que la nave envío la señal, está será detectada en la tierra?
- iii) De acuerdo a un observador en la nave, ¿cuánto tiempo después que la nave envío la señal, está será detectada en la tierra?

**ENTRENAMIENTO SELECTIVO 2013, OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA.
TAREA # 18, ENVIAR: LUNES 16 DE SEPTIEMBRE.**

Problema 1

- 1.1** El huracán Gilberto visto desde una sonda en el espacio tiene la forma de una enorme espiral de nubes. En el centro de la espiral, *ojo del huracán*, se puede distinguir la ausencia de nubes.

Contesta las siguientes preguntas:

- 1.1a)** ¿Cuál es la dirección de rotación del huracán sobre la superficie terrestre y por qué?
- 1.1b)** Si la presión atmosférica del ojo del huracán es solamente un 86 % menor a la presión atmosférica a nivel del mar. Usa esta diferencia de presión para estimar la velocidad del viento cerca del ojo del huracán. Considera que el aire del huracán como incompresible e ignora cualquier enfriamiento o calentamiento del aire.

- 1.2** Una caja rectangular está dividida por una pared aislante en dos partes con igual volumen y es puesta sobre una superficie sin rozamiento. La longitud de la caja es $L = 20$ cm y tiene masa despreciable. Una mitad de la caja contiene oxígeno O y la otra nitrógeno N.

Inicialmente el nitrógeno tiene el doble de la presión que el oxígeno, encuentra el desplazamiento de la caja después de que la pared divisoria es removida y los gases se mezclan suponiendo que el proceso es isotérmico (considera que son gases ideales).

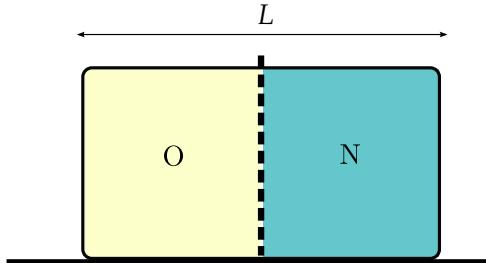


figura 1

- 1.3** Un globo se encuentra inicialmente desinflado y su forma es casi plana, por la ausencia de aire dentro del balón, ésta conectado a la válvula de una bomba de aire que almacena 12 m^3 de helio gaseoso a una presión de 2 MPa (megapascales) y a una temperatura ambiente de 20° C . La válvula se abre y el balón comienza a inflarse a presión constante $P_0 = 100 \text{ kPa}$ hasta que el balón adquiere una forma esférica de diámetro $D = 1 \text{ m}$, que corresponde a su tamaño "normal". Cuando el balón tiene un diámetro mayor que 1 m el material con que está hecho es estirado dando como resultado una presión dentro del balón:

$$P = P_0 + C \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) \frac{D_1}{D}, \quad C \text{ constante} \quad (1)$$

El balón es inflado hasta un diámetro final de $D_f = 4 \text{ m}$ cuando la presión dentro de él es de 400 kPa. La temperatura permanece constante a 20° C durante el inflado del balón.

1.3a) ¿Cuál es la máxima presión dentro del balón durante el inflado del balón?

1.3b) ¿Cuál es la presión dentro de la bomba de helio cuando la presión dentro del balón es máxima?

1.4 Ciclo de Carnot

Una de los temas principales de la termodinámica comprende el estudio de los procesos termodinámicos. Un proceso termodinámico consiste en el cambio entre dos estados (de equilibrio) del sistema; por ejemplo, consideremos un gas ideal sobre el cual se aplica una fuerza para comprimirlo y cambiar su volumen, supongamos además que durante la compresión se “sumerge” al gas en un baño térmico¹ de tal manera que durante el proceso se mantiene al gas a temperatura constante. Este proceso corresponde a una *compresión isotérmica*, en la figura 2 el proceso 3 → 4 representa una compresión isotérmica en el espacio $P - V$.

Por otra parte, un ciclo termodinámico es una sucesión de procesos en el que al final el sistema regresa a su estado inicial. La figura 2 representa el ciclo de Carnot realizado sobre un gas ideal.

El ciclo de Carnot, como se muestra en la figura, consta de los cuatro procesos indicados. Esté ciclo es de gran importancia en la física ya que tiene una propiedad de gran relevancia y que vamos a explorar en este ejercicio.

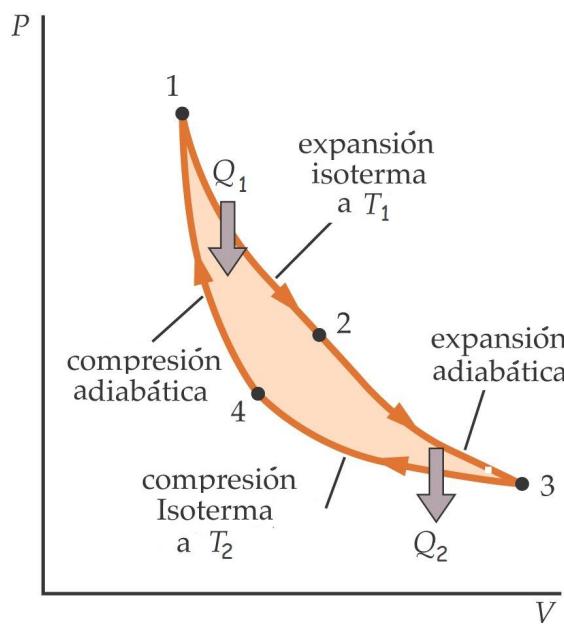


figura 2

Una de las propiedades que caracteriza a los ciclos en general es su eficiencia, definida como:

$$\eta = \frac{\text{trabajo que realiza el sistema}}{\text{calor que entra al sistema}} = \frac{W_T}{Q_1} \quad (2)$$

En el caso del ciclo de Carnot sobre el gas ideal, mostrado en la figura 3, el calor que entra al sistema es únicamente Q_1 ya que en procesos adiabáticos no hay intercambio de calor y durante la compresión

¹Un baño térmico es un medio externo muy grande en comparación con el sistema al que contiene, de tal manera que siempre se mantiene la temperatura constante tanto en el baño como en el sistema, independientemente de los procesos que se hagan sobre el sistema.

isotérmica sale calor del sistema. En general el trabajo durante cualquier ciclo esta dado por el área que encierra el ciclo.

Para calcular la eficiencia del ciclo de Carnot es necesario saber sobre que sistema se realiza el ciclo. Una vez dado el sistema, es necesario establecer las ecuaciones de estado y de la energía del sistema, así como las expresiones de las curvas isotérmicas y adiabatas.

Parte I, gas ideal

Las ecuaciones de estado y de la energía del gas ideal son:

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ U &= U_0 + C_V T \end{aligned} \tag{3}$$

De la ecuación de estado se obtiene directamente las ecuaciones de las curvas isotérmicas, mientras que para las curvas adiabatas es más laborioso (ver tarea 8). Entonces para el gas ideal las curvas isotérmicas y adiabatas para un gas ideal están dada por la expresiones:

$$\begin{aligned} P &= \frac{nRT}{V} && \text{isoterma } (T \text{ constante}) \\ P &= \frac{k_i}{V^\gamma} && \text{adiabáta } (k_i \text{ constante}) \end{aligned} \tag{4}$$

Donde $\gamma \equiv C_p/C_V$, para un gas monoatómico $\gamma = 5/3$ y para un gas diatómico $\gamma = 7/5$. Cada curva isoterma esta parametrizada por la temperatura, es decir, para cada isoterma corresponde una temperatura T diferente, en la figura 2 $T_1 > T_2$; por otra lado, cada curva adiabata esta parametrizada por una constante k_i diferente.

1.3a) Calcula el trabajo total realizado durante el ciclo de Carnot:

$$W_T = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \tag{5}$$

Toma en cuenta los signos del trabajo, $W < 0$ si el sistema realiza trabajo, $W > 0$ si se realiza trabajo sobre el sistema.

1.3b) Durante los procesos isotérmicos para el gas ideal el cambio de energía es cero (para un gas ideal la energía solo depende del cambio de temperatura); mientras que en los procesos es claro que no hay transferencia de calor, por lo tanto:

$$W_{1 \rightarrow 2} = Q_1, \quad W_{3 \rightarrow 4} = Q_2, \tag{6}$$

Calcula entonces la eficiencia del ciclo de Carnot para el gas ideal y demuestra que se puede escribir como:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{7}$$

Parte II, Sólido magnético ideal.

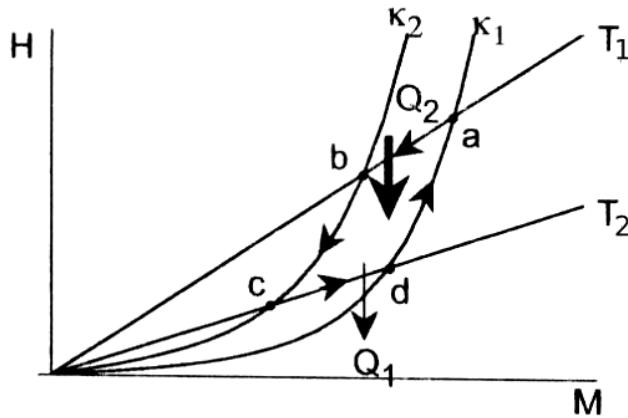


figura 3

Para un sólido magnético ideal o paramagneto las variables termodinámicas que determinan su estado son: la magnetización M , el campo magnético externo aplicado H y la temperatura T . La ecuación de estado y de la energía de este sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} M &= \frac{CH}{T}, && \text{ec. de estado (ley de Curie)} \\ U &= C_M T, && \text{ec. de la energía} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde C es la constante de Curie que depende del material que compone al sólido y C_M es otra constante que corresponde a la capacidad calorífica del sólido cuando se mantiene la magnetización constante (es algo similar que C_V para un gas). Notar que la energía solo depende de la temperatura igual que el gas ideal.

El ciclo de Carnot para el sólido paramagnético se representa en la figura 3 (hay un error en los subíndices del calor en la figura, solo cambia $Q_2 \rightarrow Q_1$ y para el otro también $Q_1 \rightarrow Q_2$). Las curvas isotérmicas (T_1, T_2) son rectas que cruzan el origen (¿qué temperatura es mayor T_1 o T_2 ?) y las adiabáticas (κ_1, κ_2) son curvas exponenciales. Las expresiones de las isoterma y adiabatas son (ver tarea 8):

$$\begin{aligned} M &= \frac{CH}{T} && \text{isoterma } (T \text{ constante}) \\ H &= \kappa_i M \exp \left[\frac{M^2}{2CC_M} \right] && \text{adiabática } (\kappa_i \text{ constante}) \end{aligned} \quad (9)$$

Si el trabajo sobre un sólido esta dado por la siguiente expresión:

$$W_{magnetico} = - \int H(M) dM \quad (10)$$

1.3c) Calcula el trabajo total realizado durante el ciclo de Carnot para el sólido paramagneto:

$$W_T = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \quad (11)$$

1.3d) Calcula la eficiencia del ciclo de Carnot para el sólido paramagnético y demuestra que se puede escribir como:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (12)$$

Si estas encarrerado calcula la eficiencia del ciclo de Carnot para el gas de fotones y si tienes más ánimos aún, continua con el gas de Van der Waals (ver tarea 8). Pero puedes adivinar cual será la eficiencia.... en efecto, la eficiencia del ciclo de Carnot de cualquier sistema es la misma:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (13)$$

donde $T_2 < T_1$, esta es una propiedad universal que representa una propiedad previa a la formulación de la segunda ley de la termodinámica. Uno de los resultados inmediatos es que la eficiencia nunca es uno (“perfecta”) $\eta \neq 1$, a menos que $T_2 = 0$, lo cual es imposible de acuerdo a la 3a ley de la termodinámica.

Problema 2, Algo de gravitación y Kepler.

2.1 Los satélites pueden ponerse a diferentes alturas sobre la superficie de la tierra, dependiendo de los propósitos del satélite. Por ejemplo una órbita con una altura de 300 km sobre la superficie terrestre se le conoce como LEO por sus siglas en inglés: *Low Earth Orbital* (órbita cercana terrestre).

2.1a) Calcula el periodo del satélite en una órbita LEO.

2.1b) Un satélite *geosíncrono* órbita la tierra en su plano ecuatorial con un periodo de 24 hrs. De tal manera que se ve como un punto fijo sobre la tierra. ¿Cuál es el radio del satélite?

Datos de la tierra: $R_t = 6.3 \times 10^6$ m, $M_t = 5.97 \times 10^{24}$ kg,

2.2 Para colocar un satélite en una órbita geosíncrona se hace en dos etapas: primero se lanza cerca de una órbita LEO usando apropiadamente el combustible del cohete de la fase de propulsión (.). Entonces se enciende la fase de propulsión y el satélite es transferido a una órbita elíptica diseñada para que tome la órbita geosíncrona cuya altitud coincide con el apogeo de la elipse (ver figura). En el apogeo, la fase de propulsión es encendida otra vez para salir de la órbita elíptica y ponerse en la órbita geosíncrona. Este mecanismo requiere dos impulsos a través de un cambio de la velocidad Δv_1 y Δv_2

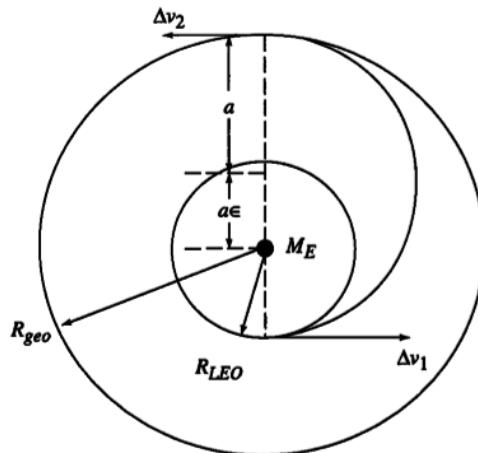
2.2a) Δv_1 para mover el satélite desde su órbita circular LEO R_{LEO} , hasta ponerlo en la órbita elíptica. Calcula el valor de Δv_1

Respuesta: $\Delta v_1 = 8,600$ km/hr

2.2b) Δv_2 para transformar la órbita elíptica, en que se encuentra el satélite, en la órbita circular geosíncrona. Calcula el valor de Δv_2

Respuesta: $\Delta v_2 = 5,269$ km/hr

Datos: $R_{LEO} = 6,693$ km, $R_{geo} = 42,400$ km



Problema 3

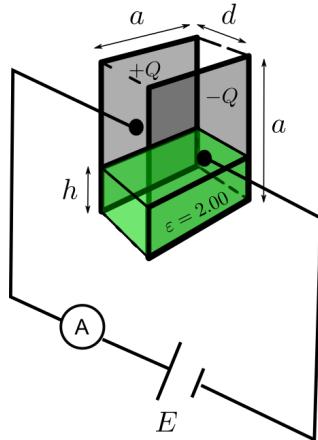
Se tiene un capacitor de placas paralelas (planas) de forma cuadrada de lado $a = 210 \text{ mm}$ y una separación $d = 2.00 \text{ mm}$. El interior del capacitor inicialmente se encuentra vacío (constante dieléctrica del vacío: $k_0 = 1$), pero después se va llenando con queroseno a una razón de 33.6 mL/s . El queroseno es un líquido transparente y amarillento que se emplea como combustible y cuya constante dieléctrica tiene el valor $k_q = 2$

Las placas del capacitor son conectadas a una batería con fuerza electromotriz $\mathcal{E} = 750 \text{ V}$.

3a) ¿Cuál es la corriente registrada en el circuito mientras se va llenando con queroseno?

La energía necesaria para llenar de líquido el capacitor lo provee la batería, de tal manera que mientras se mantenga conectada el queroseno continuara subiendo su nivel dentro del capacitor hasta eventualmente llenarlo. Sin embargo también es posible desear que el capacitor se llene con queroseno solamente hasta la mitad de su altura y mantenerlo así.

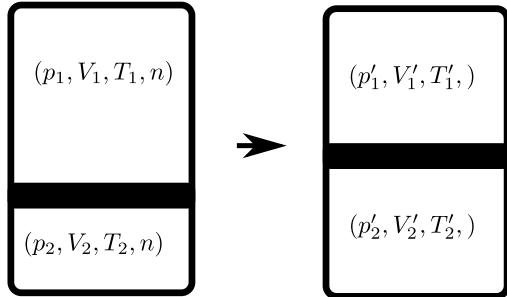
3b) ¿Cuál debe ser el valor de la fem \mathcal{E} de la batería necesaria para que el nivel del líquido dentro del capacitor sea $h = a/2$?



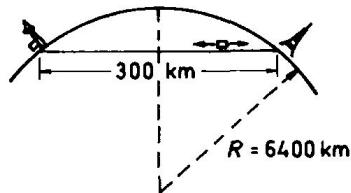
Parte II.

Exámenes selectivos

- Un cilindro cerrado por ambas bases esta dividido en dos compartimentos mediante un émbolo diátermico que tiene masa el cual puede subir y bajar por el cilindro sin rozamiento. El compartimiento superior está ocupado por n moles de un gas ideal a la temperatura T_1 y el inferior por n moles del mismo gas y a la misma temperatura. Se varía la temperatura de ambos hasta T_2 . Calcular la relación de los volúmenes que ocupan ambos gases a la temperatura T_2 . Se supone que el volumen del cilindro no varía al cambiar la temperatura.



- Paris y Londres están conectados por un tunel subterráneo, un tren viaja a través del túnel impulsado únicamente con la fuerza gravitacional ejercida por la tierra.



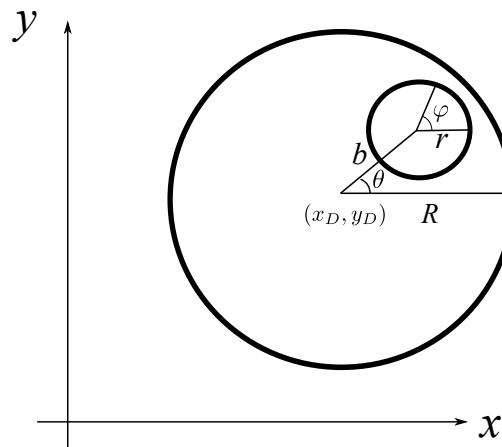
- Calcula la máxima velocidad del tren.
- Calcula el tiempo que le toma al tren viajar desde Londres a Paris si la distancia entre las dos ciudades es de 300 km.

(radio terrestre) $R_T = 6.3 \times 10^6$ m

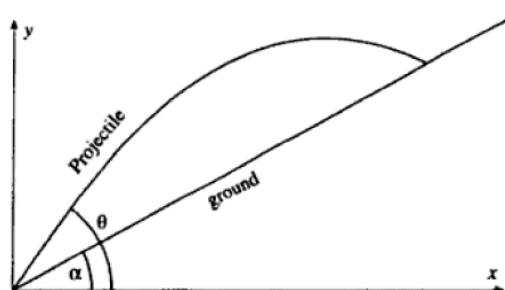
3. Considera el sistema compuesto por dos discos planos, que dignaremos D y d, cuyos radios son R y r respectivamente ($R > r$). El disco d se encuentra fijo sobre el disco D a la distancia b de su centro, como se muestra en la figura. El disco mayor D puede girar y moverse libremente sin fricción sobre una plataforma, mientras que el disco menor d, esta en un punto fijo sobre el disco D pero libre de girar sin fricción sobre el disco D. Si M es la masa del disco mayor D y m la masa del disco menor d. Si no hay fuerzas externas que actúan sobre el sistema y designando las coordenadas del centro del disco mayor D como (x_D, y_D) respecto de un sistema de coordenadas fijo $x - y$.

- Determina las coordenadas del centro del disco menor d (x_d, y_d) , respecto del mismo sistema de coordenadas fijo $x - y$
- Calcula las componentes del momento lineal total del sistema de los dos discos, p_x , p_y y demuestra explícitamente que se conservan ambas componentes.
- Calcula el momento angular total del sistema de los dos discos, respecto del centro del disco mayor D
- Calcula la energía total del sistema de los dos discos.
- Demuestra que los discos se mueven con velocidad angular constante, es decir $d^2\theta/dt^2 = 0$ y $d^2\varphi/dt^2 = 0$

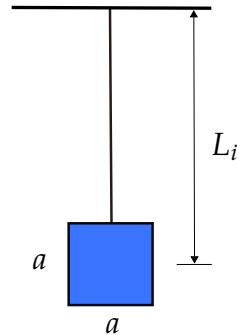
Hint: Puedes usar la conservación de las componentes de momento lineal, de la energía y del momento angular total.



4. Un proyectil es lanzado sobre un plano inclinado de angulo α . Si el proyectil es lanzado con un ángulo θ respecto de la horizontal, Encuentra el valor de θ_{max} para el cual se alcance la maxima distancia sobre el plano inclinado.



5. Un contenedor cubico de arista a esta lleno de agua inicialmente. El cubo esta sujeto de una cuerda inelástica y oscila como un péndulo. En determinado momento $t_i = 0$ el agua comienza a salir por un pequeño orificio situado en el fondo del contenedor. Considera que L_i es la distancia desde el centro del cubo hasta el punto superior donde se sujeta la cuerda, considerando que el contenedor y la cuerda tienen masa despreciable.



Parte I

Suponiendo que el agua dentro del cubo sale por el orificio a una razón constante, es decir:

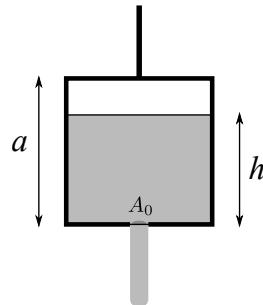
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = M_t = \text{constante} \quad (1)$$

Donde Δm es el cambio de masa del agua dentro del cubo de tal manera que $M_t < 0$ ya que el cubo se esta vaciando.

- a) Encuentra el periodo del péndulo como función del tiempo $T(t)$.
- b) Dibuja una gráfica de $T(t)$ desde el tiempo inicial $t_i = 0$, hasta un pequeño momento antes de que el contenedor se ha vaciado completamente.

Parte II

Ahora considera que el orificio del fondo del cubo tiene área A_0 , si al tiempo t el nivel del agua dentro del cubo es h y la velocidad del el agua al salir por el orificio inferior es $v_0 = \sqrt{2gh}$, despreciando los efectos de fricción del agua al salir por el orificio del cubo.



- a) Encuentra la velocidad con que se vacía el cubo, es decir encuentra $h(t)$.
- b) Encuentra en este caso la dependencia temporal del periodo del péndulo $T(t)$.

1. Sistema doble, estrella Sirio.

El cuerpo estelar Sirio identificado inicialmente como una sola estrella en realidad se trata de un sistema doble de estrellas que fue observado poco después. Este problema trata de estimar la masa de Sirio y su acompañante a través del siguiente modelo simplificado.

Llamemos Sirio A y Sirio B a cada una de las estrellas del sistema, supongamos que ambas estrellas giran alrededor del centro de masas (CM) en órbitas circulares de radio r_A y r_B para Sirio A y Sirio B respectivamente. Consideremos además que ambas estrellas giran con el mismo periodo de 48 años alrededor del CM y ambas estrellas giran en fase sobre la misma linea que pasa por el CM, como se muestra en la figura.

Supongamos que en el CM hay una “masa” M (esta masa no es real, solo sirve para resolver el problema) que interactúa gravitacionalmente únicamente con Sirio A de tal manera que la fuerza gravitacional de M sobre Sirio A es equivalente a la fuerza gravitacional que hay entre Sirio A y Sirio B.

- a) Encuentra el valor de la “masa” M en términos de los radios orbitales de las estrellas r_A , r_B y la masa m_B .
- b) Elige un sistema de referencia adecuado y determina una relación entre las masas y los radios de ambas estrellas.
- c) Suponiendo que ambas estrellas, Sirio A y B, tienen la misma masa $m_A = m_B = m$, encuentra el valor de m .

Datos $r_A = 8.6 R_T$, donde $R_T = 6.3 \times 10^6$ m es el radio de la tierra, constante gravitacional $G = 6.7 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²

Comentario: Una modelo más elaborado considerando que la masa de ambas estrellas son diferentes y que giran en órbitas elípticas da como resultado $m_A \approx 2M_s$ y $m_B \approx 0.99 M_s$, donde $M_s \approx 2 \times 10^{30}$ kg es la masa del sol

2. El sistema de la figura es un ligero flotador de vidrio formado por un tubo cilíndrico, cerrado en su extremo superior, y unido a una ampolla esférica. Ésta tiene, en su parte inferior, un orificio por el que puede entrar y salir el agua. A este dispositivo está unida una pequeña bola de plomo de manera que, en las condiciones de presión atmosférica P_0 y temperatura $T_0 = 17^\circ\text{C}$, flota con la ampolla llena de agua exactamente hasta la mitad y sobresaliendo la mitad del tubo de la superficie del agua.

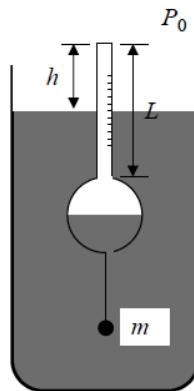
Datos:

diámetro de la ampolla: $D = 6 \text{ cm}$,

diámetro y longitud del tubo: $d = 1 \text{ cm}$, $L = 10 \text{ cm}$

Densidad del plomo y del agua: $\rho_p = 11.3 \text{ g/cm}^3$, $\rho_a = 1.0 \text{ g/cm}^3$

Llama V_0 al volumen dentro del flotador, p_c la presión del aire dentro del flotador y T_0 a su temperatura. Considera al aire como un gas ideal.



- a) Calcula la masa m de plomo necesaria para que el termómetro flote en las condiciones descritas. Por simplicidad, considere despreciables la masa y el grosor de las paredes del vidrio así como la masa del aire contenido en la cámara y la del hilo que sujetá el plomo.

- b) Calcula la presión p_c del aire contenido en el flotador.

Un aumento de la temperatura producirá un aumento del volumen de la cámara de aire y el conjunto emergerá un poco (P_0 se mantiene constante). Observando la altura h de la parte de tubo que sobresale del agua y grabando una escala en su pared habremos construido un termómetro.

- c) Calcula la separación de las marcas de la escala termométrica para que esté graduada en grados Celsius

3. Una esfera hueca de radio $R = 0.5$ m, gira en torno de uno de sus diámetros con una velocidad angular de $\omega = 5$ rad/s. Dentro de la esfera a una distancia $R/2$ por debajo del centro de la esfera está situado un pequeño bloque de masa m que gira pegado a la esfera.

- a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de rozamiento μ para que esto suceda?
- b) Si la velocidad angular es $\omega = 8$ rad/s, cual debe ser el valor de μ ?

4. En un proyecto de investigación espacial existen dos propuestas para el lanzamiento de una sonda fuera del sistema solar.

(I) La primera es lanzar la sonda con una velocidad suficiente para que escape del sistema solar directamente.

(II) La segunda es que la sonda se aproxime a un planeta más externo y con su ayuda cambie su dirección de movimiento y alcance la velocidad suficiente para que escape del sistema solar.

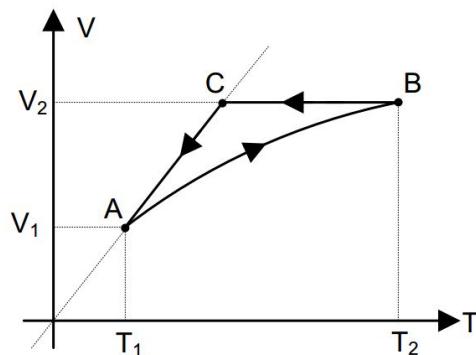
Se supone que la sonda se desplaza bajo el campo gravitacional de solamente el Sol o el planeta dependiendo de cuál sea el campo más intenso en aquel punto.

- a) Determinar la velocidad mínima y su dirección relativa al movimiento de la Tierra que debe proporcionarse a la sonda para lanzarla según el esquema (I)
- b) Suponer que la sonda se ha lanzado en la dirección determinada en el inciso anterior pero con otra velocidad. Determinar la velocidad de la sonda cuando cruce la órbita de Marte, esto es, sus componentes paralela y perpendicular respecto de esa órbita. El planeta Marte no se encuentra cerca del punto de cruce en el momento que éste se verifica.

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol es 30 km/s y la razón de las distancias de la Tierra y de Marte respecto del Sol es 2/3.

5. Un proceso termodinámico es llamado isoclino cuando la razón V^2/T se mantiene constante. Considera el ciclo ABCA de un gas ideal monoatomico con n moles representado en las variables $T - V$. Si el proceso AB es isoclino, calcula:

- a) El trabajo hecho por el gas durante el ciclo.
- b) La eficiencia del ciclo, en términos de T_1, T_2 y V_1, V_2 .



1. (5 pts) Una fuente puntual de luz que esta inmersa en un medio de indice n emite luz de forma isotropica, demostrar que la fraccion de luz transmitida sobre una superficie plana esta dado por:

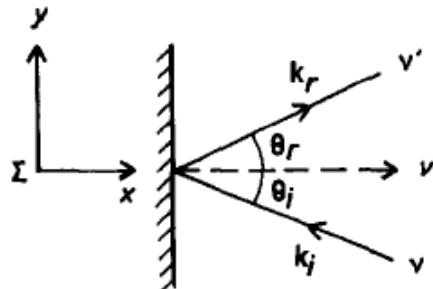
$$f = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} \right] \quad (1)$$

2. (10 pts)

I.- Una onda monocromatica transversal de frecuencia ν se propaga en una dirección que hace un ángulo de 60° con el eje x en el sistema de referencia O que contiene a la fuente. La fuente se mueve en la dirección x con velocidad $v = 4c/5$ hacia un observador en reposo O' , donde su eje x' coincide con el de la fuente x . Si el observador mide la frecuencia de la onda:

- a) Determina la frecuencia ν' medida por el observador en reposo, en términos de la frecuencia propia ν .
- b) ¿Cuál es el ángulo de observación en el sistema O' ?

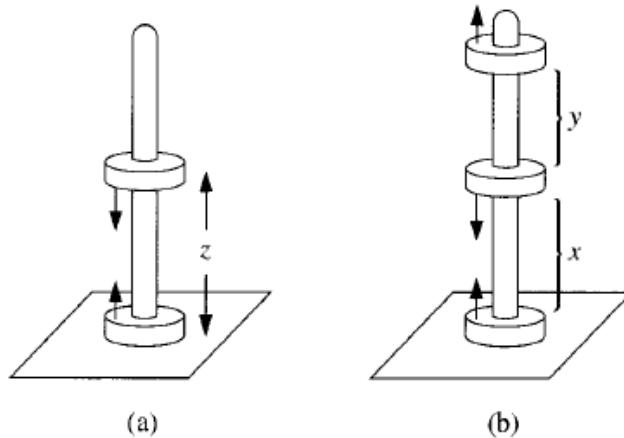
II.-Un observador inercial en un sistema O registra la incidencia de fotones de frecuencia ν sobre un espejo con un ángulo de incidencia θ_i respecto de la normal al espejo y frecuencia ν' . Los fotones son reflejados con un ángulo de reflexión θ_r , como se muestra en la figura.



Encuentra θ_r y ν' en términos de θ_i y ν si el espejo se mueve en la dirección x con velocidad v respectiva al sistema O .

3. (10 pts) Un dispositivo consta de tres magnetos permanentes idénticos en forma de dona, que se deslizan libremente (sin fricción) sobre una barra vertical, como se muestra en la figura. Considera a los magnetos como dipolos de masa M y momento dipolar \mathbf{m} .

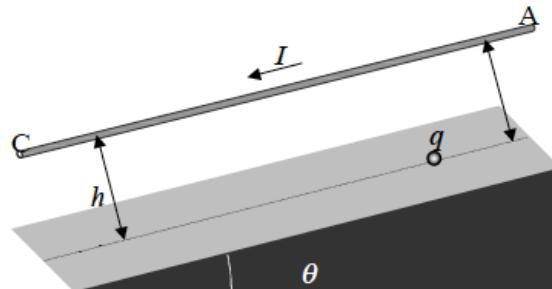
- a) Si colocas dos de los magnetos en la barra, ¿a qué distancia z flota el que magneto colocado en la parte superior?
- b) Si ahora se coloca un tercer magneto, haz una estimación de la razón entre las distancias de separación x/y .



El campo magnético de un dipolo es de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m} \right] \quad (2)$$

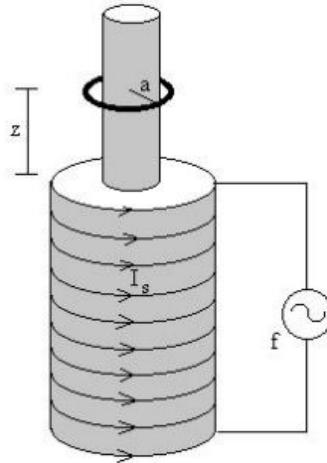
4. (10 pts) Un cuerpo de masa m se desliza por un plano inclinado sobre el que hay un conductor cilíndrico AC a una distancia h de la pendiente, tal como indica la figura. El cuerpo que se desliza esta cargada positivamente con una carga q . El plano inclinado se considera de material aislante.



Suponiendo que el cuerpo parte del reposo desde la parte superior del plano inclinado.

- a) Determina la distancia d recorrida por el cuerpo en el momento en que se despega de la superficie del plano inclinado, cuando no hay rozamiento entre el plano inclinado y el cuerpo que se desliza.
 - b) Ahora considera que hay rozamiento entre el plano inclinado y el cuerpo cargado, sea μ su coeficiente de fricción. Determina en este caso la velocidad del cuerpo cargado en el momento en que se despega.
 - c) Sopón ahora que, también con rozamiento, se repite la experiencia partiendo del reposo, pero con la corriente circulando en sentido contrario, de C hacia A. Encuentra la velocidad terminal del cuerpo cargado.
5. (15 pts) Anillo de Thomson. Uno de los experimentos mas usuales para demostrar la inducción de una corriente eléctrica es el Anillo de Thomson. El montaje experimental consiste en un solenoide

provisto de un núcleo de hierro como se muestra en la figura, este es conectado a una fuente de corriente alterna sinusoidal de frecuencia f . Al introducir un anillo de radio a en el núcleo de hierro que sobresale, se observa que este flota en el aire a una altura z .



La corriente alterna que circula por el solenoide produce un campo magnético que varía con el tiempo. El flujo de dicho campo a través del anillo es:

$$\Phi = MI_s \quad (3)$$

Donde M es el coeficiente inducción mutua del sistema formado por el solenoide y el anillo, consideraremos que su valor permanece constante en el estado estacionario, I_s es la intensidad de corriente en el solenoide.

5.1.- Suponga que el anillo presenta una resistencia R , obtenga una expresión para la intensidad de corriente inducida en el anillo, I_a .

Debido a la simetría que tiene el sistema el campo magnético que ejerce el solenoide sobre el anillo en la posición z tiene dos componentes, una a lo largo del eje z , B_z y otra en la dirección del eje radial B_r . Tenga en cuenta que debido a la simetría todos los puntos sobre el anillo poseen igual magnitud de las componentes del campo.

5.2.- Obtenga una expresión para la fuerza que siente el anillo, puede dejar expresada esta función en términos de B_z o B_r de ser necesario.

5.3.- Obtenga el valor promedio de la fuerza en un ciclo o periodo T . Para ello tenga en cuenta que B_r es proporcional a la corriente que circula en el solenoide. ¿Es este valor razonable?

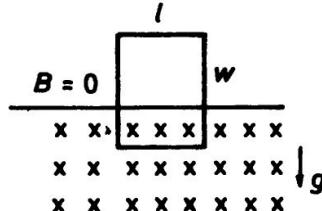
Un modelo mejor al anterior, consiste en considerar que el anillo es un circuito RL en serie, el cual posee una fuente de fem alterna dada por la inducción producida por el campo magnético del solenoide y sus variaciones.

5.4.- Teniendo en cuenta que el anillo posee una inductancia L . Obtenga una nueva expresión para la corriente en el anillo.

5.5.- Obtenga el valor de la fuerza promedio en este nuevo modelo. ¿Es este valor razonable?.

1. **(5 pts)** Dos cables muy largos y paralelos se encuentran separados una distancia $2a$ cada cable contienen una densidad uniforme de carga $+\lambda$ y $-\lambda$.
 - a) Especifica un sistema de coordenadas conveniente y encuentra el potencial V debido a ambos cables.
 - b) Muestra que las superficies equipotenciales son cilindros, determina el radio R y la posición del eje de estos cilindros en términos de los parámetros (λ, a) y valor de específico del potencial.
 - c) Determina el campo eléctrico \mathbf{E} generado por el par de cables, cargados.
 - d) Haz una gráfica representando las superficies equipotenciales, indica cuales corresponden a un valor de potencial negativo y cuales a un valor positivo. En la misma gráfica dibuja las líneas del campo eléctrico e indica que tipo de curvas representan líneas.
2. **(5 pts)** Un sistema óptico consiste en dos lentes separadas una distancia d y una pantalla. Si se coloca un objeto situado a la distancia D desde la pantalla
 - a) Demuestra que la razón entre los tamaños de las imágenes reales del objeto formadas sobre la pantalla esta dada por:
$$\frac{(D - d)^2}{(D + d)^2} \quad (4)$$
 - b) El tamaño del objeto es $\sqrt{I_1 I_2}$, donde I_1 e I_2 son el tamaño de las imágenes.
 - c) $f = \frac{D^2 - d^2}{4D}$
 - d) $D > 4f$
3. Un átomo en su estado base tiene masa m . Inicialmente se encuentra en reposo en un estado excitado con energía de excitación ΔE . El átomo hace una transición al estado base emitiendo un fotón.
 - a) **(4 pts)** Halla la frecuencia del fotón tomando en cuenta el retroceso relativista del átomo. Expresa tu resultado en términos de la masa M del átomo excitado.
 - b) **(1 pts)** Discute este resultado para el caso de una red cristalina, en especial la cantidad de energía absorbida. (Efecto Mössbauer).

4. (10 pts) Una espira rectangular de dimensiones l y w se deja caer al tiempo $t = 0$ desde el reposo por encima de una región donde hay un campo magnético uniforme B_0 , como se muestra en la figura. La espira tiene una resistencia R , autoinductancia L y masa m .



- a) Considera que la autoinductancia puede ser ignorada pero no la resistencia, encuentra la corriente y la velocidad de la espira como función del tiempo.
 - b) Ahora considera que la resistencia puede ser ignorada pero no la autoinductancia, encuentra en este caso la corriente y la velocidad de la espira como función del tiempo.
5. (10 pts) Una onda de luz monocromática de longitud de onda λ y frecuencia f incide normalmente sobre dos rendijas estrechas iguales, separadas por una distancia d , tal como indica la figura. La onda de luz emergiendo de cada rendija a una distancia x y para un tiempo t viene dada por

$$y = a \cos 2\pi \left(f t - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5)$$

Siendo a la amplitud que es la misma para las dos ondas, (se supone que $x \gg d$)

- a) Mostrar que las dos ondas observadas para un ángulo θ con la normal a las rendijas, tiene una amplitud resultante A , la cual se puede calcular sumando dos vectores cada uno de ellos con un módulo a y con una dirección asociada, determinada por la fase de la onda de luz. Verifica geométricamente a partir del diagrama vectorial, que:

$$A = 2a \cos \beta, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (6)$$

- b) La doble rendija se sustituye por un red de difracción con N rendijas igualmente espaciadas, con una distancia d entre dos rendijas consecutivas. Utilice el método vectorial de sumar amplitudes, para mostrar que los vectores amplitud, cada uno de módulo a , forman parte de un polígono regular con vértice en un círculo de radio R de valor:

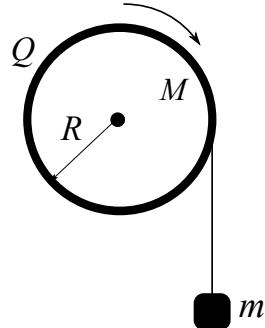
$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (7)$$

- c) Deducir que la amplitud resultante es: $\frac{a \sin(N\beta)}{\sin \beta}$ y obtener la diferencia de fase relativa.
- d) Determinar las intensidades resultantes de los máximos principales.

Recuerda que:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (8)$$

6. (15 pts) Un cilindro hueco de longitud l y radio R ($l \gg R$) es libre de girar sobre su eje axial que esta fijo, la masa del cilindro es M y alrededor del cilindro se enrolla una cuerda que sujet a un bloqu de masa m (la cuerda es inextensible y su masa despreciable).



A un tiempo determinado se suelta el peso m y comienza a caer, con lo cual el cilindro rota.

Parte I, cilindro sin carga.

- a) Determina la velocidad angular $\omega(t)$ del cilindro cuando el bloqu ha descendido una distancia h .

Parte II, cilindro cargado.

Ahora se coloca en todo el cilindro una carga Q uniformemente distribuida y se repite el experimento dejando caer el peso m .

- a) Calcula el campo magnético generado en el interior de la bobina.
 b) Determina el campo eléctrico \mathbf{E} generado por la rotación de la bobina (ley de Faraday) dentro de l cilindro.

Ayuda: Las lineas del campo eléctrico generado son circunferencias concéntricas al eje del cilindro.

Parte III, energía, momento angular.

- a) Calcula la energía magnética almacenada dentro del cilindro.
 b) Determina finalmente la expresión de la frecuencia angular del cilindro y compara con la obtenida en la parte I del problema.

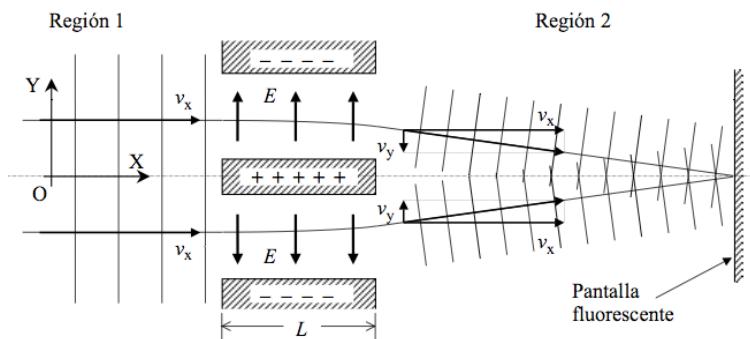
Parte III.

Exámenes preparación seleccionados

Problema 1 Interferencia de electrones

V Olimpiada Iberoamericana de Física 2000 España

En la figura se esquematiza un aparato construido por Möllenstedt y Düker en los años cincuenta para poner de manifiesto que los electrones, además de ser partículas, se comportan también como ondas. El aparato consta básicamente de tres placas planas cargadas de longitud L que crean campos eléctricos uniformes de módulo E en los espacios intermedios, tal como se indica en la figura. Por la izquierda de las placas (región 1) incide un haz colimado de electrones con velocidad v_x paralela a las placas.



1) Calcule la componente transversal v_y de la velocidad de los electrones a la salida de las placas (región 2). Datos: $L = 5.0 \text{ mm}$; $E = 570 \text{ V/m}$; $v_x = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}$; $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$. No es necesario el cálculo relativista.

2) El haz de electrones en la región 1 puede ser considerado como una onda plana. Llamando A a su amplitud y k_x a su número de ondas ($k_x = 2\pi/\lambda_1$, siendo λ_1 la longitud de onda asociada y $p = \hbar k$), esta onda puede expresarse en un instante dado, $t = 0$, en la forma:

$$\phi_1(x) = A \cos(k_x x) \quad (1)$$

En la región 2 se superponen las dos ondas planas asociadas a los electrones desviados entre las placas. Por tanto, la onda resultante, en $t = 0$, puede expresarse en la forma:

$$\phi_2(x) = A \left\{ \cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y) \right\} \quad (2)$$

Determine k_x y k_y en la región 2,

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

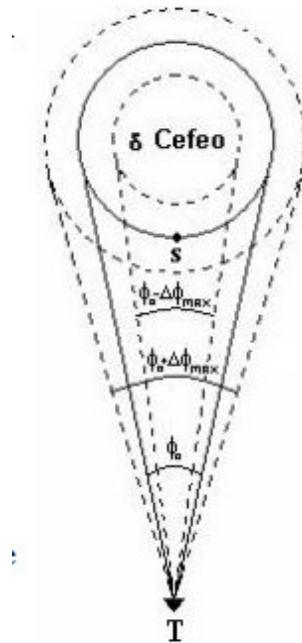
3) Se sitúa como indica la figura una pantalla fluorescente, que brilla con una intensidad proporcional a la intensidad de la onda de electrones que llega a cada uno de sus puntos. En la pantalla se detectan franjas de interferencia perpendiculares al plano de la figura. Obtenga una expresión para la distribución de intensidad en la pantalla, $I(y)$, y determine la distancia interfranja.

Formula útil

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (3)$$

Problema 2 Observando la estrella δ de Cefeo
VII Olimpiada Iberoamericana de Física 2003 Cuba.

La estrella δ de Cefeo es una representante típica del numeroso grupo de estrellas pulsantes conocidas como cefeidas clásicas. Estas estrellas se caracterizan por variaciones periódicas del brillo, asociadas a pequeñas oscilaciones de sus radios.



Se conoce que el período de estas oscilaciones para δ de Cefeo es τ , y que en este proceso el diámetro angular, medido desde un observatorio T en la Tierra, varía entre $\phi_0 - \Delta\phi_{max}$ y $\phi_0 + \Delta\phi_{max}$ (ver figura), todos ángulos muy pequeños. Se conoce también que debido al conocido efecto Doppler, la luz de longitud de onda λ correspondiente a cierta transición en el átomo de helio, y que es emitida desde el punto S en la superficie de la estrella en el instante en que la velocidad de expansión es máxima, está desplazada en $\Delta\lambda$. Con estos datos, veremos que es posible determinar la masa M de δ de Cefeo y la distancia L a la que la estrella se encuentra de nosotros. Para esto, consideraremos δ de Cefeo como una esfera de gas caliente que se dilata y contrae adiabáticamente y despreciaremos tanto el movimiento de la Tierra como cualquier efecto relativista.

a [4 puntos] Suponga que el movimiento pulsatorio de δ de Cefeo puede considerarse armónico simple.

Determine la distancia L desde el centro de esta estrella hasta el observatorio terrestre a partir del desplazamiento Doppler $\Delta\lambda$ de la línea λ , en función de parámetros observados desde T y la velocidad de la luz en el vacío, c . Tenga en cuenta que para el desplazamiento Doppler de una señal luminosa emitida por una fuente que se acerca o aleja del receptor a una velocidad v , se cumple la expresión

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Para responder las siguientes preguntas, concéntrese su atención en la expresión de la 2a. Ley de Newton para un pequeño volumen de la estrella que encierra una pequeña masa m , ubicado muy cerca de la superficie de la estrella. Sobre este volumen actúa una fuerza $P \cdot A$, correspondiente a la presión P que le empuja hacia fuera, y la atracción de prácticamente toda la masa M de la estrella. Tenga en

cuenta que el área de la sección del pequeño volumen es $A = \Omega \cdot R^2$, donde R es la posición radial de la masa m y Ω es una constante.

- b [3 puntos]** Denotemos por un subíndice 0 las magnitudes correspondientes a la posición de equilibrio de la estrella. Obtenga una expresión para la presión en el equilibrio P_0 , en función de $m, \phi_0, \Omega, \Delta\lambda, \lambda, M$ y la constante gravitacional G .
- c [3 puntos]** Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los incisos anteriores, halle una expresión para la frecuencia de oscilación de δ de Cefeo en función de M, L, ϕ_0 , el exponente adiabático γ y la constante de gravitación universal G . A partir de esta expresión, determine la masa M de δ de Cefeo en función de γ, G, c y los parámetros observados descritos en el segundo párrafo del enunciado.

Si $\Delta R = R - R_0$, y teniendo en cuenta que las oscilaciones son pequeñas, utilice la aproximación

$$\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^\alpha \approx 1 + \alpha \frac{\Delta R}{R_0}$$

Considere que en un proceso adiabático se cumple que PV^γ es constante, donde P y V son la presión y el volumen del gas, respectivamente.

Problema 3 Burbuja de jabón electrizada

42a IPhO 2011 Tailandia, problema 2

Una burbuja de jabón esférica de radio R_0 con aire en su interior de densidad ρ_i y temperatura T_i está rodeada por aire con densidad ρ_a , presión atmosférica P_a y temperatura T_a . La película de jabón tiene tensión superficial γ , densidad s y grosor t . La masa y tensión superficial del jabón no cambian con la temperatura. Asuma que $R_0 \gg t$.

2.1 Encuentra la razón $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ en términos de γ , P_a , R_0 [1.7 puntos]

2.2 Encuentra el valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ usando los siguientes datos $\gamma = 0.0250 \text{ Nm}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ y $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ [0.4 puntos]

2.3 La burbuja está formada inicialmente por aire más caliente por dentro. Encuentre el mínimo valor numérico de T_i tal que la burbuja pueda flotar en aire y se mantenga quieta. Utilice $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ y $g = 9.80 \text{ m/s}$. [2.0 puntos]

Tras un rato desde que la burbuja se haya formado, entrará en equilibrio térmico con sus alrededores. Esta burbuja en aire quieto caerá naturalmente hacia el suelo.

2.4 Encuentre la mínima velocidad u de una corriente ascendente de aire que evitará que la burbuja caiga estando en equilibrio térmico. De su respuesta en términos de ρ_s , R_0 , g , t y el coeciente de viscosidad del aire η . Puede asumir que la velocidad es lo suficientemente pequeña para que se aplique la ley de Stokes, e ignore el cambio de radio cuando la temperatura desciende al equilibrio. La fuerza de arrastre de la ley de Stokes es $F = 6\pi\eta R_0 u$. [1.6 puntos]

2.5 Calcule el valor numérico de u usando $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$. [0.4 puntos]

Los cálculos anteriores sugieren que los términos que involucran a la tensión superficial contribuyen muy poco a la precisión del resultado. En todas las preguntas siguientes, puede despreciar los términos que contengan a la tensión superficial.

2.6 Si la burbuja ahora está electricada uniformemente con carga total q , encuentre una ecuación que describa su nuevo radio R_1 en términos de R_0 , P_a , q y la permitividad eléctrica del vacío ϵ_0 . [2.0 puntos]

2.7 Asuma que la carga total no es muy grande (i.e. $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) y que la burbuja experimenta tan solo un pequeño incremento en su radio. Encuentre R , donde $R_1 = R_0 + \Delta R$. Puede utilizar que $(1+x)^n \approx 1 + nx$ cuando $x \ll 1$. [0.7 puntos]

2.8 ¿Cuál debe ser la magnitud de esta carga q en términos de t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 , P_a para que la burbuja flote sin moverse en el aire? Calcule también el valor numérico de q . La permitividad eléctrica del vacío es $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/m}$. [1.2 puntos]

Problema 1 ¿Cuándo se convertirá la Luna en un satélite sincrónico?

II APho 2001 Taiwan, problema 1

El periodo de rotación de la Luna en torno a su eje es actualmente el mismo que su periodo de revolución alrededor de la Tierra de modo que el mismo lado de la Luna siempre encara a la Tierra. La igualdad de estos dos periodos surgió probablemente debido a la acción de las fuerzas de marea a través de la larga historia del sistema Tierra-Luna.

Sin embargo, el periodo de rotación de la Tierra en torno a su eje es actualmente más corto que el periodo de revolución de la Luna. Como resultado, las fuerzas lunares de marea siguen actuando de una manera que tiende a ralentizar la velocidad rotacional de la Tierra y a alejar aún más a la Luna de la Tierra.

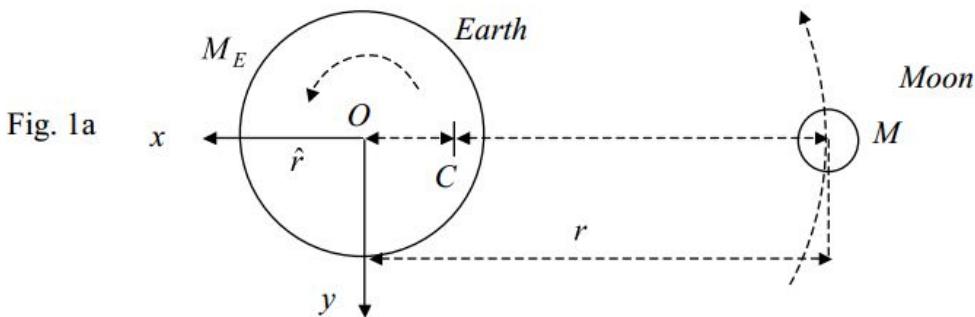
En este problema estamos interesados en obtener una estimación de cuánto más tiempo le tomará al periodo rotacional de la Tierra igualar al periodo de revolución de la Luna. La Luna entonces se convertirá en un satélite sincrónico, apareciendo en el cielo como un objeto jo visible sólo para aquellos observadores en el lado de la Tierra que encare a la Luna. También queremos encontrar cuánto le tomaría a la Tierra completar una rotación cuando dichos dos periodos sean iguales.

Dos sistemas de coordenadas rectangulares de mano derecha son adoptados como marcos de referencia. Los terceros ejes coordinados de estos dos sistemas son paralelos entre sí y normales al plano orbital de la Luna.

(I) El primer marco, llamado marco CM, es un marco inercial con su origen localizado en el centro de masa C del sistema Tierra-Luna.

(II) El segundo marco, llamado marco xyz , tiene su origen fijo en el centro de la Tierra. Su eje z coincide con el eje de rotación de la Tierra. Su eje x está a lo largo de la línea que conecta los centros de la Luna y de la Tierra, y apunta en la dirección del vector unitario \hat{r} como se muestra en la Fig. 1a. La Luna siempre se mantiene en el eje x negativo en este marco.

Note que las distancias en la Fig. 1a no están dibujadas a escala. Las flechas curvadas muestran las direcciones de la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna. La distancia Tierra-Luna está denotada por r .



Se dan los siguientes datos:

- En el presente, la distancia entre la Tierra y la Luna es $r_0 = 3.85 \times 10^8$ m y se incrementa a un ritmo de 0.038 m por año.
- El periodo de revolución de la Luna es actualmente $T_M = 27.322$ días.
- La masa de la Luna es $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg.
- El radio de la Luna es $R_M = 1.74 \times 10^6$ m.
- El periodo de rotación de la Tierra es actualmente $T_E = 23.933$ horas.

- (f) La masa de la Tierra es $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg.
 (g) El radio de la Tierra es $R_E = 6.37 \times 10^6$ m.
 (h) La constante de gravitación universal es $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Puede hacer las siguientes suposiciones al responder las preguntas:

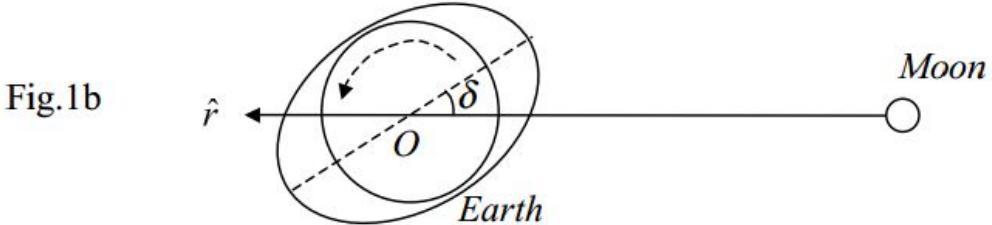
- (i) El sistema Tierra-Luna está aislado del resto del universo.
 - (ii) La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular.
 - (iii) El eje de rotación de la Tierra es perpendicular al plano orbital de la Luna.
 - (iv) Si la Luna está ausente y la Tierra no rota, la distribución de masa en la Tierra es esféricamente simétrica y el radio de la Tierra es R_E .
 - (v) Tanto para la Tierra como para la Luna, el momento de inercia I en torno a cualquier eje que pase por su centro es el de una esfera uniforme con respectiva masa M y radio R , i.e. $I = 2/5 MR^2$
-

Responda las siguientes preguntas:

(1) Con el respecto al centro de masa C , ¿cuál es el valor actual del momento angular total L del sistema Tierra-Luna?

(2) ¿Cuando el periodo de rotación de la Tierra y el periodo de revolución de la Luna se vuelvan iguales?, ¿cuál será la duración de un rotación de la Tierra? Denote su respuesta como T y exprésela en unidades del día presente. Encuentra una solución aproximada, puedes usar métodos iterativos.

(3) Considere que la Tierra es una esfera sólida giratoria cubierta con una capa superficial de agua, y asuma que mientras la Luna se mueve alrededor de la Tierra el agua permanece estacionaria en el marco xyz . En el modelo, las fuerzas de fricción entre la esfera sólida giratoria y la capa de agua son tomadas en cuenta. Mientras más rápido gire la Tierra se asume que arrastrará mareas lunares de modo que la línea que conecta los abultamientos de las mareas forma un ángulo δ con el eje x , como se muestra en la Fig. 1b. Consecuentemente, las fuerzas de marea lunares actuando sobre la Tierra ejercerán una torca Γ en torno a O para ralentizar la rotación de la Tierra.



Se asume que el ángulo δ es constante e independiente de la distancia Tierra-Luna r hasta que desaparece cuando la revolución de la Luna es sincrónica con la rotación de la Tierra de modo que las fuerzas de fricción ya no existan. La torca Γ por lo tanto disminuye con la distancia Tierra-Luna y es proporcional a $1/r^6$. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo tendrán la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna el mismo periodo? Denote su respuesta como t_f y exprésela en unidades del año presente.

Formulas útiles:

$$(M1) \quad \text{para } 0 \leq s < r \text{ y } x = s \cos \theta:$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right) \quad (1)$$

$$(M2) \quad \text{si } a \neq 0 \text{ y } \frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-\alpha}, \text{ entonces } \omega^\alpha(t') - \omega^\alpha(t) = (t - t')ab$$

Problema 2 Burbuja de jabón electrizada

42a IPhO 2011 Tailandia, problema 2

Una burbuja de jabón esférica de radio R_0 con aire en su interior de densidad ρ_i y temperatura T_i está rodeada por aire con densidad ρ_a , presión atmosférica P_a y temperatura T_a . La película de jabón tiene tensión superficial γ , densidad s y grosor t . La masa y tensión superficial del jabón no cambian con la temperatura. Asuma que $R_0 \gg t$.

2.1 Encuentra la razón $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ en términos de γ , P_a , R_0 [1.7 puntos]

2.2 Encuentra el valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ usando los siguientes datos $\gamma = 0.0250 \text{ Nm}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ y $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ [0.4 puntos]

2.3 La burbuja está formada inicialmente por aire más caliente por dentro. Encuentre el mínimo valor numérico de T_i tal que la burbuja pueda flotar en aire y se mantenga quieta. Utilice $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ y $g = 9.80 \text{ m/s}$. [2.0 puntos]

Tras un rato desde que la burbuja se haya formado, entrará en equilibrio térmico con sus alrededores. Esta burbuja en aire quieto caerá naturalmente hacia el suelo.

2.4 Encuentre la mínima velocidad u de una corriente ascendente de aire que evitará que la burbuja caiga estando en equilibrio térmico. De su respuesta en términos de ρ_s , R_0 , g , t y el coeficiente de viscosidad del aire η . Puede asumir que la velocidad es lo suficientemente pequeña para que se aplique la ley de Stokes, e ignore el cambio de radio cuando la temperatura desciende al equilibrio. La fuerza de arrastre de la ley de Stokes es $F = 6\pi\eta R_0 u$. [1.6 puntos]

2.5 Calcule el valor numérico de u usando $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$. [0.4 puntos]

Los cálculos anteriores sugieren que los términos que involucran a la tensión superficial contribuyen muy poco a la precisión del resultado. En todas las preguntas siguientes, puede despreciar los términos que contengan a la tensión superficial.

2.6 Si la burbuja ahora está electrizada uniformemente con carga total q , encuentre una ecuación que describa su nuevo radio R_1 en términos de R_0 , P_a , q y la permitividad eléctrica del vacío ϵ_0 . [2.0 puntos]

2.7 Asuma que la carga total no es muy grande (i.e. $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) y que la burbuja experimenta tan solo un pequeño incremento en su radio. Encuentre R , donde $R_1 = R_0 + \Delta R$. Puede utilizar que $(1+x)^n \approx 1+nx$ cuando $x \ll 1$. [0.7 puntos]

2.8 ¿Cuál debe ser la magnitud de esta carga q en términos de t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 , P_a para que la burbuja flote sin moverse en el aire? Calcule también el valor numérico de q . La permitividad eléctrica del vacío es $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/m}$. [1.2 puntos]

Problema 3 Cargas en movimiento.

22a IPhO 1991 Cuba, problema 2

Un lazo de forma cuadrada tiene de lado una longitud L . A lo largo del lazo, una serie de bolas cargadas eléctricamente, cada una con una carga q , se desplazan con una velocidad u , manteniendo cada bola con su vecina una distancia constante a , referido a un sistema de referencia que está en reposo respecto del lazo. La disposición de las bolas en el lazo se indica en la figura inferior

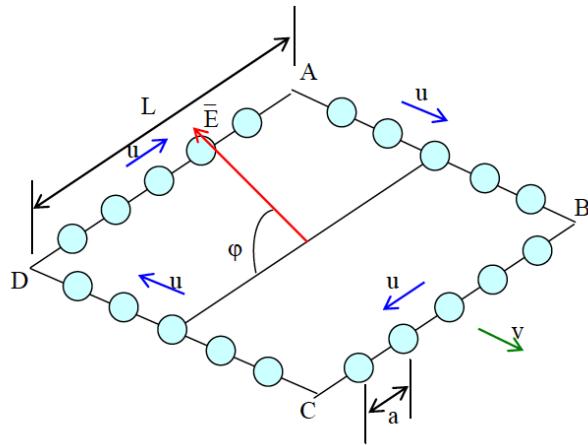


Figura 1:

El hilo que forma el lazo es de material no conductor y posee una carga eléctrica uniformemente distribuida sobre él, en total la carga del hilo es igual y opuesta a la de todas las bolas. Considerar una situación en la que el hilo se desplaza con velocidad constante \bar{v} , paralela al lado AB, en el interior de un campo eléctrico uniforme \bar{E} que es perpendicular al vector \bar{v} y forma con el plano del lazo un ángulo φ . Teniendo en cuenta los efectos relativistas han de calcularse las siguientes magnitudes que son medidas por un observador situado sobre un sistema de referencia para el que el lazo se desplaza respecto de él con la velocidad v .

1. El espaciado que existe entre las bolas cargadas para cada uno de los lados del lazo.
2. Los valores de la carga neta (bolas más lazo) en cada uno de los lados del lazo.
3. El módulo del momento de fuerzas de origen eléctrico que tiende a rotar al sistema formado por el lazo y las bolas.
4. La energía debida a la interacción del sistema, hilo más bolas, con el campo eléctrico,

Contracción de Lorentz: de acuerdo a la relatividad especial una barra de *longitud propia* l_0 (es decir en un sistema donde la barra esta en reposo mide l_0) para un observador que se mueve con velocidad v en una dirección paralela a la longitud de la barra, respecto del sistema donde la barra esta en reposo, la barra mide:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (2)$$

Adición de velocidades: (para simplificar restringimos el movimiento a una sola dirección) Considera un sistema O' que se mueve hacia la derecha con velocidad u respecto de un sistema O . Entonces la adición de velocidades en relatividad especial se calcula de la siguiente manera:

$$v = \frac{v' - u}{1 - uv'/c^2} \quad (3)$$

donde v es la velocidad respecto del sistema O , y v' es la velocidad respecto del sistema O' .

Problema 1 Enfriamiento de átomos

IX Olimpiada Iberoamericana de Física 2006 Brasil.

En 1997 el Premio Nobel de Física les fue concedido a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y Willian D. Phillips por su contribución al desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle y Carl E. Wieman utilizaron estos métodos para obtener la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos, por lo que recibieron el Premio Nobel de Física en 2001. El fundamento de estos métodos es la técnica que se denomina “*láser cooling*”, en la cual se utiliza la colisión entre fotones (provenientes de un láser) y los átomos del gas que se pretende enfriar. El láser emite fotones con una energía tal que un fotón puede ser absorbido cuando colisiona con un átomo del gas.

Se pretende enfriar un gas de átomos de sodio ($M=23$ g/mol) que se encuentra a la temperatura de 300 K con un láser que emite fotones con una energía tal que un átomo de sodio, al absorber un fotón, salta del estado fundamental ($E_{fund} = -5.14$ eV) hasta el primer estado excitado ($E_{exc} = -3.04$ eV). Puede considerar que la temperatura, T , del gas se relaciona con la energía cinética media, E_c , de los átomos de sodio a través de la expresión

$$E_c = \frac{3}{2}k_B T \quad (1)$$

donde $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann

Datos: $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js; 1 eV = 1.60×10^{-19} J. Considere que los átomos son no relativistas.

- (a) ¿Cuál es la velocidad media de un átomo de sodio en un gas a 300 K?
- (b) Obtenga una expresión para la variación de la velocidad de un átomo de sodio cuando colisiona frontalmente con un fotón del citado láser. Calcule el valor numérico para esa variación, considerando que la energía del fotón absorbido es *exactamente igual* a la energía de la transición. ¿Cuántas colisiones de este tipo serían necesarias para detener un átomo de sodio?
- (c) En realidad, como la variación de la energía cinética del átomo no es nula, la energía del fotón *no es exactamente igual* a la energía de la transición.
- (c.1) Demuestre que la variación de la energía cinética del átomo asociada a la absorción del fotón en una colisión frontal se puede escribir como

$$\Delta E_c = -m |v_i| |\Delta v| + \frac{1}{2}m |\Delta v|^2, \quad (2)$$

donde las magnitudes $|v_i|$ y $|\Delta v|$ son los módulos de los vectores *velocidad inicial y variación de la velocidad del átomo*, respectivamente.

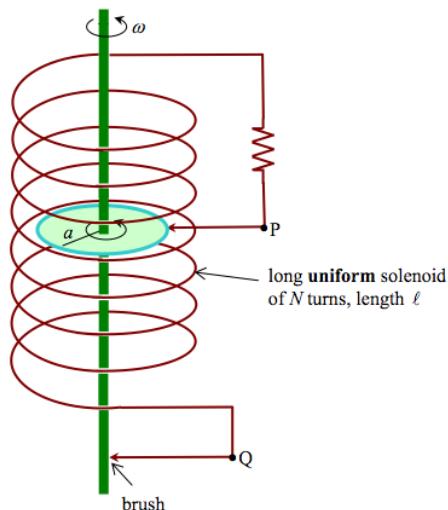
- (c.2) Calcule la razón $\Delta E_c/E_{foton}$ para los átomos con la velocidad obtenida en (a), considerando que, en este caso, el primer término de la expresión anterior para ΔE_c es la dominante (es decir, que el segundo término del segundo miembro de esta expresión es despreciable) y que puede utilizar para la variación de la velocidad del átomo el resultado obtenido en la parte (b).

- (d) La temperatura final alcanzada en un enfriamiento de este tipo está limitada inferiormente por lo que se denomina límite de retroceso (*recoil limit*) relacionado con el retroceso de los átomos en el proceso de absorción y emisión.
- (d.1) Obtenga una expresión para la variación de la energía cinética de un átomo con velocidad inicial nula que absorbe un fotón y demuestre que, en este caso, la energía del fotón debe ser mayor que la energía de la transición atómica.
- (d.2) Calcule la diferencia de energía cinética del apartado anterior, sabiendo que E_{foton}^2/mc^2 se puede aproximar por $E_{transición}^2/mc^2$, donde m representa la masa del átomo de sodio y $E_{fotón}$ la energía del fotón absorbido.
- (d.3) Considere que el átomo que absorbió un fotón en las condiciones del apartado anterior, que quedó en estado excitado, emite un fotón en la misma dirección y en sentido opuesto al de su velocidad. Calcule la variación de la energía cinética del átomo. También en este caso puede utilizar la aproximación $(E'_{fotón})^2/mc^2 \approx (E_{transición})^2/mc^2$, en la que $E'_{fotón}$ es la energía del fotón emitido.
- (d.4) Considerando este proceso de absorción y de emisión, calcule la ganancia de energía final del átomo y la temperatura a que corresponde. ¿Cuál es la importancia del proceso en el enfriamiento de átomos?

Problema 2 Dinamo magnético autoexcitado.

10a Olimpiada Asiática de Física 2009 Bangkok Tailandia.

Un disco metálico de radio a montado en eje esbelto está rotando con una velocidad angular constante ω dentro de un solenoide largo con inductancia L cuyos dos extremos están conectados al disco giratorio por contactos escobilla como se muestra. La resistencia total del circuito completo es R . Una pequeña perturbación magnética puede iniciar el crecimiento de una fuerza electromotriz inducida a través de las terminales P y Q.



- 2.1) Escriba la ecuación diferencial para $i(t)$, la corriente a través del circuito. Exprese su respuesta en términos de L , R , y la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} a través de las terminales P y Q. (1.0 puntos)
- 2.2) ¿Cuál es la densidad de flujo magnético (B) en términos de i , N , l y la permeabilidad del espacio libre μ_0 ? Ignore el campo magnético generado por el disco y el eje. (1.5 puntos)
- 2.3) ¿Cuál es la expresión para la fuerza electromotriz inducida en \mathcal{E} en términos de μ_0 , N , a , l , i y la velocidad angular ω ? (2.0 puntos)
- 2.4) Resuelva la ecuación de la pregunta 2.1 para la corriente a cualquier tiempo t en términos de la corriente inicial $i(0)$ y otros parámetros. (1.5 puntos)
- 2.5) ¿Cuál es el mínimo valor de la velocidad angular que permitirá que la corriente crezca? Dé su respuesta en términos de R , μ_0 , N , a , y l . (2.0 puntos)
- 2.6) Para mantener una cierta velocidad angular constante ω , ¿cuál debe ser el valor de la torca aplicada al eje en el instante t ? (2.0 puntos)

Problema 3, Giroscopio óptico.

4a Olimpiada Asiática de Física (APho) 2003 Tailandia

En 1913 Georges Sagnac (1869-1926) consideró el uso de un resonador de anillo para buscar el rumbo del éter relativo al marco de referencia giratorio. Sin embargo, como sucede a menudo, sus resultados terminaron siendo útiles en formas que el mismo Sagnac jamás hubiera soñado. Una de esas aplicaciones es el Giroscopio de Fibra Óptica (FOG) que está basado en un fenómeno simple, observado por primera vez por Sagnac. La física esencial asociada con el efecto Sagnac se debe al cambio de fase causado por dos rayos de luz coherentes mandados alrededor del anillo giratorio de fibra óptica en direcciones opuestas. Este cambio de fase también es usado para determinar la velocidad angular del anillo.

Como se muestra en el diagrama esquemático de la Figura 1, una onda de luz entra en un camino circular de fibra óptica de radio R en el punto P en una plataforma giratoria con velocidad angular constante Ω , en dirección de las manecillas del reloj. Aquí la onda de luz se parte en dos ondas que viajan en direcciones opuestas, una en dirección de las manecillas del reloj (CW) y la otra en contra de las manecillas del reloj (CCW), a través del anillo. El índice de refracción del material de la fibra óptica es μ . Asuma que la luz que viaja dentro del cable de fibra óptica es un suave camino circular de radio R.

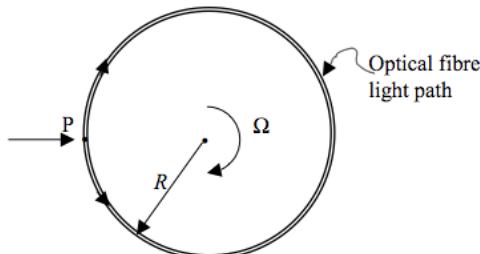
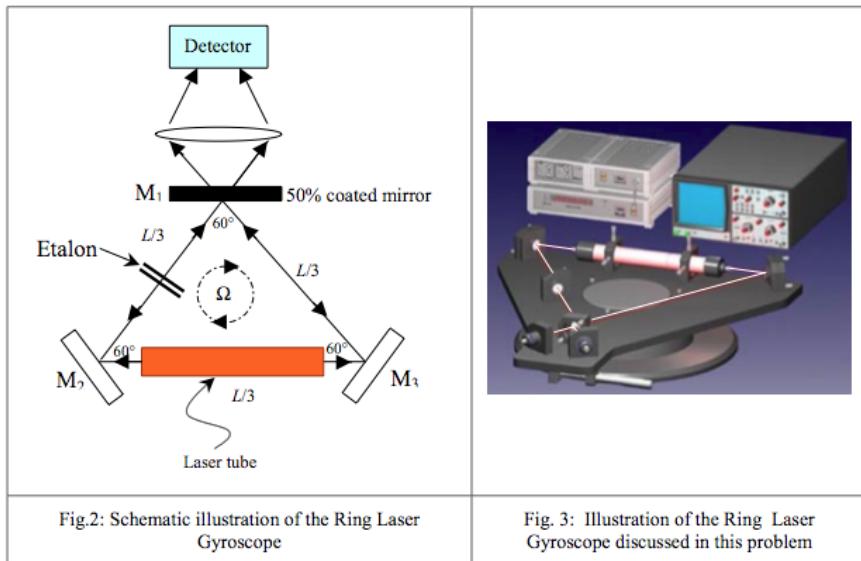


Fig.1

1. Prácticamente, la velocidad tangencial es mucho menor que la velocidad de la luz tal que $(R\Omega)^2 \ll c^2$. Encuentre la diferencia de tiempos $\Delta t = t_+ - t_-$ donde t_+ y t_- denotan el tiempo de tránsito de los rayos CW y CCW al completar una vuelta completa, respectivamente. Dé su respuesta en términos del área A encerrada por el anillo. [2 puntos]
2. Encuentre la diferencia de caminos ópticos ΔL cuando los rayos CW y CCW completan un viaje redondo dentro del anillo giratorio. [2 puntos]
3. Para una fibra óptica circular de radio $R = 1$ m, ¿cuál es el máximo valor de ΔL para la rotación de la Tierra? Dado $\mu = 1.5$ [1 punto]
4. En el inciso anterior, la medición pudo ser amplificada incrementando el número de vueltas en la espira de fibra óptica, N . Encuentre la diferencia de fase $\Delta\theta$ cuando las luces completan los recorridos. [1 punto]

El segundo esquema del Giroscopio Óptico es el Giroscopio de Anillo Láser (RLG). Esto pudo lograrse con la inclusión de una cavidad de láseres activos en un anillo triangular equilátero de longitud total L , como se muestra en la Figura 2. El láser aquí generará dos fuentes de luz coherente amplificada propagándose en direcciones opuestas. *Para mantener la oscilación láser en este resonador de anillo triangular, el perímetro del anillo debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ .* El etalón, una componente adicional insertada en el anillo, es capaz de crear pérdidas de frecuencia selectivas en el resonador de anillo, de tal modo que los modos indeseados puedan ser amortiguados y suprimidos.



1. Encuentre la diferencia de tiempos Δt del tránsito de los rayos CW y CCW, para el caso del anillo triangular mostrado en la Figura 2. Dé su respuesta en términos de Ω y del área A encerrada por el anillo. Muestre que el resultado es el mismo que para el anillo circular. [2.0 puntos]
2. Si el anillo está girando con velocidad angular Ω como se muestra en la Figura 2, habrá una diferencia de frecuencias entre las mediciones de CW y CCW. ¿Cuál es la frecuencia de pulso observada, $\Delta\nu$, entre los rayos CW y CCW en términos de L , Ω y λ . [2.0 puntos]

Problema 1, Enfriamiento Láser.

7a Olimpiada Asiática de Física (APhO) 2006 Almaty, Kazakhstan.

En este problema se le pide considerar el mecanismo del enfriamiento de un átomo con ayuda de radiación láser. Las investigaciones en este campo llevaron a un considerable progreso en el entendimiento de las propiedades de los gases cuánticos de átomos fríos, y se les otorgaron premios Nobel en 1997 y 2001.

Introducción teórica

Considere un simple modelo de dos niveles del átomo, con energía de estado base E_g y energía de estado excitado E_e . La diferencia de energías es $E_e - E_g = \hbar\omega_0$, la frecuencia angular del láser usado es ω , y el “desentonamiento” (*detuning*) del láser es $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$. Asuma que todas las velocidades de los átomos satisfacen $v \ll c$, donde c es la velocidad de la luz. Siempre puede restringirse a los primeros ordenes no triviales en los parámetros pequeños v/c y δ/ω_0 .

El ancho natural del estado excitado E_e debido al decaimiento espontáneo es $\gamma \ll \omega_0$: para un átomo en el estado excitado, la probabilidad de regresar al estado base por unidad de tiempo es γ . Cuando un átomo regresa al estado base, emite un fotón de frecuencia cercana a ω_0 en una dirección arbitraria.

Puede demostrarse en la mecánica cuántica que cuando un átomo está sujeto a radiación láser de baja intensidad, la probabilidad de excitar al átomo por unidad de tiempo depende la frecuencia de la radiación en el marco de referencia del átomo, ω , de acuerdo a

$$\gamma_p = s_0 \frac{\gamma/2}{1 + 4(\omega_a - \omega_0)^2 / \gamma} \ll \gamma \quad (1)$$

Donde $s_0 \ll 1$ es un parámetro que depende de las propiedades de los átomos y la intensidad del láser. En este problema las propiedades del gas de átomos de sodio son investigadas despreciando las interacciones entre los átomos. La intensidad del láser es lo suficientemente pequeña de tal modo que el número de átomos en el estado excitado es siempre mucho menor que el número de átomos en el estado base. Puede también despreciar los efectos de la gravedad, que en los experimentos reales son compensados por un campo magnético adicional.

Preguntas

a) **[1.0 Puntos]** Suponga que el átomo se mueve en la dirección x positiva con velocidad v_x , y la radiación láser con frecuencia ω se está propagando en la dirección de x negativa. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación en el marco de referencia del átomo?

b) **[2.5 Puntos]** Suponga que el átomo se está moviendo en la dirección x positiva con velocidad v_x , y dos rayos láser idénticos brillan a lo largo de la dirección x desde los dos lados. Las frecuencias de los láseres son ω , y los parámetros de intensidad son s_0 . Encuentre la expresión de la fuerza promedio $F(v_x)$ que actúa en un átomo. Para v_x pequeña, esta fuerza puede escribirse como $F(v_x) = -\beta v_x$. Encuentre la expresión para β . ¿Cuál es el signo de $\delta = \omega - \omega_0$ si el valor absoluto de la velocidad del átomo disminuye? Asuma que el momento de un átomo es mucho mayor que el momento de un fotón. En lo que sigue asumiremos que la velocidad del átomo es lo suficientemente pequeña de tal modo que uno puede usar la expresión lineal de la fuerza promedio.

c) **[2.0 Puntos]** Si uno usa seis láseres a lo largo de los ejes x , y y z en las direcciones positivas y negativas, entonces para $\beta > 0$ la fuerza disipativa actúa en los átomos y su energía promedio disminuye. Eso significa que la temperatura del gas, que está definida por la energía promedio, disminuye. Usando la concentración de átomos dada anteriormente, estime numéricamente la temperatura T_Q para la cuál ya no pueden considerarse a los átomos como objetos puntuales debido a los efectos cuánticos.

En lo que sigue se asumirá que la temperatura es mucho mayor que T_Q y que se usan seis láseres en las direcciones x , y y z , como se explicó en la parte c).

En la parte b) calculó la fuerza promedio que actúa en el átomo. Sin embargo, debido a la naturaleza cuántica de los fotones, en cada proceso de absorción o emisión el momento del átomo cambia por un cierto valor discreto y en dirección arbitraria, debido al proceso de retroceso.

d) [0.5 Puntos] Determine numéricamente el valor al cuadrado del cambio de momento en el átomo, $(\Delta p)^2$, como resultado de un evento de absorción o de emisión.

e) [3.5 Puntos] Debido al efecto de retroceso, la temperatura promedio del gas después de un largo tiempo no se vuelve cero absoluto, sino que alcanza un valor finito. La evolución del momento del átomo puede representarse como un camino aleatorio en el espacio de momento con paso promedio $\sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle}$, y un enfriamiento debido a la fuerza disipativa. La temperatura del estado estacionario es determinada por el efecto combinado de estos dos procesos diferentes.

Demuestre que la temperatura del estado estacionario T_d es de la forma:

$$T_d = \frac{\hbar\gamma}{4k_B} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (2)$$

Determine x . Asuma que T_d es mucho mayor que $\langle (\Delta p)^2 \rangle / 2k_B T$.

Nota: Si los vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ son estadísticamente no correlacionados, la raíz cuadrada media de su suma es:

$$\langle (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n)^2 \rangle = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \dots + \mathbf{P}_n^2 \quad (3)$$

f) [0.5 Puntos] Encuentre numéricamente el mínimo valor posible de la temperatura debido al efecto de retroceso. ¿Para qué cociente δ/γ se logra esto?

Problema 2, Microscopio de Sonda Atómica

35a Olimpiada Internacional de Física (IPhO), Pohang Corea 2004

Microscopios de sonda atómica (APMs) son herramientas poderosas en el campo de la nanociencia. El movimiento de un puente en APM puede ser detectado por un fotodetector monitoreando el rayo láser reflejado, como se muestra en la figura 1. El puente puede moverse solo en dirección vertical y su desplazamiento z como una función de tiempo t puede ser descrito por la ecuación

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kz = F \quad (4)$$

donde m es la masa del puente, $k = m\omega_0^2$ es la constante del resorte, b es un pequeño coeficiente de amortiguamiento satisfaciendo $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ y finalmente F es una fuerza exterior manejando el tubo piezoeléctrico.

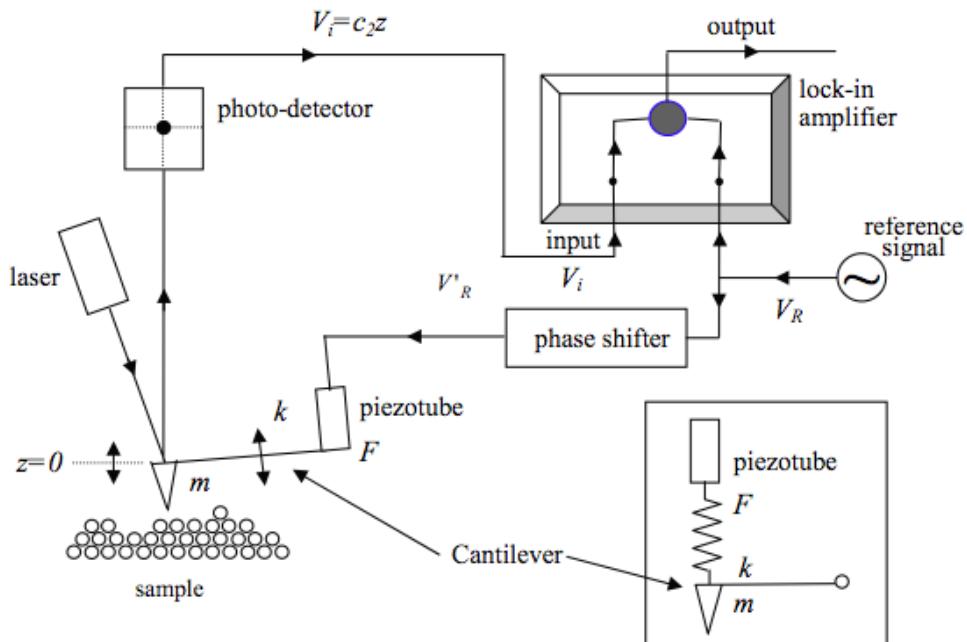


Figura 1: Un diagrama esquemático para un microscopio de sonda escaneando (SPM). El recuadro en la esquina inferior derecha representa un modelo mecánico simplificado para describir el acoplamiento del piezotubo con el puente.

PARTE A

- (a) [1.5 puntos] Cuando $F = F_0 \sin(\omega t)$, $z(t)$ satisfaciendo la ecuación (4) puede ser escrita como $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$, donde $A > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Encontrar la expresión de la amplitud A y $\tan \phi$ en términos de F_0 , m , ω , ω_0 y b . Obtener A y la fase ϕ en la frecuencia de resonancia $\omega = \omega_0$.
- (b) [1 punto] Un amplificador lock-in se muestra en la Figura 1 multiplica una señal de entrada por la señal de referencia lock-in, $V_R = V_{R0} \sin(\omega t)$, y entonces solamente pasa la componente dc (corriente directa) de la señal multiplicada. Asumir que la señal de entrada está dado por $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$. Aquí V_{R0} , V_{i0} , ω_i , y ϕ_i son todas constantes positivas dadas. Encontrar la

condición sobre $\omega (> 0)$ para una señal de salida no nula. ¿Cuál es la expresión para la magnitud de la señal de salida dc no nula en esa frecuencia?

- (c) [1.5 puntos] Pasando a través de la fase de cambio, el voltaje de referencia lock-in $V_R = V_{R0} \sin(\omega t)$ cambia a $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$. V'_R aplicado al tubo piezoelectrónico, maneja el puente con una fuerza $F = c_1 V'_R$. Entonces el fotodetector convierte el desplazamiento del puente, z , en un voltaje $V_i = c_2 z$. Aquí c_1 y c_2 son constantes. Encontrar la expresión para la magnitud de la señal de salida dc cuando $\omega = \omega_0$.
- (d) [2 puntos] El cambio pequeño Δm de la masa del puente cambia la frecuencia de resonancia por $\Delta\omega_0$. Como un resultado, la fase ϕ en la frecuencia de resonancia original ω_0 cambia por $\Delta\phi$. Encontrar el cambio de masa Δm correspondiente al cambio de fase $\Delta\phi = \pi/1800$, el cual es una resolución típica en las medidas de fase. Los parámetros físicos del puente están dados por $m = 1 \times 10^{-12}$ kg, $k = 1$ N/m, y $b/m = 1 \times 10^3$ s $^{-1}$. Usar las aproximaciones $(1+x)^a \approx 1+ax$ y $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ cuando $|x| \ll 1$.

PARTE B

A partir de ahora vamos a considerar la situación de que algunas fuerzas, además de la fuerza motriz discutido en la Parte A, actúa sobre el puente, por efecto de la muestra, tal como se muestra en la Figura 3.1.

- (e) [1.5 puntos] Asumiendo que la fuerza adicional $f(h)$ depende solo de la distancia h entre el puente y la superficie de la muestra, se puede encontrar una nueva posición de equilibrio h_0 . Cerca de $h = h_0$, podemos escribir $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, donde c_3 es una constante en h . Encontrar la nueva frecuencia de resonancia ω'_0 en términos de ω_0 , m y c_3 .
- (f) [2.5 puntos] Durante la exploración de la superficie por el movimiento de la muestra horizontalmente, la punta del puente cargado con $Q = 6e$ encuentra un electrón de carga $q = e$ atrapado (localizado en el espacio) en alguna distancia debajo de la superficie. Durante la exploración alrededor del electrón, el máximo cambio de la frecuencia de resonancia $\Delta\omega (= \omega'_0 - \omega_0)$ es observada para valores mucho más pequeño que ω_0 . Expresar la distancia d_0 del puente para atrapar electrones en el cambio máximo en términos de m , q , Q , ω_0 , $\Delta\omega_0$ y la constante de Coulomb k_e . Evaluar d_0 en nm ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) para $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$.

Los parámetros físicos del puente son $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg y $k = 1.0$ N/m. Ignorar cualquier efecto de polarización en ambas puntas del puente y la superficie.

Notar que $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ y $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.

Problema 3, Giroscopio óptico.

4a Olimpiada Asiática de Física (APho) 2003 Tailandia

En 1913 Georges Sagnac (1869-1926) consideró el uso de un resonador de anillo para buscar el rumbo del éter relativo al marco de referencia giratorio. Sin embargo, como sucede a menudo, sus resultados terminaron siendo útiles en formas que el mismo Sagnac jamás hubiera soñado. Una de esas aplicaciones es el Giroscopio de Fibra Óptica (FOG) que está basado en un fenómeno simple, observado por primera vez por Sagnac. La física esencial asociada con el efecto Sagnac se debe al cambio de fase causado por dos rayos de luz coherentes mandados alrededor del anillo giratorio de fibra óptica en direcciones opuestas. Este cambio de fase también es usado para determinar la velocidad angular del anillo.

Como se muestra en el diagrama esquemático de la Figura 1, una onda de luz entra en un camino circular de fibra óptica de radio R en el punto P en una plataforma giratoria con velocidad angular constante Ω , en dirección de las manecillas del reloj. Aquí la onda de luz se parte en dos ondas que viajan en direcciones opuestas, una en dirección de las manecillas del reloj (CW) y la otra en contra de las manecillas del reloj (CCW), a través del anillo. El índice de refracción del material de la fibra óptica es μ . Asuma que la luz que viaja dentro del cable de fibra óptica es un suave camino circular de radio R.

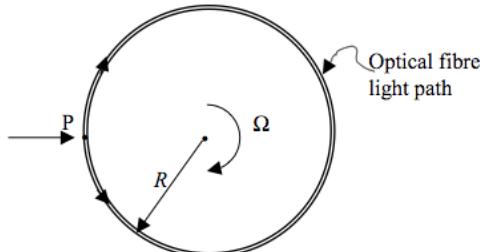
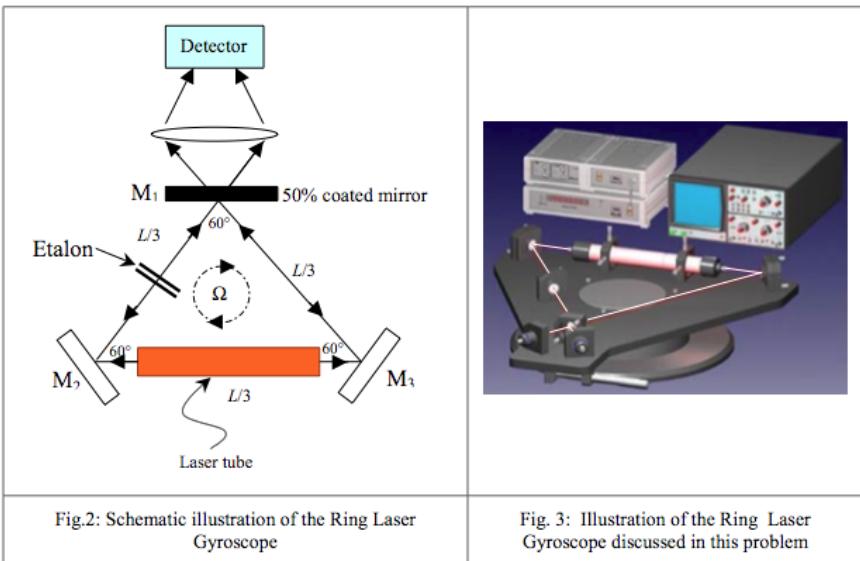


Fig.1

1. Prácticamente, la velocidad tangencial es mucho menor que la velocidad de la luz tal que $(R\Omega)^2 \ll c^2$. Encuentre la diferencia de tiempos $\Delta t = t_+ - t_-$ donde t_+ y t_- denotan el tiempo de tránsito de los rayos CW y CCW al completar una vuelta completa, respectivamente. Dé su respuesta en términos del área A encerrada por el anillo. [2 puntos]
2. Encuentre la diferencia de caminos ópticos ΔL cuando los rayos CW y CCW completan un viaje redondo dentro del anillo giratorio. [2 puntos]
3. Para una fibra óptica circular de radio $R = 1$ m, ¿cuál es el máximo valor de ΔL para la rotación de la Tierra? Dado $\mu = 1.5$ [1 punto]
4. En el inciso anterior, la medición pudo ser amplificada incrementando el número de vueltas en la espira de fibra óptica, N . Encuentre la diferencia de fase $\Delta\theta$ cuando las luces completan los recorridos. [1 punto]

El segundo esquema del Giroscopio Óptico es el Giroscopio de Anillo Láser (RLG). Esto pudo lograrse con la inclusión de una cavidad de láseres activos en un anillo triangular equilátero de longitud total L , como se muestra en la Figura 2. El láser aquí generará dos fuentes de luz coherente amplificada propagándose en direcciones opuestas. *Para mantener la oscilación láser en este resonador de anillo triangular, el perímetro del anillo debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ .* El etalón, una componente adicional insertada en el anillo, es capaz de crear pérdidas de frecuencia selectivas en el resonador de anillo, de tal modo que los modos indeseados puedan ser amortiguados y suprimidos.



1. Encuentre la diferencia de tiempos Δt del tránsito de los rayos CW y CCW, para el caso del anillo triangular mostrado en la Figura 2. Dé su respuesta en términos de Ω y del área A encerrada por el anillo. Muestre que el resultado es el mismo que para el anillo circular. [2.0 puntos]
2. Si el anillo está girando con velocidad angular Ω como se muestra en la Figura 2, habrá una diferencia de frecuencias entre las mediciones de CW y CCW. ¿Cuál es la frecuencia de pulso observada, $\Delta\nu$, entre los rayos CW y CCW en términos de L , Ω y λ . [2.0 puntos]

Problema 1,

6a IPhO 1985 Yugoslavia.

Un joven aficionado de la radio mantiene un enlace de radio con dos niñas que viven en dos ciudades. Se coloca una serie de antenas de tal manera que cuando la chica que vive en la ciudad A recibe una señal máxima, la chica que vive en la ciudad B no recibe ninguna señal, y viceversa. La serie se construye a partir de dos antenas de transmisión de varillas verticales con intensidades iguales de manera uniforme en todas las direcciones en el plano horizontal.

- a)** Determinar los parámetros de la serie, es decir, la distancia entre las varillas, su orientación y el desplazamiento de fase entre las señales eléctricas suministradas a las varillas, tales que la distancia entre las barras sea mínima.
- b)** Hallar la solución numérica si el joven tiene un transmisor de radiofrecuencia a 27 MHz y se construye la serie de antenas en Portoroz. Utilizando el mapa él ha encontrado que los ángulos entre el norte y la dirección de A (Koper) y de B (pequeña ciudad de Buje en Istria) son 72° y 157° , respectivamente.

Problema 2, Criostato para bajas temperaturas.

Olimpiada Iberoamericana de Física 2007, Argentina.

Un sistema simple para controlar la temperatura de una muestra entre 77 K y 300 K consiste en sumergir el recipiente que la contiene en un baño de nitrógeno líquido (NL) contenido en un termo de vidrio.

En nuestro caso, el recipiente que contiene la muestra es un cilindro de 5 cm de radio conectado con el exterior por medio de un tubo cilíndrico de 1 cm de radio. Las paredes laterales del cilindro y del tubo son adiabáticas (aislantes térmicos). La temperatura de la muestra en el interior del cilindro se mantiene a 100 K mediante un sistema que regula la corriente que pasa por una resistencia. Un esquema simplificado de dicho sistema es mostrado en la figura 1.

Las tapas del cilindro interior están compuestas de dos materiales, cobre y alúmina (óxido de aluminio), siendo de cobre la parte externa. El cobre tiene un espesor de 1 cm. y la alúmina 3 cm. A 77 K las conductividades térmicas del cobre y la alúmina son $k_{cu}=600 \text{ W/m K}$ y $k_A=26 \text{ W/m K}$ respectivamente.

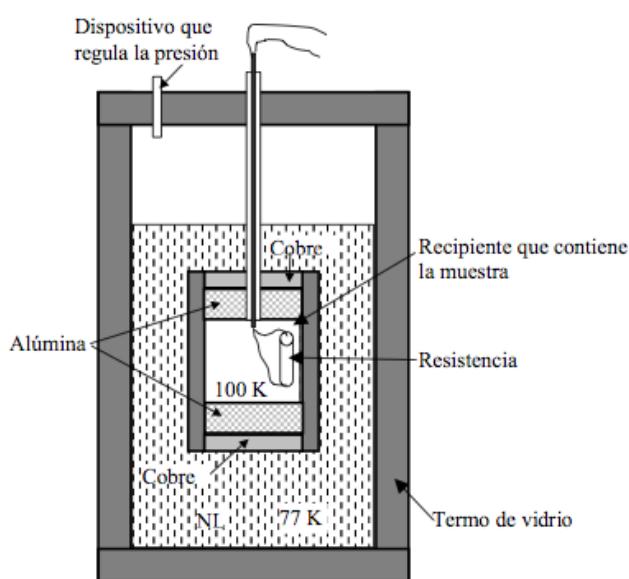


Figura 1

Experimentalmente se encuentra que, en condiciones de régimen estacionario, el flujo de calor, es decir, la cantidad de calor por unidad de tiempo y por unidad de área, que pasa a través de una pared plana de espesor e y coeficiente de conductividad térmica k , está dada por:

$$\frac{1}{A} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = k \frac{\Delta T}{e} \quad (1)$$

onde ΔT es la diferencia de temperatura existente entre las caras de la pared de espesor e y área A . Obtenga la expresión y calcule:

- a) La temperatura en la interfase entre el cobre y la alúmina.
- b) La cantidad de calor que por unidad de tiempo atraviesa las dos tapas del cilindro interior.

El radio interior del termo que contiene el nitrógeno líquido es de 15 cm. Las paredes y tapa del termo son adiabáticas. En la tapa del termo existe un dispositivo que permite mantener la presión en su interior igual a la atmosférica, P_a .

Obtenga la expresión y calcule:

- c) La masa de nitrógeno líquido que se vaporiza por unidad de tiempo.
- d) El cambio del nivel de nitrógeno líquido por unidad de tiempo.
- e) El número de moles de gas que salen por unidad de tiempo a través del dispositivo.

Otros datos útiles:

- Temperatura de ebullición del nitrógeno líquido a presión atmosférica es 77 K.
- Calor de vaporización del NL: $\lambda_v = 198.38 \text{ kJ/kg}$.
- Densidad del nitrógeno líquido: $\delta_L = 808.61 \text{ kg/m}^3$
- Densidad del nitrógeno gaseoso a 77 K: $\delta_G = 4.61 \text{ kg/m}^3$
- Masa molecular del nitrógeno gaseoso: $m_N = 28.01 \text{ g/mol}$
- Constante de los gases: $R = 8.31 \text{ J/mol K}$
- Presión atmosférica: $P_a = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$

Problema 3, Detección de ondas gravitacionales.

31 IPhO 2000, Gran Bretaña.

Parte A

Esta parte tiene que ver con las dificultades de la detección de ondas gravitacionales generadas por eventos astronómicos. Debe tenerse en cuenta que la explosión de una supernova distante puede producir fluctuaciones en la intensidad del campo gravitacional en la superficie de la Tierra de unos $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$. Un modelo para un detector de ondas gravitacionales (ver figura 3.1) consta de dos varillas de metal de 1 m cada uno, que forman ángulos rectos entre sí. Un extremo de cada varilla se pule de manera que su superficie es ópticamente plana y el otro extremo se mantiene rígidamente. La posición de una varilla se ajusta de modo que haya una señal mínima recibida desde la fotocelda (véase la figura 3.1). A las varillas se les da un “corto impulsor” de forma longitudinal por un dispositivo piezoelectrónico. Como resultado, los extremos libres de las varillas oscilan con un desplazamiento longitudinal Δx_t , donde

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t - \phi) \quad (2)$$

a, μ, ω, ϕ son constantes.

- (a) Si la amplitud del movimiento se reduce en un 20 % durante un intervalo de 50 s, determinar un valor para m .
- (b) Dado que la velocidad de la onda longitudinal, $v = (E/\rho)^{1/2}$, determinar también el valor más bajo para ω , teniendo en cuenta que las varillas están hechas de aluminio, con una densidad ρ de 2700 kg m^{-3} y un módulo de Young E de $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- (c) Es imposible hacer las barras de exactamente la misma longitud así que la señal de la fotocelda tiene una frecuencia de batido (*beat frequency*) de 0.005 Hz. ¿Cuál es la diferencia en la longitud de las varillas?
- (d) Para la varilla de longitud l , calcular una expresión algebraica para el cambio de longitud, Δl , debido a un cambio, Δg , en la intensidad del campo gravitacional g , en términos de l y otras constantes del material de la varilla. La respuesta del detector a este cambio tiene lugar en la dirección de una de las varillas.
- (e) La luz producida por el láser es monocromática con una longitud de onda de 656 nm. Si el tamaño de la franja mínima (*fringe shift*) -en el patrón de interferencia- que puede ser detectada es 10^{-4} veces la longitud de onda del láser, ¿Cuál es el valor mínimo necesario de l para que el sistema sea capaz de detectar variaciones en g del orden de $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Parte B

Esta parte se refiere a los efectos de un campo gravitatorio sobre la propagación de la luz en el espacio.

- (a) Un fotón emitido desde la superficie del Sol(masa M , radio R) es desplazado hacia el rojo (*red-shifted*). Al asumir un equivalente de masa en reposo de la energía del fotón, aplicar la teoría gravitacional de Newton para demostrar que la frecuencia efectiva (o medida) de los fotones en el infinito se reduce (desplazamiento hacia el rojo) por el factor $(1 - GM/Rc^2)$.
- (b) Una reducción de la frecuencia del fotón es equivalente a un incremento en el período de tiempo, o, utilizando el fotón como un reloj estándar, una dilatación de tiempo. Además, puede demostrar que una dilatación del tiempo está siempre acompañada por una contracción en la unidad de longitud por el mismo factor.

Ahora vamos a tratar de estudiar el efecto que esto tiene sobre la propagación de la luz cerca del sol. Vamos a definir en primer lugar un índice de refracción eficaz n_r en un punto r desde el centro del sol.

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \quad (3)$$

donde c es la velocidad de la luz medida por un sistema de coordenadas muy lejos de la influencia gravitatoria del Sol $r \rightarrow \infty$, y c'_r es la velocidad de la luz medida por un sistema de coordenadas a una distancia r de la el centro del sol.

Muestra que n_r puede aproximarse como

$$n_r = 1 + \frac{aGM}{rc^2} \quad (4)$$

para valores pequeños de GM/rc^2 , donde a es una constante que debes determinar.

- (c) Utilizando esta expresión para n_r , calcular en radianes la desviación de un rayo de luz de su camino recto a medida que pasa el borde del sol.

Datos:

1. Constante gravitacional, $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
2. Masa del Sol, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.
3. Radio del Sol, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.
4. Velocidad de la luz $c = 299,792,458 \text{ m/s} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Puede necesitar también la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2} \quad (5)$$

Problema 1,

6a IPhO 1985 Yugoslavia. Redacción original

A young radio amateur maintains a radio link with two girls living in two towns. He positions an aerial array such that when the girl living in town A receives a maximum signal, the girl living in town B receives no signal and vice versa. The array is built from two vertical rod aerials transmitting with equal intensities uniformly in all directions in the horizontal plane.

- a) Find the parameters of the array, i. e. the distance between the rods, its orientation and the phase shift between the electrical signals supplied to the rods, such that the distance between the rods is minimum.
- b) Find the numerical solution if the boy has a radio station transmitting at 27 MHz and builds up the aerial array at Portoroz. Using the map he has found that the angles between the north and the direction of A (Koper) and of B (small town of Buje in Istria) are 72° and 157° , respectively.

2 Solutions

2.1 Theoretical competition

Problem 1

a) Let the electrical signals supplied to rods 1 and 2 be $E_1 = E_0 \cos \omega t$ and $E_2 = E_0 \cos(\omega t + \delta)$, respectively. The condition for a maximum signal in direction ϑ_A (Fig. 4) is:

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \vartheta_A - \delta = 2\pi N$$

and the condition for a minimum signal in direction ϑ_B :

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \vartheta_B - \delta = 2\pi N' + \pi \quad (2p.)$$

where N and N' are arbitrary integers. In addition, $\vartheta_A - \vartheta_B = \varphi$, where

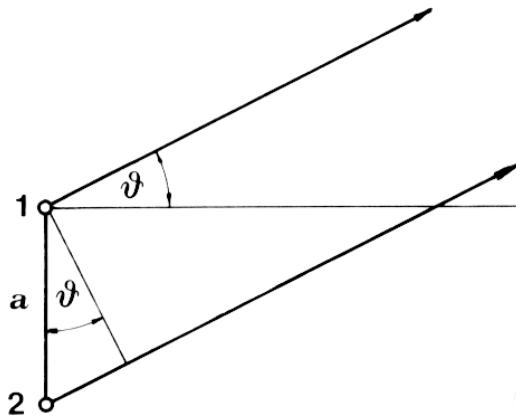


Fig. 4

φ is given. The problem can now be formulated as follows: Find the parameters a , ϑ_A , ϑ_B , δ , N , and N' satisfying the above equations such, that a is minimum.

We first eliminate δ by subtracting the second equation from the first one:

$$a \sin \vartheta_A - a \sin \vartheta_B = \lambda(N - N' - \frac{1}{2}).$$

Using the sine addition theorem and the relation $\vartheta_B = \vartheta_A - \varphi$:

$$2a \cos(\vartheta_A - \frac{1}{2}\varphi) \sin \frac{1}{2}\varphi = \lambda(N - N' - \frac{1}{2})$$

or

$$a = \frac{\lambda(N - N' - \frac{1}{2})}{2 \cos(\vartheta_A - \frac{1}{2}\varphi) \sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

The minimum of a is obtained for the greatest possible value of the denominator, i. e.:

$$\cos(\vartheta_A - \frac{1}{2}\varphi) = 1, \quad \vartheta_A = \frac{1}{2}\varphi,$$

and the minimum value of the numerator, i. e.:

$$N - N' = 1.$$

The solution is therefore:

$$a = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{1}{2}\varphi}, \quad \vartheta_A = \frac{1}{2}\varphi, \quad \vartheta_B = -\frac{1}{2}\varphi \quad \text{and} \quad \delta = \frac{1}{2}\pi - 2\pi N. \quad (6\text{p.})$$

($N = 0$ can be assumed throughout without loosing any physically relevant solution.)

b) The wavelength $\lambda = c/v = 11.1$ m, and the angle between directions A and B, $\varphi = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ$. The minimum distance between the rods is $a = 4.1$ m, while the direction of the symmetry line of the rods is $72^\circ + 42.5^\circ = 114.5^\circ$ measured from the north. (2 p.)

DRAFT COPY

Theoretical Problem 3

Part A

This part is concerned with the difficulties of detecting gravitational waves generated by astronomical events. It should be realised that the explosion of a distant supernova may produce fluctuations in the gravitational field strength at the surface of the Earth of about $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$. A model for a gravitational wave detector (see figure 3.1) consists of two metal rods each 1m long, held at right angles to each other. One end of each rod is polished optically flat and the other end is held rigidly. The position of one rod is adjusted so there is a minimum signal received from the photocell (see figure 3.1).

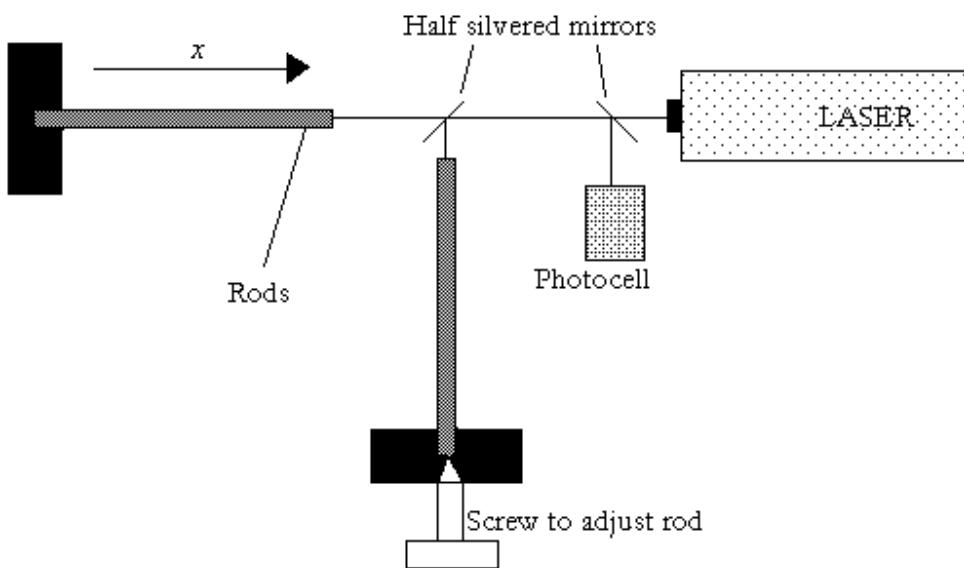


Figure 3.1

Figure 3.1

The rods are given a short sharp longitudinal impulse by a piezoelectric device. As a result the free ends of the rods oscillate with a longitudinal displacement Δx_t , where

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

and a, m, ω and f are constants.

- (a) If the amplitude of the motion is reduced by 20% during a 50s interval determine a value for m .
- (b) Given that longitudinal wave velocity, $v = \sqrt{E/\rho}$, determine also the lowest value for w , given that the rods are made of aluminium with a density (ρ) of 2700 kg.m^{-3} and a Young modulus (E) of $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- (c) It is impossible to make the rods exactly the same length so the photocell signal has a beat frequency of 0.005 Hz. What is the difference in length of the rods?
- (d) For the rod of length l , derive an algebraic expression for the change in length, Dl , due to a change, Dg , in the gravitational field strength, g , in terms of l and other constants of the rod material. The response of the detector to this change takes place in the direction of one of the rods.
- (e) The light produced by the laser is monochromatic with a wavelength of 656nm. If the minimum fringe shift that can be detected is 10^{-4} of the wavelength of the laser, what is the minimum value of l necessary if such a system were to be capable of detecting variations in g of $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Part B

This part is concerned with the effect of a gravitational field on the propagation of light in space.

(a) A photon emitted from the surface of the Sun (mass M , radius R) is red-shifted. By assuming a rest-mass equivalent for the photon energy, apply Newtonian gravitational theory to show that the effective (or measured) frequency of the photon at infinity is reduced (red-shifted) by the factor $(1 - GM/Rc^2)$.

(b) A reduction of the photon's frequency is equivalent to an increase in its time period, or, using the photon as a standard clock, a dilation of time. In addition, it may be shown that a time dilation is always accompanied by a contraction in the unit of length by the same factor.

We will now try to study the effect that this has on the propagation of light near the Sun. Let us first define an effective refractive index n_r at a point r from the centre of the Sun. Let

$$n_r = \frac{c}{c_r},$$

where c is the speed of light as measured by a co-ordinate system far away from the Sun's gravitational influence ($r \gg R$), and c_r is the speed of light as measured by a co-ordinate system at a distance r from the centre of the Sun.

Show that n_r may be approximated to:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

for small GM/rc^2 , where α is a constant that you determine.

(c) Using this expression for n_r , calculate in radians the deflection of a light ray from its straight path as it passes the edge of the Sun.

Data:

Gravitational constant, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Mass of Sun, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Radius of Sun, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Velocity of light, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

You may also need the following integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Solución

A a) $\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi)$, $0.8 = e^{-50\mu} \Rightarrow \mu = 4.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

b) $v = (E/\rho)^{1/2} = (7.1 \times 10^{10}/2700)^{1/2} = 5100 \text{ m.s}^{-1}$.
 At fundamental $\lambda_{rod} = 4l = 4 \text{ m}$.
 $f = 5100 / 4 = 1.3 \times 10^3 \text{ Hz}$.
 $\omega = 2\pi f = 8.1 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

c) $v = f\lambda_{rod}$, $\delta\lambda_{rod} / \lambda_{rod} = (-)\delta f / f \Rightarrow \delta l / l$.
 $\delta l = l \cdot (\delta f / f)$.

[0.6] $\delta l = 1 \times (5.0 \times 10^{-3}/1.3 \times 10^3) = 3.8 \times 10^{-6} \text{ m}$.

d) Change in gravitational force on rod at a distance x from the free end $= m\Delta g$ and $m = \rho x A$, where A is the cross-sectional area of the rod.
 Change in stress $= m\Delta g/A = \rho x \Delta g$.
 Change in strain $= \delta(dx)/dx = \rho x \Delta g/E$;
 that is, $dx \rightarrow (1 + \rho x \Delta g/E)dx \Rightarrow \Delta l = (\rho \Delta g/2E)l^2$.

e) At fundamental $\lambda_{rod} = 4l \Rightarrow \Delta l = \Delta\lambda_{rod}/4$,
 for $\Delta\lambda_{rod} = 656 \text{ nm}/10^4 \Rightarrow \Delta l = 656 \text{ nm}/(4 \times 10^4)$.
 $\Delta l = 656 \text{ nm}/(4 \times 10^4) = (\rho \Delta g/2E)l^2$
[0.1] $\Delta l = (2700 \times 10^{-19}/14 \times 10^{10})l^2 \Rightarrow l = 9.2 \times 10^7 \text{ m}$.

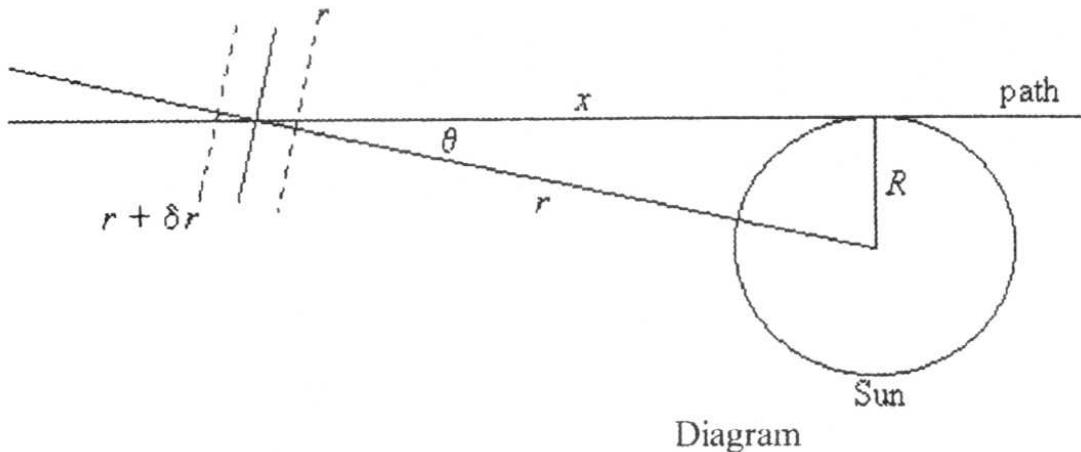
B a) $mc^2 = hf \Rightarrow m = hf/c^2$,

[0.3] $hf' = hf - GMm/R$,
 $\Rightarrow hf' = hf(1 - GM/Rc^2)$, $\therefore f' = f(1 - GM/Rc^2)$.

b) $n_r = c / c(1 - GM/rc^2)^2$,

$n_r = 1 + 2GM/rc^2$, for small GM/rc^2 ; i.e. $\alpha = 2$.

c)



Diagram

By Snell's law: $n(r + \delta r) \sin \theta = n(r) \sin (\theta - \delta\xi)$,

$$(n(r) + (dn/dr) \delta r) \sin \theta = n(r) \sin \theta - n(r) \cos \theta \delta\xi.$$

$$(dn/dr) \delta r \sin \theta = - n(r) \cos \theta \delta\xi.$$

Now $n(r) = 1 + 2GM/rc^2$, so $(dn/dr) = - 2GM/c^2r^2$,

and $(2GM/c^2r^2) \sin \theta \delta r = n(r) \cos \theta \delta\xi$.

Hence $\delta\xi = (2GM/c^2r^2) \tan \theta (\delta r/n) \approx (2GM \tan \theta /c^2r^2)\delta r$.

Now $r^2 = x^2 + R^2$, so $rdr = xdx$.

$$\int d\xi = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta dr}{r^2} = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta r dr}{r^3} = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\xi = \frac{4GM}{Rc^2} \text{ radians} = 8.4 \times 10^{-6} \text{ radians.}$$

Problema 1, Duración de una gota.

El propósito es estimar el tiempo de vida de una gota semiesférica de un líquido yaciendo sobre una muy delgada capa de vapor que está aislando térmicamente a la gota de la placa muy caliente que está debajo.

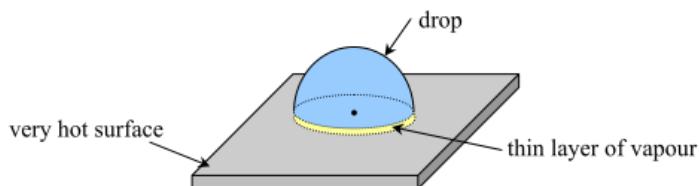


Figure 1

Aquí se asumirá que el flujo de vapor debajo de la gota es línea de corriente y se comporta como un fluido newtoniano con coeficiente de viscosidad η y conductividad térmica K . El calor latente de vaporización del líquido es l . Para un fluido newtoniano tenemos que el esfuerzo cortante es $\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dz}$, donde $\frac{dv}{dz}$ es la velocidad de corte, v es la velocidad de flujo, z es la distancia perpendicular a la dirección del flujo y F es la fuerza tangencial a la superficie A .

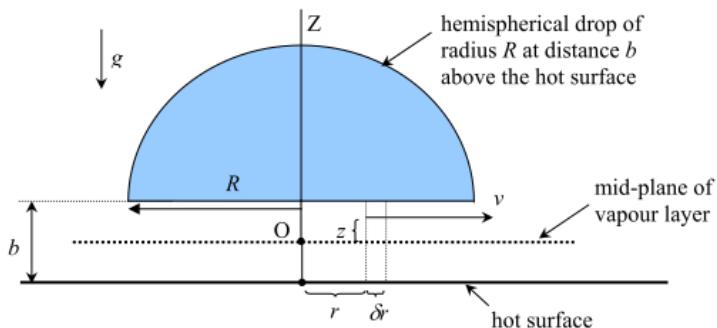


Figure 2

v es la velocidad del vapor en la dirección radial a una altura z por encima del plano medio. La presión P dentro del vapor debe ser mayor cerca del centro O . Esto resultará en el desbordamiento del vapor y de la fuerza que sostiene a la gota contra el empuje de la gravedad. El grosor de la capa delgada de vapor debajo de la gota, en equilibrio térmico y mecánico, es b .

Para un flujo newtoniano de vapor podemos aproximar que

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z}{\eta} \frac{dP}{dz} \quad (1)$$

- 3.1) Demuestre que $v(z) = \frac{z^2}{2\eta} \frac{dP}{dr} + C$ donde C es una constante arbitraria de integración. (0.5 puntos)

- 3.2)** Referente a la Figura 2, encuentre el valor de C en términos de η , $\frac{dP}{dr}$, y b usando la condición de frontera $v = 0$ para $z = \pm\frac{b}{2}$. (0.5 puntos)
- 3.3)** Calcule el ritmo de flujo de volumen de vapor a través de la superficie cilíndrica definida por r . (Sugerencia: El cilindro es de radio r y altura b debajo de la gota.) (1.0 puntos)
- 3.4)** Asumiendo que el ritmo de producción de vapor con densidad ρ_V se debe al flujo de calor desde la superficie caliente hasta la gota, encuentre la expresión para la presión $P(r)$. Use P_a para representar la presión atmosférica y use ΔT para la diferencia de temperaturas entre la superficie caliente y la gota. Asuma que el sistema ha alcanzado el estado estacionario. (2.0 puntos)
- 3.5)** Calcule el valor de b igualando el peso de la gota con la fuerza neta debido a la diferencia de presión las partes de arriba y de abajo de la gota. La densidad de la gota es ρ_0 . (2.0 puntos)
- 3.6)** ¿Cuál es el ritmo total de vaporización? (2.0 puntos)
- 3.7)** Asuma que la gota mantiene una forma semiesférica, ¿cuál es el tiempo de vida de la gota? (2.0 puntos)

Problema 2, Detección de ondas gravitacionales.

Parte A

Esta parte tiene que ver con las dificultades de la detección de ondas gravitacionales generadas por eventos astronómicos. Debe tenerse en cuenta que la explosión de una supernova distante puede producir fluctuaciones en la intensidad del campo gravitacional en la superficie de la Tierra de unos $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$. Un modelo para un detector de ondas gravitacionales (ver figura 3.1) consta de dos varillas de metal de 1 m cada uno, que forman ángulos rectos entre sí. Un extremo de cada varilla se pule de manera que su superficie es ópticamente plana y el otro extremo se mantiene rígidamente. La posición de una varilla se ajusta de modo que haya una señal mínima recibida desde la fotocelda (véase la figura 3.1). A las varillas se les da un “corto impulsor” de forma longitudinal por un dispositivo piezoelectrónico. Como resultado, los extremos libres de las varillas oscilan con un desplazamiento longitudinal Δx_t , donde

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t - \phi) \quad (2)$$

a, μ, ω, ϕ son constantes.

- (a) Si la amplitud del movimiento se reduce en un 20 % durante un intervalo de 50 s, determinar un valor para m .
- (b) Dado que la velocidad de la onda longitudinal, $v = (E/\rho)^{1/2}$, determinar también el valor más bajo para ω , teniendo en cuenta que las varillas están hechas de aluminio, con una densidad ρ de 2700 kg m^{-3} y un módulo de Young E de $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- (c) Es imposible hacer las barras de exactamente la misma longitud así que la señal de la fotocelda tiene una frecuencia de batido (*beat frequency*) de 0.005 Hz. ¿Cuál es la diferencia en la longitud de las varillas?
- (d) Para la varilla de longitud l , calcular una expresión algebraica para el cambio de longitud, Δl , debido a un cambio, Δg , en la intensidad del campo gravitacional g , en términos de l y otras constantes del material de la varilla. La respuesta del detector a este cambio tiene lugar en la dirección de una de las varillas.
- (e) La luz producida por el láser es monocromática con una longitud de onda de 656 nm. Si el tamaño de la franja mínima (*fringe shift*) -en el patron de interferencia- que puede ser detectada es 10^{-4} veces la longitud de onda del láser, ¿Cuál es el valor mínimo necesario de l para que el sistema sea capaz de detectar variaciones en g del orden de $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Parte B

Esta parte se refiere a los efectos de un campo gravitatorio sobre la propagación de la luz en el espacio.

- (a) Un fotón emitido desde la superficie del Sol(masa M , radio R) es desplazado hacia el rojo (*red-shifted*). Al asumir un equivalente de masa en reposo de la energía del fotón, aplicar la teoría gravitacional de Newton para demostrar que la frecuencia efectiva (o medida) de los fotones en el infinito se reduce (desplazamiento hacia el rojo) por el factor $(1 - GM/Rc^2)$.
- (b) Una reducción de la frecuencia del fotón es equivalente a un incremento en el período de tiempo, o, utilizando el fotón como un reloj estándar, una dilatación de tiempo. Además, puede demostrar que una dilatación del tiempo está siempre acompañada por una contracción en la unidad de longitud por el mismo factor.

Ahora vamos a tratar de estudiar el efecto que esto tiene sobre la propagación de la luz cerca del sol. Vamos a definir en primer lugar un índice de refracción eficaz n_r en un punto r desde el centro del sol.

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \quad (3)$$

donde c es la velocidad de la luz medida por un sistema de coordenadas muy lejos de la influencia gravitatoria del Sol $r \rightarrow \infty$, y c'_r es la velocidad de la luz medida por un sistema de coordenadas a una distancia r de la el centro del sol.

Muestra que n_r puede aproximarse como

$$n_r = 1 + \frac{aGM}{rc^2} \quad (4)$$

para valores pequeños de GM/rc^2 , donde a es una constante que debes determinar.

- (c) Utilizando esta expresión para n_r , calcular en radianes la desviación de un rayo de luz de su camino recto a medida que pasa el borde del sol.

Datos:

1. Constante gravitacional, $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
2. Masa del Sol, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.
3. Radio del Sol, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.
4. Velocidad de la luz $c = 299,792,458 \text{ m/s} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Puede necesitar también la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2} \quad (5)$$

Problema 3, Lanzamiento de una sonda espacial.

En un proyecto de investigación espacial de dos sistemas de lanzamiento de una sonda espacial fuera del sistema solar son discutidos. El primer esquema (i) es para lanzar la sonda con una velocidad suficientemente grande como para escapar del sistema solar directamente. De acuerdo con la segunda (ii), la sonda debe acercarse a uno de los planetas exteriores, y con su ayuda cambiar su dirección de movimiento y alcanzar la velocidad necesaria para escapar del sistema solar. Supongamos que la sonda se mueve solo en el campo gravitatorio del sol o un planeta, dependiendo de cual campo es más fuerte en ese punto.

- a) Determinar la velocidad mínima y su dirección con respecto al movimiento de la Tierra que se debe dar a la sonda en el lanzamiento de acuerdo con el esquema (i).
- b) Supongamos que la sonda ha sido lanzada en la dirección determinada en a), pero con otra velocidad. Determine la velocidad de la sonda cuando cruza la órbita de Marte, es decir, sus componentes paralelos y perpendiculares con respecto a esta órbita. Marte no está cerca del punto de cruce, cuando se produce el cruce.
- c) La sonda entra en el campo gravitacional de Marte. Encontrar la velocidad mínima de lanzamiento desde la Tierra necesaria para que la sonda escape del sistema solar.
Ayuda: A partir del resultado a) conoces la magnitud óptima y la dirección de la velocidad de la sonda que es necesaria para escapar del sistema solar después de salir del campo gravitatorio de Marte. (Usted no tiene que preocuparse de la posición exacta de Marte durante el encuentro). Hallar la relación entre esta velocidad y los componentes de la velocidad antes de que la sonda entre en el campo gravitacional de Marte; es decir, los componentes determinados en b). ¿Qué pasa con la conservación de la energía de la sonda?
- d) Estimar el máximo ahorro posible fraccionaria de energía en el esquema (ii) con respecto al esquema de (i).

Notas:

Se supone que todos los planetas giran alrededor del Sol en círculos, en la misma dirección y en el mismo plano.

Despreciar la resistencia del aire, la rotación de la tierra alrededor de su eje, así como la energía utilizada en escapar de campo gravitatorio de la Tierra.

Datos:

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol es de 30 km/s, y la razón de las distancias de la Tierra y Marte al Sol es de 2/3.

The Leidenfrost Phenomenon

The purpose is to estimate the lifetime of a (hemispherical) drop of a liquid sitting on top of a very thin layer of vapour which is thermally insulating the drop from the very hot plate below.

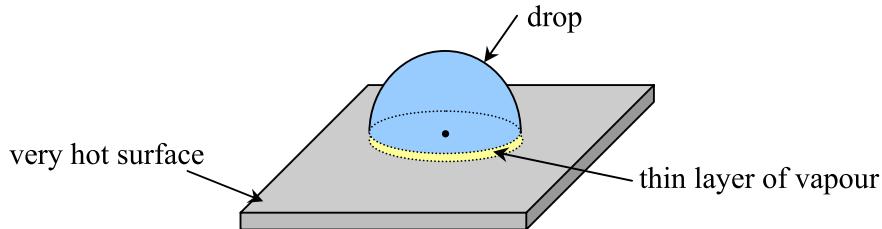


Figure 1

It will be assumed here that the flow of vapour underneath the drop is streamline and behaves as a Newtonian fluid of viscosity coefficient η and of thermal conductivity \mathcal{K} . The specific latent heat of vaporization of the liquid is ℓ . And for a Newtonian fluid we have the shear stress $\frac{F}{A} = \eta \times$ the rate of shear $\frac{dv}{dz}$ where v is the flow velocity and z is the perpendicular distance to the direction of flow, and the direction of F is tangential to the surface area A .

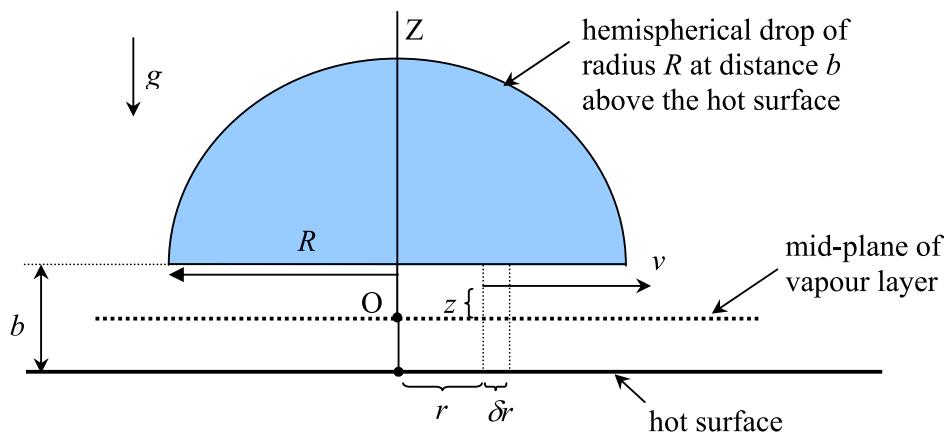


Figure 2

v is the velocity of vapour in the radial direction at the height z above the mid-plane. The pressure P inside the vapour must be higher towards the centre O. This will result in the out-flowing of

vapour and in force that holds the drop against the pull of gravity. The thickness of vapour layer under thermal and mechanical equilibria is b .

For a Newtonian flow of vapour we can approximate that

$$\frac{d}{dz}v = \frac{z}{\eta} \frac{d}{dr}P$$

3.1) Show that $v(z) = \frac{z^2}{2\eta} \frac{d}{dr}P + C$

where C is an arbitrary constant of integration. (0.5 point)

3.2) Refer to figure 2, find the value of C in terms of $\eta, \frac{d}{dr}P$, and b using the boundary condition

$$v=0 \text{ for } z=\pm\frac{b}{2}. \quad (0.5 \text{ point})$$

3.3) Calculate the volume rate of flow of vapour through the cylindrical surface defined by r .
(Hint: the cylinder is of radius r and of height b underneath the drop). (1.0 point)

3.4) By assuming that the rate of production of vapour of density ρ_v is due to heat flow from the hot surface to the drop, find the expression for the pressure $P(r)$. Use P_a to represent the atmospheric pressure, and use ΔT for the temperature difference between those of the hot surface and of the drop. Assume that the system has reached the steady state. (2.0 points)

3.5) Calculate the value of b by equating the weight of the drop to the net force due to pressure difference between the bottom and the top of the drop. The density of the drop is ρ_0 .
(2.0 points)

3.6) Now, what is the total rate of vaporization? (2.0 points)

3.7) Assume that the drop maintains a hemispherical shape, what is the life-time of the drop?
(2.0 points)

DRAFT COPY

Theoretical Problem 3

Part A

This part is concerned with the difficulties of detecting gravitational waves generated by astronomical events. It should be realised that the explosion of a distant supernova may produce fluctuations in the gravitational field strength at the surface of the Earth of about $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$. A model for a gravitational wave detector (see figure 3.1) consists of two metal rods each 1m long, held at right angles to each other. One end of each rod is polished optically flat and the other end is held rigidly. The position of one rod is adjusted so there is a minimum signal received from the photocell (see figure 3.1).

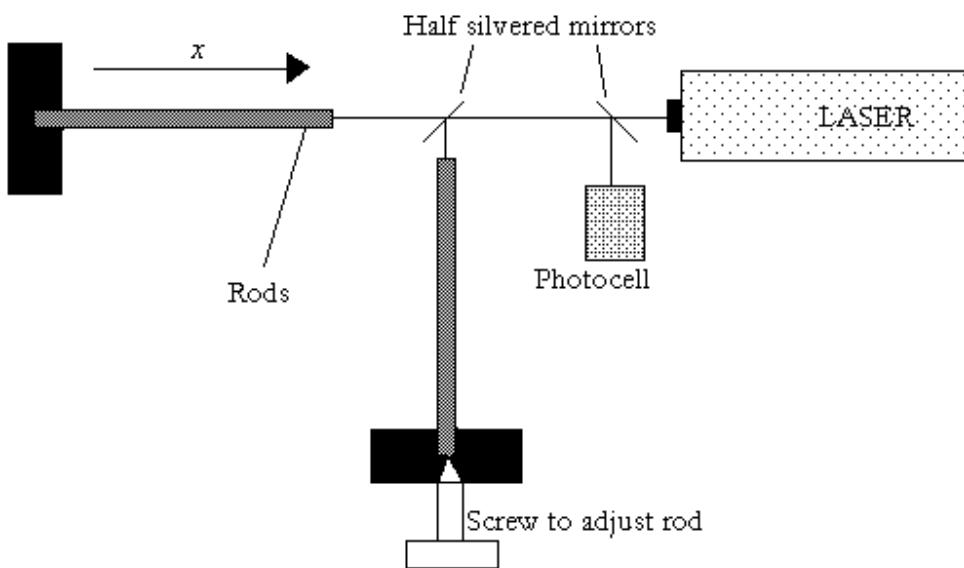


Figure 3.1

Figure 3.1

The rods are given a short sharp longitudinal impulse by a piezoelectric device. As a result the free ends of the rods oscillate with a longitudinal displacement Δx_t , where

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

and a, m, ω and f are constants.

- (a) If the amplitude of the motion is reduced by 20% during a 50s interval determine a value for m .
- (b) Given that longitudinal wave velocity, $v = \sqrt{E/\rho}$, determine also the lowest value for w , given that the rods are made of aluminium with a density (ρ) of 2700 kg.m^{-3} and a Young modulus (E) of $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- (c) It is impossible to make the rods exactly the same length so the photocell signal has a beat frequency of 0.005 Hz. What is the difference in length of the rods?
- (d) For the rod of length l , derive an algebraic expression for the change in length, Dl , due to a change, Dg , in the gravitational field strength, g , in terms of l and other constants of the rod material. The response of the detector to this change takes place in the direction of one of the rods.
- (e) The light produced by the laser is monochromatic with a wavelength of 656nm. If the minimum fringe shift that can be detected is 10^{-4} of the wavelength of the laser, what is the minimum value of l necessary if such a system were to be capable of detecting variations in g of $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Part B

This part is concerned with the effect of a gravitational field on the propagation of light in space.

(a) A photon emitted from the surface of the Sun (mass M , radius R) is red-shifted. By assuming a rest-mass equivalent for the photon energy, apply Newtonian gravitational theory to show that the effective (or measured) frequency of the photon at infinity is reduced (red-shifted) by the factor $(1 - GM/Rc^2)$.

(b) A reduction of the photon's frequency is equivalent to an increase in its time period, or, using the photon as a standard clock, a dilation of time. In addition, it may be shown that a time dilation is always accompanied by a contraction in the unit of length by the same factor.

We will now try to study the effect that this has on the propagation of light near the Sun. Let us first define an effective refractive index n_r at a point r from the centre of the Sun. Let

$$n_r = \frac{c}{c_r},$$

where c is the speed of light as measured by a co-ordinate system far away from the Sun's gravitational influence ($r \gg R$), and c_r is the speed of light as measured by a co-ordinate system at a distance r from the centre of the Sun.

Show that n_r may be approximated to:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

for small GM/rc^2 , where α is a constant that you determine.

(c) Using this expression for n_r , calculate in radians the deflection of a light ray from its straight path as it passes the edge of the Sun.

Data:

Gravitational constant, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Mass of Sun, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Radius of Sun, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Velocity of light, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

You may also need the following integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Solución

A a) $\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi)$, $0.8 = e^{-50\mu} \Rightarrow \mu = 4.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

b) $v = (E/\rho)^{1/2} = (7.1 \times 10^{10}/2700)^{1/2} = 5100 \text{ m.s}^{-1}$.

At fundamental $\lambda_{rod} = 4l = 4 \text{ m}$.

$$f = 5100 / 4 = 1.3 \times 10^3 \text{ Hz.}$$

$$\omega = 2\pi f = 8.1 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

c) $v = f\lambda_{rod}$, $\delta\lambda_{rod} / \lambda_{rod} = (-)\delta f / f \Rightarrow \delta l / l$.

$$\delta l = l \cdot (\delta f / f)$$

[0.6]

$$\delta l = 1 \times (5.0 \times 10^{-3} / 1.3 \times 10^3) = 3.8 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

d) Change in gravitational force on rod at a distance x from the free end = $m\Delta g$ and $m = \rho x A$, where A is the cross-sectional area of the rod.

$$\text{Change in stress} = m\Delta g/A = \rho x \Delta g.$$

$$\text{Change in strain} = \delta(dx)/dx = \rho x \Delta g/E;$$

$$\text{that is, } dx \rightarrow (1 + \rho x \Delta g/E)dx \Rightarrow \Delta l = (\rho \Delta g/2E)l^2.$$

e) At fundamental $\lambda_{rod} = 4l \Rightarrow \Delta l = \Delta\lambda_{rod}/4$,

$$\text{for } \Delta\lambda_{rod} = 656 \text{ nm}/10^4 \Rightarrow \Delta l = 656 \text{ nm}/(4 \times 10^4).$$

$$\Delta l = 656 \text{ nm}/(4 \times 10^4) = (\rho \Delta g/2E)l^2$$

[0.1]

$$\Delta l = (2700 \times 10^{-19} / 14 \times 10^{10}) l^2 \Rightarrow l = 9.2 \times 10^7 \text{ m.}$$

B a) $mc^2 = hf \Rightarrow m = hf/c^2$,

[0.3]

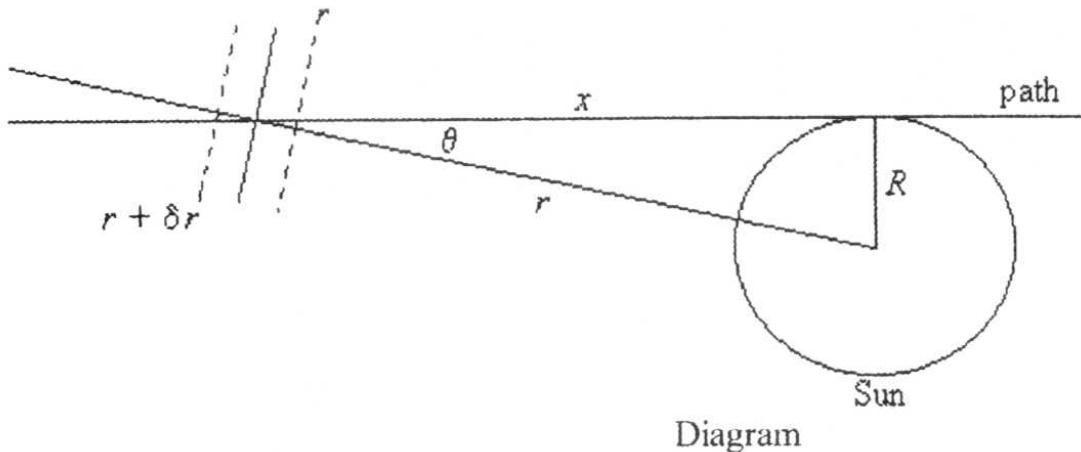
$$hf' = hf - GMm/R,$$

$$\Rightarrow hf' = hf(1 - GM/Rc^2), \therefore f' = f(1 - GM/Rc^2).$$

b) $n_r = c / c(1 - GM/rc^2)^2$,

$$n_r = 1 + 2GM/rc^2, \text{ for small } GM/rc^2; \text{ i.e. } \alpha = 2.$$

c)



Diagram

By Snell's law: $n(r + \delta r) \sin \theta = n(r) \sin (\theta - \delta \xi)$,

$$(n(r) + (dn/dr) \delta r) \sin \theta = n(r) \sin \theta - n(r) \cos \theta \delta \xi.$$

$$(dn/dr) \delta r \sin \theta = -n(r) \cos \theta \delta \xi.$$

Now $n(r) = 1 + 2GM/rc^2$, so $(dn/dr) = -2GM/c^2r^2$,

and $(2GM/c^2r^2) \sin \theta \delta r = n(r) \cos \theta \delta \xi$.

Hence $\delta \xi = (2GM/c^2r^2) \tan \theta (\delta r/n) \approx (2GM \tan \theta /c^2r^2)\delta r$.

Now $r^2 = x^2 + R^2$, so $rdr = xdx$.

$$\int d\xi = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta dr}{r^2} = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta r dr}{r^3} = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\xi = \frac{4GM}{Rc^2} \text{ radians} = 8.4 \times 10^{-6} \text{ radians.}$$

Problem 3

In a space research project two schemes of launching a space probe out of the Solar system are discussed. The first scheme (i) is to launch the probe with a velocity large enough to escape from the Solar system directly. According to the second one (ii), the probe is to approach one of the outer planets, and with its help change its direction of motion and reach the velocity necessary to escape from the Solar system. Assume that the probe moves under the gravitational field of only the Sun or the planet, depending on whichever field is stronger at that point.

- a) Determine the minimum velocity and its direction relative to the Earth's motion that should be given to the probe on launching according to scheme (i).
- b) Suppose that the probe has been launched in the direction determined in a) but with another velocity. Determine the velocity of the probe when it crosses the orbit of Mars, i. e., its parallel and perpendicular components with respect to this orbit. Mars is not near the point of crossing, when crossing occurs.
- c) Let the probe enter the gravitational field of Mars. Find the minimum launching velocity from the Earth necessary for the probe to escape from the Solar system.

Hint: From the result a) you know the optimal magnitude and the direction of the velocity of the probe that is necessary to escape from the Solar system after leaving the gravitational field of Mars. (You do not have to worry about the precise position of Mars during the encounter.) Find the relation between this velocity and the velocity components before the probe enters the gravitational field of Mars; i. e., the components you determined in b). What about the conservation of energy of the probe?

- d) Estimate the maximum possible fractional saving of energy in scheme (ii) with respect to scheme (i). Notes: Assume that all the planets revolve round the Sun in circles, in the same direction and in the same plane. Neglect the air resistance, the rotation of the Earth around its axis as well as the energy used in escaping from the Earth's gravitational field.

Data: Velocity of the Earth round the Sun is 30 km/s, and the ratio of the distances of the Earth and Mars from the Sun is 2/3.