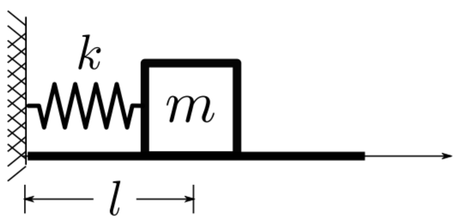
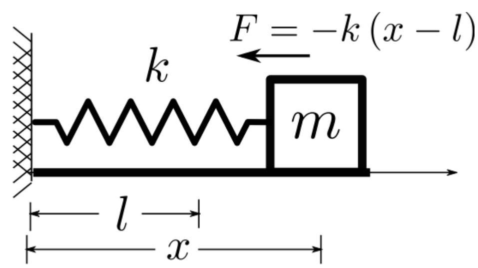
Tarea 4

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: 2 marzo 2016

Problema 14 oscilador armónico.





Considera un bloque de masa m que se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento y esta sujeto a un resorte de constante elástica k. En su posición de equilibrio el resorte tiene longitud l. Cuando se desplaza el bloque desde su posición de equilibrio el resorte se estira (o comprime) y ejerce una fuerza sobre el bloque que es proporcional a la distancia que se desplaza el bloque y en dirección contraria al desplazamiento del bloque (sin sobrepasar el límite elástico del resorte), esto es la ley de Hooke.

$$F = -k\,(x - l) \tag{1}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton $F = ma$, como la aceleración es la segunda derivada respecto del tiempo de la posición, entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$ma = -k\,(x - l) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,(x - l) = 0 \tag{2}$$

Formalmente la última expresión es una *ecuación diferencial de segundo orden*; es decir, se trata de una ecuación donde la incógnita es la función . Al encontrar explícitamente la posición como función del tiempo $x\,(t)$ se ha resuelto la ecuación diferencial. Es una ecuación diferencial de segundo orden porque la derivada de más alto orden es la segunda derivada de la función incógnita (sería de primer orden si contuviera la primer derivada y así en general).

En física la ecuación ecuación diferencial del tipo (2) se le conoce como de *oscilador armónico* porque su solución varía periódicamente en el tiempo, se dice que es un *movimiento armónico simple.* A veces se suele simplificar y hacer $l = 0$, entonces la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

La solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico se puede escribir de diferentes maneras pero todas equivalentes, una de ellas es la siguiente:

$$x\,(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{4}$$

La solución de una ecuación diferencial de segundo orden requiere dos constantes (las de primer orden requieren solo una constante), en este caso A y B, cuyo valor esta determinado por la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0, es decir al tiempo $t = 0$. La frecuencia angular de oscilación es ω

1. Sustituye la solución (4) en la ecuación diferencial (3) y encuentra el valor de la frecuencia angular ω en términos de los parámetros k y m.

2. En ocasiones es conveniente escribir la solución (4) de la siguiente manera:

$$x(t) = D \sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

donde ahora D y ϕ son las constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales. En este caso D es la amplitud de oscilación y ϕ es una fase inicial del movimiento. Comparando ambas soluciones (4) y (5), encuentra las relaciones que deben satisfacer las constantes de ambas soluciones A, B con D, ϕ.

3. Considera el movimiento de un bloque de masa m sujeto a un resorte que al tiempo $t = 0$ se suelta en la posición x_0 con velocidad v_0. Determina en este caso las constantes A y B de la solución (4), así como las constantes D y ϕ de la solución (5) en términos de los parámetros iniciales x_0 y v_0 (y de la frecuencia de oscilación).

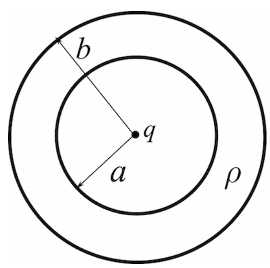
4. Determina la energía total del bloque y verifica que se conserva, es decir que es constante en el tiempo.

5. Si se conocen las condiciones del bloque en dos puntos diferentes; es decir, si el bloque se encuentra en la posición x_1 con velocidad v_1 y en la posición x_2 su velocidad es v_2, encuentra bajo estas condiciones la frecuencia angular y la amplitud del movimiento.

6. Cómo cambia la solución (4) cuando la longitud de equilibrio del resorte no es cero, es decir $l \neq 0$.

Problema 15 electrostática.

15.1 Una carga eléctrica q se encuentra ubicada en el centro de un cascarón esférico de radio interior a y radio exterior b. El cascarón contiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ.



a) Determina el campo eléctrico, tanto en magnitud como en dirección, del sistema en un punto a la distancia r medida desde el centro del cascarón para todos los valores de r: dentro del cascarón ($r < a$), en el interior del cascarón ($a < r < b$) y fuera del cascarón ($b < r$)

b) Haz una gráfica en papel milimétrico de la intensidad del campo eléctrico como función de la distancia r indicando las unidades así como la escala empleada (etiqueta correctamente los ejes). Emplea los puntos que consideres pertinentes para poder apreciar el comportamiento de la gráfica. Considera los siguientes valores: $\rho = 4$ nC/m^3, $q = 2$ nC, $a = 2$ m, $b = 2a$

(permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m).

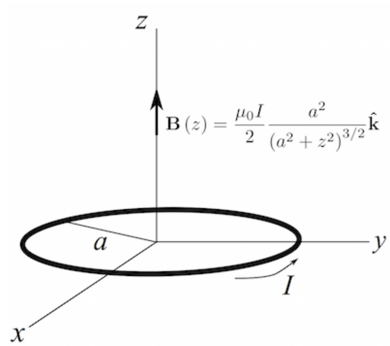
c) Determina el potencial eléctrico $V(r)$ en todos los puntos del espacio (de la misma forma que el inciso anterior), considera que el potencial eléctrico muy lejos es cero $V(r \to \infty) = 0$.

d) Haz una gráfica del potencial $V(r)$ como función de r considerando las misma indicaciones y datos del inciso b.

e) Ahora considera que el cascarón esta hecho de material conductor y esta libre de cargas, responde para este caso todos los incisos anteriores.

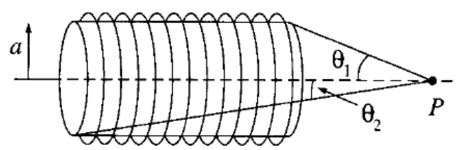
15.2 El campo campo magnético producido por una espira circular de radio a que conduce una corriente I a lo largo del eje z, como se muestra en la figura, tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} \tag{6}$$



donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ NA^{-2} es la permeabilidad magnética del vacío.

A partir de la expresión (6) calcula el campo magnético en un punto P sobre el eje de un solenoide que esta formado por una densidad de n espiras por unidad de longitud. El solenoide tiene forma cilíndrica de radio a. Expresa tu respuesta en términos de los ángulos θ_1 y θ_2 que están indicados en la figura.



15.3 Dos esferas pequeñas con cargas iguales y masas m se cuelgan de hilos (aislantes) de longitud l a un mismo punto. La distancia entre ellas es mucho menor que la longitud de los hilos ($x \ll l$). Suponga que las esferas por algún motivo se descargan con una tasa dq/dt de tal manera que las cargas se acercan con una velocidad $v = a/\sqrt{v}$, determina entonces la tasa con que las esferas se descargan.

15.4 Una espira circular de radio R tiene una carga, cuya densidad lineal es: $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, donde λ_0 es una constante y φ es el ángulo azimutal. Determina el campo eléctrico en el centro de la espira y en un punto sobre el eje de la espira; analiza la expresión obtenida para $x \gg R$.

15.5 Considera una esfera de radio R con una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, donde σ_0 es una constante positiva y θ es el ángulo polar. Haz un dibujo representando la esfera y el signo de la carga distribuida sobre su superficie, de alguna manera indica la densidad de carga sobre la superficie, esto para que te des una idea de como esta distribuida la carga sobre la superficie.

Demuestra que esta distribución de carga puede ser representada por dos esferas de radio R, separadas una pequeña distancia a en la dirección z, y que están cargadas uniformemente, cuyas cargas son iguales en magnitud pero de signo contrario y Empleando esta analogía, determina el vector del campo eléctrico dentro de la esfera.

Hint: Cuál debe ser el valor de a en términos de las densidades de carga; el campo eléctrico va en la dirección z.

Problema 16 identidades trigonométricas.

Usando las siguientes formulas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{7}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{8}$$

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{ángulo doble} \qquad \begin{cases} \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases} \tag{9}$$

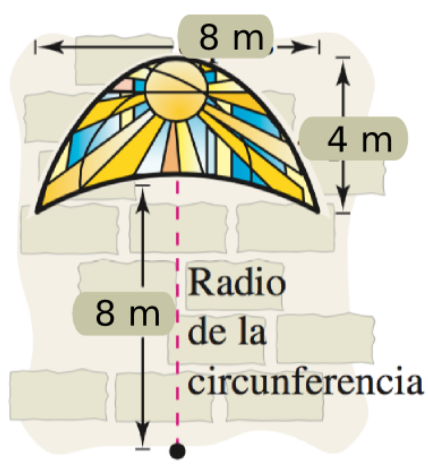
$$\text{ángulo mitad} \qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} \\ \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{producto} \Rightarrow \text{suma} \qquad \begin{cases} \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big] \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big] \\ \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big] \end{cases} \tag{11}$$

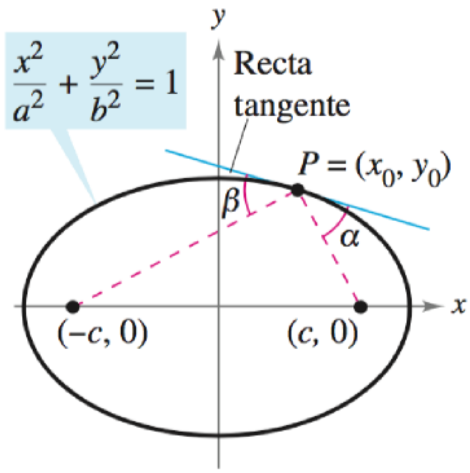
$$\text{suma} \Rightarrow \text{producto} \qquad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases} \tag{12}$$

Problema 17 varios.

17.1 El ventanal de una iglesia está limitado en la parte superior por una parábola, y en la parte inferior por el arco de una circunferencia (ver la figura). Hallar el área de la superficie del ventanal.



17.2 Demostrar que la recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas a través de P y de los focos (ver la figura), es decir demostrar que $\alpha = \beta$.



17.3 Dada una curva $y(x)$ la longitud de arco en el intervalo $[x_a, x_b]$ esta dada por la siguiente integral:

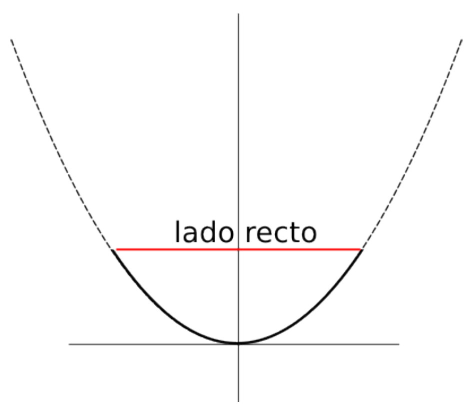
$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{13}$$

a) Demuestra que el perímetro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ esta dada por la siguiente integral:

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}\, d\theta \tag{14}$$

donde e es la excentricidad de la elipse.

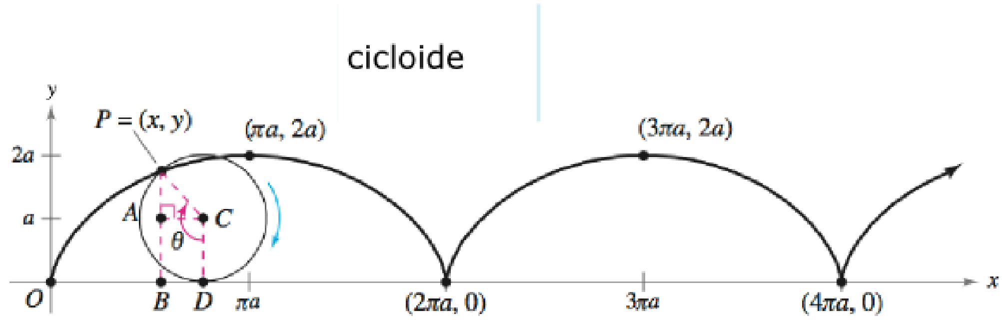
b) Determinar la longitud del arco parabólico intersecado por el lado recto.



c) Si la curva $y(x)$ esta dada de forma paramétrica por: $x(t)$, $y(t)$. Demuestra que la longitud de arco en el intervalo $a \leq t \leq b$ esta dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{15}$$

d) Un disco de radio a rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. La curva trazada por un punto P que se encuentra en el extremo del disco se denomina cicloide. Empleando el ángulo θ, ver figura, encuentra las ecuaciones paramétricas de la curva y determina el perímetro de la cicloide en el intervalo θ: $[0, 2\pi]$.



e) Una cinta magnetofónica de 0.001 pulgada de espesor se enrolla en una bobina cuyo radio interior mide 0.5 pulgada y cuyo radio exterior mide 2 pulgadas, ver figura. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar la bobina?, describe las suposiciones que haces.