Tarea 2

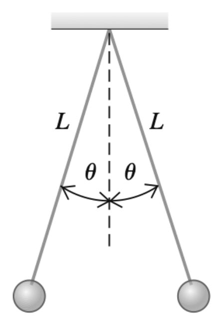
Olimpiada Mexicana de Física, SMF — Entrenamiento 2015
Fecha de entrega: lunes 9 de febrero 2015

Problema 4, electrostática

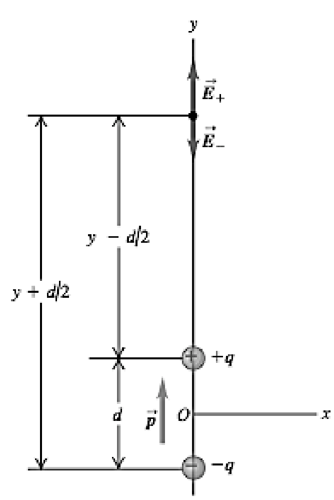
1.1) En un universo paralelo la fuerza eléctrica tiene las mismas propiedades que en el nuestro pero no hay gravedad. En este Universo el Sol tiene una carga Q, la Tierra tiene una carga $2Q$, y la atracción eléctrica entre ellos mantiene a nuestro planeta en órbita. La Tierra en el Universo paralelo tiene la misma masa, el mismo radio orbital, y el mismo periodo orbital que en nuestro Universo. Calcule el valor de Q.

1.2) Dos esferas idénticas de masa m cuelgan de dos cuerdas de longitud L. Cada esfera tiene la misma carga q. Suponiendo que el radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre las esferas y el ángulo θ es pequeño, demuestra entonces la separación de equilibrio entre las esferas es:

$$d = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 m g}\right)^{1/3} \qquad (1)$$



1.3) Dos cargas de signo contrario están colocadas a lo largo del eje y, separadas por una distancia d, como se muestra en la figura de abajo. Calcula la componente vertical del campo eléctrico E_y, a la distancia y desde el origen, producido por el par de cargas (emplea el sistema de ejes descrito en la figura). Verifica que cuando la distancia y es muy grande, comparada con la distancia de separación entre las cargas ($y \gg d$), el campo eléctrico se reduce a la expresión: $E_y = \dfrac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$, donde $p = qd$ es la magnitud del dipolo eléctrico del par de cargas.



Problema 5, campo eléctrico

En general es complicado calcular el campo eléctrico de una distribución de carga arbitraria[1] -a veces conviene emplear la ley de Gauss, que revisaremos más adelante-. Pero hay ciertos ejemplos básicos sencillos de calcular y que deben conocer.

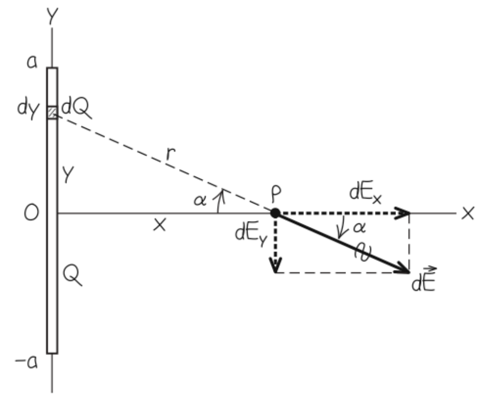
Ejemplo: **campo eléctrico de una linea recta** (una varilla con carga Q de longitud $2a$). La geometría del problema se especifica en la siguiente figura.

densidad lineal de carga : $\lambda = \dfrac{dQ}{dy} \quad \Rightarrow \quad dQ = \lambda dy$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

diferencial del campo producido por la diferencial de carga $dQ = \lambda dy$:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}$$



Integrado sobre toda la longitud de la varilla se obtiene el campo eléctrico en cada una de las componentes:

$$E_x = \int dE\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}\cos\alpha \qquad E_y = -\int dE\,\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}\sin\alpha \tag{3}$$

Se aprovecha la simetría de la configuración de carga, en este caso si se calcula el campo sobre el eje de simetría de la varilla, las componentes verticales (paralelas al eje y) se anulan. La componente x del campo resultante esta dada por:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\, dy}{(x^2+y^2)}\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{x\, dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} \tag{4}$$

Límites:

- Cuando el punto P esta muy lejano $(a \ll x) \Rightarrow E_x = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{x^2}$, el campo eléctrico es como el de una carga puntual.
- En el límite cuando la varilla es muy larga $(a \to \infty)$ el campo se reduce a la expresión: $E_x = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda}{x}$ (verifícalo)

2.1) Calcular la integral $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x\, dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ y verificar el resultado final de la ecuación (4).

2.2) Dos varillas delgadas de longitud L están a lo largo del eje x, entre $x = a/2$ y $x = a/2 + L$ y la otra entre $x = -a/2$ y $x = -a/2 - L$

Cada varilla tiene carga positiva Q distribuida uniformemente en toda su longitud.

a) Calcula el campo eléctrico producido por la segunda varilla en puntos a lo largo del eje x positivo

b) Demuestre que la magnitud de la fuerza que ejerce una varilla sobre la otra es

[1] El campo eléctrico de una distribución de carga arbitraria se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dQ}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2}$$

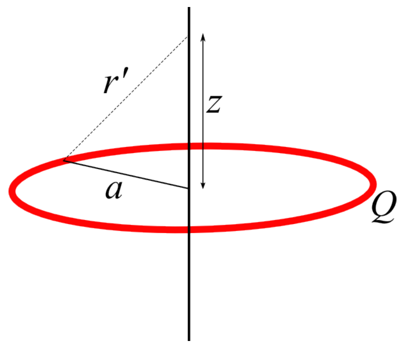
donde $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ es la distancia entre la fuente de carga en la posición $\mathbf{r}'$ hasta el punto donde se calcula el campo $\mathbf{r}$, dQ es la diferencial de carga de las fuente y $1/4\pi\epsilon_0 = 9.00\times10^9$ m/F es una constante del sistema MKS.

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{(a+L)^2}{a\,(a+2L)}\right] \tag{5}$$

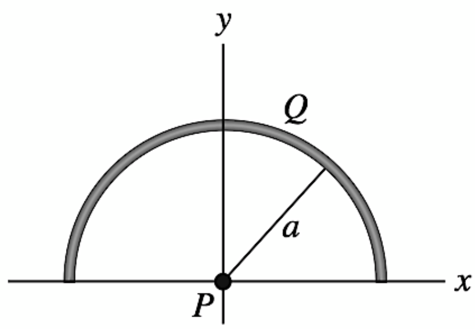
c) Demuestra que cuando $a \gg L$, la fuerza se reduce a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. Interpreta este resultado.

Sugerencia, usa la expansión $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$ válida para $|z| \ll 1$ ()

2.3) Para un anillo de radio a y carga total Q, calcular el campo eléctrico sobre el eje del anillo. Suponer que la carga esta distribuida de manera uniforme en el anillo. Verifica que cuando la distancia z es muy grande, en comparación con el radio del anillo, el campo eléctrico del anillo se reduce al de una carga puntal: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}$



2.4) Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un semicírculo de radio a. Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el centro de curvatura P.



2.5) Un disco de radio R tiene una carga total Q distribuida uniformemente. El disco se está colocado en el plano $x-y$, con su centro en el origen de coordenadas. Encuentra el campo eléctrico en un punto z a los largo del eje del disco.

Problema 6, ejercicios de calculo.

Realiza los siguientes ejercicios:

a) Si $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2+2}$, calcular: $\frac{dy}{dx}$

b)Un punto se mueve sobre la curva $y = -x^2 + 3x + 5$, de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$, calcula la magnitud de la velocidad en el instante $t = 4$.

c)De un embudo cónico ("boca abajo") sale agua a razón de $1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Sabiendo que el radio de la base es de 4 cm y la altura de 8 cm, calcular el descenso del nivel en la unidad de tiempo en el instante en que la superficie del agua se encuentra a 2 cm de la base del embudo.

d)La arista inferior de un cartel de 12 m de altura, está situada a 6 m por encima de los ojos de un observador. Suponiendo que la visión más favorable se obtiene cuando el ángulo subtendido por el cartel y los ojos es máximo. Calcular la distancia de la pared a la que debe situar el observador.