

**XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA**  
**Durango 17-21 de noviembre de 2013**  
**Prueba teórica, Solución.**



**Problema 1 Densidad del Sol**

**(10 puntos)**

Uno de los experimentos más importantes de la física se remonta al año 1797 en el que Henry Cavendish logró medir experimentalmente la fuerza gravitacional entre dos esferas metálicas a través de un dispositivo llamado balanza de torsión. Con este experimento Cavendish logró medir la constante gravitacional, cuyo valor reportado actualmente es:  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ . Al medir la constante gravitacional, Cavendish pudo determinar la masa de la Tierra! Una vez medida la masa de la Tierra, una pregunta nos salta: ¿cuál es la masa del Sol?

1.1	<b>Pregunta:</b> Si la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio $d = 150 \times 10^6 \text{ km}$ , determina una expresión para calcular la masa del Sol y calcula su valor con los datos de que dispones.	3 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

**(2 puntos) Por escribir o deducir la tercera ley de Kepler, ecuación (1).**

La tercera ley de Kepler establece:

$$\boxed{\frac{d^3}{T^2} = \text{cte} = \frac{M_s G}{4\pi^2}} \quad (1)$$

donde  $d$  es la distancia Tierra-Sol y  $T$  es el periodo orbital de la Tierra alrededor del Sol.

El valor de la constante  $\text{cte} = \frac{M_s G}{4\pi^2}$  se obtiene al igualar la fuerza centrípeta con la gravitacional entre el Sol y la Tierra:

$$\frac{M_t v^2}{d} = G \frac{M_s M_t}{d^2}, \quad (2)$$

donde  $v = \omega d$  es la rapidez con que se mueve la Tierra alrededor del Sol ( $\omega = 2\pi/T$ ). Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene la ecuación (1):

$$\frac{(\omega d)^2}{d} = G \frac{M_s}{d^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3}{T^2} = \frac{M_s G}{4\pi^2} \quad (3)$$

**(1 punto) por obtener el valor correcto de la masa del Sol.**

Despejando la masa del Sol  $M_s$ , se obtiene la expresión que se pide en términos de la constante gravitacional  $G$ , cuyo valor esta indicado en la introducción del problema; la distancia Tierra-Sol  $d$  (cuyo valor se da en la pregunta) y el período orbital de la Tierra  $T = 1$  año :

$$M_s = \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2} \quad (4)$$

sustituyendo los valores se obtiene el valor numérico:

$$\Rightarrow M_s = \frac{4\pi^2 (150 \times 10^9 \text{ m})^3}{(6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2) (365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s})^2} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (5)$$

A continuación se propone un experimento muy sencillo a partir del cual se puede medir la densidad del Sol y que no necesita el conocimiento de la distancia Tierra-Sol.

Cuando se hace pasar la luz del sol a través de un pequeño orificio, por ejemplo el que se puede hacer con una aguja sobre una hoja de papel, es posible proyectar una imagen luminosa del Sol sobre una superficie más oscura tal como se muestra en la figura 1.

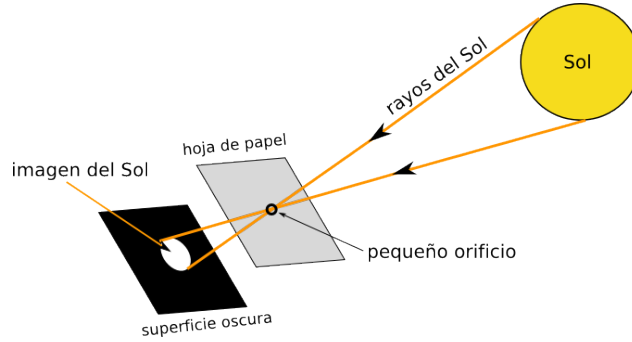


Figura 1: Proyección de Sol a través de pequeño orificio.

Para determinar la densidad del Sol a través de este experimento, en la figura 2 se hace un esquema del experimento con los parámetros geométricos involucrados:  $D_s$  es el diámetro del sol y  $D_i$  es el diámetro de la imagen del Sol que se proyecta sobre alguna superficie (la misma superficie oscura que se muestra en la figura 1),  $d$  es la distancia perpendicular desde el orificio hasta el Sol, que para fines prácticos corresponde a la distancia Tierra-Sol, mientras que  $L$  es la distancia perpendicular desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol y  $\theta$  es el ángulo de paralaje que tiene su vértice en el orificio y tiene como rectas los rayos del Sol que pasan a través el orificio.

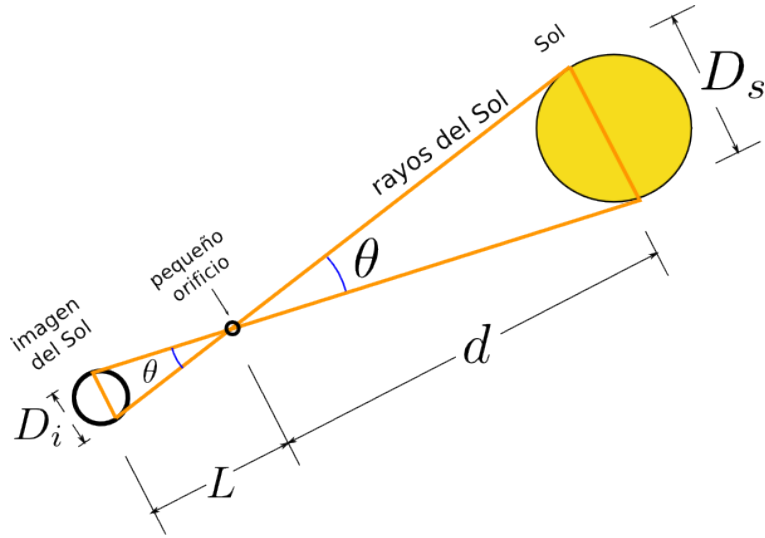


Figura 2: Parámetros geométricos de la imagen del Sol cuando pasa a través de un orificio.

Debes notar que la distancia Tierra-Sol  $d$  es mucho mayor que el diámetro del Sol  $D_s$ , de la misma manera se debe procurar que la distancia  $L$ , desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol debe ser mucho mayor que el diámetro de la imagen proyectada del Sol  $D_i$

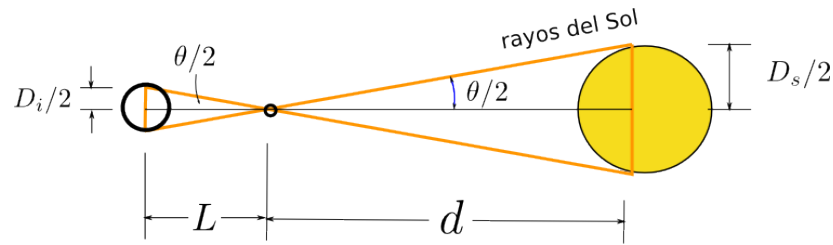
$$d \gg D_s \quad L \gg D_i \quad (6)$$

Esto significa que el ángulo de paralaje  $\theta$  es muy pequeño. Para ángulos pequeños se pueden hacer las siguientes aproximaciones de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &\approx \theta \\ \cos \theta &\approx 1 \end{aligned} \quad (7)$$

1.2	Usando la figura 2 determina una expresión para calcular el diámetro del Sol $D_s$ en términos del ángulo de paralaje $\theta$ y la distancia Tierra-Sol $d$ . Haz lo mismo con el diámetro de la imagen proyectada del Sol, es decir encuentra una expresión para $D_i$ en términos del ángulo de paralaje $\theta$ y la distancia $L$ .	2 punto
-----	---	---------

**Solución:**



**(1 punto) Por la expresión del diámetro del Sol  $D_s$ .**

Usando la definición de la tangente y la aproximación de ángulos pequeños se obtiene:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D_s}{2d}, \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \approx \frac{\theta}{2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_s \approx \theta d} \quad (8)$$

**(1 punto) Por la expresión del diámetro de la imagen del Sol  $D_i$ .**

De la misma manera se obtiene:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D_i}{2L}, \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \approx \frac{\theta}{2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_i \approx \theta L} \quad (9)$$

1.3	<p>Determina una expresión para la densidad del sol <math>\rho_s</math> en términos únicamente de la constante gravitacional <math>G</math>, el periodo orbital <math>T</math> de la Tierra alrededor del Sol y algunos de los parámetros geométricos que se especifican en la figura 2, pero <u>NO la distancia Tierra-Sol <math>d</math></u>, el propósito del problema es precisamente obtener una expresión para la densidad del Sol que no contenga la distancia Tierra-Sol.</p> <p>Debes usar la expresión de la masa del Sol que encontraste en el inciso (1.1), <u>solo la expresión pero no su valor numérico que calculaste</u>, (puede haber también factores constantes adicionales en tu formula final).</p>	2 puntos
-----	---	----------

**Solución:**

**(0.25) Puntos por escribir la definición de la densidad.**

La densidad del Sol esta dada por la razón entre la masa del Sol y su volumen:

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \quad (10)$$

**(0.25) Puntos por escribir la definición del volumen del Sol (esfera).**

El volumen del Sol esta dado por la siguiente expresión:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 = \frac{\pi D_s^3}{6}, \quad (11)$$

**(0.5) Puntos por sustituir la masa y el volumen del Sol para llegar a la ecuación (12).**

Sustituyendo la expresión del volumen del Sol y la ecuación (4) del inciso (1.1):

$$\rho_s = \frac{\frac{4\pi^2 d^3}{GT^2}}{\frac{\pi D_s^3}{6}} = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{d}{D_s} \right)^3 \quad (12)$$

**(1 punto) Por llegar a cualquiera de las ecuaciones (13) o (15)**

La densidad del Sol (12) todavía contiene la dependencia con la distancia Tierra-Sol  $d$ . Para eliminar esta dependencia se deben usar los resultados del inciso (1.2), hay dos posibles maneras:

**1** Usando la expresión  $D_s \approx \theta d$ , ecuación (8):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{d}{D_s} \right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{d}{\theta d} \right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2 \theta^3}} \quad (13)$$

**2** Dividiendo ambas expresiones (8) y (9)

$$\frac{D_s}{D_i} = \frac{\theta d}{\theta L}, \quad \Rightarrow \quad \frac{D_s}{D_i} = \frac{d}{L} \quad \text{o} \quad \frac{d}{D_s} = \frac{L}{D_i} \quad (14)$$

Sustituyendo en (12), se obtiene:

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{d}{D_s} \right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{L}{D_i} \right)^3} \quad (15)$$

Como  $D_i = \theta L$  ambas ecuaciones coinciden.

En una practica real, para medir la distancia  $L$  desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol, así como el ángulo de paralaje  $\theta$  presentan algunas dificultades por lo que se proponen el esquema mostrado en la figura 3. Aquí se muestra la imagen proyectada del Sol sobre una superficie oscura que esta inclinada un ángulo  $\phi$  respecto del suelo.  $H$  es la altura desde el centro de la imagen del Sol hasta el punto O (donde se encuentra el orificio por el que pasan los rayos del Sol),  $W$  es la distancia horizontal entre el centro de la imagen del Sol y la linea vertical que coincide con punto O y  $L$  sigue siendo la distancia entre la imagen del Sol y el orificio. La figura 4 es una imagen real donde se observa como se mide el ángulo de inclinación  $\phi$  con un sextante, además el dispositivo cuenta con una regla graduada para medir el diámetro  $D_i$  de la imagen proyectada del Sol.

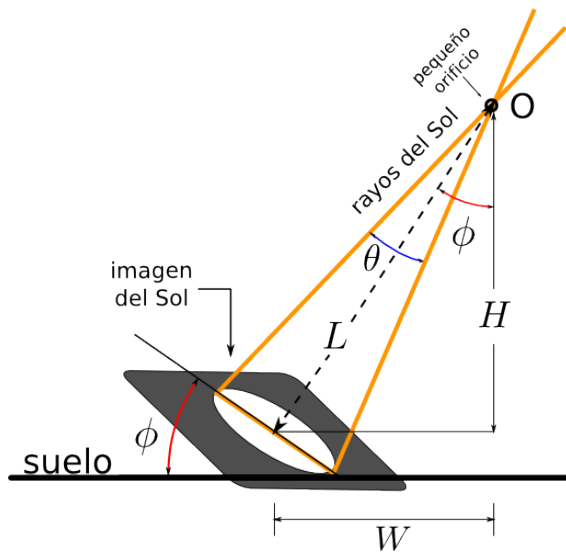


Figura 3: Proyección del Sol sobre una superficie que esta inclinada un ángulo  $\phi$  respecto del suelo.

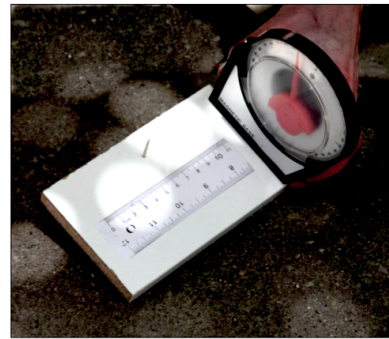


Figura 4: Sextante empleado para medir el ángulo de inclinación  $\phi$  así como el diámetro de la imagen proyectada del Sol  $D_s$ .

1.4	<p>En un experimento real se midieron los siguientes valores:  <math>W = 1.6 \text{ m}</math>, <math>\phi = 15^\circ</math> y <math>D_i = 5.8 \text{ cm}</math>  Con estos valores calcula el valor de la densidad del Sol.</p>	3 puntos
-----	---	----------

**Solución:**

**(1 punto) por obtener cualquiera de los dos relaciones: (16) o (17).**

De acuerdo a la figura 3, tenemos:

$$\sin \phi = \frac{W}{L}, \quad \Rightarrow \quad L = \frac{W}{\sin \phi} \quad (16)$$

Del resultado (9) inciso 1.2 se obtiene:

$$D_i = \theta L, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{D_i}{L} = \frac{\sin \phi D_i}{W} \quad (17)$$

**(1 punto) por obtener la ecuación final para la densidad del Sol  $\rho_s$**

De acuerdo a los resultados del inciso anterior, se puede proceder de dos maneras:

**1** Sustituyendo la expresión del ángulo de paralaje (17) en la ecuación (13):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2\theta^3} = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{W}{\sin \phi D_i} \right)^3} \quad (18)$$

**2** Sustituyendo (16) en la ecuación (15):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{L}{D_i} \right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2} \left( \frac{W}{\sin \phi D_i} \right)^3} \quad (19)$$

Ambos maneras dan la misma expresión final.

**(1 punto) por obtener el valor correcto de la densidad del Sol.**

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{24\pi}{6.7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 (3.15 \times 10^7 \text{s})^2} \left[ \frac{1.6 \text{ m}}{\sin(15^\circ) (5.8 \times 10^{-2} \text{ m})} \right]^3 \\ &= 1380 \text{ kg/m}^3 = 1.38 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (20)$$

Datos:

$T = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$  (periodo orbital de la Tierra alrededor del Sol)

$\phi = 15^\circ$  (ángulo de inclinación)

$W = 1.6 \text{ m}$

$D_i = 5.8 \times 10^{-2} \text{ m}$

**Problema 2 Ondas en la superficie agua****(10 puntos)**

Imagine una persona soltando piedritas muy pequeñas a una altura fija sobre la superficie (quieta) de un lago. Al caer una piedrita sobre el lago se producirá una onda en forma de círculo, de tal manera que el radio  $R$  de dicho círculo (llamada cresta) se propaga a una velocidad constante  $v_s = 2.5 \text{ m/s}$ , ver figura 5

Suponga ahora que la persona suelta una piedrita cada segundo, es decir, a una frecuencia  $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ . Después de soltar varias piedritas observaremos varios círculos concéntricos cuyos radios están separados por una distancia  $\lambda$  (figura 6). Llamemos a esta cantidad  $\lambda$  la longitud de onda, que es la separación entre las crestas en cualquier dirección.

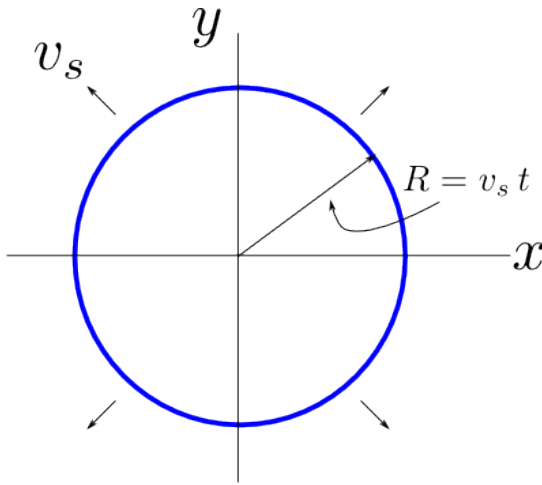


Figura 5: Onda que se propaga en el agua con velocidad  $v_s$

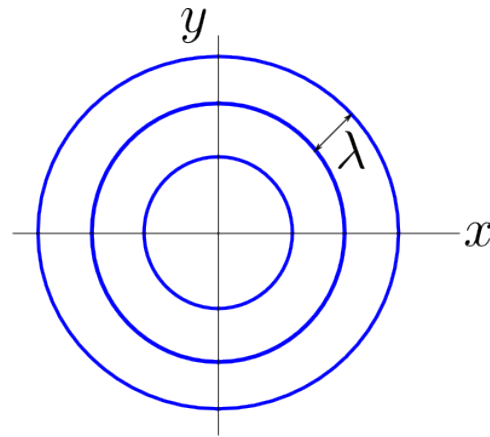


Figura 6: longitud de onda  $\lambda$



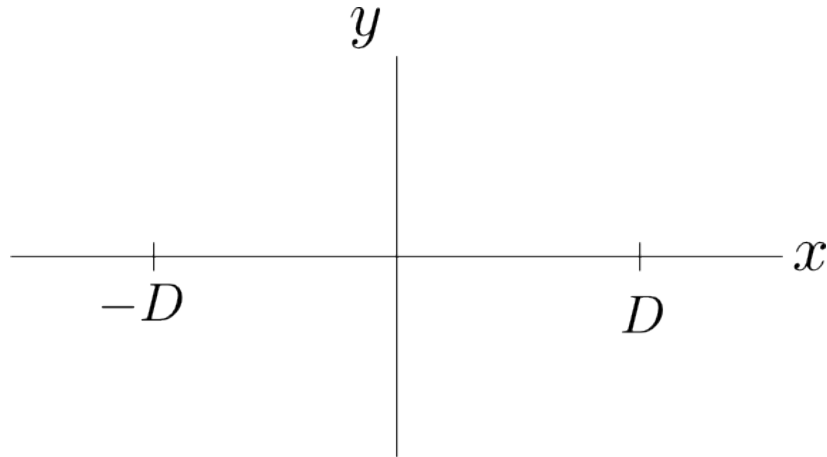


Figura 7: Detectores colocados en  $-D$  y  $D$

2.1	Calcule el valor de $\lambda$	1 punto
-----	-------------------------------	---------

**Solución:**

Un aspecto muy importante es darse cuenta que la velocidad de las ondas superficiales siempre es la misma, sin importar el estado de movimiento del que suelta las piedras. Esto se usará en todos los ejercicios. Para este inciso, como las ondas se “crean” cada periodo  $\tau = \nu^{-1} = 1$  s, y la velocidad de la onda es  $v_s$ , entonces, en un periodo la cresta viaja una longitud de onda

$$\lambda = v_s \tau \quad (21)$$

Evalutando, obtenemos  $\lambda = 2.5$  m.

**0.75 puntos por la fórmula, 0.25 puntos por el valor numérico.**

Considere que a una distancia alejada de donde caen las piedritas, colocamos un “detector” de crestas. Por ejemplo, podría ser un corcho conectado a un dispositivo electrónico tal que registrara cuando el corcho subiera y bajara al pasar la cresta. Usando un sistema de coordenadas con el origen donde caen las piedritas, suponemos que el detector está en una posición  $D$  sobre el eje positivo de las  $x$ ’s. Suponga que ponemos también otro detector a una distancia  $-D$ , en el mismo eje. Vea la figura 7

2.2	¿Qué frecuencia registran los detectores? es decir, con que frecuencia suben y bajan los corcho colocados en las posiciones $-D$ y $D$	1 punto
-----	--	---------

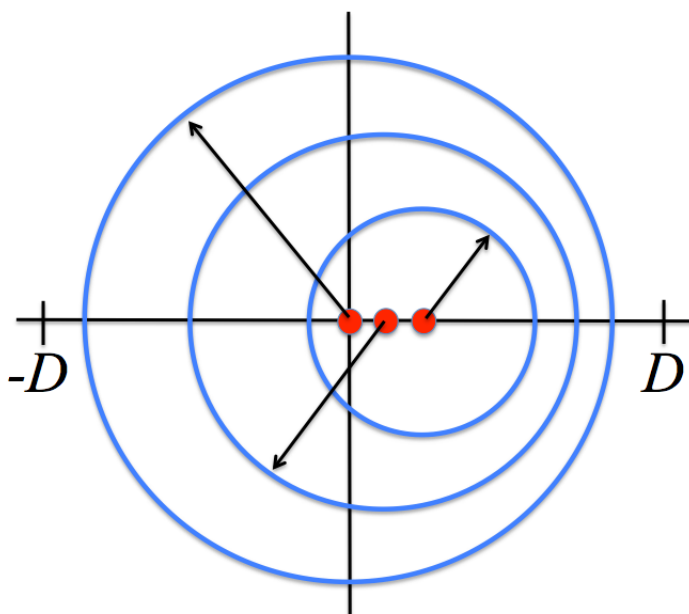
**Solución:**

La frecuencia que reciben los detectores es el inverso del tiempo que transcurre entre crestas consecutivas. Debido a que las ondas se crean en el mismo punto (el origen de coordenadas) y lo hacen a una frecuencia fija, y debido a que la velocidad de las ondas es la misma, la frecuencia que reciben ambas fuentes es la misma con la que se originan:  $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ .

**0.5 puntos por hallar el valor de la frecuencia y 0.5 por decir que ambos detectores miden la misma frecuencia.**

Ahora la persona que suelta las piedritas se mueve con velocidad  $v_f = 1.5 \text{ m/s}$  en la dirección positiva de las  $x$ 's (por ejemplo, la persona podría ir en un helicóptero volando a baja altura), sin embargo, las piedras las suelta, y caen en el agua, a la misma frecuencia  $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ . Note que la persona se mueve a una velocidad menor que a la que se propagan las ondas,  $v_f < v_s$ . Para contestar las siguientes dos preguntas, le sugerimos que realice un dibujo de las ondas en este caso (usa el papel milimétrico que se te da).

2.3	Encuentre la frecuencia que registra el detector en $D$ (es decir, la frecuencia con la que el corcho sube y baja). Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de $\nu$ y luego evalúela numéricamente	2 punto
-----	---	---------



**Solución:**

La clave para este problema es darse cuenta que el origen de cada onda se mueve a diferente lugar, debido a que la persona que la suelta se mueve a velocidad  $v_f$ . Por lo tanto, si suponemos que la primera piedra cayó en el origen,  $x_0 = 0$ , la segunda caerá en  $x_1 = v_f\tau$ , la tercera en  $x_2 = v_f(2\tau)$ , luego  $x_3 = v_f(3\tau)$ , etc, donde  $\tau$  es el periodo  $\tau = \nu^{-1}$ . Sin embargo, una vez que se producen las ondas, todas viajan a la misma velocidad. Vea el dibujo:

Del dibujo se nota que el detector en  $D$  recibirá ondas separadas una distancia más corta  $\lambda' > \lambda$  que la longitud de onda original (del inciso 1). Como las crestas viajan a la misma velocidad del agua, el periodo entre las crestas es

$$\tau' = \frac{\lambda'}{v_s} \quad (22)$$

entonces, tenemos que calcular la distancia  $\lambda'$ . La figura representa unas cuantas crestas a un tiempo arbitrario dado. Sea  $d$  la distancia del origen a la cresta de cualquier onda, medida sobre el eje de las  $x$ . Supongamos que se originó en  $x_0$  y que lleva viajando un tiempo  $t$ . Por lo tanto,

$$d = x_0 + v_s t \quad (23)$$

La siguiente cresta (a su izquierda en el dibujo) en el mismo tiempo está en  $d'$ . Esta onda se originó en  $x_0 + v_f\tau$ , donde  $v_f\tau$  es la distancia entre centros, que es la distancia que viajó la persona entre las dos piedras consecutivas que soltó. Por lo tanto,

$$d' = x_0 + v_f\tau + v_s(t - \tau) \quad (24)$$

donde hemos usado que si la primera onda lleva viajando un tiempo  $t$ , la siguiente lleva  $t - \tau$ . Por lo tanto,

$$\lambda' = d - d' \quad (25)$$

$$\lambda' = (v_s - v_f)\tau \quad (26)$$

por tanto el periodo que mide el detector es,

$$\tau' = \frac{v_s - v_f}{v_s} \tau \quad (27)$$

La frecuencia que mide es  $\nu' = 1/\tau'$ , y usando  $\nu = 1/\tau$ , obtenemos el resultado buscado,

$$\nu' = \frac{v_s}{v_s - v_f} \nu \quad (28)$$

Notamos que la frecuencia que recibe es más alta que la original pues las ondas se “juntan”. Este es el caso emisor y observador acercándose del efecto Doppler acústico.

**Se dará 1 punto por la explicación correcta y 1 punto por la deducción. Hay que tomar en cuenta que a veces se confunden con los signos y aunque expliquen bien pueden tomar el signo equivocado. Por explicación correcta es suficiente que digan que las ondas se “acercan” entre ellas y por lo tanto el detector mide un periodo corto o frecuencia más larga. Se dará 0.5 puntos si se equivocan en álgebra pero plantean bien el problema.**

2.4	Encuentre la frecuencia que registra el detector en $-D$ . Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de $\nu$ y luego evalúela numéricamente	2 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

Este caso es similar al anterior, excepto que ahora las ondas se alejan. Es decir, la distancia entre las ondas es  $\lambda'' > \lambda$ , mayor que la original. El periodo de detección es  $\tau'' = \lambda''/v_s$ . De nuevo, la posición en  $x$  de la primera cresta la podemos escribir como

$$d = x_0 + v_s t \quad (29)$$

Lo importante es que para la siguiente cresta su origen se alejó en vez de acercarse, es decir,

$$d'' = x_0 - v_f \tau + v_s(t - \tau) \quad (30)$$

Entonces

$$\lambda'' = d - d'' = (v_s + v_f)\tau \quad (31)$$

$$\tau'' = \frac{v_s + v_f}{v_s} \quad (32)$$

y la frecuencia de detección es

$$\nu'' = \frac{\nu_s}{\nu_s + \nu_f} \quad (33)$$

La frecuencia detectada es ahora menor que la original. Este es emisor y detector alejándose.

**Se dará 1 punto por la explicación correcta y 1 punto por la deducción. Hay que tomar en cuenta que a veces se confunden con los signos y aunque expliquen bien pueden tomar el signo equivocado. Por explicación correcta es suficiente que digan que las ondas se “acercan” entre ellas y por lo tanto el detector mide un periodo más corto o frecuencia más larga. Se dará 0.5 puntos si se equivocan en álgebra pero plantean bien el problema.**

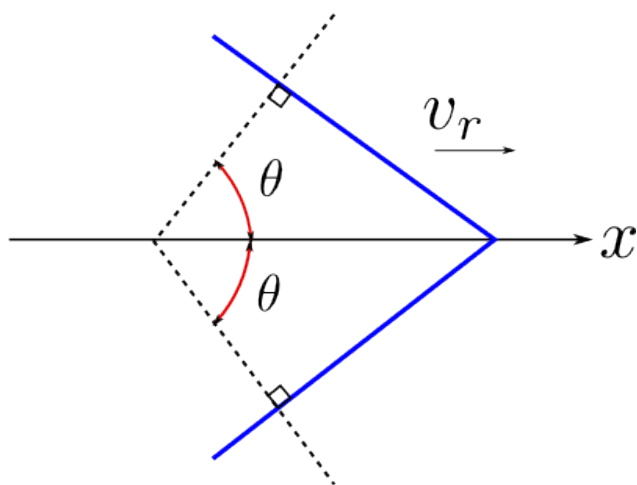
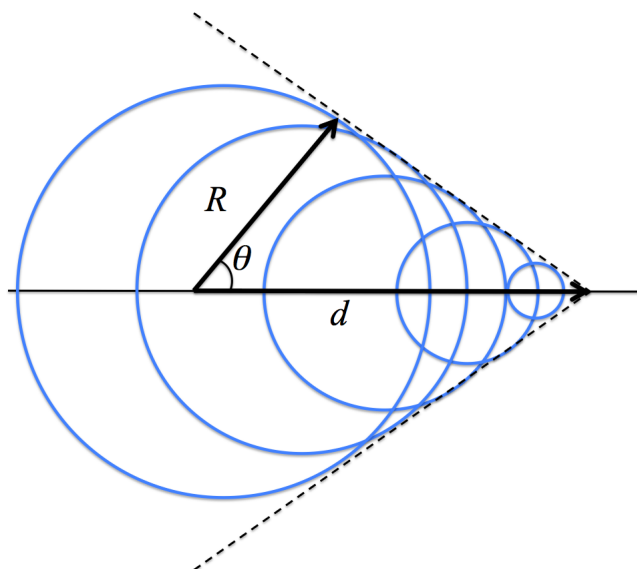


Figura 8: Después de muchas piedritas las crestas se “juntan” y el frente de todas las crestas se propaga como una línea perpendicular a un ángulo  $\theta$  con respecto al eje de las  $x$

Olvide los detectores y suponga que la persona se mueve ahora con velocidad  $v_r = 5 \text{ m/s}$  en la dirección positiva de las  $x$ 's y continúa soltando las piedritas a la misma frecuencia  $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ . ¡Note que  $v_r > v_s$ ! es decir, la persona se mueve más rápido que la velocidad a la que se propagan las ondas en el agua. Muestre que después de muchas piedritas las crestas se “juntan” formando un frente que se propaga como una línea perpendicular a un ángulo  $\theta$  con respecto al eje de las  $x$ , vea la figura 8. Para hacer esta demostración siga los siguientes pasos:



2.5	Usando la hoja de papel milimétrico haga un dibujo aproximado de las crestas a un tiempo $t = 5$ s, suponiendo que la primera piedra golpeó el agua al tiempo $t = 0$ .	2 puntos
-----	---	----------

**Solución:**

Deben realizar un dibujo como el de la figura en el papel milimétrico que se les dió. Deben darse cuenta en que  $t = 5$  s la primera onda ya viajó un radio  $R_1 = v_s(5s)$ , la segunda  $R_2 = v_s(4s)$ , etc, pero que los centros están recorridos por  $d = v_f \tau$ . Como  $v_f > v_s$ , los círculos ya no quedan dentro uno de otro sino que se traslapan.

**Se dará 1 punto si notan que los círculos ya no son concéntricos y 1 punto por hacer el dibujo correcto. Se podrán deducir hasta 0.5 puntos por dibujos mal hechos pero que sí explicaron bien.**

2.6	Uniando con una recta tangente los puntos más extremos y adelantados de las crestas, encuentre una expresión para el ángulo $\theta$ que hace la dirección de propagación de dicha tangente con el eje de las $x$ , y evalúelo.	2 puntos
-----	---	----------

**Solución:**

De la figura de la pregunta 2.5 se nota que los puntos más adelantados de todas las ondas, después de un tiempo  $t$ , se pueden unir por una recta tangente a las crestas, hasta donde va la última cresta. Este se llama el frente de onda. La dirección de propagación de dicho frente es una recta perpendicular al frente. Esa perpendicular hace un ángulo  $\theta$  con el eje de las  $x$ . Para calcularlo tomamos cualquier círculo. Sea  $d$  la distancia de su centro al punto donde se cortan la tangente y el eje de las  $x$ . Sea  $R$  el radio de dicho círculo. Debido a que la recta es tangente al círculo, el radio  $R$  desde el origen al punto tangente hace un ángulo recto con la recta tangente. Por simple trigonometría podemos hallar el coseno del ángulo,

$$\cos \theta = \frac{R}{d} \quad (34)$$

Sin embargo, el círculo viaja a velocidad  $v_s$ , por lo que

$$R = v_s t \quad (35)$$

Por otro lado, las piedritas se mueven a velocidad  $v_r$ . Por lo tanto, la distancia  $d$  es

$$d = v_r t \quad (36)$$

y el ángulo es,

$$\cos \theta = \frac{v_s}{v_r} \quad (37)$$

Como  $v_s = 2.5$  m/s y  $v_r = 5.0$  m/s, se halla  $\cos \theta = 1/2$ , o sea  $\theta = \pi/3 = 60^\circ$ .

**Se dará 1.5 punto por el análisis teórico hasta la fórmula y 0.5 por hallar el valor numérico correcto. Es posible que no escriban la fórmula y de su dibujo bien hecho hallen el ángulo. En tal caso se les dará los 2 puntos. Si hallan que es la recta tangente correcta en el dibujo pero ya no pueden hacer el análisis, se les dará 1 punto.**

Las preguntas (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) ilustran el efecto Doppler, mientras que las (2.5) y (2.6) el efecto Cerenkov. Este último provee una explicación sencilla de las estelas que dejan los barcos al moverse en el mar.



**Problema 3 Modelo de Bohr, Centro de Masa****(10 puntos)**

Hace 100 años, en 1913 el físico danés Niels Bohr desarrolló un modelo para describir el átomo de hidrógeno. El principal motivo de Bohr fue el de explicar las líneas espectrales que se estaban observando en los gases de hidrógeno al hacer pasar una corriente eléctrica sobre ellos. Estas líneas espectrales tienen su origen en las propiedades cuánticas de los átomos. Cuando se hace pasar una corriente eléctrica en un gas, los electrones de cada átomo son excitados, esto quiere decir que adquieren energía (ganan energía), pero después de un breve lapso de tiempo pierden esta energía y regresan a su estado inicial emitiendo la energía que ganaron en forma de radiación (luz), lo que explica las líneas observadas en los espectros del gas de hidrógeno, en la figura 9 se muestra el espectro de un gas de hidrógeno donde se aprecian claramente las líneas espectrales.



Figura 9: Líneas espectrales en un gas de hidrógeno

El átomo de hidrógeno consiste en un protón que compone su núcleo y un electrón girando en órbitas circulares alrededor del protón, ver figura 10. El protón tiene una carga eléctrica  $q_p = e$  y el electrón tiene la misma carga pero de signo contrario  $q_e = -e$ . Donde  $e$  es la carga eléctrica elemental cuyo valor es:  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C. Al estar cargados eléctricamente, el protón y el electrón se atraen por ley de Coulomb.

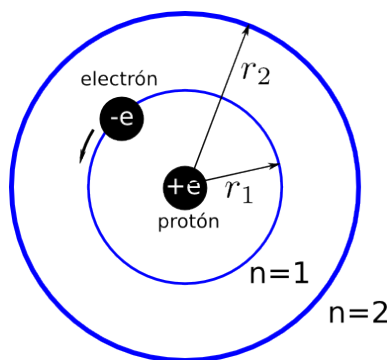


Figura 10: Modelo del átomo de Hidrógeno, el electrón gira en órbitas circulares alrededor del protón.

En su modelo del átomo de hidrógeno, Bohr estableció que el electrón gira alrededor del protón en órbitas circulares en las que su radio  $r_n$ , su velocidad  $v_n$  y su energía total  $E_n$  pueden tomar únicamente los siguientes valores:

$$\begin{aligned} r_n &= a_0 n^2 \\ v_n &= v_0 n, \\ E_n &= -\frac{E_0}{n^2} \end{aligned} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Donde  $a_0$ ,  $v_0$  y  $E_0$  son valores constantes y  $n$  puede tomar cualquier valor entero positivo. Cada órbita en la que gira el electrón representa un *estado* y esta determinado por el valor de  $n$  (*número cuántico principal*). En la figura 10 se muestra el esquema de las órbitas permitidas del átomo de hidrógeno para los dos primeros estados  $n = 1, 2$ .

Estas propiedades son el resultado de un principio único que establece que las órbitas en las que puede girar el electrón son aquellas cuyo momento angular  $L$  sea múltiplo de una constante:  $L = n \frac{h}{2\pi}$ , esta es la regla de cuantización del momento angular. El momento angular de una partícula se define como:  $L = mvr$ , donde  $m$  es la masa de la partícula,  $v$  es su velocidad tangencial y  $r$  es el radio orbital.

#### Primer estado $n = 1$

En el primer estado  $n = 1$ , la regla de cuantización del momento angular queda establecida por la siguiente ecuación:

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}, \quad (39)$$

donde  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , es la constante de Planck y  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  es la masa del electrón;  $v_0$  y  $a_0$  corresponden a la velocidad y el radio orbital del electrón alrededor del protón en el primer estado ( $n = 1$ ).

Si la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene al electrón girando en su órbita circular alrededor del protón.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

3.1	<p>Demuestra que el valor del radio orbital del electrón en su primer estado <math>a_0</math>, esta dado por la siguiente expresión y calcula su valor:</p> $a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{m_e \pi e^2} \quad (40)$ <p>Si te sirve, puedes hacer uso de la siguiente definición:</p> $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (41)$	2 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

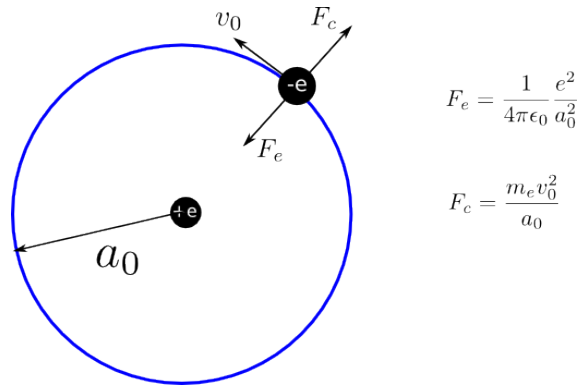


Figura 11: Primer órbita permitida en el átomo de Bohr  $n = 1$ .

**(0.25) puntos por escribir la fuerza de Coulomb protón-electrón:**

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} \quad (42)$$

**(0.25) puntos por escribir la fuerza centrípeta del electrón:**

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (43)$$

**(0.25) puntos por igualar la fuerza centrípeta con la de Coulomb:**

$$\frac{m_e v_0^2}{a_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} \quad (44)$$

**(0.75) puntos por llegar al resultado final (46).**

La ecuación (44) junto con la regla de cuantización, ecuación (39), determinan el valor de  $a_0$  como sigue:

$$\begin{aligned} m_e v_0 a_0 &= \frac{h}{2\pi} & \Rightarrow & & m_e v_0 a_0 &= \frac{h}{2\pi} & \Rightarrow & & m_e^2 v_0^2 a_0^2 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \\ \frac{m_e v_0^2}{a_0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2}, & \Rightarrow & & m_e v_0^2 a_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} & \Rightarrow & & m_e v_0^2 a_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad (45)$$

dividiendo ambas ecuaciones se obtiene el resultado:

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{m_e \pi e^2} = \frac{\epsilon_0 (2\pi \hbar)^2}{m_e \pi e^2} = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \quad (46)$$

**(0.5) punto por obtener el valor correcto del radio  $a_0$**

Sustituyendo valores:

$$a_0 = \frac{1}{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} \frac{(1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2} = 5.25 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (47)$$

El calculo se puede simplificar haciendo de la siguiente manera (omitiendo unidades):

$$\frac{1}{9 \times 9.1 \times 10^{-22}} \frac{(1.05)^2 10^{-68}}{(1.6)^2 10^{-38}} = \frac{1.1}{81.9 \times 2.56} \times 10^{-8} = 5.2 \times 10^{-2} \times 10^{-8} = 5.25 \times 10^{-11} \quad (48)$$

**Movimiento respecto del centro de masa.**

El modelo del átomo de hidrógeno descrito hasta ahora supone que el protón esta fijo y el electrón gira en torno al protón en una órbita circular. Sin embargo esto es solo una aproximación ya que en general tanto el protón como el electrón giran en torno a un punto fijo llamado Centro de Masa (CM). Analizaremos ahora como se modifican el valor de la separación entre el protón y el electrón en el primer estado ( $n = 1$ ) calculado en el inciso anterior, pero tomando en cuenta el movimiento del protón y el electrón respecto de CM.

En la figura 12 se indica el movimiento del protón, cuya masa es  $m_p = 1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$  y el electrón  $m_e$  en torno al centro de masa CM. Respecto del CM, el protón gira en una órbita circular de radio  $r_p$  y el electrón en una órbita de radio mayor  $r_e$ . Ambas partículas giran con la misma velocidad angular  $\omega$  y la separación entre el protón y el electrón  $r$  es siempre constante, ver figura 12.

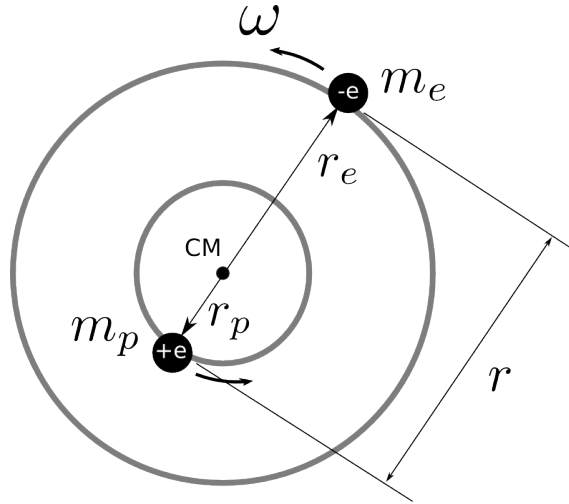


Figura 12: Movimiento del protón y del electrón en el átomo de hidrógeno respecto del centro de masa.

3.2	Encuentra las expresiones para el radio del electrón $r_e$ y del protón $r_p$ en términos de la masa del protón $m_p$ , la masa del electrón $m_e$ y la distancia que los separa $r$ . Sugerencia: coloca el centro de masa en el origen.	1 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

**(0.25) puntos por escribir correctamente el centro de masa, ecuación (49).**

El protón y el electrón se mueven sobre una línea pero en direcciones opuestas, (ver figura 12), por lo tanto de la definición de centro de masa:

$$x_{cm} = \frac{m_p r_p - m_e r_e}{m_p + m_e}, \quad (49)$$

**(0.25) puntos por colocar el centro de masa en el origen.**

Si colocamos al CM en el origen entonces:

$$x_{cm} = \frac{m_p r_p - m_e r_e}{m_p + m_e} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_p}{r_e} = \frac{m_e}{m_p} \quad (50)$$

Puesto que la separación entre el protón y el electrón es  $r$ , entonces:

$$r_a + r_p = r \quad (51)$$

**(0.5) puntos los resultados finales (52).**

De la ecuación anterior y la ecuación (50) se obtienen las expresiones que se piden:

$$\boxed{\begin{aligned} r_e &= \frac{r m_p}{m_e + m_p} = r \frac{\mu}{m_e} \\ r_p &= \frac{r m_e}{m_e + m_p} = r \frac{\mu}{m_p} \end{aligned}} \quad (52)$$

donde se define  $\mu \equiv \frac{m_p m_e}{m_e + m_p}$

3.3	Sea $L_{cm}$ el momento angular total del protón y del electrón respecto del CM. Determina la expresión de $L_{cm}$ en términos de las masas del protón y el electrón ( $m_p$ , $m_e$ ), de la distancia que los separa $r$ y de la velocidad angular $\omega$ con que gira el sistema protón-electrón alrededor del centro de masa.	2 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

**(0.5) puntos por escribir la expresión del momento angular total  $L_{cm}$**

El momento angular del sistema protón-electrón respecto del CM esta dado por:

$$L_{cm} = L_p + L_e = (m_p v_p) r_p + (m_e v_e) r_e \quad (53)$$

**(0.25) puntos escribir la definición de la velocidad angular.**

Ambos giran con la misma frecuencia  $\omega$  por lo que

$$\omega = \frac{v_p}{r_p} = \frac{v_e}{r_e} \quad (54)$$

**(0.25) puntos sustituir la velocidad angular (54) en la expresión del momento angular total (53) y llegar a la ecuación (55).**

Sustituyendo en la expresión del momento angular total:

$$L = (m_p \omega r_p) r_p + (m_e \omega r_e) r_e = \omega (r_p^2 m_p + r_e^2 m_e) \quad (55)$$

**(1) punto por obtener el resultado final (56).**

Ahora, usando el resultado (52) se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} L &= \omega (r_p^2 m_p + r_e^2 m_e) = \omega \left[ m_p \frac{r^2 \mu^2}{m_p^2} + m_e \frac{r^2 \mu^2}{m_e^2} \right] \\ &= \omega r^2 \mu^2 \left[ \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right] = \mu \omega r^2 = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \omega r^2 \end{aligned} \quad (56)$$

Consideremos nuevamente el primer estado del átomo de hidrógeno ( $n = 1$ ), pero haciendo el análisis desde el centro de masa. Denotemos en este caso  $r_0$  a la distancia entre el protón y el electrón en el primer estado ( $n = 1$ ). Entonces en el primer estado  $n = 1$ , la regla de cuantización del momento angular queda establecida por:

$$L_{cm} = \frac{h}{2\pi} \quad (57)$$

Esta expresión es similar a la ecuación (39), excepto que ahora  $L_{cm}$  es el momento angular total del protón y del electrón respecto de CM (  $L_{cm}$  la obtuviste en el inciso anterior).

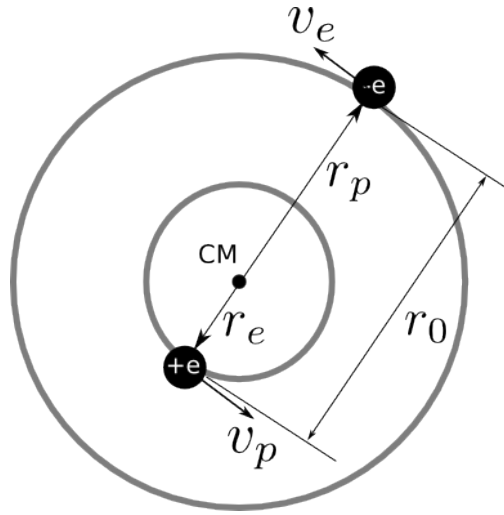


Figura 13: Primer estado  $n = 1$  del átomo de hidrógeno visto desde el CM.

3.4	<p>Usando la regla de cuantización del momento angular respecto del centro de masa, ecuación (57), demuestra que la expresión de la distancia entre el protón y electrón <math>r_0</math> esta dada por la siguiente expresión y calcula su valor:</p> $r_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\mu \pi e^2}, \quad \text{donde } \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (58)$ <p>Considera de nuevo que la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM.</p>	3 puntos
-----	---	----------

**Solución:**

La velocidad angular es la misma para el protón y el electrón:  $\omega = \frac{v_e}{r_e} = \frac{v_p}{r_p}$ .

**(0.25) escribir la fuerza centrípeta del electrón y/o protón.**

La fuerza centrípeta del protón y del electrón, respecto del CM, están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{fuerza centrípeta del electrón: } F_{c,e} &= \frac{m_e v_e^2}{r_e} \\ \text{fuerza centrípeta del protón: } F_{c,p} &= \frac{m_p v_p^2}{r_p} \end{aligned} \quad (59)$$

**(0.25) puntos por escribir la fuerza de Coulomb protón-electrón.**

La fuerza eléctrica entre protón-electrón esta dada por:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \quad (60)$$

**(0.25) puntos por igualar la fuerza centrípeta con la de Coulomb.**

Esta fuerza es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM y por lo tanto igual a la fuerza centrípeta del electrón o del protón:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = \frac{m_e v_e^2}{r_e} \quad \text{o} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = \frac{m_p v_p^2}{r_p} \quad (61)$$

**(0.25) puntos por plantear el siguiente sistema de ecuaciones:**

Usando la primer expresión junto con el resultado (56) se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e v_e^2}{r_e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \end{aligned} \quad (62)$$

**(1.5) llegar al resultado final (65).**

Estas dos ecuaciones junto con las expresiones:  $r_e = r_0 \frac{\mu}{m_e}$ ,  $\omega = \frac{v_e}{r_e}$  se obtiene el resultado final.

Hay que expresar ambas ecuaciones en términos de  $r_0$  (que no aparezca  $r_e$ )



$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e v_e^2}{r_e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e (\omega r_e)^2}{r_e} r_0^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ m_e \omega^2 r_e r_0^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ m_e \omega^2 \frac{\mu}{m_e} r_0^3 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mu^2 \omega^2 r_0^4 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \\ \omega^2 \mu r_0^3 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad (64)$$

Finalmente dividimos ambas ecuaciones y se obtiene:

$$\mu r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{\mu\pi e^2}} \quad (65)$$

**(0.5) puntos por obtener el valor correcto de la masa reducida  $\mu$  e identificar que igual al de la masa del electrón y por lo tanto el radio  $r_0$  no cambia respecto del valor de  $a_0$**   
Este resultado es similar a la ecuación (40), solo cambia la masa  $m_e \rightarrow \mu$ :

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg} \quad (66)$$

No se aprecia diferencia entre la masa reducida  $\mu$  y la masa del electrón  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , por lo que da el mismo resultado!!

El positronio es un sistema de dos partículas, un positrón y un electrón, que giran alrededor de su centro de masa debido a la atracción eléctrica entre ambas partículas. El positrón es la antipartícula del electrón, esto significa que el positrón tiene la misma masa que el electrón:  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , pero su carga es de signo contrario a la del electrón.

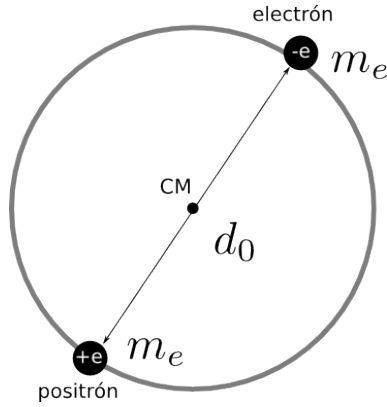


Figura 14: Primer estado del positronio: un electrón y un positrón girando alrededor de su centro de masa, ambas partículas tienen la misma masa  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg y la misma carga  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C pero de signos contrarios. La distancia de separación entre el positrón y el electrón es  $d_0$ .

3.5	Si denotamos como $d_0$ a la distancia que separa al positrón del electrón en el positronio cuando esta en el primer estado ( $n = 1$ ), como se muestra en la figura 14. Usando los resultados anteriores, calcula el valor de la distancia $d_0$ .	2 puntos
-----	--	----------

**Solución:**

**(0.5) puntos por calcular la masa reducida del sistema del positronio.**

En el sistema del positronio la masa reducida es (el positrón y el electrón tienen la misma masa  $m_e$ ):

$$\mu = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2} = 4.65 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (67)$$

**(0.5) puntos por obtener la ecuación (68).**

usando la ecuación (58) se obtiene la distancia de separación entre el electrón y el positrón:

$$d_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\mu \pi e^2} = \frac{h^2 \epsilon_0}{\frac{m_e}{2} \pi e^2} = 2 \frac{h^2 \epsilon_0}{m_e \pi e^2} \quad (68)$$

**(1) punto por obtener el valor correcto  $d_0$**

En el resultado anterior se identifica la expresión del primer inciso, ecuación (40) para obtener:

$$d_0 = 2a_0 = 2 (5.25 \times 10^{-11} \text{ m}) = 10.5 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (69)$$