

Problema 1, Kepler

2.1 Los satélites pueden ponerse a diferentes alturas sobre la superficie de la tierra, dependiendo de los propósitos del satélite. Por ejemplo una órbita con una altura de 300 km sobre la superficie terrestre se le conoce como LEO por sus siglas en ingles: *Low Earth Orbital* (órbita cercana terrestre).

2.1a) Calcula el periodo del satélite en una órbita LEO.

2.1b) Un satélite *geosíncrono* órbita la tierra en su plano ecuatorial con un periodo de 24 hrs. De tal manera que se ve como un punto fijo sobre la tierra. ¿Cuál es el radio del satélite?

Datos de la tierra: $R_t = 6,3 \times 10^6$ m, $M_t = 5,97 \times 10^{24}$ kg,

Si R_{sat} es la órbita del satélite, entonces en una órbita circular alrededor de la tierra:

$$\frac{GM_t m}{R_{sat}^2} = m \frac{v^2}{R_{sat}}, \quad \Rightarrow \quad \text{donde } v = \omega R_{sat} = \frac{2\pi}{\tau_{sat}} R_{sat} \quad (1)$$

distinguiendo $R_{sat} = R_t + h$, donde R_t es el radio de la tierra y h la altura del satélite sobre la superficie de la tierra:

$$\tau_{sat}^2 = \frac{2\pi^2}{GM_t} R_t^3 \left[1 + \frac{h}{R_t} \right], \quad \Rightarrow \quad \tau_{sat} = 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \left(1 + \frac{h}{R_t} \right)^{3/2} \approx 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \left(1 + \frac{3h}{2R_t} \right), \quad (2)$$

para la última igualdad se uso que $g = GM_t/R_t^3$. Sustituyendo los valores:

$$\tau_{sat} \approx 1,51 \text{ hrs} \quad (3)$$

Simplemente usando la 3a ley de Kepler se encuentra:

$$R_{geo} = 6,5 R_t = 42,000 \text{ km} \quad (4)$$

2.2 Para colocar un satélite en una órbita geosíncrona se hace en dos etapas: primero se lanza cerca de una órbita LEO usando apropiadamente el combustible del cohete de la fase de propulsión. Entonces se enciende la fase de propulsión y el satélite es transferido a una órbita elíptica diseñada para que tome la órbita geosíncrona cuya altitud coincide con el apogeo de la elipse (ver figura). En el apogeo, la fase de propulsión es encendida otra vez para salir de la órbita elíptica y ponerse en la órbita geosíncrona. Este mecanismo requiere dos impulsos a través de un cambio de la velocidad Δv_1 y Δv_2

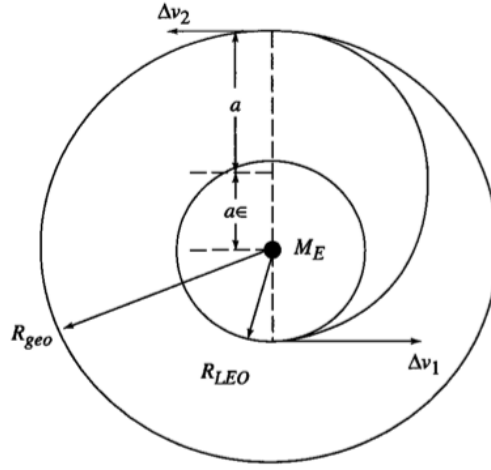
2.2a) Δv_1 para mover el satélite desde su órbita circular LEO R_{LEO} , hasta ponerlo en la órbita elíptica. Calcula el valor de Δv_1

Respuesta: $\Delta v_1 = 8,600$ km/hr

2.2b) Δv_2 para transformar la órbita elíptica, en que se encuentra el satélite, en la órbita circular geosíncrona. Calcula el valor de Δv_2

Respuesta: $\Delta v_2 = 5,269$ km/hr

Datos: $R_{LEO} = 6,693$ km, $R_{geo} = 42,400$ km



Esto te puede servir.

energía de un cuerpo en un campo de potencial gravitacional
 $U(r) = -k/r$:

$$E = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{k}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a} \quad (5)$$

donde $k = GMm$ y L es el momento angular del cuerpo que se mantiene constante.

(**Demuestra** la última igualdad de la energía: $E = -k/2a$)

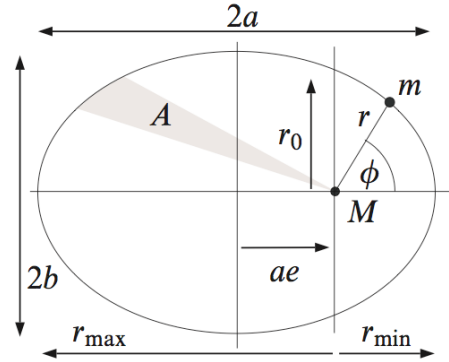
Excentricidad de la órbita (cónica) en términos de la energía y el momento angular:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{L}{k} \right)^2} = \begin{cases} E < 0 & \epsilon < 1 & \text{elipse (círculo)} \\ E = 0 & \epsilon = 1 & \text{parábola} \\ E > 0 & \epsilon > 1 & \text{hipérbola} \end{cases} \quad (6)$$

relación entre el momento angular con el semi-lado recto r_0 :

$$r_0 = \frac{L^2}{mk} \quad (7)$$

ecuación de un cónica (coordenadas polares)



$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$r_0 = \frac{b^2}{a} = a(1 - \epsilon^2)$$

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} = a(1 - \epsilon)$$

$$r_{max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon} = a(1 + \epsilon)$$

a semieje mayor

b semieje menor

ϵ excentricidad

r_0 semi lado recto

r_{min} dist. foco-perigeo

r_{max} dist. foco-apogeo

(8)

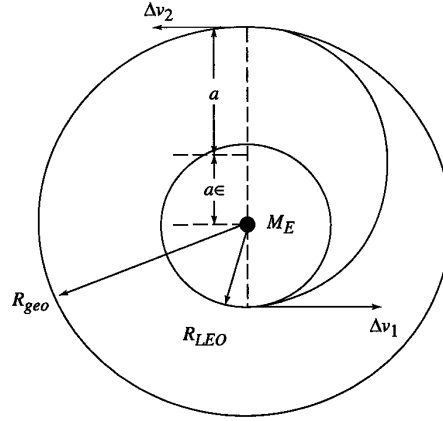


Figure 6.10.2 Boosting a satellite from low earth orbit (LEO) to a geosynchronous (geo) orbit.

transferred to an elliptic orbit designed to take it to geosynchronous altitude at orbital apogee (see Figure 6.10.2). At apogee, the propulsion stage is fired again to take it out of its elliptical orbit and put it into a circular, geocentric (geo) orbit. Thus, two velocity boosts are required of the propulsion stage: (a) Δv_1 , to move the satellite from its circular LEO into the elliptical transfer orbit and (b) Δv_2 , to circularize the orbit of the satellite at the geosynchronous altitude. Calculate the required velocity boosts, Δv_1 and Δv_2 .

(a) Solution:

We essentially solved this problem in Example 6.5.4. We do it here in a slightly different way. First, we note that the radii of the two circular orbits and the semimajor axis of the transfer elliptical orbit (see Figure 6.10.2) are related

$$R_{LEO} + R_{geo} = 2a$$

From the figure we see that $R_{LEO} = a(1 - \epsilon)$ and $R_{geo} = a(1 + \epsilon)$ are the perigee and apogee distances of the transfer orbit.

Now, we use the energy equation (6.10.11) to calculate the velocity at perigee, v_p , of the spacecraft, after boost to the transfer elliptical orbit. The energy of the elliptical orbit is

$$E = -\frac{GM_E m}{2a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_E m}{a(1 - \epsilon)}$$

Solving for v_p gives

$$v_p^2 = \frac{GM_E}{a} \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)$$

Substituting for a , $1 + \epsilon$ and $1 - \epsilon$ into the above gives

$$v_p^2 = \frac{2GM_E}{R_{LEO} + R_{geo}} \left(\frac{R_{geo}}{R_{LEO}} \right)$$

Now, we can calculate the velocity of the satellite in *circular* LEO from the condition

$$\frac{mv_{LEO}^2}{R_{LEO}} = \frac{GM_E m}{R_{LEO}^2}$$

or

$$v_{LEO}^2 = \frac{GM_E}{R_{LEO}}$$

After a little algebra, we find that the required velocity boost is

$$\Delta v_1 = v_p - v_{LEO} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_{LEO}}} \left[\sqrt{\frac{2R_{geo}}{R_{LEO} + R_{geo}}} - 1 \right]$$

Remembering that $g = GM_E/R_E^2$ we have

$$\Delta v_1 = R_E \sqrt{\frac{g}{R_{LEO}}} \left[\sqrt{\frac{2R_{geo}}{R_{LEO} + R_{geo}}} - 1 \right]$$

Putting in numbers: $R_E = 6371$ km, $R_{LEO} = 6693$ km, $R_{geo} = 42,400$ km we get

$$\Delta v_1 = 8,600 \text{ km/hr}$$

(b) Solution:

The energy of the spacecraft at apogee is

$$E = -\frac{GM_E m}{2a} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_E m}{a(1+\epsilon)}$$

Solving for the velocity at apogee, v_a

$$v_a^2 = \frac{GM_E}{a} \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right)$$

Substituting for a , $1+\epsilon$ and $1-\epsilon$ into the above gives

$$v_a^2 = \frac{2GM_E}{R_{LEO} + R_{geo}} \left(\frac{R_{LEO}}{R_{geo}} \right)$$

As before, the condition for a *circular* orbit at this radius is

$$\frac{mv_{geo}^2}{R_{geo}} = \frac{GM_E m}{R_{geo}^2}$$

Thus,

$$v_{geo}^2 = \frac{GM_E}{R_{geo}}$$

$$\Delta v_2 = v_{geo} - v_a = \sqrt{\frac{GM_E}{R_{geo}}} \left[1 - \sqrt{\frac{2R_{LEO}}{R_{LEO} + R_{geo}}} \right] = R_E \sqrt{\frac{g}{R_{geo}}} \left[1 - \sqrt{\frac{2R_{LEO}}{R_{LEO} + R_{geo}}} \right]$$

Putting in numbers, we get

$$\Delta v_2 = 5269 \text{ km/hr}$$

Note, the total boost, $\Delta v_1 + \Delta v_2 = 8,600 \text{ km/hr} + 5269 \text{ km/hr} = 13,869 \text{ km/hr}$, required of the spacecraft propulsion system to place it into geo orbit is almost 50% of the boost required by the launcher to place it into LEO!

6.11 Limits of the Radial Motion: Effective Potential

We have seen that the angular momentum of a particle moving in any isotropic central field is a constant of the motion, as expressed by Equations 6.5.4 and 6.5.5 defining l . This fact allows us to write the general energy equation (Equation 6.9.2) in the following form:

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) + V(r) = E \quad (6.11.1a)$$

or

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + U(r) = E \quad (6.11.1b)$$

in which

$$U(r) = \frac{ml^2}{2r^2} + V(r) \quad (6.11.1c)$$

The function $U(r)$ defined here is called the *effective potential*. The term $ml^2/2r^2$ is called the *centrifugal potential*. Looking at Equation 6.11.1b we see that, as far as the radial motion is concerned, the particle behaves in exactly the same way as a particle of mass m moving in one-dimensional motion under a potential energy function $U(r)$. As in Section 3.3 in which we discussed harmonic motion, the limits of the radial motion (turning points) are given by setting $\dot{r} = 0$ in Equation 6.11.1b. These limits are, therefore, the roots of the equation

$$U(r) - E = 0 \quad (6.11.2a)$$

or

$$\frac{ml^2}{2r^2} + V(r) - E = 0 \quad (6.11.2b)$$

Furthermore, the *allowed* values of r are those for which $U(r) \leq E$, because \dot{r}^2 is necessarily positive or zero.

Thus, it is possible to determine the range of the radial motion without knowing anything about the orbit. A plot of $U(r)$ is shown in Figure 6.11.1. Also shown are the radial limits r_0 and r_1 for a particular value of the total energy E . The graph is drawn for the inverse-square law, namely,

$$U(r) = \frac{ml^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \quad (6.11.3)$$

Repaso relatividad

$$\begin{aligned} & \text{transformaciones de Lorentz} \quad \begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \\ \beta &\equiv \frac{v}{c} \leq 1 \end{aligned} \end{aligned} \quad (9)$$

	sistema S	sistema S'
evento E_1	(x_1, t_1)	$(x'_1, t'_1) = \begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$
evento E_2	(x_2, t_2)	$(x'_2, t'_2) = \begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= \gamma(x_1 - x_2) - \gamma v(t_1 - t_2) \\ t'_1 - t'_2 &= \gamma(t_1 - t_2) - \gamma \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Si los eventos son simultaneos en **S**: $t_1 - t_2 = 0$
 \Rightarrow en general NO son simultaneos en **S'**: (10)
 $t'_1 - t'_2 = \gamma \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$

Si ocurren en el mismo lugar en **S**: $x_1 - x_2 = 0$
 \Rightarrow en general NO ocurren en el mismo lugar en **S'**: (11)
 $x'_1 - x'_2 = -\gamma v(t_1 - t_2)$

dilatación del tiempo

Sean dos eventos que ocurren en el mismo sitio en el sistema **S**, ($x_1 - x_2 = 0$) entonces:

$$\begin{aligned} \text{sistema } \mathbf{S} \quad \Delta t &= t_2 - t_1 \\ \text{sistema } \mathbf{S}' \quad \Delta t' &= t'_2 - t'_1 = \gamma \Delta t \end{aligned} \quad \Delta t' > \Delta t \quad (12)$$

El intervalo de tiempo para un observador en movimiento es más lento respecto del tiempo medido por un observador en reposo.

contracción de Lorentz

Sea $L_0 = x'_2 - x'_1$ una distancia medida en el sistema **S'**, ($t_1 - t_2 = 0$) entonces:

$$\begin{aligned} \text{sistema } \mathbf{S}' \quad L_0 &\equiv x'_2 - x'_1 \\ \text{sistema } \mathbf{S} \quad L &= x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} L_0 \end{aligned} \quad L_0 \leq L \quad (13)$$

una barra moviéndose está contraída respecto de un observador en reposo

$$\text{transformación de velocidades} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}v_x \right)} \\ v'_z = \frac{v_{xz}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}v_x \right)} \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{transformación de ángulos} \quad \begin{cases} \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta/\beta_0)} \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' - \beta/\beta'_0)} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{vector de momento lineal} \quad \mathbf{p} &\equiv \gamma m \mathbf{v} \\ \text{energía relativista} \quad E &\equiv \gamma m c^2 \\ \text{cuadrivector de momento} \quad P_\mu &\equiv (E/c, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (16)$$

Donde m es masa de la partícula, algunos libros la denotan como m_0 y le denominan *masa en reposo* o *masa propia*; el vector velocidad está dado por su expresión clásica: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\begin{aligned} \text{energía en reposo} \quad E_0 &\equiv m c^2 \\ \text{energía cinética} \quad E_k &\equiv E - E_0 = m c^2 (\gamma - 1) \approx \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2} \end{aligned} \quad (17)$$

De las definiciones del momento lineal y la energía relativistas, ecuación (16), se puede obtener la relación entre la energía y el momento de una partícula:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx m c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4 c^4} \right) \quad (18)$$

Ejercicios para desarrollar:

- 1 Sean dos eventos: E_1 de coordenadas (ct_1, x_1, y_1, z_1) y E_2 de coordenadas (ct_2, x_2, y_2, z_2) . Demuestra que la siguiente cantidad:

$$I = -c(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (19)$$

es un invariante, es decir demuestra la siguiente igualdad:

$$-c(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -c(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \quad (20)$$

La cantidad definida en (19) representa el *intervalo* entre los dos eventos E_1 y E_2 . Dependiendo de los eventos el intervalo puede representar los siguientes casos:

- i) Si $I < 0$, se le denomina intervalo temporaloide (*timelike*)
- ii) Si $I > 0$, se le denomina intervalo espacialoide (*spacelike*)
- iii) Si $I = 0$, se le denomina intervalo luminoide (*lightlike*)

Si el evento E_1 es el origen, y nos limitamos a una dimensión espacial x , entonces el intervalo $I = -ct^2 + x^2 = -ct'^2 + x'^2$ representan una familia de hipérbolas, una para cada valor de I , representadas en el diagrama de Minkowski.

- 2 Demuestra la última expresión de la energía cinética, ecuación (17), que representa una aproximación cuando $\beta \ll 1$. El primer término de la aproximación corresponde a la energía cinética clásica.
- 3 A partir de las definiciones del momento y la energía, ecuación (16), obten la relación energía-momento: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. Deduce también la última expresión de la ecuación (18), que corresponden a la aproximación cuando $\beta \ll 1$.
- 4 Deduce la ecuación de la transformación de angulos, ecuación (15)

Problema 2, Relatividad

- 2.1 En la ecuación de la transformación de la velocidad v_x (primer ecuación de (14)), demuestra que si $v_x < c$ y $v < c$ entonces $v'_x < c$.

Solución:

Sea $\beta = v'_x/c$, $\beta_1 = v_x/c$ y $\beta_2 = v/c$, entonces de la ecuación (14) elevando al cuadrado se obtiene:

$$\beta^2 = \frac{\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2}{(1 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2)} = \dots = 1 - \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} \quad (21)$$

Se tiene que β_1 y β_2 , por lo que $\beta < 1$

- 2.2 Se tienen dos eventos: E_1 de coordenadas $(ct_1, x_1, 0, 0)$ y E_2 de coordenadas $(ct_2, x_2, 0, 0)$, suponiendo que el intervalo entre ambos eventos es de tipo espacialoide, encuentra la velocidad del sistema en el cual ambos eventos son simultáneos.

Solucion

Usando la ecuación de Lorentz que transforma el tiempo en ambos sistema, primer ecuación de (9), se obtiene:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta t}{\Delta x} c^2 = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} c^2 \quad (22)$$

2.3 Sea S un sistema inercial fijo y S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto del sistema fijo. De acuerdo al principio de relatividad galileana (mecánica clásica), la adición de velocidades esta dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \quad (23)$$

Considera la siguiente colisión simétrica en el sistema fijo S : una partícula A de masa m_A y velocidad \mathbf{v}_A colisiona con otra partícula B, masa m_B y velocidad \mathbf{v}_B . Durante la colisión la masa de las partículas A y B se transforma dando lugar a otro par de partículas C y D, de masas m_C, m_D con velocidades $\mathbf{v}_C, \mathbf{v}_D$ respectivamente. Asumiendo que el momento lineal total durante la colisión se conserva en el sistema S :

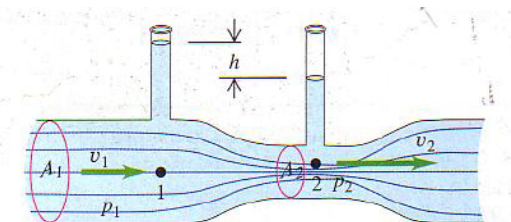
- Demuestra que el momento lineal total se conserva también en el sistema S' que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto del sistema S .
- Suponiendo que la colisión es elástica en el sistema S ; muestra que también es elástica en el sistema S'

(a) $m_A \mathbf{u}_A + m_B \mathbf{u}_B = m_C \mathbf{u}_C + m_D \mathbf{u}_D$; $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{v}$.
 $m_A(\bar{\mathbf{u}}_A + \mathbf{v}) + m_B(\bar{\mathbf{u}}_B + \mathbf{v}) = m_C(\bar{\mathbf{u}}_C + \mathbf{v}) + m_D(\bar{\mathbf{u}}_D + \mathbf{v})$,
 $m_A \bar{\mathbf{u}}_A + m_B \bar{\mathbf{u}}_B + (m_A + m_B)\mathbf{v} = m_C \bar{\mathbf{u}}_C + m_D \bar{\mathbf{u}}_D + (m_C + m_D)\mathbf{v}$.
 Assuming mass is conserved, $(m_A + m_B) = (m_C + m_D)$, it follows that
 $m_A \bar{\mathbf{u}}_A + m_B \bar{\mathbf{u}}_B = m_C \bar{\mathbf{u}}_C + m_D \bar{\mathbf{u}}_D$, so momentum is conserved in \bar{S} .

(b) $\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_C u_C^2 + \frac{1}{2} m_D u_D^2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} m_A (\bar{u}_A^2 + 2\bar{\mathbf{u}}_A \cdot \mathbf{v} + v^2) + \frac{1}{2} m_B (\bar{u}_B^2 + 2\bar{\mathbf{u}}_B \cdot \mathbf{v} + v^2) = \frac{1}{2} m_C (\bar{u}_C^2 + 2\bar{\mathbf{u}}_C \cdot \mathbf{v} + v^2) + \frac{1}{2} m_D (\bar{u}_D^2 + 2\bar{\mathbf{u}}_D \cdot \mathbf{v} + v^2)$
 $\frac{1}{2} m_A \bar{u}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{u}_B^2 + 2\mathbf{v} \cdot (m_A \bar{\mathbf{u}}_A + m_B \bar{\mathbf{u}}_B) + \frac{1}{2} v^2 (m_A + m_B)$
 $= \frac{1}{2} m_C \bar{u}_C^2 + \frac{1}{2} m_D \bar{u}_D^2 + 2\mathbf{v} \cdot (m_C \bar{\mathbf{u}}_C + m_D \bar{\mathbf{u}}_D) + \frac{1}{2} v^2 (m_C + m_D)$.
 But the middle terms are equal by conservation of momentum, and the last terms are equal by conservation of mass, so $\frac{1}{2} m_A \bar{u}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{u}_B^2 = \frac{1}{2} m_C \bar{u}_C^2 + \frac{1}{2} m_D \bar{u}_D^2$. qed

Problema 3

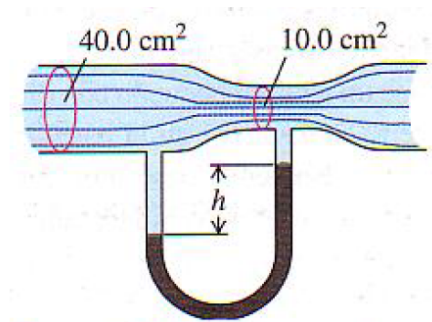
- La siguiente figura representa un dispositivo donde fluye cierto liquido, el dispositivo es un tubo de forma cilíndrica, pero que en su parte central la sección transversal es más angosta, esta parte del tubo se llama *garganta*. El tubo tiene además dos tubos más pequeños con la parte superior abierta como se muestra en la figura. De acuerdo a los datos geométricos que se muestran en la figura y a partir de la ecuación de Bernoulli, determina la rapidez del flujo v_1 en la parte más ancha del tubo. ¿En que parte del tubo es mayor la presión, en la garganta o en la sección más ancha del tubo?



En la siguiente figura se muestra otro dispositivo parecida al anterior. El área transversal del dispositivo es 40 cm^2 en su parte más ancha y 10 cm^2 en su parte más angosta. En el dispositivo fluye agua con una descarga de $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 6 \text{ L/s}$.

Calcula:

- a.1) La rapidez de flujo en las ambas partes del tubo, la ancha y la angosta.
- a.2) La diferencia de presión entre ambas partes del tubo.
- a.3) La diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U



Solución.

La rapidez del flujo en cada parte del tubo se calcula de a partir del flujo de agua de la siguiente manera:

$$v = \frac{dV/dt}{A}, \quad \Rightarrow \text{sustituyendo valores} \quad \begin{array}{ll} v_1 = 6 \text{ m/s} & \text{parte angosta} \\ v_2 = 1,5 \text{ m/s} & \text{parte ancha} \end{array} \quad (24)$$

De la ecuación de Bernoulli se obtiene la diferencia de presiones:

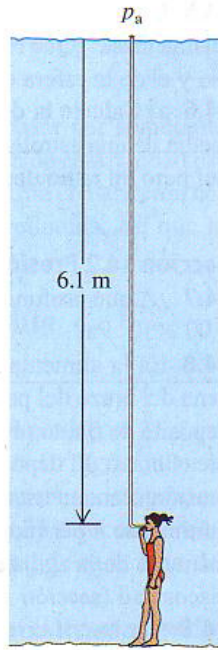
$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_w (v_1^2 - v_2^2) = 1,69 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (25)$$

y finalmente la altura se obtiene como:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho_m g} = 12,7 \text{ cm} \quad (26)$$

(ρ_w es la densidad del agua y ρ_m densidad del mercurio)

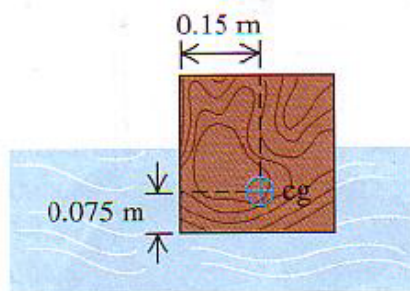
- b) Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un snorkel, esto se debe al aumentar la profundidad la diferencia de presión tiende a colapsar los pulmones. Dado que el snorkel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcula la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce (un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayor profundidades que uno que usa snorkel porque la presión dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).



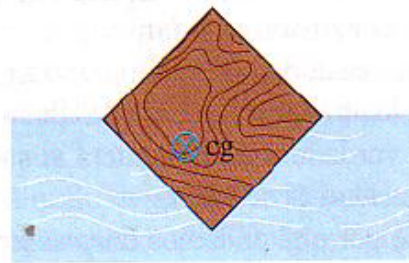
Solución:

$$\rho gh = 61,9 \text{ atm} \quad (27)$$

- c) Un bloque cúbico de madera de 0.3 m por lado tiene pesos que hacen que su centro de gravedad esté en el punto que se indica en la figura de abajo. El bloque flota en agua con la mitad de su volumen sumergido, el bloque se ladea con un ángulo de 45° , calcula la torca o momento de torsión neto respecto de un eje horizontal perpendicular al bloque y que pasa por su centro geométrico.



(a)



(b)

Solución:

La fuerza de flotación actúa en dirección de la línea donde se encuentra el centro geométrico del cubo, esto es porque de acuerdo al principio de Pascal la presión actúa en dirección perpendicular a la superficie del cubo en todos los puntos y es independiente de la distribución del peso del cubo.

Considerando que solo la mitad del cubo está sumergida, si M es su masa total, entonces la torca total respecto del centro geométrico del cubo es:

$$\tau = \frac{M}{2} g d = 7,02 \text{ Nm} \quad (28)$$

donde d es la distancia entre el centro geométrico del cubo y el centro de gravedad. Ambas fuerzas, el peso y la fuerza de flotación forman un par de fuerzas. Ante pequeños desplazamientos el cubo podría oscilar, ¿cuál sería la frecuencia de oscilación?

Problema 4, Efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico es un fenómeno en el que se pone de manifiesto una de las propiedades cuánticas de la materia, este fenómeno consiste esencialmente en la emisión de electrones de una superficie metálica cuando incide sobre ella radiación electromagnética. Una de las principales propiedades que se observa en el efecto fotoeléctrico es que solamente se emiten electrones de la superficie metálica cuando se ilumina con ciertos valores específicos de la longitud de onda de la radiación incidente y que la emisión de los electrones no depende de la intensidad de la luz. Como se explica en el sitio indicado más abajo, el efecto fotoeléctrico provee una manera de medir experimentalmente el valor de la constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$

En el siguiente enlace:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/fotoelectrico/fotoelectrico.htm>

se da una explicación del efecto fotoeléctrico muy ilustrativa, donde además, se pueden simular datos experimentales. Lee con atención la explicación que se da sobre el efecto fotoeléctrico y realiza la practica que se planeta en el sitio.

En la actividad del sitio se puede ver directamente una gráfica a partir de los datos simulados. Sin embargo, mas acorde al entrenamiento de olimpiadas de física, realiza un **análisis gráfico en papel milimétrico** a partir de los “datos” simulados que puedes obtener del sitio y determina el valor de la constante de Planck a partir del análisis gráfico (si sabes como, reporta también la incertidumbre asociada).

Aquí les dejo otro sitio de la simulación del efecto fotoeléctrico en el cual también es posible obtener “datos” simulados a partir de los cuales se puede hacer el análisis gráfico para determinar la constante de Planck. <http://www.educaplus.org/play-112-Efecto-fotoeléctrico.html>

Efecto fotoeléctrico

La E_c de los electrones liberados es:
 $E_c = 1.71 \text{ eV} - 1.7 \text{ eV} = 0.01 \text{ eV}$

fotones

The simulation interface includes a vacuum tube diagram with an ammeter, a metal selection grid, and several control sliders and displays:

- Energía umbral (eV):** A grid of buttons for different metals: Rb (1.71 eV), Na (2.28 eV), Cs (2.14 eV), K (2.21 eV), Li (3.89 eV), Ba (2.48 eV), Sm (4.51 eV), Ca (2.87 eV), and Gd (5.83 eV).
- Longitud de onda (nm):** A slider set to 320 nm, with a corresponding rainbow spectrum bar.
- Energía del fotón (eV):** A display showing 3.20 eV.
- Intensidad de la luz:** A slider set to 4.
- Diferencia de potencial aplicada (V):** A display showing 0.00 V.

Progresión Geométrica.

Una sucesión de números reales es una progresión geométrica (PG) si el cociente de cada término con el anterior es constante. Esta constante se llama razón común y la denotaremos con la letra r . Para que una PG quede completamente definida, debemos especificar el primer término de la progresión que denotaremos a_1 y la razón común r . De esta manera el n -ésimo término de la progresión queda establecido por $a_n = a_1 r^{n-1}$.

La suma de los primeros n términos de la PG:

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & a_1 & + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \\ rS_n & = & & a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a_1 & - a_1 r^n \end{array} \quad (29)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}} \quad \text{si} \quad \begin{cases} |r| < 1 \\ n \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}} \quad (30)$$

Ejercicios.

1) Calcula el valor de la siguientes suma:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \quad (31)$$

Solucion:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad r = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{3} \quad (32)$$

2) sabiendo que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcula la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = \quad (33)$$

Solucion:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 1 \quad (34)$$

3) encuentra el valor de los enteros m y n de la siguiente fracción escrita en su forma decimal:

$$0,1\overline{83} = 0,1838383\dots = \frac{m}{n} \quad (35)$$

Solucion:

$$\begin{aligned} 0,1\overline{83} &= \frac{1}{10} + \underbrace{\frac{83}{1000} + \frac{1}{100} \frac{83}{1000} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 \frac{83}{1000} + \dots}_{S_\infty = \frac{83}{990}} = \frac{1}{10} + \frac{83}{990} = \frac{91}{95} \\ &\quad \left(a_1 = \frac{83}{1000}, \quad r = \frac{1}{100} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

