Tarea 6

Olimpiada Mexicana de Física, SMF **Entrenamiento 2016**
Fecha de entrega: 23 marzo 2016

Problema 22, varios gravitación.

22.1 Los satélites pueden ponerse a diferentes alturas sobre la superficie de la tierra, dependiendo de los propósitos del satélite. Por ejemplo una órbita con una altura de 300 km sobre la superficie terrestre se le conoce como LEO por sus siglas en ingles: *Low Earth Orbital* (órbita cercana terrestre).

a) Calcula el periodo del satélite en una órbita LEO.

b) Un satélite *geosíncrono* órbita la tierra en su plano ecuatorial con un periodo de 24 hrs. De tal manera que se ve como un punto fijo sobre la tierra. ¿Cuál es el radio del satélite?

Datos de la tierra: $R_t = 6.3 \times 10^6$ m, $M_t = 5.97 \times 10^{24}$ kg,

22.2 Para colocar un satélite en una órbita geosíncrona se hace en dos etapas: primero se lanza cerca de una órbita LEO usando apropiadamente el combustible del cohete de la fase de propulsión. Entonces se enciende la fase de propulsión y el satélite es transferido a una órbita elíptica diseñada para que tome la órbita geosíncrona cuya altitud coincide con el apogeo de la elipse (ver figura). En el apogeo, la fase de propulsión es encendida otra vez para salir de la órbita elíptica y ponerse en la órbita geosíncrona. Este mecanismo requiere dos impulsos a través de un cambio de la velocidad Δv_1 y Δv_2

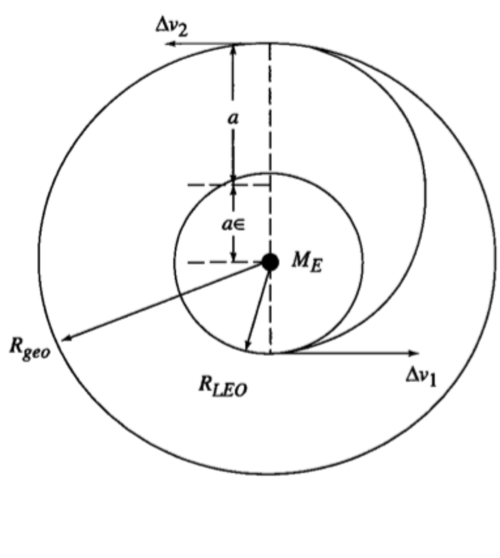
a) Δv_1 para mover el satélite desde su órbita circular LEO R_{LEO}, hasta ponerlo en la órbita elíptica. Calcula el valor de Δv_1

Respuesta: $\Delta v_1 = 8,600$ km/hr

b) Δv_2 para transformar la órbita elíptica, en que se encuentra el satélite, en la órbita circular geosíncrona. Calcula el valor de Δv_2

Respuesta: $\Delta v_2 = 5,269$ km/hr

Datos: $R_{LEO} = 6,693$ km, $R_{geo} = 42,400$ km



22.3 Un satélite es lanzado de la superficie de un planeta (desprecia la rotación del planeta) de masa M_0 y radio R, con velocidad v_0 a un ángulo de 30º respecto de la dirección radial. En la órbita del satélite llega a una distancia máxima de $5R/2$, medida desde el centro del planeta. Determina la velocidad v_0 en términos de la masa del planeta, su radio y la constante de gravitación universal G.

22.4 Determina la expresión de la velocidad de escape v_e de un planeta de masa M y radio R. ¿Qué tipo de órbita seguirá un objeto si es lanzado de un planeta tangencialmente con la velocidad de escape v_e?

22.5 Un satélite de masa $m_s = 5\times 10^3$ kg es lanzado en el espacio con una velocidad inicial (rapidez) $v = 4000\,\mathrm{m/s}$ a la distancia $r_0 = 6R = 3.6\times 10^7$ m, respecto del centro de la Tierra, a un ángulo de 30º de la dirección radial. Calcula las siguientes cantidades:

a) La longitud del semieje mayor de la órbita del satélite.

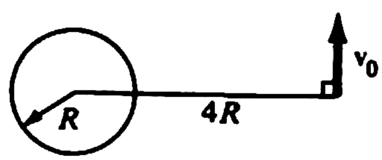
b) El momento angular del satélite.

c) La excentricidad

d) La orientación del lanzamiento del satélite.

e) El perigeo y apogeo.

22.6 Un satélite de masa m es lanzado con velocidad inicial $v_0 = \sqrt{1.5GM/R}$ a una distancia $4R$, desde el centro de un planeta de masa M y radio R, como se muestra en la figura. Para el satélite, determina la energía, el tipo de órbita que describe y la excentricidad.



Energía de un cuerpo en un campo de potencial gravitacional $U(r) = -k/r$:

$$E = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{k}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a} \tag{1}$$

donde $k = GMm$ y L es el momento angular del cuerpo que se mantiene constante.

(**Demuestra** la última igualdad de la energía: $E = -k/2a$)

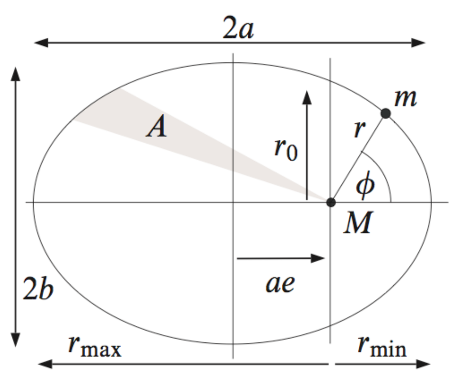
Excentricidad de la órbita (cónica) en términos de la energía y el momento angular:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{k}\right)^2} = \begin{cases} E < 0 & \epsilon < 1 \quad \text{elipse (circulo)} \\ E = 0 & \epsilon = 1 \quad \text{parábola} \\ E > 0 & \epsilon > 1 \quad \text{hipérbola} \end{cases} \tag{2}$$

relación entre el momento angular con el semi-lado recto r_0:

$$r_0 = \frac{L^2}{mk} \tag{3}$$

ecuación de un cónica (coordenas polares)

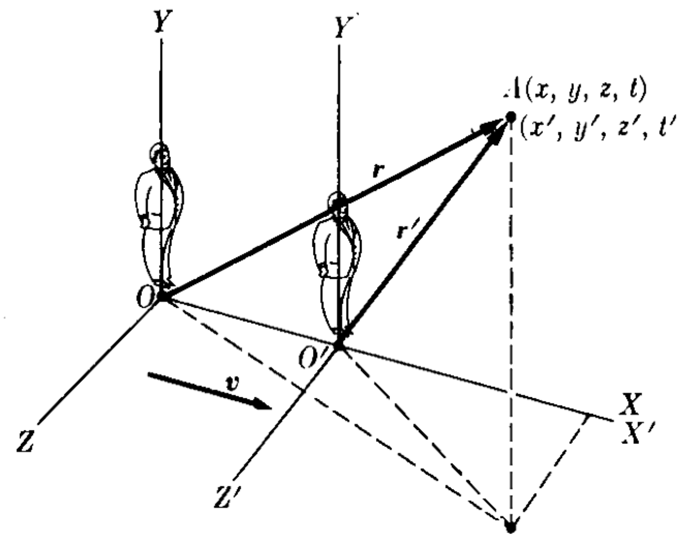


$$\begin{aligned} r &= \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos\theta} = \frac{a\left(1-\epsilon^2\right)}{1+\epsilon\cos\theta} \\ \epsilon &= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \\ r_0 &= \frac{b^2}{a} = a\left(1-\epsilon^2\right) \\ r_{min} &= \frac{r_0}{1+\epsilon} = a\left(1-\epsilon\right) \\ r_{max} &= \frac{r_0}{1-\epsilon} = a\left(1+\epsilon\right) \end{aligned} \tag{4}$$

a semieje mayor
b semieje menor
ϵ excentricidad
r_0 semi lado recto
r_{min} dist. foco-perigeo
r_{max} dist. foco-apogeo

Problema 23, relatividad.

En el próximo selectivo se darán algunas clases de relatividad, por el momento podemos ir definiendo las transformaciones de Lorentz y hacer algunos ejercicios.



Considera un observador en un sistema fijo O y otro en un sistema O' que se mueve con velocidad v en la dirección x respecto del primero. Desde el punto de vista clásico, el tiempo t que transcurre en el sistema O, comparado con el tiempo t' en el sistema O' son iguales $t = t'$. Si para el sistema que se mueve con velocidad v pasa un segundo $t' = 1$ seg, para el observador fijo también transcurre un segundo $t = 1$ seg. ¡Esto es claro de acuerdo a nuestra intuición!

Sin embargo, la teoría de la relatividad especial establece esto no ocurre así, el tiempo transcurre de manera diferente en sistemas de referencia inerciales diferentes. Para concretar consideremos un observador en un sistema de referencia inercial O y un observador en un sistema de referencia O' que se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ en la dirección x y x' de ambos sistemas (ver figura). El tiempo en ambos sistemas relacionan a través de la siguiente expresión:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{5}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, siendo: $\beta = v/c$ y $c \approx 3\times 10^8$ m/s la velocidad de la luz en el vacío.

Esto tiene como consecuencia que eventos que suceden simultaneamente, al mismo tiempo pero en diferentes posiciones, para un observador, no lo sean para otro observador que se mueve respecto del primero.

Para los sistemas O y O' descritos anteriormente, la transformación de coordenadas (espaciales) en ambos sistemas están dadas a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{6}$$

Las coordenadas en y y z no son afectadas debido a que los dos sistemas se mueven con velocidad relativa en la dirección común x y x'. Este conjunto de ecuaciones junto con (5) se conocen como **transformaciones de Lorentz** y relacionan las coordenadas espaciales y el tiempo entre ambos sistemas. Entonces, en la teoría especial de la relatividad se definen las transformaciones de Lorentz de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{donde:} \qquad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \le 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Se puede demostrar que las ecuaciones para la transformación de velocidades son:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x\right)} \\ v'_z &= \frac{v_{xz}}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x\right)} \end{aligned} \tag{8}$$

25.1 Demuestra que cuando $v \approx c$, entonces: $\gamma \approx 1/\sqrt{2\,(1-\beta)}$, y que cuando $v \ll c$, entonces: $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$

25.2 En Relatividad se define un **evento** al conjunto de cuatro "coordenadas" (cuadrivector): (ct, x, y, z).

Sean dos eventos: E_1: (ct_1, x_1, y_1, z_1) y E_2: (ct_2, x_2, y_2, z_2). Demuestra que la siguiente cantidad:

$$I = -c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{9}$$

es un **invariante** (tiene el mismo valor en ambos sistemas), es decir demuestra la siguiente igualdad:

$$-c\,(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -c\,(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \tag{10}$$

La cantidad definida en (9) representa el **intervalo** entre los dos eventos E_1 y E_2. Dependiendo de los eventos el intervalo puede representar los siguientes casos:

i) Si $I < 0$, se le denomina intervalo temporaloide (*timelike*)

ii) Si $I > 0$, se le denomina intervalo espacialoide (*spacelike*)

iii) Si $I = 0$, se le denomina intervalo luminoide (*lightlike*)

Si el evento E_1 es el origen, y nos limitamos a una dimensión espacial x, entonces el intervalo $I = -ct^2 + x^2 = -ct'^2 + x'^2$ representan una familia de hipérbolas, una para cada valor de I, representadas en el **diagrama de Minkowski**.

25.3 En la ecuación de la transformación de la velocidad v_x, demuestra que si $v_x < c$ y $v < c$ entonces $v'_x < c$.

25.4 Se tienen dos eventos: E_1 de coordenadas $(ct_1, x_1, 0, 0)$ y E_2 de coordenadas $(ct_2, x_2, 0, 0)$, suponiendo que el intervalo entre ambos eventos es de tipo espacialoide, encuentra la velocidad del sistema en el cual ambos eventos son simultáneos.

25.5 Sea S un sistema inercial fijo y S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema fijo. De acuerdo al principio de relatividad galileana (mecánica clásica), la adición de velocidades esta dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \tag{11}$$

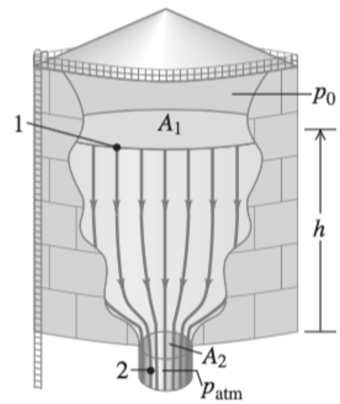
Considera la siguiente colisión simétrica en el sistema fijo S: una partícula A de masa m_A y velocidad $\mathbf{v}_A$ colisiona con otra partícula B, masa m_B y velocidad $\mathbf{v}_B$. Durante la colisión la masa de las partículas A y B se transforma dando lugar a otro par de partículas C y D , de masas m_C, m_D con velocidades velocidades v_C, v_D respectivamente. Asumiendo que el momento lineal total durante la colisión se conserva en el sistema S:

i) Demuestra que el momento lineal total se conserva también en el sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema S.

ii) Suponiendo que la colisión es elástica en el sistema S; muestra que también es elástica en el sistema S'

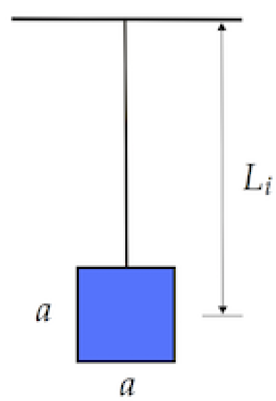
Problema 24, fluidos.

24.1 La figura ilustra un tanque de almacenamiento de agua con área transversal A_1, lleno hasta una altura h. El espacio arriba de la gasolina contiene aire a presión p_0 y la gasolina sale por un tubo corto de área A_2. Deduzca expresiones para la rapidez de flujo en el tubo y la tasa de flujo de volumen dV/dt.



24.2 Un tanque grande con diámetro D, abierto al aire, contiene agua hasta una altura H. Se perfora un agujero pequeño con diámetro d ($d \ll D$) en la base del tanque. Ignorando los efectos de viscosidad, calcule el tiempo que el tanque tarda en vaciarse por completo.

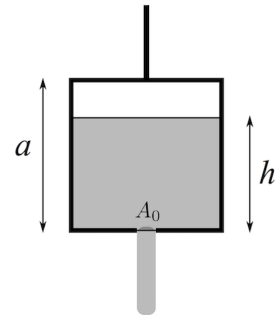
24.3 Un contenedor cubico de arista a esta lleno de agua inicialmente. El cubo esta sujeto de una cuerda inelástica y oscila como un péndulo. En determinado momento $t_i = 0$ el agua comienza a salir por un pequeño orificio situado en el fondo del contenedor. Considera que L_i es la distancia desde el centro del cubo hasta el punto superior donde se sujeta la cuerda, considerando que el contenedor y la cuerda tienen masa despreciable.



Suponiendo que el agua dentro del cubo sale por el orificio a una razón constante $dm/dt =$ constante

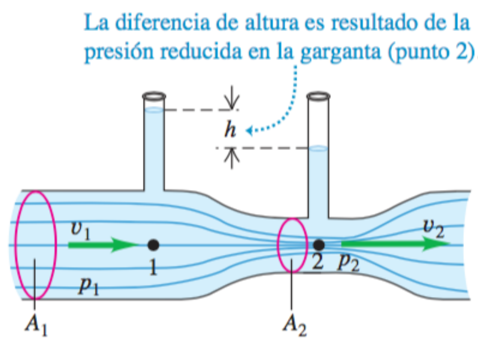
1. Encuentra el periodo del péndulo como función del tiempo $T(t)$.
2. Dibuja una gráfica de $T(t)$ desde el tiempo inical $t_i = 0$, hasta un pequeño momento antes de que el contenedor se ha vaciado completamente.

Ahora considera que el orificio del fondo del cubo tiene área A_0, si al tiempo t el nivel del agua dentro del cubo es h y la velocidad del el agua al salir por el orificio inferior es $v_0 = \sqrt{2gh}$, despreciando los efectos de fricción del agua al salir por el orificio del cubo.



1. Encuentra la velocidad con que se vacía el cubo, es decir encuentra $h(t)$.
2. Encuentra en este caso la dependencia temporal del periodo del péndulo $T(t)$.

24.4 La siguiente figura representa un dispositivo donde fluye cierto liquido, el dispositivo es un tubo de forma cilíndrica, pero que en su parte central la sección transversal es más angosta, esta parte del tubo se llama *garganta*. El tubo tiene además dos tubos más pequeños con la parte superior abierta como se muestra en la figura. De acuerdo a los datos geométricos que se muestran en la figura y a partir de la ecuación de Bernoulli, determina la rapidez del flujo v_1 en la parte más ancha del tubo. ¿En que parte del tubo es mayor la presión, en la garganta o en la sección más ancha del tubo?



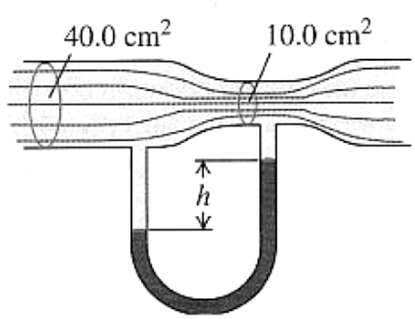
24.5 En la siguiente figura se muestra otro dispositivo parecida al anterior. El área transversal del dispositivo es 40 cm^2 en su parte más ancha y 10 cm^2 en su parte más angosta. En el dispositivo fluye agua con una descarga de $6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s} = 6\ \mathrm{L/s}$.

Calcula:

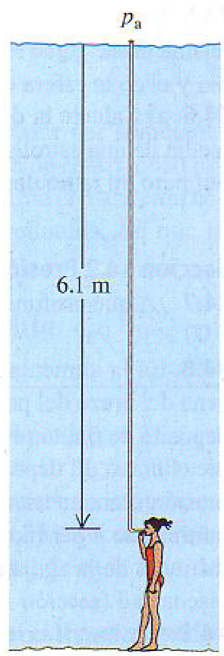
a.1) La rapidez de flujo en las ambas partes del tubo, la ancha y la angosta.

a.2) La diferencia de presión entre ambas partes del tubo.

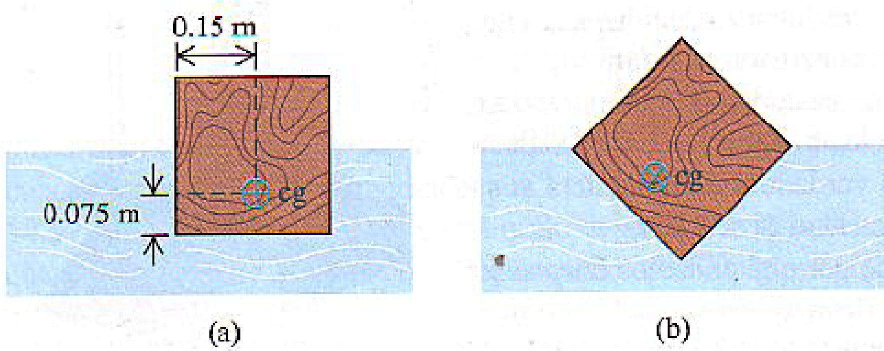
a.3) La diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U



24.6 Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un snorkel, esto se debe a que al aumentar la profundidad la diferencia de presión tiende a colapsar los pulmones. Dado que el snorkel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcula la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce (un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayor profundidades que uno que usa snorkel porque la presión dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).



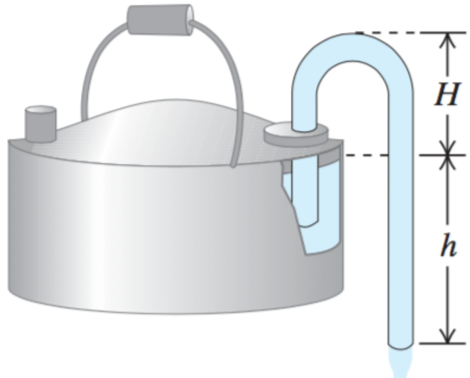
24.7 Un bloque cúbico de madera de 0.3 m por lado tiene pesos que hacen que su centro de gravedad esté en el punto que se indica en la figura de abajo. El bloque flota en agua con la mitad de su volumen sumergido, el bloque se ladea con un ángulo de 45°, calcula la torca o momento de torsión neto respecto de un eje horizontal perpendicular al bloque y que pasa por su centro geométrico.



24.8 Un sifón es un dispositivo útil para extraer líquidos de recipientes. Para establecer el flujo, el tubo debe llenarse inicialmente con fluido. Sea ρ la densidad del fluido y p_a la presión atmosférica. Suponga que el área transversal del tubo es la misma en toda su longitud.

a) Si el extremo inferior del sifón está a una distancia h bajo el nivel del líquido en el recipiente, ¿con qué rapidez fluye el líquido por ese extremo? (Suponga que el recipiente tiene un diámetro muy grande e ignore los efectos de viscosidad.)

b) Una característica curiosa del sifón es que el fluido inicialmente fluye hacia arriba. ¿Qué altura máxima H puede tener el punto alto del tubo sin que deje de haber flujo?



Problema 25, talachas matemáticas.

25.1 Resolver el sistema de ecuaciones:

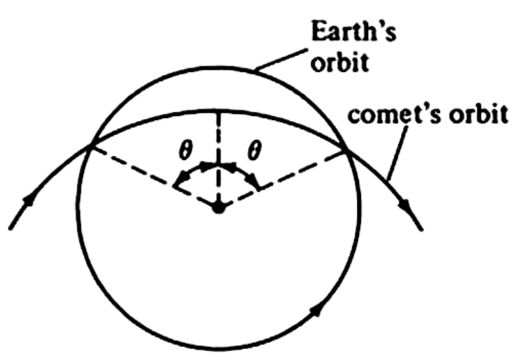
$$\begin{aligned}(3x+y)^{x-y} &= 9 \\ \sqrt[x-y]{324} &= 18x^2+12xy+2y^2\end{aligned} \tag{12}$$

25.2 De dos aleaciones con diferente porcentaje de cobre que pesan m N y n N se cortan dos pedazos de igual peso. El pedazo cortado de la primera aleación se funde con el resto de la segunda y el pedazo cortado de la segunda aleación se funde con el resto de la primera, después de lo cual el porcentaje de cobre de ambas aleaciones se hacen igual. ¿Cuánto pesa cada uno de pedazos cortados?

25.3 Dos cuerpos se mueven por una circunferencia en direcciones opuestas. El primero se mueve uniformemente con una velocidad v y el segundo tiene un movimiento uniformemente acelerado con aceleración lineal a. En el instante inicial ambos cuerpos se encontraban en un mismo punto A y la velocidad del segunda era nula. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán por primera vez estos cuerpos si el segundo encuentro será de nuevo en el punto A?

25.4 Hallar el tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados a y b, y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados se cruzan formando un ángulo recto. ¿Para cuáles condiciones existe este triángulo?

25.6 La órbita del cometa Halley puede aproximarse por una parábola cuyo mayor acercamiento al Sol es de 0.4 UA. Considerando que la órbita de la Tierra es una circunferencia de radio 1UA, determina el ángulo θ mostrado en la figura.



Problema 26, Formación estelar por colapso gravitacional.

Supongamos una nube de gas de forma esférica se colapsa debido a su atracción gravitacional. Inicialmente el gas tiene un radio $r_0 = 10^4$ ua donde $1\,\text{ua} \approx 10^{11}$ m, masa $m = 10^{30}$ kg y temperatura $T_0 \approx 5000$ K. El gas que compone la nube se puede considerar como ideal, con una densidad molar μ y coeficiente adiabático γ.

$R = 8.31$ J/Kmol es la constante de los gases y $G = 6.7 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ constante gravitacional.

1. Si durante el colapso la nube se mantiene en equilibrio térmico con el exterior y el calor generado es radiado al exterior. Cuál es la presión final de la nube después que su radio disminuyo a la mitad.

2. Si la nube reduce su radio una cantidad muy pequeña, entonces la aceleración de la gravedad sobre su superficie es prácticamente la misma antes y después de reducir su tamaño, ¿por qué?. Realiza una estimación del tiempo que tarda la nube en reducir su radio al valor: $r_2 = 0.95\,r_0$.

3. Calcula el tiempo que tarda en colapsarse la nube hasta convertirse en un solo punto.

   Para ello considera que la aceleración gravitacional sobre la superficie de un cuerpo esférico depende su radio, así como la 3a ley de Kepler:

   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{13}$$

   T es el periodo de un objeto que gira en una órbita elíptica alrededor de un objeto central de masa M y a es el semieje mayor de la órbita elíptica que describe el objeto.

4. Calcule la cantidad de calor Q radiada durante el colapso desde un radio r_0 hasta $r_3 = 1\,\text{ua}$, suponiendo que durante el proceso la nube de gas se mantiene a la misma temperatura T_0.

5. A partir de r_3 el gas se vuelve suficientemente denso e impide la emisión de radiación térmica (calor). Si la nube se sigue colapsando, determina en este caso la dependencia de la temperatura T en la nube como función de su radio r ($r < r_3$).

6. Llegado un cierto momento el efecto de la presión en la dinámica del gas ya no puede despreciarse y el colapso se detiene en $r = r_4$ (con $r_4 \ll r_3$). Si en este proceso la radiación de la nube continua siendo nula estima el radio final r_4 y la respectiva temperatura T_4. Para ello considera que la fuente de energía proviene del colapso gravitacional.