Prof. Jan Kierfeld
jan.kierfeld@tu-dortmund.de

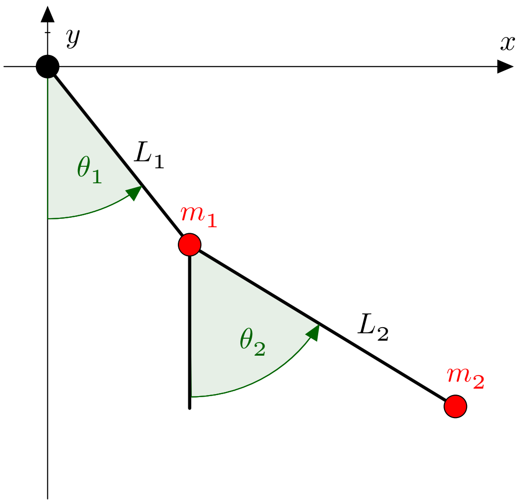
Sommersemester 2016
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 4

Ausgabe: 06.05.2016 Abgabe: 13.05.2016

Aufgabe 1. Doppelpendel (10 P.)

Im folgenden soll ein Doppelpendel aus zwei Massen m_1 und m_2 an Stäben der Länge L_1 bzw. L_2 betrachtet werden.



Aus der analytischen Mechanik sind die Bewegungsgleichungen für die Winkel bekannt (Vorsicht beim abtippen):

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{1-\mu\cos^2(\theta_2-\theta_1)}\Big[\mu\, g_1 \sin(\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1) + \mu\,\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) \tag{1a}$$
$$- g_1 \sin(\theta_1) + \frac{\mu}{\lambda}\,\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\Big]$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{1-\mu\cos^2(\theta_2-\theta_1)}\Big[g_2 \sin(\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) - \mu\,\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) \tag{1b}$$
$$- g_2 \sin(\theta_2) - \lambda\,\dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_2-\theta_1)\Big]$$

Dafür wollen wir die Massen m_1 und m_2 gleichsetzen, sodass sich $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{2}$ ergibt. Weiterhin haben wir die Abkürzungen λ und g_i definiert, deren Werte wir für die Rechnung als $L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{m}$ annehmen,

$$\lambda := \frac{L_1}{L_2} = 1 \quad \text{und} \tag{2}$$

$$g_i := \frac{g}{L_i} = 9.81\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \quad . \tag{3}$$

a) Stellen Sie für das System die kinetische und potentielle Energie als Funktion der Winkel und Winkelgeschwindigkeiten auf

Abgabe: analytisch als Text

b) Nähern Sie die obigen DGL für kleine Winkel, wobei Sie die $\dot{\theta}_i^2$-Terme vernachlässigen können. Berechnen Sie aus dem entstehenden DGL-System die Eigenschwingungen der Form $\theta_i = a_i \cos(\omega t)$. Die erhaltenen Ergebnisse können Sie nutzen um zu kontrollieren, ob ihr System in der gewählten Näherung schwingt.

Abgabe: analytisch als Text

c) Schreiben Sie die gegebenen Bewegungsgleichungen in ein Gleichungssystem mit Differentialgleichungen erster Ordnung um und lösen dieses mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung mit den Startparametern

$$\theta_1 = 0.1 \qquad \dot{\theta}_1 = 0 \tag{4}$$

$$\theta_2 = \pm\sqrt{2}\,\theta_1 \qquad \dot{\theta}_2 = 0\,. \tag{5}$$

Welche Arten von Schwingung werden in den Fällen $\theta_2 = +\sqrt{2}\,\theta_1$ bzw. $\theta_2 = -\sqrt{2}\,\theta_1$ angeregt? Überprüfen Sie nummerisch, dass in dem System die Gesamtenergie erhalten ist und die korrekten Schwingungszustände schwingen.

Abgabe: Für beide Startbedingungen kinetische, potentielle und Gesamtenergie als Plots und Daten sowie Winkel und Winkelgeschwindigkeit beider Massen, zusätzlich Quelltext.

d) Berechnen Sie zu der Trajektorie der Masse m_2 die x- und y-Koordinaten.

Abgabe: Für beide Startbedingungen sowohl Plots der Trajektorie als auch die Daten zusätzlich zum Quelltext.

Aufgabe 2. Poincaré Schnitt (10 P.)

In dieser Aufgabe betrachten wir weiterhin das Doppelpendel, jedoch mit anderen Startbedingungen, welche eine höhere Energie aufweisen und die Dynamik aus dem geordnetem Bereich herausführen. Wird die Energie erhöht ergibt sich zunächst chaotisches Verhalten, bis bei sehr hohen Energien die Dynamik wieder quasiperiodisch wird.

Um gut gefüllte Plots mit akzeptabler Genauigkeit in praktikabler Rechenzeit zu erhalten, müssen Sie Schrittweite und Schrittzahl sorgsam ihren Rechenkapazitäten anpassen. Im folgenden sollen die beiden zu den folgenden Anfangsbedingungen gehörenden Energiebereiche betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
&\theta_{1,\mathrm{quasi}} = 0 && \dot{\theta}_{1,\mathrm{chaos}} = 0 && \\
&\theta_{2,\mathrm{quasi}} = 0 && \dot{\theta}_{2,\mathrm{chaos}} = 4.472 && E_{\mathrm{kin}} = 10\,\mathrm{J} \\
&&&&& \\
&\theta_{1,\mathrm{chaos}} = 0 && \dot{\theta}_{1,\mathrm{quasi}} = 0 && \\
&\theta_{2,\mathrm{chaos}} = 0 && \dot{\theta}_{2,\mathrm{quasi}} = 11.832 && E_{\mathrm{kin}} = 70\,\mathrm{J}
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Energie ist jeweils so definiert, dass $\theta_i = 0, \dot{\theta}_i = 0$ einer Energie von $E = 0$ entspricht.

a) Berechnen Sie ein Phasenraumbild $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ mit den drei verschiedenen Startbedingungen (periodisch aus Aufgabe 1 und die beiden oben genannten), die zu den unterschiedlichen Modi des Pendels gehören.

   Abgabe: Drei Plots $\dot{\theta}_1$ gegen θ_1 und Daten zu den verschiedenen Startbedingungen zusätzlich zum Quelltext

b) Prüfen Sie als nächstes das System auf Stabilität. Wählen Sie dazu die beiden genannnten Startbedingung und stören Sie sie leicht $\mathcal{O}(10^{-2})$. Plotten Sie den euklidischen Abstand der Phasenraumpunkte $(\dot{\theta}_1, \theta_1, \dot{\theta}_2, \theta_2)$ von der ungestörten Lösung (sehen sie dazu die Winkel als fortlaufende Variable an).

   Abgabe: Plot mit den Abständen der beiden Trajektorien zur ungestörten Lösung zusätzlich zum Quelltext.

c) Berechnen Sie abschließend Poincaré Schnitte des Systems für sehr niedrige Energien (wie in Aufgabe 1) und die beiden genannten Energien. Nehmen Sie dazu Punkte $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ auf, falls θ_2 gerade einen Nulldurchgang zeigt $(\theta_2 = 0)$ und sich nach Rechts bewegt, also zusätzlich $\dot{\theta}_2 + \lambda\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) > 0$ gilt. Sehen Sie dazu die Winkel als periodische Variable an. Es bietet sich an die Punkte $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ direkt vor und nach dem Nulldurchgang linear zu interpolieren. Es genügt nicht mit nur einer Startbedingung zu starten, es müssen unterschiedliche Startbedingungen der gleichen Energie gewählt werden.

   Abgabe: Drei reich gefüllte Poincaré Schnitte. Daten nur, falls die Dateien nicht zu groß sind, zusätzlich der Quelltext