

## Aufgabe 12

a)

Die untenstehenden Rechnungen zeigen, dass die Population  $P_1$  ebenfalls eine 2D Normalverteilung mit den Parametern

$$\begin{aligned}\mu'_y &= a + b\mu_x = 3,1, \\ \sigma'_y &= \sqrt{\sigma_{y|x}^2 + b^2\sigma_x^2} = \frac{\sqrt{541}}{10} \approx 2,326 \text{ und} \\ \rho &= b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \approx 0,90286\end{aligned}$$

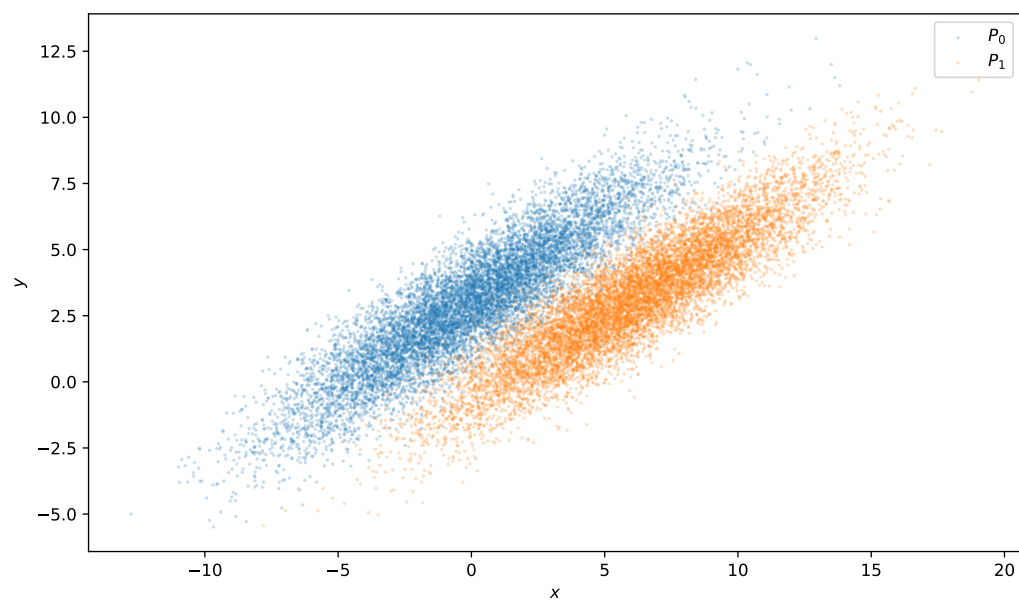
beschreibt.

b)

Beide Populationen werden in einem zweidimensionalen Scatter-Plot dargestellt. Dazu werden Gaußverteilungen mit 10000 Werten pro Population und den Parametern

$$\begin{aligned}P_0 : \mu_x &= 0, \mu_x = 3, \sigma_x = 3.5, \sigma_y = 2.6 \quad \text{und} \quad \rho = 0.9 \\ P_1 : \mu_x &= 6, \mu_x = 3.1, \sigma_x = 3.5, \sigma_y = \frac{\sqrt{541}}{10} \quad \text{und} \quad \rho \approx 0.90286\end{aligned}$$

erzeugt und gemeinsam in Abbildung 1 dargestellt.



**Abbildung 1:** Zweidimensionaler Scatter-Plot für die Populationen  $P_0$  und  $P_1$ .

A12 a)

$$f_{\text{gauss}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$f_{2D} = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{y|x}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_{y|x}}{\sigma_{y|x}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{y|x}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + \mu_x^2 - 2x\mu_x}{\sigma_x^2} + \frac{y^2 + \mu_{y|x}^2 - 2y\mu_{y|x}}{\sigma_{y|x}^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{y|x}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \frac{y^2 + a^2 + 2abx + b^2x^2 - 2ya - 2ybx}{\sigma_{y|x}^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{y|x}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-a}{\sigma_{y|x}}\right)^2 + \frac{2abx + b^2x^2 - 2ybx}{\sigma_{y|x}^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{y|x} = \sigma_y' \sqrt{1-\rho^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y' \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \frac{1}{(1-\rho^2)} \left(\frac{y-a}{\sigma_y'}\right)^2 + \frac{1}{(1-\rho^2)} \frac{2abx + b^2x^2 - 2ybx}{\sigma_y'^2}\right)\right]$$

$=: A$

$$A = \frac{x^2 + \mu_x^2 - 2x\mu_x}{\sigma_x^2} + \frac{1}{(1-\rho^2)} \left(\frac{y-a}{\sigma_y'}\right)^2 + \frac{1}{(1-\rho^2)} \frac{2abx + b^2x^2 - 2ybx}{\sigma_y'^2}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \left(\left(\frac{y-a}{\sigma_y'}\right)^2 + \frac{x^2 + \mu_x^2 - 2x\mu_x}{\sigma_x^2}\right)$$

$$= \frac{\rho^2 x^2 \sigma_y'^2 + \rho^2 \mu_x^2 \sigma_y'^2 - 2\rho^2 \mu_x \sigma_y'^2 x - 2abx \sigma_x^2 - b^2 x^2 \sigma_x^2 + 2ybx \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y'^2}$$

$$A = \frac{1}{1-\rho^2} \left( \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \frac{y^2 + a^2 - 2ya}{\sigma_y'^2} - \frac{\rho^2 x^2 \sigma_y'^2 + \rho^2 \mu_x^2 \sigma_y'^2 - 2\rho^2 \mu_x \sigma_y'^2 x - 2abx\sigma_x^2 - b^2 x^2 \sigma_x^2 + 2yb x \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y'^2} \right)$$

$$=: \frac{1}{1-\rho^2} \left( \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + B \right)$$

BO1, A7g)  $\mu_{y|x} = \mu'_y + \rho \frac{\sigma'_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$

Bei uns:  $\mu_{y|x} = a + b x$

$$\Rightarrow a = \mu'_y - \rho \frac{\sigma'_y}{\sigma_x} \mu_x, \quad b = \rho \frac{\sigma'_y}{\sigma_x}$$

$$a^2 = \mu_y'^2 + \rho^2 \frac{\sigma_y'^2}{\sigma_x^2} \mu_x^2 - 2\mu'_y \rho \frac{\sigma'_y}{\sigma_x} \mu_x$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y'^2} \left( \underbrace{y^2 \sigma_x^2}_{\text{green}} + \underbrace{\mu_y'^2 \sigma_x^2}_{\text{green}} + \underbrace{\rho^2 \sigma_y'^2 \mu_x^2}_{\text{red}} - 2\mu'_y \rho \sigma_y' \sigma_x \mu_x \right. \\ \left. - \underbrace{2y \mu'_y \sigma_x^2}_{\text{green}} + \underbrace{2y \rho \sigma_y' \sigma_x \mu_x}_{\text{orange}} - \underbrace{\rho^2 x^2 \sigma_y'^2}_{\text{orange}} - \underbrace{\rho^2 \mu_x^2 \sigma_y'^2}_{\text{red}} \right. \\ \left. + \underbrace{2\rho^2 \mu_x \sigma_y'^2 x}_{\text{yellow}} + \underbrace{2\mu'_y \rho \sigma_y' \sigma_x x}_{\text{yellow}} - \underbrace{2\rho^2 \sigma_y'^2 \mu_x x}_{\text{yellow}} \right. \\ \left. + \underbrace{\rho^2 \sigma_y'^2 x^2}_{\text{orange}} - \underbrace{2y \rho \sigma_y' \sigma_x x}_{\text{yellow}} \right)$$

$$= \underbrace{\left( \frac{y - \mu'_y}{\sigma_y'} \right)^2}_{\text{green}} + \underbrace{0}_{\text{red}} + \underbrace{0}_{\text{orange}} + \underbrace{0}_{\text{yellow}}$$

$$- \frac{2\rho}{\sigma_x \sigma_y'} (\mu'_y \mu_x - y \mu_x - \mu'_y x + x y)$$

$$= \left( \frac{y - \mu'_y}{\sigma_y'} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\mu_x - x}{\sigma_x} \right) \left( \frac{\mu'_y - y}{\sigma_y'} \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y' \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y-\mu'_y}{\sigma_y'} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left( \frac{y-\mu'_y}{\sigma_y'} \right) \right) \right]$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y' \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$\rho = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y'}$$

$$\mu_{y|x} = a + bx$$

$$\mu_{y|x} = \mu_y' + \rho \frac{\sigma_y'}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

$$\Rightarrow \mu_y' = a + bx - b(x - \mu_x) = a + b\mu_x = 3,1$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y' \sqrt{1 - b^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y'^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{y|x}^2 = \sigma_y'^2 \left( 1 - b^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y'^2} \right) = \sigma_y'^2 - b^2 \sigma_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_y' = \sqrt{\sigma_{y|x}^2 + b^2 \sigma_x^2} = \frac{\sqrt{541}}{10}$$

$$\Rightarrow \rho = b \sigma_x \frac{1}{\sqrt{\sigma_{y|x}^2 + b^2 \sigma_x^2}} \approx 0,90286$$

## Aufgabe 13

a)

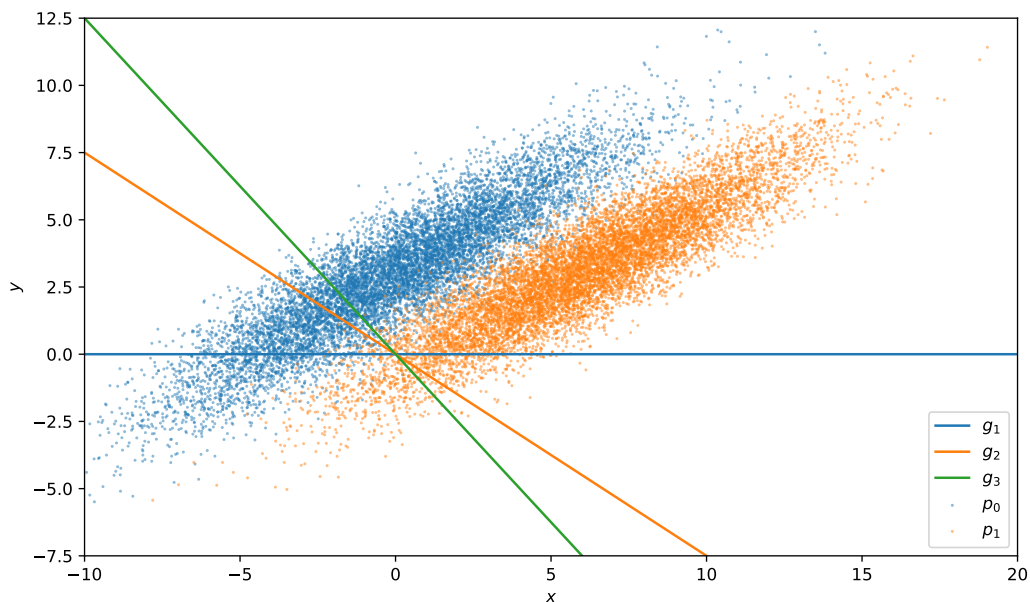
Mit den in Aufgabe 12 erzeugten Datenpunkten für die Populationen  $P_0$  und  $P_1$ , die in einem HDF-File gespeichert wurden, wird erneut ein zweidimensionaler Scatter-Plot erstellt, in den zusätzlich die Projektionsgeraden

$$g_1(x) = 0$$

$$g_2(x) = -\frac{3}{4}x$$

$$g_3(x) = -\frac{5}{4}x$$

ingezeichnet werden. Der Plot ist in Abbildung 2 dargestellt.



**Abbildung 2:** Zweidimensionaler Scatter-Plot für die Populationen  $P_0$  und  $P_1$  und die drei Projektionsgeraden.

b)

Zunächst werden die normierten Projektionsvektoren für die drei Geraden bestimmt. Die Projektionsvektoren können dabei direkt aus der Steigung der Geraden abgelesen werden. Das Vorzeichen wird jeweils so gewählt, dass  $P_0$  nach der Projektion rechts von  $P_1$  liegt.

A 13

$$g_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2(x) = -\frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow \vec{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{16+9}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

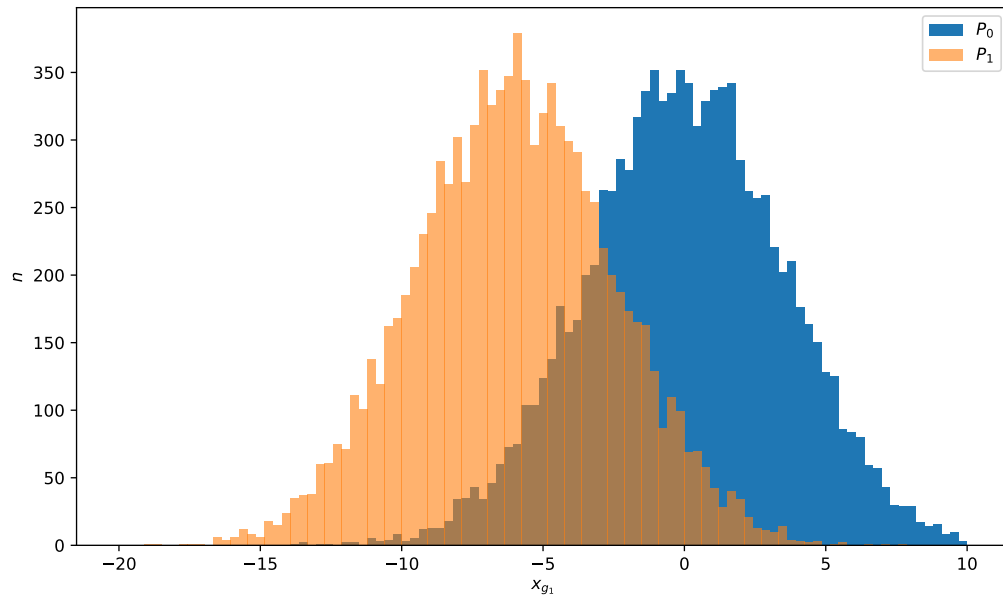
$$g_3(x) = -\frac{5}{4}x$$

$$\Rightarrow \vec{P}_3 = \frac{1}{\sqrt{25+16}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Für die Projektion wird für jeden Datenpunkt  $\vec{x}_i$  das Skalarprodukt mit den Projektionsvektoren  $\vec{p}_j$  gebildet:

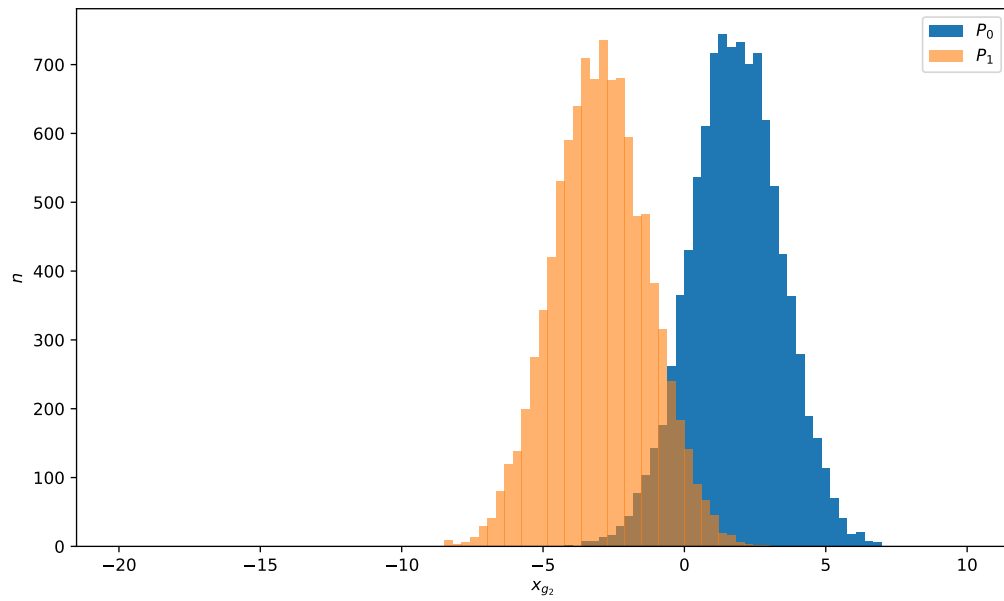
$$x_{i,j,\text{projiziert}} = \vec{x}_i \cdot \vec{p}_j. \quad (1)$$

Die projizierten Datenpunkte sind für jeden Projektionsvektor getrennt in den Histogrammen in Abbildung 3, 4 und 5 dargestellt.

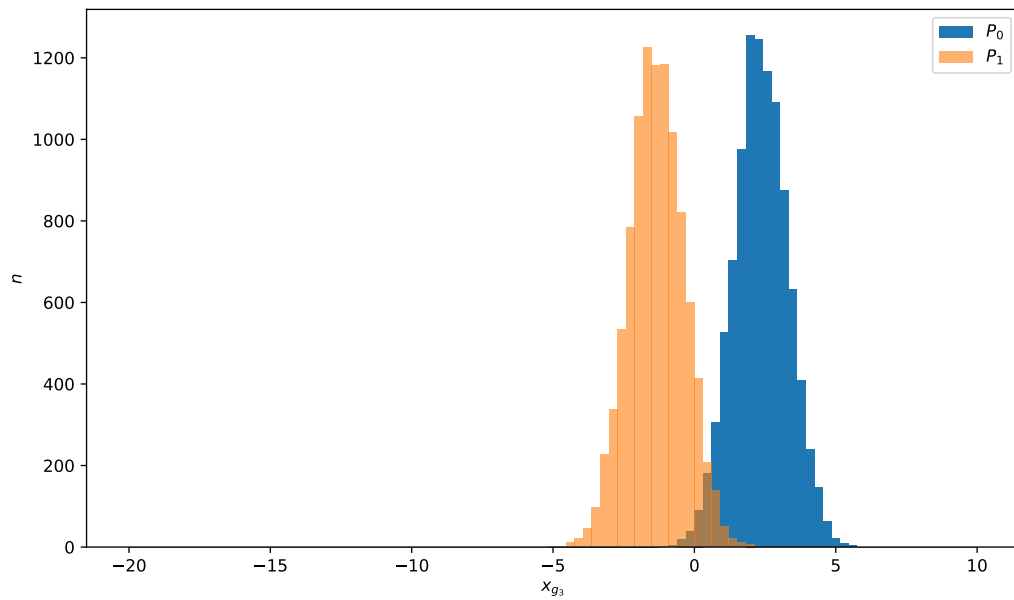


**Abbildung 3:** Histogramm für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_1$ .





**Abbildung 4:** Histogramm für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_2$ .



**Abbildung 5:** Histogramm für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_3$ .

c)

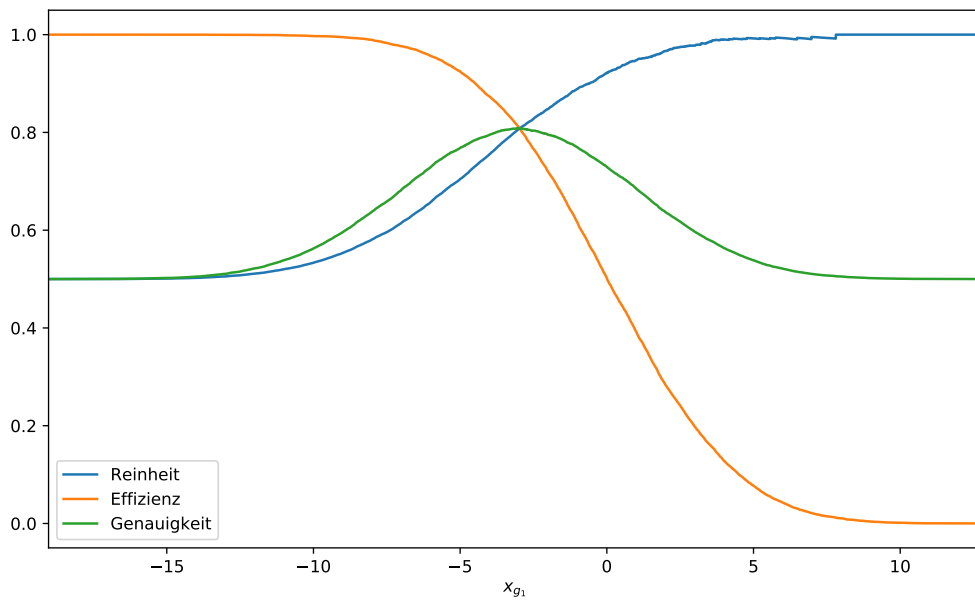
Die Population  $P_0$  wird als Signal betrachtet,  $P_1$  stellt den Untergrund dar. Abhängig vom gewählten Schnitt  $\lambda_{\text{cut}}$  wird für jede Projektion die Effizienz, die Reinheit und die Genauigkeit bestimmt. Dazu werden die projizierten Datenpunkte sortiert und die Anzahl der true positiv (tp), false negative (fn), der true negative (tn) und der false positive (fp) wird abhängig vom Schnitt gezählt.

$$\text{Effizienz} = \frac{\text{tp}}{\text{tp} + \text{fp}}$$

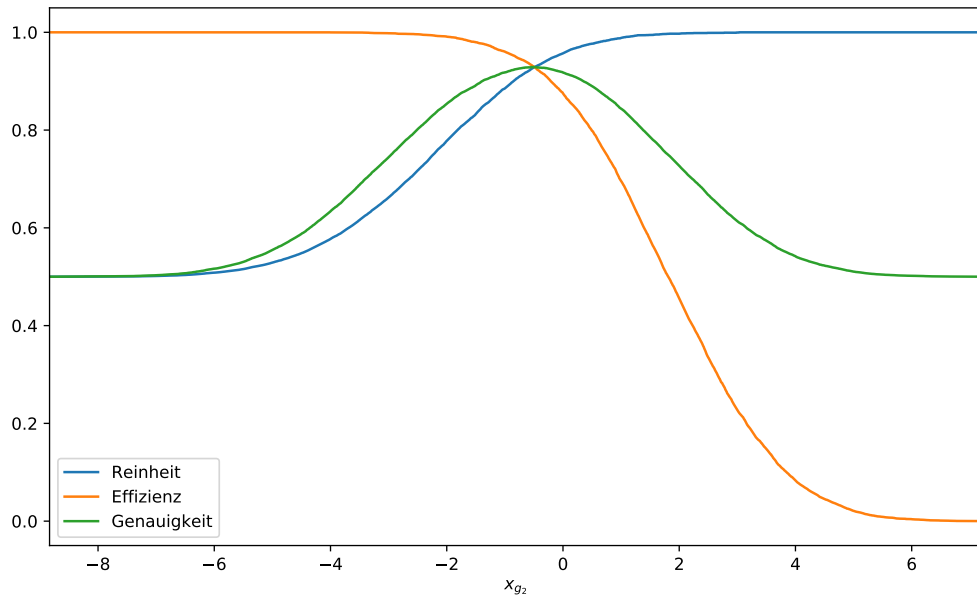
$$\text{Reinheit} = \frac{\text{tp}}{\text{tp} + \text{fn}}$$

$$\text{Genauigkeit} = \frac{\text{tp} + \text{tn}}{\text{tp} + \text{tn} + \text{fp} + \text{fn}}$$

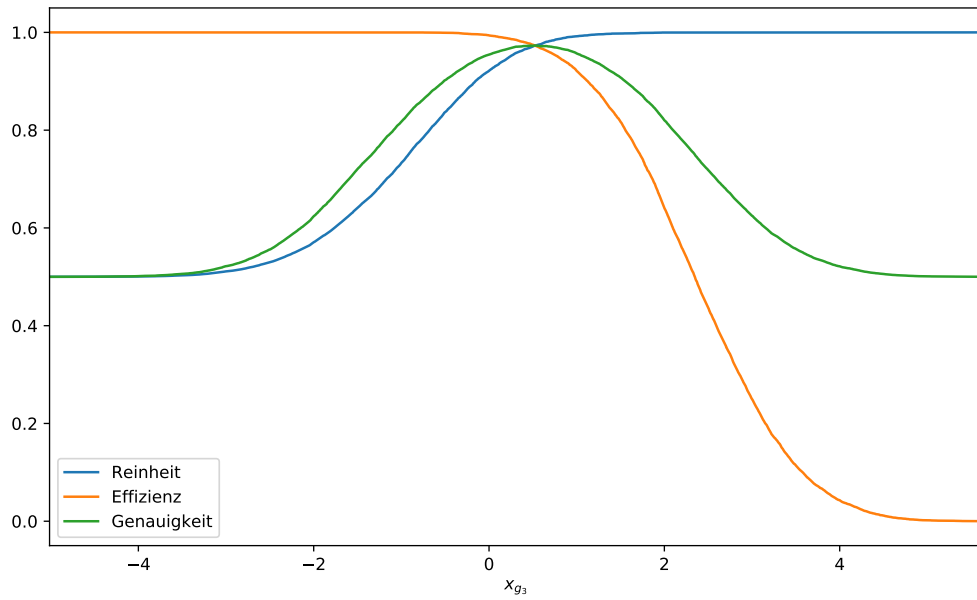
Die Effizienz, Reinheit und Genauigkeit sind für jede der drei Projektionen in den Abbildungen 6, 7 und 8 dargestellt.



**Abbildung 6:** Effizienz, Reinheit und Genauigkeit in Abhängigkeit von  $\lambda_{\text{cut}}$  für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_1$ .



**Abbildung 7:** Effizienz, Reinheit und Genauigkeit in Abhängigkeit von  $\lambda_{\text{cut}}$  für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_2$ .



**Abbildung 8:** Effizienz, Reinheit und Genauigkeit in Abhängigkeit von  $\lambda_{\text{cut}}$  für die Projektion der Populationen  $P_0$  und  $P_1$  auf die Gerade  $g_3$ .

A 14

Population 0: (2; 2; 1) (2; 3; 2) (2; 1; 2)  
(1; 2; 0) (3; 2; 0)

Population 1: (2,5; 2,5; 0) (2,5; 1,5; 0) (4; 2; 0)  
(5,5; 2,5; 0) (5,5; 1,5; 0)

$$a) \mu_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_w = \sum_j S_j$$

$$S_j = \sum_{i=0}^4 (\vec{x}_i - \vec{\mu}_j)(\vec{x}_i - \vec{\mu}_j)^T$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,25 & -0,75 & 0 \\ -0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,25 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2,25 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,25 & -0,75 & 0 \\ -0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_W = S_0 + S_1$$

$$S_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 3 \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad \left| \quad S_W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right.$$

$$S_B = (\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)^T$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$S_W^{-1} S_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(S_W^{-1} S_B - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda \begin{vmatrix} \frac{4}{11} - \lambda & -\frac{2}{11} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[ \left( \frac{4}{11} - \lambda \right) \left( \frac{1}{4} - \lambda \right) - \frac{1}{11} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\lambda \left[ \left( \frac{4}{11} - \lambda \right) \left( \frac{7}{4} - \lambda \right) - \frac{7}{11} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\checkmark \frac{7}{11} - \frac{4}{11} \lambda - \frac{1}{4} \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{11} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ ist doppelte NS}$$

$$\checkmark \lambda = \frac{4}{11} + \frac{1}{4} = \frac{16+11}{44} = \frac{27}{44}$$

$$\underline{\lambda = 0}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad 11I + 8III$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{11} v_1 - \frac{2}{11} v_3 = 0 \Leftrightarrow v_1 = \frac{1}{2} v_3$$

$$\Rightarrow EV: \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{allgemein: } \left\{ \vec{u}_{1,2} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = \frac{27}{44}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{16-27}{44} & 0 & -\frac{8}{44} \\ 0 & -\frac{27}{44} & 0 \\ -\frac{22}{44} & 0 & \frac{11-27}{44} \end{pmatrix} \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 22 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = 0, 11v_1 + 8v_3 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -\frac{8}{11}v_3$$

$$\Rightarrow \left\{ \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{11}{8}a \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{785}} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

d) Projektion  $\vec{\lambda}$ , bei der  $D(\vec{\lambda}) = \frac{\vec{\lambda}^T S_B \vec{\lambda}}{\vec{\lambda}^T S_w \vec{\lambda}}$  extremal wird, erfüllt das Eigenwertproblem  $S_w^{-1} S_B \vec{\lambda} = D \vec{\lambda}$

$$\Rightarrow \vec{\lambda} \in \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$



$$D(\vec{u}_{12}) = \frac{(a \ b \ 2a) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix}}{(a \ b \ 2a) \begin{pmatrix} 11 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(4a-4a \quad 0 \quad -2a+2a) \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix}}{(11a \quad 3b \quad 8a) \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix}} = 0$$

$$D(\vec{u}_3) = \frac{(a \ 0 \ \frac{11}{8}a) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{11}{8}a \end{pmatrix}}{(a \ 0 \ \frac{11}{8}a) \begin{pmatrix} 11 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{11}{8}a \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(-4a + \frac{11}{4}a \quad 0 \quad -2a + \frac{11}{8}a) \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{11}{8}a \end{pmatrix}}{(-11a \quad 0 \quad \frac{11}{2}a) \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{11}{8}a \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{4 - \frac{11}{4} - \frac{11}{4} + \frac{121}{64}}{11 + \frac{121}{16}} = \frac{25}{1188} > 0$$

$\Rightarrow$  Die Projektion, die  $D(\vec{x})$  maximiert ist (normiert):  $\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{185}} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

Verifizierung:

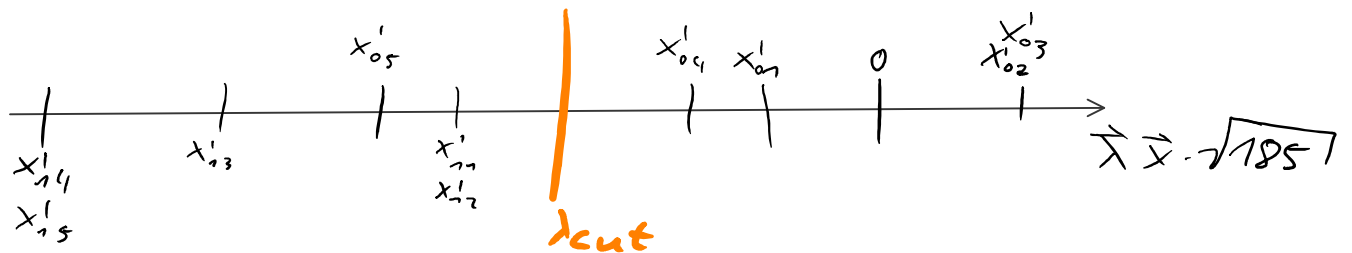
$$S_w^{-1}(\vec{\mu}_0 - \vec{\mu}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \sqrt{185 \cdot \frac{2}{88}} \vec{\lambda} \quad \checkmark$$

$$d) \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{185}} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$x'_i = \vec{\lambda}^T \vec{x}_i$$

$$x'_0 \in \left\{ \frac{-5}{\sqrt{185}}; \frac{6}{\sqrt{185}}; \frac{6}{\sqrt{185}}; \frac{-8}{\sqrt{185}}; \frac{-24}{\sqrt{185}} \right\}$$

$$x'_1 \in \left\{ \frac{-20}{\sqrt{185}}; \frac{-20}{\sqrt{185}}; \frac{-32}{\sqrt{185}}; \frac{-44}{\sqrt{185}}; \frac{-44}{\sqrt{185}} \right\}$$



e)  $x_{cut}$  so gewählt, dass die Reinheit 100% ist, und die Effizienz noch sehr gut ist.

$$\text{Reinheit} = 1$$

$$\text{Effizienz} = \frac{4}{5} = 0,8$$

(Voraussetzung: Pop. 0 sind die Signaldaten)

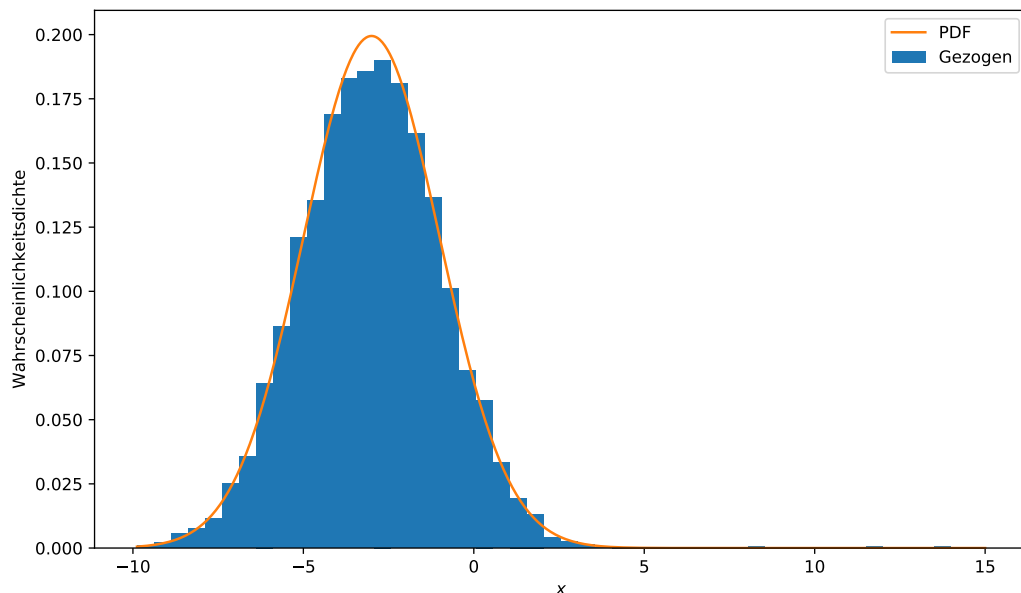
## Aufgabe 15

a) Siehe unten.

b) Siehe Code.

c)

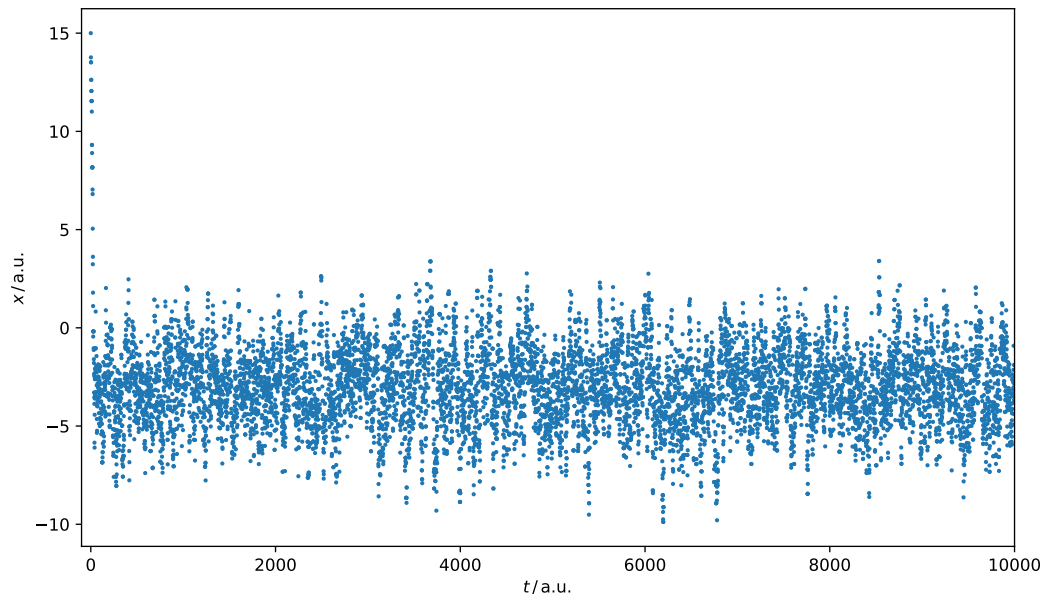
Die mit dem Metropolis-Algorithmus erzeugten Zufallszahlen werden in Abbildung 9 als Histogramm dargestellt und mit einer Gaußverteilung mit  $\mu = -3$  und  $\sigma = 2$  verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Auffällig ist, dass rechts vom Mittelwert der Verteilung deutlich häufiger Zahlen mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeitsdichte gezogen werden, als links vom Mittelwert. Dies liegt an dem gewählten Startwert  $x_0 = 15$  und der Anlaufphase des Algorithmus (vgl. d)).



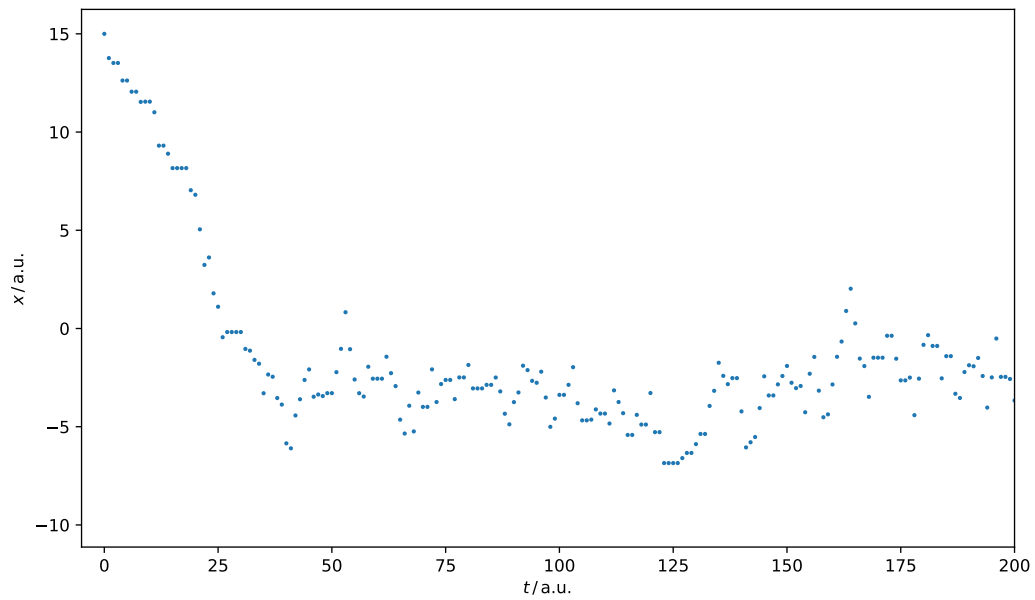
**Abbildung 9:** Histogramm von 10000 mit dem Metropolis-Algorithmus erzeugten Zufallszahlen ( $x_0 = 15$ , stepsize = 2,  $\mu = -3$  und  $\sigma = 2$ ) und Vergleich mit der analytischen Form der Gaußverteilung.

d)

Die erzeugten Zufallszahlen werden gegen die Iteration, in der sie erzeugt wurden, aufgetragen. Der sogenannte Trace-Plot ist in Abbildung 10 dargestellt. In Abbildung 11 ist der Ausschnitt, der die Anlaufphase enthält, vergrößert dargestellt. In dem Ausschnitt ist deutlich zu erkennen, dass der Algorithmus mit dem gewählten Startparameter von  $x_0 = 15$  etwa 50 Iterationen benötigt, um in die Nähe des Mittelwerts zu gelangen (Anlaufphase). Daher sollten die Zufallszahlen, die während der Anlaufphase erzeugt wurden, verworfen werden. Da 10000 Zufallszahlen gezogen wurden, ist es gut möglich, die ersten 500 Iterationen zu verwerfen, um einen gewissen Sicherheitsabstand (Faktor 10) zur Anlaufphase sicherzustellen.



**Abbildung 10:** Trace-Plot für die erzeugten Zufallszahlen.



**Abbildung 11:** Trace-Plot (Ausschnitt der Anlaufphase).

A 15

Metropolis - Hastings:

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow j} = \min \left( 1, \frac{f(x_j)}{f(x_i)} \frac{g(x_j | x_i)}{g(x_i | x_j)} \right)$$

$$\frac{g(x_j | x_i)}{g(x_i | x_j)} \rightarrow 1 \Rightarrow \text{Metropolis-Hastings} \\ \rightarrow \text{Metropolis}$$

$g$  sei gaußförmig (BOZ, A7):

$$\frac{g(x|y)}{g(y|x)} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \exp \left[ \frac{1}{2} (u_x^2 - u_y^2) \right] = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right) \right]$$

$$x_j = x_{i+1}, \quad \sigma_{x_j} = \sigma_{x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{g(x_j | x_i)}{g(x_i | x_j)} = \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_{x_i}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x_j - \overset{x_i}{x_{j-1}}}{\sigma_{x_j}} \right)^2 - \left( \frac{x_i - \overset{x_j}{x_{i+1}}}{\sigma_{x_i}} \right)^2 \right) \right] \\ = 1 \cdot e^0 = 1$$