

## Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wird die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung in der Form

$$f(v) = N4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (1)$$

betrachtet. Zuerst ist die Verteilung zu normieren. Dafür kann die Gammafunktion verwendet werden, es geht aber auch viel schöner ohne. Dafür definieren wir zuerst

$$I := \int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2) dx. \quad (2)$$

Um  $I$  auszuwerten wird quadriert und anschließend in Polarkoordinaten gewechselt:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2) dx\right) \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2) dx\right) \quad (3)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\alpha t(x^2 + y^2)) dx dy \quad (4)$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^\infty \exp(-\alpha t r^2) r dr \quad (5)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \exp(-\alpha t u) du \quad (6)$$

$$= \frac{\pi}{4\alpha t}. \quad (7)$$

Wegen  $I > 0$  ergibt sich somit

$$I = \sqrt{I^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}. \quad (8)$$

Das für die Normierung zu berechnende Integral lässt sich nun auswerten:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha x^2) = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} I \Big|_{t=1} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} (\alpha t)^{-\frac{3}{2}} \Big|_{t=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{3}{2}}}. \quad (9)$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^\infty f(v) dv = N4\pi \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (10)$$

$$\Rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (11)$$

a)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_m$  ist die Stelle, an der  $f$  maximal wird. Daher bilden wir die Ableitung

$$\frac{d}{dv}f = 4\pi N v \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \left(2 - \frac{mv^2}{k_B T}\right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (12)$$

Das Extremum bei 0 ist offenbar ein Tiefpunkt, da  $f$  keine negativen Werte annimmt und  $f(0) = 0$ . Daraus folgt, dass die beiden anderen Extrema Maxima sind, wobei das positive der beiden an der gesuchten Stelle

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (13)$$

liegt.

b)

Der Erwartungswert des Geschwindigkeitsbetrags lässt sich wie folgt berechnen:

$$\langle v \rangle_f = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi N \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv \quad (14)$$

$$= 4\pi N \int_0^\infty \frac{u}{2} \exp\left(-\frac{mu}{2k_B T}\right) du \quad (15)$$

$$= 2\pi N \left( \left[ -\frac{2uk_B T}{m} \exp\left(-\frac{mu}{2k_B T}\right) \right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{2k_B T}{m} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mu}{2k_B T}\right) du \right) \quad (16)$$

$$= 2\pi N \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \stackrel{(11)}{=} 2 \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}. \quad (17)$$