

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1718]
Di. 10-12	CP-03-150	philipp2.hoffmann@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	P1-02-110	felix.neubuerger@udo.edu und tobias.hoinka@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und maximilian.meier@udo.edu

**Aufgabe 32:** *Gamma-Astronomie*

**5 P.**

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Fortführung der Aufgabe 25  *$\gamma$ -Astronomie* (Blatt 8). Jetzt soll festgestellt werden ob sich an der Position, auf die das Teleskop gerichtet war, wirklich eine  $\gamma$ -Quelle befindet. Hierzu wird die Nullhypothese verwendet. Zur Erinnerung die Likelihoodfunktion lautete

$$\ln L = -F = N_{\text{off}} \ln(b) + N_{\text{on}} \ln(s + \alpha b) - (1 + \alpha)b - s - \ln(N_{\text{off}}!) - \ln(N_{\text{on}}!) \quad (1)$$

und folgende Werte für  $s$  und  $b$  machten diese Likelihood maximal:

$$\hat{s} = N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}} \quad (2)$$

$$\hat{b} = N_{\text{off}} \quad (3)$$

- a) Die Nullhypothese besagt, dass es gar keine  $\gamma$ -Quelle gibt, also  $s_0 = 0$ . Welcher Wert und welcher Fehler ergeben sich unter dieser Annahme für  $b_0$  nach der Methode der maximalen Likelihood?
- b) Wie lautet das Verhältnis  $\lambda$  der beiden Likelihoods?
- c) Unter den gegebenen Hypothesen und mit großen  $N_{\text{on}}$ ,  $N_{\text{off}}$  ist  $D = -2 \ln \lambda$   $\chi^2$ -verteilt mit einem Freiheitsgrad. Mit welcher Konfidenz lehnen Sie die Nullhypothese ab? Geben Sie Ihr Ergebnis in Einheiten von Sigma an.

*Tipp: Betrachten Sie eine standardnormalverteilte Variable  $u$ . Welcher Verteilung folgt  $u^2$ ? Vergleichen Sie mit  $D$ .*

- d) Berechnen Sie die Signifikanz für die Messung eines Signals für folgende Zahlenbeispiele:
- $N_{\text{on}} = 120$ ,  $N_{\text{off}} = 160$ ,  $\alpha = 0,6$ .
  - $N_{\text{on}} = 150$ ,  $N_{\text{off}} = 320$ ,  $\alpha = 0,3$ .

**Aufgabe 33:**  $\chi^2$ -Test

5 P.

In einem Experiment werden 7 verschiedene Energiedifferenzen mit den Werten <sup>1</sup>

31,6 meV, 32,2 meV, 31,2 meV, 31,9 meV,  
31,3 meV, 30,8 meV, 31,3 meV

mit jeweils einem Fehler von 0,5 meV gemessen.

- a) Hypothese  $A$  sagt einen Wert von 31,3 meV für diese Messgröße voraus. Machen Sie einen  $\chi^2$ -Test und entscheiden Sie, ob die These bei 5 % gewählter Signifikanz verworfen werden muss, oder nicht.
- b) Wie a), aber mit der Hypothese  $B$ , die den Wert 30,7 meV vorhersagt.

**Aufgabe 34:** Likelihood-Quotienten-Test

5 P.

In einer Honigfabrik wird je eine Portion Honig in ein Glas zu  $\mu_0$  Millilitern abgefüllt. Es wird angenommen, dass die Füllmengen produktionsbedingt einer Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu = \mu_0$  und einer unbekannten Varianz  $\sigma^2$  folgen.

- a) Stellen Sie die Testbedingung für einen Likelihood-Quotienten-Test auf, in dem Sie die Nullhypothese von oben gegen die Gegenhypothese, dass die Füllmenge einer Normalverteilung folgt, die *nicht* den Mittelwert  $\mu_0$  hat, testen.
- b) Für jeweils welche Wahl der Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  werden die Likelihood-Funktionen der einzelnen Hypothesen auf dem jeweiligen Parameterbereich maximal?
- c) Setzen Sie die in b) erhaltenen Parameter ein und reduzieren Sie die Testbedingung auf einen Ausdruck der einer t-Statistik folgt.  
*Hinweis: Die Größe  $T = \sqrt{N}(\bar{x} - \mu_0)/s$  folgt unter der Nullhypothese der t-Statistik, wobei  $s$  die Stichprobenvarianz ist.*
- d) Es wird aufgrund der eingesetzten Maschinen eine Füllmenge von  $\mu_0 = 200$  ml erwartet. Aus einer Stichprobe mit 25 Messungen zur Qualitätskontrolle wird ein Mittelwert von  $\bar{x} = 205$  ml bei einer geschätzten Standardabweichung von  $s = 10$  ml gemessen. Wird die oben aufgestellte Nullhypothese bei einer Signifikanz von 5 % abgewiesen oder beibehalten?

---

<sup>1</sup>Das Beispiel kommt aus der Festkörperphysik

**Aufgabe 35:** *Teilchenidentifikation*

**5 P.**

In einem Experiment der Teilchenphysik wird ein Čerenkov-Zähler zur Teilchenidentifikation verwendet. Das Messergebnis des Zählers kann in Form von Likelihood-Ratios angegeben werden. Für eine bestimmte Teilchenspur ergibt sich jeweils

a)  $L_\pi : L_K : L_p = 0,13 : 1,5 : 0,5$

b)  $L_\pi : L_K : L_p = 2,0 : 0,5 : 0,05$

c)  $L_\pi : L_K : L_p = 0,07 : 0,5 : 1,3$

Es ist bekannt, dass unter den gegebenen experimentellen Bedingungen 80 % der Teilchen Pionen, 10 % Kaonen und 10 % Protonen sind (*Prior* Information). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeweils ein Pion, ein Kaon oder ein Proton beobachtet wurde?