1. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2017/2018**
Statistische Methoden der Datenanalyse **Prof. W. Rhode**

Annika Burkowitz, Sebastian Bange, Alexander Harnisch

Aufgabe 1

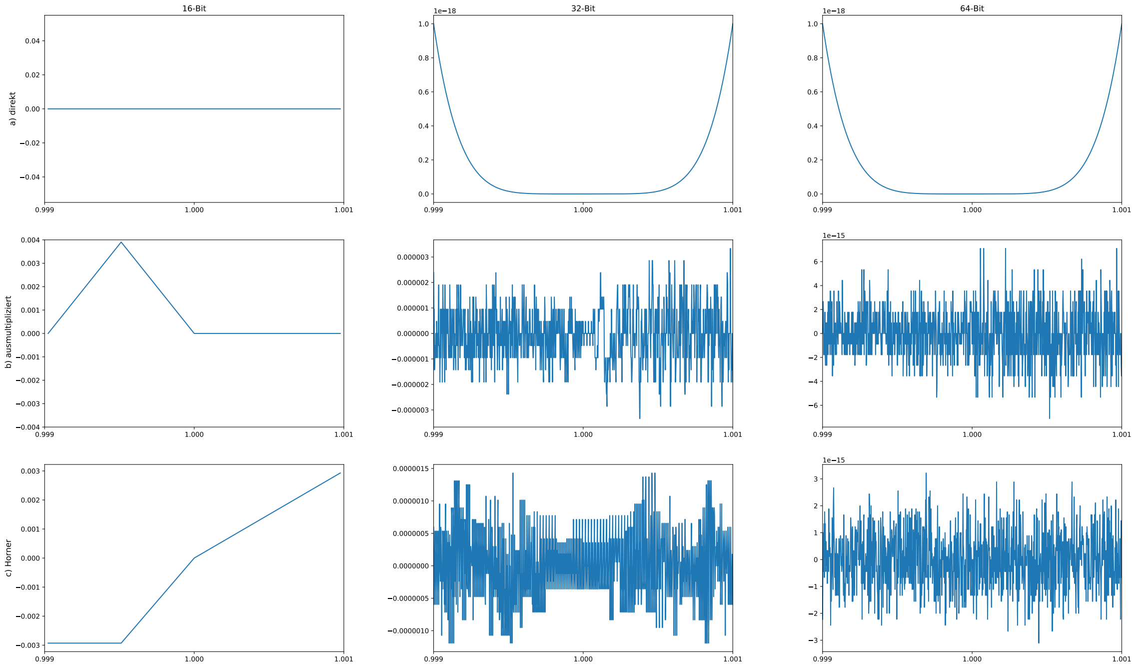

Abbildung 1: Ergebnisse zu Aufgabe 1.

Unsere Ergebnisse zu Aufgabe 1 finden sich in Abbildung 1. Wir gehen davon aus, dass ihr unsere Abgaben zum Korrigieren nicht ausdruckt, darum sollte die Darstellung so mit zoomen gut funktionieren und übersichtlicher sein, als alles einzeln darzustellen. In der ersten Zeile ist das Ergebnis von $(1-x)^6$ in unveränderter Form dargestellt, in der zweiten Zeile die ausmultiplizierte Form und in der dritten Zeile wird mittels Hornerschema ausgewertet. Die Spalten von links nach rechts verwenden 16-Bit, 32-Bit und 64-Bit Gleitkommazahlen.

Allgemein ist zu sagen, dass wie erwartet mit erhöhter Genauigkeit der Gleitkommazahlen auch die Genauigkeit des Ergebnisses zunimmt. Eine Ausnahme ist mit der faktorisierten Form aus a) gegeben, denn hier liefern bereits 32-Bit Gleitkommazahlen das exakte Ergebnis. Die faktorisierte Form ist mit Abstand die beste, da sich die Fehler hier nicht akkumulieren und insgesamt weniger Rechenoperationen durchgeführt werden müssen. Bei den beiden anderen Formen müssen deutlich mehr Rechenoperationen durchgeführt werden wobei sich die Fehler fortpflanzen.

Aufgabe 2

a)

Der analytische Grenzwert ergibt mit Hilfe des Satz von L'Hospital sich wie folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(9-x)^{-\frac{1}{2}}}{1} = -\frac{1}{6}\,. \tag{1}$$

b)

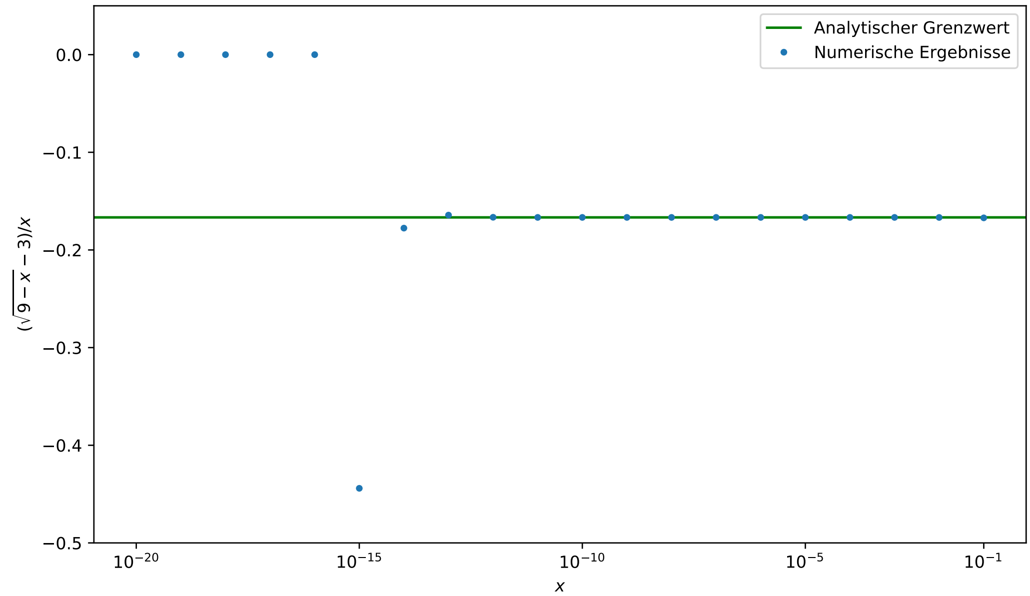

Abbildung 2: Vergleich des analytisches Grenzwertes mit dem numerischen Ergebnis.

Der verwendete Python Datentyp *float* verwendet standardmäßig 53 Bit Präzession damit wird eine Rechnergenauigkeit von 10^{-15} erreicht. Wie in Abbildung 2 gut zu erkennen ist, führt dies dazu, dass bei der Differenzbildung im Fall von $x < 10^{-15}$ das Ergebnis gezwungener Maßen auf exakt 9 gerundet wird, und der Zähler somit 0 ergibt. Anschließend wird durch $0 < x < 10^{-15}$ geteilt was zum Gesamtergebnis 0 führt. Für $x > 10^{-15}$ tritt dieses Rundungsproblem noch nicht auf, und das Ergebnis liegt sehr nahe am analytischen Grenzwert, da der Grenzwert schnell konvergiert.

Aufgabe 3

Es gilt

$$f(x) = g(x) = \frac{2}{3}, \quad \forall x\,. \tag{2}$$

Bis zur Stelle $x \approx 10^4$ nimmt f den analytisch korrekten Wert an und ist für $x > 10^5$ null. In der Darstellung g ist das Verhalten umgekehrt: Hier ist das numerische Ergebnis

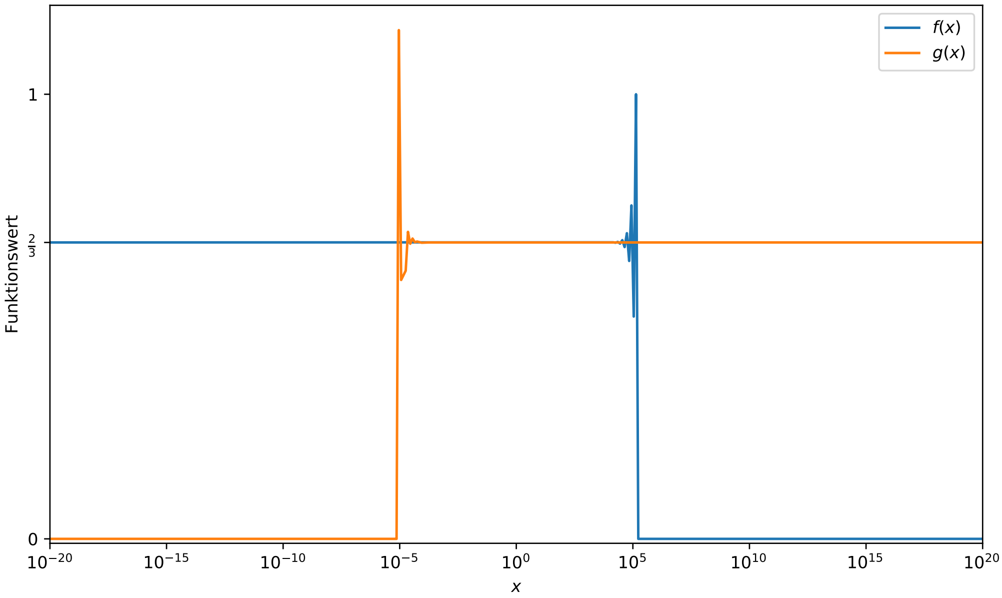

Abbildung 3: Vergleich der numerischen Ergebnisse.

für etwa $x < 10^{-5}$ gleich Null und ab ungefähr $x = 10^{-4}$ gleich dem analytischen Wert. Das Verhalten für f lässt sich dadurch erklären, dass für große x am Rande der Rechnergenauigkeit die Terme $\pm\frac{1}{3}$ verloren gehen, sodass sich $x^3 - x^3 = 0$ ergibt. Im Fall von g tritt das umgekehrte Problem auf, denn hier wird für sehr kleine x $\frac{x^3}{3}$ zu klein gegenüber 3 um bei der gegebenen Rechnergenauigkeit dargestellt werden zu können. Es ergibt sich so $3 - 3 = 0$.

Aufgabe 4

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \left(\frac{2 + \sin^2(\theta)}{1 - \beta^2 \cos^2(\theta)} \right) =: f(\theta) \tag{3}$$

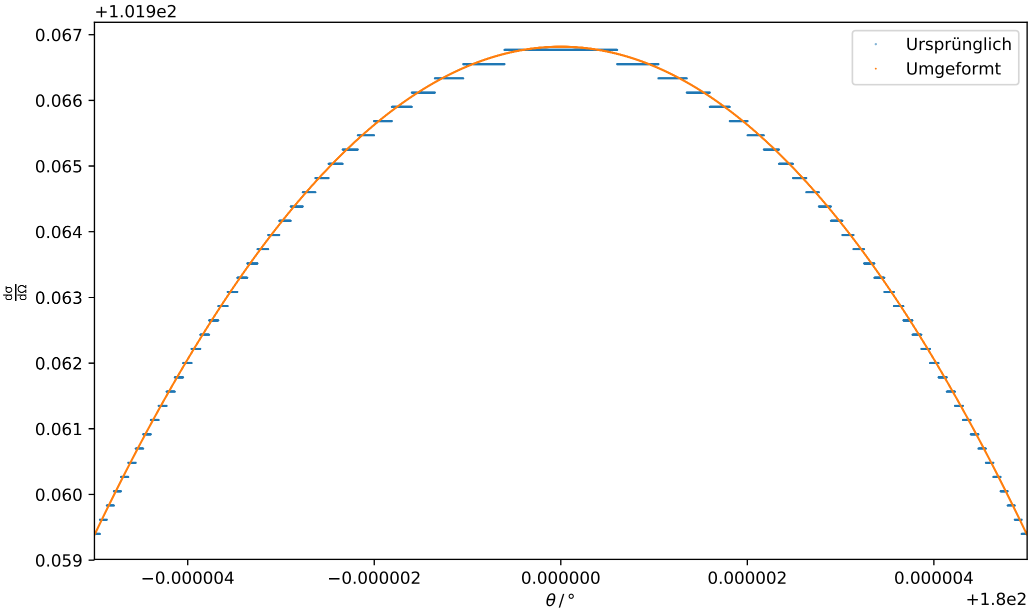

Abbildung 4: Vergleich der numerisch stabilen und instabilen Form.

a)

b)

c)

d)

$$f'(\theta) = \frac{-2\sin(\theta)\cos(\theta)\left(1+\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2\cos^2(\theta)\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow K &= \left|\theta\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right| \\
&= \left|\theta\frac{-2\sin(\theta)\cos(\theta)\left(1+\beta^2\right)\left(1-\beta^2\cos^2(\theta)\right)}{\left(1-\beta^2\cos^2(\theta)\right)^2\left(2+\sin^2(\theta)\right)}\right| \\
&= \left|\theta\frac{-2\sin(\theta)\cos(\theta)\left(1+\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2\cos^2(\theta)\right)\left(2+\sin^2(\theta)\right)}\right|
\end{aligned} \tag{4}$$

e)

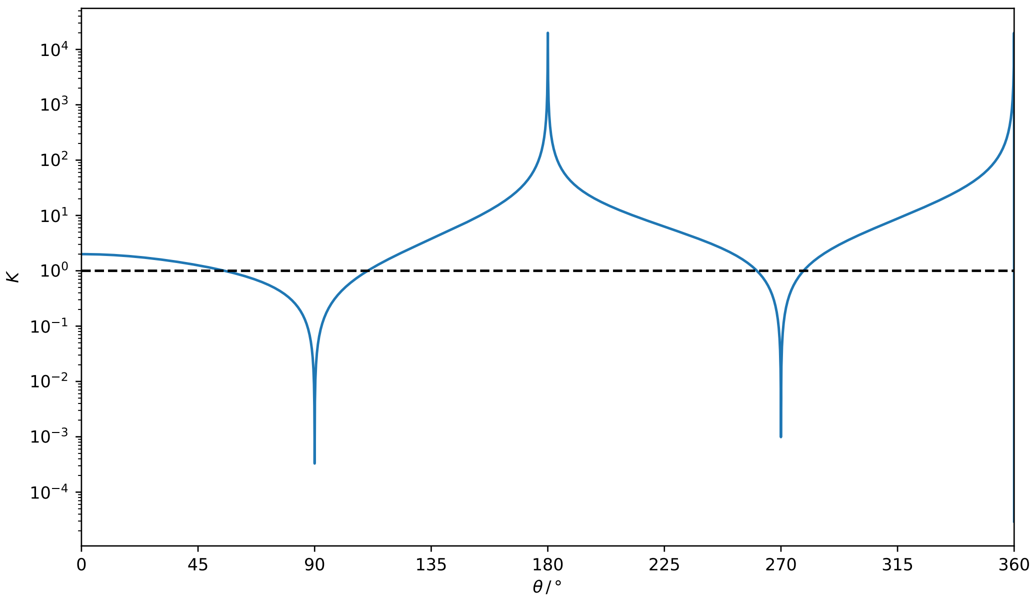

Abbildung 5: Grafische Darstellung des Verlaufs der Konditionszahl.