

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1718]
Di. 10-12	CP-03-150	philipp2.hoffmann@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	P1-02-110	felix.neubuerger@udo.edu und tobias.hoinka@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und maximilian.meier@udo.edu

Aufgabe 5: *Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung*

6 P.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Betrags der Geschwindigkeit v der Moleküle in einem idealen Gas bei der absoluten Temperatur T ist

$$f(v) = N \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \cdot 4\pi v^2,$$

dabei ist m die Molekülmasse, k_B die Boltzmannkonstante und N die Normalisierungskonstante.

Zur Beantwortung der Fragen müssen Sie zuerst N bestimmen! Drücken Sie die Ergebnisse als Funktion von m und T aus, sowie die anderen Ergebnisse als Funktion von v_m .

Hinweis zu c): Eine analytische Lösung ist hier nicht möglich, benutzen Sie ein numerisches Verfahren.

Wie groß sind

- a) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m ,
- b) der Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$,
- c) der Median der Geschwindigkeit $v_{0,5}$,
- d) die volle Breite auf halber Höhe der Verteilung (v_{FWHM}) und
- e) die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v .

Aufgabe 6: *Würfel*

6 P.

Nutzen Sie für diese Aufgabe die Schreibweise für Wahrscheinlichkeiten aus der Vorlesung (z.B. $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 42) = \dots$, $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 42 \mid W_{\text{rot}} = 4) = \dots$). Sie würfeln mit zwei Würfeln, einem roten und einem blauen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) die Summe der Punkte 9 ergibt,
- b) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt,

- c) ein Würfel 4, der andere 5 Punkte zeigt,
- d) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?

Sie werfen die Würfel so, dass der blaue Würfel hinter einen Gegenstand rollt, so dass Sie ihn zunächst nicht sehen können. Der rote Würfel zeigt eine 4. Nachdem Sie das gesehen haben, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- e) die Summe der Punkte 9 ergibt,
- f) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt,
- g) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?

Aufgabe 7: *Zweidimensionale Gaußverteilung*

8 P.

Eine zweidimensionale Gaußverteilung sei durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$\mu_x = 4, \quad \mu_y = 2, \quad \sigma_x = 3,5, \quad \sigma_y = 1,5 \quad \text{und} \quad \text{Cov}(x, y) = 4,2$$

- a) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient?
- b) Zeigen Sie, dass die Kurven konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte Ellipsen sind.
- c) Zeichnen Sie die Ellipse, bei der $f(x, y)$ auf das $1/\sqrt{e}$ -fache des Maximums abgefallen ist. Zeichnen Sie die Werte μ_x , μ_y , $\mu_x \pm \sigma_x$ und $\mu_y \pm \sigma_y$ in Ihrer Zeichnung ein.
- d) Geben Sie eine Rotationsmatrix \mathbf{M} an, so dass die Variablen $(x', y')^\top = \mathbf{M}(x, y)^\top$ unkorreliert sind. Wie groß sind $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.
- e) Wie lang sind die Hauptachsen der Ellipse und welchen Winkel bilden sie mit den Koordinatenachsen? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.
- f) Wie lauten die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x | y)$ und $f(y | x)$? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.
- g) Wo liegen die bedingten Mittelwerte $E(x | y)$ und $E(y | x)$? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.