Annika Burkowitz, Sebastian Bange, Alexander Harnisch

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wird die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung in der Form

$$f(v) = N4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \tag{1}$$

betrachtet. Zuerst ist die Verteilung zu normieren. Dafür kann die Gammafunktion verwendet werden, es geht aber auch viel schöner ohne. Dafür definieren wir zuerst

$$I := \int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Um I auszuwerten wird quadriert und anschließend in Polarkoordinaten gewechselt:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\right) && (3)\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\alpha t(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (4)\\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^\infty \exp(-\alpha t r^2) r\mathrm{d}r && (5)\\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \exp(-\alpha t u)\mathrm{d}u && (6)\\
&= \frac{\pi}{4\alpha t}\,. && (7)
\end{aligned}$$

Wegen $I > 0$ ergibt sich somit

$$I = \sqrt{I^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}\,. \tag{8}$$

Das für die Normierung zu berechnende Integral lässt sich nun auswerten:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha x^2) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I\Big|_{t=1} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}(\alpha t)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{t=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{9}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = N4\pi\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{\frac{3}{2}} &\stackrel{!}{=} 1 && (10)\\
\Rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}}&\,. && (11)
\end{aligned}$$

a)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m ist die Stelle, an der f maximal wird. Daher bilden wir die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} f = 4\pi N v \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\left(2 - \frac{mv^2}{k_\mathrm{B}T}\right) \overset{!}{=} 0\,. \tag{12}$$

Das Extremum bei 0 ist offenbar ein Tiefpunkt, da f keine negativen Werte annimmt und $f(0) = 0$. Daraus folgt, dass die beiden anderen Extrema Maxima sind, wobei das positive der beiden an der gesuchten Stelle

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}} \tag{13}$$

liegt.

b)

Der Erwartungswert des Geschwindigkeitsbetrags lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle v\rangle_f &= \int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = 4\pi N \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}v && (14)\\
&= 4\pi N \int_0^\infty \frac{u}{2} \exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}u && (15)\\
&= 2\pi N \left(\left[-\frac{2uk_\mathrm{B}T}{m}\exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}u\right) && (16)\\
&= 2\pi N \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^2 \overset{(11)}{=} 2\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_\mathrm{m}\,. && (17)
\end{aligned}$$

c)

Gesucht ist der Median $v_{0,5}$, für den gilt

$$\int_0^{v_{0,5}} f(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,. \tag{18}$$

Es ist nicht möglich, eine analytische Lösung für $v_{0,5}$ zu finden, da für $f(v)$ keine Stammfunktion gefunden werden kann. Daher lösen wir die Gleichung numerisch, dafür muss diese zuerst in eine dimensionslose Form gebracht werden. Mit dem vorherigen Ergebnis (13) gilt

$$N = \pi^{-\frac{3}{2}} v_\mathrm{m}^{-3} \Rightarrow f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_\mathrm{m}} \frac{v^2}{v_\mathrm{m}^2} \exp\left(-\frac{v^2}{v_\mathrm{m}^2}\right)\,. \tag{19}$$

Mit der Substitution $x = \frac{v}{v_\mathrm{m}}$ nimmt (18) die für numerische Integration geeignete Form

$$\int_0^{v_{0,5}} f(v)\mathrm{d}v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_{0,5}}{v_\mathrm{m}}} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{!}{=} \frac{1}{2} \tag{20}$$

an. Das Integral kann nun sukzessive mit einer beliebigen NEWTON-COTES-Formel berechnet werden, bis es den gewünschten Wert von $\frac{1}{2}$ überschreitet. Wir verwenden die Trapezregel. Um den Performance-Limitierungen des PYTHON-Interpreters möglichst gut zu entgehen, verwenden wir außerdem die Pakete NUMPY bzw. NUMEXPR. Es werden in einer Schleife immer N Funktionsauswertungen parallelisiert durchgeführt und die Teilsummen anschließend aufsummiert. Für optimale Performance sollte N so gewählt werden, dass der Hauptspeicher maximal ausgelastet wird. Außerdem ist die Lösung für umso stabiler, umso größer N gewählt wird, da seltener gerundet werden muss. Prinzipiell haben wir die Berechnung so implementiert, dass beliebige Genauigkeiten erreicht werden können. So haben wir den Median mit einer Genauigkeit von 10^{-10} als

$$v_{0,5} = 1{,}0876520285 v_\mathrm{m} \tag{21}$$

bestimmt.

d)

Die volle Breite auf halber Höhe v_FWHM ergibt sich als Differenz der Lösungen von

$$f(v) - \frac{1}{2} f(v_\mathrm{m}) = x^2 \exp\left(-x^2\right) - \frac{1}{2e} \stackrel{!}{=} 0 \tag{22}$$

mit $x = \frac{v}{v_\mathrm{m}}$. Das Ergebnis lässt sich zwar unter Verwendung der LAMBERTSCHEN-W-Funktion analytisch darstellen, diese besitzt aber bekanntlich selbst keine elementare Darstellung. Daher lösen wir erneut numerisch. Da (22) einfach analytisch abgeleitet werden kann, bietet sich die Verwendung des NEWTON-Verfahrens an. Die Ableitung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(v) - \frac{1}{2} f(v_\mathrm{m})\right) = 2x \exp(-x^2)(1 - x^2)\,. \tag{23}$$

Aufgrund der quadratischen Konvergenz des NEWTON-Verfahrens ergeben sich bereits nach wenigen Iterationen mit den Startwerten 0,8 und 1,2 die gesuchten Nullstellen

$$x_1 = 0{,}481623247971, \quad x_2 = 1{,}63656560822 \tag{24}$$
$$\Rightarrow v_\mathrm{FWHM} = v_\mathrm{m}(x_2 - x_1) = 1{,}15494236025 v_\mathrm{m}\,. \tag{25}$$

e)

Da wir den Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ bereits in b) bestimmt haben, bietet es sich an die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v über die Form

$$\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 \tag{26}$$

zu bestimmen, denn damit muss nur noch

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) \mathrm{d}v = 4\pi N \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{v^2}{v_\mathrm{m}^2}\right) \mathrm{d}v \tag{27}$$

ausgewertet werden. Hierzu verwenden wir erneut die Definition (2):

$$\int_0^\infty x^4 \exp(-\alpha x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I \Big|_{t=1} \stackrel{(8)}{=} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \alpha^{-\frac{5}{2}}\,. \tag{28}$$

Damit ergibt sich

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi(\pi v_\mathrm{m}^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} v_\mathrm{m}^5 = \frac{3}{2} v_\mathrm{m}^2 \tag{29}$$

$$\Rightarrow \sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}} v_\mathrm{m} \,. \tag{30}$$

Aufgabe 6

In dieser Aufgabe werden die Wahrscheinlichkeiten für ausgewählte Ereignisse, die bei einem Wurf mit einem roten und einem blauen optimalen sechsseitigen Würfel auftreten können, betrachtet.

a) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} = 9) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

b) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} \geq 9) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$

c) $P((W_\mathrm{rot} = 4 \wedge W_\mathrm{blau} = 5) \vee (W_\mathrm{rot} = 5 \wedge W_\mathrm{blau} = 4)) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

d) $P(W_\mathrm{rot} = 4 \wedge W_\mathrm{blau} = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Der rote Würfel zeigt jetzt immer 4, danach wird das Ergebnis des blauen Würfels angeschaut.

e) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} = 9 | W_\mathrm{rot} = 4) = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

f) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} \geq 9 | W_\mathrm{rot} = 4) = 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

g) $P(W_\mathrm{blau} = 5 | W_\mathrm{rot} = 4) = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Aufgabe 7

Die Rechnungen und dazugehörige Erklärung sind handschriftlich am Ende zu finden. Die zu Erstellende „Zeichnung“ ist mit Abbildung 1 gegeben. Dazu ist noch anzumerken:

- **c)** Die gewünschte Ellipse ist die 1σ-Ellipse, und als solche gekennzeichnet. Die Erwartungswerte sind zusammen mit den Standardabweichungen als Fehlerbalken dargestellt.
- **d)** Die Größe der Werte $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$ sind durch die (halbe) Länge der Hauptachsen dargestellt.
- **e)** Die Länge der Hauptachsen sind $2\sigma_{x'}$ und $2\sigma_{y'}$ (vgl. handschriftlicher Teil). Der Winkel zwischen Hauptachsen und Koordinatenachsen ist der negative Drehwinkel zur Diagonalisierung der Kovarianzmatrix (etwa 20°, vgl. handschriftlicher Teil).

- **f)** Die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x|y)$ und $f(y|x)$ lassen sich unmöglich noch in der selben Abbildung darstellen, da sie selbst zweidimensionale Verteilungen sind. Wir gehen davon aus, dass der Copy & Paste Satz in der Teilaufgabe eigentlich nicht dazugehört.

- **e)** Die bedingten Erwartungswerte $E(x|y)$ und $E(y|x)$ sind als durchgezogene Geraden dargestellt, ihre Standardabweichungen als dazu parallele, gepunktete Linien in der selben Farbe.

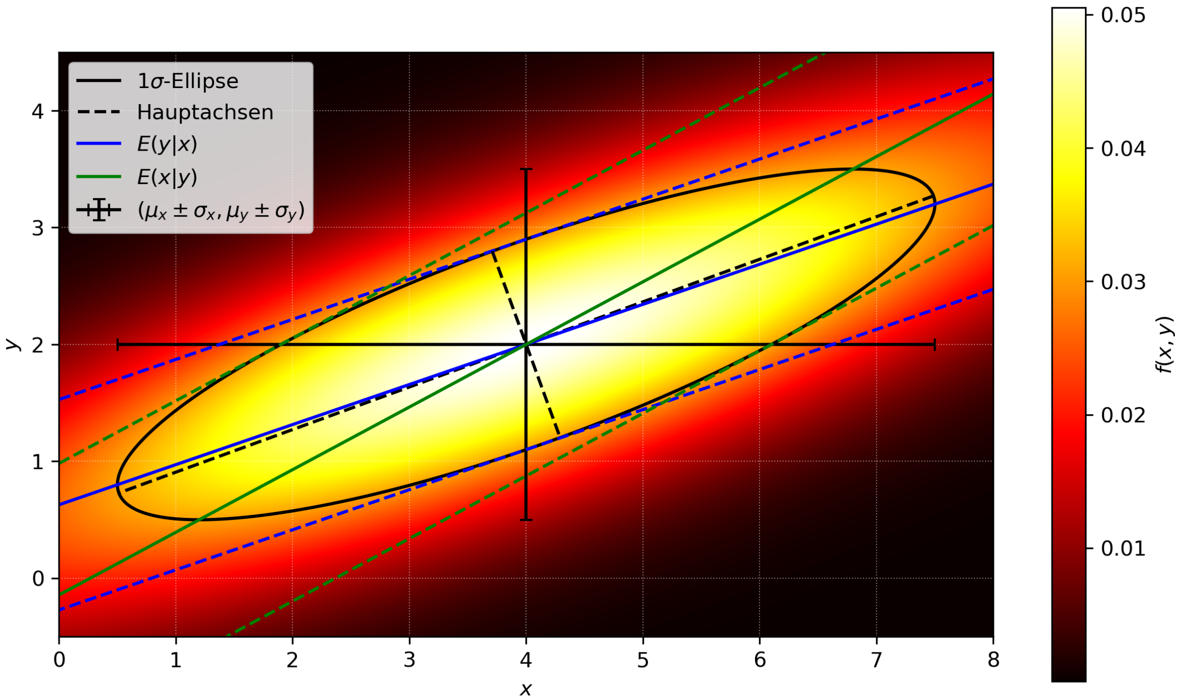

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Ergebnisse von Aufgabe 7.

7 a) Der Korrelationskoeffizient ρ berechnet sich wie folgt:

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\cdot\sigma(y)} = \frac{4{,}2}{3{,}5\cdot 1{,}5} = 0{,}8$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdiche $f(x,y)$ wird konstant gesetzt:

$$f(x,y) = k\exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T B\,(\vec{x}-\vec{a})\right] \stackrel{!}{=} const$$

$$B = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - cov^2(x,y)}\begin{pmatrix}\sigma_y^2 & -cov(x,y)\\ -cov(x,y) & \sigma_x^2\end{pmatrix}$$

$$\det B = \left(\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2-cov^2(x,y)}\right)^2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - cov^2(x,y))$$

$$k = \left(\frac{\det B}{(2\pi)^2}\right)^{1/2} = \left[\frac{1}{(2\pi)^2(\sigma_x^2\sigma_y^2-cov^2(x,y))}\right]^{1/2}$$

$$f(x,y) =: c\ (=const)$$

$$\Leftrightarrow -2\ln\left(\frac{c}{k}\right) = (\vec{x}-\vec{a})^T\cdot B_o\,(\vec{x}-\vec{a})$$

$$= (x-\mu_x,\ y-\mu_y)\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2-cov^2(x,y)}\begin{pmatrix}\sigma_y^2 & -cov(x,y)\\ -cov(x,y) & \sigma_x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\mu_x\\ y-\mu_y\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2-cov^2(x,y)}\left((x-\mu_x)\sigma_y^2-(y-\mu_y)cov(x,y),\ (y-\mu_y)\sigma_x^2-(x-\mu_x)cov(x,y)\right)\begin{pmatrix}x-\mu_x\\ y-\mu_y\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2-cov^2(x,y)}\left[(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2(x-\mu_x)(y-\mu_y)cov(x,y) + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\,\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\,\frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[u_x^2 + u_y^2 - 2u_xu_y\rho\right] =: E\ ,\quad u_i = \frac{i-\mu_i}{\sigma_i}$$

Dies entspricht nach Addition von $2\ln\left(\frac{c}{k}\right)$ der allgemeinen Ellipsenform:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

c) Da die Amplitude von $f(x,y) = k$ ist, muss, um $f(x,y)$ da zu zeichnen, wo die Funktion auf das $\frac{1}{\sqrt{e}}$-fache abgefallen ist, die obere Gleichung mit $\frac{c}{k} = e^{-1/2}$ geplottet werden. Das plotten geschiet mit der Funktion matplotlib.pyplot.contour(...), wobei die Schnittpunkte eines Grids mit Punkten aus $[0,8] \times [-0{,}5 \times 4{,}5]$ und $E(x,y)$ geplottet werden. Da die linke Seite der Gleichung $=1$ ist, soll nur die Höhenlinie mit dem Wert 1 gezeichnet werden.

Diese Ellipse gibt die 1σ-Umgebung an.

d) Um die Rotationsmatrix M zu bestimmen, wird die Kovarianz matrix zuerst mit einer allgemeinen Rotationsmatrix transformiert.

Da die Nebendiagonalen einer Kovarianzmatrix Null sind, wenn die Variablen unkorelliert sind, kann über diese Einträge der benötigte Drehwinkel α berechnet werden.

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix}}_{COV} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{M^T}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \cos\alpha - cov(x,y)\sin\alpha & cov(x,y)\cos\alpha - \sigma_y^2 \sin\alpha \\ \sigma_x^2 \sin\alpha + cov(x,y)\cos\alpha & cov(x,y)\sin\alpha + \sigma_y^2 \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot M^T
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \cos^2\alpha - 2 cov \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha & \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha - cov \sin^2\alpha + cov\cos^2\alpha - \sigma_y^2 \cos\alpha\sin\alpha \\ \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha + cov\cos^2\alpha - cov\sin^2\alpha - \sigma_y^2\cos\alpha\sin\alpha & \sigma_x^2 \sin^2\alpha + 2 cov\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_y^2\cos^2\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{!}{=} \begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha - cov\sin^2\alpha + cov\cos^2\alpha - \sigma_y^2\cos\alpha\sin\alpha \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\sin\alpha\cos\alpha = cov\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{cov} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -2\cot(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = -\frac{1}{2}\tan(2\alpha) = \frac{1}{2}\tan(-2\alpha)$$

$$\Rightarrow -2\alpha = \arctan\left(\frac{2cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}\right) \approx -20{,}0°$$

$$\Rightarrow \sigma_x' = \left[\sigma_x^2\cos^2\alpha + \sigma_y^2\sin^2\alpha - 2cov\cos\alpha\sin\alpha\right]^{1/2} \approx 3{,}71$$

$$\sigma_y' = \left[\sigma_x^2\sin^2\alpha + \sigma_y^2\cos^2\alpha + 2cov\cos\alpha\sin\alpha\right]^{1/2} \approx 0{,}849$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$u_y = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \quad \frac{du_y}{dy} = \frac{1}{\sigma_y}$$

f) $$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad dy = \sigma_y du_y$$

$$g(x) = k\sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x^2 + u_y^2 - 2u_xu_y\rho)\right] du_y$$

$$= k\sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + \underbrace{u_y^2 - 2u_xu_y\rho + u_x^2\rho^2}_{(u_y - u_x\rho)^2} - u_x^2\rho^2\right)\right] du_y$$

$$= k\sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2\right] du_y \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u_x^2(1-\rho^2)\right]$$

$$= k\sigma_y \exp\left[-\frac{u_x^2}{2}\right]\sqrt{2(1-\rho^2)\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow f(y|x) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_y}(2(1-\rho^2)\cdot\pi)^{-1/2}}_{=:\tilde{k}_y} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x^2 + u_y^2 - 2u_xu_y\rho) + \frac{u_x^2}{2}\right]$$

$$= \tilde{k}_y \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_y^2 + u_x^2 - 2u_xu_y\rho - u_x^2(1-\rho^2)\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_y \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_y^2 - 2u_x u_y \rho + u_x^2\rho^2 + u_x^2 - u_x^2\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_y \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2\right]$$

$$f(y|x) \overset{!}{=} c\,, \quad \frac{c}{\tilde{k}_y} \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1\text{-}\sigma\text{-Umgebung})$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-1/2}) = -1/2$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\rho\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\rho\right)^2$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}\,, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,, \quad u_x = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\,, \quad dx = \sigma_x\,du_x$$

$$h(y) = k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y \rho\right)\right] du_x$$

$$= k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 - 2u_x u_y\rho + u_y^2\rho^2 - u_y^2\rho^2 + u_y^2\right)\right] du_x$$

$$= k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x - u_y\rho)^2\right] du_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u_y^2(1-\rho^2)\right]$$

$$= k\sigma_x \exp\left[-\frac{u_y^2}{2}\right]\sqrt{2(1-\rho^2)\pi}$$

$$\Rightarrow f(x|y) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_x}\left(2(1-\rho^2)\pi\right)^{-1/2}}_{=:\tilde{k}_x} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y\rho\right) + \frac{u_y^2}{2}\right]$$

$$= \tilde{k}_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y\rho - u_y^2(1-\rho^2)\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x - u_y\rho)^2\right]$$

$f(x|y) \doteq c \; ; \; \frac{c}{k_x} \doteq e^{-1/2}$ (1-σ-Umgebung)

$\Rightarrow \ln(e^{-1/2}) = -1/2$

$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_x - u_y \rho)^2$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \rho \right)^2$

g) $E(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, f(y|x) \, dy \, , \quad u_y := \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \, , \; dy = \sigma_y du_y$

$y = \sigma_y u_y + \mu_y$

$= \tilde{k}_y \sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_y u_y + \mu_y) \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_y - u_x \rho)^2 \right] du_y$

$= \tilde{k}_y \sigma_y \left[\mu_y \sqrt{2(1-\rho^2)\pi} + \sigma_y \sqrt{2(1-\rho^2)\pi} \, u_x \rho \right]$

$= \mu_y + \sigma_y u_x \rho$

$= \mu_y + \sigma_y \rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$

$E(x|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x|y) \, dx \, , \quad \Big| \; u_x = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \, , \; \frac{du_x}{dx} = \frac{1}{\sigma_x} \, , \; dx = \sigma_x du_x \, ,$

$x = \sigma_x u_x + \mu_x$

$= \tilde{k}_x \sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_x u_x + \mu_x) \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_x - u_y \rho)^2 \right] du_x$

$= \mu_x + \sigma_x u_y \rho$

$= \mu_x + \sigma_x \rho \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$