A36

a) $g = A f \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$

b) $f = A^{-1} g \quad , \quad A^{-1} =: B$

$$B = (1-2\varepsilon)^{-1} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$f_{1/2} = (1-2\varepsilon)^{-1} \left((1-\varepsilon) g_{1/2} - \varepsilon g_{2/1} \right)$$

c) Poisson => Fehler $\sqrt{n} \Rightarrow$ Varianz n

Also $V[g] = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$

$$V[f] = B\, V[g]\, B^T = (1-2\varepsilon)^{-2} \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)^2 g_1 + \varepsilon^2 g_2 & -\varepsilon(1-\varepsilon)(g_1+g_2) \\ -\varepsilon(1-\varepsilon)(g_1+g_2) & (1-\varepsilon)^2 g_2 + \varepsilon^2 g_1 \end{pmatrix}$$

d) $f_1 = 203{,}875,\ f_2 = 165{,}125 \ ,\ f_1 + f_2 = 369$ ✓

$$V[f] = \begin{pmatrix} 255{,}765625 & -51{,}890625 \\ -51{,}890625 & 217{,}075625 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{f_i} = \sqrt{(V[f])_{ii}} \ ,\quad \sigma_{f_1} = 15{,}9926741$

$\sigma_{f_2} = 14{,}7374502$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(f_1, f_2)}{\sigma_{f_1} \cdot \sigma_{f_2}} = -0{,}22025324331796553$$

e) $f = (262, 107)^T \quad f_1 + f_2 = 369$ ✓

$V[f] = \begin{pmatrix} 2476 & -2214 \\ -2214 & 2321 \end{pmatrix} \quad \sigma_{f_1} = 49{,}75942122$

$\sigma_{f_2} = 48{,}17675788$

$\rho = -0{,}9235591729158676$

Durch Fehlkategorisierungswahrscheinlichkeit wird das Ergebnis zufälliger, dies spiegelt sich in den höheren Fehlern und der (negativen) Korrelation wieder.

f) Für $\varepsilon \to 0{,}5$ wird $V[f]$ singulär bzw. $\rho \to 1$.

Die Daten sind also vollkommen nutzlos, sie beinhalten keine Information.

A37

c) $g = Af$, $A = U \cdot D \cdot U^T$ $\Rightarrow$ U hat die EVs als Spalten

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{U^T g}_{\tilde{g}} = \underbrace{U^T U}_{1} \underbrace{D}_{\tilde{A}} \underbrace{U^T f}_{\tilde{f}}$, $\tilde{A} = D$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{g} = D \tilde{f}$, , $\tilde{g} = c$, $\tilde{f} = b$ (laut Aufgabe)

$\Leftrightarrow$ $c = Db$

d) $V[g] = \mathrm{diag}(s)$ (Poisson Fehler)

$\Rightarrow$ $V[c] = U^T V[s] U$

$\Rightarrow$ $V[b] = D^{-1} U^T V[s] U D^{-1}$ $\left((D^{-1})^T = D^{-1} \right)$

e) $f = Ub$

$\Rightarrow$ $V[f] = U V[b] U^T$

A38

b) $g = A f$ g: size ; f = true energy
24 bins, 120-500 ; 16 bins 75 bis 200

Also A ist 24×16 Matrix

c) $p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

g_i seien die Messwerte

$\lambda_i = A_i f$ also Likelihood:

$$L = \prod_{i=1}^{24} \frac{\lambda_i^{g_i} e^{-\lambda_i}}{g_i!} = \prod_{i=1}^{24} \frac{(A_i \cdot f)^{g_i} e^{-A_i \cdot f}}{g_i!}$$

$$F = -\log L = \sum_{i=1}^{24} \left[\log(g_i!) - g_i \log(A_i f) + A_i \cdot f \right]$$

d) $F_{reg} = F + \frac{\tau}{2} \| \Gamma f \|^2$

$$\frac{\partial F_{reg}}{\partial f_i} = -\sum_{j=1}^{24} \left(g_j \frac{A_{ji} f_i}{A_j \cdot f} + A_{ji} f_i \right) + \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\tau}{2} \left(\sum_{j=1}^{16} (\Gamma_j f_i)^2 \right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{24} A_{ji} \left(f_i - \frac{g_j}{A_j f} \right) + \tau \sum_{j=1}^{16} (\Gamma_j f) \cdot \Gamma_{ji} f_i$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f_i \partial f_j} = \frac{\partial}{\partial f_j} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i} \right) = + \sum_{k=1}^{24} \left[\frac{g_k}{A_{kj} f_j^2} + A_{kj} \delta_{ij} \right]$$
$$+ \tau \left(\sum_{k=1}^{16} \Gamma_{kj} f_j \Gamma_{ki} f_i + \delta_{ij} \sum_{k=1}^{16} (\Gamma_k f) \Gamma_{kj} \right)$$

mit Sicherheit falsch, ich versuch gar nicht erst das zu implementieren/debuggen leider zu wenig Zeit.