2. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2017/2018**
Statistische Methoden der Datenanalyse **Prof. W. Rhode**
Annika Burkowitz, Sebastian Bange, Alexander Harnisch

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe wird die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung in der Form

$$f(v) = N4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \tag{1}$$

betrachtet. Zuerst ist die Verteilung zu normieren. Dafür kann die Gammafunktion verwendet werden, es geht aber auch viel schöner ohne. Dafür definieren wir zuerst

$$I := \int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Um I auszuwerten wird quadriert und anschließend in Polarkoordinaten gewechselt:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha t x^2)\mathrm{d}x\right) && (3)\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\alpha t(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (4)\\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^\infty \exp(-\alpha t r^2) r\mathrm{d}r && (5)\\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \exp(-\alpha t u)\mathrm{d}u && (6)\\
&= \frac{\pi}{4\alpha t}\,. && (7)
\end{aligned}$$

Wegen $I > 0$ ergibt sich somit

$$I = \sqrt{I^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}\,. \tag{8}$$

Das für die Normierung zu berechnende Integral lässt sich nun auswerten:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha x^2) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I\Big|_{t=1} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}(\alpha t)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{t=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{9}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = N4\pi\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{\frac{3}{2}} &\overset{!}{=} 1 && (10)\\
\Rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}}&\,. && (11)
\end{aligned}$$

a)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m ist die Stelle, an der f maximal wird. Daher bilden wir die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} f = 4\pi N v \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\left(2 - \frac{mv^2}{k_\mathrm{B}T}\right) \overset{!}{=} 0\,. \tag{12}$$

Das Extremum bei 0 ist offenbar ein Tiefpunkt, da f keine negativen Werte annimmt und $f(0) = 0$. Daraus folgt, dass die beiden anderen Extrema Maxima sind, wobei das positive der beiden an der gesuchten Stelle

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}} \tag{13}$$

liegt.

b)

Der Erwartungswert des Geschwindigkeitsbetrags lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle v\rangle_f &= \int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = 4\pi N \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}v & (14)\\
&= 4\pi N \int_0^\infty \frac{u}{2}\exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}u & (15)\\
&= 2\pi N\left(\left[-\frac{2uk_\mathrm{B}T}{m}\exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\mathrm{d}u\right) & (16)\\
&= 2\pi N\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^2 \overset{(11)}{=} 2\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{\pi m}}\,. & (17)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

In dieser Aufgabe werden die Wahrscheinlichkeiten für ausgewählte Ereignisse, die bei einem Wurf mit einem roten und einem blauen optimalen sechsseitigen Würfel auftreten können, betrachtet.

a) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} = 9) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

b) $P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} \geq 9) = \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{36}$

c) $P((W_\mathrm{rot} = 4 \wedge W_\mathrm{blau} = 5) \vee (W_\mathrm{rot} = 5 \wedge W_\mathrm{blau} = 4)) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

d) $P(W_\mathrm{rot} = 4 \wedge W_\mathrm{blau} = 5) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Der rote Würfel zeigt jetzt immer 4, danach wird das Ergebnis des blauen Würfels angeschaut.

e) $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 9 | W_{\text{rot}} = 4) = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

f) $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} \geq 9 | W_{\text{rot}} = 4) = 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

g) $P(W_{\text{blau}} = 5 | W_{\text{rot}} = 4) = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$