1. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse
Abgabe: 24.10.2017 23:59

WS 2017/2018
Prof. W. Rhode

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1718]
Di. 10-12	CP-03-150	philipp2.hoffmann@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	P1-02-110	felix.neubuerger@udo.edu und tobias.hoinka@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und maximilian.meier@udo.edu

Aufgabe 1: *Polynom* **3 P.**

Werten Sie das Polynom $f(x) = (1-x)^6$ numerisch auf unterschiedliche Weise im Bereich $0{,}999 \leq x \leq 1{,}001$ an 1000 Stellen aus und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

a) Berechnung von $(1-x)^6$.

b) Berechnung des ausmultiplizierten Polynoms (binomische Formel) auf naive Weise.

c) Berechnung des ausmultiplizierten Polynoms mittels Horner-Schema.

Interpretieren Sie die Ergebnisse für 16-Bit, 32-Bit und 64-Bit Gleitkommazahlen.

Hinweis: Erstellen sie das Array für die x-Werte mit 16-Bit Präzision mit

```
np.linspace(a, b, N, dtype='float16').
```

Analog für 32-Bit und 64-Bit.

Aufgabe 2: *Grenzwert* **4 P.**

a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} (\sqrt{9-x} - 3)/x$$

b) Versuchen Sie, obigen Grenzwert numerisch zu berechnen, indem Sie für x nacheinander 0,1, 0,01, 0,001, ... bis 10^{-20} einsetzen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3: *Numerische Stabilität* **3 P.**

Betrachten Sie die Funktionen

a) $f(x) = (x^3 + 1/3) - (x^3 - 1/3)$ und

b) $g(x) = ((3 + x^3/3) - (3 - x^3/3))/x^3$.

Bestimmen Sie empirisch, für welche Bereiche von x (grob) das numerische Ergebnis

- vom algebraischen um nicht mehr als 1 % abweicht,

- gleich Null ist.

c) Stellen Sie das Ergebnis in geeigneter Form graphisch dar (d. h. z. B. logarithmische x-Skala)!

Aufgabe 4: $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+ \to \gamma\gamma$ **10 P.**

Ein Term des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+ \to \gamma\gamma$ ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2+\sin^2(\theta)}{1-\beta^2\cos^2(\theta)}\right) \quad .$$

mit

$$s = (2E_\mathrm{e})^2 \quad (E_\mathrm{e} \text{ ist die Energie des } \mathrm{e}^- \text{ oder } \mathrm{e}^+ \text{ im Schwerpunktsystem}),$$
$$\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}$$
$$\gamma = \frac{E_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} \quad (m_\mathrm{e} = 511\,\mathrm{keV})$$

und der Feinstrukturkonstante α.

a) Ist diese Gleichung für $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ numerisch stabil? In welchem Bereich von θ ist die Gleichung für $E_\mathrm{e} = 50\,\mathrm{GeV}$ numerisch instabil?

b) Beheben Sie die Stabilitätsprobleme durch eine geeignete analytische Umformung. (Hinweis: Nutzen Sie $1-\beta^2 = {}^1/_{\gamma^2}$ und $1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$)

c) Zeigen Sie, dass Sie die Stabilitätsprobleme behoben haben, indem Sie beide Gleichungen in den kritischen Intervallen darstellen.

d) Berechnen Sie die Konditionszahl. Wie hängt diese von θ ab?

e) Stellen Sie den Verlauf der Konditionszahl als Funktion von θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) grafisch dar. In welchem Bereich ist das Problem gut, in welchem schlecht konditioniert?