10. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2017/2018**
Statistische Methoden der Datenanalyse **Prof. W. Rhode**
Annika Burkowitz, Sebastian Bange, Alexander Harnisch

Aufgabe 31

Die Variablennamen im Code richten sich alle nach der Vorlesung, wegen der fehlenden Kommentare sei daher auf diese verwiesen. Das zu fittende Polynom hat die Form *test*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6\,. \tag{1}$$

a)

Für die Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= -6{,}74453270 \cdot 10^{-2} \\ a_1 &= 6{,}09609038 \cdot 10^{-1} \\ a_2 &= -5{,}13748213 \cdot 10^{-1} \\ a_3 &= 2{,}10566521 \cdot 10^{-1} \\ a_4 &= -4{,}52007751 \cdot 10^{-2} \\ a_5 &= 4{,}78568049e \cdot 10^{-3} \\ a_6 &= -1{,}96288196e \cdot 10^{-4}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 1 dargestellt.

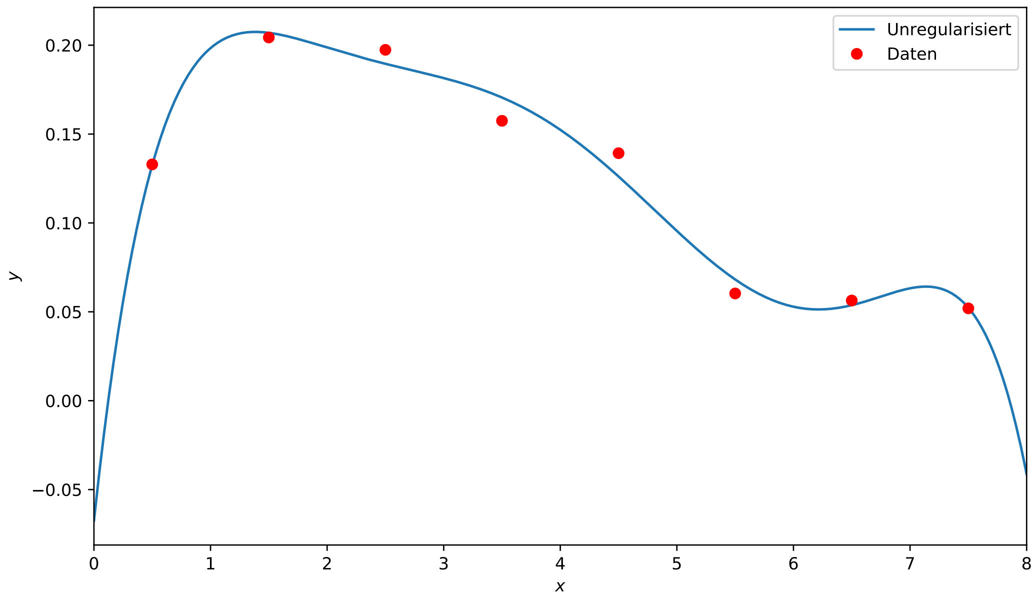

Abbildung 1: Geringste Quadrate Fit ohne Regularisierung an die Daten *aufg_a.csv*.

b)

Falls ihr die Koeffizienten wirklich vergleichen wollt, werden diese vom Skript ausgegeben. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 dargestellt.

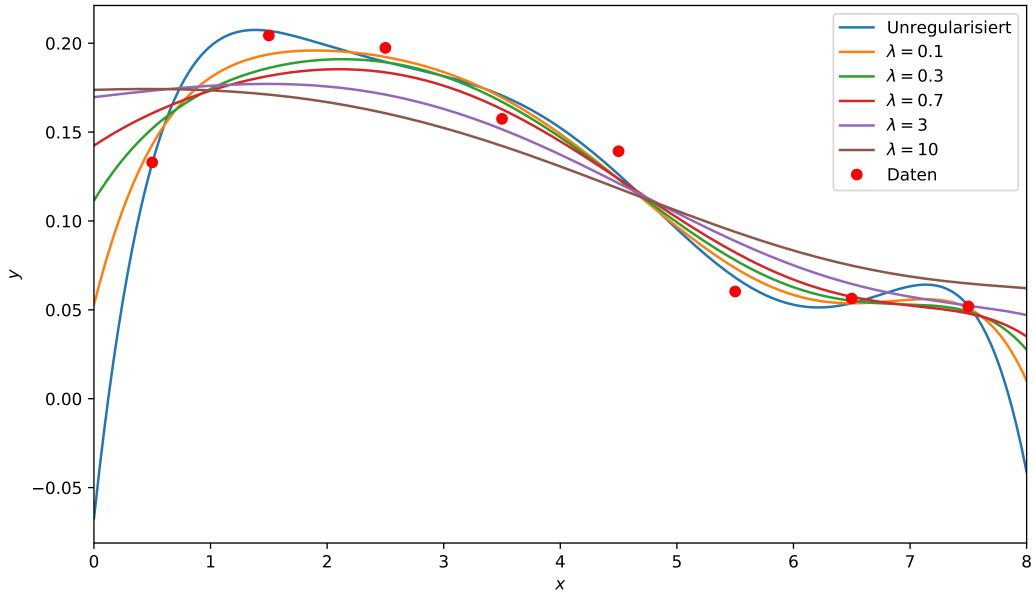

Abbildung 2: Geringste Quadrate Fit mit Regularisierung durch die zweite Ableitung für verschiedene Regularisierungsstärken λ an die Daten *aufg_a.csv*.

c)

Das Ergebnis ist in Abbildung 3 dargestellt.

A29

a) $-\ln \mathcal{L} = -\ln\left(\frac{\lambda^{13}}{13!}\cdot\frac{\lambda^{8}}{8!}\cdot\frac{\lambda^{9}}{9!}\; e^{-3\lambda}\right)$

$= -30\ln(\lambda) + 3\lambda + \underbrace{\ln(13!\,8!\,9!)}_{A}$

b) $(-\ln \mathcal{L})' = -\frac{30}{\lambda} + 3 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 10$

$(-\ln \mathcal{L})''\big|_{\lambda=10} = \frac{30}{\lambda^2}\Big|_{\lambda=10} = 0{,}3 > 0$

c) $-\ln \mathcal{L}(10) = -30\ln(10) + 30 + A \approx 6{,}88 =: -\ln \mathcal{L}_{max}$

$-\ln \mathcal{L}(\lambda_{1/2}) \stackrel{!}{=} 6{,}88 + 1/2 = -30\ln(\lambda_{1/2}) + 3\lambda_{1/2} + A$

$-\ln \mathcal{L}(\lambda_2) = 6{,}88 + 2 \;,\quad -\ln \mathcal{L}(\lambda_{9/2}) = 6{,}88 + 9/2$

Python: $\lambda_{1/2} = 8{,}28 \qquad \lambda_2 = 6{,}79 \qquad \lambda_{9/2} = 5{,}47$

$\lambda_{1/2} = 11{,}9 \qquad \lambda_2 = 14{,}1 \qquad \lambda_{9/2} = 16{,}5$

Dies sind die 1σ-, 2σ-, bzw. 3σ-Umgebungen.

d) $-\ln \mathcal{L} = -\ln \mathcal{L}_{max} + 0\cdot(\lambda-10) + \frac{1}{2}\cdot 0{,}3\,(\lambda-10)^2 + \sigma((\lambda-10)^3)$

$= -\ln \mathcal{L}_{max} + 0{,}15\,(\lambda-10)^2 + \sigma((\lambda-10)^3)$

$\lambda'_{1/2} = 8{,}17 \qquad \lambda'_2 = 6{,}35 \qquad \lambda'_{9/2} = 4{,}52$

$\lambda'_{1/2} = 11{,}8 \qquad \lambda'_2 = 13{,}7 \qquad \lambda'_{9/2} = 15{,}5$

Die Taylorentwicklung vereinfacht das analytische Rechnen um das Minimum.

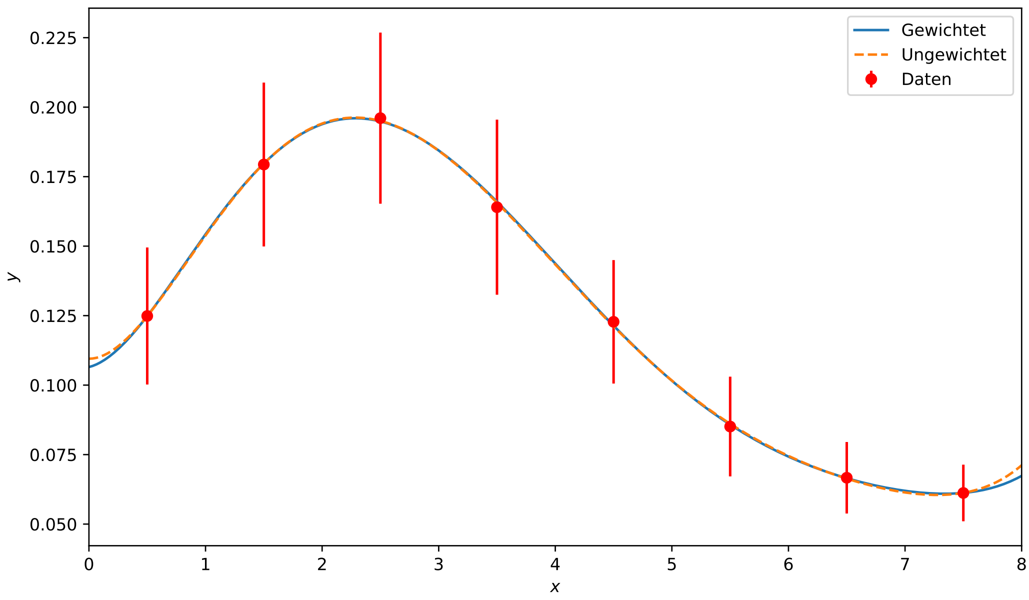

Abbildung 3: Gewichteter geringste Quadrate Fit ohne Regularisierung an die Daten *aufg_c.csv*.

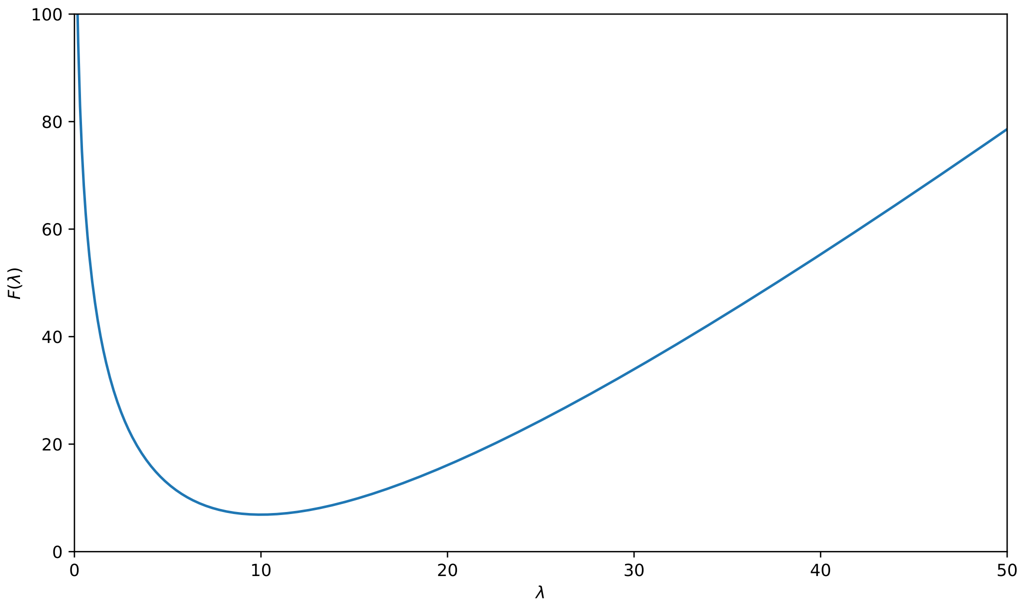

Abbildung 4: Negative Log-Likelihood-Funktion.

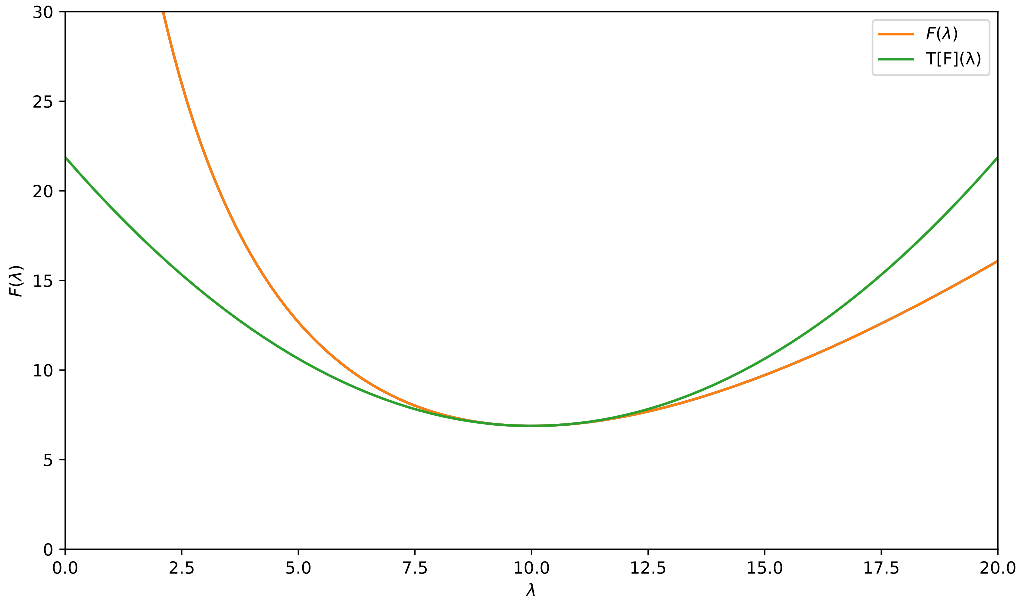

Abbildung 5: Negative Log-Likelihood-Funktion, zusammen mit der Taylorentwicklung um das Minimum.

A 30

a) $f(\varphi) = A \cdot a$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $a = (A^T A)^{-1} A^T y$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{6} A^T$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{6} A^T y$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}0375 \\ 0{,}0774 \end{pmatrix}$$

$$V[a] = \chi_r^2 (A^T A)^{-1}$$

Berechnung von $\chi_r = \frac{\chi}{2}$ mit Python

$$\Rightarrow V[a] = 0{,}267 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Fehler von a_i:

$\Delta a_i = 0{,}211$

d) $a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi) = A_0 \cos(\varphi + \delta)$

$= A_0 \cos(\varphi)\cos(\delta) - A_0 \sin(\varphi)\sin(\delta)$

$\Rightarrow a_1 = A_0 \cos(\delta) \quad \mathrm{I} \quad \Leftrightarrow A_0 = \frac{a_1}{\cos(\delta)}$

$a_2 = -A_0 \sin(\delta) \quad \mathrm{II} \quad \Leftrightarrow A_0 = -\frac{a_2}{\sin(\delta)}$

$\mathrm{I} = \mathrm{II} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} = -\cot(\delta)$

$\Rightarrow \delta = \operatorname{arcot}\left(-\frac{a_1}{a_2}\right) \approx 64{,}1°$

$\Rightarrow A_0 = \frac{a_1}{\cos\left(\operatorname{arcot}\left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\right)} \approx -0{,}0860$

$\Delta\delta = \sqrt{\left(\frac{\partial \delta}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial a_2}\Delta a_2\right)^2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\Delta a_1\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\Delta a_2\right)^2} \approx 141°$

$\Delta A_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial A_0}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial A_0}{\partial \delta}\Delta \delta\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{\cos(\delta)}\Delta a_1\right)^2 + \left(a_1 \tan(\delta)\sec(\delta)\Delta\delta\right)^2} \approx 0{,}651$