7 a) Der Korrelationskoeffizient ϱ berechnet sich wie folgt:

$$\varrho(x,y) = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma(x)\cdot\sigma(y)} = \frac{4{,}2}{3{,}5\cdot 1{,}5} = 0{,}8$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdiche $f(x,y)$ wird konstant gesetzt:

$$f(x,y) = k \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T B\,(\vec{x}-\vec{a})\right] \overset{!}{=} \mathrm{const}$$

$$B = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y)} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\mathrm{cov}(x,y) \\ -\mathrm{cov}(x,y) & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \left(\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y)}\right)^2 (\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y))$$

$$k = \left(\frac{\det B}{(2\pi)^2}\right)^{1/2} = \left[\frac{1}{(2\pi)^2(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y))}\right]^{1/2}$$

$$f(x,y) =: c \;(= \mathrm{const})$$

$$\Leftrightarrow -2\ln\left(\frac{c}{k}\right) = (\vec{x}-\vec{a})^T \cdot B_o\,(\vec{x}-\vec{a})$$

$$= (x-\mu_x,\; y-\mu_y)\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y)} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\mathrm{cov}(x,y) \\ -\mathrm{cov}(x,y) & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y)} \left((x-\mu_x)\sigma_y^2 - (y-\mu_y)\mathrm{cov}(x,y),\; (y-\mu_y)\sigma_x^2 - (x-\mu_x)\mathrm{cov}(x,y)\right) \begin{pmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{cov}^2(x,y)} \left[(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2(x-\mu_x)(y-\mu_y)\mathrm{cov}(x,y) + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\varrho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\,\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\,\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\varrho^2}\left[u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y \varrho\right] =: E \quad , \quad u_i = \frac{i-\mu_i}{\sigma_i}$$

Dies entspricht nach Addition von $2\ln\left(\frac{c}{k}\right)$ der allgemeinen Ellipsenform:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

c) Da die Amplitude von $f(x,y) = k$ ist, muss, um $f(x,y)$ da zu zeichnen, wo die Funktion auf das $\frac{1}{\sqrt{e}}$-fache abgefallen ist, die obere Gleichung mit $\frac{c}{k} = e^{-1/2}$ geplottet werden. Das plotten geschiet mit der Funktion matplotlib.pyplot.contour(...), wobei die Schnittpunkte eines Grids mit Punkten aus $[0,8] \times [-0{,}5 \times 4{,}5]$ und $E(x,y)$ geplottet werden. Da die linke Seite der Gleichung $=1$ ist, soll nur die Höhenlinie mit dem Wert 1 gezeichnet werden.
Diese Ellipse gibt die 1σ-Umgebung an.

d) Um die Rotationsmatrix M zu bestimmen, wird die Kovarianzmatrix zuerst mit einer allgemeinen Rotationsmatrix transformiert. Da die Nebendiagonalen einer Kovarianzmatrix Null sind, wenn die Variablen unkorelliert sind, kann über diese Einträge der benötigte Drehwinkel α berechnet werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix}}_{COV} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{M^T}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \cos\alpha - cov(x,y)\sin\alpha & cov(x,y)\cos\alpha - \sigma_y^2 \sin\alpha \\ \sigma_x^2 \sin\alpha + cov(x,y)\cos\alpha & cov(x,y)\sin\alpha + \sigma_y^2 \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot M^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \cos^2\alpha - 2 cov \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha & \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha - cov \sin^2\alpha + cov \cos^2\alpha - \sigma_y^2 \cos\alpha\sin\alpha \\ \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha + cov\cos^2\alpha - cov\sin^2\alpha - \sigma_y^2 \cos\alpha\sin\alpha & \sigma_x^2 \sin^2\alpha + 2 cov \cos\alpha\sin\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 \sin\alpha\cos\alpha - cov\sin^2\alpha + cov\cos^2\alpha - \sigma_y^2\cos\alpha\sin\alpha \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\sin\alpha\cos\alpha = cov\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{cov} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -2\cot(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = -\frac{1}{2}\tan(2\alpha) = \frac{1}{2}\tan(-2\alpha)$$

$$\Rightarrow -2\alpha = \arctan\left(\frac{2cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2cov}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}\right) \approx$$

$$\Rightarrow \sigma_x' = \left[\sigma_x^2\cos^2\alpha + \sigma_y^2\sin^2\alpha - 2cov\cos\alpha\sin\alpha\right]^{1/2} \approx$$

$$\sigma_y' = \left[\sigma_x^2\sin^2\alpha + \sigma_y^2\cos^2\alpha + 2cov\cos\alpha\sin\alpha\right]^{1/2} \approx$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$u_y = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \qquad \frac{du_y}{dy} = \frac{1}{\sigma_y}$$

f) $$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad dy = \sigma_y\,du_y$$

$$g(x) = k\sigma_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_xu_y\rho\right)\right]du_y$$

$$= k\sigma_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + \underbrace{u_y^2 - 2u_xu_y\rho + u_x^2\rho^2}_{(u_y-u_x\rho)^2} - u_x^2\rho^2\right)\right]du_y$$

$$= k\sigma_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2\right]du_y \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u_x^2(1-\rho^2)\right]$$

$$= k\sigma_y\exp\left[-\frac{u_x^2}{2}\right]\sqrt{2(1-\rho^2)\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow f(y|x) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_y}\left(2(1-\rho^2)\cdot\pi\right)^{-1/2}}_{=:\tilde{k}_y}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_xu_y\rho\right) + \frac{u_x^2}{2}\right]$$

$$= \tilde{k}_y\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_y^2 + u_x^2 - 2u_xu_y\rho - u_x^2(1-\rho^2)\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_y \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_y^2 - 2u_x u_y \rho + u_x^2\rho^2 + u_x^2 - u_x^2\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_y \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2\right]$$

$$f(y|x) \overset{!}{=} c\ , \quad \frac{c}{\tilde{k}_y} \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1\text{-}\sigma\text{-Umgebung})$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-1/2}) = -1/2$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_y - u_x\rho)^2$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\rho\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\rho\right)^2$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}\ , \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\ , \quad u_x = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\ , \quad dx = \sigma_x\, du_x$$

$$h(y) = k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y \rho\right)\right] du_x$$

$$= k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 - 2u_x u_y\rho + u_y^2\rho^2 - u_y^2\rho^2 + u_y^2\right)\right] du_x$$

$$= k\sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x - u_y\rho)^2\right] du_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u_y^2(1-\rho^2)\right]$$

$$= k\sigma_x \exp\left[-\frac{u_y^2}{2}\right]\sqrt{2(1-\rho^2)\pi}$$

$$\Rightarrow f(x|y) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_x}\left(2(1-\rho^2)\pi\right)^{-1/2}}_{=:\tilde{k}_x} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y\rho\right) + \frac{u_y^2}{2}\right]$$

$$= \tilde{k}_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y\rho - u_y^2(1-\rho^2)\right)\right]$$

$$= \tilde{k}_x \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_x - u_y\rho)^2\right]$$

$f(x|y) \stackrel{!}{=} c \;;\; \frac{c}{k_x} \stackrel{!}{=} e^{-1/2}$ (1-σ-Umgebung)

$\Rightarrow \ln(e^{-1/2}) = -1/2$

$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_x - u_y \rho)^2$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \rho \right)^2$

g) $E(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, f(y|x) \, dy \,, \quad u_y := \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \,, \; dy = \sigma_y \, du_y$

$y = \sigma_y u_y + \mu_y$

$= \tilde{k}_y \sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_y u_y + \mu_y) \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_y - u_x \rho)^2 \right] du_y$

$= \tilde{k}_y \sigma_y \left[\mu_y \sqrt{2(1-\rho^2)\pi} + \sigma_y \sqrt{2(1-\rho^2)\pi} \, u_x \rho \right]$

$= \mu_y + \sigma_y u_x \rho$

$= \mu_y + \sigma_y \rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$

$E(x|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x|y) \, dx \,, \quad \Bigg| \; u_x = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \,, \; \frac{du_x}{dx} = \frac{1}{\sigma_x} \,, \; dx = \sigma_x \, du_x \,,$

$x = \sigma_x u_x + \mu_x$

$= \tilde{k}_x \sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_x u_x + \mu_x) \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u_x - u_y \rho)^2 \right] du_x$

$= \mu_x + \sigma_x u_y \rho$

$= \mu_x + \sigma_x \rho \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$