
Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1718]
Di. 10-12	CP-03-150	philipp2.hoffmann@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	P1-02-110	felix.neubuerger@udo.edu und tobias.hoinka@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und maximilian.meier@udo.edu

Aufgabe 25: γ -Astronomie

7 P.

Bei einer typischen Messung in der γ -Astronomie wird das Teleskop auf eine Position (*on*-Position) gerichtet, an der eine γ -Strahlungs-Quelle vermutet wird. In der anschließenden Messung werden N_{on} Ereignisse über einen Zeitraum t_{on} aufgezeichnet. In den gemessenen Ereignissen N_{on} befinden sich sowohl Untergrund- als auch Signalphotonen. Um zu ermitteln, wie viel Untergrund vorhanden ist, wird ebenfalls an einer anderen Position ohne Quelle (*off*-Position) gemessen. Bei dieser Messung werden N_{off} Photonen-Ereignisse in einer Zeit t_{off} gemessen.

Um zu entscheiden, ob sich an der *on*-Position eine Quelle befindet, soll mit einem Likelihood-Quotienten-Test getestet werden, ob ein signifikanter Überschuss an Photonen über der Untergrunderwartung für die *on*-Position gemessen wurde (hier noch nicht, erst in Kapitel *Testen*).

Ziel dieser Aufgabe ist es, vorbereitend die richtige Likelihood-Funktion für den späteren Likelihood-Quotienten-Test aufzustellen.

Nutzen Sie für die Bearbeitung der Aufgabe die Ausdrücke:

- $\alpha = \frac{t_{\text{on}}}{t_{\text{off}}}$: Quotient der unterschiedlichen Messzeiten
 - $b = \langle N_{\text{off}} \rangle$: Unbekannter Erwartungswert für die Zahl der Untergrundphotonen während der Messzeit t_{off}
 - s : Unbekannter Erwartungswert für die Zahl der Signal Photonen während der Messzeit t_{on} aus der γ -Strahlungs-Quelle. Nicht zu verwechseln mit der gesamten Erwartung für die *on*-Position.
- a) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle N_{\text{on}} \rangle$, ausgedrückt durch s , b und α ?
- b) Welchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgen N_{on} und N_{off} ?
Tipp: Die gezählten Ereignisse kommen unabhängig voneinander im Detektor an.
- c) Wie sieht die Likelihoodfunktion $\mathcal{L}(b, s)$ für die Parameter b und s aus?

- d) Welche Werte \hat{b} und \hat{s} maximieren \mathcal{L} ?
Tipp: Nutzen Sie die negative Likelihood-Funktion, dann wird die Rechnung einfacher.
- e) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix von \hat{b} und \hat{s} . Wie hängt die Kovarianzmatrix mit der Likelihood zusammen? Ist diese Art der Fehlerberechnung exakt?

Aufgabe 26: *Stichprobenvarianz*

7 P.

Für alle Berechnungen sind x_1, \dots, x_n die Ausprägungen der quadratisch integrierbaren, paarweise unkorrelierten, reellwertigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit der Varianz σ^2 und dem Mittelwert μ .

- a) Testen Sie, ob die Formel (arithmetisches Mittel)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

- b) Der Standardfehler des arithmetischen Mittels (1) ist definiert als die Wurzel aus der Varianz von \bar{X} . Zeigen Sie, dass

$$E((\bar{X} - \mu)^2) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

gilt.

Tipp: Schauen Sie sich Rechenregeln für das Rechnen mit Varianzen an.

- c) Testen Sie, ob die Formel

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (3)$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

- d) Meist ist die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit unbekannt und es wird der Schätzer (1) für μ genutzt und (3) wird zu:

$$S_1'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (4)$$

Testen Sie, ob (4) eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

Tipp: Erweitern Sie den Summanden mit $-\mu + \mu$ und nutzen Sie die gebene Relation (2).

Aufgabe 27: *Maximum-Likelihood*

6 P.

Eine Zufallsvariable x soll einer Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & 0 \leq x \leq b \\ 0 & x < 0 \quad \text{oder} \quad x > b \end{cases}$$

folgen.

- a) Bestimmen Sie einen Schätzer für den Parameter b mit der Maximum Likelihood Methode aus einer Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n .
- b) Ist diese Schätzung erwartungstreu? Wenn nein, wie kann das in diesem Fall korrigiert werden?