

## 第一次作业

1、设  $R$  是  $A$  上的二元关系,  $S = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in A \wedge (\exists c)(\langle a, c \rangle \in R \wedge \langle c, b \rangle \in R) \}$ , 证明若  $R$  是  $A$  上的等价关系, 则  $S$  也是  $A$  上的等价关系。9 分

证明: ①证明  $S$  是自反的。

$\forall x \in A$ , 因为  $R$  是自反的, 故有  $\langle x, x \rangle \in R \wedge \langle x, x \rangle \in R$ , 所以  $\langle x, x \rangle \in S$  3 分

②证明  $S$  是对称的。

$\langle x, y \rangle \in S \Rightarrow \langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R \Rightarrow \langle c, x \rangle \in R \wedge \langle y, c \rangle \in R$  ( $R$  是对称的)

$\Rightarrow \langle y, x \rangle \in S$  ( $S$  的定义) 3 分

③证明  $S$  是传递的。

$\langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S \Rightarrow \langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R \wedge \langle y, d \rangle \in R \wedge \langle d, z \rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$  ( $R$  是传递的)

$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in S$  ( $S$  的定义)

$S$  也是  $A$  上的等价关系。 3 分

2、设  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $A$  上的二元关系

$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$ ,

验证  $R$  是  $A$  上的偏序关系, 写出盖住关系  $\text{COV } A$ , 画出哈斯图。找出集合  $A$  的极大元和极小元。 8 分

**解** 容易验证  $R$  是自反的, 反对称的和传递的,  $R$  是  $A$  上的偏序关系。

$\text{COV } A = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \}$  2 分

哈斯图为图 4.7.5。 2 分

集合  $A$  的极大元是:  $a, f, h$ 。 2 分

集合  $A$  的极小元是:  $a, b, c, g$ 。 2 分

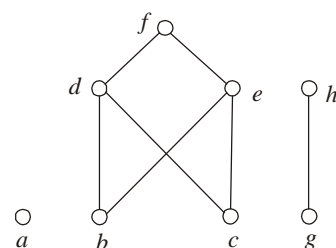


图4.7.5

3 设  $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ , 其上的整除关系  $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{ 能整除 } b \}$  是  $A$  上的偏序关系, 试求盖住关系  $\text{COV } A$ , 画出哈斯图, 确定下列集合的

上界和 下界。 8 分

(1)  $B_1 = \{2, 3, 6\}$

(2)  $B_2 = \{12, 24, 36\}$

**解** 盖住关系为  $\text{COV } A = \{ \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 12 \rangle, \langle 12, 24 \rangle, \langle 12, 36 \rangle \}$ , (2 分) 哈斯图为图 4.7.6。 2 分

$B_1$  的上界是 6, 12, 24, 36。没有下界。 2 分

$B_2$  的下界是 2, 3, 6, 12。没有上界。 2 分

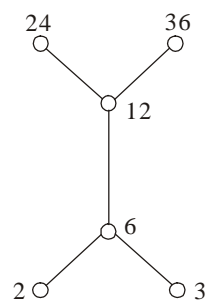


图4.7.6

设  $X=\{1,2,3\}$ , 写出集合  $X$  上的所有等价关系。5 分

解: 先写出集合  $X$  上的所有划分, 它们是:

$$S_1=\{\{1,2,3\}\}, \quad S_2=\{\{1,2\},\{3\}\}, \quad S_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$$

$$S_4=\{\{2,3\},\{1\}\}, \quad S_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

对应的等价关系为: (5 分)

$$R_1=\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = X \times X$$

$$R_2=\{1,2\} \times \{1,2\} \cup \{3\} \times \{3\}$$

$$=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,3>\}$$

$$R_3=\{1,3\} \times \{1,3\} \cup \{2\} \times \{2\}$$

$$=\{<1,1>, <1,3>, <3,1>, <3,3>, <2,2>\}$$

$$R_4=\{2,3\} \times \{2,3\} \cup \{1\} \times \{1\}$$

$$=\{<2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>, <1,1>\}$$

$$R_5=\{1\} \times \{1\} \cup \{2\} \times \{2\} \cup \{3\} \times \{3\}$$

$$=\{<1,1>, <2,2>, <3,3>\} = I_X$$