

HW 11 6.4 # 3, 5, 7, 9, 13 Alex Vech  
 6.5 # 1, 3, 5, 6, 7, 9, 12, 15  
 6.6 # 1, 2, 3, 4

6.4  

$$\frac{1}{3} V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8+5+2}{4+25+1} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{15}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$
 basis:  $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

5)  $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = x_2 - \frac{7+20+1}{1+16+1} V_1 = x_2 - \frac{28}{18} V_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  basis:  $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

7)  $\frac{1}{\sqrt{30}} V_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{V_2 \cdot V_2}} V_2 = \frac{1}{\sqrt{4+9+4}} V_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} V_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{27} \\ 3/\sqrt{27} \\ 3/\sqrt{27} \end{bmatrix}$  Orthonormal basis:  $\begin{bmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{27} \\ 3/\sqrt{27} \\ 3/\sqrt{27} \end{bmatrix}$

9)  $V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, V_2 = x_2 - \frac{-15+1-5-21}{9+1+1+9} V_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{40}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, V_3 = x_3 - \frac{3+1+2+24}{20} V_1 - \frac{1+3-6-8}{1+9+9+1} V_2 = x_3 - \frac{30}{20} V_1 + \frac{10}{20} V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$  basis:  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

13)  $Q^T = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & -3/6 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 & 1/6 & 3/6 \end{bmatrix} Q^T A = R = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & -3/6 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 & 1/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/6 + 1/6 + 9/6 + 5/6 & 45/6 + 3/6 + 15/6 + 5/6 \\ -5/6 + 5/6 - 3/6 + 3/6 & -9/6 + 35/6 - 5/6 + 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36/6 & 72/6 \\ 0 & 36/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

check:  $\begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \\ -3/6 & 1/6 \\ 1/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0 & 10+0 \\ 1+0 & 2+0 \\ -3+0 & -6+0 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = A$

6.5  
 1)  $Ax = b$   
 $A^T A x = A^T b$   
 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -12 & -1 \\ 2 & -33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} -4+4 & -2-6-3 \\ 2-6-3 & 4+4+9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -4+2-2 \\ 8-3+6 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} 6 & -11 & | & 0 \\ -11 & 22 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 11R_1} \begin{bmatrix} 6 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/11} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$

3)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -2 & 23 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1+1+0+4 & -2-2+0+10 \\ -2-2+0+10 & 4+4+9+25 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3-1+0+4 \\ -6+2-12+10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

$(A^T A)^{-1} A^T A x = (A^T A)^{-1} A^T b = x$   
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+11 \\ -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = x$

$\begin{bmatrix} 2/36 & 1/36 \\ -1/36 & 1/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/6 + 1/6 \\ -1/6 + 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/6 \\ 0/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = x$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{free } x_3 \quad x_2 - x_3 = -2 \quad x_1 + x_3 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -x_3 + 5 \\ x_3 - 3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 27 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{free } x_3 \quad x_2 - x_3 = -1 \quad x_1 + x_3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -x_3 + 5 \\ x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$7) b - Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 - 8/3 \\ 8/3 - 2/3 \\ 8/3 - 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4/3 \\ 6/3 \\ 3/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\|b - Ax\| = \sqrt{144 + 4 + 1} = \sqrt{149} = \text{error}$$

$$9) a) \frac{4-6+6}{14+4} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{20-2-12}{25+1+16} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{4}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{6}{42} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 + 5/7 \\ 6/7 + 1/7 \\ -2/7 + 4/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 13-2 \\ 5+14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/14} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -8 & 25 & 1 & 16 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4-6+6 \\ 20-2-12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 \\ 0 & 42 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$12) a) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{14}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 + 14/3 \\ 1/3 + 5/3 \\ 14/3 - 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/3 \\ 6/3 \\ 9/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{bmatrix} = x$$

6.5 continued

$$15) x = R^{-1} Q^T b \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 5R_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & | & 1 & -5 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} Q^T b = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 - 5/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = Q^T b$$

$$= \begin{bmatrix} 14/3 + 2 + 1/3 \\ -7/3 + 2 - 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6.6

$$1) \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & | & 1 & 0 \\ 6 & 14 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + \frac{R_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & -1/2 \\ 6 & 14 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 6R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & -1/2 \\ 0 & 20 & | & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/20} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2/10 & 1/5 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 3/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18/10 - 33/10 \\ -18/10 + 11/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/10 \\ 4/10 \end{bmatrix}$$

$$y = 9/10 + 2/5 x$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & | & 1 & 0 \\ 12 & 46 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 4 & 12 & | & 1 & 0 \\ 0 & 10 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1/4 & 0 \\ 0 & 10 & | & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/10} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 13/20 & -1/20 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 13/20 & -1/20 \\ -3/10 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38/20 - 25/20 \\ -18/10 + 25/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/20 \\ 7/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$y = 0.7x - 0.6$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 5 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{R_2}{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & | & -1/10 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 - 1 \\ -0.7 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

$$y = 1.1 + 1.3x$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 & | & 1 & 0 \\ 16 & 74 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1} \begin{bmatrix} 4 & 16 & | & 1 & 0 \\ 0 & 10 & | & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/4} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 1/4 & 0 \\ 0 & 10 & | & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/10} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2/5 & 1/10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & | & -2/5 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 37/20 & -2/5 \\ -2/5 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1 - 6.8 \\ -2.4 + 1.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

$$y = 4.3 - 0.7x$$