

Table of z-Transforms

Time Function, $f(t)$	Laplace Transform, $F(s)$	z-Transform, $F(z)$	Modified z-Transform, $F(z, m)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$\frac{mTz^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{Tz^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$T^2 \left[\frac{m^2 z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{(2m + 1)z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{2z^{-3}}{(1 - z^{-1})^3} \right]$
t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\frac{e^{-amT} z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right)$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$	$\frac{e^{-amT} z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right)$	$\frac{z^{-1}}{b-a} \left(\frac{e^{-amT}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{e^{-bmT}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right)$
$\frac{1}{a} (u(t) - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})}$	$\frac{z^{-1}}{a} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{e^{-amT}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right)$
$\frac{1}{a} \left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a} \left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})} \right]$	$\frac{z^{-1}}{a} \left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{amT - 1}{a(1 - z^{-1})} + \frac{e^{-amT}}{a(1 - e^{-aT} z^{-1})} \right]$

$\frac{(a-b)}{a^2} u(t) + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) e^{-at}$	$\frac{s+b}{s^2(s+a)}$	$\frac{z^{-1}}{a} \left[\frac{bT}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{(a-b)(1 - e^{-aT})}{a(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})} \right]$	$\frac{z^{-1}}{a} \left[\frac{bTz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \left(bmT + 1 - \frac{b}{a} \right) \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{b-a}{a} \frac{e^{-amT}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right]$
$\frac{1}{ab} \left(u(t) + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt} \right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{b}{(a-b)(1 - e^{-aT} z^{-1})} - \frac{a}{(a-b)(1 - e^{-bT} z^{-1})} \right]$	$\frac{z^{-1}}{ab} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{be^{-amT}}{(a-b)(1 - e^{-aT} z^{-1})} - \frac{ae^{-bmT}}{(a-b)(1 - e^{-bT} z^{-1})} \right]$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2}$	$\frac{Te^{-amT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2} \left[m + (1-m)e^{-aT} z^{-1} \right]$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\frac{z^{-1} \sin aT}{1 - 2z^{-1} \cos aT + z^{-2}}$	$\frac{z^{-1} \sin amT + z^{-2} \sin (1-m)aT}{1 - 2z^{-1} \cos aT + z^{-2}}$
$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} \frac{z^{-1} e^{-aT} \sin bT}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT} z^{-2}}$	$\frac{z^{-1} e^{-amT}}{b} \frac{\sin bmT + z^{-1} e^{-aT} \sin (1-m)bT}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT} z^{-2}}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1 - z^{-1} e^{-aT} \cos bT}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT} z^{-2}}$	$\frac{e^{-amT} z^{-1}}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT} z^{-2}} \left[\cos bmT + z^{-1} e^{-aT} \sin (1-m)bT \right]$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\frac{1 - z^{-1} \cos aT}{1 - 2z^{-1} \cos aT + z^{-2}}$	$\frac{z^{-1} \cos amT - z^{-2} \cos (1-m)aT}{1 - 2z^{-1} \cos aT + z^{-2}}$

For a more extensive table see B. C. Kuo, *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1963.)