TERCER PARCIAL

Tema 6: Transformaciones Lineales

1. Determine si las siguientes transformaciones son lineales o no.

   a) $T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x-3y \\ 3x-z \end{pmatrix}$ Sol. Sí

   b) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y+z-5u+2 \\ x-2y-z+5 \end{pmatrix}$ Sol. No

   c) $T: M_{2,2} \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \end{pmatrix}$ Sol. Sí

   d) $T: M_{n.n} \to M_{n,n}, T(A) = A^T - 2A$ Sol. Sí

2. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Determinar $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Determinar $T\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$

4. Determine el núcleo y la imagen de la siguiente transformación lineal y verifique el teorema de la dimensión.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y+6z \\ -2x-2y+6z \end{pmatrix}$$

   Sol. $Nu(T) = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, Im(T) = \mathbb{R}^2$

5. Determine el núcleo y la imagen de la siguiente transformación lineal y verifique el teorema de la dimensión.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y+z \\ x+y-z \\ -x+2y+4z \end{pmatrix}$$

6. En los siguientes ejercicios determinar T^{-1} si ésta existe.

   a) $T = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ x+y-3z \end{pmatrix}$ Sol. No existe

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4, T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\-x+3y\\3x-5y\\0\end{pmatrix}$ Sol. $T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+2b\\a+b\end{pmatrix}, c=4a+b, d=0$

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4, T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-2y\\3x+5y\\-3x+3y\\-x-2y\end{pmatrix}$ Sol. $T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{26}a+\frac{1}{13}b\\-\frac{3}{26}a+\frac{2}{13}b\end{pmatrix},$

$12a-3b+13c=0, -a+10b+26d=0$

7. Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-4y+z-5u\\x-2y-z\end{pmatrix}$ y las bases $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ y $C=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Considere $u=\begin{pmatrix}5\\11\\-4\\1\end{pmatrix}$. Calcule $mat^B u$ y $mat^C T(u)$.

Tema 7: Autovalores y autovectores

1. Calcular los autovalores y una base de sus autovectores asociados para la siguiente matriz. Indique además su multiplicidad algebraica y geométrica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol. $\lambda = 0, W_{\lambda=0} = LIN\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \lambda = 1, W_{\lambda=1} = LIN\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}; \lambda = 4, W_{\lambda=4} = LIN\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

2. Determine si las siguientes matrices son diagonalizables (explique por qué).

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Sol. No

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Sol. Sí

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -10 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & -5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Sol. No

3. Calcular la potencia $m - esima$ de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^m + 4(2^m) & -8(-1)^m + 8(2^m) \\ -(-1)^m + 2^m & 4(-1)^m + 2(2^m) \end{pmatrix}$

4. Calcular la potencia $m - esima$ de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}7^m & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}7^m & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}7^m & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}7^m \end{pmatrix}$

Tema 8: Factorización LU y LR

1. Dada la matriz A halle la factorización LU.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz A halle la factorización LR.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$

3. Resuelva el sistema $Ax = b$ por factorización LU.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Resuelva el sistema $Ax = b$ por factorización LR.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & -5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$