

Задания

20 января 2020 г.

Если M – моноид, то мы будем обозначать \mathbf{C}_M категорию с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $\text{Hom}_{\mathbf{C}_M}(*, *) = M$, операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M .

Предпорядок (X, \leq) – это множество X с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением \leq . Задать структуру предпорядка на множестве – это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если (X, \leq) – предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$. Множество объектов этой категории равно X , а множество морфизмов $\text{Hom}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x, y)$ состоит из одного элемента, если $x \leq y$, и пусто в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории **Hask**? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.

- (a) *Bool* и *Maybe Bool*.
- (b) *Either Bool Bool* и $(\text{Bool}, \text{Bool})$.
- (c) *Integer* и *Maybe Integer*.
- (d) *Integer* и $[\]$.

2. Пусть M – некоторый моноид. Определим тогда категорию \mathbf{C}_M как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным M . Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?

- (a) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, +)}$.
- (b) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, *)}$.
- (c) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, +)}$.
- (d) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, *)}$.
- (e) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, +)}$.
- (f) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, *)}$.

3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что $x \leq y$ и $y \leq x$, следует, что $x = y$. Чему в категориальных терминах соответствует это свойство?
4. Опишите следующие моноиды и группы:
 - (a) $Aut_{\mathbf{Set}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (b) $Aut_{\mathbf{FinSet}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (c) $Endo_{\mathbf{C}_M}(*)$, где M – некоторый моноид.
 - (d) $Endo_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.
 - (e) $Aut_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.
 - (f) $Endo_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$, где \mathbf{Ring} – категория колец с единицей.
 - (g) $Aut_{\mathbf{C}}(X)$, где \mathbf{C} – скелетная категория, и X – произвольный объект \mathbf{C} .
 - (h) $Endo_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$.
 - (i) $Aut_{\mathbf{Num}}(n)$.
 - (j) $Endo_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x)$, где x – произвольный элемент X .
5. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?
6. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?
7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?
 - (a) Дискретные категории.
 - (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
 - (c) Категории предпорядка.
 - (d) Группоиды.
8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?
 - (a) Дискретные категории.
 - (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
 - (c) Категории предпорядка.
 - (d) Скелетные категории.

9. Пусть $f, f' : X \rightarrow Y$ и $g, g' : Y \rightarrow X$ – морфизмы в некоторой категории **C**. Докажите, что если диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{id_X} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & X & \\ g' \nearrow & & \searrow f' \\ Y & \xrightarrow{id_Y} & Y \end{array}$$

коммутируют и $f = f'$, то X и Y изоморфны.

10. Приведите пример, показывающий, что условие $f = f'$ в предыдущем задании является необходимым.
11. Какие из следующих категорий являются малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**, \mathbf{C}_M , $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$?
12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**, \mathbf{C}_M , $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$?