Теория категорий

Конструкции в категориях

Валерий Исаев

27 января 2020 г.

План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Мономорфизмы

- В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- Верно ли это в произвольной категории?
- Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обощение понятия инъективных и сюръективных функций.
- Морфизм $f : X \to Y$ называется *мономорфизмом*, если для любых стрелок $g, h : Z \to X$ равенство $f \circ g = f \circ h$ влечет $g = h$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \implies g = h$$

- Мономорфизмы в **Set** – это в точности инъективные функции.

Мономорфизмы в алгебраических категориях

Proposition

*В любой алгебраической категории (**Grp**, **Ab**, **Ring**, ...) мономорфизмы – это в точности инъективные функции.*

Доказательство.

Докажем для **Grp**, для остальных можно доказать аналогично. Пусть $f : A \to B$ – инъективный гомоморфизм групп, и $g, h : C \to A$ – такие, что $f \circ g = f \circ h$. Так как f – мономорфизм множеств, то g и h равны как функции над множествами. Но отсюда следует, что они равны как гомоморфизмы групп.

Наоборот, если f – мономорфизм, то пусть $a_1, a_2 \in A$ такие, что $f(a_1) = f(a_2)$. Тогда рассмотри пару гомоморфизмов $g_1, g_2 : \mathbb{Z} \to A$ таких, что $g_i(1) = a_i$. Так как $f \circ g_1 = f \circ g_2$, то $g_1 = g_2$. Следовательно $a_1 = g_1(1) = g_2(1) = a_2$. $\square$

Эпиморфизмы

- Морфизм $f : X \to Y$ называется *епиморфизмом*, если

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Z \implies g = h$$

- Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.
- Эпиморфизмы в категориях моноидов и колец не обязательно сюръективны.
- Примеры: $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

Эпиморфизмы в **Set**

Proposition

Эпиморфизмы в **Set** *– это в точности сюръективные функции.*

Доказательство.

Пусть $f : A \to B$ – сюръекция, и $g, h : B \to C$ – такие, что $g \circ f = h \circ f$. Тогда для любого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Следовательно $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$.
Наоборот, если $f : A \to B$ – эпиморфизм, то пусть $g, h : B \to \{0, 1\}$ – такие, что g всегда равно 1, а $h(b)$ равно 1 в точности когда существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Тогда $g \circ f = h \circ f$. Следовательно $g = h$. Следовательно для любого $b \in B$ верно, что $h(b) = g(b) = 1$, то есть существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$, то есть f – сюръекция. $\square$

Расщепленные моно- и эпиморфизмы

- Морфизм $f : A \to B$ называется *расщепленным мономорфизмом*, если существует $g : B \to A$ такой, что $g \circ f = id_A$.
- Морфизм $g : B \to A$ называется *расщепленным эпиморфизмом*, если существует $f : A \to B$ такой, что $g \circ f = id_A$.
- Любой расщепленный мономорфизм является мономорфизмом. Действительно, если $f \circ h_1 = f \circ h_2$, то $h_1 = g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2 = h_2$.
- Любой расщепленный эпиморфизм является эпиморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

Сбалансированные категории

- Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.
- Любой эпиморфный расщепленный мономорфизм является изоморфизмом. Действительно, если $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$, то $f \circ g \circ f = id_B \circ f$. Следовательно $f \circ g = id_B$.
- Любой мономорфный расщепленный эпиморфизм является изоморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Терминальные объекты

- В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов: $\mathbb{Z}$ и *Integer*, $\{*\}$ и (), $A \times B$ и (a, b).
- Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- Объект A некоторой категории **C** называется *терминальным*, если для любого объекта B существует уникальная стрелка $B \to A$.
- Другими словами, A является терминальным, если для любого B множество $Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ одноэлементно.

Примеры терминальных объектов

- В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- В **Grp** группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- В **Hask** есть следующие терминальные объекты: (), $data\ Unit = Unit$.
- Утверждение строчкой выше не является верным :(
- В группоиде существует терминальный объект только если он тривиален.

Уникальность терминальных объектов

Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

Доказательство.

Если A и B – терминальные объекты, то существует пара стрелок $f : A \to B$ и $g : B \to A$. При этом по уникальности верно, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. □

Терминальный объект обычно обозначают 1. Уникальный морфизм из X в 1 обычно обозначают $!_X : X \to 1$.

Декартово произведение

- Множество B вместе с парой функций $\pi_i : B \to A_i$ является декартовым произведением множеств A_1 и A_2, если для любых $a_i \in A_i$ существует уникальный $b \in B$ такой, что $\pi_i(b) = a_i$.
- Объект B вместе с парой отображений $\pi_i : B \to A_i$ называется декартовым произведением A_1 и A_2, если для любых $f_i : C \to A_i$ существует уникальная стрелка $h : C \to B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

Уникальность декартова произведения

Proposition

Если (B, π_i^B) и (C, π_i^C) – произведения объектов A_1 и A_2, то B и C изоморфны.

Доказательство.

По определению декартова произведения существуют стрелки $g : B \to C$ и $h : C \to B$ как на диаграмме ниже. По уникальности $h \circ g = id_B$ и, аналогично, $g \circ h = id_C$.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "\pi_1^B"'] \arrow[dr, "\pi_2^B"] \arrow[d, dashed, "g"] & \\
A_1 & C \arrow[l, "\pi_1^C"] \arrow[r, "\pi_2^C"'] \arrow[d, dashed, "h"] & A_2 \\
 & B \arrow[ul, "\pi_1^B"] \arrow[ur, "\pi_2^B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Произведение множества объектов

- Если $\{A_i\}_{i\in I}$ – колекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами $\pi_i : B \to A_i$ называется декартовым произведением объектов A_i, если для любой коллекции морфизмов $\{f_i : C \to A_i\}_{i\in I}$ существует уникальная стрелка $h : C \to B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.
- Декартово произведение объектов $\{A_i\}_{i\in I}$ уникально с точностью до изоморфизма.
- Оно обозначается $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Если $I = \{1, \dots n\}$, то оно обозначается $A_1 \times \dots \times A_n$. Уникальный морфизм $C \to A_1 \times \dots \times A_n$ обозначается $\langle f_1, \dots f_n\rangle$.

Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

Proposition

Категория декартова тогда и только тогда, когда в ней существуют все конечные произведения.

Доказательство.

Терминальный объект – произведение пустого множества объектов, бинарные произведения – произведение двух объектов. И наоборот, произведение A_i можно сконструировать как

$$A_1 \times (A_2 \times \ldots (A_{n-1} \times A_n) \ldots)$$

Это можно доказать по индукции. □