

# Теория категорий

## Конструкции в категориях

Валерий Исаев

27 января 2020 г.

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

# Мономорфизмы

- ▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- ▶ Верно ли это в произвольной категории?
- ▶ Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обобщение понятия инъективных и сюръективных функций.
- ▶ Морфизм  $f : X \rightarrow Y$  называется *мономорфизмом*, если для любых стрелок  $g, h : Z \rightarrow X$  равенство  $f \circ g = f \circ h$  влечет  $g = h$ .

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xRightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y \implies g = h$$

- ▶ Мономорфизмы в **Set** – это в точности инъективные функции.

# Мономорфизмы в алгебраических категориях

## Proposition

В любой алгебраической категории (**Grp**, **Ab**, **Ring**, ...) мономорфизмы – это в точности инъективные функции.

## Доказательство.

Докажем для **Grp**, для остальных можно доказать аналогично.

Пусть  $f : A \rightarrow B$  – инъективный гомоморфизм групп, и  $g, h : C \rightarrow A$  – такие, что  $f \circ g = f \circ h$ . Так как  $f$  – мономорфизм множеств, то  $g$  и  $h$  равны как функции над множествами. Но отсюда следует, что они равны как гомоморфизмы групп.

Наоборот, если  $f$  – мономорфизм, то пусть  $a_1, a_2 \in A$  такие, что  $f(a_1) = f(a_2)$ . Тогда рассмотри пару гомоморфизмов  $g_1, g_2 : \mathbb{Z} \rightarrow A$  таких, что  $g_i(1) = a_i$ . Так как  $f \circ g_1 = f \circ g_2$ , то  $g_1 = g_2$ . Следовательно  $a_1 = g_1(1) = g_2(1) = a_2$ .

# Эпиморфизмы

- ▶ Морфизм  $f : X \rightarrow Y$  называется *эпиморфизмом*, если

$$X \xrightarrow{f} Y \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xRightarrow{h} \end{matrix} Z \implies g = h$$

- ▶ Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.
- ▶ Эпиморфизмы в категориях моноидов и колец не обязательно сюръективны.
- ▶ Примеры:  $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ .

# Эпиморфизмы в **Set**

## Proposition

*Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.*

## Доказательство.

Пусть  $f : A \rightarrow B$  – сюръекция, и  $g, h : B \rightarrow C$  – такие, что  $g \circ f = h \circ f$ . Тогда для любого  $b \in B$  существует  $a \in A$  такой, что  $f(a) = b$ . Следовательно  $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$ . Наоборот, если  $f : A \rightarrow B$  – эпиморфизм, то пусть  $g, h : B \rightarrow \{0, 1\}$  – такие, что  $g$  всегда равно 1, а  $h(b)$  равно 1 в точности когда существует  $a \in A$  такой, что  $f(a) = b$ . Тогда  $g \circ f = h \circ f$ . Следовательно  $g = h$ . Следовательно для любого  $b \in B$  верно, что  $h(b) = g(b) = 1$ , то есть существует  $a \in A$  такой, что  $f(a) = b$ , то есть  $f$  – сюръекция. □

## Расщепленные моно- и эпиморфизмы

- ▶ Морфизм  $f : A \rightarrow B$  называется *расщепленным мономорфизмом*, если существует  $g : B \rightarrow A$  такой, что  $g \circ f = id_A$ .
- ▶ Морфизм  $g : B \rightarrow A$  называется *расщепленным эпиморфизмом*, если существует  $f : A \rightarrow B$  такой, что  $g \circ f = id_A$ .
- ▶ Любой расщепленный мономорфизм является мономорфизмом. Действительно, если  $f \circ h_1 = f \circ h_2$ , то  $h_1 = g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2 = h_2$ .
- ▶ Любой расщепленный эпиморфизм является эпиморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

## Сбалансированные категории

- ▶ Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- ▶ Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.
- ▶ Любой эпиморфный расщепленный мономорфизм является изоморфизмом. Действительно, если  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  такие, что  $g \circ f = id_A$ , то  $f \circ g \circ f = id_B \circ f$ . Следовательно  $f \circ g = id_B$ .
- ▶ Любой мономорфный расщепленный эпиморфизм является изоморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.



Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

# Терминальные объекты

- ▶ В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов:  $\mathbb{Z}$  и *Integer*,  $\{*\}$  и  $()$ ,  $A \times B$  и  $(a, b)$ .
- ▶ Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- ▶ Объект  $A$  некоторой категории **C** называется *терминальным*, если для любого объекта  $B$  существует уникальная стрелка  $B \rightarrow A$ .
- ▶ Другими словами,  $A$  является терминальным, если для любого  $B$  множество  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$  одноэлементно.

## Примеры терминальных объектов

- ▶ В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- ▶ В **Grp** группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- ▶ В **Hask** есть следующие терминальные объекты:  $()$ ,  
*data Unit = Unit.*
- ▶ Утверждение строчкой выше не является верным :(  
▶ В группоиде существует терминальный объект только если он тривиален.

# Уникальность терминальных объектов

## Proposition

*Любые два терминальных объекта изоморфны.*

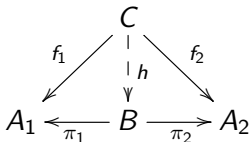
## Доказательство.

Если  $A$  и  $B$  – терминальные объекты, то существует пара стрелок  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$ . При этом по уникальности верно, что  $g \circ f = id_A$  и  $f \circ g = id_B$ . □

Терминальный объект обычно обозначают  $1$ . Уникальный морфизм из  $X$  в  $1$  обычно обозначают  $!_X : X \rightarrow 1$ .

## Декартово произведение

- ▶ Множество  $B$  вместе с парой функций  $\pi_i : B \rightarrow A_i$  является декартовым произведением множеств  $A_1$  и  $A_2$ , если для любых  $a_i \in A_i$  существует уникальный  $b \in B$  такой, что  $\pi_i(b) = a_i$ .
- ▶ Объект  $B$  вместе с парой отображений  $\pi_i : B \rightarrow A_i$  называется декартовым произведением  $A_1$  и  $A_2$ , если для любых  $f_i : C \rightarrow A_i$  существует уникальная стрелка  $h : C \rightarrow B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .



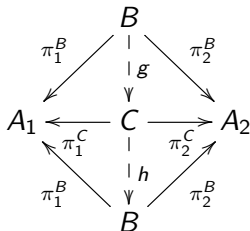
# Уникальность декартова произведения

## Proposition

Если  $(B, \pi_i^B)$  и  $(C, \pi_i^C)$  – произведения объектов  $A_1$  и  $A_2$ , то  $B$  и  $C$  изоморфны.

## Доказательство.

По определению декартова произведения существуют стрелки  $g : B \rightarrow C$  и  $h : C \rightarrow B$  как на диаграмме ниже. По уникальности  $h \circ g = id_B$  и, аналогично,  $g \circ h = id_C$ .



## Произведение множества объектов

- ▶ Если  $\{A_i\}_{i \in I}$  – коллекция объектов некоторой категории, то объект  $B$  вместе с морфизмами  $\pi_i : B \rightarrow A_i$  называется декартовым произведением объектов  $A_i$ , если для любой коллекции морфизмов  $\{f_i : C \rightarrow A_i\}_{i \in I}$  существует уникальная стрелка  $h : C \rightarrow B$  такая, что  $\pi_i \circ h = f_i$ .
- ▶ Декартово произведение объектов  $\{A_i\}_{i \in I}$  уникально с точностью до изоморфизма.
- ▶ Оно обозначается  $\prod_{i \in I} A_i$ . Если  $I = \{1, \dots, n\}$ , то оно обозначается  $A_1 \times \dots \times A_n$ . Уникальный морфизм  $C \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$  обозначается  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ .

## Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

### Proposition

*Категория декартова тогда и только тогда, когда в ней существуют все конечные произведения.*

### Доказательство.

Терминальный объект – произведение пустого множества объектов, бинарные произведения – произведение двух объектов. И наоборот, произведение  $A_i$  можно сконструировать как

$$A_1 \times (A_2 \times \dots (A_{n-1} \times A_n) \dots)$$

Это можно доказать по индукции.

