

Задания

1 февраля 2020 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:

Сделал в классе.

2. Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 . Докажите, что для любого объекта A в \mathbf{C} существует произведение $A \times 1$.

Сделал в классе.

3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.

Сделал в классе.

4. Докажите, что если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ – мономорфизмы, то и $g \circ f$ – мономорфизм.

Дано: (1) $f \circ h = f \circ t \Rightarrow h = t$, (2) $g \circ h' = g \circ t' \Rightarrow h' = t'$.

Надо доказать: $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ t \Rightarrow h = t$

Доказательство:

1. $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ t \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ t)$ (Assoc)

2. $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ t) \Rightarrow f \circ h = f \circ t$ (2)

3. $f \circ h = f \circ t \Rightarrow h = t$ (1)

5. Докажите, что если $g \circ f$ – мономорфизм, то и f – мономорфизм.

Дано: (1) $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ t \Rightarrow h = t$.

Надо доказать: $f \circ h = f \circ t \Rightarrow h = t$

Доказательство:

1. $f \circ h = f \circ t \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ t)$ (Def)

2. $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ t) \Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ t$ (Assoc)

3. $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ t \Rightarrow h = t$ (1)

6. Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \rightarrow B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ является эпиморфизмом.

Сделал в классе.

7. Докажите, что в \mathbf{Ab} существуют все произведения.

Сделал в классе.

Бонусные задания:

1. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.
2. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.
3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения.