

Задания

27 января 2020 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Терминальные объекты.
 - (b) Произведения объектов.
2. Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 . Докажите, что для любого объекта A в \mathbf{C} существует произведение $A \times 1$.
3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
4. Докажите, что если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ – мономорфизмы, то и $g \circ f$ – мономорфизм.
5. Докажите, что если $g \circ f$ – мономорфизм, то и f – мономорфизм.
6. Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \rightarrow B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ является эпиморфизмом.
7. Докажите, что в \mathbf{Ab} существуют все произведения.

Бонусные задания:

1. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.
2. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.
3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения.