ласти. Тогда можно воспользоваться формулой Остроградского...

$$\int\int_S \mathbf{W}_n \, d\sigma = \iint\int_V \operatorname{div} \mathbf{W} \, dV$$

и преобразовать уравнение баланса к виду

$$\iint\int_V c\, p[u(P,t_2) - u(P,t_1)] \, dV_p =$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2} \iint\int_V \mathrm{W} \;\; dV_p \;\; \mathrm{dt} + \int_{t_1}^{t_2}\int\int_V \int F(P,t) \, \mathrm{dV}_p \;\; \mathrm{dt}.$$

(Будем предполагать, что $F(P,t)$ непрерывная функция своих аргументов.)

Применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$\mathrm{c}\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t_3\\P=P_1}} \quad \Delta\ \mathrm{t}\ \cdot V = -\operatorname{div}\mathbf{W}\Bigg|_{\substack{t=t_4\\P=P_2}} \quad \Delta\ \mathrm{t}\ \cdot V + F\Bigg|_{\substack{t=t_5\\P=P_3}} \quad \Delta\ \mathrm{t}\ \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 - промежуточные точки на интервале Δ t, а P_1, P_2, P_3 - точки в объеме V. Фиксируем некоторую точку M(x, y, z) внутри V и будем стягивать V в эту точку, а Δ t стремить к нулю. После сокращения на Δ tV и указанного предельного перехода получим:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = -\operatorname{div}\mathbf{W}(x,y,z,t) + F(x,y,z,t).$$

Заменяя **W** по формуле **W** = -k grad u, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z}) + F$$

Если среда неоднородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + z_{zz}) + \frac{F}{cp},$$

где a^2= k/cρ - коэффицент температурапроводности, или

$$u_t = a^2\Delta u + f(f = \frac{F}{c\rho}),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

УРАВНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

4.Постановка краевых задач.Для выполнения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции u(x, t) в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах.Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня x = 0 задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где μ (t) - функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leqslant$ $\leqslant$ t $\leqslant$ T, причем T есть промежуток времени,в течении которого изучается процесс.

На конце x = l задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

К этому условию мы приходим,если задана величина теплового потока Q(l,t), протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t), = \mu(t)$, где μt - известная функция, выражающаяся через заданный поток Q(l,t)по формуле

$$\mu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3.На конце x = l задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t] - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение x=l,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)],$$