Лабораторная работа №5
Расчет коэффициентов регулятора на примере робота — модели обратного маятника

1 Теоретические сведения

В данной лабораторной мы закончим создание устройства, работу над которым начали в прошлый раз. В ней мы получим для нашего робота управляющий алгоритм, обеспечивающий его нужное поведение.

Введение

Опираясь на полученное в предыдущей работе уравнение движения исследуемой системы, рассмотрим наше техническое задание более подробно.

Учитывая физический смысл элементов матрицы x, несложно заключить, что, для того чтобы застабилизировать маятник в вертикальном положении, управляющему воздействию достаточно обеспечить равенство нулю двух из них — величин ψ и $\dot{\psi}$. При этом значение третьей компоненты — скорости $\dot{\theta}$ — может быть любым, а следовательно контролироваться не обязано. Однако, если поддерживать его равным нулю, то, очевидно, это никак не нарушит работоспособность системы, а приведет лишь к тому, что робот помимо балансировки будет стараться остановиться в своем текущем положении. По этой причине выберем в качестве уравнения для управляющего воздействия (напряжения, подаваемого на двигатели) следующее выражение

$$U(t) = k_0(0 - \psi) + k_1(0 - \dot{\theta}) + k_2(0 - \dot{\psi}) \tag{1}$$

$$U(t) = -k_0\psi - k_1\dot{\theta} - k_2\dot{\psi}, \tag{2}$$

где k_0, k_1 и k_2 — некоторые постоянные.

Чтобы как-то пояснить происхождение именно такого вида функции $U(t)$, достаточно отметить, что перед нами стоит задача поддерживать значения величин ψ, $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ равными нулю и что подобную мы уже решили в лабораторной №3 использованием П-регулятора. Как там, так и здесь управляющее воздействие формируется прямо пропорциональным отклонению регулируемых переменных от их желаемых значений. При этом то, что в данном случае напряжение в каждый момент времени складывается из трех составляющих, не нарушает работоспособность алгоритма.

Следует заметить, что входящие в выражения для $U(t)$ постоянные коэффициенты способны иметь только определенные значения. В противоположность этому в лабораторной №3 коэффициент пропорциональности мог быть практически любым: его значение сказывалось лишь на второстепенных характеристиках системы таких, как, например, быстродействие, но не нарушало её работоспособность.

Тому, как их рассчитать, главным образом, и посвящена данная лабораторная.

Расчет коэффициентов для управляющего воздействия

В прошлой работе мы получили следующее уравнение, описывающее работу исследуемой системы:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{3}$$

Дополнив его еще одним уравнением, справедливым для нашего робота, получим систему матричных уравнений, называемую *моделью «вход-состояние-выход»* исследуемого объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \tag{4}$$

где x — n-мерный вектор состояния системы (n — количество переменных в векторе состояния (в нашем случае $n = 3$); также n называют *порядком объекта управления*);
y — l-мерный вектор выходных величин (l — количество переменных в нем; в нашем случае $l = 3$, потому что в качестве выходных переменных мы рассматриваем все величины, входящие в x);
u — m-мерный вектор управляющих воздействий (m — количество переменных в нем (в нашем случае $m = 1$));
A — матрица, определяющая динамические свойства объекта управления, размерности $n \times n$;
B — матрица входа управляющих воздействий размерности $n \times m$;
C — матрица выхода размерности $l \times n$ (в нашем случае, поскольку $x = y$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \tag{5}$$

где I — единичная матрица).

Прежде, чем приступить к каким-либо расчетам, необходимо проверить, а возможно ли вообще управлять нашей системой. Для этих целей в рассмотрение вводится так называемая *матрица управляемости* Y, формируемая как[1]

$$Y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \tag{6}$$

и вычисляется ее определитель. В случае, если $\det Y \neq 0$, система управляема и синтез регулятора возможен. Иначе остается заключить, что наш объект неуправляем.

[1] Данная запись означает, что упоминаемые матрицы следует записать рядом и полученный результат рассматривать как новую матрицу. Например,

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad O_3 = [O_1 \ O_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

После удовлетворительного результата проверки введем новые матрицы e и K, равные

$$e = -x, \tag{7}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Надо сказать, что в общем случае данные матрицы строятся следующим образом. *Вектор ошибок* e определяется согласно выражению

$$e = x_0 - x, \tag{9}$$

где x_0 — вектор, в котором хранятся желаемые значения всех контролируемых величин. Поскольку в нашем случае он равен

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

то и получается выражение (7). Матрица же K в общем виде выглядит как

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

и, следовательно, имеет размерность $m \times n$.

Используя введенные матрицы, представим u согласно выражению (2) в виде

$$u = Ke. \tag{12}$$

С учетом новых обозначений уравнение (3) можно переписать как

$$\dot{e} = Ae - BKe = (A - BK)e = Fe. \tag{13}$$

В таком виде с ним следует работать дальше.

Поведение исследуемой системы зависит от вида *характеристического полинома* матрицы F:

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + z_{n-1}\lambda^{n-1} + z_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + z_2\lambda^2 + z_1\lambda + z_0, \tag{14}$$

где λ — «обычная» (никак не определяемая) переменная; I — как и ранее, единичная матрица; z_i ($i \in 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$) — числовые коэффициенты, получающиеся при расчете. При этом требуемому поведению системы — поддержке нулевых значений компонент матрицы e, определенному ее быстродействию и проч. — будет соответствовать определенный вид (определенные значения коэффициентов z_i) характеристического полинома:

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + z^*_{n-1}\lambda^{n-1} + z^*_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + z^*_2\lambda^2 + z^*_1\lambda + z^*_0. \tag{15}$$

Последний полином задается разработчиком в соответствии с тем, какие характеристики (какое поведение) он хочет видеть у разрабатываемой системы. При этом (опять же в зависимости от желаемого поведения системы) применяются различные методы расчета постоянных коэффициентов z_i^* ($i \in 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$). В данной работе их значения следует получить раскрытием по биному Ньютона выражения

$$D^*(\lambda) = (\lambda + w_0)^n; \tag{16}$$

где w_0 — числовое значение, рассчитываемое по формуле

$$w_0 = \frac{t_n^*}{t_n}, \tag{17}$$

где, в свою очередь, t_n^* — «стандартное» значение *времени переходного процесса*, определяемое по порядку объекта управления из таблицы 1; t_n — «действительное» значение времени переходного процесса в нашей системе. Для первого раза последнее можно взять равным, например, 0.5 с. В данной работе под этими параметрами следует понимать некоторые величины, обратно пропорциональные быстродействию робота. То есть, например, уменьшение параметра t_n при расчетах будет означать, что коэффициенты, получающиеся в результате, будут обеспечивать большее быстродействие технической системы.

n	1	2	3	4	5	6
t_n^*, с	3.0	4.8	6.3	7.8	9.2	10.5

Таблица 1. Значения параметра t_n^* в зависимости от порядка объекта управления.

Характеристический полином матрицы F будет равен заданному разаботчиком, если будет справедливым соотношение

$$D(\lambda) = D^*(\lambda), \tag{18}$$

которое равносильно n уравнениям вида

$$z_i = z_i^*, \tag{19}$$

где опять же $i \in 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$. В лице данных соотношений мы получим n уравнений относительно k_0, k_1, ..., k_{n-1}. Их решением и находятся те значения элементов матрицы K, которые обеспечивают истинность равенства (18), а следовательно и требуемое поведение системы.

Помимо обозначенного существуют и другие методы нахождения коэффициентов k_0, k_1, ..., k_{n-1}, которые при расчетах, производимых на ЭВМ, оказываются более удобными. Рассмотрим их.

Метод расчета коэффициентов, использующий приведение математической модели к канонической форме[2]

[2] В данном методе подразумевается, что матрица B имеет размерность $n \times 1$. Мы имеем дело как раз с таким случаем.

Можно заметить, что если бы матрицы A и B в уравнении (3) были равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где a_i, $i \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$ — некоторые числа, то характеристический полином $\det(\lambda I - F)$ матрицы F принял бы очень простую форму (пишем пример для случая $n = 3$):

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$D(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 + k_0 & a_1 + k_1 & \lambda + a_2 + k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_1 + k_1 & \lambda + a_2 + k_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a_0 + k_0 & \lambda + a_2 + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + (a_2 + k_2)\lambda^2 + (a_1 + k_1)\lambda + (a_0 + k_0). \tag{22}$$

Приравняв полученный полином к (15), для компонент матрицы K мы бы сразу получили

$$a_0 + k_0 = z_0^*, \qquad \Rightarrow \qquad k_0 = z_0^* - a_0; \tag{23}$$

$$a_1 + k_1 = z_1^*, \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = z_1^* - a_1; \tag{24}$$

$$a_2 + k_2 = z_2^*, \qquad \Rightarrow \qquad k_2 = z_2^* - a_2. \tag{25}$$

На самом деле указанным упрощением можно пользоваться независимо от вида матриц A и B. Для этого следует ввести в рассмотрение дополнительное уравнение вида

$$\underline{\dot{e}} = (A_k - B_k K_k)\underline{e}, \tag{26}$$

где A_k и B_k имеют строение, показанное в (20); при этом в качестве постоянных a_i, $i \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$ в A_k берутся числовые коэффициенты характеристического полинома настоящей матрицы A:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0; \tag{27}$$

K_k — матрица по своему строению аналогичная матрице K. В нашем случае она равна

$$K_k = \begin{bmatrix} k_{k0} & k_{k1} & k_{k2} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Для данного уравнения по формулам (23)-(25) определяются значения коэффициентов k_{k0}, k_{k1} и k_{k2}.

После же, для того чтобы найти матрицу K, остается умножить K_k на матрицу P:

$$K = K_k P, \tag{29}$$

где матрица P равна

$$P = Y_k Y_\varepsilon^{-1} \tag{30}$$

где, в свою очередь, Y_k — матрица управляемости системы (26), то есть в нашем случае (при $n = 3$)

$$Y_k = \begin{bmatrix} B_k & A_k B_k & A_k^2 B_k \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Метод расчета коэффициентов обратной связи, включающий в себя решение матричного уравнения Сильвестра

В данном методе несомая полиномом $D^*(\lambda)$ информация отражается в расчетах путем составления для системы ее *эталонной* модели, описываемой уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \mathit{\Gamma} \varepsilon \\ v = H\varepsilon, \end{cases} \tag{32}$$

где ε — n-мерный вектор состояния эталонной модели;
v — m-мерный вектор выходных переменных;
$\mathit{\Gamma}$ — матрица, определяющая динамические свойства, которые мы хотим видеть у нашего робота, размерности $n \times n$. Ее строение в общем случае описывается так: сначала она полностью заполняется нулями, потом ниже главной диагонали записываются 1, а в последнем столбике — коэффициенты характеристического полинома $D^*(\lambda)$, взятые со знаком минус. В данном случае (при $n = 3$) имеем

$$\mathit{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -z_0^* \\ 1 & 0 & -z_1^* \\ 0 & 1 & -z_2^* \end{bmatrix}. \tag{33}$$

H — матрица выхода эталонной модели размерности $m \times n$; все ее элементы кроме последнего (он равен 1) следует взять равными нулю. Важно отметить, что перед использованием эталонной модели надо проверить: является ли она *полностью наблюдаемой*[3].

После того, как была сформирована матрица $\mathit{\Gamma}$, можно составить систему матричных уравнений, в ходе решения которой определятся искомые коэффициенты. Чтобы это сделать,

[3]Свойство полной наблюдаемости проверяется введением матрицы наблюдаемости:

$$Q = \begin{bmatrix} H \\ H\mathit{\Gamma} \\ H\mathit{\Gamma}^2 \\ \dots \\ H\mathit{\Gamma}^{n-1} \end{bmatrix},$$

Если $\det Q \neq 0$, то система обладает свойством полной наблюдаемости, в противном случае нет.

во-первых, нужно учесть, что для эталонной модели по отношению к реальной модели объекта управления справедливы отношения

$$e = -S\varepsilon \tag{34}$$

и

$$v = u = Ke, \tag{35}$$

откуда сразу получаем, что

$$v = u = Ke = -KS\varepsilon. \tag{36}$$

Матрица S (размерности $n \times n$) полностью состоит из неизвестных величин, значения которых должны быть определены в ходе решения системы уравнений (при этом у получившейся матрицы должна быть обратная):

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Подставив найденное значение для v (см. формулу (36)) во второе уравнение системы эталонной модели (32), возьмем его как одно из уравнений в будущую систему:

$$H\varepsilon = -KS\varepsilon. \tag{38}$$

Теперь подставим найденное значение для e (см. (34)) в выражение (13):

$$-S\dot{\varepsilon} = -AS\varepsilon + BKS\varepsilon, \tag{39}$$

а в получившееся уравнение — выражение для $\dot{\varepsilon}$, взятое из эталонной модели — первое уравнение из (32); полученное соотношение возьмем вторым уравнением в нашу систему. Итого получим

$$\begin{cases} H\varepsilon = -KS\varepsilon \\ -S\Gamma\varepsilon = -AS\varepsilon + BKS\varepsilon, \end{cases} \tag{40}$$

Сократим оба уравнения на ε:

$$\begin{cases} H = -KS \\ -S\Gamma = -AS + BKS, \end{cases} \tag{41}$$

Подставим во второе уравнение выражение для KS, взятое из первого:

$$\begin{cases} H = -KS \\ -S\Gamma = -AS - BH, \end{cases} \tag{42}$$

и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} BH = S\Gamma - AS \\ K = -HS^{-1}, \end{cases} \tag{43}$$

Полученная система позволяет найти величины k_0, k_1 и k_2. Для этого остается в лице первого соотношения решить матричное уравнение Сильвестра относительно матрицы S, а потом, используя ее, вычислить значение матрицы K, исходя из второго равенства системы.

Решение матричного уравнения Сильвестра подразумевает под собой следующее. Во-первых, для уравнения выполняются все арифметические действия с матрицами — в нашем случае это умножение и вычитание:

$$\begin{bmatrix} b_{11}h_{11} & b_{11}h_{12} & b_{11}h_{13} \\ b_{21}h_{11} & b_{21}h_{12} & b_{21}h_{13} \\ b_{31}h_{11} & b_{31}h_{12} & b_{31}h_{13} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11}\gamma_{11} + s_{12}\gamma_{21} + s_{13}\gamma_{31} & s_{11}\gamma_{12} + s_{12}\gamma_{22} + s_{13}\gamma_{32} & s_{11}\gamma_{13} + s_{12}\gamma_{23} + s_{13}\gamma_{33} \\ s_{21}\gamma_{11} + s_{22}\gamma_{21} + s_{23}\gamma_{31} & s_{21}\gamma_{12} + s_{22}\gamma_{22} + s_{23}\gamma_{32} & s_{21}\gamma_{13} + s_{22}\gamma_{23} + s_{23}\gamma_{33} \\ s_{31}\gamma_{11} + s_{32}\gamma_{21} + s_{33}\gamma_{31} & s_{31}\gamma_{12} + s_{32}\gamma_{22} + s_{33}\gamma_{32} & s_{31}\gamma_{13} + s_{32}\gamma_{23} + s_{33}\gamma_{33} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \alpha_{11}s_{11} + \alpha_{12}s_{21} + \alpha_{13}s_{31} & \alpha_{11}s_{12} + \alpha_{12}s_{22} + \alpha_{13}s_{32} & \alpha_{11}s_{13} + \alpha_{12}s_{23} + \alpha_{13}s_{33} \\ \alpha_{21}s_{11} + \alpha_{22}s_{21} + \alpha_{23}s_{31} & \alpha_{21}s_{12} + \alpha_{22}s_{22} + \alpha_{23}s_{32} & \alpha_{21}s_{13} + \alpha_{22}s_{23} + \alpha_{23}s_{33} \\ \alpha_{31}s_{11} + \alpha_{32}s_{21} + \alpha_{33}s_{31} & \alpha_{31}s_{12} + \alpha_{32}s_{22} + \alpha_{33}s_{32} & \alpha_{31}s_{13} + \alpha_{32}s_{23} + \alpha_{33}s_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}h_{11} & b_{11}h_{12} & b_{11}h_{13} \\ b_{21}h_{11} & b_{21}h_{12} & b_{21}h_{13} \\ b_{31}h_{11} & b_{31}h_{12} & b_{31}h_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i1} - \alpha_{1i}s_{i1}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i2} - \alpha_{1i}s_{i2}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i3} - \alpha_{1i}s_{i3}) \\ \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{2i}\gamma_{i1} - \alpha_{2i}s_{i1}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{2i}\gamma_{i2} - \alpha_{2i}s_{i2}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{2i}\gamma_{i3} - \alpha_{2i}s_{i3}) \\ \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{3i}\gamma_{i1} - \alpha_{3i}s_{i1}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{3i}\gamma_{i2} - \alpha_{3i}s_{i2}) & \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{3i}\gamma_{i3} - \alpha_{3i}s_{i3}) \end{bmatrix},$$

где α_{ij}, b_{ij}, γ_{ij} и s_{ij} — элементы матриц A, B, $\mathit{\Gamma}$ и S соответственно, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Во-вторых, выписываются, оформляются в систему и решаются все получившееся линейные уравнения относительно переменных s_{ij} — элементов матрицы S. В нашем случае их получается 9 штук:

$$\begin{cases} b_{11}h_{11} = \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i1} - \alpha_{1i}s_{i1}) \\ b_{11}h_{12} = \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i2} - \alpha_{1i}s_{i2}) \\ b_{11}h_{13} = \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{1i}\gamma_{i3} - \alpha_{1i}s_{i3}) \\ b_{21}h_{11} = \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{2i}\gamma_{i1} - \alpha_{2i}s_{i1}) \\ \dots \\ b_{31}h_{13} = \sum\limits_{i=1}^{3}(s_{3i}\gamma_{i3} - \alpha_{3i}s_{i3}), \end{cases} \tag{44}$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость, этот метод удобен тем, что специализированные математические программы по умолчанию умеют решать уравнение Сильвестра от начала до конца. Например, для того чтобы решить первое из уравнений (43) в Scilab, надо ввести команду `S = sylv(-A,Γ,B*H,'c')`;[4] последний параметр которой говорит о том, что мы рассматриваем непрерывную модель объекта управления, а не дискретную.

Формула Аккермана

Выражение, называемое формулой Аккермана, выглядит как

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^{-1} f(A), \tag{45}$$

где количество элементов в первой матрице равно n, и все они кроме последнего равны нулю; $f(A)$ — матрица, рассчитываемая по формуле

$$f(A) = A^n + z^*_{n-1}A^{n-1} + z^*_{n-2}A^{n-2} + \dots + z^*_1 A + z^*_0 I. \tag{46}$$

Данную формулу можно доказать. Сделаем это для случая $n = 3$.[5]

Напомним, что

$$F = A - BK. \tag{47}$$

При этом искомое значение матрицы K обеспечит равенство полиномов $D(\lambda)$ и $D^*(\lambda)$. С учетом последней оговорки имеем

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^3 + z^*_2\lambda^2 + z^*_1\lambda + z^*_0 \tag{48}$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли, будучи подставленной заместо λ в свой характеристический полином, квадратная матрица его обнуляет. Следовательно для F имеем

$$F^3 + z^*_2 F^2 + z^*_1 F + z^*_0 I = O, \tag{49}$$

где O — нулевая матрица размером 3×3.

Используя (47), получим

$$F^2 = A^2 - ABK - BKA + (BK)^2 = A^2 - ABK - BK(A - BK) = A^2 - ABK - BKF \tag{50}$$

$$\begin{aligned} F^3 = A^3 - A^2BK - ABKA + A(BK)^2 - BKFA + BKFBK = \\ = A^3 - A^2BK - ABKF - BKF^2 \end{aligned} \tag{51}$$

Подставим полученные выражения и (47) в (49):

$$(A^3 - A^2BK - ABKF - BKF^2) + z^*_2(A^2 - ABK - BKF) + z^*_1(A - BK) + z^*_0 I = O, \tag{52}$$

сделав некоторые преобразования, получим

$$(A^3 + z^*_2A^2 + z^*_1A + z^*_0 I) - B(z^*_1K + z^*_2KF + KF^2) - AB(z^*_2K + KF) - A^2B \cdot K = O \tag{53}$$

[4] На месте буквы Γ в данной команде следует поставить переменную, равную матрице Γ.

[5] Источник доказательства: Рафиков Г.Ш. Цифровые системы управления. Конспект лекций. – Донецк 1999 г. (masters.donntu.edu.ua/2007/kita/titkov/library/p8.htm)

Заметим, что первое слагаемое равно $f(A)$. Перенесем остальные слагаемые в правую часть уравнения и заменим их произведением двух матриц:

$$f(A) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^* K + z_2^* KF + KF^2 \\ z_2^* K + KF \\ K \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Заметим, что первый множитель в правой части уравнения равен Y. Умножим все уравнение на Y^{-1} слева:

$$Y^{-1} f(A) = \begin{bmatrix} z_1^* K + z_2^* KF + KF^2 \\ z_2^* K + KF \\ K \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Умножив все уравнение на [0 0 1] слева, получим формулу Аккермана

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^{-1} f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^* K + z_2^* KF + KF^2 \\ z_2^* K + KF \\ K \end{bmatrix} = K. \tag{56}$$

Схема моделирования процесса

С учетом выбранной стретегии управления, описываемой уравнением (2), схема моделирования исследуемой системы примет вид, показанный на рис. 1.

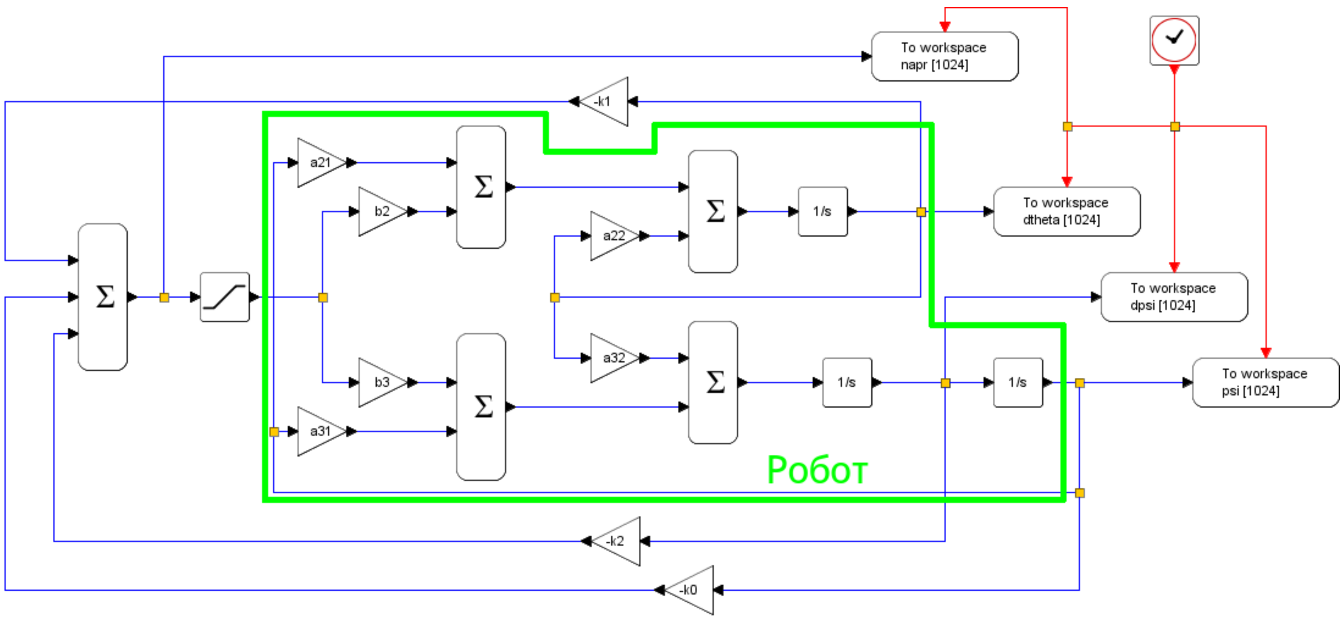

Рис. 1. Схема моделирования процесса.

Обратите внимание, различные каналы связи соединяются только в местах, помеченных оранжевыми квадратиками. Величины k0, k1 и k2 есть соответствующие элементы матрицы K. Входящий в эту схему блок с рисунком ломаной, нужен ровно для того же, для чего он использовался в схеме из лабораторной №3: он ограничивает поступающее на свой вход напряжение определенными границами $-U_{max}$ и U_{max}.

2 Цель работы

Познакомиться с различными способами расчета коэффициентов *П-регулятора состояния*[6]. Доделать робототехнический механизм, написав для него управляющую программу.

3 Порядок выполнения работы

1 Используя по крайней мере один из описанных в пособии методов, рассчитайте коэффициенты регулятора. Учтите, что получающиеся в ходе расчетов коэффициенты в зависимости от своего физического смысла измеряются или в В/рад, или в В · с/рад.

2 Напишите для робота в среде BricxCC управляющую программу. В ее основе должен лежать П-регулятор состояния, а следовательно должны использоваться найденные ранее коэффициенты.

3 Загрузите программу в командный блок и проверьте работоспособность робота. В случае отрицательного результата измените время переходного процесса t_n и повторите расчет со всеми последующими действиями. В случае повторных неудач, продолжайте изменять время переходного процесса и заново проделывать все необходимые действия.

4 Постройте в Xcos схему моделирования разрабатываемого робота. Для нескольких наборов начальных условий — значений переменных dpsi0, dtheta0, psi0 — промоделируйте исследуемый процесс и постройте соответствующие графики.

[6]Так называется применяемая управляющая стратегия.