

# Лабораторная работа №5

## Разработка системы управления для неполноприводного робота.

### Часть 2. Расчет коэффициентов регулятора.

#### 1 Теоретические сведения

##### Введение

В первой части пособия по данной работе для обоих роботов было получено следующее уравнение, описывающее их работу:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (1)$$

Дополнив его еще одним соотношением можно получить систему матричных уравнений, называемую *моделью «вход-состояние-выход»* исследуемого объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния системы ( $n$  — количество переменных в векторе состояния (в нашем случае  $n = 3$ ); также  $n$  называют *порядком объекта управления*);

$y$  —  $l$ -мерный вектор выходных величин ( $l$  — количество переменных в нем);

$u$  —  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий ( $m$  — количество переменных в нем (в нашем случае  $m = 1$ ));

$A$  — матрица, определяющая динамические свойства объекта управления, размерности  $n \times n$ ;

$B$  — матрица входа управляющих воздействий размерности  $n \times m$ ;

$C$  — матрица выхода размерности  $l \times n$ , определяющая, какие из компонент вектора состояния, или какие их линейные комбинации будут рассматриваться как выходные величины (сигналы) объекта управления (например, если в качестве  $y$  следует взять только величины  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ , то матрица  $C$  будет равна:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

проверяя:

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

убеждаемся, что в этом случае  $y$  действительно будет равен  $[\psi \dot{\psi}]^T$ .

Прежде, чем приступить к каким-либо расчетам, необходимо проверить, а возможно ли вообще управлять исследуемым объектом. Для этих целей в рассмотрение вводится так

называемая *матрица управляемости*  $Y$ , формируемая как<sup>1</sup>

$$Y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad (5)$$

и вычисляется ее определитель. В случае, если  $\det Y \neq 0$ , система управляема и синтез регулятора возможен. Иначе остается заключить, что рассматриваемый объект неуправляем.

## Расчет коэффициентов регулятора

Для управления роботами, описанными в первой части данного пособия, предлагается использовать *пропорциональный регулятор состояния* (*П-регулятор состояния*), формирующий управляющее воздействие<sup>2</sup> согласно формуле:

$$u = Ke, \quad (6)$$

где  $K$  — матрица коэффициентов регулятора, равная

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

а  $e$  — вектор ошибок, определяемый как

$$e = x_w - x = \begin{bmatrix} \psi_w \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{\psi}_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где в свою очередь  $x_w$  — вектор, содержащий желаемые значения компонентов вектора состояния. Поскольку желаемое поведение изучаемых роботов описывается нулевым вектором  $x_w$ :

$$x_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

то выражение (6) будет эквивалентно следующему:

$$u = -Kx. \quad (10)$$

Подставив (10) в (1) можно получить:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = Fx, \quad (11)$$

где  $F = A - BK$ . Введя для компонент матриц  $A$  и  $B$  следующие обозначения

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

---

<sup>1</sup> Данная запись означает, что упоминаемые матрицы следует записать рядом и полученный результат рассматривать как новую матрицу. Например,

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad O_3 = [O_1 \ O_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup> Для рассматриваемых роботов управляющим воздействием является напряжение  $U$ , подаваемое на их двигатели.

состав матрицы  $F$  можно представить так:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} - b_2 k_1 & a_{22} - b_2 k_2 & -b_2 k_3 \\ a_{31} - b_3 k_1 & a_{32} - b_3 k_2 & -b_3 k_3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для сокращения дальнейших записей введем обозначение, аналогичное (12):

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Поведение исследуемой системы зависит от вида характеристического полинома матрицы  $F$ <sup>3</sup>:

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - F) = \lambda^3 + z_2 \lambda^2 + z_1 \lambda + z_0, \quad (15)$$

где  $\lambda$  — «обычная» (никак не определяемая) переменная;  $E$  — единичная матрица;  $z_i$  ( $i \in \{0, 1, 2\}$ ) — числовые коэффициенты, получающиеся при расчете. При этом требуемому поведению системы — поддержке нулевых значений компонент вектора  $x$ , определенному ее быстродействию и проч. — будет соответствовать определенный вид (определенные значения коэффициентов  $z_i$ ) характеристического полинома:

$$D^*(\lambda) = \lambda^3 + z_2^* \lambda^2 + z_1^* \lambda + z_0^*. \quad (16)$$

Последний полином задается разработчиком в соответствии с тем, какие характеристики (какое поведение) он хочет видеть у разрабатываемой системы. При этом (опять же в зависимости от желаемого поведения системы) применяются различные методы расчета постоянных коэффициентов  $z_i^*$  ( $i \in \{0, 1, 2\}$ ). В данной работе их значения следует получить раскрытием по биному Ньютона выражения

$$D^*(\lambda) = (\lambda + w_0)^n, \quad (17)$$

где  $w_0$  — числовое значение, рассчитываемое по формуле

$$w_0 = \frac{t_n^*}{t_n}, \quad (18)$$

где, в свою очередь,  $t_n^*$  — «стандартное» значение времени переходного процесса, определяемое по порядку объекта управления из таблицы 1;  $t_n$  — «действительное» значение времени переходного процесса в нашей системе. Для первого раза последнее можно взять равным, например, 0.5 с. В данной работе под этими параметрами следует понимать некоторые величины, обратно пропорциональные быстродействию робота. То есть, к примеру, уменьшение параметра  $t_n$  при расчетах будет означать, что коэффициенты регулятора, получающиеся в результате, будут обеспечивать большее быстродействие технической системы.

---

<sup>3</sup>Это можно проиллюстрировать хотя бы тем фактом, что с точностью до замены  $\lambda^v$  на  $\frac{d^v \psi}{dt^v}$  или  $\frac{d^v \omega}{dt^v}$  характеристический полином матрицы  $F$  совпадает с левой частью дифференциальных уравнений относительно функций  $\psi(t)$  и  $\omega(t)$ , получающихся из системы (11) (см. Приложение А).

Таблица 1. Значения параметра  $t_{\pi}^*$  в зависимости от порядка объекта управления.

$n$	1	2	3	4	5	6
$t_{\pi}^*, \text{ с}$	3.0	4.8	6.3	7.8	9.2	10.5

Характеристический полином матрицы  $F$  будет равен заданному разработчиком, если будет справедливым соотношение

$$D(\lambda) = D^*(\lambda), \quad (19)$$

в более подробном виде для нашего случая расписываемое как

$$\det(\lambda E - F) = (\lambda + w_0)^3, \quad (20)$$

$$\lambda^3 + z_2\lambda^2 + z_1\lambda + z_0 = \lambda^3 + z_2^*\lambda^2 + z_1^*\lambda + z_0^*, \quad (21)$$

$$\lambda^3 - (f_{22} + f_{33})\lambda^2 + (f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} - f_{31})\lambda + (f_{22}f_{31} - f_{21}f_{32}) = \lambda^3 + 3w_0\lambda^2 + 3w_0^2\lambda + w_0^3. \quad (22)$$

Оно равносильно системе 3 алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -f_{22} - f_{33} = 3w_0 \\ f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} - f_{31} = 3w_0^2 \\ f_{22}f_{31} - f_{21}f_{32} = w_0^3, \end{cases} \quad (23)$$

решением которой с учетом выражений (13) и (14):

$$\begin{cases} -a_{22} + b_2k_2 + b_3k_3 = 3w_0 \\ (a_{22} - b_2k_2)(-b_3k_3) + b_2k_3(a_{32} - b_3k_2) - a_{31} + b_3k_1 = 3w_0^2 \\ (a_{22} - b_2k_2)(a_{31} - b_3k_1) - (a_{21} - b_2k_1)(a_{32} - b_3k_2) = w_0^3, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} b_2k_2 + b_3k_3 = 3w_0 + a_{22} \\ b_3k_1 + (a_{32}b_2 - a_{22}b_3)k_3 = 3w_0^2 + a_{31} \\ (a_{32}b_2 - a_{22}b_3)k_1 + (a_{21}b_3 - a_{31}b_2)k_2 = w_0^3 - a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 \\ b_3 & 0 & a_{32}b_2 - a_{22}b_3 \\ a_{32}b_2 - a_{22}b_3 & a_{21}b_3 - a_{31}b_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3w_0 + a_{22} \\ 3w_0^2 + a_{31} \\ w_0^3 - a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32} \end{bmatrix} \quad (26)$$

и находятся расчетные формулы для значений элементов матрицы  $K$ , обеспечивающих истинность равенства (19), а следовательно и требуемое поведение системы.

Помимо обозначенного существуют и другие методы поиска матрицы  $K$ , которые при расчетах, производимых на ЭВМ, оказываются более удобными. Рассмотрим один из них.

### Формула Аккермана

Выражение, называемое *формулой Аккермана*, выглядит как

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^{-1} f(A), \quad (27)$$

где количество элементов в первой матрице равно  $n$ , и все они кроме последнего равны нулю;  $f(A)$  — матрица, рассчитываемая по формуле

$$f(A) = A^n + z_{n-1}^* A^{n-1} + z_{n-2}^* A^{n-2} + \cdots + z_1^* A + z_0^* E. \quad (28)$$

Данную формулу можно доказать. Сделаем это для случая  $n = 3$ <sup>4</sup>.

Напомним, что

$$F = A - BK. \quad (29)$$

При этом искомое значение матрицы  $K$  обеспечит равенство полиномов  $D(\lambda)$  и  $D^*(\lambda)$ . С учетом последней оговорки имеем

$$\det(\lambda E - F) = \lambda^3 + z_2^* \lambda^2 + z_1^* \lambda + z_0^*. \quad (30)$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли, будучи подставленной заместо  $\lambda$  в свой характеристический полином, квадратная матрица его обнуляется. Следовательно, для  $F$  имеем

$$F^3 + z_2^* F^2 + z_1^* F + z_0^* E = O, \quad (31)$$

где  $O$  — нулевая матрица размером  $3 \times 3$ .

Используя (29), получим

$$F^2 = A^2 - ABK - BKA + (BK)^2 = A^2 - ABK - BK(A - BK) = A^2 - ABK - BKF \quad (32)$$

$$\begin{aligned} F^3 &= (A - BK)(A^2 - ABK - BKA + (BK)^2) = A^3 - A^2BK - ABKA + A(BK)^2 - \\ &\quad - BKA^2 + BKABK + (BK)^2A - (BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK(A - BK) - \\ &\quad - BKA(A - BK) + (BK)^2(A - BK) = A^3 - A^2BK - ABKF - BKAF + (BK)^2F = \\ &= A^3 - A^2BK - ABKF - BK(A - BK)F = A^3 - A^2BK - ABKF - BKF^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Подставим полученные выражения и (29) в (31):

$$(A^3 - A^2BK - ABKF - BKF^2) + z_2^*(A^2 - ABK - BKF) + z_1^*(A - BK) + z_0^*E = O, \quad (34)$$

сделав некоторые преобразования, получим

$$(A^3 + z_2^* A^2 + z_1^* A + z_0^* E) - B(z_1^* K + z_2^* KF + KF^2) - AB(z_2^* K + KF) - A^2 B \cdot K = O. \quad (35)$$

Заметим, что первое слагаемое равно  $f(A)$ . Перенесем остальные слагаемые в правую часть уравнения и заменим их произведением двух матриц:

$$f(A) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^* K + z_2^* KF + KF^2 \\ z_2^* K + KF \\ K \end{bmatrix}. \quad (36)$$

---

<sup>4</sup>Источник доказательства: Рафиков Г.Ш. Цифровые системы управления. Конспект лекций. – Донецк 1999 г. ([masters.donntu.edu.ua/2007/kita/titkov/library/p8.htm](http://masters.donntu.edu.ua/2007/kita/titkov/library/p8.htm))

Заметим, что первый множитель в правой части уравнения равен  $Y$ . Умножим все уравнение на  $Y^{-1}$  слева:

$$Y^{-1}f(A) = \begin{bmatrix} z_1^*K + z_2^*KF + KF^2 \\ z_2^*K + KF \\ K \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Умножив все уравнение на  $[0 \ 0 \ 1]$  слева, получим формулу Аккермана

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^{-1}f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^*K + z_2^*KF + KF^2 \\ z_2^*K + KF \\ K \end{bmatrix} = K. \quad (38)$$

### Схема моделирования

С учетом выбранной стратегии управления, описываемой уравнением (10), схема моделирования работы робота примет вид, показанный на рис. 1.

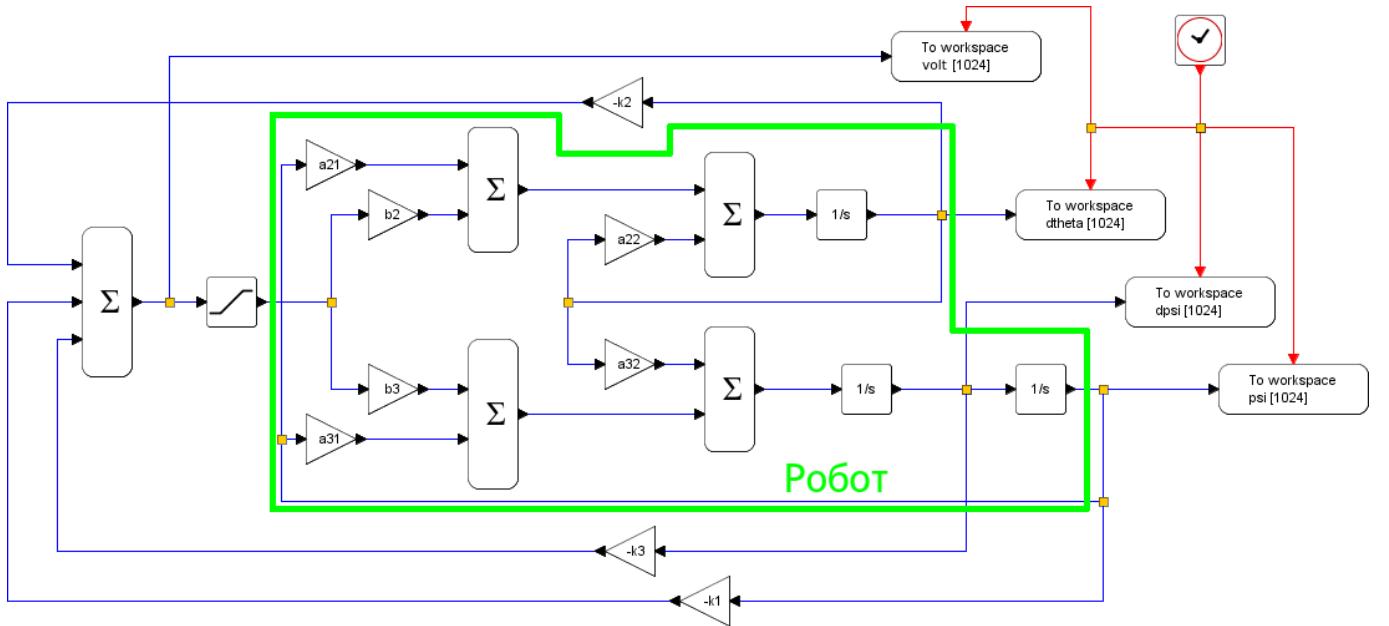


Рис. 1. Схема моделирования.

Обратите внимание, различные каналы связи соединяются только в местах, помеченных оранжевыми квадратиками. Величины  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  есть соответствующие элементы матрицы  $K$ . Входящий в эту схему блок с рисунком ломаной, нужен ровно для того же, для чего он использовался в схеме из лабораторной №3: он ограничивает поступающее на свой вход напряжение определенными границами:  $-U_{max}$  и  $U_{max}$ .

## 2 Цель работы

Получить опыт составления модели вход-состояние-выход для относительно сложного электромеханического устройства. Познакомиться с понятием П-регулятора состояния, расчетом его коэффициентов и принципами работы неполноприводных роботов, находящихся под его управлением.

## 3 Порядок выполнения работы

1 Соберите одного из роботов, рассмотренных в основной части пособия. Особое внимание при этом уделите

- в случае работы с обратным маятником на тележке:
  - строению крепежного узла, соединяющего маятник с тележкой: он должен включать в себя датчик HiTechnic Angle Sensor (см. Приложение [B](#));
  - Приложению [D](#): в нем содержится пример конструкции исследуемого робота.
- в случае работы с Segway:
  - тому факту, что для определения значений величин  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  Segway следует оборудовать датчиком HiTechnic Gyro Sensor (см. Приложение [C](#)).

Также следует учесть следующее.

При построении математической модели механической системы на используемом для этого рисунке последняя показывается в том состоянии, которому соответствуют положительные значения обобщенных координат.<sup>5</sup> Из указанной причины следует, что отмеченные на рис. 5, 6 и 8 документа «Лабораторная работа №5а … Часть 1 …» и на рис. 2 или 3 документа «Лабораторная работа №5б … Часть 1 …» углы  $\psi$  и  $\theta$  положительны. Отсюда можно сделать вывод, что отсчет данных углов у конструируемого робота должен производится аналогичным образом.

2 Измерьте и/или рассчитайте все параметры робота, встречающиеся в его математической модели, например массу колес, длину маятника, и запишите получившиеся значения.

Отдельно стоит отметить тот факт, что при расчете момента инерции «тела» Segway входящие в него командный блок, датчик HiTechnic Gyro Sensor и моторы NXT следует принять за однородные параллелепипеды (см. рис. [2<sup>6</sup>](#)).

<sup>5</sup>Достаточно очевидно, что обобщенные координаты могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например, в случае с обратным маятником на тележке при отклонении первого из положения равновесия в одну сторону угол  $\psi$  будет большим нуля, а в другую — меньшим нуля. То же можно сказать и про угол  $\theta$ .

<sup>6</sup>Момент инерции показанной на данном рисунке конструкции, относительно горизонтальной оси, проходящей через ее центр масс и перпендикулярной направлению движения робота, есть сумма моментов инерции относительно нее каждого из параллелепипедов. Напоминаем, что последние можно определить с помощью теоремы Штейнера .

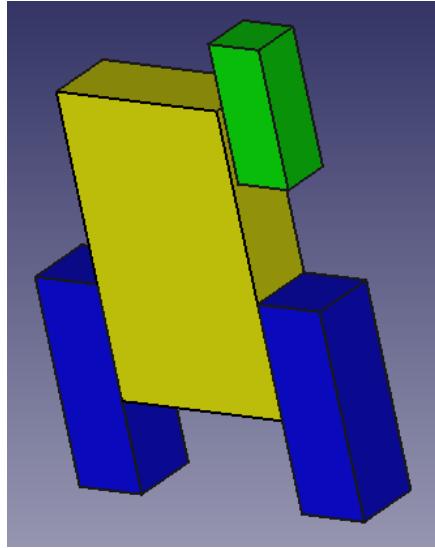


Рис. 2. Аппроксимация «тела» Segway параллелепипедами.

- 3 Сформируйте матрицу управляемости  $Y$  и убедитесь, что ее определитель не равен нулю.
- 4 Выберите некоторое значение для времени переходного процесса  $t_n$  и рассчитайте коэффициенты П-регулятора состояния так, как это описано в основной части данного пособия. Учтите, что получающиеся в ходе расчетов коэффициенты в зависимости от своего физического смысла измеряются или в В/рад, или в В · с/рад.
- 5 Напишите для робота управляющую программу. В ее основе должен лежать П-регулятор состояния, а следовательно должны использоваться найденные ранее коэффициенты. Также создаваемая программа должна снимать с робота и записывать в текстовый файл данные, достаточные для построения графиков, подобных показанным на рис. 3 и 4.
- 6 Загрузите программу в командный блок и проверьте работоспособность робота. В случае отрицательного результата измените время переходного процесса  $t_n$  и повторите расчет со всеми последующими действиями. В случае повторных неудач, продолжайте изменять время переходного процесса и заново проделывать все необходимые действия.
- 7 Постройте в Xcos схему моделирования разрабатываемого робота. При работе над ней учтите, что значения полей Initial state у интеграторов в отличие от прошлых лабораторных работ не должны быть равными нулю. В этот раз в них следует прописать название тех переменных (в каждый блок свою), в которых будут храниться начальные условия, например  $\psi_0$ ,  $d\psi_0$ ,  $d\theta_0$ . В таком случае, если надо будет, например, исследовать поведение механизма при начальном отклонении покоящегося маятника на  $\pi/12$  рад и покоящейся тележке, необходимо будет перед моделированием дать в Scilab команду:  $\psi_0=\pi/12$ ,  $d\psi_0=0$ ,  $d\theta_0=0$ .
- 8 Для трех наборов начальных условий — значений переменных  $d\psi_0$ ,  $d\theta_0$ ,  $\psi_0$  — промоделируйте исследуемый процесс и постройте соответствующие графики. Пример последних можно видеть на рис. 5.

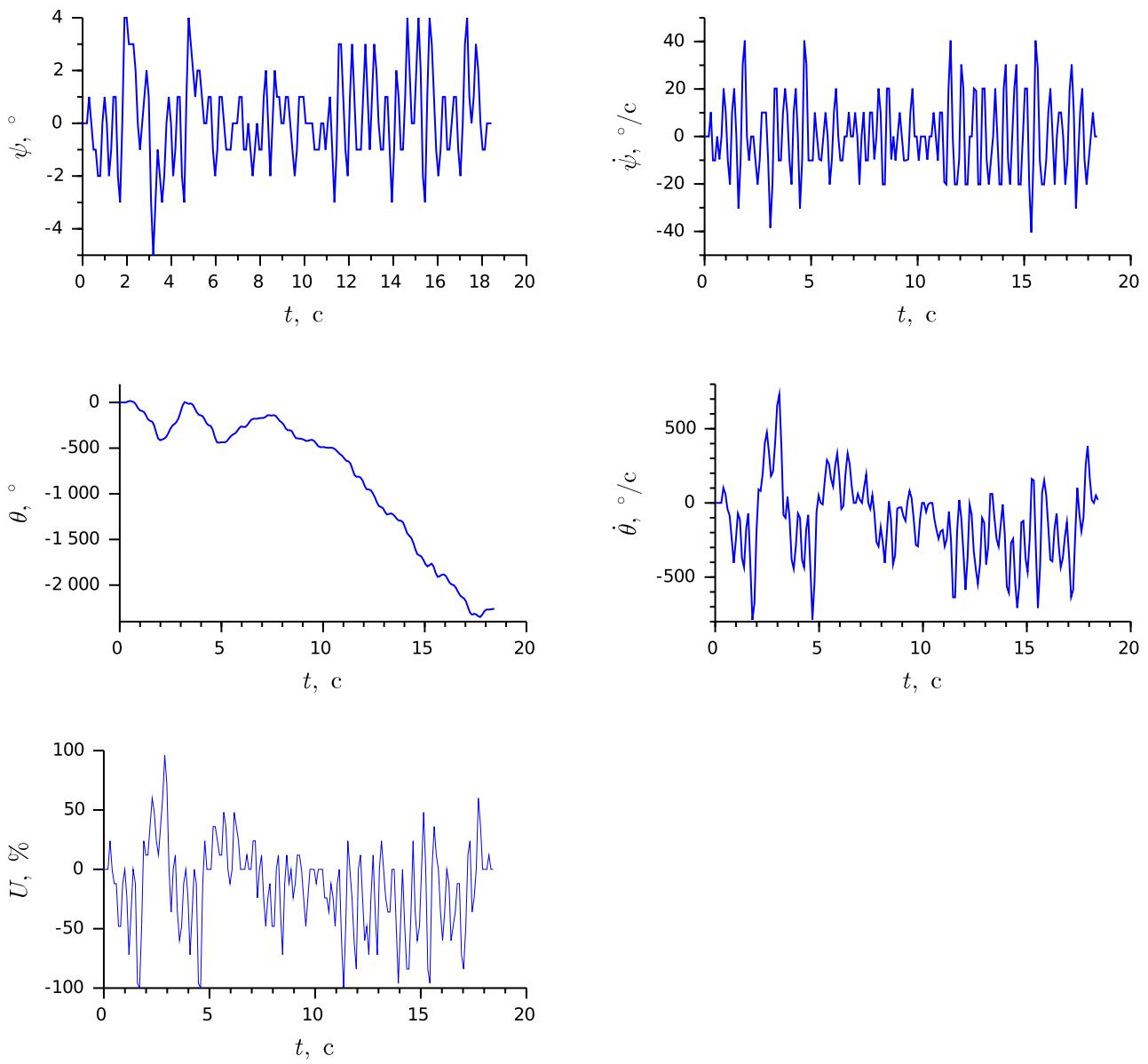


Рис. 3. Графики, построенные по данным, снятым с робота «обратный маятник на тележке».

#### 4 Содержание отчета

- 1 Результаты всех измерений, графики и вычисления, предусмотренных(ые) разделом «Порядок выполнения работы».
- 2 Фотография робота (в том случае, если его конструкция сильно отличается от приведенных в пособии ее примеров).
- 3 Построенная в Xcos схема моделирования (аналогичная представленной на рис. 1).
- 4 Исходный код программы робота.
- 5 Исходные коды расчетных программ для Scilab.
- 6 Выводы о проделанной работе.

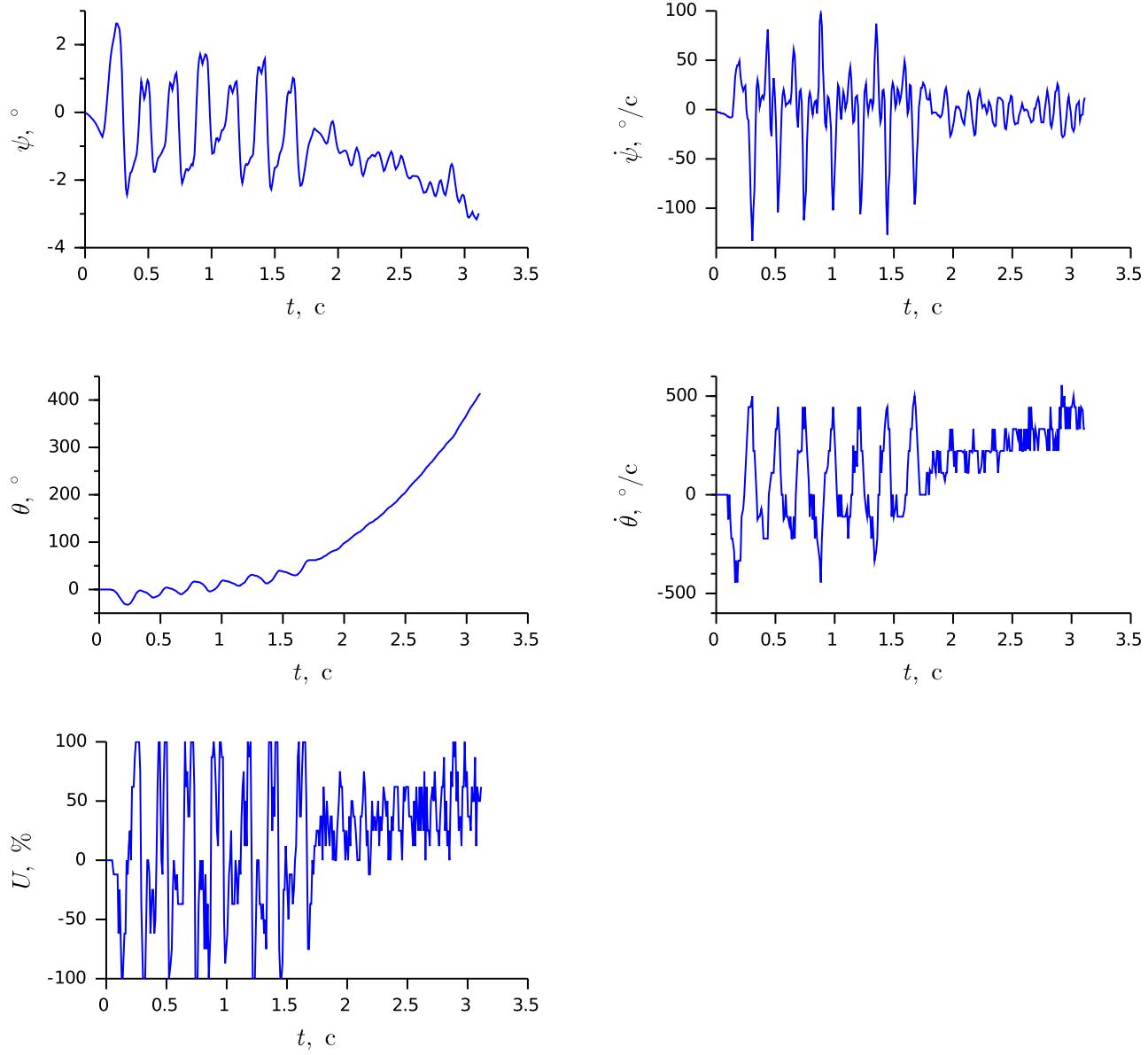


Рис. 4. Графики, построенные по снятым с Segway данным.

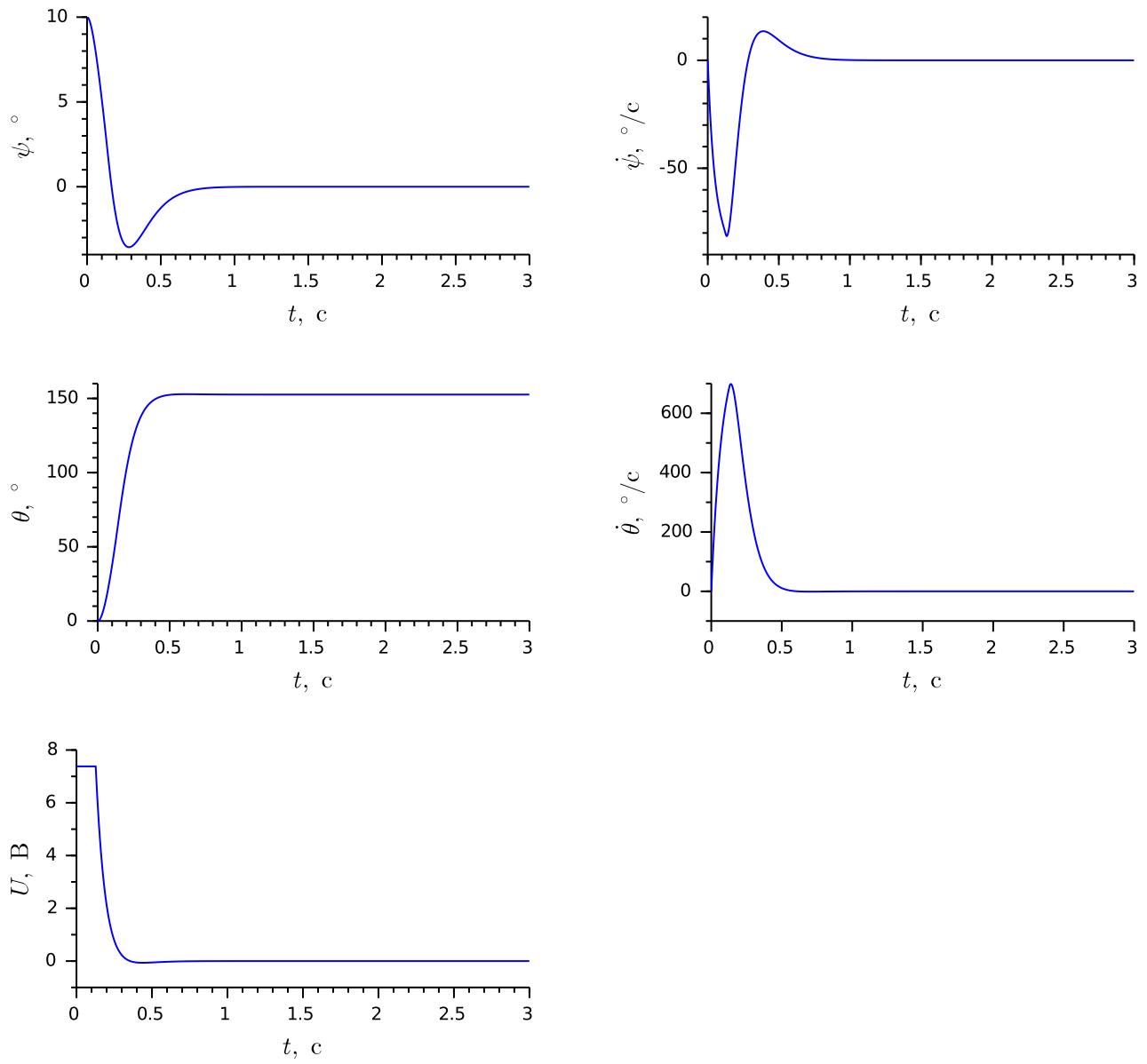


Рис. 5. Графики — результаты моделирования соответствующей схемы.

## Приложение А

**Вычисление характеристического полинома матрицы  $F$  и получение дифференциальных уравнений относительно функций  $\psi(t)$  и  $\theta(t)$**

### Характеристический полином матрицы $F$

Вычисляя характеристический полином матрицы  $F$  можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - F) &= \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -f_{21} & \lambda - f_{22} & -f_{23} \\ -f_{31} & -f_{32} & \lambda - f_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - f_{22} & -f_{23} \\ -f_{32} & \lambda - f_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -f_{21} & \lambda - f_{22} \\ -f_{31} & -f_{32} \end{vmatrix} = \lambda((\lambda - f_{22})(\lambda - f_{33}) - f_{23}f_{32}) - (f_{21}f_{32} + \\ &+ f_{31}(\lambda - f_{22})) = \lambda^3 - (f_{22} + f_{33})\lambda^2 + (f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} - f_{31})\lambda + (f_{22}f_{31} - f_{21}f_{32}). \quad (39) \end{aligned}$$

### Дифференциальное уравнение относительно функции $\psi(t)$

Согласно уравнению (11) справедливо

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Данное выражение можно переписать как

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} = f_{21}\psi + f_{22}\dot{\theta} + f_{23}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} = f_{31}\psi + f_{32}\dot{\theta} + f_{33}\dot{\psi}. \end{cases} \quad (41)$$

Дифференцируя последнее уравнение, можно получить следующее:

$$\dddot{\psi} = f_{31}\dot{\psi} + f_{32}\ddot{\theta} + f_{33}\ddot{\psi}, \quad (42)$$

из него же следует то, что

$$f_{32}\dot{\theta} = \ddot{\psi} - f_{31}\psi - f_{33}\dot{\psi}. \quad (43)$$

С учетом второго уравнения системы (41) выражение (42) примет вид:

$$\ddot{\psi} = f_{31}\dot{\psi} + f_{32}f_{21}\psi + f_{32}f_{22}\dot{\theta} + f_{32}f_{23}\dot{\psi} + f_{33}\ddot{\psi}, \quad (44)$$

данное же выражение с учетом (43) преобразуется до следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{\psi} = f_{31}\dot{\psi} + f_{32}f_{21}\psi + f_{22}\ddot{\psi} - f_{22}f_{31}\psi - f_{22}f_{33}\dot{\psi} + f_{32}f_{23}\dot{\psi} + f_{33}\ddot{\psi} \quad (45)$$

$$\ddot{\psi} - (f_{22} + f_{33})\ddot{\psi} + (f_{22}f_{33} - f_{32}f_{23} - f_{31})\dot{\psi} + (f_{22}f_{31} - f_{32}f_{21})\psi = 0 \quad (46)$$

## Дифференциальное уравнение относительно функции $\omega(t)$

С учетом того, что  $\omega = \dot{\theta}$ , два последних уравнения системы (41) можно переписать так:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = f_{21}\psi + f_{22}\omega + f_{23}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} = f_{31}\psi + f_{32}\omega + f_{33}\dot{\psi}. \end{cases} \quad (47)$$

Взяв от полученных выражений несколько производных можно получить следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = f_{21}\psi + f_{22}\omega + f_{23}\dot{\psi} \\ \ddot{\omega} = f_{21}\dot{\psi} + f_{22}\dot{\omega} + f_{23}\ddot{\psi} \\ \dddot{\omega} = f_{21}\ddot{\psi} + f_{22}\ddot{\omega} + f_{23}\dddot{\psi} \\ \ddot{\psi} = f_{31}\psi + f_{32}\omega + f_{33}\dot{\psi} \\ \dddot{\psi} = f_{31}\dot{\psi} + f_{32}\dot{\omega} + f_{33}\ddot{\psi}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega} - f_{22}\omega = f_{21}\psi + f_{23}\dot{\psi} \\ \ddot{\omega} - f_{22}\dot{\omega} = f_{21}\dot{\psi} + f_{23}\ddot{\psi} \\ -f_{22}\ddot{\omega} = -\ddot{\omega} + f_{21}\ddot{\psi} + f_{23}\dddot{\psi} \\ -f_{32}\omega = f_{31}\psi + f_{33}\dot{\psi} - \ddot{\psi} \\ -f_{32}\dot{\omega} = f_{31}\dot{\psi} + f_{33}\ddot{\psi} - \dddot{\psi}. \end{cases} \quad (48)$$

матричное представление которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} -f_{22} & 1 & 0 \\ 0 & -f_{22} & 1 \\ 0 & 0 & -f_{22} \\ -f_{32} & 0 & 0 \\ 0 & -f_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\omega} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_{21} & f_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{23} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & f_{21} & f_{23} \\ 0 & f_{31} & f_{33} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{31} & f_{33} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\omega} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Произведя некоторые вычисления<sup>7</sup>:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\omega} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_{21} & f_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{23} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & f_{21} & f_{23} \\ 0 & f_{31} & f_{33} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{31} & f_{33} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -f_{22} & 1 & 0 \\ 0 & -f_{22} & 1 \\ 0 & 0 & -f_{22} \\ -f_{32} & 0 & 0 \\ 0 & -f_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\omega} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\omega} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31} & -f_{22}f_{33} + f_{23}f_{32} + f_{31} & f_{22} + f_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

для функции  $\omega(t)$  можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\omega} = (f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31})\omega - (f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} - f_{31})\dot{\omega} + (f_{22} + f_{33})\ddot{\omega} \quad (52)$$

$$\ddot{\omega} - (f_{22} + f_{33})\ddot{\omega} + (f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} - f_{31})\dot{\omega} + (f_{22}f_{31} - f_{32}f_{21})\omega = 0 \quad (53)$$

<sup>7</sup>Часть одной из ниже следующих матриц, которая для краткости записи была опущена, легко можно узнать, выполнив, например, в Maxima следующие команды:

```
M:matrix([-f22,1,0],[0,-f22,1],[0,0,-f22],[-f32,0,0],[0,-f32,0]);
```

```
P:matrix([0,f21,f23,0,0],[0,0,f21,f23,0],[-1,0,0,f21,f23],[0,f31,f33,-1,0],[0,0,f31,f33,-1]);
```

```
ratsimp(invert(P).M);
```

## Приложение В

### Основы работы с датчиком HiTechnic Angle Sensor

HiTechnic Angle Sensor представляет из себя датчик, измеряющий разные количественные характеристики, описывающие вращение собственного «ротора». Под последним подразумевается его подвижная часть.



Рис. 6. Общий вид датчика.

Чтобы подключить этот датчик к программе, написанной на языке NXC, в нее необходимо добавить функцию `SetSensorLowspeed(sensor_port)`. Ее единственный аргумент — номер порта, к которому датчик подключен.

Считывание данных производится функцией `ReadSensorHTAngle(sensor_port, abs_angle, alg_angle, rpm)`. В результате своего вызова она возвращает с датчика, подключенного в порт `sensor_port`, три значения (по порядку): угловую координату (в градусах) текущего положения «ротора», представляющую собой число от 0 до 360; угол отклонения (в градусах) от некоторого положения, представляющий из себя целое число, лежащее в диапазоне  $(-2147483648; 2147483647)$ ; угловую скорость (в об/мин) вращения «ротора» — целое число, принадлежащее интервалу  $(-1000; 1000)$ .

В ряде случаев появляется необходимость обнулить (сбросить) текущие показания датчика. Сделать это можно с помощью функции `ResetSensorHTAngle(sensor_port, mode)`, причем значение последнего ее аргумента, являющегося целочисленной константой, следует принять равным макросу `HTANGLE_MODE_CALIBRATE`, если надо обнулить обе величины `abs_angle` и `alg_angle`, а равным макросу `HTANGLE_MODE_RESET`, если надо сбросить только `alg_angle`.

Например, в приведенном ниже тексте некоторой программы с датчика (у которого все показания были предварительно обнулены), подключенного в порт №2, снимаются выше указанные данные, и их значения записываются в переменные `p1`, `p2` и `p3`:

```
task main(){
    int p1, p3;
    long p2;
    ...
}
```

```

SetSensorLowspeed(S2);
ResetSensorHTAngle(S2, HTANGLE_MODE_CALIBRATE);

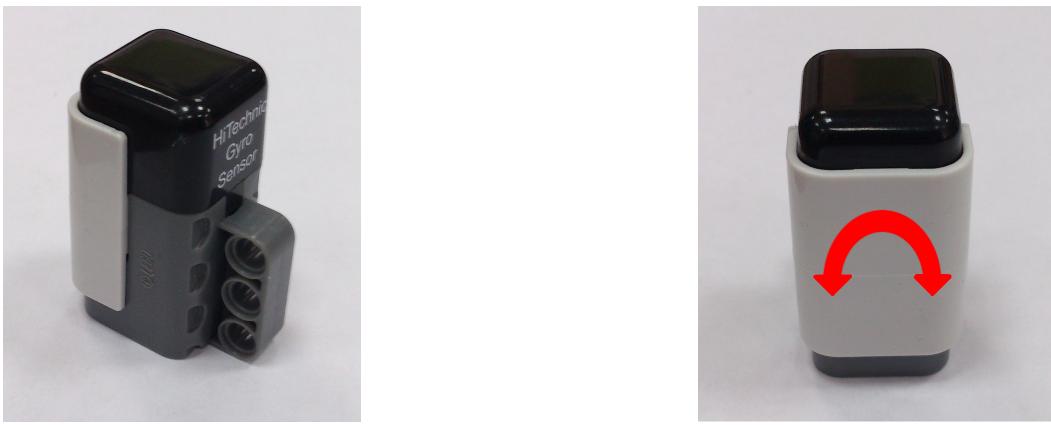
...
ReadSensorHTAngle(S2, p1, p2, p3);
...
}

```

## Приложение С

### Основы работы с датчиком HiTechnic Gyro Sensor

HiTechnic Gyro Sensor представляет из себя модуль, изображенный на рис. 7. Этот датчик возвращает значение собственной угловой скорости вращения относительно оси, перпендикулярной той его поверхности, которая обращена «к нам» на рис. 7б. Данный факт пояснен красной стрелкой, показанной там же.



а)

б)

Рис. 7. Внешний вид NXT Gyro Sensor.

Чтобы зарегистрировать NXT Gyro Sensor в исполняемой программе, в ее состав необходимо добавить функцию `SetSensorHTGyro(sensor_port)`, чей единственный аргумент, как несложно догадаться, есть номер порта, в который этот датчик подключен.

Считывание данных производится функцией `SensorHTGyro(sensor_port)`. Возвращаемое ею целое значение представляет собой уже упомянутую угловую скорость, выраженную в [градусах в секунду]. Знак получаемого числа определяется направлением вращения.

Особое внимание при работе с этим датчиком следует уделить тому, что в его данных может содержаться определенная ошибка, поэтому прежде, чем использовать сенсор в составе рабочего устройства, его необходимо дополнитель но проверить. В случае, если указанная погрешность присутствует и носит простейший характер<sup>8</sup> очевидно, что ее следует учесть, внеся определенные изменения в текст исполняемой роботом программы.

---

<sup>8</sup>Например, датчик постоянно возвращает значение скорости на  $n$  (градусов/с) меньшее или большее настоящего.

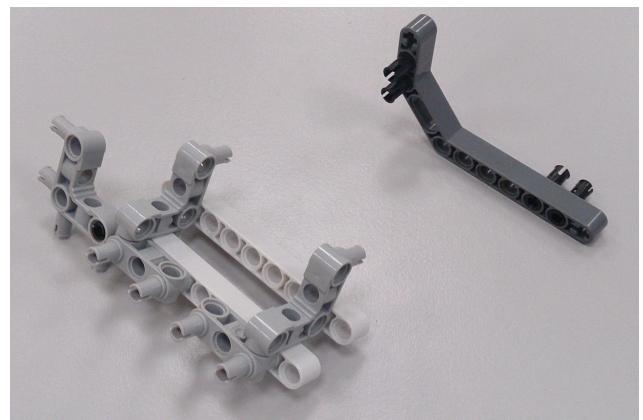
## Приложение D

### Пример конструкции робота, называемого «обратным маятником на тележке»

Одну из возможных конструкций робота под названием «обратный маятник на тележке» описывают рис. 8 –13.



a)



б)

Рис. 8. Командный блок NXT и крепления для одного из двигателей.



a)



б)

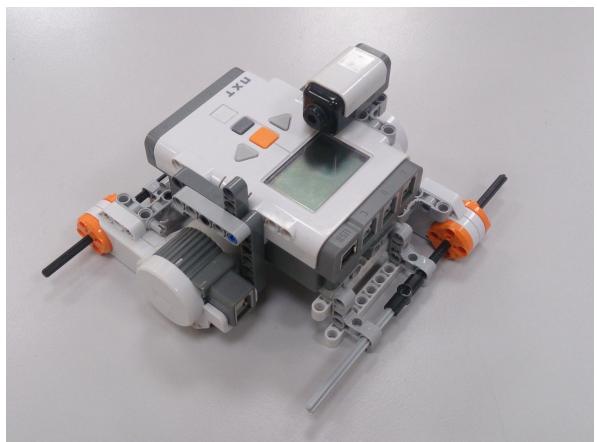
Рис. 9. Командный блок NXT с присоединенными к нему креплениями для двигателей.



Рис. 10. Установка на робота двигателей.



a)



б)

Рис. 11. Установка креплений для оси вращения маятника.

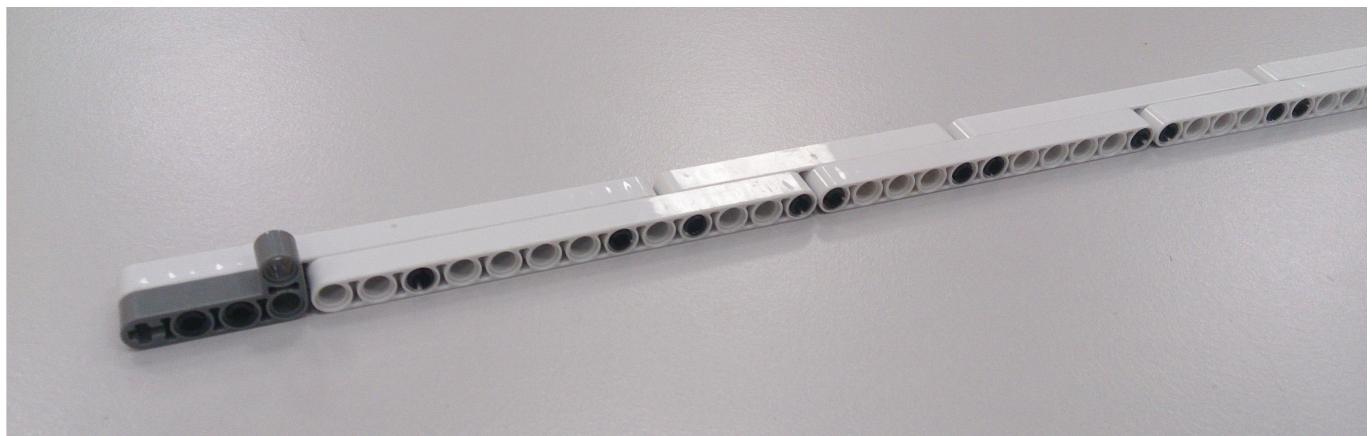


Рис. 12. Конец маятника с крепежным пазом.

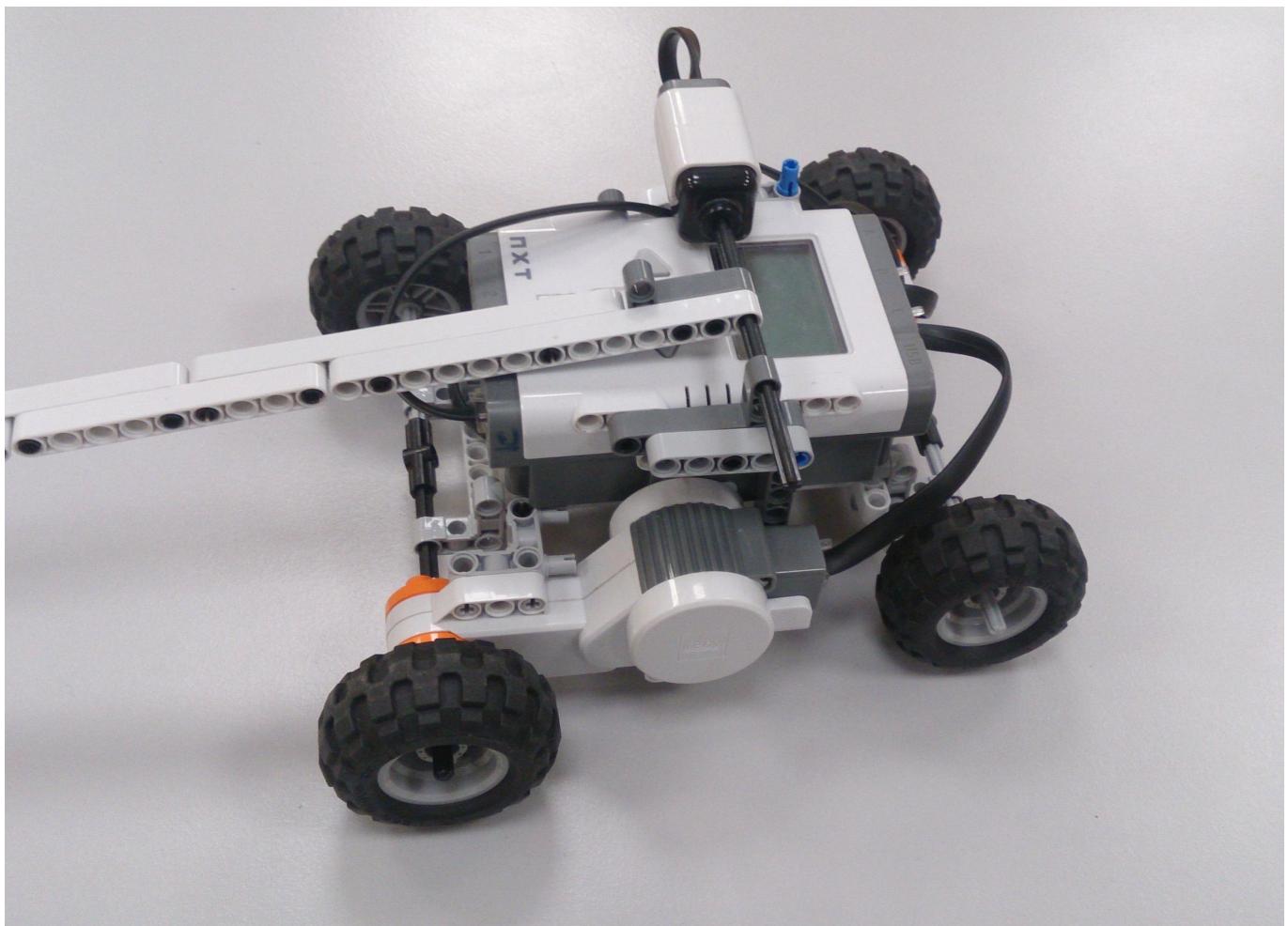


Рис. 13. Полностью собранный робот.