

# Методы численного дифференцирования и интегрирования

## 1 Численное интегрирование

### 1.1 Общие замечания

Значение определенного интеграла равно площади геометрической фигуры<sup>1</sup>, ограниченной осью абсцисс, прямыми  $t = t_1$  и  $t = t_2$  и участком интегрируемой функции, лежащим между последней парой прямых (см. рис. 1):

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = S_{1,2}. \quad (1)$$

Все ниже описанные методы численного интегрирования основаны на этом свойстве и различаются только в способах приближенного вычисления площади под графиком рассматриваемой функции.

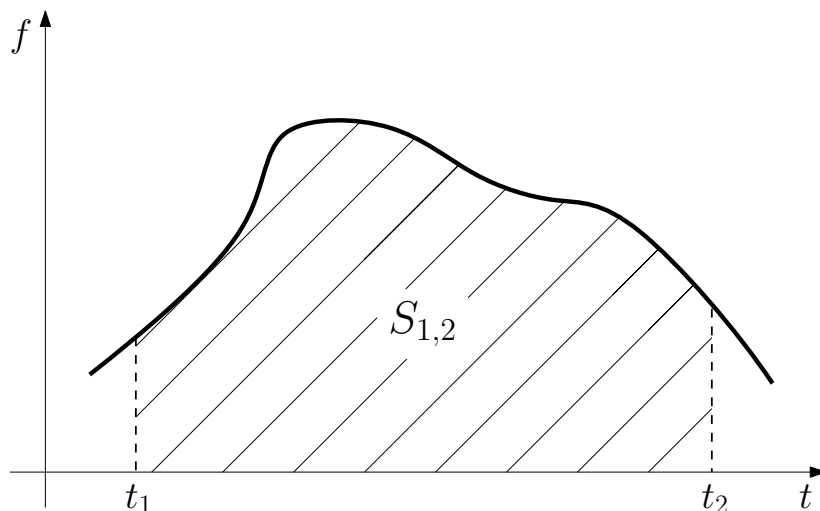


Рис. 1. Чертеж, поясняющий геометрический смысл определенного интеграла.

### 1.2 Метод правых прямоугольников

В данном методе площадь под графиком интегрируемой функции оценивается по сумме площадей прямоугольников, показанных на рис. 2. Поиск значения определенного интеграла

---

<sup>1</sup>Такая фигура называется *криволинейной трапецией*.

при этом ведется по следующим формулам:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt \approx f_{m+1}(t_{m+1} - t_m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_n} f dt &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt + \int_{t_{m+1}}^{t_{m+2}} f dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt \approx f_{m+1}(t_{m+1} - t_m) + f_{m+2}(t_{m+2} - t_{m+1}) + \dots + \\ &+ f_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=m+1}^n f_i(t_i - t_{i-1}), \quad m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.3 Метод левых прямоугольников

Этот метод практически идентичен прошлому и отличается от него только выбором используемых прямоугольников (см. рис. 3). Формулы для этого случая также мало отличаются от выше приведенных:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt \approx f_m(t_{m+1} - t_m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_n} f dt &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt + \int_{t_{m+1}}^{t_{m+2}} f dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt \approx f_m(t_{m+1} - t_m) + f_{m+1}(t_{m+2} - t_{m+1}) + \dots + \\ &+ f_{n-1}(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=m}^{n-1} f_i(t_{i+1} - t_i), \quad m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.4 Метод средних прямоугольников

Для расчета значения определенного интеграла данным методом следует использовать суммы площадей прямоугольников, изображенных на рис. 4:

$$\int_{t_m}^{t_{m+2}} f dt \approx f_{m+1}(t_{m+2} - t_m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_n} f dt &= \int_{t_m}^{t_{m+2}} f dt + \int_{t_{m+2}}^{t_{m+4}} f dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_n} f dt \approx f_{m+1}(t_{m+2} - t_m) + f_{m+3}(t_{m+4} - t_{m+2}) + \dots + \\ &+ f_{n-1}(t_n - t_{n-2}) = \sum_{\substack{i=m+1, \\ i \neq m+2k}}^{n-1} f_i(t_{i+1} - t_{i-1}), \quad m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7)$$

Свое название данный метод получил от следующего требования, предъявляемого к абсциссам используемых точек (записано с использованием обозначений, принятых на рис. 4):

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2}, \quad t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2}, \quad \dots \quad (8)$$

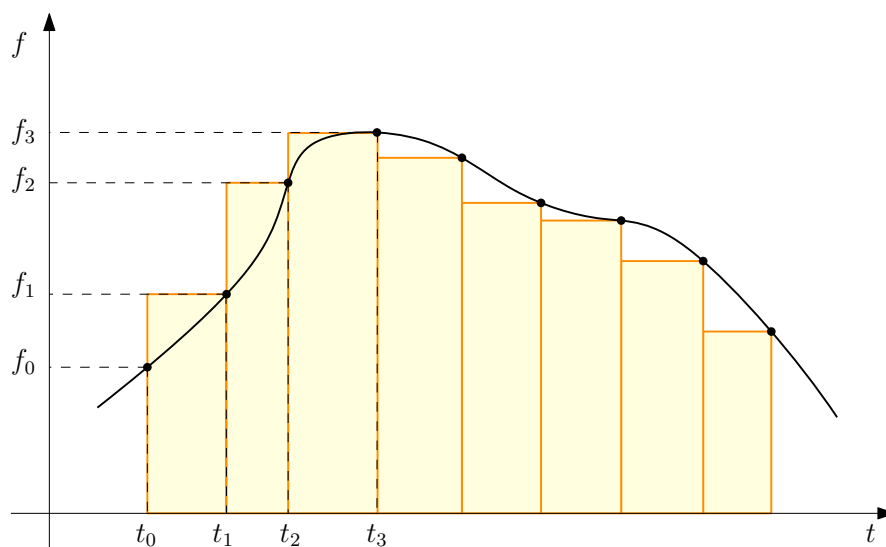


Рис. 2. Пояснение к вычислению определенного интеграла методом правых прямоугольников.

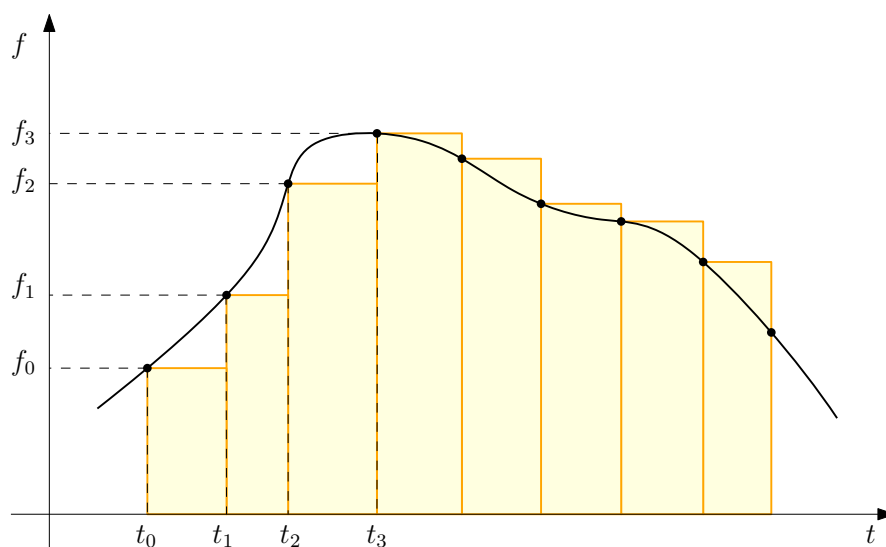


Рис. 3. Пояснение к вычислению определенного интеграла методом левых прямоугольников.

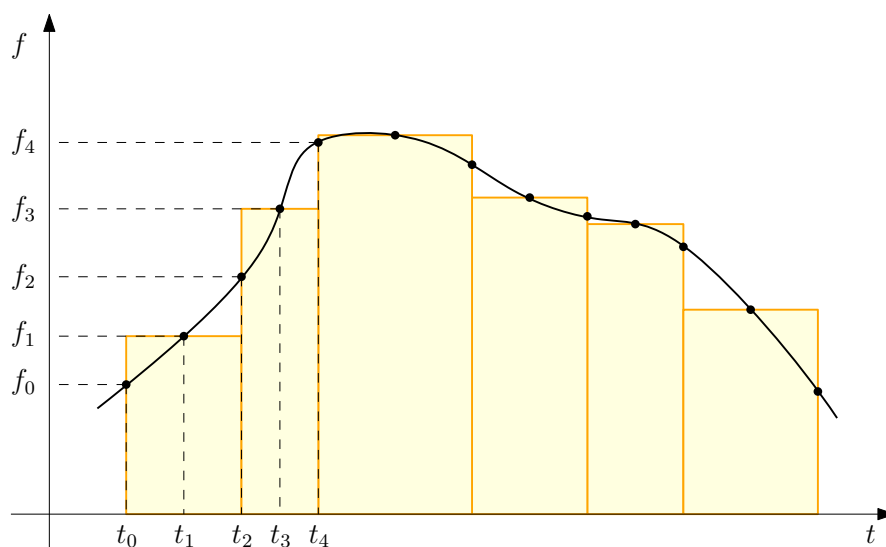


Рис. 4. Пояснение к вычислению определенного интеграла методом средних прямоугольников.

## 1.5 Метод трапеций

В данном методе площадь под графиком рассматриваемой функции ищется как сумма площадей прямоугольных трапеций (см. рис. 5). Следовательно, для расчета значения определенного интеграла следует пользоваться формулами:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt \approx \frac{f_m + f_{m+1}}{2} \cdot (t_{m+1} - t_m), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_n} f dt &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt + \int_{t_{m+1}}^{t_{m+2}} f dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt \approx \frac{f_m + f_{m+1}}{2} \cdot (t_{m+1} - t_m) + \\ &+ \frac{f_{m+1} + f_{m+2}}{2} \cdot (t_{m+2} - t_{m+1}) + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \cdot (t_n - t_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=m}^{n-1} \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (10)$$

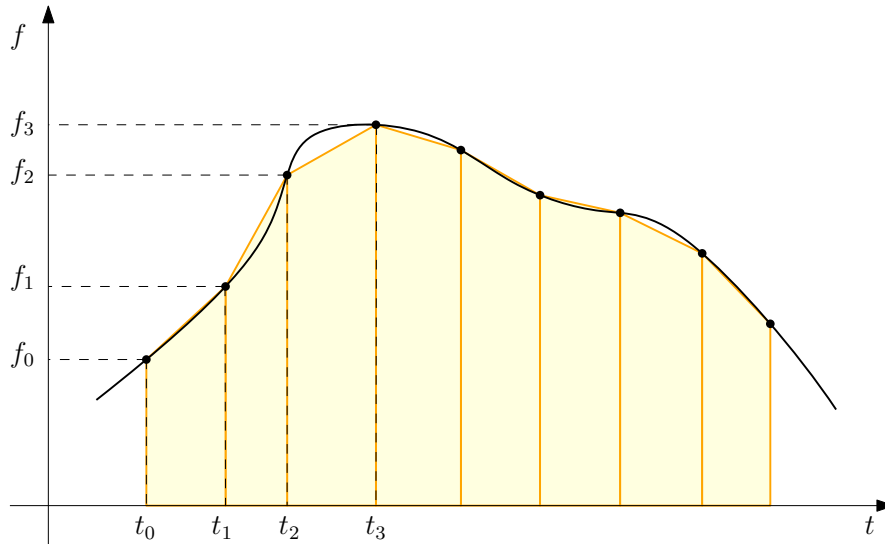


Рис. 5. Пояснение к вычислению определенного интеграла методом трапеций.

## 1.6 Метод парабол (Симпсона)

Через любые три точки с разными абсциссами на координатной плоскости проходит парабола и притом только одна (см. рис. 6). Справедливость данного утверждения можно продемонстрировать, например, следующим образом.

Поставим себе задачу найти параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  (см. ниже) параболы, проходящей через заданные три точки с координатами  $(t_1, f_1)$ ,  $(t_2, f_2)$  и  $(t_3, f_3)$ .

Уже только из того факта, что парабола проходит через эти точки, оказываются справедливыми следующие три равенства:

$$\begin{cases} at_1^2 + bt_1 + c = f_1 \\ at_2^2 + bt_2 + c = f_2 \\ at_3^2 + bt_3 + c = f_3 \end{cases} \quad (11)$$

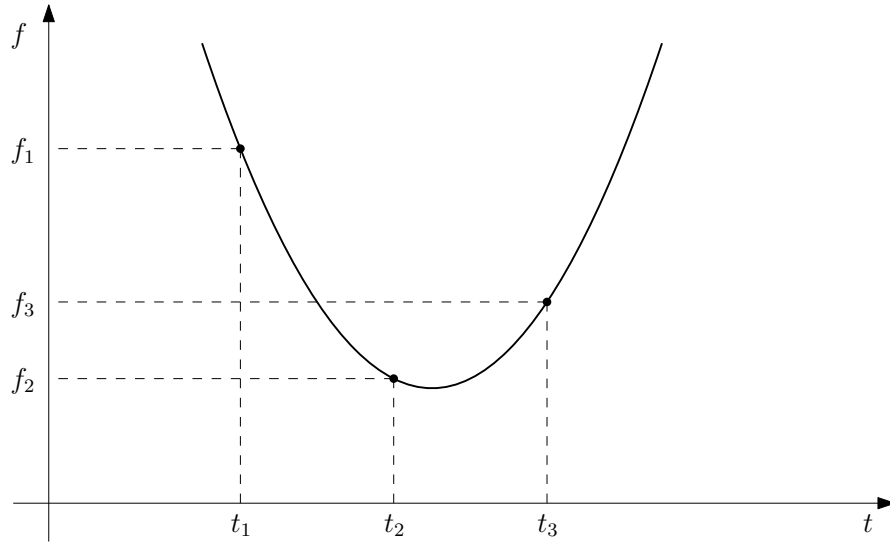


Рис. 6. Пример параболы, проходящей через некоторые три точки.

В матричном виде они могут быть переписаны, как:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Из этого выражения для неизвестных параметров можно получить следующую расчетную формулу:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Определитель матрицы, содержащей значения абсцисс точек, равен:

$$\begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} = t_2^2 t_3 - t_2 t_3^2 - t_1^2 t_3 + t_1 t_3^2 + t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2 = \underline{\underline{t_2^2 t_3}} - \underline{\underline{t_2 t_3^2}} - \underline{\underline{t_1^2 t_3}} + \underline{\underline{t_1 t_3^2}} + \underline{\underline{t_1^2 t_2}} - \underline{\underline{t_1 t_2^2}} + \\ + \underline{\underline{t_1 t_2 t_3}} - \underline{\underline{t_1 t_2 t_3}} = t_1(-t_1 t_3 + t_3^2 + t_1 t_2 - t_2 t_3) - t_2(-t_2 t_3 + t_3^2 + t_1 t_2 - t_1 t_3) = \\ = (t_1 - t_2)(-t_1 t_3 + t_3^2 + t_1 t_2 - t_2 t_3) = (t_1 - t_2)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \quad (14)$$

и, следовательно, при условии, что абсциссы  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  не равны друг другу, отличен от нуля. Это свойство в свою очередь позволяет заключить, что обратная матрица в выражении (13) существует. Значит, относительно параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  это уравнение разрешимо единственным образом. Значит, через эти три точки действительно проходит парабола и при этом только одна. ■

Метод парабол (метод Симпсона) основывается на данном свойстве и приближает искомый определенный интеграл суммой площадей криволинейных трапеций, формируемых параболками, проходящими через точки интегрируемой функции (см. рис. 7). Расчетные

формулы при этом выглядят следующим образом:

$$\int_{t_m}^{t_{m+2}} f dt \approx \frac{t_{m+2} - t_m}{6} (f_m + 4f_{m+1} + f_{m+2}), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_n} f dt &= \int_{t_m}^{t_{m+2}} f dt + \int_{t_{m+2}}^{t_{m+4}} f dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_n} f dt \approx \frac{t_{m+2} - t_m}{6} (f_m + 4f_{m+1} + f_{m+2}) + \\ &+ \frac{t_{m+4} - t_{m+2}}{6} (f_{m+2} + 4f_{m+3} + f_{m+4}) + \dots + \frac{t_n - t_{n-2}}{6} (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) = \\ &= \sum_{\substack{i=m+1, \\ i \neq m+2k}}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{6} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}), \quad m < n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что эти формулы справедливы только при условии, аналогичном (8). Другими словами, значение абсциссы каждой второй точки из всех участвующих в интегрировании должно быть средним арифметическим значений абсцисс соседних с ней точек.

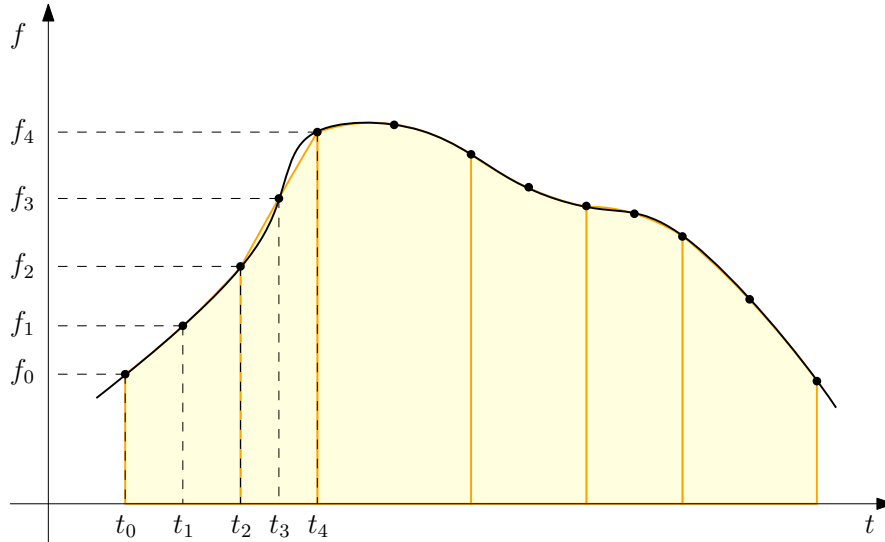


Рис. 7. Пояснение к вычислению определенного интеграла методом парабол.

Поскольку правая часть выражения (15), представляющая собой формулу для площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, далеко не очевидна, докажем ее.

Рассмотрим чертеж, изображенный на рис. 6, и ситуацию, при которой

$$t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = h. \quad (17)$$

Из выражений (11) и (17) следует, что

$$f_1 = at_1^2 + bt_1 + c = a(t_2 - h)^2 + b(t_2 - h) + c = at_2^2 - 2aht_2 + ah^2 + bt_2 - bh + c, \quad (18)$$

$$f_3 = at_3^2 + bt_3 + c = a(t_2 + h)^2 + b(t_2 + h) + c = at_2^2 + 2aht_2 + ah^2 + bt_2 + bh + c, \quad (19)$$

$$f_3 - f_1 = 4aht_2 + 2bh. \quad (20)$$

Рассматриваемый интеграл с учетом выражений (18)–(20) равен:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_3} f dt &= \int_{t_1}^{t_3} (at^2 + bt + c) dt = \left( \frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct \right) \Big|_{t_1}^{t_3} = \frac{1}{6} (2at_3^3 + 3bt_3^2 + 6ct_3 - 2at_1^3 - \\
 &\quad - 3bt_1^2 - 6ct_1) = \frac{1}{6} (2at_3^3 + 2bt_3^2 + 2ct_3 + bt_3^2 + 4ct_3 - 2at_3^3 - 2bt_3^2 - 2ct_3 - bt_3^2 - 4ct_3) = \\
 &= \frac{1}{6} (2t_3f_3 + bt_3^2 + 4ct_3 - 2t_1f_1 - bt_1^2 - 4ct_1) = \frac{1}{6} (2(t_2 + h)f_3 + b(t_2 + h)^2 + 4c(t_2 + h) - \\
 &\quad - 2(t_2 - h)f_1 - b(t_2 - h)^2 - 4c(t_2 - h)) = \frac{1}{6} (2t_2(f_3 - f_1) + 2h(f_3 + f_1) + 4hbt_2 + 8hc) = \\
 &= \frac{1}{6} (2t_2(4aht_2 + 2bh) + 2h(f_3 + f_1) + 4hbt_2 + 8hc) = \frac{1}{6} (2h(f_3 + f_1) + 8hat_2^2 + 8hbt_2 + \\
 &\quad + 8hc) = \frac{1}{6} (2h(f_3 + f_1) + 2h(4at_2^2 + 4bt_2 + 4c)) = \frac{h}{3} (f_1 + 4f_2 + f_3). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Получившееся выражение с учетом (17) совпадает с (15). ■

## 2 Численное дифференцирование

Производная функции в данной в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке (см. рис. 8):

$$f'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \operatorname{tg} \varphi \quad (22)$$

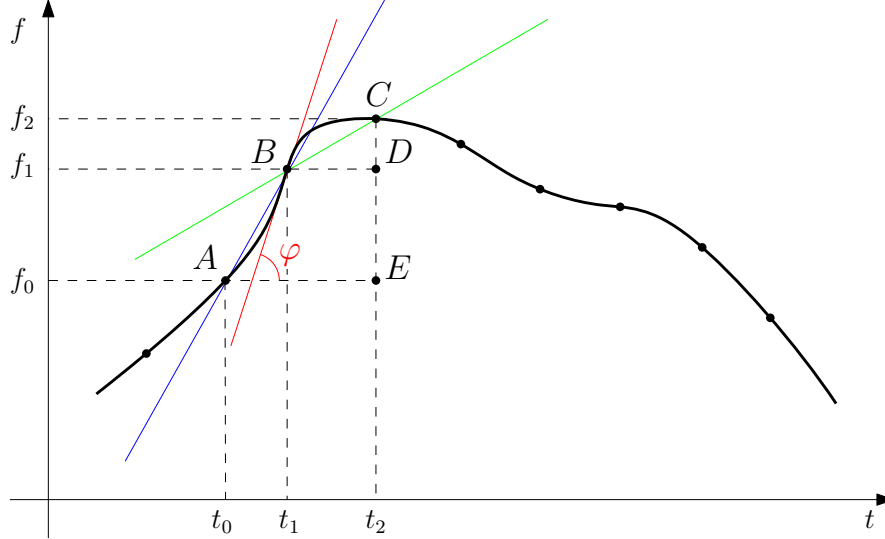


Рис. 8. Пояснение к вычислению значения производной функции в точке.

Метод приближенного расчета этого значения через тангенс угла наклона секущей, проходящей через точки \$B\$ и \$C\$:

$$f'(t_1) \approx \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg} \angle CBD \quad (23)$$

называется *методом правосторонней разности*, а через тангенс угла наклона секущей, проходящей через точки \$A\$ и \$B\$:

$$f'(t_1) \approx \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} = \operatorname{tg} \angle BAE \quad (24)$$

— *методом левосторонней разности.*

Если для абсцисс используемых точек выполняются следующие равенства:

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = h, \quad (25)$$

то значение производной можно рассчитать точнее, найдя среднее арифметическое оценок, получаемых в результате использования двух предыдущих методов:

$$f'(t_1) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} + \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} \right) = \frac{f_2 - f_0}{2h}. \quad (26)$$

Такая схема приближенного расчета значения  $f'(t_1)$  называется *методом двусторонней разности.*