

Лабораторная работа №5б

Разработка системы управления для неполноприводного робота.

Часть 1. Построение математической модели объекта управления.

1 Методические рекомендации

Перед изучением материала пособия следует освоить содержание документа «Лабораторная работа №5а . . . Часть 1 . . .».

2 Теоретические сведения

Данная версия 5-ой работы посвящена робототехническому устройству, обычно именуемому как «Segway». Его примерный вид можно видеть на рис. 1.



Рис. 1. Примерный вид робота Segway.

Segway представляет из себя одноосного колесного робота, который, перемещаясь в двух противоположных направлениях, способен удерживать свое «тело» в вертикальном положении.

Математическая модель

Аналогично тому, как это было сделано в документе «Лабораторная работа №5а ... Часть 1 ...», для Segway можно получить, что он имеет всего две степени свободы¹ и положение в пространстве в любой момент времени каждого из составляющих его тел можно однозначно определить, используя всего две обобщенные координаты — угол поворота колес из начального положения (θ) и угол отклонения робота от вертикали (ψ). Выражения, связывающие их с обычными декартовыми координатами центра масс «тела» робота (x_t , y_t) и центра масс колес (x_k , y_k) имеют вид (рис. 2):

$$x_k = x_k^{(0)} + r\theta, \quad (1)$$

$$y_k = \text{const}, \quad (2)$$

$$x_t = x_k + |CW| \sin \psi, \quad (3)$$

$$y_t = y_k + |CW| \cos \psi \quad (4)$$

где $x_k^{(0)}$ — значение координаты x_k в начальный момент времени; r — радиус колеса; $|CW|$ — длина отрезка CW , обозначим которую через l .

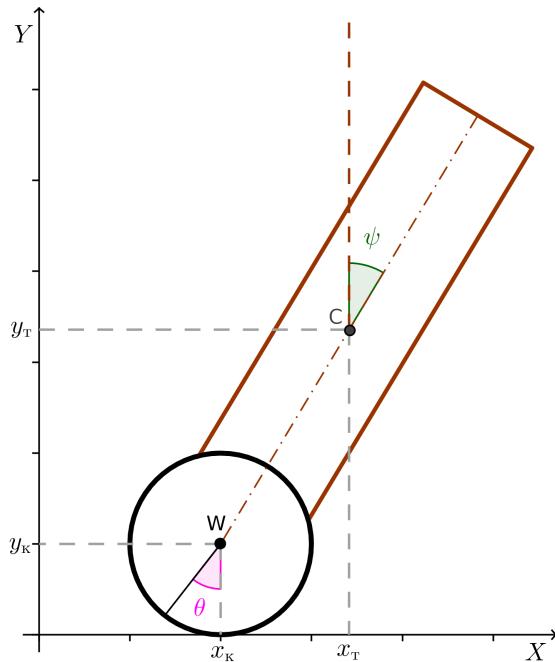


Рис. 2. Робот в прямоугольной системе координат.

Законы Ньютона для колес и «тела» Segway с учетом действующих в системе сил (рис. 3²) запишутся в виде:

для «тела»:

$$m_t \ddot{x}_t = N_x, \quad (\text{второй закон в проекции на ось } OX) \quad (5)$$

$$m_t \ddot{y}_t = N_y - m_t g, \quad (\text{второй закон в проекции на ось } OY) \quad (6)$$

$$J_t \ddot{\psi} = N_y l \sin \psi - N_x l \cos \psi - 2M; \quad (\text{уравнение моментов}) \quad (7)$$

¹Опять предполагается, что его колеса не проскальзывают.

²Двойки перед обозначениями момента M опущены для экономии места на рисунке. На самом деле они нужны, поэтому считайте, что они подразумеваются.

для колес:

$$2m_k \ddot{x}_k = F_{tp} - N_x, \quad (\text{второй закон в проекции на ось } OX) \quad (8)$$

$$2J_k \ddot{\theta} = 2M - F_{tp}r; \quad (\text{уравнение моментов}) \quad (9)$$

где m_t и m_k — массы «тела» и одного колеса соответственно; J_t и J_k — их моменты инерции относительно собственных центров масс; N — сила реакции, действующая между колесами и «телем» (индексами отмечены ее проекции на соответствующие оси); M — момент, с которым мотор раскручивает колеса (всего в конструкции их два, поэтому стоит множитель, равный двум); F_{tp} — сила трения, действующая на колеса. Несложно видеть, что последние два уравнения записаны сразу для пары колес, а не для каждого по отдельности.

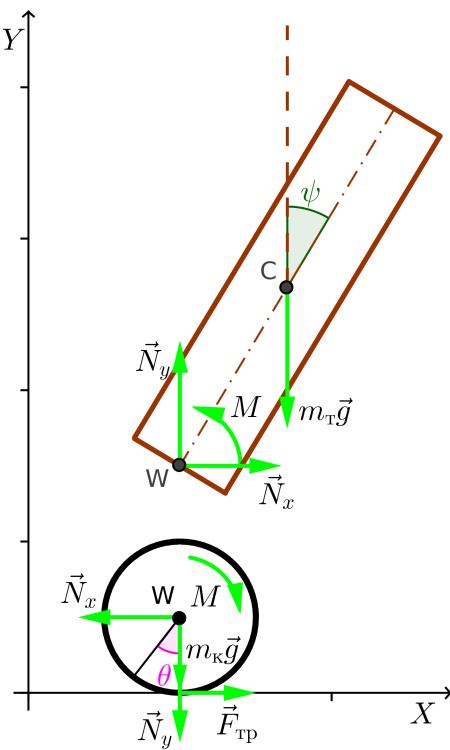


Рис. 3. Действующие в системе силы.

Важно отметить, что в случае с Segway на отклонение его «тела» от вертикали непосредственное влияние будет оказывать суммарный врачательный момент, создаваемый двигателями (см. уравнение (7)). В нашей ситуации это является следствием из третьего закона Ньютона. Данная особенность представляет из себя главное отличие между текущей моделью обратного маятника и той, которая была рассмотрена в другой версии этой лабораторной работы.

Для того, чтобы убрать из полученных выражений неизвестные силы F_{tp} и N , во-первых, выразим N_x из (5), N_y из (6) и подставим результаты в уравнения (7) и (8), а во-вторых, выразим F_{tp} из (8) и подставим ее в выражение (9). В итоге получим

$$\begin{cases} J_t \ddot{\psi} = (m_t g + m_t \ddot{y}_t) l \sin \psi - m_t \ddot{x}_t l \cos \psi - 2M \\ 2J_k \ddot{\theta} = 2M - 2m_k \ddot{x}_k r - m_t \ddot{x}_t r. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом того, что, согласно выражениям (1) – (4), справедливы следующие равенства:

$$\ddot{x}_k = r\ddot{\theta}, \quad (11)$$

$$\ddot{y}_k = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{x}_t = r\ddot{\theta} + l\ddot{\psi} \cos \psi - l\dot{\psi}^2 \sin \psi, \quad (13)$$

$$\ddot{y}_t = -l\ddot{\psi} \sin \psi - l\dot{\psi}^2 \cos \psi, \quad (14)$$

сделаем в системе (10) соответствующие подстановки; в итоге будем иметь

$$\begin{cases} J_t \ddot{\psi} = m_t g l \sin \psi - m_t l^2 \ddot{\psi} - m_t l r \ddot{\theta} \cos \psi - 2M \\ 2J_k \ddot{\theta} = 2M - 2m_k r^2 \ddot{\theta} - m_t r^2 \ddot{\theta} - m_t l r \ddot{\psi} \cos \psi + m_t l r \dot{\psi}^2 \sin \psi. \end{cases} \quad (15)$$

Теперь достигнем этого же результата, используя уравнения Лагранжа.

Составим выражения для механических энергий входящих в Segway тел. Получим для «тела»:

$$T_{\text{п}}^{(t)} = \frac{1}{2} m_t (\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2), \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (16)$$

$$T_{\text{в}}^{(t)} = \frac{1}{2} J_t \dot{\psi}^2, \quad (\text{для вращательного движения отн. центра масс}) \quad (17)$$

$$U^{(t)} = m_t g y_t; \quad (\text{потенциальная энергия}) \quad (18)$$

для колес:

$$T_{\text{п}}^{(k)} = 2 \cdot \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2), \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (19)$$

$$T_{\text{в}}^{(k)} = 2 \cdot \frac{1}{2} J_k \dot{\theta}^2, \quad (\text{для вращательного движения отн. центра масс}) \quad (20)$$

$$U^{(k)} = 2m_k g y_k. \quad (\text{потенциальная энергия}) \quad (21)$$

Подставляя в эти выражения уравнения (11) – (14), окончательно получим:

для «тела»:

$$T_{\text{п}}^{(t)} = \frac{1}{2} m_t (r^2 \dot{\theta}^2 + 2l r \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi + l^2 \dot{\psi}^2), \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (22)$$

$$T_{\text{в}}^{(t)} = \frac{1}{2} J_t \dot{\psi}^2, \quad (\text{для вращательного движения...}) \quad (23)$$

$$U^{(t)} = C + m_t g l \cos \psi; \quad (\text{потенциальная энергия}) \quad (24)$$

для колес:

$$T_{\text{п}}^{(k)} = m_k r^2 \dot{\theta}^2, \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (25)$$

$$T_{\text{в}}^{(k)} = J_k \dot{\theta}^2, \quad (\text{для вращательного движения...}) \quad (26)$$

$$U^{(k)} = \text{const}, \quad (\text{потенциальная энергия}) \quad (27)$$

где C — некоторая константа.

Функция Лагранжа, которая в этом случае вычисляется по формуле

$$L = T_{\text{п}}^{(t)} + T_{\text{в}}^{(t)} + T_{\text{п}}^{(k)} + T_{\text{в}}^{(k)} - U^{(t)} - U^{(k)}, \quad (28)$$

распишется как

$$L = \frac{1}{2}m_{\text{T}}r^2\dot{\theta}^2 + m_{\text{T}}lr\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\psi + \frac{1}{2}m_{\text{T}}l^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_{\text{T}}\dot{\psi}^2 + m_{\text{K}}r^2\dot{\theta}^2 + J_{\text{K}}\dot{\theta}^2 - C - m_{\text{T}}gl\cos\psi - U^{(\kappa)}. \quad (29)$$

Для составления уравнений Лагранжа посмотрим, какие силы и моменты сил³ будут совершать работы при малых положительных увеличениях обобщенных координат. Если дать координате ψ приращение $\delta\psi$ (рис. 3), то работу, равную $-2M\delta\psi$, совершил только суммарный момент, создаваемый сервоприводами, следовательно в правую часть соответствующего уравнения следует записать $-2M\delta\psi/\delta\psi = -2M$. Если же положительное увеличение $\delta\theta$ дать координате θ , то опять работу, равную $2M\delta\theta$, совершают только моменты M . Отсюда аналогичным образом имеем, что в правую часть второго уравнения следует записать $2M\delta\theta/\delta\theta = 2M$.

С учетом выше сказанного получим следующие уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = -2M \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 2M. \end{cases} \quad (30)$$

Выполнив необходимые операции дифференцирования, будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = m_{\text{T}}lr\dot{\theta}\cos\psi + m_{\text{T}}l^2\dot{\psi} + J_{\text{T}}\dot{\psi}, \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = m_{\text{T}}lr\ddot{\theta}\cos\psi - m_{\text{T}}lr\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\psi + m_{\text{T}}l^2\ddot{\psi} + J_{\text{T}}\ddot{\psi}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = -m_{\text{T}}lr\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\psi + m_{\text{T}}gl\sin\psi, \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m_{\text{T}}r^2\dot{\theta} + m_{\text{T}}lr\dot{\psi}\cos\psi + 2m_{\text{K}}r^2\dot{\theta} + 2J_{\text{K}}\dot{\theta}, \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m_{\text{T}}r^2\ddot{\theta} + m_{\text{T}}lr\ddot{\psi}\cos\psi - m_{\text{T}}lr\dot{\psi}^2\sin\psi + 2m_{\text{K}}r^2\ddot{\theta} + 2J_{\text{K}}\ddot{\theta}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0. \quad (36)$$

Подставив их в уравнения Лагранжа, окончательно получим

$$\begin{cases} m_{\text{T}}lr\ddot{\theta}\cos\psi + m_{\text{T}}l^2\ddot{\psi} + J_{\text{T}}\ddot{\psi} - m_{\text{T}}gl\sin\psi = -2M \\ m_{\text{T}}r^2\ddot{\theta} + m_{\text{T}}lr\ddot{\psi}\cos\psi - m_{\text{T}}lr\dot{\psi}^2\sin\psi + 2m_{\text{K}}r^2\ddot{\theta} + 2J_{\text{K}}\ddot{\theta} = 2M. \end{cases} \quad (37)$$

Несложно убедится, что эти уравнения совпадают с теми, которые представлены в системе (15).

Заменив в полученных выражениях функцию M по формуле:

$$M = \frac{k_m}{R}U - \frac{k_m k_e}{R}\dot{\theta} - J\ddot{\theta}, \quad (38)$$

будем иметь

$$\begin{cases} m_{\text{T}}lr\ddot{\theta}\cos\psi + m_{\text{T}}l^2\ddot{\psi} + J_{\text{T}}\ddot{\psi} - m_{\text{T}}gl\sin\psi - 2J\ddot{\theta} - \frac{2k_m k_e}{R}\dot{\theta} = -\frac{2k_m}{R}U \\ m_{\text{T}}r^2\ddot{\theta} + 2m_{\text{K}}r^2\ddot{\theta} + 2J_{\text{K}}\ddot{\theta} + 2J\ddot{\theta} + m_{\text{T}}lr\ddot{\psi}\cos\psi - m_{\text{T}}lr\dot{\psi}^2\sin\psi + \frac{2k_m k_e}{R}\dot{\theta} = \frac{2k_m}{R}U, \end{cases} \quad (39)$$

³Напоминаем, что силы реакции и потенциальные силы рассматривать не нужно.

а линеаризовав эти уравнения, окончательно получим

$$\begin{cases} m_{\text{T}}lr\ddot{\theta} + m_{\text{T}}l^2\ddot{\psi} + J_{\text{T}}\ddot{\psi} - m_{\text{T}}gl\psi - 2J\ddot{\theta} - \frac{2k_m k_e}{R}\dot{\theta} = -\frac{2k_m}{R}U \\ m_{\text{T}}r^2\ddot{\theta} + 2m_{\text{K}}r^2\ddot{\theta} + 2J_{\text{K}}\ddot{\theta} + 2J\ddot{\theta} + m_{\text{T}}lr\ddot{\psi} + \frac{2k_m k_e}{R}\dot{\theta} = \frac{2k_m}{R}U, \end{cases} \quad (40)$$

Последние две пары уравнений представляют собой искомую математическую модель робота соответственно в обычной и линеаризованной формах. В заключение перепишем полученные выражения в матричном виде.

Введем следующие обозначения:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$u = U. \quad (42)$$

С учетом их запишем систему (40) в виде

$$E\ddot{q} + F\dot{q} + Gq = Hu \quad (43)$$

где

$$E = \begin{bmatrix} m_{\text{T}}lr - 2J & m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}} \\ m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J & m_{\text{T}}lr \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -\frac{2k_m k_e}{R} & 0 \\ \frac{2k_m k_e}{R} & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -m_{\text{T}}gl \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{2k_m}{R} \\ \frac{2k_m}{R} \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Выразим из полученного уравнения матрицу \ddot{q} , умножив его на матрицу E^{-1} слева и перебросив некоторые слагаемые в правую часть:

$$\ddot{q} = -E^{-1}F\dot{q} - E^{-1}Gq + E^{-1}Hu, \quad (45)$$

где

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\text{T}}lr}{\varkappa_1} & -\frac{m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}}}{\varkappa_1} \\ -\frac{m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J}{\varkappa_1} & \frac{m_{\text{T}}lr - 2J}{\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$E^{-1}F = \begin{bmatrix} -\frac{2k_m k_e (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} & 0 \\ \frac{2k_m k_e (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$E^{-1}G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{\text{T}}^2 gl^2 r}{\varkappa_1} \\ 0 & \frac{m_{\text{T}} gl (m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J)}{\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$E^{-1}H = \begin{bmatrix} -\frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} \\ \frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

где, в свою очередь,

$$\varkappa_1 = m_{\text{T}} lr(m_{\text{T}} lr - 2J) - (m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})(m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J). \quad (50)$$

Приводя получившееся выражение обратно в форму системы, будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} = \frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} \dot{\theta} + \frac{m_{\text{T}}^2 gl^2 r}{\varkappa_1} \psi - \frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} U \\ \ddot{\psi} = -\frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \dot{\theta} - \frac{m_{\text{T}} gl (m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J)}{\varkappa_1} \psi + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} U. \end{array} \right. \quad (51)$$

Добавим в полученную систему дополнительное уравнение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} = \frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} \dot{\theta} + \frac{m_{\text{T}}^2 gl^2 r}{\varkappa_1} \psi - \frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} U \\ \ddot{\psi} = -\frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \dot{\theta} - \frac{m_{\text{T}} gl (m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J)}{\varkappa_1} \psi + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{2k_m (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} U. \end{array} \right. \quad (52)$$

Введя обозначение

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

перепишем математическую модель робота в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (54)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_{\text{T}}^2 gl^2 r}{\varkappa_1} & \frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} & 0 \\ -\frac{m_{\text{T}} gl (m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J)}{\varkappa_1} & -\frac{2k_m k_e (m_{\text{T}} lr + m_{\text{T}} r^2 + 2m_{\text{K}} r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2k_m(m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} \\ \frac{2k_m(m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Схема моделирования

Как видно из его математической модели, схема моделирования работы Segway полностью совпадает с той, которая была построена для обратного маятника на тележке (рис. 4).

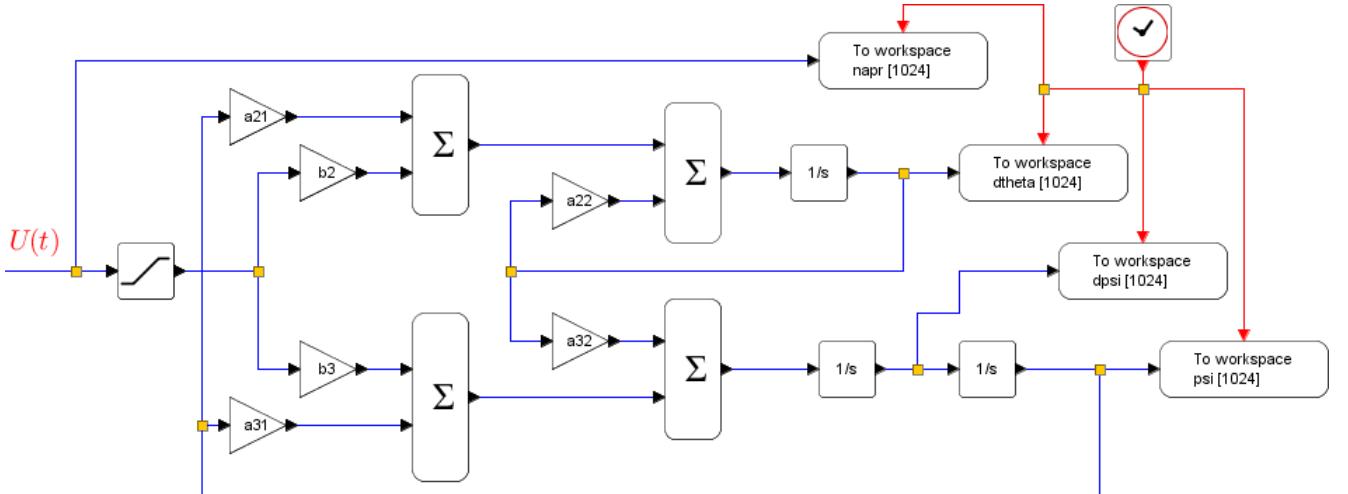


Рис. 4. Схема моделирования работы устройства.

Единственное отличие заключается в том, что будет иной расшифровка входящих в схему переменных:

$$\begin{aligned} a22 &= \frac{2k_m k_e (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} & a32 &= -\frac{2k_m k_e (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \\ a21 &= \frac{m_{\text{T}}^2 gl^2 r}{\varkappa_1} & a31 &= -\frac{m_{\text{T}} gl (m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}} + 2J)}{\varkappa_1} \\ b2 &= -\frac{2k_m (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}l^2 + J_{\text{T}})}{R\varkappa_1} & b3 &= \frac{2k_m (m_{\text{T}}lr + m_{\text{T}}r^2 + 2m_{\text{K}}r^2 + 2J_{\text{K}})}{R\varkappa_1} \end{aligned} \quad (57)$$