

ANN201-Compte Rendu TP2 :  
Simulation numérique de l'écoulement d'un fluide  
avec des éléments finis  $P^2 - P^1$

Alexandre Laleu

novembre 2024



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments finis <math>P^2</math> pour le problème de Poisson avec condition de Neumann</b>	<b>4</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	4
1.2	Géométrie et maillage . . . . .	4
1.3	Formulation variationnelle . . . . .	5
1.4	Discrétisation . . . . .	6
1.5	Calcul des matrices élémentaires . . . . .	7
1.6	Assemblage . . . . .	9
1.7	Validation . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Éléments finis <math>P^2</math> pour le problème de Poisson avec condition de Dirichlet</b>	<b>13</b>
2.1	Discrétisation . . . . .	13
2.2	Méthode de pseudo-élimination . . . . .	14
2.3	Validation . . . . .	15
2.4	Conditions de Dirichlet non homogènes . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Équations de Stokes</b>	<b>20</b>
3.1	Formulation Variationnelle . . . . .	20
3.2	Définition du maillage . . . . .	22
3.3	Discrétisation . . . . .	22
3.4	Calcul des matrices élémentaires . . . . .	24
3.5	Assemblage et pseudo-élimination . . . . .	26
3.6	Validation . . . . .	27
3.7	Modification du domaine pour modéliser une marche . . . . .	30

## Table des figures

1	Maillage dans GMSH . . . . .	4
2	Maillage avec nœuds . . . . .	5
3	Neumann : solution approchée pour $h=0.4$ . . . . .	10
4	Neumann : solution approchée pour $h=0.2$ . . . . .	10
5	Neumann : solution approchée pour $h=0.1$ . . . . .	11
6	Neumann : solution approchée pour $h=0.05$ . . . . .	11
7	Régressions linéaires des erreurs relatives $L^2$ et $H^1$ pour Neumann. . . . .	12
8	Dirichlet homogène : solution approchée pour $h=0.4$ . . . . .	15
9	Dirichlet homogène : solution approchée pour $h=0.2$ . . . . .	15
10	Dirichlet homogène : solution approchée pour $h=0.1$ . . . . .	16
11	Dirichlet homogène : solution approchée pour $h=0.05$ . . . . .	16
12	Régressions linéaires des erreurs relatives $L^2$ et $H^1$ pour Dirichlet homogène. . . . .	16
13	Dirichlet non homogène : solution approchée pour $h=0.4$ . . . . .	19
14	Dirichlet non homogène : solution approchée pour $h=0.2$ . . . . .	19
15	Dirichlet non homogène : solution approchée pour $h=0.1$ . . . . .	19
16	Dirichlet non homogène : solution approchée pour $h=0.05$ . . . . .	19
17	Régressions linéaires des erreurs relatives $L^2$ et $H^1$ pour Dirichlet homogène. . . . .	20
18	Solution approchée de $u_1$ . . . . .	27
19	Solution approchée de $u_2$ . . . . .	27
20	Solution approchée de $p$ (pression). . . . .	28
21	Profil des vitesses. . . . .	28
22	Différence entre $u_1$ approchée et solution exacte . . . . .	29
23	Différence entre $u_2$ approchée et solution exacte . . . . .	29
24	Différence $p - p_h$ . . . . .	29
25	Domaine de calcul pour un canal avec une marche descendante . . . . .	30
26	Maillage de la marche descendante . . . . .	31
27	Solution approchée de $u_1$ . . . . .	32
28	Solution approchée de $u_2$ . . . . .	32
29	Solution approchée de $p$ (pression). . . . .	32

# 1 Éléments finis $P^2$ pour le problème de Poisson avec condition de Neumann

## 1.1 Présentation du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière polygonale et  $f \in L^2(\Omega)$ . On cherche à résoudre le problème suivant par passage à l'élément fini de référence :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$(1) \quad \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$  et  $(T_\ell)_{\ell=1,L}$  les triangles de  $\mathcal{T}_h$ . Nous considérons  $V_h$  l'approximation de  $H^1(\Omega)$  par des éléments finis  $P^2$  associés à la triangulation  $\mathcal{T}_h$  :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v_h|_{T_\ell} \in \mathbb{P}^2 \forall \ell = 1, \dots, L\},$$

où  $\mathbb{P}^2$  est l'espace des polynômes de degré au plus 2. Les fonctions de base sont associées aux sommets des triangles et aux milieux des arêtes. On note donc  $(M_I)_{I=1,N}$  les noeuds du maillage (qui incluent les sommets et les milieux des arêtes) et  $(w_I)_{I=1,N}$  la base de  $V_h$  définie par  $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$ ,  $1 \leq I, J \leq N$ .

## 1.2 Géométrie et maillage

On veut résoudre le problème dans l'ouvert  $\Omega = ]0, 3[ \times ]0, 2[$ . On crée le maillage 'geomRectangle.msh' avec `geomRectangle.geo` :

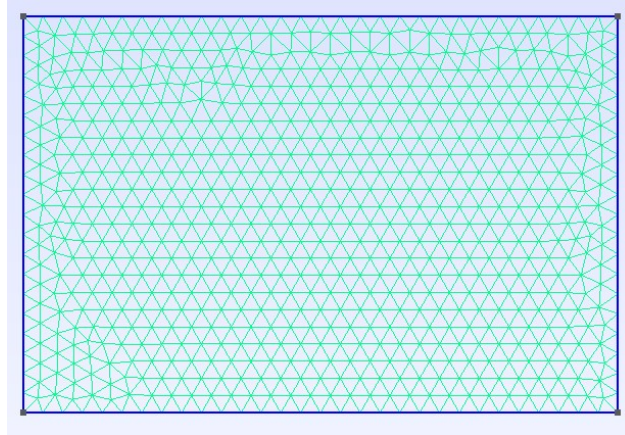


FIGURE 1 – Maillage dans GMSH

Puis on visualise le maillage avec ses noeuds d'ordre deux avec tous les noeuds grâce à `lecture_msh_ordre2.m` (déjà complétée) :

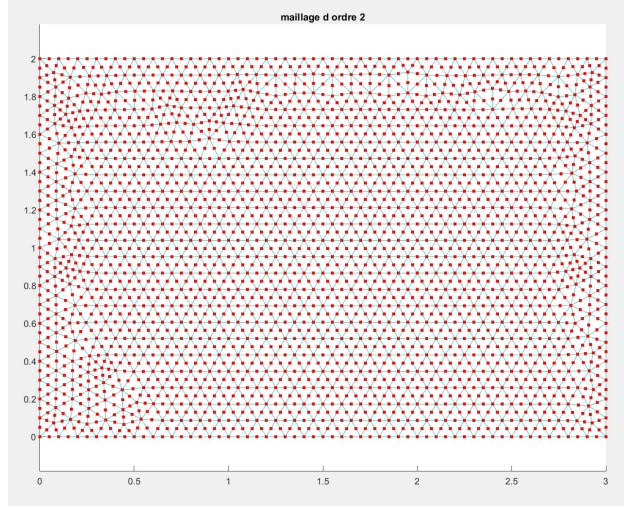


FIGURE 2 – Maillage avec nœuds

### 1.3 Formulation variationnelle

On multiplie  $u - \Delta u = f$  par  $v \in H^1(\Omega)$  et on intègre :

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Comme  $u, f \in L^2(\Omega)$  alors  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et ainsi  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$  ce qui est suffisant, dans le cadre de ce cours, pour appliquer les formules de Green :

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$$

Car, les conditions aux bords stipulent  $\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

On obtient alors la formulation variationnelle :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Vérifions que le problème est bien posé :

En posant les applications

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad ; \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

On a la continuité des applications en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$a(u, v) \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow a(u, v) \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$l(v) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

La coercivité de  $a$  est immédiate car :

$$a(u, u) = \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Enfin,  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram ce qui nous assure l'existence et l'unicité de la solution  $u$ .

En outre, la formulation variationnelle est équivalente au problème (1) car en prenant  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  en appliquant la formule de Green dans l'autre sens, sachant que  $\phi$  s'annule sur le bord, on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \int_{\Omega} u \phi \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega$$

Donc, au sens des distributions

$$u - \Delta u = f$$

Or,  $f - u \in L^2(\Omega)$  ainsi l'égalité est valable presque partout dans  $\Omega$ . Pour les conditions aux limites, on reprend avec  $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

En utilisant  $u - \Delta u = f$  on déduit :

$$\int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$$

Or,  $v|_{\partial\Omega} \in \text{Im}(\gamma_0)$ ,  $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$  et, par théorème de trace,  $\text{Im}(\gamma_0)$  dense dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Par conséquent, dans  $L^2(\partial\Omega)$  (i.e presque partout sur le bord) :

$$\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Ce qui conclut l'équivalence entre la formulation variationnelle et le problème initial.

## 1.4 Discrétisation

On passe maintenant à la résolution en utilisant la méthode des éléments finis.

On discrétise le problème en se restreignant à un espace de dimension finie  $V_h$  :

$$a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

Où  $u_h, v_h \in V_h$ .

En décomposant  $u_h$  comme suit :

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_{bpt}} u_h(M_j) w_j$$

Où  $N_{bpt}$  est le nombre de points du maillage.

Et en prenant  $v_h = w_i, i \in \llbracket 1, N_{bpt} \rrbracket$ .

On a finalement

$$\forall i \in \llbracket 1, N_{bpt} \rrbracket, \sum_{j=1}^{N_{bpt}} u_h(M_j) a(w_j, w_i) = l(w_i)$$

On pose alors le vecteur  $\vec{U} = (u_h(M_j))_{1 \leq j \leq N_{bpt}}$  le vecteur  $\vec{L} = (l(w_i))_{1 \leq i \leq N_{bpt}}$  et la matrice  $\mathbb{A} = (a(w_j, w_i))_{1 \leq i, j \leq N_{bpt}}$ .

On décompose enfin  $\mathbb{A}$  avec une matrice de masse et de rigidité :  $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$

Où  $\mathbb{M} = (\int_{\Omega} w_j w_i d\Omega)_{1 \leq i, j \leq N_{bpt}}$  et  $\mathbb{K} = (\int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i d\Omega)_{1 \leq i, j \leq N_{bpt}}$ . Pour écrire le problème sous forme d'un système linéaire :

$$\mathbb{A} \vec{U} = (\mathbb{M} + \mathbb{K}) \vec{U} = \vec{L},$$

## 1.5 Calcul des matrices élémentaires

Pour calculer les matrices élémentaires de masse et de rigidité  $\mathbb{M}^\ell, \mathbb{K}^\ell \in \mathcal{M}_{N_{bpt} \times N_{bpt}}(\mathbb{R})$  associées à  $T_\ell$ , nous allons utiliser la méthode du *passage à l'élément fini de référence*.

Soit  $T_\ell$  un triangle de notre maillage de sommets  $M_1 = (x_1, y_1), M_2 = (x_2, y_2), M_3 = (x_3, y_3)$  et de milieux  $M_4 = (x_4, y_4), M_5 = (x_5, y_5), M_6 = (x_6, y_6)$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les coordonnées barycentriques du triangle. Les fonctions de base locales sont les suivantes :

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1(2\lambda_1 - 1), & w_4 &= 4\lambda_1\lambda_2, \\ w_2 &= \lambda_2(2\lambda_2 - 1), & w_5 &= 4\lambda_2\lambda_3, \\ w_3 &= \lambda_3(2\lambda_3 - 1), & w_6 &= 4\lambda_3\lambda_1. \end{aligned}$$

On se ramène tout d'abord au triangle de référence  $\hat{T}$ , c'est-à-dire le triangle de sommets  $\hat{M}_1 = (0, 0), \hat{M}_2 = (1, 0)$  et  $\hat{M}_3 = (0, 1)$  par l'intermédiaire de la transformation  $\mathcal{F}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}) = \mathcal{B}_\ell \hat{M} + S_\ell, \mathcal{B}_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\mathcal{B}_\ell = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}; S_\ell = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

qui permet de passer du triangle de référence  $\hat{T}$  au triangle  $T_\ell$  :

$$\forall i = 1, 2, 3, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}_i) = M_i.$$

L'avantage de cette méthode est que les coordonnées barycentriques  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$  du triangle  $\hat{T}$  sont très simples :

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{x}, \quad \hat{\lambda}_3 = \hat{y}$$

Les intégrales de masse sur  $T_\ell$  peuvent alors s'écrire ( à vérifier)

$$(2) \quad \int_{T_\ell} w_I(M) w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_I(\hat{M}) \hat{\lambda}_J(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}, \quad I, J = 1, \dots, 6$$

et les intégrales de rigidité

$$(3) \quad \int_{T_\ell} \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} [(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\lambda}_I(\hat{M})] \cdot [(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\lambda}_J(\hat{M})] |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}.$$

Les intégrales (2) et (3) pourraient être calculées analytiquement, mais pour les éléments finis  $P^2$  il s'agit de calculs laborieux. Pour les calculer, nous allons plutôt faire appel à une *formule de quadrature* :

$$\int_{\hat{T}} G d\hat{\Omega} \simeq \sum_{q=1}^{N_Q} \hat{c}^q G(\hat{S}^q),$$

où  $\hat{S}^q$  sont des points de quadrature dans  $\hat{T}$  et  $\hat{c}^q$  des poids positifs associés aux points de quadrature. Pour évaluer les intégrales de (2) et (3), nous allons donc respectivement utiliser des formules de quadrature d'ordre 4 et 2.

Pour la matrice de masse, on utilisera la formule de quadrature à 6 points de Gauss-Legendre qui est d'ordre 4 et qui est définie sur le triangle de référence  $\hat{T}$  par

$$\begin{aligned} \hat{S}^1 &= (0.0915762135098, 0.0915762135098), \quad \hat{c}^1 = 0.05497587183 \\ \hat{S}^2 &= (0.8168475729805, 0.0915762135098), \quad \hat{c}^2 = 0.05497587183 \\ \hat{S}^3 &= (0.0915762135098, 0.8168475729805), \quad \hat{c}^3 = 0.05497587183 \\ \hat{S}^4 &= (0.1081030181681, 0.4459484909160), \quad \hat{c}^4 = 0.1116907948 \\ \hat{S}^5 &= (0.4459484909160, 0.1081030181681), \quad \hat{c}^5 = 0.1116907948 \\ \hat{S}^6 &= (0.4459484909160, 0.4459484909160), \quad \hat{c}^6 = 0.1116907948 \end{aligned}$$

Pour la matrice de rigidité, on utilisera la formule de quadrature à 3 points de Gauss-Legendre qui est d'ordre 2 et qui est définie sur le triangle de référence  $\hat{T}$  par

$$\hat{S}^1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad \hat{S}^2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad \hat{S}^3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad \hat{c}^1 = \hat{c}^2 = \hat{c}^3 = \frac{1}{6}.$$



## 1.6 Assemblage

Grâce a ces formules, on calcule les matrices élémentaires en utilisant les fonctions  $\hat{w}_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  calculées sur le triangle de référence :

$$\hat{w}_1(x, y) = (1 - x - y)(1 - 2x - 2y)$$

$$\hat{w}_2(x, y) = x(2x - 1)$$

$$\hat{w}_3(x, y) = y(2y - 1)$$

$$\hat{w}_4(x, y) = 4x(1 - x - y)$$

$$\hat{w}_5(x, y) = 4xy$$

$$\hat{w}_6(x, y) = 4y(1 - x - y)$$

Pour l'assemblage de la matrice globale on applique la même méthode que dans le premier TP :

```

1      for l=1:Nbtri
2
3          % Coordonnees des sommets du triangles
4          T = Numtri(l,:);
5          S1=Coorneu(T(1),:);
6          S2=Coorneu(T(2),:);
7          S3=Coorneu(T(3),:);
8
9          % Calcul des matrices elementaires du triangle l
10         Kel=matK_elem_p2(S1, S2, S3);
11         Mel=matM_elem_p2(S1, S2, S3);
12         % On fait l assemblage des matrices globales
13         for i=1:6
14             I = T(i);
15             for j=1:6
16                 J = T(j);
17                 MM(I,J) = MM(I,J)+Mel(i,j);
18                 KK(I,J) = KK(I,J) + Kel(i,j);
19             end
20         end
21     end % for l

```

Pour obtenir le vecteur second membre  $L$ , on applique la même méthode que dans le TP1. On utilise l'interpolée  $\pi_h u$  :

$$\pi_h u = \sum_{j=1}^{N_{bpt}} f(S_j) w_j(x, y)$$

On obtient alors le vecteur second membre  $L$  :  $L = MF$

Avec  $M$  la matrice de masse et :

$$F = \begin{pmatrix} f(S_1) \\ f(S_2) \\ \vdots \\ f(S_{N_{bpt}}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f = u - \Delta u$$

La fonction  $f$  obtenue pour modifier la routine `f.m` lors du test du code avec la solution connue  $u(x, y) = 3\cos(\pi x)\cos(2\pi y)$  est  $f(x, y) = (3 + 15\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y)$ .

L'exécution de la routine `principale_neumann_p2.m` avec un pas de maillage  $h \in \{0.4, 0.2, 0.1, 0.05\}$  donne ces graphes :

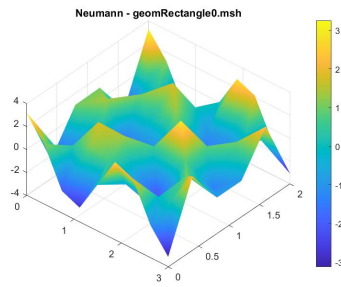


FIGURE 3 – Neumann : solution approchée pour  $h=0.4$

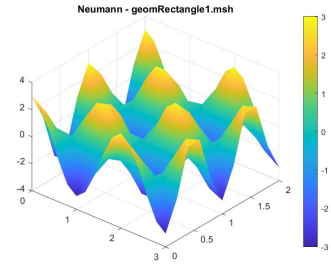


FIGURE 4 – Neumann : solution approchée pour  $h=0.2$

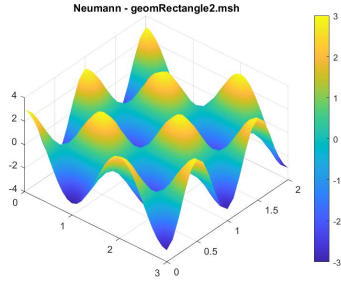


FIGURE 5 – Neumann : solution approchée pour h=0.1

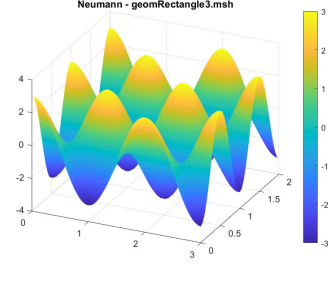


FIGURE 6 – Neumann : solution approchée pour h=0.05

Comme attendu, on remarque bien que plus h est petit plus le graphe est précis, au prix d'un temps de calcul plus long. Validons cela en calculant les erreurs relatives.

## 1.7 Validation

On estime la norme  $L^2$  de l'erreur  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  en assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$  :

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^{N_{bpt}} ((u(M_j) - u_h(M_j)) w_j)^2 \right) d\Omega}$$

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{bpt}} (u(M_i) - u_h(M_i)) \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \sum_{j=1}^{N_{bpt}} (u(M_j) - u_h(M_j))}$$

En posant :

$$\vec{U} = (u(M_i))_{1 \leq i \leq N_{bpt}} \quad ; \quad \vec{U}_h = (u_h(M_i))_{1 \leq i \leq N_{bpt}}$$

On a :

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(\vec{U} - \vec{U}_h)^T \mathbb{M} (\vec{U} - \vec{U}_h)}$$

Et de la même manière on estime :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\vec{U}^T \mathbb{M} \vec{U}}$$

On estime par la même méthode la semi-norme  $H^1$  de l'erreur :

$$|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(\vec{U} - \vec{U}_h)^T \mathbb{K} (\vec{U} - \vec{U}_h)} \quad ; \quad |u|_1 = \sqrt{\vec{U}^T \mathbb{K} \vec{U}}$$

Expérimentalement, lorsqu'on trace  $\log(1/h) \mapsto \log(\frac{\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}})$  et  $\log(1/h) \mapsto \log(\frac{|u - u_h|_1}{|u|_1})$  pour les 4 valeurs de h on obtient les valeurs suivantes :

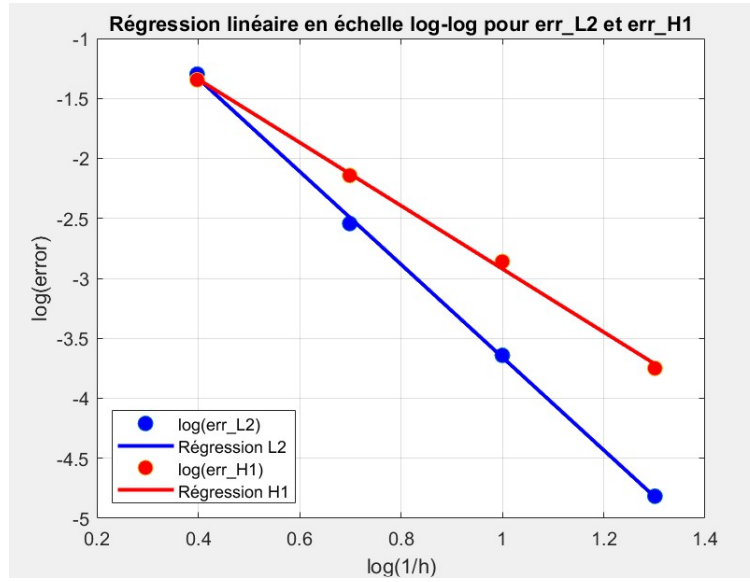
$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{ u-u_h _1}{ u _1}\right)$	0.0452	0.0072	0.0014	0.0002

TABLE 1 – Erreurs pour la norme  $L^2$ 

$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{\ u-u_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ u\ _{L^2(\Omega)}}\right)$	0.0504	0.0029	0.0002	<0.0000

TABLE 2 – Erreurs pour la norme  $H^1$ 

On peut alors tracer les courbes d'erreur suivantes :

FIGURE 7 – Régressions linéaires des erreurs relatives  $L^2$  et  $H^1$  pour Neumann.

Pour les deux normes,  $\log(\text{erreur})$  décroît linéairement lorsque  $\log(1/h)$  augmente. Donc l'erreur diminue bien lorsque  $h$  diminue, avec une meilleure décroissance de l'erreur pour la norme  $L^2$  que pour la semi-norme  $H^1$ . La pente est en  $-4$  pour l'erreur relative  $L^2$ , ce qui est cohérent avec la convergence quadratique du modèle en éléments de Lagrange  $P^2$  (notre solution  $u$  étant suffisamment régulière), là où on avait seulement une pente en  $-2$  pour le TP1.

## 2 Éléments finis $P^2$ pour le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition au bord de Dirichlet homogène : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$(4) \quad \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dont la formulation variationnelle s'écrit :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} fv \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

et qu'elle est bien posée.

### 2.1 Discrétisation

La problématique ici est que la condition aux limites est essentielle. Il faut alors définir une approximation interne  $P^2$  de  $H_0^1(\Omega)$ , on procède de la façon suivante : si on suppose que les nœuds (sommets et milieux) de la frontière  $\partial\Omega$  sont numérotés de  $N_0 + 1$  à  $N$  et que les nœuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à  $N_0$ , on définit :

$$V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0}).$$

Par construction,  $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ .

Avec les mêmes notations que dans la partie précédente, la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée  $u_h$  est :

Trouver  $u_h \in V_h^0$  tel que pour tout  $v_h \in V_h^0$

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \Leftrightarrow \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega$$

Comme on peut, par construction, décomposer  $u_h$  : (question : est ce que  $v_h$  est aussi dans  $V_h^0$  ?)

$$u_h = \sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) w_J$$

On a en prenant  $\forall J \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$ ,  $v_h = w_J$  :

$$\forall J \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket, \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) a(w_I, w_J) = l(w_J)$$

On pose alors de la même manière que dans la partie précédente :

$$\mathbb{M}^0 = \left( \int_{\Omega} w_j w_i d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq N_0} \quad \mathbb{K}^0 = \left( \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq N_0};$$

et,

$$\vec{L}^0 = \left( \int_{\Omega} f w_j d\Omega \right)_{1 \leq j \leq N_0} \quad ; \quad \vec{U}^0 = (u_h(M_J))_{1 \leq J \leq N_0}$$

On remarque que la matrice  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$  est définie positive et symétrique donc inversible.

## 2.2 Méthode de pseudo-élimination

On applique maintenant la méthode de pseudo-élimination pour prendre en compte directement les conditions aux limites. On rajoute des coefficients en exploitant le fait que les nœuds de la frontière sont numérotés entre  $N_0 + 1$  et  $N$ .

On pose :

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^0 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{\vec{L}} = \begin{bmatrix} \vec{L}^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbb{A}} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \tilde{\vec{L}} \in \mathcal{M}_{N \times 1}(\mathbb{R})$$

On rajoute aussi les sommets où  $u_h$  s'annule :

$$\vec{U} = (u_h(M_J))_{1 \leq J \leq N}$$

Et de cette manière :

$$\tilde{\mathbb{A}} \vec{U} = \tilde{\vec{L}}$$

Dans le code, les nœuds du bord ne sont pas numérotés à la fin. C'est la liste *Refneu* qui nous renseigne sur la position du nœud. On va d'abord calculer la matrice  $\mathbb{A}$  comme dans la partie précédente, puis annuler les lignes et colonnes des nœuds du bord et mettre les coefficient diagonaux de ces lignes égaux à 1 :

```

1      function [AA_tilde, LL_tilde] = elimine(AA, LL, Refneu, Coorneu,
2          test_homogene)
3
4          % Les noeuds du bord ont une reference 1 donc on copie les
5          % autres noeuds utiles
6          REFINT = find(Refneu==0);
7          Nbpt = size(Refneu,1);
8          LL_tilde = zeros(Nbpt,1);
9          LL_tilde(REFINT) = LL(REFINT);
10
11          AA_tilde = zeros(Nbpt,Nbpt);
12          AA_tilde = AA;
13          REFINT_bis = find(Refneu==1);
14
15          AA_tilde(REFINT_bis,:) = 0;
16          AA_tilde(:,REFINT_bis) = 0;
17          for i=1:Nbpt
18              if Refneu(i) == 1
19                  AA_tilde(i,i) = 1;
20              end
21          end
22      end

```

## 2.3 Validation

Nous allons calculer la solution approchée de ce problème pour une solution exacte  $u(x, y) = 3\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ , pour  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 3] \times [0, 2]$  qui s'annule bien sur les bords. La donnée  $f$  d'un tel problème serait :  $f(x, y) = (3 + 6\pi^2)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$  qui est bien dans  $L^2(\Omega)$ .

On trace là aussi pour plusieurs pas de maillage  $h \in \{0.4, 0.2, 0.1, 0.05\}$  :

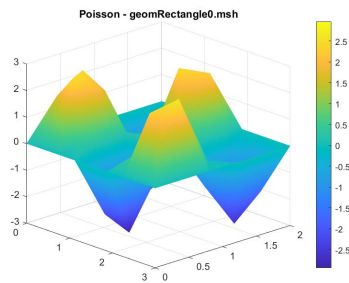


FIGURE 8 – Dirichlet homogène : solution approchée pour  $h=0.4$

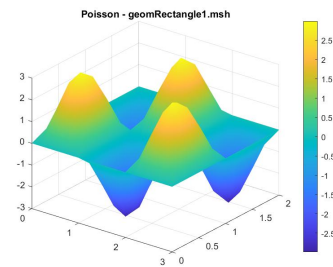


FIGURE 9 – Dirichlet homogène : solution approchée pour  $h=0.2$

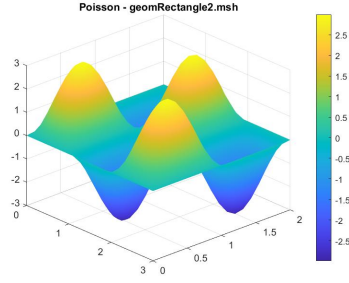


FIGURE 10 – Dirichlet homogène : solution approchée pour  $h=0.1$

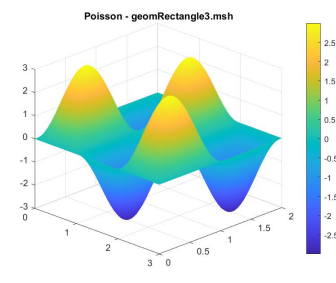


FIGURE 11 – Dirichlet homogène : solution approchée pour  $h=0.05$

On vérifie bien que les solutions obtenues s'annulent sur les bords et on trace comme dans la partie précédente les erreurs relatives :

$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{ u-u_h _1}{ u _1}\right)$	0.0143	0.0023	0.0005	0.001

$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{\ u-u_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ u\ _{L^2(\Omega)}}\right)$	0.006	0.0005	<0.0000	<0.0000

On trace les régressions linéaires :

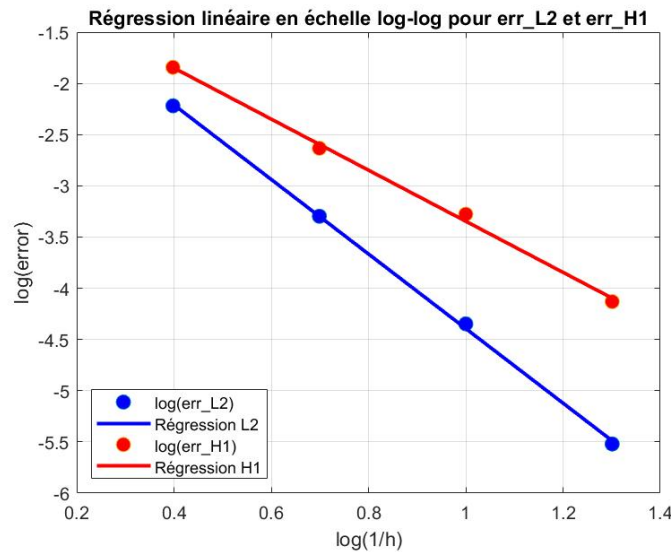


FIGURE 12 – Régressions linéaires des erreurs relatives  $L^2$  et  $H^1$  pour Dirichlet homogène.

Toujours en cohérence avec l'ordre de convergence pour une solution suffisamment régulière, la pente de l'erreur relative  $L^2$  est de  $-4$ .



## 2.4 Conditions de Dirichlet non homogènes

Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition de Dirichlet non homogène : pour  $g \in C^0(\partial\Omega)$ , trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le cours que la formulation variationnelle du problème (2.4) peut s'écrire comme :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  avec  $u|_{\partial\Omega} = g$  tel que

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

et qu'il est possible d'étendre la technique de pseudo-élimination à des conditions de Dirichlet non homogènes. Pour ce faire, en supposant que les noeuds de la frontière sont numérotés en dernier, nous admettons qu'il suffit de modifier la matrice et le second membre issus de (2.4) assemblés avec toutes les fonctions de base

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{II} & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{A}_{BI} & \mathbb{A}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_I \\ \mathbb{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_I \\ \mathbb{L}_B \end{bmatrix}$$

en imposant  $\mathbb{A}_{BI} = 0$ ,  $\mathbb{A}_{BB} = \mathbb{I}$ , et  $\mathbb{L}_B = \vec{g}$ , où  $\vec{g}$  est le vecteur colonne composé des valeurs prises par  $g$  aux noeuds  $M_J$  du bord. On remarquera qu'on n'a *pas* imposé  $\mathbb{A}_{IB} = 0$ , ce qui revient à ne pas annuler les colonnes dans `elimine`.

On crée alors une fonction `g.m` qui renvoie un tableau avec les valeurs que doit prendre  $u$  sur le bord.

On cherche à valider notre code avec la solution exacte  $u(x, y) = 3 \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ , pour  $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 3] \times [0, 2]$ .

La donnée  $f$  est comme dans la partie sur Neumann :

$$f(x, y) = (3 + 15\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$$

et on calcule

$$g(x, y) = 3 \cos(2\pi y) \cos(\pi x)$$

Ce qui donne en code Matlab :

```

1  function [GG] = g(Refneu, Coorneu, Nbpt)
2
3      GG = zeros(Nbpt, 1);
4      for i=1:Nbpt
5          % si on est sur le bord
6          if Refneu(i) == 1
7              if Coorneu(i,1) == 0 || Coorneu(i,1) == 3
8                  GG(i) = 3*cos(2*pi*Coorneu(i,2));
9              end
10             if Coorneu(i,2) == 0 || Coorneu(i,2) == 2
11                 GG(i) = 3*cos(pi*Coorneu(i,1));
12             end
13         end
14     end
15
16 end

```

La routine `elimine.m` est modifiée pour aussi attribuer les bonnes valeurs au second membre :

```

1  function [AA_tilde, LL_tilde] = elimine(AA, LL, Refneu, Coorneu,
2      test_homogene)
3
4      % Les noeuds du bord ont une reference 1 donc on copie les autres
5      % noeuds utiles
6      REFINTE = find(Refneu==0);
7      Nbpt = size(Refneu,1);
8      LL_tilde = zeros(Nbpt,1);
9      LL_tilde(REFINTE) = LL(REFINTE);
10
11      AA_tilde = zeros(Nbpt,Nbpt);
12      AA_tilde = AA;
13      REFINTE_bis = find(Refneu==1);
14
15      AA_tilde(REFINTE_bis,:) = 0;
16      if test_homogene==1
17          AA_tilde(:,REFINTE_bis) = 0;
18      end
19      for i=1:Nbpt
20          if Refneu(i) == 1
21              AA_tilde(i,i) = 1;
22          end
23      end
24
25      GG = zeros(Nbpt,1);
26      if test_homogene == 0 %dans ce cas on a une condition non nulle
27          %sur le bord : il faut changer LL_tilde
28          GG = g(Refneu, Coorneu, Nbpt);
29          REFINTE_bis = find(Refneu==1);
30          LL_tilde(REFINTE_bis) = GG(REFINTE_bis);
31      end
32
33 end

```

Les tracés des fonctions obtenues deviennent (il faut définir `test_homogene=1` dans `principal_dirichlet`).

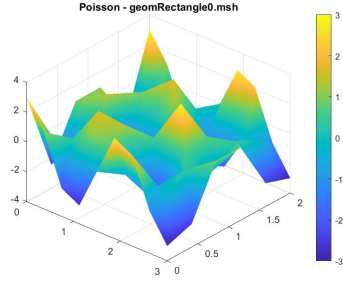


FIGURE 13 – Dirichlet non homogène : solution approchée pour  $h=0.4$

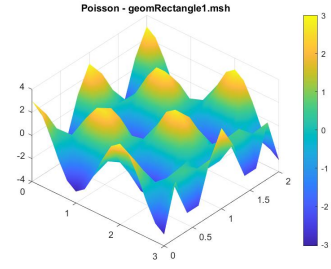


FIGURE 14 – Dirichlet non homogène : solution approchée pour  $h=0.2$

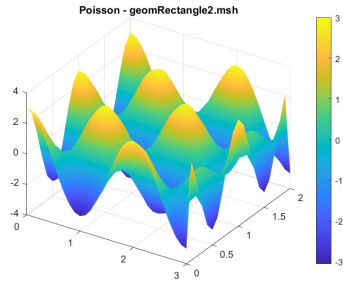


FIGURE 15 – Dirichlet non homogène : solution approchée pour  $h=0.1$

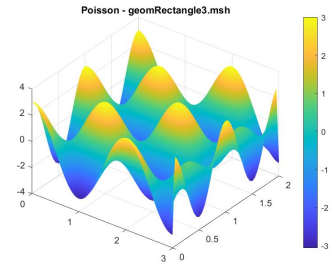
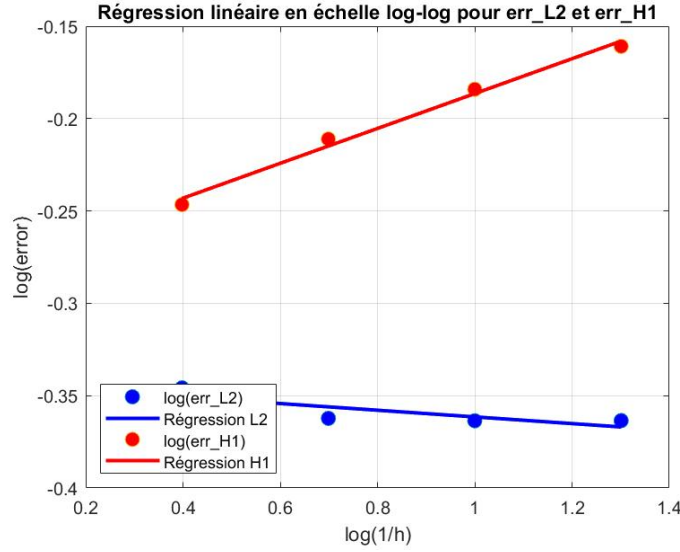


FIGURE 16 – Dirichlet non homogène : solution approchée pour  $h=0.05$

Et les erreurs obtenues varient peu en comparaison aux conditions homogènes :

$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{ u-u_h _1}{ u _1}\right)$	0.5668	0.6151	0.6545	0.6904

$h$	0.4	0.2	0.1	0.05
$\left(\frac{\ u-u_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ u\ _{L^2(\Omega)}}\right)$	0.4510	0.4342	0.4329	0.4330

FIGURE 17 – Régressions linéaires des erreurs relatives  $L^2$  et  $H^1$  pour Dirichlet homogène.

### 3 Équations de Stokes

#### 3.1 Formulation Variationnelle

Nous allons maintenant aborder le problème de Stokes. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière polygonale et  $\Gamma = \partial\Omega$ . La frontière  $\Gamma$  est partitionnée en  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec  $\Gamma_N \neq \emptyset$ . On impose une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_D$  et une condition de Neumann sur  $\Gamma_N$ .

On s'intéresse au calcul de la vitesse  $\vec{u} \equiv \vec{u}(x, y) \equiv (u_1(x, y), u_2(x, y))$  et de la pression  $p \equiv p(x, y)$  solutions des équations de Stokes : trouver  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$  et  $p \in H^1(\Omega)$  tels que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où la viscosité dynamique  $\nu$  du fluide est constante et  $\vec{g}$  est la donnée sur le bord de Dirichlet. Comme d'habitude,  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ . Le problème peut s'écrire

composante par composante de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\nu \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (u_1, u_2) = (g_1, g_2) & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nu \nabla u_1 \cdot \vec{n} - p n_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \nu \nabla u_2 \cdot \vec{n} - p n_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Déterminons la formulation variationnelle du problème. Remarquons que  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ , ce qui est suffisant dans ce cours pour utiliser les formules de Green.

On notera :  $\nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} = \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$

et

$$[H_{0,D}^1(\Omega)]^2 = \{\vec{v} \in [H^1(\Omega)]^2 \text{ tel que } \vec{v}|_{\Gamma_D} = (0, 0)\}.$$

On multiplie la première équation du système par  $v_1 \in H_{0,D}^1(\Omega)$  et on intègre puis on utilise les formules de Green et Stokes :

$$\int_{\Omega} \left( -\nu \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 - p \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left( \nu \frac{\partial u_1}{\partial n} - p n_1 \right) dS$$

Or  $v_1$  s'annule sur  $\Gamma_D$  et d'après la formulation du problème composante par composante, on a  $\nu \frac{\partial u_1}{\partial n} - p n_1 = 0$  sur  $\Gamma_N$  donc

$$\int_{\partial\Omega} \left( \nu \frac{\partial u_1}{\partial n} - p n_1 \right) dS = 0$$

On utilise la même méthode avec la seconde équation multipliée par  $v_2 \in H_{0,D}^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \left( -\nu \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \nu \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 - p \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) d\Omega,$$

En additionnant ces deux équations il vient :

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} d\Omega = 0$$

Enfin la troisième ligne de la formulation coordonnée par coordonnée se réécrit  $-\operatorname{div} \vec{u} = 0$ . Ainsi en multipliant par  $q \in L^2(\Omega)$  et en intégrant on a bien :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} q d\Omega = 0$$

On retiendra finalement :

Trouver  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$  avec  $\vec{u}|_{\Gamma_D} = \vec{g} = (g_1, g_2)$  et  $p \in L^2(\Omega)$  tels que

$$(5) \quad \begin{cases} \forall \vec{v} = (v_1, v_2) \in [H_{0,D}^1(\Omega)]^2, & \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega = 0 \\ \forall q \in L^2(\Omega), & - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \, q \, d\Omega = 0 \end{cases}$$

On ne peut pas utiliser le théorème de Lax-Milgram, mais on pourrait démontrer que la formulation variationnelle ci-dessus est bien posée. Comme cela dépasse largement le cadre de ce TP, nous ne détaillerons pas cet aspect.

### 3.2 Définition du maillage

La définition du maillage est similaire à celui des parties précédentes à la différence qu'on va définir, à l'aide de `Physical Line()`, `Refneu` comme égal à 1 sur  $\Gamma_D$  et égal à 2 sur  $\Gamma_N$  pour pouvoir imposer des conditions aux limites différentes selon l'endroit du bord sur lequel le nœud se trouve :

```

1  Mesh.MshFileVersion = 2.2;
2  // definition du pas du maillage
3  h = 0.1;
4  // definition des points (en 3D, raison pour laquelle il y a un 0 en
   z)
5  Point(1) = {0, 0, 0, h};
6  Point(2) = {3, 0, 0, h};
7  Point(3) = {3, 2, 0, h};
8  Point(4) = {0, 2, 0, h};
9  // definition des segments qui relient les points
10 Line(1) = {1, 2};
11 Line(2) = {2, 3};
12 Line(3) = {3, 4};
13 Line(4) = {4, 1};
14 // definition des contours fermes
15 Line Loop(1) = {1,2,3,4};
16 // definition des surfaces a partir contours fermes
17 Plane Surface(1) = {1};
18 Physical Point(1) = {1,2,3,4};
19 Physical Line(1) = {4};
20 Physical Line(2) = {1,3};
21 Physical Line(3) = {2};
22 Physical Surface(1) = {1};

```

### 3.3 Discrétisation

Nous discrétisons *chaque composante de la vitesse* par des éléments finis  $P^2$  et la pression par des éléments finis  $P^1$ . Cette paire d'éléments finis est notée  $P^2 - P^1$  et s'appelle *élément fini de Taylor-Hood*.

Si on suppose que les sommets des triangles sont numérotés de 1 à  $N_s$  et les milieux des arêtes de  $N_s + 1$  à  $N$ , le vecteur  $\vec{U}$  des inconnues du système linéaire issu de la discrétisation

de (5) est un vecteur de  $\mathbb{R}^{2N+N_s}$  :

$$\vec{U} = [u_{1h}(M_1), \dots, u_{1h}(M_N), u_{2h}(M_1), \dots, u_{2h}(M_N), p_h(M_1), \dots, p_h(M_{N_s})]^T,$$

constitué des inconnues relatives à la première composante de la vitesse, puis à la seconde composante de la vitesse, puis à la pression. La matrice du système linéaire peut alors s'écrire par blocs sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \nu\mathbb{K} & \mathbf{0} & \mathbb{E} \\ \mathbf{0} & \nu\mathbb{K} & \mathbb{F} \\ \mathbb{G} & \mathbb{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N+N_s) \times (2N+N_s)}$$

où

- Les deux blocs  $\nu\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  contiennent les contributions issues de la discrétisation des termes  $\nu \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, d\Omega$  et  $\nu \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, d\Omega$ . En d'autres termes, on a

$$\mathbb{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega,$$

avec  $(w_I)_{I=1,N}$  les fonctions de base  $P^2$  utilisées dans les parties précédentes.

- Le bloc rectangulaire  $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$  contient les contributions issues de la discrétisation du terme  $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x} \, d\Omega$ , soit

$$\mathbb{E}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_J \frac{\partial w_I}{\partial x} \, d\Omega,$$

avec  $(\tilde{w}_J)_{J=1,N_s}$  les fonctions de base  $P^1$  utilisées dans le TP 1.

- Le bloc rectangulaire  $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$  contient les contributions issues de la discrétisation du terme  $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial y} \, d\Omega$ , à savoir

$$\mathbb{F}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_J \frac{\partial w_I}{\partial y} \, d\Omega.$$

- Les blocs rectangulaires  $\mathbb{G}$  et  $\mathbb{H}$  sont issus de  $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \, q \, d\Omega = 0$  où on a choisi  $q = \tilde{w}_J \forall J \in [1, N_s]$  :

$$\mathbb{H}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_I \frac{\partial w_J}{\partial y} \, d\Omega = \mathbb{F}_{JI}$$

$$\mathbb{G}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_J \frac{\partial w_I}{\partial x} \, d\Omega = \mathbb{E}_{JI}$$

Remarquons que  $\mathbb{H} = \mathbb{F}^T$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{E}^T$ .

### 3.4 Calcul des matrices élémentaires

Nous allons calculer chaque bloc de  $\mathbb{A}$  par passage au triangle de référence comme dans les parties précédentes. Les calculs de  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  ne changent pas. Il reste à s'occuper de  $\mathbb{F}^\ell \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  et  $\mathbb{E}^\ell \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ . Le changement de variable donne, pour  $I \in \{1, \dots, 6\}$  et  $J \in \{1, \dots, 3\}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{IJ}^\ell &= - \int_{T_\ell} \lambda_J(M) \frac{\partial w_I(M)}{\partial x} d\Omega = - \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_J(\hat{M}) \text{ligne}_1\{(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1}\} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}, \\ \mathbb{F}_{IJ}^\ell &= - \int_{T_\ell} \lambda_J(M) \frac{\partial w_I(M)}{\partial y} d\Omega = - \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_J(\hat{M}) \text{ligne}_2\{(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1}\} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la notation  $\text{ligne}_m\{\mathbb{B}\}$  pour indiquer la  $m$ -ième ligne d'une matrice  $\mathbb{B}$ . Les intégrales sont ensuite calculées numériquement grâce à la formule de quadrature à trois points en raison de la présence de gradients, comme pour la matrice de raideur. On donne ci-après le code pour  $\mathbb{E}^\ell$  :



```

1      function [Eel] = matE_elem(S1, S2, S3)
2
3          % preliminaires, pour faciliter la lecture:
4          x1 = S1(1); y1 = S1(2);
5          x2 = S2(1); y2 = S2(2);
6          x3 = S3(1); y3 = S3(2);
7
8          % calcul de la matrice elementaire du bloc rectangulaire (p,
          dv1/dx)
9          Eel = zeros(6,3);
10         B1 = zeros(2,2);
11         B1 = [x2-x1, x3-x1 ; y2-y1, y3-y1];
12         d=abs((x2-x1)*(y3-y1) - (x3-x1)*(y2-y1));
13         B1_inv = inv(B1'); %'
14         % Points et poids de quadrature
15         S_hat = [1/6, 1/6;
16                 2/3, 1/6;
17                 1/6, 2/3];
18
19         for i=1:6
20             for j=1:3
21                 sum = 0;
22                 for k=1:3
23                     sum = sum + 1/6*lambda_hat(j,S_hat(k,:))*
24                             dot(B1_inv(1,:),gradw(i,S_hat(k,:)));
25                 end % k
26                 Eel(i,j)=-d*sum;
27             end
28         end
29     end % de la fonction principale
30
31
32     %Definition fonction des gradients des w_i
33     function grad = gradw(i, coord)
34     x=coord(1);
35     y=coord(2);
36     if i==1
37         grad = [-3+4*y+4*x; -3+4*x+4*y];
38     elseif i==2
39         grad = [4*x-1; 0];
40     elseif i==3
41         grad = [0; 4*y-1];
42     elseif i==4
43         grad = [4-8*x-4*y; -4*x];
44     elseif i==5
45         grad = [4*y; 4*x];
46     elseif i==6
47         grad = [-4*y; 4-4*x-8*y];
48     end
49     end
50
51     function lambda=lambda_hat(i,coord)
52     x=coord(1);
53     y=coord(2);

```

```

54         if i==1
55             lambda=1-x-y;
56         elseif i==2
57             lambda=x;
58         elseif i==3
59             lambda=y;
60         end
61     end

```

### 3.5 Assemblage et pseudo-élimination

Pour l'assemblage, on se propose d'utiliser des matrices temporaires **EEtmp** et **FFtmp** de taille  $N \times N$ , et d'ensuite en extraire les colonnes correspondantes à des sommets. La structure **numsommets**, construite dans le fichier **principal\_stokes.m**, contient la liste des numéros des sommets et pourra donc être utilisée pour faire une telle extraction.

```

1      %find(isavertex~=0) %donne la liste des numeros des sommets
2      numsommets = find(isavertex==1);
3      Ns = length(numsommets);    % nombre de sommets
4
5      EE = zeros(Nbpt, Ns);        % bloc rectangulaire (p, v1)
6      FF = zeros(Nbpt, Ns);        % bloc rectangulaire (p, v2)
7
8      % On extrait de EEtmp et FFtmp les colonnes correspondantes a des
9      % sommets
10     % (par ailleurs les autres colonnes sont a priori nulles)
11     EE=EEtmp(:,numsommets);
12     FF=FFtmp(:,numsommets);
13
14     % Matrice elements finis par blocs
15     % -----
16     AA = sparse(2*Nbpt + Ns, 2*Nbpt + Ns);
17
18     AA(1:Nbpt, 1:Nbpt) = nu*KK;
19     AA((Nbpt+1):(2*Nbpt), (Nbpt+1):(2*Nbpt)) = nu*KK;
20     AA(1:Nbpt, (2*Nbpt+1):(2*Nbpt + Ns)) = EE;
21     AA((Nbpt+1):(2*Nbpt), (2*Nbpt+1):(2*Nbpt + Ns)) = FF;
22     AA((2*Nbpt+1):(2*Nbpt + Ns), 1:Nbpt) = EE';
23     AA((2*Nbpt+1):(2*Nbpt + Ns), (Nbpt+1):(2*Nbpt)) = FF';

```

Nous définissons aussi une nouvelle fonction **elimine\_stokes** pour procéder à la pseudo-élimination des nœuds sur  $\Gamma_D$  :

```

1  function [AA_tilde, LL_tilde] = elimine_stokes(AA,LL,Refneu,Coorneu)
2
3      [n, m] = size(AA);
4      Nbpt=size(Refneu,1);
5      LL_tilde = sparse(n,1);
6      AA_tilde = zeros(n,m);
7      AA_tilde = AA;
8      LL_tilde=LL;
9      for i=1:Nbpt
10         if Refneu(i)==1 || Refneu(i)==2
11             AA_tilde(i,:)=0;
12             AA_tilde(i,i)=1;
13             AA_tilde(i+Nbpt,:)=0;
14             AA_tilde(i+Nbpt,i+Nbpt)=1;
15             LL_tilde(i)=g1(Refneu,Coorneu, i);
16             LL_tilde(i+Nbpt)=g2(Refneu, Coorneu, i);
17         end
18     end
19 end

```

### 3.6 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée  $(u_{1h}, u_{2h}, p_h)$  correcte. Pour cela, on résout le problème avec le domaine rectangulaire  $\Omega = ]0, 3[ \times ]0, 2[$ , une viscosité  $\nu = 1$  et :

- des conditions de Dirichlet homogènes (c'est-à-dire  $(g_1, g_2) = (0, 0)$ ) sur les deux côtés horizontaux du rectangle ;
- des conditions de Dirichlet non homogènes avec  $(g_1, g_2) = ((2 - y)y, 0)$  sur le côté gauche du rectangle, pour imposer un profil d'écoulement entrant parabolique ;
- des conditions de Neumann homogènes comme dans (3.1) en sortie, sur le côté vertical à droite du rectangle.

La solution exacte d'un tel problème est  $(u_1, u_2) = ((2 - y)y, 0)$  et  $p = -2(x - 3)$ .

La solution approchée obtenue est :

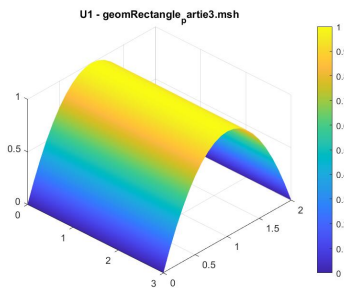


FIGURE 18 – Solution approchée de  $u_1$ .

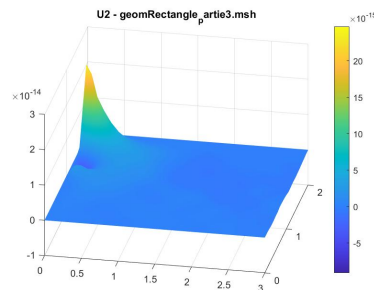


FIGURE 19 – Solution approchée de  $u_2$ .

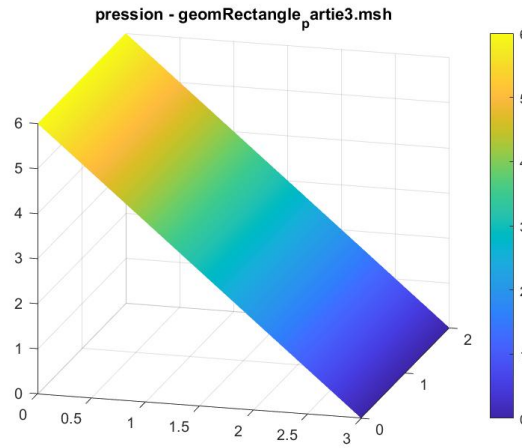
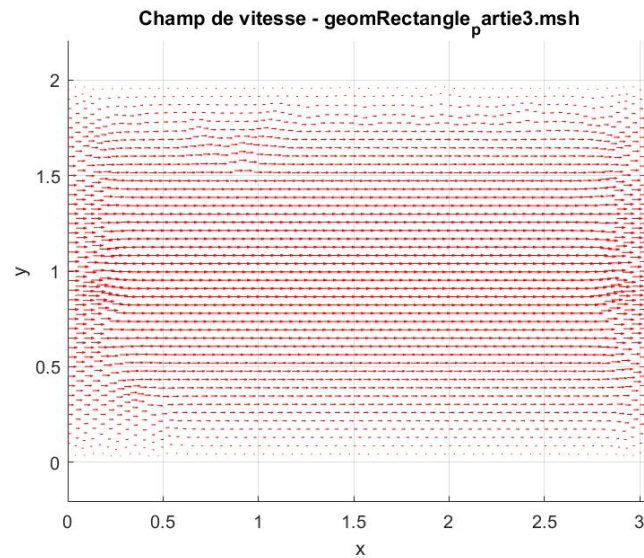
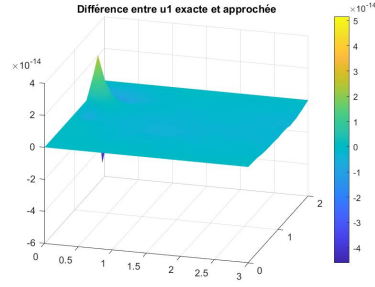
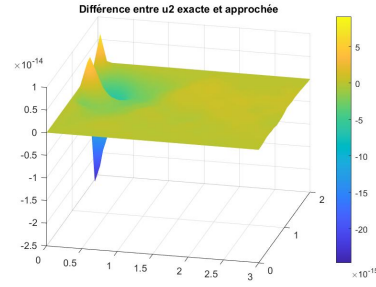
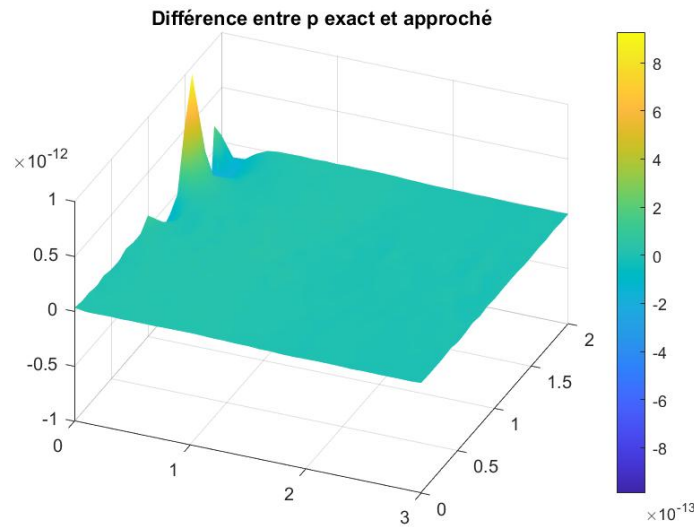
FIGURE 20 – Solution approchée de  $p$  (pression).

FIGURE 21 – Profil des vitesses.

Enfin, représentons les différences  $u_1 - u_{1_h}$ ,  $u_2 - u_{2_h}$  et  $p - p_h$  :

FIGURE 22 – Différence entre  $u_1$  approchée et solution exacteFIGURE 23 – Différence entre  $u_2$  approchée et solution exacteFIGURE 24 – Différence  $p - p_h$ 

La solution  $u_2$  reste au voisinage de 0. La vitesse  $u_1$  vérifie bien les conditions aux limites homogènes et non homogène. Elle décroît assez peu en fonction de la faible viscosité  $\nu = 1$ . On est presque en fluide parfait. Les erreurs sont assez petites pour considérer les solutions comme satisfaisantes

### 3.7 Modification du domaine pour modéliser une marche

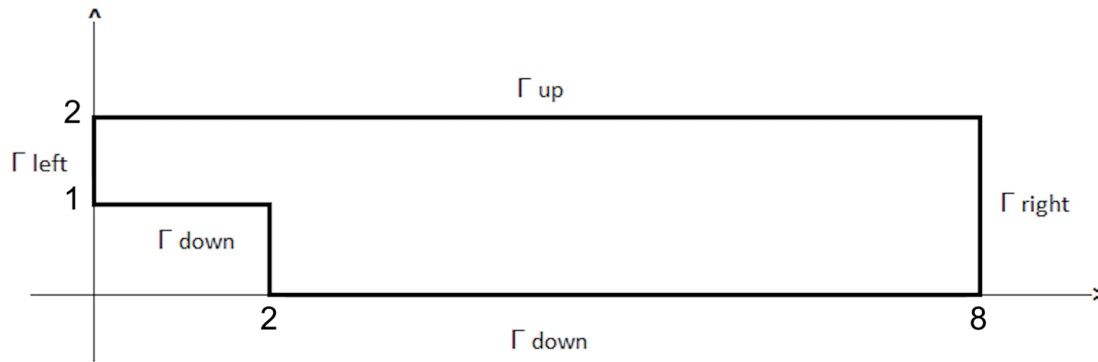


FIGURE 25 – Domaine de calcul pour un canal avec une marche descendante

On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un fluide dans un canal avec une marche descendante, représenté sur la Figure 25. On notera  $\Gamma_{\text{left}}$  le segment du bord à gauche avec  $1 \leq y \leq 2$ ,  $\Gamma_{\text{right}}$  le bord de droite,  $\Gamma_{\text{up}}$  le bord en haut et  $\Gamma_{\text{down}}$  le reste du bord. On impose sur  $\Gamma_{\text{left}}$  un profil d'écoulement  $(g_1, g_2) = (-4(y-2)(y-1), 0)$  une vitesse nulle sur  $\Gamma_{\text{up}}$  et  $\Gamma_{\text{down}}$ , et des conditions de Neumann homogènes en sortie sur  $\Gamma_{\text{right}}$ .

Dans ce but, on définit des nouvelles routines `geomRectangle_partie3_marche.geo`, `g1_marche.m`, `principal_stokes_marche.m` et `elimine_stokes_marche`

La première étape était de construire la frontière du domaine avec des valeurs de `Refneu` différentes selon si on doit appliquer des conditions de Dirichlet homogènes ou non. Les autres routines sont assez peu changées par rapport au cas précédent.

```

1  function g1=g1_marche(Refneu, Coorneu, i)
2  if Refneu(i)==1
3      g1=-4*(Coorneu(i,2)-1)*(Coorneu(i,2)-2);
4  end
5  if Refneu(i)==2
6      g1=0;
7  end
8  end

```

```

1      Mesh.MshFileVersion = 2.2;
2
3      h = 0.1;
4
5      Point(1) = {2, 0, 0, h};
6      Point(2) = {8, 0, 0, h};
7      Point(3) = {8, 2, 0, h};
8      Point(4) = {0, 2, 0, h};
9      Point(5) = {0, 1, 0, h};
10     Point(6) = {2, 1, 0, h};
11
12     Line(1) = {1, 2};
13     Line(2) = {2, 3};
14     Line(3) = {3, 4};
15     Line(4) = {4, 5};
16     Line(5) = {5, 6};
17     Line(6) = {6, 1};
18
19     Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4,5,6};
20
21
22     Plane Surface(1) = {1};
23
24
25     Physical Point(1) = {1, 2, 3, 4, 5, 6};
26     Physical Line(1) = {4};
27     Physical Line(2) = {1,3,5,6};
28     Physical Line(3) = {2};
29     Physical Surface(1) = {1};

```

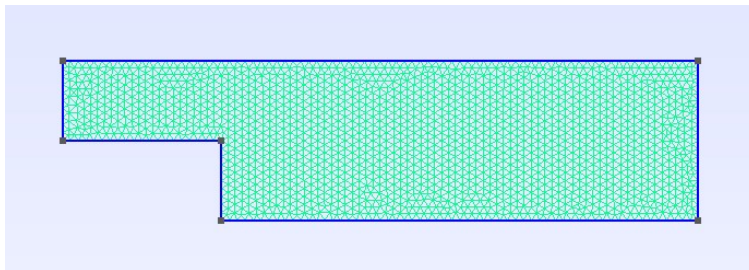


FIGURE 26 – Maillage de la marche descendante

On obtient des résultats assez peu satisfaisants :

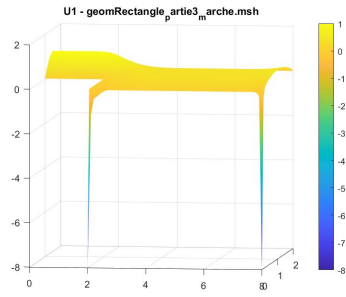


FIGURE 27 – Solution approchée de  $u_1$ .

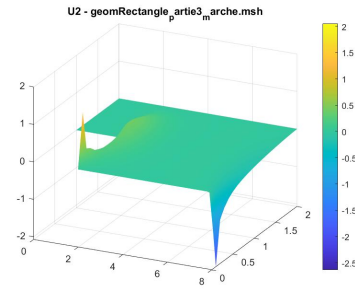


FIGURE 28 – Solution approchée de  $u_2$ .

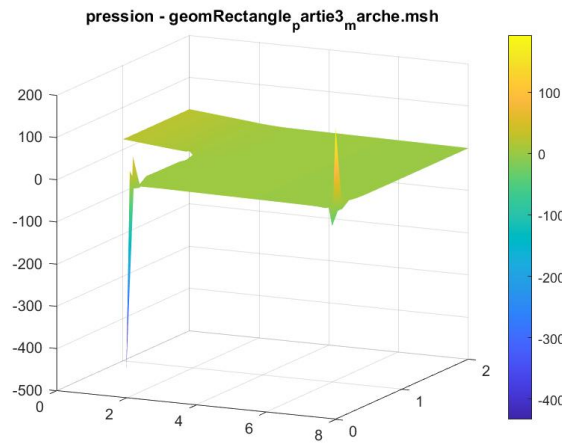


FIGURE 29 – Solution approchée de  $p$  (pression).

On a des valeurs aberrantes aux points singulier situés à certains coins du triangle. Cela vient peut-être d'erreurs dans la construction de `Refneu` qui proviendrait du code `geomRectangle_partie3_marche.geo`. Le seul point positif est qu'elle semble satisfaire les conditions aux limites en entrée et sur  $\Gamma_{up}, \Gamma_{down}$ .

Aussi en réduisant la viscosité on pourrait s'attendre à ce que la vitesse décroît moins lentement car le fluide tend vers un fluide parfait. Et inversement, la décroissance serait bien plus importante pour  $\nu = 100$ . Ce n'est malheureusement pas notre cas.