PC 6 : Méthode numérique - éléments finis et schéma de Newmark

Le but de cette PC est de résoudre numériquement l'équation de vibration d'une membrane, en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale, et le schéma de Newmark pour la résolution en temps. Pour la discrétisation en éléments finis, on utilisera des résultats obtenus lors du cours ANN201, en particulier la gestion du maillage et le calcul des matrices élémentaires de masse et de raideur. La méthode de Newmark sera ensuite programmée pour un problème aux conditions initiales.

On s'intéresse aux vibrations d'une membrane circulaire de tension uniforme T, de masse surfacique σ et de rayon extérieur R. L'EDP régissant le déplacement transverse $u(r,\theta,t)$ s'écrit, pour tout temps t et tout point d'espace $(r,\theta) \in \Omega$, avec Ω le disque de rayon R :

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\Delta u = 0. \qquad (1)$$

On suppose qu'au bord $r = R$, le mouvement est nul : $u(R,\theta,t) = 0$.

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_\Omega u(\mathbf{x},t)v(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) + T \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x},t)\cdot\nabla v(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in]0, t_{max}[\qquad (2)$$

Semi-discrétisation spatiale

On procède de la même manière qu'en TP de ANN201, à l'aide d'une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \le I, J \le N$. On appelle V_h^0 le sous espace de V_h qui est inclus dans $H_0^1(\Omega)$. On rappelle qu'il est engendré par l'ensemble des fonctions de base qui sont associées à un noeud intérieur : $V_h^0 = \text{vect}\{w_I,\ M_I \notin \partial\Omega\}$ et on note N_0 la dimension de V_h^0.

La solution approchée u_h s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y;t) = \sum_{w_I \in V_h^0} u_h(M_I;t) w_I(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

$\boxed{1.}$ Écrire la formulation variationnelle discrète dans V_h^0 et réécrire le problème semi-discretisé en espace sous la forme matricielle

$$\sigma \mathbf{M}^0 \ddot{\mathbf{u}} + T\mathbf{K}^0 \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

où on rappellera la définition de $\mathbf{u}$, $\mathbf{M}^0$ et $\mathbf{K}^0$. Dans toute la suite on prendra σ=1 et T=1.

Mise en œuvre pratique sous Matlab :

Le script matlab `TD6_atrous.m` est le fichier principal sur lequel vous allez travailler. Il comporte des lignes de code déjà remplies et d'autres vides qu'il faudra compléter au fur et à mesure de l'avancement de la séance, tout en répondant aux questions ci-dessous.

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Prise en main des maillages :* Vous disposez de 3 maillages de plus en plus raffinés : `membraneh05.msh`, `membraneh02.msh` et `membraneh01.msh`. À l'aide de la fonction `lecture_msh.m`, chargez les maillages dans l'environnement matlab, et représentez les en utilisant la fonction `trimesh`. Donnez le nombre de points N et N_0 de chacun des maillages.
$\boxed{\textbf{3.}}$ La fonction matlab nommée `calculKM.m` prend en argument d'entrée un fichier de maillage `.msh`, la tension T et la masse surfacique σ, et doit renvoyer les matrices de masse et de raideur $\mathbf{M}^0$ et $\mathbf{K}^0$ associées au problème. Pour calculer ces matrices, on utilisera les routines `matM_elem.m` et `matK_elem.m` utilisées en cours ANN201 pour le calcul des matrices élémentaires. On assemblera ensuite les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ de taille N où on a considéré toutes les fonctions de base (et pas seulement celles qui sont V_h^0). Enfin la technique d'*élimination*, consistant à construire $\mathbf{M}^0$ et $\mathbf{K}^0$ à partir de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ en éliminant explicitement les lignes et les colonnes associées au nœuds du bord, sera utilisée. Complétez la fonction `calculKM.m` et calculez ces matrices pour les 3 maillages dont vous disposez.
$\boxed{\textbf{4.}}$ Écrivez une fonction matlab `calculVP.m` qui prend en argument d'entrée le maillage ainsi qu'un nombre `Nvp` de valeurs propres à calculer, et renvoie les fréquences propres et les déformées modales ; en ayant fait attention à trier les valeurs propres par ordre croissant. Dans cette routine, vous calculerez les matrices $\mathbf{M}^0$ et $\mathbf{K}^0$, résoudrez le problème aux valeurs propres à l'aide de la commande `matlab eigs()` et trierez les élements propres à l'aide de la commande `matlab sort()`. Enfin, comme nous voulons représenter les déformées modales dans le maillage entier et que les déformées modales calculées sont décrites qu'à partir des fonctions de base associées aux nœuds intérieurs, vous créerez de nouveaux vecteurs de taille N correspondant aux déformées modales à partir des vecteurs précédemment calculés de taille N_0. Représentez les déformées modales des premiers modes pour le maillage `membraneh05.msh`. Observez et commentez la convergence des fréquences propres lorsque l'on augmente le raffinement du maillage, ainsi que l'apparition des fréquences propres de multiplicité 2 (cf PC 3).

Intégration temporelle. Schéma de Newmark

Nous allons maintenant calculer la solution en temps du problème pour la membrane vibrante. La condition initiale sera un déplacement donné à vitesse nulle. Le schéma de Newmark sera utilisé pour l'avancement en temps.
$\boxed{\textbf{5.}}$ On souhaite donner comme condition initiale une forme de cosinus, selon la fonction :

$$y(r,\theta) = \begin{cases} \frac{A}{2}\left(1+\cos\frac{\pi r}{r_0}\right) & \text{si} \quad r \le r_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où A représente l'amplitude de la condition initiale et r_0 son extension spatiale. Cette condition initiale est représentée sur la figure 1 pour A=2 et r_0=1/2, et pour le maillage le plus fin, $h = 0.1$.

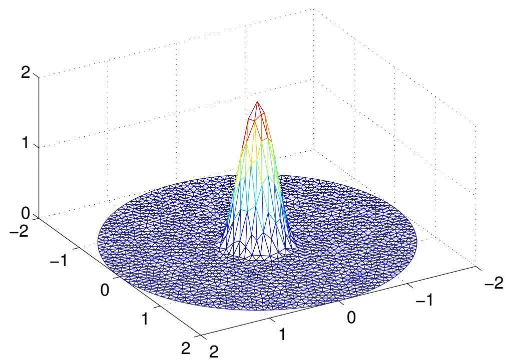

FIGURE 1 – Condition initiale en déplacement imposée à la membrane, avec A=2 et r_0=1/2.

Écrire une fonction matlab `condition_initiale.m` qui prenne en entrée les coordonnées (x, y) des nœuds du maillage et renvoie les deux conditions initiales, en déplacement et en vitesse.

$\boxed{\mathbf{6}.}$ Écrivez une boucle temporelle qui réalise l'intégration en temps selon le schéma de Newmark vu en cours. On choisira dans un premier temps les paramètres du schéma selon : $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$. En prenant $\delta t = 0.01$ et $T_{final} = 10$, représentez les oscillations de la membrane au cours du temps.
$\boxed{\mathbf{7}.}$ Observez ce qui se passe lorsque l'on choisit $\gamma = 0.49$, un pas de temps $\delta t = 0.02$ et un temps d'intégration $T_{final} = 120$. Pour cela représentez le déplacement en un point de la membrane au lieu de l'animation proposée en fin du programme `TD6_atrous.m`.