# PC 5 - Analyse modale d'une corde de tension variable – Implémentation numérique

À l'issue de la PC3, nous avons obtenu la projection des équations de ce système sur une base de fonctions qui est la base modale d'une corde avec tension constante :

$$\ddot{q}_m + m^2\pi^2 q_m + \sum_n^{\infty}(a_{mn} + b_{mn})q_n = 0. \tag{1}$$

Dans la mesure où la base modale d'une corde avec tension constante n'a aucune raison d'être aussi la base modale de la corde avec gravité, il n'est pas étonnant que les équations soient couplées. L'objet de ce TD est de calculer la base modale du nouveau problème, soit l'ensemble des fonctions $\psi_n(x)$, ceci en fonction de la base de départ (fonctions $\phi_n(x)$).

On décide à présent de faire une troncature à $N$ modes de l'équation (1). On peut alors écrire les équations (1) sous forme matricielle dans la base $\phi$ :

$$M\vec{\ddot{q}} + K\vec{q} = 0 \tag{2}$$

La matrice $K$ est pleine et les équations sont couplées. La recherche de solutions de la forme,

$$\vec{q}(t) = \vec{V}e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$(K - \omega^2 M)\vec{V} = 0. \tag{4}$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de ce système linéaire donnent le carré des pulsations propres et les modes propres correspondants. Attention, ces vecteurs propres sont exprimés dans la base des fonctions $\phi_n(x)$.

Le TD va consister à remplir un programme à trous réalisant les opérations suivantes :

— Écrire une boucle Matlab qui calcule les matrices $K$ et $M$.

— Calculer les vecteurs propres et valeurs propres en utilisant la fonction EIG. Cette fonction prend en argument les matrices $K$ et $M$ et retourne une matrice $DC$ contenant les valeurs propres dans sa diagonale, et une matrice $VC$ contenant les vecteurs propres. Faites un HELP EIG si vous voulez de l'aide.

— Vérifier l'orthogonalité des modes propres. Il s'agit ici de calculer les deux matrices suivantes :

$$\tilde{K} =^t VC.K.VC, \tag{5}$$

$$\tilde{M} =^t VC.M.VC, \tag{6}$$

et vérifier qu'elles sont bien diagonales.

- À partir de la matrice $VC$, calculer et tracer les modes propres de la corde avec gravité dans la base physique.
- Calculer l'évolution du déplacement $y(x,t)$ au cours du temps en prenant pour condition initiale $y(x,0) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$, $\dot{y}(0,t) = 0$. On remarquera ici qu'il s'agit d'une condition initiale telle que le vecteur $\vec{q}$ vaut 0 partout sauf sur son premier terme où il vaut 1. Le calcul se fera dans la base $\psi$, dans laquelle le problème est découplé, il s'agira donc de calculer le vecteur $\vec{r}$ correspondant en utilisant les matrices de passage. Une fois l'évolution calculée dans la base des fonctions $\psi_n$, il s'agira de passer de la base $\psi_n$ au déplacement de la corde aux points de discrétisation.