Équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du second ordre

Session 1 (S1)

Introduction au génie électrique et au génie informatique

Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke

Automne 2022

Note : En vue d’alléger le texte, le masculin est utilisé pour désigner les femmes et les hommes.

Document rédigé par Brahim Hadjou
Révisé par Jean-Philippe Gouin, 2012-19
Révisé par Abdelaziz Ramzi, 2020
Révisé par Jean-Philippe Gouin, Charles Richard, Jan Dubowski et Roch Lefebvre, 2021

Version 7, novembre 2021

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

1 INTRODUCTION

Lors de l’analyse d’un système physique (circuit électrique, système mécanique…), la modélisation mathématique (mise en équation) est une étape cruciale. Il s’agit, après avoir fait les hypothèses simplificatrices nécessaires, d’appliquer les lois fondamentales de la physique au système à analyser. Cela donne lieu à un ensemble d’équations mathématiques reliant entre elles les différentes grandeurs physiques impliquées dans le système.

Si l’étape de la modélisation mathématique est bien menée, l’étude et/ou la résolution des équations obtenues permet de décrire et de prédire d’une façon très proche de la réalité, le comportement du système physique en question.

Les équations ainsi obtenues sont de nature très variées. Elles peuvent être;

- Linéaires : (respectent le principe de la superposition et de la proportionnalité).
- Non linéaires.
- Algébriques : (les relations mathématiques impliquées sont des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions). Nous avons rencontré ce type d’équations lors de l’analyse des circuits électriques purement résistifs
- Différentielles (ou intégro-différentielles) : en plus des relations algébriques, il y a aussi des dérivées et/ou des intégrales.

Même si le sujet de ce document ne concerne qu’un type particulier d’équations différentielles, à savoir les équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du second ordre, nous allons commencer par une introduction assez générale du sujet. Par contre, nous allons nous restreindre aux équations différentielles ordinaires, c’est-à-dire celles qui ne comportent pas de dérivées partielles.

1.1 DÉFINITIONS

1.1.1 VARIABLE INDEPENDANTE

C’est la variable par rapport à laquelle sont effectuées les dérivées. Nous adoptons ici la notation t pour cette variable, car il s’agit très souvent du temps.

1.1.2 VARIABLE DEPENDANTE

C’est la variable qui apparaît dans l’équation avec ses dérivées par rapport à la variable indépendante t. Nous adoptons ici la notation $y = y(t)$.

Exemple 1.1 (Équations différentielles ordinaires)

a) $\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = 5t^2$

Cette équation peut également s'écrire comme ceci :

$y' - 4y = 5t^2$

où $y = y(t)$, c'est-à-dire, y est une fonction de t; et $y' = \frac{dy(t)}{dt}$, c'est-à-dire, la dérivée première de *y* par rapport à *t.*

b) $t\frac{dy(t)}{dt} + (\cos t)y(t) = \sin t$

ou $ty' + (\cos t)y = \sin t$

c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 8$

ou $y'' + 5y' + 6y = 8$

Ici $y'' = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$ est la dérivée seconde de *y* par rapport à *t.*

d) $\frac{dy(t)}{dt} + y^2 = 3$

ou $y' + y^2 = 3$

e) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 2\frac{d^2y(t)}{dt} + y(t) = e^{-t}$

ou $y''' - 2y'' + y(t) = e^{-t}$

Ici $y''' = \frac{d^3y(t)}{dt^3}$ est la dérivée d'ordre 3 de *y* par apport à *t*.

1.1.3 ORDRE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation.

Exemple 1.2

Les équations *a*, *b* et *d,* de l'exemple 1.1, sont d'ordre 1 (du premier ordre). L'équation *c* est d'ordre 2 (du second ordre) et l'équation *e* est d'ordre 3.

1.2 FORME GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE *N*

Toute équation différentielle d'ordre *n*, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où $y^{(n)} = \frac{d^ny(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre *n* de *y* par rapport à *t*.

Exemples 1.3

a) $5t^2 - y' - 4y = 0$
Ici, $F(t, y, y') = 5t^2 - y' - 4y$

b) $ty' + (\cos t)y - \sin \mathrm{t} = 0$
Ici, $F(t, y, y') = ty' + (\cos t)y - \sin t$

c) $y'' + 5y' + 6y - 8 = 0$
Ici, $F(t, y, y', y'') = y'' + 5y' + 6y - 8$

d) $y' + y^2 - 3 = 0$
Ici, $F(t, y, y') = y' + y^2 - 3$

e) $y''' - 2y'' + y - e^{-t} = 0$
Ici, $F(t, y, y', y'') = y''' - 2y'' + y - e^{-t}$

1.3 SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

La solution d'une équation différentielle est une fonction $y = y(t)$ qui satisfait l'équation.

Exemple 1.4

Pour l'équation $y'' + 5y' + 6y = 8$

a) $y = \frac{4}{3}$ (fonction constante) est une solution. En effet,

$$\left(\frac{4}{3}\right)'' + 5\left(\frac{4}{3}\right)' + 6\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$= 0 + 5(0) + 8 = 8$$

b) $y = e^{-2t} + \frac{4}{3}$ est une solution. En effet,

$$\left(e^{-2t} + \frac{4}{3}\right)'' + 5\left(e^{-2t} + \frac{4}{3}\right)' + 6\left(e^{-2t} + \frac{4}{3}\right)$$
$$= +4e^{-2t} - 10e^{-t} + 6e^{-2t} + 8$$
$$= 8$$

c) $y = e^{-3t}$ n'est *pas* une solution. En effet,

$$
\begin{gathered}
(e^{-3t})'' + 5(e^{-3t})' + 6(e^{-3t}) \\
= +9e^{-3t} - 15e^{-3t} + 6e^{-3t} \\
= 0 \neq 8
\end{gathered}
$$

1.4 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Si la fonction $F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$ est linéaire par rapport à chacune des variables $y, y', \dots, y^{(n)}$, alors l'équation différentielle

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

est dite linéaire.

Autrement dit, une équation différentielle d'ordre *n* est linéaire, si elle peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) +, \dots, + a_n(t)y = f(t)}$$

où $a_0, a, \dots, a_n$ et t sont des fonctions indépendantes des variables $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Nous allons voir, plus loin, une autre façon de vérifier la linéarité d'une équation différentielle.

Exemple 1.5

Dans l'exemple 1.3, toutes les équations sont linéaires sauf *d*.

1.5 ÉQUATION LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

L'équation différentielle linéaire

$$\boldsymbol{a_0 y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} +, \dots, a_n y = f(t)}$$

est dite à coefficients constants si $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes (indépendantes de la variable t).

Exemple 1.6

Dans l'exemple 1.3, les équations *a, c,* et *e* sont linéaires à coefficients constants. L'équation *b* est linéaire, mais à coefficients variables. L'équation *d* n'est même pas linéaire.

1.6 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE VUE COMME UN MODÈLE D'ENTRÉE/SORTIE

Une équation différentielle linéaire issue de la modélisation mathématique d'un système physique peut être considérée comme une relation entre une entrée (cause) et une sortie (effet) lui correspondant.

Plus précisément, dans l'équation

$$a_0 y^n + a_1 y^{(n-1)} +, \dots, + a_n y = f(t)$$

l'**entrée** est $\boldsymbol{f(t)}$ et la **sortie** est la solution $\boldsymbol{y(t)}$. Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les paramètres du système.

Dans ce contexte, la linéarité d'une équation différentielle est équivalente aux principes de superposition et de proportionnalité.

Superposition : si la sortie $y_1(t)$ correspond à l'entrée $f_1(t)$ et la sortie $y_2(t)$ correspond à l'entrée $f_2(t)$, alors la sortie $y_1(t) + y_2(t)$ correspond à l'entrée $f_1(t)+f_2(t)$.

Proportionnalité : si la sortie $y(t)$ correspond à l'entrée $f(t)$, alors, pour toute constante A, la sortie $Ay(t)$ correspond à l'entrée $Af(t)$.

1.7 QUELQUES NOTIONS THÉORIQUES SUR LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Avant de présenter les techniques (méthodes) usuelles de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, nous allons d'abord nous assurer de bien comprendre la notion de solution d'une équation différentielle en général.

La théorie des équations différentielles porte sur l'existence et l'unicité de la solution, d'une part et sur les techniques permettant de calculer (obtenir) la solution, d'autre part. En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle, nous allons nous contenter du résultat suivant :

Sous certaines conditions, qui sont heureusement toujours vérifiées dans le cas linéaire, une équation différentielle d'ordre n'admet une solution comprenant n constantes arbitraires.

Afin de bien saisir l'idée derrière ce résultat théorique, nous allons examiner deux cas très simples. Commençons par l'équation différentielle suivante.

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \qquad (1)$$

Résoudre l'équation (1) revient à déterminer toutes les fonctions $y = y(t)$ dont la dérivée (première) par rapport à t donne $f(t)$. Autrement dit, la solution de (1) représente toutes les primitives de la fonction $f(t)$. En utilisant la notation de l'intégrale, on peut donc écrire :

$$dy = f(t)\,dt$$

$$\int dy = \int f(t)dt$$

$$y(t) + C_1 = \int f(t)dt + C_2$$

$$y(t) = \int f(t)dt + C \quad \text{ou} \quad y(t) = f^{-1}(t) + C$$

où C est une constante arbitraire. Rappelons que, à une constante près, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

Exemple 1.7

La solution de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

est $y(t) = t^2 + C$ où C est une constante arbitraire.

Revenons maintenant à l'équation (1) et rappelons-nous que la dérivée d'une fonction $y = y(t)$ évaluée au point (instant) t, situé sur l'axe horizontal, représente la pente de la tangente de la courbe de la fonction $y = y(t)$ au point t. Donc, on peut dire aussi que : résoudre l'équation (1) revient à déterminer toutes les courbes dont la pente de la tangente est donnée par $f(t)$.

Exemple 1.8

Les courbes (solutions) de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

Sont les paraboles « parallèles » dont quelques-unes sont représentées sur le graphique suivant :

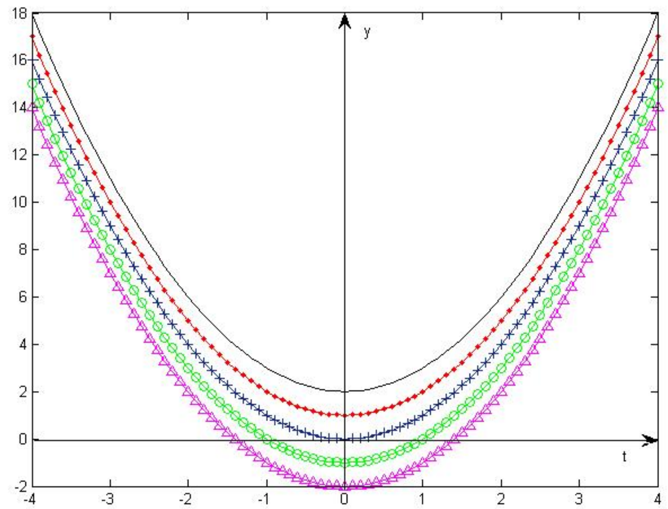

Figure 1 : Paraboles des solutions de l'exemple 1.8

Avant de tirer des conclusions générales, examinons le cas d'une équation différentielle d'ordre 2 (second ordre).

Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t)$$

Résoudre cette équation revient à déterminer toutes les fonctions $y = y(t)$ dont la dérivée seconde donne $f(t)$.

Pour déterminer de telles fonctions, on procède en deux étapes :

1) La première intégration donne :

$$\frac{dy}{dt} = \int f(t)dt + C_1$$

où C_1 est une constante arbitraire.

2) La deuxième intégration donne :

$$y(t) = \iint f(t)dt + C_1 t + C_2$$

où C_2 est une autre constante arbitraire et où le symbole $\iint$ désigne la deuxième primitive de *f(t)*, c'est-à-dire, n'importe quelle fonction dont la dérivée seconde donne *f(t)*.

Exemple 1.9

Soit l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = 4t$

La première intégration donne :

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 + C_1$$

La deuxième intégration donne :

$$y(t) = 2/3t^3 + C_1t + C_2$$

Conclusion

- La solution d'une équation différentielle est une fonction.
- La solution d'une équation différentielle est une fonction qui contient un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre de l'équation.

1.8 SOLUTION GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

La solution générale d'une équation différentielle est une fonction comprenant un nombre de constantes arbitraires égales à l'ordre de l'équation et satisfaisant l'équation.

1.9 SOLUTION PARTICULIÈRE

Une solution particulière d'une équation différentielle est une fonction comprenant un nombre de constants arbitraires strictement inférieurs à l'ordre de l'équation et satisfaisant l'équation.

Exemple 1.10

Soit l'équation $y'' + 5y' + 6y = 8$. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2.

a) $y = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \frac{4}{3}$ est la solution générale (nous verrons plus loin comment l'obtenir). En effet, cette fonction comporte un nombre de constantes arbitraires (2 : A et B) égal à l'ordre (2) de l'équation et elle est solution de l'équation, car

$$\left(Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \frac{4}{3}\right)'' + 5\left(Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \frac{4}{3}\right)' + 6\left(Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \frac{4}{3}\right)$$

$$(4Ae^{-2t} + 9Be^{-3t} + 0) + 5(-2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t} + 0) + 6\left(Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \frac{4}{3}\right)$$

$$=(4A - 10A + 6A)e^{-2t} + (9A - 15B + 6B)e^{-3t} + 6\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= 0 + 0 + 8 = 8$$

b) $y = \frac{4}{3}$ (fonction constante) est une <u>solution particulière</u> (ne comprend aucune constante arbitraire). En effet,

$$\left(\frac{4}{3}\right)'' + 5\left(\frac{4}{3}\right)' + 6\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= 0 + 5(0) + 8 = 8$$

c) $y = Ae^{-2t} + \frac{4}{3}$ est une solution particulière (comprend une constante arbitraire A). En effet,

$$\left(Ae^{-2t} + \frac{4}{3}\right)'' + 5\left(Ae^{-2t} + \frac{4}{3}\right)' + 6\left(Ae^{-2t} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= +4Ae^{-2t} - 10Ae^{-2t} + 6Ae^{-2t} + 8$$

$$= 8$$

d) $y = e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{4}{3}$ est <u>solution particulière</u> (ne comprend aucune constante arbitraire). En effet,

$$\left(e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{4}{3}\right)'' + 5\left(e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{4}{3}\right)' + 6\left(e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{4}{3}\right)$$

$$(4e^{-2t} + 9e^{-3t} + 0)\ + 5(-2e^{-2t} - 3e^{-3t} + 0)\ + 6\left(e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{4}{3}\right)$$

$$=(4 - 10 + 6)e^{-2t}\ + (9 - 15 + 6)e^{-3t}\ + 6\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= 0 + 0 + 8 = 8$$

Remarque

Dans la suite de ce document, nous réservons le nom << solution particulière >> à toute solution ne comprenant aucune constante arbitraire.

1.10 MÉTHODES USUELLES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Les techniques que nous allons présenter ici sont basées sur la propriété suivante commune à toutes les équations différentielles linéaires (à coefficients constants ou variables)

Soit l'équation différentielle linéaire

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} +, \ldots, + a_0 y = f(t)$$

La solution générale $y(t)$ de cette équation est égale à la **somme** de

1) la **solution complémentaire**, appelée aussi solution homogène, qui est la solution générale de l'équation, appelée équation homogène, obtenue à partir de l'équation originale **en mettant son second membre, c'est-à-dire $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$, à zéro**.

2) et de n'importe quelle **solution particulière** de l'équation originale.

   Autrement dit,

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t})$$

   où $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{t})$ (la solution complémentaire) est la solution générale de l'équation (homogène)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} +, \dots, a_n y = 0$$

   c'est-à-dire, $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{t})$ **est une fonction comprenant *n* constantes arbitraires et vérifiant**

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{C}}^{(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{c}}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})} +, \dots, + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{0}$$

et où $\boldsymbol{y_p(t)}$ est une fonction, ne comprenant en général aucune constante arbitraire, vérifiant

$$\boldsymbol{a_0 y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} +, \dots, a_n y_p = f(t)}$$

Conclusion

La résolution d'une équation différentielle linéaire peut se faire en trois (3) étapes.

1) Rechercher **la solution complémentaire** $\boldsymbol{y_c(t)}$
2) Rechercher **une solution particulière** $\boldsymbol{y_p(t)}$
3) Additionner $\boldsymbol{y_c(t)}$ et $\boldsymbol{y_p(t)}$

2 MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS DU PREMIER ORDRE

Après avoir vu quelques notions générales concernant les équations différentielles, nous allons maintenant étudier en détail comment résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1.

Soit, donc, l'équation différentielle

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = g(t)$$

où a_0 et a_1 sont deux constantes et *g(t)* est une fonction quelconque donnée.

En divisant par a_1, on met cette équation sous la forme suivante qui convient bien à l'analyse de circuits du premier ordre (RC et RL) :

$$\boldsymbol{\tau \frac{dy}{dt} + y = f(t)} \quad (2)$$

Si ***t*** représente la variable **temps** (en **secondes**), alors la constante $\boldsymbol{\tau}$ (en **secondes**) est appelée **constante de temps**. Il s'agit de la même forme utilisée dans le volume de Hambley.

Le second membre de cette équation est une fonction quelconque notée ici *f(t).* Nous allons voir plus loin la signification physique de τ et de *f(t)* dans le contexte des circuits électriques du premier ordre (RC et RL).

Notre but immédiat est d'apprendre comment résoudre l'équation (2). Autrement dit, connaissant τ et *f(t)*, déterminer la fonction $y = y(t)$ qui satisfait l'équation.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la solution $y = y(t)$ possède les deux propriétés suivantes :

- Comme il s'agit d'une équation du premier ordre, *y(t)* comporte une constante arbitraire, dont la valeur, comme nous allons le voir un peu plus loin, est déterminée par la donnée de la valeur $y(0)$, c'est-à-dire, la condition initiale.

- Comme il s'agit d'une équation linéaire, $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ où $y_c(t)$ est la solution complémentaire, appelée aussi réponse naturelle dans le contexte de circuits électriques. Elle représente la solution générale de l'équation (1) sans son second membre ($f(t) = 0$). Autrement dit, $y_c(t)$ doit vérifier l'équation

$$\tau \frac{dy_c}{dt} + y_c = 0$$

appelée équation homogène de (2).

$y_p(t)$ quant à elle est une solution particulière de (2), appelée aussi réponse forcée dans le contexte de circuits électriques. Il s'agit d'une fonction ne comprenant pas de constante arbitraire et satisfaisant l'équation avec son second membre. Autrement dit, $y_p(t)$ doit vérifier l'équation

$$\tau \frac{dy_p}{dt} + y_p = f(t)$$

À cause de ces propriétés, la résolution de l'équation (2) peut se faire en trois étapes, à savoir :

1) Recherche de la solution complémentaire ($\boldsymbol{y_c(t)}$)
2) Recherche d'une solution particulière ($\boldsymbol{y_p(t)}$)
3) Additionner $\boldsymbol{y_c(t)}$ et $\boldsymbol{y_p(t)}$

2.1 RECHERCHE DE LA SOLUTION COMPLÉMENTAIRE $\left(\boldsymbol{y_c(t)}\right)$

Pour trouver $y_c(t)$, il faut résoudre l'équation suivante

$$\tau \frac{dy_c}{dt} + y_c = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy_c}{dt} = -\frac{1}{\tau}\, y_c \quad (3)$$

Nous avons deux approches pour déterminer $y_c(t)$.

- Approche « intuitive » :
  L'équation (3) pose la question suivante :
  Quelle est la forme générale de la fonction $y_c(t)$ dont la dérivée première donne une fonction proportionnelle à $y_c(t)$? La réponse à cette question est que $y_c(t)$ doit être une fonction exponentielle, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{\lambda t}}$$

  où *A* et λ sont deux constantes. En substituant dans (3), on trouve :

$$\frac{d(Ae^{\lambda t})}{dt} = -\frac{1}{\tau} Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda A e^{\lambda t} = -\frac{1}{\tau} A e^{\lambda t}$$

D'où $\boldsymbol{\lambda = -\frac{1}{\tau}}$ et ***A* est une constante arbitraire**. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

- Approche analytique :

$$\frac{dy_c}{dt} = -\frac{1}{\tau} y_c \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dy_c}{y_c} = -\frac{1}{\tau} dt$$

En intégrant, on trouve :

$$ln\big(y_c(t)\big) = -\frac{t}{\tau} + c$$

D'où : $y_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+c} = e^c e^{-\frac{t}{\tau}}$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

Exemple 2.1

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver sa solution complémentaire $y_c(t)$:

a) $4\frac{dy}{dt} + y = 20$. L'équation homogène est $4\frac{dy}{dt} + y = 0$.
Ici $\tau = 4$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{4}}}$ où A est constante arbitraire.

b) $-\frac{dy}{dt} + y = 3t$. L'équation homogène est $-\frac{dy}{dt} + y = 0$.
Ici $\tau = -1$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{t}}$ où A est constante arbitraire.

c) $3\frac{dy}{dt} + y = 2\cos t$. L'équation homogène est $3\frac{dy}{dt} + y = 0$.
Ici $\tau = 3$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{3}}}$ où A est constante arbitraire.

d) $7\frac{dy}{dt} + y = 8e^{-3t}$. L'équation homogène est $7\frac{dy}{dt} + y = 0$.
Ici $\tau = 7$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{7}}}$ où A est constante arbitraire.

e) $\frac{dy}{dt} + y = 5t^2$. L'équation homogène est $\frac{dy}{dt} + y = 0$.
Ici $\tau = 1$. Donc, $\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-t}}$ où A est constante arbitraire.

2.2 RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE $\left(y_p(t)\right)$

Il existe deux méthodes pour trouver une solution particulière $y_p(t)$

2.2.1 METHODE DES COEFFICIENTS INDETERMINES

En observant l'équation

$$\tau \frac{dy_p}{dt} + y_p = f(t)$$

on peut constater que $y_p(t)$ doit être une combinaison linéaire de *f(t)* et de ses dérivées. Cette méthode consiste donc, en premier lieu, à dériver plusieurs fois *f(t)* afin de trouver une << base >> pour *f(t)* et ses dérivées successives. C'est-à-dire, trouver un ensemble fini de fonctions, $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)$, telles que *f(t)* et ses dérivées successives puissent s'écrire, chacune, comme combinaison linéaire de ces fonctions de « base ». Avant de présenter ce qu'il faut faire ensuite pour trouver $y_p(t)$ voyons avec quelques exemples montrant comment déterminer les fonctions de « base ».

Exemple 2.2

a) Si $f(t) = 20$ (une constante), alors $f'(t) = 0$ ainsi que toutes les autres dérivées. Nous avons donc une fonction de « base » : 1. Dans ce cas $y_p(t)$ prend la forme :

$$y_p(t) = C$$

où *C* est une constante à déterminer.

b) Si $f(t) = 3t$, alors $f'(t) = 3$ et toutes les autres dérivées sont nulles. Nous avons donc les deux fonctions de « base » : *1* et *t*. Dans ce cas, $y_p(t)$ prend la forme :

$$y_p(t) = C_1 + C_2 t$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer.

c) si $f(t) = 5\cos t$, alors $f'(t) = -5\sin t$, $f''(t) = -5\cos t$, … Nous avons donc les deux fonctions de « base » $\cos t$ et $\sin t$. Dans ce cas $y_p(t)$ prend la forme :

$$y_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer.

d) Si $f(t) = 8e^{-3t}$, alors $f'(t) = -24e^{-3t}$, $f'' = +72e^{-3t}$,… Nous avons donc une fonction de « base » : e^{-3t}. Dans ce cas $y_p(t)$ prend la forme :

$$y_p(t) = Ce^{-3t}$$

où *C* est une constante à déterminer.

e) Si $f(t) = 5t^2$, alors, $f'(t) = 10t$, $f''(t) = 10$ et les autres dérivées sont nulles. Nous avons donc les trois fonctions de « base » : *1*, t et t^2. Dans ce cas, nous posons :

$$y_p(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes à déterminer.

Maintenant que nous avons vu comment trouver les fonctions de « base » : $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$, l'étape suivante de la méthode consiste à écrire $y_p(t) = C_1f_1(t) + C_2f_2(t) +, \dots, +C_kf_k(t)$ et à substituer $y_p(t)$ dans l'équation :

$$\tau\frac{dy_p}{dt} + y_p = f(t)$$

afin de déterminer les valeurs des constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$, par identification.

Voyons comment cela fonctionne à l'aide des exemples suivants.

Exemple 2.3

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver une solution particulière $y_p(t)$ part la méthode des coefficients indéterminés :

a) $4\frac{dy}{dt} + y = 20$ Ici, $f(t) = 20$ et donc, comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 2.2, $y_p(t) = C$ (une constante).

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$4\frac{d}{dt}(C) + (C) = 20$$
$$0 + C = 20$$
$$C = 20$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 20}$

b) $-\frac{dy}{dt}+y=3t$

Ici, $f(t)=3t$ et donc, comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 2.2, $y_p(t)=C_1+C_2t$.

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$-\frac{d}{dt}(C_1+C_2t)+(C_1+C_2t)=3t$$
$$-0-C_2+C_1+C_2t=3t$$
$$-C_2+C_1+(C_2)t=3t$$

Par identification des coefficients, on a :

$$-C_2+C_1=0 \text{ et } C_2=3$$

D'où $C_1=C_2=3$. Donc $\boldsymbol{y_p(t)=3+3t}$.

c) $3\frac{dy}{dt}+y=2\cos t$

Ici $f(t)=\cos t$ et donc, comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 2.2, $y_p(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$.

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$3\frac{d}{dt}(C_1\cos t+C_2\sin t)+(C_1\cos t+C_2\sin t)=2\cos t$$
$$-3C_1\sin t+3C_2\cos t+C_1\cos t+C_2\sin t=2\cos t$$
$$(3C_2+C_1)\cos t+(-3C_1+C_2)\sin t=2\cos t$$

Par identification des coefficients, on a

$$3C_2+C_1=2 \text{ et } -3C_1+C_2=0$$

D'où $C_2=3C_1$ et $3(3C_1)+C_1=2$. Ce qui donne

$$C_1=\frac{2}{10}=0.2 \text{ et } C_2=3(0.2)=0.6.$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t)=0.2\cos t+0.6\sin t}$

d) $7\frac{dy}{dt} + y = 8e^{-3t}$

Ici $f(t) = 8e^{-3t}$et donc, comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 2.2, $y_p(t) = Ce^{-3t}$.

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$7\frac{dy}{dt}(Ce^{-3t}) + (Ce^{-3t}) = 8e^{-3t}$$
$$-21Ce^{-3t} + Ce^{-3t} = 8e^{-3t}$$
$$-20Ce^{-3t} = 8e^{-3t}$$
$$-20C = 8$$
$$C = -0.4$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = -0.4e^{-3t}}$

e) $\frac{dy}{dt} + y = 5t^2$

Ici $f(t) = 5t^2$ et donc, comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 2.2, $y_p(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2$.

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{d}{dt}(C_1 + C_2t + C_3t^2) + (C_1 + C_2t + C_3t^2) = 5t^2$$
$$0 + C_2 + 2C_3t + C_1 + C_2t + C_3t^2 = 5t^2$$
$$(C_1 + C_2) + (C_2 + 2C_3)t + C_3t^2 = 5t^2$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_2 + 2C_3 = 0$$
$$C_3 = 5$$

D'où $C_2 = -2C_3 = -10$ et $C_1 = -C_2 = 10$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 10 - 10t + 5t^2}$.

Remarque

Dans le cas particulier où le <u>second membre de l'équation est constant</u>, c'est-à-dire $\boldsymbol{f(t) = C}$, alors une solution particulière « triviale » est tout simplement $\boldsymbol{y_p(t) = C}$

Mise en garde

Comme nous l'avons déjà vu, la solution complémentaire ($y_c(t)$) de l'équation :

$$\tau\frac{dy}{dt}+y=f(t)$$

$$\text{est } y_c(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si, parmi les fonctions de « base » qui servent à trouver une solution particulière ($y_p(t)$), il y a la fonction $e^{-\frac{t}{\tau}}$, alors la méthode des coefficients indéterminée, telle que décrite précédemment, pose un problème. Avant de voir comment remédier à cela, nous allons, d'abord, comprendre c'est quoi le problème.

Exemple 2.4

Soit l'équation;

$$\frac{dy}{dt}+y=10e^{-t}$$

Ici $\tau=1$ et donc la solution complémentaire est $y_c(t)=Ae^{-t}$, qui est, rappelons-le, la solution générale de l'équation (homogène) $\frac{dy_c}{dt}+y_c=0$.

Le second membre de l'équation est $f(t)=10e^{-t}$. Donc, par la méthode des coefficients indéterminés, on pose $y_p(t)=Ce^{-t}$. Nous devons maintenant déterminer la valeur de la constante C en substituant y_p dans l'équation originale :

$$\frac{d}{dt}(Ce^{-t})+(Ce^{-t})=10e^{-t}$$

$$-Ce^{-t}+Ce^{-t}=10e^{t}$$

$$0=10e^{-t}$$

Ce qui est absurde, mais pas surprenant! Car la fonction Ce^{-t} est identique à la solution complémentaire.

Que faut-il faire dans une telle situation?

Réponse : il suffit de multiplier la fonction $e^{-\frac{t}{\tau}}$ par t. Autrement dit, nous devons, dans cette situation, poser $y_p(t)=Cte^{-\frac{t}{\tau}}$.

Revenons maintenant à l'exemple pour se convaincre que cela résout le problème.

Substituons $y_p(t) = Cte^{-t}$ dans l'équation pour déterminer la valeur de la constante C :

$$\frac{d}{dt}(Cte^{-t}) + (Cte^{-t}) = 10e^{-t}$$

$$(Ce^{-t} - Cte^{-t}) + (Cte^{-t}) = 10e^{-t}$$

$$Ce^{-t} = 10e^{-t}$$

$$C = 10$$

Donc, $y_p(t) = 10te^{-t}$.

2.2.2 METHODE DE VARIATION DES PARAMETRES

Cette méthode consiste à poser $y_p(t) = A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$ et, par substitution, déterminer la fonction $A(t)$. Autrement dit, une solution particulière peut être obtenue à partir de la solution complémentaire $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ en faisant varier sa constante (paramètre) A.

L'**avantage** de cette méthode est qu'elle permet, dans le cas du premier ordre, d'obtenir une formule générale pour $y_p(t)$. En effet, soit l'équation :

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

Sa solution complémentaire est $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Posons $y_p(t) = A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$ et substituons y_p dans l'équation pour déterminer la fonction $A(t)$:

$$\tau\frac{d}{dt}\left(A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \left(A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = f(t)$$

$$\tau(A'(t)e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}) + (A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}) = f(t)$$

$$\tau A'(t)e^{-\frac{t}{\tau}} = f(t)$$

$$A'(t) = \frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}f(t)$$

$$A(t) = \int \frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}f(t)dt$$

D'où $\boldsymbol{y_p(t) = \left[\int \frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}f(t)dt\right]e^{-\frac{t}{\tau}}}$

L'**inconvénient** de cette méthode est qu'elle conduit parfois à des intégrales complexes.

Exemple 2.5

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver une solution particulière $y_p(t)$ part la méthode de variation des paramètres :

a) $4\frac{dy}{dt} + y = 20$. Ici $f(t) = 20$ et $\tau = 4$. Donc,

$$y_p(t) = \left[\int \frac{1}{4} e^{\frac{t}{4}}(20)dt\right] e^{-\frac{t}{4}} = 20e^{\frac{t}{4}}e^{-\frac{t}{4}} = 20$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 20}$.

b) $-\frac{dy}{dt} + y = 3t$. Ici $f(t) = 3t$ et $\tau = -1$. Donc,

$y_p(t) = [\int -e^{-t}(3t)dt]e^{t} = [+3te^{-t} + 3e^{-t}]e^{t} = +3t + 3$ (on a fait une intégration par parties pour calculer $\int e^{-t}(3t)dt$)

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 3 + 3t}$.

c) $3\frac{dy}{dt} + y = 2\cos t$. Ici $f(t) = 2\cos t$ et $\tau = 3$. Donc,
$y_p(t) = \left[\int \frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}}(2\ cos\ t)dt\right] e^{-\frac{t}{3}} = [\frac{2}{10} e^{\frac{t}{3}} \cos t + \frac{6}{10} e^{\frac{t}{3}} \sin t\ ]e^{-3t} = \frac{2}{10}\cos t + \frac{6}{10}\sin t$ (on a fait deux intégrations par parties pour calculer $\int e^{-3t}(2\cos t)dt$)

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 0.2\cos t + 0.6\sin t}$.

d) $7\frac{dy}{dt} + y = 8e^{-3t}$. Ici $f(t) = 8e^{-3t}$ et $\tau = 7$. Donc,
$y_p(t) = \left[\int \frac{1}{7} e^{\frac{t}{7}}(8e^{-3t})dt\right] e^{-\frac{t}{7}} = [-\frac{8}{20} e^{-\frac{20t}{7}}]e^{-\frac{t}{7}} = -0.4e^{-3t}$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = -0.4e^{-3t}}$.

e) $\frac{dy}{dt} + y = 5t^2$. Ici $f(t) = 5t^2$ et $\tau = 1$. Donc,

$$y_p(t) = \left[\int e^t(5t^2)dt\right]e^{-t} = [5t^2e^t - 10te^t + 10e^t\ ]e^{-t} = 5t^2 - 10t + 10$$

(on a fait deux intégrations par parties pour calculer $\int e^t(5t^2)dt$)

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 10 - 10t + 5t^2}$.

2.3 Résolution complète d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre

Soit l'équation différentielle

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

Comme nous l'avons déjà vu, la solution générale (complète) de cette équation est

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

où $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ est sa solution complémentaire et $y_p(t)$ est une solution particulière.

Nous avons vu deux méthodes pour trouver $y_p(t)$: la méthode des coefficients indéterminés et la méthode de variation des paramètres. Nous sommes donc maintenant en mesure de résoudre n'importe quelle équation différentielle de ce type.

Remarque

En appliquant la méthode de variation des paramètres, nous obtenons la formule suivante pour la solution générale (complète).

$$\boldsymbol{y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \left[\int \frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}f(t)dt\right]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Exemple 2.6

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver la solution générale (complète) :

a) $4\frac{dy}{dt} + y = 20$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.1) $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{4}}\, et$ (exemple 2.3 ou 2.5) $y_p(t) = 20$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{t}{4}} + 20}$.

b) $-\frac{dy}{dt} + y = 3t$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.1) $y_c(t) = Ae^{t}$(exemple 2.3 ou 2.5) et $y_p(t) = 3 + 3t$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{t} + 3 + 3t.}$

c) $3\frac{dy}{dt} + y = 2\cos t$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.1) $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{3}}$ (exemple 2.3 ou 2.5) et $y_p(t) = 0.2\cos t + 0.6\sin t$.

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 0.2\cos t + 0.6\sin t}$.

d) $7\frac{dy}{dt} + y = 8e^{-3t}$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.1) $y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{7}}$ (exemple 2.3 ou 2.5) et $y_p(t) = -0.4e^{-3t}$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{t}{7}} - 0.4e^{-3t}}$.

e) $\frac{dy}{dt} + y = 5t^2$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.1) $y_c(t) = Ae^{-t}$(exemple 2.3 ou 2.5) et $y_p(t) = 10 - 10t + 5t^2$
Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-t} + 10 - 10t + 5t^2}$.

2.4 CONDITION INITIALE ET VALEUR DE LA CONSTANTE ARBITRAIRE

Nous avons vu que, dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1, la solution générale (complète) comporte une constante arbitraire. Pour déterminer la valeur de cette constante, nous avons besoin de connaître la valeur de $y(t)$ à $t = 0$. La valeur $y(0)$ est appelée valeur (ou condition) initiale. Elle est soit donnée soit déterminée par l'état initial du système physique (par exemple un circuit électrique du premier ordre) analysé.

Exemples 2.7

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver la solution générale (complète) vérifiant une condition initiale :

a) $4\frac{dy}{dt} + y = 20 \; avec \; y(0) = 0$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.6)

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{t}{4}} + 20$$

En appliquant la condition initiale $y(0) = 0$, on trouve

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + 20 = 0 \Rightarrow A = -20$$

D'où la solution

$$\boldsymbol{y(t) = -20e^{-\frac{t}{4}} + 20 = 20\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)}.$$

b) $-\frac{dy}{dt} + y = 3t \; avec \; y(0) = 1$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.6)

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{t} + 3 + 3t$$

En appliquant la condition initiale $y(0) = 1$, on trouve

$$y(0) = 1 \Rightarrow A + 3 = 1 \Rightarrow A = -2$$

D'où la solution

$$\boldsymbol{y(t) = -2e^{t} + 3 + 3t}.$$

c) $3\frac{dy}{dt} + y = 2\cos t \;\; avec\; y(0) = -1.8$. Nous avons déjà trouvé (exemple 2.6)

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 0.2\cos t + 0.6\sin t$$

En appliquant la condition initiale $y(0) = -1.8$, on trouve

$$y(0) = -1.8 \;\Rightarrow A + 0.2 = -1.8 \;\Rightarrow A = -2$$

D'où la solution

$$\boldsymbol{y(t) = -2e^{-\frac{t}{3}} + 0.2\cos t + 0.6\sin t.}$$

2.4.1 Exercices

Résoudre les équations différentielles suivantes. Suggestion : pour pouvoir appliquer les méthodes vues ici, il faut d'abord mettre l'équation sous la forme

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t).$$

1) $\frac{dy}{dt} = -2y - 6 \quad avec\; y(0) = 0.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = 3e^{-2t} - 3}$

2) $\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \frac{1}{2}y \quad avec\; y(0) = 1.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = -3e^{-\frac{t}{2}} + 6 - 2e^{-t}}$

3) $\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y \quad avec\; y(0) = 1.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = \frac{11}{4}e^{2t} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\,t}$

4) $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y \quad avec\; y(0) = 2.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = 2e^{t} + t}$

5) $\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} \quad avec\ y(0) = -0.5.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = -e^{-3t} + 0.5e^{-t}}$

6) $\frac{dy}{dt} = 2y + 1 - 2t^2 \quad avec\ y(0) = 2.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = 2e^{2t} + t + t^2}$

7) $\frac{dy}{dt} - y = -e^t \sin t \quad avec\ y(0) = -1.$ (y_p plus facile à trouver par la méthode de variation des paramètres)

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = -2e^t + e^t cos\ t}$

2.5 APPLICATIONS AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES DU 1ER ORDRE

Les applications des équations différentielles sont diverses. Mais ici, nous allons voir seulement celles concernant l'unité d'APP portant sur les circuits RC et RL du premier ordre.

2.5.1 CIRCUITS RC

Considérons le circuit suivant :

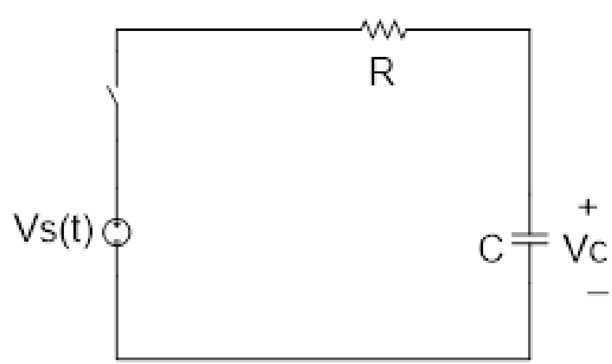

Figure 2 : Circuit de charge RC

La mise en équation du circuit donne

$$\boldsymbol{RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_s(t)}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre. Elle peut donc se mettre sous la forme

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

où $y(t) = V_C(t)$, $\tau = RC\ et\ f(t) = V_s$(t).

L'interrupteur ferme à l'instant t = 0. Donc la valeur initiale $V_C(0)$ de V_C est déterminée par la tension aux bornes du condensateur juste avant que l'interrupteur ferme. Si $V_C(0) = 0$, alors le condensateur est initialement déchargé et commence à se charger dès que l'interrupteur est fermé. Si $V_C(0) \neq 0$, alors le condensateur est initialement chargé. Si de plus $V_s(t) = 0$, le condensateur commence à se décharger dès que l'interrupteur est fermé.

Connaissant $R, C, V_s(t)\ et\ V_C(0)$, on peut déterminer $V_C(t)$ par les méthodes que nous venons de voir. Nous allons nous intéresser ici aux trois situations suivantes :

A) Recharge d'un condensateur à travers une résistance par une source DC

On considère le cas où

- la source de tension est constante : $V_s(t) = V_s$
- le condensateur est initialement déchargé : $V_C(0) = 0$.

Nous avons donc à résoudre

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

où $y(t) = V_C(t)$, $\tau = RC$, $f(t) = V_s =$ constante et $y(0) = V_C(0) = 0$.

Détermination de la solution complémentaire $\boldsymbol{y_c(t)}$:

$$y_c(t) = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\tau}}} = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}$$

où A est constante arbitraire.

Détermination d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p(t)}$:

Comme le second membre de l'équation est constant, alors une solution particulière est tout simplement

$$y_p(t) = V_s$$

Détermination de la solution complète $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}} + V_s$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + V_s = 0 \Rightarrow A = -V_s$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$y(t) = -V_s e^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}} + V_s = V_s\left(1 - e^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}\right)$$

D'où la formule de recharge d'un condensateur (C) à travers une résistance (R) par une source constante (V_s) : $\boldsymbol{V_C(t) = V_s\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$.

B) Décharge d'un condensateur à travers une résistance

On considère le cas où

- la source de tension est nulle : $V_s(t) = 0$
- le condensateur est initialement chargé : $V_C(0) \neq 0$.

Nous avons donc à résoudre

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

où $y(t) = V_C(t)$, $\tau = RC$, $f(t) = 0$ et $y(0) = V_C(0) \neq 0$.

Détermination de la solution complémentaire $\boldsymbol{y_c(t)}$:

$$y_c(t) = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\tau}} = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}$$

où A est constante arbitraire.

Détermination d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p(t)}$:

Comme le second membre de l'équation est constant, alors une solution particulière est tout simplement

$$y_p(t) = V_s = 0$$

Détermination de la solution complète $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = V_C(0) \Rightarrow A = V_C(0)$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$y(t) = V_C(0)e^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}$$

D'où la formule de décharge d'un condensateur (C) à travers une résistance (R) :
$\boldsymbol{V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}}$**.**

C) Deux exemples où la source est variable

On considère le cas où

- la source de tension est variable : $V_s = V_s(t)$
- le condensateur est initialement déchargé : $V_C(0) = 0$
- $C = 10\ \mu F\ et\ R = 10\ k\Omega$

Nous avons donc à résoudre

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

où $y(t) = V_C(t), \tau = RC = 10^{-1},\ f(t) = V_s(t)$ et $y(0) = V_C(0) = 0$.

Exemple 2.8

$\boldsymbol{V_s(t) = t\, V}$ **:**

Détermination de la solution complémentaire $\boldsymbol{y_c(t)}$:

$$y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-10t}$$

où A est constante arbitraire.

Détermination d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p(t)}$:

Comme le second membre de l'équation vaut t, alors, par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière est donnée par

$$y_p(t) = C_1 + C_2 t$$

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$10^{-1}\frac{d}{dt}(C_1 + C_2 t) + (C_1 + C_2 t) = t$$
$$10^{-1}C_2 + C_1 + C_2 t = t$$
$$(10^{-1}C_2 + C_1) + (C_2)t = t$$

Par identification des coefficients, on a :

$$10^{-1}C_2 + C_1 = 0 \text{ et } C_2 = 1$$

D'où $C_1 = -10^{-1}\ et\ C_2 = 1$. Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = -10^{-1} + t}$.

Détermination de la solution complète $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = Ae^{-10t} - 10^{-1} + t$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = V_C(0) = 0 \Rightarrow A - 10^{-1} = 0 \Rightarrow A = 10^{-1}$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$y(t) = 10^{-1}e^{-10t} - 10^{-1} + t$$

D'où la formule : $\boldsymbol{V_C(t) = 10^{-1}e^{-10t} - 10^{-1} + t}$.

Exemple 2.9

$\boldsymbol{V_s(t) = 10\ sin(2\pi t)\ V}$:

Détermination de la solution complémentaire $\boldsymbol{y_c(t)}$:

$$y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-10t}$$

où A est constante arbitraire.

Détermination d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p(t)}$:

Comme le second membre de l'équation vaut 10 $sin(2\pi t)$, alors, par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière est donnée par

$$y_p(t) = C_1 sin(2\pi t) + C_2 cos(2\pi t)$$

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$10^{-1}\frac{d}{dt}(C_1 sin(2\pi t) + C_2 cos(2\pi t)) + (C_1 sin(2\pi t) + C_2 cos(2\pi t)) = 10\ sin(2\pi t)$$

$$10^{-1}(2\pi C_1 cos(2\pi t) - 2\pi C_2 sin(2\pi t)) + (C_1 sin(2\pi t) + C_2 cos(2\pi t)) = 10\ sin(2\pi t)$$

$$(C_1 - 10^{-1}(2\pi)C_2)sin(2\pi t) + (C_2 + 10^{-1}(2\pi)C_1)cos(2\pi t) = 10\ sin(2\pi t)$$

Par identification des coefficients, on a :

$$C_1 - 10^{-1}(2\pi)C_2 = 10 \text{ et } C_2 + 10^{-1}(2\pi)C_1 = 0$$

D'où $C_1 = \frac{250}{25+\pi^2}\ et\ C_2 = -\frac{50\pi}{25+\pi^2}$.

Donc $\boldsymbol{y_p(t)} = \left(\boldsymbol{\frac{250}{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{sin(2\pi t)} - \left(\boldsymbol{\frac{50\pi}{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{cos(2\pi t)}$.

Détermination de la solution complète $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \boldsymbol{Ae^{-10t}} + \left(\boldsymbol{\frac{250}{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{sin(2\pi t)} - \left(\boldsymbol{\frac{50\pi}{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{cos(2\pi t)}$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = V_C(0) = 0 \Rightarrow A - \left(\frac{50\pi}{25+\pi^2}\right) = 0 \Rightarrow A = \left(\frac{50\pi}{25+\pi^2}\right)$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$\boldsymbol{y(t)} = \left(\frac{\boldsymbol{50\pi}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{e^{-10t}} + \left(\frac{\boldsymbol{250}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{sin(2\pi t)} - \left(\frac{\boldsymbol{50\pi}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{cos(2\pi t)}$$

D'où la formule

$$\boldsymbol{V_C(t)} = \left(\frac{\boldsymbol{50\pi}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{e^{-10t}} + \left(\frac{\boldsymbol{250}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{sin(2\pi t)} - \left(\frac{\boldsymbol{50\pi}}{\boldsymbol{25+\pi^2}}\right)\boldsymbol{cos(2\pi t)}.$$

2.5.2 Circuits RL

Considérons le circuit suivant :

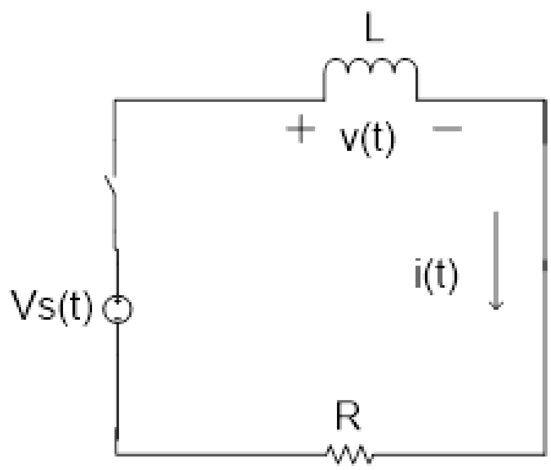

Figure 3 : Circuit de charge RL

La mise en équation du circuit donne

$$\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}}\frac{\boldsymbol{di(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{i(t)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{V_s(t)}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre. Elle peut donc se mettre sous la forme

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

où $y(t) = i(t), \tau = \frac{L}{R}$ et $f(t) = \frac{1}{R}V_s$(t).

L'interrupteur ferme à l'instant t = 0. Donc la valeur initiale est $y(0) = i(0+) = 0$. Connaissant R, L et $V_s(t)$, on peut déterminer $i(t)$ par les méthodes que nous venons de voir. Nous allons considérer les deux exemples suivants :

Exemple 2.10

$\boldsymbol{V_s(t) = V_s = constante}$:

Détermination de la solution complémentaire $y_c(t)$:

$$\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-\frac{Rt}{L}}}$$

où A est constante arbitraire.

Détermination d'une solution particulière $y_p(t)$:

Comme le second membre de l'équation est constant, alors une solution particulière est tout simplement

$$\boldsymbol{y_p(t) = \frac{1}{R}V_s}$$

Détermination de la solution complète $y(t)$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \boldsymbol{Ae^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{1}{R}V_s}$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + \frac{1}{R}V_s = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{R}V_s$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{R}V_s e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{1}{R}V_s}$$

D'où la formule : $\boldsymbol{i(t) = -\frac{1}{R}V_s e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{1}{R}V_s}$

Exemple 2.11

$\boldsymbol{V_s(t) = t\,V}$:

Détermination de la solution complémentaire $\boldsymbol{y_c(t)}$:

$$\boldsymbol{y_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-\frac{Rt}{L}}}$$

où A est constante arbitraire.

Comme le second membre de l'équation vaut $\frac{1}{R}t$, alors, par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière est donnée par

$$y_p(t) = C_1 + C_2 t$$

En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{L}{R}\frac{d}{dt}(C_1 + C_2 t) + (C_1 + C_2 t) = \frac{1}{R}t$$
$$\frac{L}{R}C_2 + C_1 + C_2 t = \frac{1}{R}t$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\frac{L}{R}C_2 + C_1 = 0 \text{ et } C_2 = \frac{1}{R}$$

D'où $C_1 = -\frac{L}{R^2}\ et\ C_1 = 1$. Donc $\boldsymbol{y_p(t) = -\frac{L}{R^2} + \frac{1}{R}t}$.

Détermination de la solution complète $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \boldsymbol{Ae^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{L}{R^2} + \frac{1}{R}t}$$

Détermination de la valeur de la constante arbitraire A :

$$y(0) = 0 \Rightarrow A - \frac{L}{R^2} = 0 \Rightarrow A = \frac{L}{R^2}$$

Donc la solution complète vérifiant la condition initiale est

$$y(t) = \boldsymbol{\frac{L}{R^2}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{L}{R^2} + \frac{1}{R}t}$$

D'où la formule : $\boldsymbol{i(t) = \frac{L}{R^2}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{L}{R^2} + \frac{1}{R}t}$.

2.5.3 EXERCICES D'APPLICATIONS AUX CIRCUITS DU PREMIER ORDRE

1) Soit un circuit électrique comprenant un condensateur (C), une résistance (R) et une de tension ($V_s(t)$). On veut déterminer la charge électrique ($q(t)$) accumulée dans le condensateur à l'instant t.

   a) Montrer, par la mise en équation du circuit, que q(t) satisfait l'équation différentielle suivante

$$R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=V_s(t)$$

   b) Déterminer q(t) sachant que la source est constante $V_s(t)=V_s$ et que q(0)=0.

Réponse : $\boldsymbol{q(t)=-CV_s e^{-\frac{t}{RC}}+CV_s}$

2) Dans le contexte de l'exercice précédent, déterminer q(t) sachant que $V_s(t)=t$ et que q(0)=0.

Réponse : $\boldsymbol{q(t)=RC^2e^{-\frac{t}{RC}}-RC^2+Ct}$

3) Soit un circuit électrique comprenant une inductance (L), une résistance (R) et une source de tension ($V_s(t)$). On veut déterminer la tension aux bornes de la résistance ($V_R(t)$) à l'instant t.

   a) Montrer, par la mise en équation du circuit, que $V_R(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{L}{R}\frac{dV_R(t)}{dt}+V_R(t)=V_s(t)$$

   b) Déterminer $V_R(t)$ sachant que la source est constante $V_s(t)=V_s$ et que $V_R(0)=0$.

Réponse : $\boldsymbol{V_R(t)=-V_s e^{-\frac{Rt}{L}}+V_s}$

4) Dans le contexte de l'exercice précédent, déterminer $V_R(t)$ sachant que $V_s(t)=2e^{-t}$ et que $V_R(0)=0$. (Considérer seulement le cas R≠L)

Réponse : $\boldsymbol{V_R(t)=-\frac{2R}{R-L}e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{2R}{R-L}e^{-t}}$

3 MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS DU SECOND ORDRE

Nous allons maintenant étudier en détail comment résoudre une équation différentielle linéaire à coefficient constant d'ordre 2.

Soit, donc, l'équation différentielle

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

où a (≠0), b et c sont des constantes données et *f(t)* est une fonction quelconque donnée.

Remarques

1) Si l'équation précédente provient de la mise en équation d'un circuit du second ordre (RLC), alors les constantes a, b, c sont positives. Dans ce cas, on peut poser $\alpha = \frac{b}{2a}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ et $g(t) = \frac{f(t)}{a}$ afin de mettre l'équation sous la forme suivante, qui est la même que celle du livre de Hambley :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t)$$

2) Comme il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2, sa solution générale (complète) doit comporter 2 constantes arbitraires.

3) Puisqu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire, sa solution générale (complète) est, comme nous l'avons déjà vu, donnée par

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

où $y_c(t)$ est la solution complémentaire. Il s'agit donc de la solution générale (comprenant 2 constantes arbitraires) de l'équation sans second membre (f(t)=0).

$$a\frac{d^2y_c}{dt^2} + b\frac{dy_c}{dt} + cy_c = 0$$

et où $y_p(t)$ est une solution particulière. Il s'agit donc de n'importe quelle solution sans constantes arbitraires satisfaisant l'équation

$$a\frac{d^2y_p}{dt^2} + b\frac{dy_p}{dt} + cy_p = f(t)$$

3.1 RECHERCHE DE LA SOLUTION COMPLÉMENTAIRE $(\boldsymbol{y_c(t)})$

Pour trouver $y_c(t)$, il faut résoudre l'équation suivante

$$a\frac{d^2y_c}{dt^2} + b\frac{dy_c}{dt} + cy_c = 0$$

Comme vue précédemment avec les équations d'ordre 1, la seule fonction qui peut satisfaire une telle équation doit être de la forme $Ae^{\lambda t}$. Par substitution, on obtient

$$a\lambda^2Ae^{\lambda t} + b\lambda Ae^{\lambda t} + cAe^{\lambda t} = 0$$

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)Ae^{\lambda t} = 0$$

Donc, pour que le terme $Ae^{\lambda t}$ vérifie l'équation, il faut que λ soit solution (racine) de l'équation quadratique (équation algébrique de degré 2) suivante, appelée **équation caractéristique** (ou **auxiliaire**) :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Pour résoudre l'équation caractéristique, on peut appliquer la méthode du discriminant Δ. Autrement dit résoudre le polynôme d'ordre 2 ayant comme variable λ et comme constantes *a*, *b* et *c*.

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

où

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Donc, avec ces deux solutions, on obtient la solution complémentaire suivante :

$$\boldsymbol{y_c(t) = A_1e^{(\lambda_1)t} + A_2e^{(\lambda_2)t}}$$

$$\boldsymbol{y_c(t) = A_1e^{\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)t} + A_2e^{\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)t}}$$

Cette solution peut être simplifiée en regardant trois situations possibles en fonction de la valeur de Δ :

$\Delta > 0$

Dans ce cas, on a deux solutions (racines) réelles et distinctes :

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution complémentaire prend alors la forme :

$$\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)t}}$$

$\Delta = 0$

Dans ce cas, on a une solution (racine) réelle double :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

La solution complémentaire prend alors la forme (à partir de la solution pour $\Delta > 0$) :

$$\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{\left(-\frac{b}{2a}\right)t} + A_2\, t\, e^{\left(-\frac{b}{2a}\right)t}}$$

$\Delta < 0$

Puisque la racine d'un nombre négatif n'existe pas, il faut alors passer par des nombres complexes pour résoudre ces équations. En utilisant, $j = \sqrt{-1}$.

On a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La solution complémentaire prend alors la forme :

$$y_c(t) = B_1 \cdot e^{\left(-\frac{b}{2a} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\cdot t} + B_2 \cdot e^{\left(-\frac{b}{2a} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\cdot t}$$

$$y_c(t) = B_1 \cdot e^{\left(-\frac{b}{2a} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\right)\cdot t} + B_2 \cdot e^{\left(-\frac{b}{2a} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\right)\cdot t}$$

Pour des raisons de simplification, on utilise α et β :

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On obtient

$$y_c(t) = B_1 \cdot e^{(-\alpha + j\,\beta)t} + B_2 \cdot e^{(-\alpha - j\,\beta)t}$$

On subdivise les exponentielles pour isoler α et β.

$$y_c(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + B_2 \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}$$

En utilisant la formule d'Euler

$$\boldsymbol{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta}$$

On obtient

$$y_c(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t}(\cos\ \beta t\ + j\sin\beta t) \quad + \quad B_2 \cdot e^{-\alpha t}(\cos\ \beta t\ - j\sin\beta t)$$

$$y_c(t) = (B_1 + B_2) \cdot e^{-\alpha t}\cos\beta t \quad + \quad j\,(B_1 - B_2) \cdot e^{-\alpha t}\ \sin\beta t$$

D'où la solution complémentaire

$$\boldsymbol{y_c(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha t} cos\beta t + A_2 \cdot e^{-\alpha t} sin\beta t}$$

Avec

$$\alpha = \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}$$

Remarque

Comme $y_c(t)$ est une fonction réelle, B_1 et B_2 doivent être deux nombres complexes conjugués pour que A_1 et A_2 soient deux nombres réels.

$$A_1 = B_1 + B_2 \quad \text{et} \quad A_2 = j(B_1 - B_2)$$

Exemple 3.1

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver sa solution complémentaire $y_c(t)$:

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 36t$. L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = -2$$

Et

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = -3$$

Donc $\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}}$ où A_1 et A_2 sont deux constantes arbitraires.

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 10e^{-t}$. L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$. Il y a donc une racine réelle double :

$$\lambda = -\frac{4}{2} = -2$$

Donc $\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 t\, e^{-2t}}$ où A_1 et A_2 sont deux constantes arbitraires.

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 65$. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = -36 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$\lambda_1 = -\frac{-4}{2} + j\,\frac{\sqrt{36}}{2} = 2 + j\,3$$

Et

$$\lambda_2 = -\frac{-4}{2} - j\,\frac{\sqrt{36}}{2} = 2 - j\,3$$

Donc $\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{2t} cos(3t) + A_2 e^{2t} sin(3t)}$ où A_1 et A_2 sont deux constantes arbitraires

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 5\,cos\,t + sin\,t$. L'équation caractéristique est
$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4(1)(4) = -12 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$\lambda_1 = -\frac{2}{2} + j\,\frac{\sqrt{12}}{2} = -1 + j\,\sqrt{3}$$

Et

$$\lambda_2 = -\frac{2}{2} - j\,\frac{\sqrt{12}}{2} = -1 - j\,\sqrt{3}$$

Donc $\boldsymbol{y_c(t) = A_1 e^{-t} cos(\sqrt{3}\,t) + A_2 e^{-t} sin(\sqrt{3}\,t)}$ où A_1 et A_2 sont deux constantes arbitraires

3.2 RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE $\left(\boldsymbol{y_p(t)}\right)$

À l'instar du cas du premier ordre, il existe deux méthodes pour trouver une solution particulière $y_p(t)$

3.2.1 METHODE DES COEFFICIENTS INDETERMINES

La démarche est la même que celle vue dans le cas du premier ordre.

Exemple 3.2

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver une solution particulière $y_p(t)$ par la méthode des coefficients indéterminés :

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 36t$. Ici f(t) = 36t. Donc $y_p(t) = C_1 + C_2 t$.
En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{d^2(C_1 + C_2 t)}{dt^2} + 5\frac{d(C_1 + C_2 t)}{dt} + 6(C_1 + C_2 t) = 36t$$
$$5C_2 + 6C_1 + 6C_2 t = 36t$$
$$(0)t^2 + (6C_2)t^1 + (5C_2 + 6C_1)t^0 = 0t^2 + 36t^1 + 0t^0$$

Par identification des coefficients, on a :
les éléments en t^0 : $5C_2 + 6C_1 = 0$ et les éléments en t^1 : $6C_2 = 36$

D'où $C_1 = -5\ et\ C_2 = 6$. Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = -5 + 6t}$.

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 10e^{-t}$. Ici f(t) = $10e^{-t}$. Donc $y_p(t) = Ae^{-t}$.
En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{d^2(Ae^{-t})}{dt^2} + 4\frac{d(Ae^{-t})}{dt} + 4(Ae^{-t}) = 10e^{-t}$$
$$Ae^{-t} - 4Ae^{-t} + 4Ae^{-t} = 10e^{-t}$$

Par identification des coefficients, on a : $A = 10$. Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 10e^{-t}}$.

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 65$. Ici f(t) = 65. Donc $y_p(t) = A$.
En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{d^2(A)}{dt^2} - 4\frac{d(A)}{dt} + 13(A) = 65$$
$$0 - 0 + 13A = 65$$

Par identification des coefficients, on a : $A = 5$. Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 5}$.

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 5\, cos\, t + sin\, t$. Ici f(t) = 5 $cos\, t + sin\, t$. Donc
$y_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
En substituant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{d^2(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}{dt^2} + 2\frac{d(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}{dt} + 4(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$
$$= 5\, cos\, t + sin\, t$$

$$-C_1 \cos t - C_2 \sin t - 2C_1 \sin t + 2C_2 \cos t + 4C_1 \cos t + 4C_2 \sin t$$
$$= 5\, cos\, t + sin\, t$$

Par identification des coefficients, on a :

$3C_1 + 2C_2 = 5$ et $-2C_1 + 3C_2 = 1$

D'où $C_1 = 1\ et\ C_2 = 1$. Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = cos\, t + sin\, t}$.

3.2.2 METHODE DE VARIATION DES PARAMETRES

Cette méthode consiste à faire varier les 2 constantes arbitraires de $y_c(t)$. Autrement dit, si $y_c(t) = A_1 h_1(t) + A_2 h_2(t)$, on pose $y_p(t) = \boldsymbol{A_1(t)} h_1(t) + \boldsymbol{A_2(t)} h_2(t)$ et, par substitution, on détermine les fonctions $A_1(t)\ et\ A_2(t)$.

Appliquons cette méthode dans le cas d'une équation quelconque afin de trouver deux formules générales pour$A_1(t)\ et\ A_2(t)$.

$$a\frac{d^2 y_p}{dt^2} + b\frac{dy_p}{dt} + cy_p = f(t)$$

$$a\frac{d^2\big(A_1(t)h_1(t) + A_2(t)h_2(t)\big)}{dt^2} + b\frac{d\big(A_1(t)h_1(t) + A_2(t)h_2(t)\big)}{dt} + c\big(A_1(t)h_1(t) + A_2(t)h_2(t)\big) = f(t)$$

Pour simplifier, on va omettre la variable t

$$a\,(A_1''h_1 + 2A_1{}'\,h_1' + A_1 h_1'' + A_2''h_2 + 2A_2{}'\,h_2' + A_2 h_2'') + b(A_1'h_1 + A_1 h_1' + A_2'h_2 + A_2 h_2') + c(A_1 h_1 + A_2 h_2) = f(t)$$

$$a\,(A_1''h_1 + 2A_1{}'\,h_1' + A_2''h_2 + 2A_2{}'\,h_2') + b(A_1'h_1 + A_2'h_2) + A_1(ah_1'' + b\,h_1' + ch_1) + A_2(ah_2'' + b\,h_2' + ch_2) = f(t)$$

On peut simplifier la dernière équation en utilisant le fait que les fonctions $h_1\ et\ h_2$ satisfont l'équation sans second membre (car, elles proviennent de $y_c(t)$) :

$$A_1(ah_1'' + b\,h_1' + ch_1) = 0\ \ et\ \ A_2(ah_2'' + b\,h_2' + ch_2) = 0$$

On obtient ainsi

$$a\,(A_1''h_1 + 2A_1{}'\,h_1' + A_2''h_2 + 2A_2{}'\,h_2') + b(A_1'h_1 + A_2'h_2) = f(t)$$

Pour simplifier davantage et se donner une deuxième équation (on a deux inconnus à déterminer), on pose

$$A_1'h_1 + A_2'h_2 = 0$$

En dérivant (par rapport à t), on déduit de cette dernière équation, la relation suivante qui sert aussi à simplifier l'avant-dernière équation

$$A_1''h_1 + A_1{}'\,h_1' + A_2''h_2 + A_2{}'\,h_2' = 0$$

Finalement, pour déterminer $A_1(t)\ et\ A_2(t)$, on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_1' h_1 + A_2' h_2 = 0 \\ A_1{}'\, h_1' + A_2{}'\, h_2' = \dfrac{1}{a} f(t) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, cela donne

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a} f(t) \end{bmatrix}$$

Par la règle de Cramer (méthode des déterminants), on obtient

$$A_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & h_2 \\ \dfrac{1}{a} f(t) & h_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix}} = -\frac{h_2 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)}$$

et

$$A_2' = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & 0 \\ h_1' & \dfrac{1}{a} f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix}} = \frac{h_1 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)}$$

D'où

$$A_1 = -\int \frac{h_2 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)} dt$$

et

$$A_2 = \int \frac{h_1 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)} dt$$

Finalement une formule pour $y_p(t)$

$$\boldsymbol{y_p(t) = \left[-\int \frac{h_2 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)} dt\right] h_1(t) + \left[\int \frac{h_1 f(t)}{a(h_1 h_2' - h_1' h_2)} dt\right] h_2(t)}$$

Exemple 3.3

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver une solution particulière $y_p(t)$ par la méthode de variation des paramètres :

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 36t$. Ici f(t) = 36t, a = 1 et nous avons déjà trouvé (exemple 3.1) $y_c(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t}$. D'où $h_1(t) = e^{-2t}\ et\ h_2(t) = e^{-3t}$. Donc,

$$y_p(t) = \left[-\int \frac{h_2f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_1(t) + \left[\int \frac{h_1f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_2(t)$$

$$= \left[-\int \frac{e^{-3t}\ 36t}{-e^{-5t}}dt\right]e^{-2t} + \left[\int \frac{e^{-2t}\ 36t}{-e^{-5t}}dt\right]e^{-3t}$$

$$= \left[\int 36te^{2t}\,dt\right]e^{-2t} + \left[-\int 36te^{3t}\,dt\right]e^{-3t}$$

$$= [18te^{2t} - 9e^{2t}]e^{-2t} + [-12te^{3t} + 4e^{3t}]e^{-3t}$$

$$= 18t - 9 - 12t + 4$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = -5 + 6t}$.

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 10e^{-t}$. Ici f(t) = $10e^{-t}$, a = 1 et nous avons déjà trouvé (exemple 3.1) $y_c(t) = A_1e^{-2t} + A_2t\,e^{-2t}$. D'où $h_1(t) = e^{-2t}\ et\ h_2(t) = te^{-2t}$. Donc,

$$y_p(t) = \left[-\int \frac{h_2f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_1(t) + \left[\int \frac{h_1f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_2(t)$$

$$= \left[-\int \frac{te^{-2t}\ 10e^{-t}}{e^{-4t}}dt\right]e^{-2t} + \left[\int \frac{e^{-2t}\ 10e^{-t}}{e^{-4t}}dt\right]te^{-2t}$$

$$= \left[-\int 10te^{t}\,dt\right]e^{-2t} + \left[\int 10e^{t}\,dt\right]e^{-2t}$$

$$= [-10te^{t} + 10e^{t}]e^{-2t} + [10e^{t}]te^{-2t}$$

$$= -10te^{-t} + 10e^{-t} + 10te^{-t}$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 10e^{-t}}$.

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 65$. Ici f(t) = 65, a = 1 et nous avons déjà trouvé (exemple 3.1) $y_c(t) = A_1e^{2t}cos(3t) + A_2e^{2t}sin(3t)$. D'où $h_1(t) = e^{2t}cos(3t)\ et\ h_2(t) = e^{2t}sin(3t)$.

Donc,

$$y_p(t) = \left[-\int \frac{h_2 f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_1(t) + \left[\int \frac{h_1 f(t)}{a(h_1h_2' - h_1'h_2)}dt\right]h_2(t)$$

$$= \left[-\int \frac{e^{2t}sin(3t)\ 65}{3e^{4t}}dt\right]e^{2t}cos(3t) + \left[\int \frac{e^{2t}cos(3t)\ 65}{3e^{4t}}dt\right]e^{2t}sin(3t)$$

$$= \left[-\int \frac{65}{3}e^{-2t}sin(3t)\,dt\right]e^{2t}cos(3t) + \left[\int \frac{65}{3}e^{-2t}cos(3t)\,dt\right]e^{2t}sin(3t)$$

$$= \left[\frac{10}{3}e^{-2t}sin(3t) + 5e^{-2t}cos(3t)\right]e^{2t}cos(3t)$$
$$+ \left[5e^{-2t}sin(3t) - \frac{65}{3}e^{-2t}cos(3t)\right]e^{2t}sin(3t)$$

$$= \frac{65}{3}sin(3t)cos(3t) + 5cos^2(3t) + 5sin^2(3t) - \frac{65}{3}sin(3t)cos(3t)$$

Donc, $\boldsymbol{y_p(t) = 5}$.

3.3 RÉSOLUTION COMPLÈTE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS DU SECOND ORDRE

Soit l'équation différentielle

$$a\frac{d^2y}{dt^2} \; + \; b\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

Comme nous l'avons déjà vu, la solution générale (complète) de cette équation est

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

où $y_c(t)$ est sa solution complémentaire et $y_p(t)$ est une solution particulière.

Nous avons vu deux méthodes pour trouver $y_p(t)$: la méthode des coefficients indéterminés et la méthode de variation des paramètres. Nous sommes donc maintenant en mesure de résoudre n'importe quelle équation différentielle de ce type.

Exemple 3.4

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver la solution générale (complète) :

a) $\frac{d^2y}{dt^2} \; + \; 5\frac{dy}{dt} + 6y = 36t.$

Nous avons déjà trouvé (exemples 3.1 et 3.2)
$y_c(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} et\; y_p(t) = -5 + 6t$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} - 5 + 6t.}$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} \; + \; 4\frac{dy}{dt} + 4y = 10e^{-t}.$

Nous avons déjà trouvé (exemples 3.1 et 3.2)

$y_c(t) = A_1e^{-2t} + A_2t\; e^{-2t} et\; y_p(t) = 10e^{-t}$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A_1e^{-2t} + A_2t\; e^{-2t} + 10e^{-t}.}$

c) $\frac{d^2y}{dt^2}$ - $4\frac{dy}{dt}$ $+ 13y = 65.$

Nous avons déjà trouvé (exemples 3.1 et 3.2)

$y_c(t) = A_1e^{2t}cos(3t) + A_2e^{2t}sin(3t) \;\; et \; y_p(t) = 5$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A_1e^{2t}cos(3t) + A_2e^{2t}sin(3t) + 5.}$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + \; 2\frac{dy}{dt} \; + 4y = 5\cos t + \sin t.$

Nous avons déjà trouvé (exemples 3.1 et 3.2)

$y_c(t) = A_1e^{-t}cos(\sqrt{3}\,t) + A_2e^{-t}sin(\sqrt{3}\,t) \;\; et \;\; y_p(t) = cos\; t + sin\; t$

Donc,

$\boldsymbol{y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A_1e^{-t}cos(\sqrt{3}\,t) + A_2e^{-t}sin(\sqrt{3}\,t) + cos\; t + sin\; t.}$

3.4 CONDITIONS INITIALES ET VALEURS DES CONSTANTES ARBITRAIRES

Nous avons vu que, dans le cas d’une équation différentielle d’ordre 2, la solution générale (complète) comporte deux constantes arbitraires. Pour déterminer les valeurs de ces constantes, nous avons besoin de connaître les valeurs de $y(t) \; et \; y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ à $t = 0$. Les valeurs $y(0) \; et \; y'(0)$ sont appelées valeurs (ou conditions) initiales. Elles sont soit données soit déterminées par l’état initial du système physique (par exemple un circuit électrique du second ordre) analysé.

Exemple 3.5

Pour chacune des équations différentielles suivantes, nous allons lui trouver la solution générale (complète) vérifiant deux conditions initiales :

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 36t \ \ avec \ y(0) = 0 \ et \ y'(0) = -4$

Nous avons déjà trouvé (exemple 3.4)

$$y(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} - 5 + 6t$$

Donc,

$$y'(t) = -2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t} + 6$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 0 \ et \ y'(0) = -4$, on obtient

$$A_1 + A_2 - 5 = 0$$
$$-2A_1 - 3A_2 + 6 = -4$$

D'où le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Sa résolution donne

$$A_1 = 5 \ et \ A_2 = 0$$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = 5e^{-2t} - 5 + 6t.}$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 10e^{-t} \quad avec \ y(0) = 10 \ et \ y'(0) = 0.$

Nous avons déjà trouvé (exemple 3.4)

$$y(t) = A_1e^{-2t} + A_2t\ e^{-2t} + 10e^{-t}$$

Donc,

$$y'(t) = -2A_1e^{-2t} - 2A_2t\ e^{-2t} + A_2\ e^{-2t} - 10e^{-t}$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 10 \ et \ y'(0) = 0$, on obtient

$$A_1 + 10 = 10$$
$$-2A_1 + A_2 - 10 = 0$$

D'où

$$A_1 = 0 \ et \ A_2 = 10$$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = 10t\ e^{-2t} + 10e^{-t}.}$

c) $\frac{d^2y}{dt^2}$ – $4\frac{dy}{dt}$ $+ 13y = 65 \quad avec\ y(0) = 1\ et\ y'(0) = 1.$

Nous avons déjà trouvé (exemple 3.4)

$$y(t) = A_1e^{2t}cos(3t) + A_2e^{2t}sin(3t) + 5$$

Donc,

$$y'(t) = 2A_1e^{2t}cos(3t) - 3A_1e^{2t}sin(3t) + 2A_2e^{2t}sin(3t) + 3A_2e^{2t}cos(3t)$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 1\ et\ y'(0) = 1$, on obtient

$$A_1 + 5 = 1$$
$$2A_1 + 3A_2 = 1$$

D'où

$$A_1 = -4\ et\ A_2 = 3$$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = -4e^{2t}cos(3t) + 3e^{2t}sin(3t) + 5.}$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 5\cos t + \sin t \quad$ avec $y(0) = 1\ et\ y'(0) = 2.$

Nous avons déjà trouvé (exemple 3.4)

$$y(t) = A_1e^{-t}cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + A_2e^{-t}sin\left(\sqrt{3}\,t\right) + cos\ t + sin\ t$$

Donc,

$$y'(t) = -A_1e^{-t}cos\left(\sqrt{3}\,t\right) - \sqrt{3}\,A_1e^{-t}sin\left(\sqrt{3}\,t\right) - A_2e^{-t}sin\left(\sqrt{3}\,t\right)$$
$$+ \sqrt{3}\,A_2e^{-t}cos\left(\sqrt{3}\,t\right) - \sin t + \cos t$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 1\ et\ y'(0) = 2$, on obtient

$$A_1 + 1 = 1$$
$$-A_1 + \sqrt{3}A_2 + 1 = 2$$

D'où

$$A_1 = 0\ \ et\ A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc, $\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}sin\left(\sqrt{3}\,t\right) + cos\ t + sin\ t}$.

3.5 EXERCICES

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 6e^t \quad avec\ y(0) = 1\ et\ y'(0) = -1.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = 2e^{2t} + 2e^{-t} - 3e^t}$

2) $\frac{d^2y}{dt^2} - 9y = 18\cos(3t) + 9 \quad avec\ y(0) = 0\ et\ y'(0) = 0.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = e^{3t} + e^{-3t} - 1 - cos(3t)}$

3) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 32 \quad avec\ y(0) = 0\ et\ y'(0) = 2.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = -8cos(2t) + sin(2t) + 8}$

4) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \quad avec\ y(0) = 3\ et\ y'(0) = 1.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = 2e^{-t}cos(t) + 4e^{-t}sin(t) + e^{-t}}$

5) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t \quad avec\ y(0) = -1\ et\ y'(0) = 1.$

Réponse : $\boldsymbol{y(t) = e^{-t} + te^{-t} - 2 + t}$

3.6 APPLICATIONS AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES DU SECOND ORDRE

On rencontre les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2 dans plusieurs domaines. Mais ici, nous allons voir seulement celles concernant l'APP portant sur les circuits RLC du second ordre.

Considérons le circuit suivant :

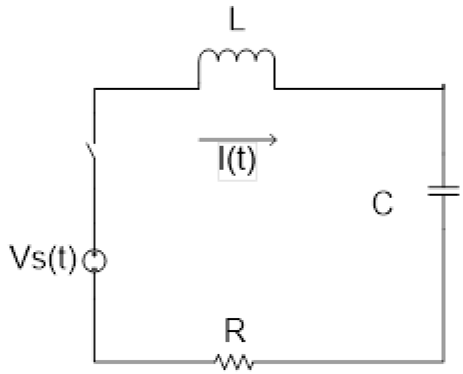

Figure 4 : Circuit de charge RLC

Tension aux bornes du condensateur

La mise en équation du circuit donne

$$\boldsymbol{LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_s(t)}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre.

En posant $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2L}}$, $\boldsymbol{\omega_0^2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{LC}}$ et $f(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{V_s(t)}}{\boldsymbol{LC}}$, on peut mettre l'équation sous la forme suivante, qui est la même que celle du livre de Hambley :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t)$$

où $\boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{V_C(t)}$

Connaissant $R, L, C, V_s(t), V_C(0)\ et\ i(0) = C\frac{dV_C(0)}{dt}$, on peut résoudre l'équation différentielle et trouver l'expression de $V_C(t)$.

Courant de l'inductance

La mise en équation du circuit donne

$$\boldsymbol{L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dV_s(t)}{dt}}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre.

En posant $\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L}}$, $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ et $f(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\frac{1}{L}\frac{dV_s(t)}{dt}}$, on peut mettre l'équation sous la forme suivante, qui est la même que celle du livre de Hambley :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t)$$

où $\boldsymbol{y(t) = i(t)}$.

Connaissant $R, L, C, V_S(t)$ ainsi que les valeurs initiales, on peut résoudre l'équation différentielle et trouver l'expression de $i(t)$.