LES NOMBRES COMPLEXES

Yves Bérubé-Lauzière, Ph.D.

Département de génie électrique et de génie informatique
Université de Sherbrooke

version 1.3

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres complexes

1.1 Un peu d'histoire sur la construction du système des nombres

Le bref historique qui suit sur le système des nombres est un condensé très succinct du livre *L'empire des nombres.* [1] Le but de la discussion ici est de conscientiser le lecteur aux difficultés qui ont été rencontrées dans la construction du système des nombres tel que nous le connaissons aujourd'hui et dans l'acceptation des divers types de nombres, notamment les nombres négatifs et les nombres irrationnels. Ceci devrait mieux le préparer à accepter la notion de nombre complexe qui suivra.

La nécessité des nombres est apparue dans les civilisations anciennes organisées (Mésopotamie, Égypte, Grèce) avec le développement du commerce. Il est en effet devenu nécessaire de compter des objets et de comptabiliser des quantités faisant partie des échanges commerciaux, ce qui a aussi mené au développement des monnaies. Ainsi sont apparus les *nombres entiers positifs* 1, 2, 3, ... Par exemple, on peut vouloir compter le nombre de pommes échangées pour un autre bien comme des carottes.

D'autres nombres, appelés fractions, sont ceux qui représentent des parties d'un tout. Tant qu'on se limite à compter des objets, on n'a pas besoin des fractions, p. ex. on ne parle jamais d'une demie personne ! La nécessité des fractions est apparue, notamment avec le développement de l'agriculture, où on avait besoin de mesurer de façon continue des quantités, comme le poids d'une quantité de beurre. Cette notion apparait de façon naturelle dans un contexte où un objet est subdivisé en parties, comme par exemple une tarte séparée en trois parts. Chaque part (« pointe de tarte ») représente alors 1/3 de la tarte et si une personne reçoit deux parts alors cela représente 2/3. La notion générale de fraction, c.à.d. le rapport de deux nombres entiers, a été introduite par les pythagoriciens, penseurs de la Grèce antique, au VI^{e} siècle av. J.-C. Les Babyloniens et les Égyptiens n'avaient précédemment utilisé que les quantièmes, fractions dont le numérateur est 1, comme 1/2, 1/3, 1/4, ..., ainsi que certaines fractions particulières comme 2/3.

Les pythagoriciens de la Grèce antique croyaient que tout nombre est soit un *entier* ou un *rapport*

[1] Denis Guedj, L'empire des nombres, Découvertes Gallimard - Sciences et techniques, 1996. Ce petit livre fort intéressant traite de nombreux autres sujets relatifs aux nombres, et ce, avec un souci constant du contexte historique.

d'entiers (*fraction* ou *nombre fractionnaire*). Or, le théorème de Pythagore lui-même vient bousculer cette croyance. Selon ce théorème bien connu de la géométrie, [2] un carré de côtés de longueurs de une unité a une diagonale dont le carré de la longueur vaut 2 unités. Or, les pythagoriciens arrivent à démontrer qu'il n'existe aucune nombre entier ou fractionnaire dont le carré est 2.[3] À cause de leur croyance erronée, pour les pythagoriciens la longueur de la diagonale d'un côté de longueur 1 ne peut être représentée par aucun nombre ; une telle longueur est déclarée « inexprimable ». C'est la crise ! Pythagore était si troublé par cette découverte qu'il demandait à ses élèves de jurer de la garder secrète, sans quoi ils s'exposaient à la peine de mort ! Une autre grandeur commune qui ne peut s'exprimer comme le rapport de deux nombres entiers est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Il était connu de façon empirique depuis l'Antiquité que tous les cercles ont le même rapport entre leur circonférence et leur diamètre. Ce rapport n'est devenu un nombre, le nombre π du mot grec *periphérei*a (périphérie), qu'au XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Bien que π résulte d'un concept simple (rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre), π n'est pas un nombre fractionnaire.[4] Malgré leur rejet des grandeurs qui ne sont pas entières ou fractionnaires, les Grecs sont conscients que celles-ci sont bien là et ils développent une théorie pour les éviter. Ils refusent en outre d'appeler de telles grandeurs des nombres. Il faudra près de 2000 ans pour que ces grandeurs soient considérées à juste titre comme des nombres, mais on les appellera tout de même des *nombres irrationnels* ! Cette appellation est quelque peu malheureuse, car ces nombres n'ont rien d'irrationnel. Bien au contraire, la raison indique qu'ils existent au même titre que les nombres entiers ou fractionnaires ; la diagonale d'un carré unité en est un exemple manifeste.

Lorsqu'on se limite à compter des objets, le concept du *zéro* n'est pas nécessaire, car on s'intéresse à compter des objets justement lorsqu'il y en a ! En fait, le zéro est initialement apparu dans un autre contexte, soit la *numérotation de position* inventée en Inde autour du V$^{\text{e}}$ siècle de notre ère. C'est cette notation qu'on utilise encore de nos jours pour représenter les nombres en base 10 selon les unités, dizaines, centaines, etc. P. ex., si un nombre ne contient pas de dizaines, alors dans la numérotation de position, il faut quand même l'indiquer et c'est le zéro qui sert à cela comme dans le nombre 103. Dans ce contexte, zéro n'est pas encore un nombre, mais seulement un symbole ou chiffre (signe graphique) pour indiquer l'absence (l'absence de dizaine dans le cas de 103). De là, les Indiens ont toutefois franchi l'étape suivante, soit d'introduire le concept du nombre zéro pour représenter une quantité nulle, donc un nombre, tout comme les autres chiffres 1, 2, ..., 9 représentent aussi des nombres. En langue indienne, le mot *sunya* signifie le vide et les Indiens utilisèrent un petit cercle dénotant le vide. De là vient le symbole pour zéro qu'on utilise aujourd'hui. Traduit en langue arabe, *sunya* devient *sifr*, qui à son tour traduit en latin devient *zephirum* qui donna *zephiro*, soit zéro. On notera que *sifr* a aussi finalement donné son nom à la collection entière des chiffres, soit 0 à 9. [5] L'ensemble des nombres positifs adjoint

[2]Le théorème de Pythagore était bien connu des scribes babyloniens dès 1800-1600 av. J.-C., soit plus de 1000 ans avant Pythagore. Les Grecs ont toutefois été les premiers à donner une démonstration rigoureuse de ce théorème entre les VI$^{\text{e}}$ et V$^{\text{e}}$ siècles av. J.-C.

[3]Pour les curieux, la démonstration de ce fait est assez simple. Elle utilise un raisonnement par le contraire, dit raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*). On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre fractionnaire. Il existe donc des nombres entiers sans facteur commun tels que $\sqrt{2} = p/q$. En élevant au carré, on a alors $2 = p^2/q^2$ et ainsi $p^2 = 2q^2$. Or ceci implique que p et q sont des nombres pairs, car selon cette égalité, p^2 est pair. Or, un nombre au carré ne peut être pair que si ce nombre est lui-même pair, donc on conclue que p est pair. On peut ainsi l'écrire comme $p = 2n$, où n est un entier. De cette façon, $q^2 = 4n^2/2 = 2n^2$. Ainsi, q est aussi pair. Donc, p et q ont 2 comme facteur commun, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale que ces nombres n'ont aucun facteur commun. On a ainsi prouvé que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire comme le rapport de deux nombres.

[4]Une démonstration de cela est non-triviale et beaucoup plus difficile que pour $\sqrt{2}$. Une première démonstration n'est apparue qu'au XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Le premier à y être arrivé est le mathématicien Johann Heinrich Lambert en 1761.

[5]Attention à ne pas confondre les notions de chiffre et de nombre. On utilise des chiffres pour représenter des nombres et

du zéro forme l'ensemble des *nombres naturels* dénoté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (certains omettent toutefois zéro de l'ensemble des nombres naturels, mais ici on l'incluera).

Lorsqu'on compte des objets, qu'on effectue un travail d'arpentage, ou qu'on agit dans un contexte géométrique dans lequel on manie des grandeurs, il n'y a pas de besoin d'utiliser des nombres autres que des nombres positifs. P. ex., une grandeur géométrique dont la mesure serait moindre que 0 n'a pas de sens. Les *nombres entiers négatifs* ont commencé à être utilisés par les mathématiciens indiens aux VI$^{\text{e}}$ et VII$^{\text{e}}$ siècles de notre ère pour des besoins comptables. En opposition à un bien représenté par un nombre positif, une dette était inscrite comme une quantité entière négative. En d'autres mots, un nombre négatif représente un déficit. Les nombres négatifs sont apparus beaucoup plus tard en Europe. Leur usage a été répandu à la Renaissance (XV$^{\text{e}}$ siècle) par ceux qui ont développé le système bancaire dans les riches cités états de Florence et de Venise dans l'Italie actuelle. P. ex. soustraire 8 de 6 qui donne -2 avait un sens lorsqu'un banquier permettait à un client de retirer 8 ducats alors qu'il n'en avait que 6 en banque ; il s'agissait alors d'un prêt ! Pour représenter de façon concrète (donc réelle !) un tel nombre négatif qui constituait une dette envers la banque, il suffisait d'écrire la différence 2 dans la colonne des débits du relevé des transactions gardé par la banque. En outre, dans un contexte comptable il existe un état d'équilibre dans lequel les avoirs permettent de compenser les dettes. Ainsi, plus généralement il ne peut y avoir de nombres négatifs sans l'existence du zéro. L'ensemble des nombres naturels adjoint de l'ensemble des nombres entiers négatifs forme l'ensemble des *entiers relatifs* dénoté $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ (la lettre « Z » vient du mot allemand « Zahl » qui signifie nombre). L'union des entiers relatifs et des nombres fractionnaires (positifs et négatifs) forme l'ensemble des *nombres rationnels*, dénoté $\mathbb{Q}$. Bien qu'on puisse associer les nombres rationnels à une quantité, donc à une notion sommes toutes assez comptable, il ne s'agit pas d'une multiplicité d'unités entières. En fait, les rationnels font évoluer la notion de quantité en permettant de *passer du dénombrement à la mesure*. Ceci mène à l'ensemble des *nombres réels*, dénoté $\mathbb{R}$, formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels.[6]

À ce point, on peut faire une pause pour constater que les notions du zéro et de nombres négatifs qu'on prend pour acquises ne sont pas apparues comme évidentes initialement. Leur développement et leur acceptation a nécessité beaucoup de temps. Il a notamment fallu près de 1000 ans après les Indiens pour que l'Occident accepte les nombres négatifs, où ils étaient initialement appelés « nombres absurdes » (*numeri absurdi*) ! De même, il y a eu de la résistance à accepter les nombres irrationnels. On constatera que l'évolution du système des nombres n'a pas été un processus direct et sans détours. Il a été élargi graduellement au fil des siècles, partant des nombres entiers jusqu'au système des nombres réels qui nous est familier aujourd'hui.

1.2 Introduction des nombres complexes et définitions

Les équations sont un moyen de produire de nouveaux nombres dans lequel un nombre est considéré comme une solution possible d'un type d'équations donné. Par exemple, un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ est la solution de l'équation $x - n = 0$. Une équation proche de la précédente est $x + n = 0$. Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais si on étend le champ des solutions possibles à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers

certains chiffres sont aussi des nombres, mais tout nombre n'est pas un chiffre ! Cela doit être clair pour le lecteur !

[6] L'appellation « nombres réels » vient d'une certaine façon corriger les erreurs de l'histoire, les nombres irrationels qui en font partie étant bien réels !

relatifs, alors cette équation a une solution, soit le nombre négatif $-n$. De façon analogue, l'équation $x^2-2=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais si on inclue aussi les irrationnels, alors on a deux solutions, soient $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ peut ainsi aussi être défini comme étant une des solutions de l'équation $x^2-2=0$. Les nombres qui satisfont des équations algébriques comme $\sqrt{2}$ sont appelés des nombres algébriques. Il a été démontré que π n'est pas un nombre algébrique, c'est-à-dire que π ne satisfait aucune équation algébrique du type $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ pout tout n (la preuve est assez difficile). Un nombre ne satisfaisant aucune équation algébrique est appelé un *nombre transcendental*. Le nombre $e=2.71828\ldots$ qui est la base des logarithmes naturels et qui apparaît dans les exponentielles est aussi un nombre transcendental (on démontre aussi que e est un nombre irrationnel).

Les règles de l'arithmétique font en sorte que tout nombre réel élevé au carré donne un nombre positif. [7] Ainsi, certaines équations de degré 2 n'admettent pas de solution dans le système des nombres réels. P. ex. $x^2+1=0$, n'admet pas de solution réelle, car ceci revient à l'équation $x^2=-1$ et aucun nombre réel élevé au carré peut être négatif. On peut par contre écrire de façon formelle que la solution à cette équation est $\pm\sqrt{-1}$. On sait que les solutions de l'équation générale de second degré (équation quadratique) $ax^2+bx+c=0$ sont données par la formule célèbre

$$x_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.1}$$

Ainsi, si b^2-4ac est négatif, alors l'équation n'a pas de solution réelle. Un exemple est l'équation

$$x^2+2x+5=0. \tag{1.2}$$

En utilisant la formule ci-haut, on a que les solutions sont

$$x_\pm=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm2\sqrt{-1}. \tag{1.3}$$

On voit de nouveau apparaître $\sqrt{-1}$ et avec l'introduction de ce nombre on voit qu'on peut résoudre toutes les équations algébriques du second degré, peu importe le signe de leur discriminant. En fait, comme on le verra plus loin, avec les nombres complexes on peut résoudre toute équation algébrique de degré n.

Leonhard Euler, un des plus grands mathématiciens de tous les temps,[8] a introduit la notation i (signifiant « imaginaire ») pour dénoter $\sqrt{-1}$. En ingénierie, on utilise plutôt j pour dénoter $\sqrt{-1}$ afin d'éviter toute confusion avec la lettre i aussi très utilisée pour dénoter le courant électrique. Dans le reste de cet ouvrage, on utilisera la notation

$$j=\sqrt{-1}. \tag{1.4}$$

[7] La preuve est assez simple. Soit a un nombre réel positif, c.à.d. $a>0$. On a que la multiplication de part et d'autre d'une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de cette inégalité et donc $a^2=a\cdot a>a\cdot 0=0$, soit $a^2>0$. Dans le cas d'un nombre négatif, ou peut toujours écrire ce nombre comme $-a$ où a est positif. Alors en soustrayant a de chaque côté de cette inégalité, on obtient $a-a>-a$, soit $-a<0$. Comme la multiplication de part et d'autre d'une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de cette inégalité, on a ainsi $a\cdot(-a)<0$. Si on multiplie maintenant de part et d'autres par -1, on aura alors que le sens de l'inégalité change et donc $-1\cdot(a\cdot(-a))>0$. En utilisant la distributivité de la multiplication et le fait que $-1\cdot a=-a$, on arrive à $(-a)\cdot(-a)>0$.

[8] C'est notamment en l'honneur de Euler qu'on dénote par e le nombre égal à $2.71828\ldots$

L'équation précédente se traduit aussi par

$$j^2 = -1. \tag{1.5}$$

C'est souvent cette dernière propriété qui est utilisée dans les calculs, comme on le verra plus loin.

Exercice de lecture 1.1. Calculer j^3, j^4 et j^5. Que remarque-t-on ? Donner une équation pour j^n ?

Le nombre j ne peut pas être un nombre réel, puisque, comme on l'a vu, aucun nombre réel élevé au carré peut donner un nombre négatif. C'est pour cela qu'on l'appelle *nombre imaginaire*. Si on revient à la formule générale donnée à l'éq. (1.1) dans le cas où $b^2 - 4ac < 0$, alors on peut écrire la solution de l'équation quadratique comme

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{1.6}$$

On voit que si on veut résoudre toute équation quadratique, alors pour avoir une solution, il faut étendre le système des nombres réels aux nombres de la forme

$$z = a + bj, \tag{1.7}$$

où a et b sont réels (note : l'ordre de b et j n'importe pas, on peut aussi écrire $z = a + jb$). Ce nouvel ensemble de nombres est appelé système des *nombres complexes*, [9] dénoté $\mathbb{C}$, ainsi

$$\mathbb{C} = \{z = a + bj,\ \text{avec}\ a, b \in \mathbb{R}\ \text{et}\ j = \sqrt{-1}\}. \tag{1.8}$$

L'ensemble des nombres réels peut être vu comme le sous-ensemble des nombres complexes pour lequel $b = 0$. On généralise ainsi l'ensemble des nombres réels à celui des nombres complexes. Les appellations nombre imaginaire et nombres complexes ont une connotation quelque peu négative, sous-entendant qu'ils sont difficiles à saisir. Bien que les nombres complexes soient un peu surprenants à prime abord et qu'il faille un peu de pratique pour les manipuler, il n'est est rien et on aurait peut-être dû les appeler nombres extraordinaires, car ils le sont !

Les nombres complexes ont de très nombreuses applications, dont la résolution d'équations algébriques comme on l'a vu ci-haut. Ils facilitent aussi la résolution de certaines équations différentielles par l'entremise de la résolution d'équations algébriques. Ils trouvent également d'autres applications en physique (hydrodynamique, mécanique quantique), en analyse spectrale (analyse de Fourier) où on décompose un signal en composantes fréquentielles et en électricité dans le cas des circuits à courants alternatifs. L'utilité des nombres complexes en science et en ingénierie est qu'ils permettent souvent de simplifier les calculs et la résolution de problèmes, tel qu'on le verra dans de nombreuses occasions. Il est donc primordial pour tout scientifique et ingénieur de connaître les propriétés de ces nombres et d'être à l'aise avec leur manipulation. C'est sur cela qu'on va maintenant s'attarder.

1.2.1 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

Un nombre complexe $z = a + bj$ est formé de deux parties, soit sa *partie réelle a* dénotée par $\mathrm{Re}\{z\}$, donc

$$\mathrm{Re}\{z\} = a \tag{1.9}$$

[9] C'est le grand mathématicien Karl Friedrich Gauss qui a introduit cette appellation.

et sa *partie imaginaire* b dénotée par $\mathrm{Im}\{z\}$, donc

$$\mathrm{Im}\{z\} = b. \tag{1.10}$$

À noter que les parties réelle et imaginaire sont toutes deux des nombres réels. Une erreur commune est de considérer la partie imaginaire comme étant bj, alors que c'est b. Un nombre complexe quelconque z peut donc aussi s'écrire comme

$$z = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\}. \tag{1.11}$$

Cette façon d'écrire un nombre complexe est toutefois très rarement utilisée.

Un nombre complexe est dit *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle, un tel nombre a donc la forme $z = bj$. Des exemples son $2j$, $\sqrt{-11} = \sqrt{11}\sqrt{-1} = \sqrt{11}\,j$ et j.

1.2.2 Conditions de nullité d'un nombre complexe et d'égalité entre nombres complexes

Pour clore cette section, on démontre deux petits résultats. Tout d'abord si $a + bj = 0$, alors a et b doivent être nuls (c.à.d. $a = b = 0$). La preuve est relativement simple et suit le développement suivant :

$$\begin{aligned}
& a + bj = 0 \\
\Rightarrow\ & a = -bj \\
\Rightarrow\ & a^2 = b^2 j^2 && \text{(on élève au carré des deux côtés)} \\
\Rightarrow\ & a^2 = -b^2 && (j^2 = -1) \\
\Rightarrow\ & a^2 + b^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & a = b = 0. && \text{(propriété des nombres réels)}
\end{aligned}$$

À l'inverse, il est évident que si $a = b = 0$, alors $z = a + bj = 0$, c.à.d. z est nul. Ainsi, en bref, *un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles.*

Le second résultat est que *si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs parties réelles et leurs parties imaginaires doivent être égales*. Ceci est en fait un corollaire du résultat précédent. En effet, si $z = a + bj$ et $w = c + dj$, et que $z = w$, alors $a + bj = c + dj$. Cette condition peut être écrite comme $(a - c) + (b - d)j = 0$. On retombe alors sur le cas précédent où un nombre complexe est nul. On doit donc avoir $a - c = 0$ et $b - d = 0$, soit $a = c$ et $b = d$. Ainsi les parties réelles et imaginaires sont égales.

1.3 Algèbre des nombres complexes

Comme pour les nombres réels, on définit deux opérations de base pour les nombres complexes, soient l'addition et la multiplication. Dans tout ce qui suit, $z = a + bj$ et $w = c + dj$ désigneront deux nombres complexes.

1.3.1 Addition

Par définition, on additionne deux nombres complexes en additionnant respectivement leurs parties réelles et leurs parties imaginaires (les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont considérées indépendantes). On a donc

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, j, \tag{1.12}$$

p. ex. $(1 - 3j) + (-3 + 4j) = -2 + j$.

1.3.2 Multiplication

Pour ce qui est de la multiplication de deux nombres complexes, on distribue les multiplications sur les additions, on remplace j^2 par -1 lorsque cela se présente et on regroupe les termes. En utilisant ces règles de base, on a

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bj) \cdot (c + dj) \\ &= ac + adj + bcj + bdj^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\, j. \end{aligned} \tag{1.13}$$

P. ex., on a $(1-3j)\cdot(-3+4j) = 1\cdot(-3) + 1\cdot 4j + (-3j)\cdot(-3) + (-3)\cdot 4j^2 = 9 + 13j$. Il n'est pas nécessaire de se rappeler de la formule donnée à l'éq. (1.13), mais plutôt de la procédure pour calculer le produit de deux nombres complexes qui utilise la distributivité des multiplications sur les additions et le fait que $j^2 = -1$.

Exercice de lecture 1.2. Calculer $(1 + j)\cdot(1 - 2j)$.

Exercice de lecture 1.3. Donner les parties réelles et imaginaires du nombre $(-2+3j)\cdot(1+j)$. La partie réelle d'un produit est-elle le produit des parties réelles ? De même, la partie imaginaire d'un produit est-elle le produit des parties imaginaires ? Vérifier ces hypothèses sur le cas considéré ici.

On notera de l'exercice qui précède que la partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles (de même pour les parties imaginaires), c'est plus compliqué que cela comme le montre l'éq. (1.13), car il y a des termes « croisés » (c.à.d. parties réelles et imaginaires multipliées ensemble).

Exercice de lecture 1.4. Soient a et b deux nombres réels quelconques, calculer $(a + bj)\cdot(a - bj)$. Que remarque-t-on ?

Exercice de lecture 1.5. Montrer que la multiplication de deux nombres complexes est commutative, à savoir $z \cdot w = w \cdot z$ pour tout z et w.

Exercice de lecture 1.6. On a trouvé ci-haut que les nombres complexes $z_1 = -1 - 2j$ et $z_2 = -1 + 2j$ sont les solutions de l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$. On dit aussi que z_1 et z_2 sont les zéros (ou racines) du polynôme $p(x) = x^2 + 2x + 5$ (car $p(z_1) = 0$ et $p(z_2) = 0$). Ainsi, on peut factoriser le polynôme comme $(x - z_1)\cdot(x - z_2)$. Montrer que si on effectue cette multiplication, cela redonne bien le polynôme $p(x)$.

1.3.3 Soustraction

La soustraction de deux nombres complexes est un simple prolongement de ce qu'on fait pour l'addition ; on soustrait la partie réelle du second nombre de celle du premier nombre et de même pour les parties imaginaires. On a ainsi

$$z - w = (a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)\, j. \tag{1.14}$$

1.3.4 Conjugaison complexe

Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe, il est commode d'introduire la notion de *conjugué d'un nombre complexe*. Soit $z = a + bj$, alors son conjugué, dénoté par z^*, est donné par

$$z^* = a - bj \tag{1.15}$$

(on change la partie imaginaire en son inverse additif). P. ex. pour $z = (1+2j)$ on a $z^* = (1+2j)^* = 1-2j$. Dans certains ouvrages, on dénote plutôt le conjugué d'un nombre complexe par une barre au-dessus de celui-ci, soit $\overline{z}$; on n'utilisera pas cette notation ici.

Exercice de lecture 1.7. Calculer z^* si $z = -2-3j$.

L'opération de conjugaison satisfait les propriétés suivantes par rapport à l'addition et à la multiplication :

$$(z+w)^* = z^* + w^* \tag{1.16}$$

et

$$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*. \tag{1.17}$$

En mots, *le conjugué d'une somme est la somme des conjugués* et *le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.*

Exercice de lecture 1.8. Soit $z = 2-3j$ et $w = -1+2j$. Vérifier que pour ces nombres, les propriétés précédentes pour le conjugué d'un somme et le conjugué d'un produit sont vraies.

Exercice de lecture 1.9. Démontrer que les propriétés précédentes pour le conjugué d'un somme et le conjugué d'un produit sont vraies pour tous nombres complexes z et w.

On a les relations suivantes pour les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe en termes de ce nombre et de son conjugué :

$$\mathrm{Re}\{z\} = \frac{z+z^*}{2}, \tag{1.18}$$

$$\mathrm{Im}\{z\} = \frac{z-z^*}{2j}. \tag{1.19}$$

Ces deux relations surviennent à l'occasion dans certains développements dans lesquels apparaissent $z + z^*$ et $z - z^*$ qu'on écrit alors respectivement comme $2\,\mathrm{Re}\{z\}$ et $2j\,\mathrm{Im}\{z\}$.

Exercice de lecture 1.10. Démontrer les relations précédentes pour les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Indice : Utiliser $z = a + bj$ et additionner (ou soustraire) à son conjugué complexe pour arriver aux résultats avec quelques manipulations algébriques simples supplémentaires.

Lorsqu'on multiplie un nombre complexe par son conjugué, on obtient un nombre réel positif. En effet,

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= (a+bj)\cdot(a-bj) \\ &= a^2 - abj + baj - b^2 j^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{1.20}$$

(ceci était en fait le contenu de l'exercice de lecture 1.4).

1.3.5 Division et inverse multiplicatif

Maintenant, pour effectuer la division de deux nombres complexes, c.à.d. calculer une fraction de deux nombres complexes, on multiplie le dénominateur de la fraction par son conjugué complexe, mais comme il ne faut pas changer la fraction, il faut aussi multiplier le numérateur par ce même conjugué (on utilise en fait le truc de « multiplier par 1 » d'une façon judicieuse). Ainsi, le conjugué du dénominateur est utilisé pour transformer le dénominateur en un nombre réel. La méthode procède comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{a+bj}{c+dj}\\ &= \frac{a+bj}{c+dj}\cdot\frac{c-dj}{c-dj}\\ &= \frac{(a+bj)\cdot(c-dj)}{(c+dj)\cdot(c-dj)}\\ &= \frac{(a+bj)\cdot(c-dj)}{c^2+d^2}\\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)j}{c^2+d^2}\\ &= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}j. \end{aligned} \tag{1.21}$$

On notera que c'est à la deuxième ligne du développement précédent qu'on a « multiplié par 1 » d'une façon déguisée, où 1 a été exprimé comme $(c-dj)/(c-dj)$. En outre, pour que le quotient existe, il faut que c^2+d^2 soit différent de zéro, ce qui est équivalent à ce que c et d ne soient pas tous deux nuls, donc, w ne doit pas être nul. L'équation précédente montre que le quotient de deux nombres complexes est aussi un nombre complexe. On ne se rappellera pas de cette formule, mais plutôt de la méthode pour calculer le quotient de deux nombres complexes qu'on peut résumer de la façon suivante :

$$z \div w \equiv \frac{z}{w} = \frac{z\cdot w^*}{w\cdot w^*}. \tag{1.22}$$

Voici un exemple :

$$\begin{aligned}\frac{-1+2j}{3+4j} &= \frac{(-1+2j)\cdot(3-4j)}{(3+4j)\cdot(3-4j)}\\ &= \frac{5+10j}{25}\\ &= \frac{1+2j}{5}.\end{aligned}$$

La méthode pour calculer le quotient de deux nombres complexes qui consiste à se débarasser du nombre complexe au dénominateur à l'aide de son conjugué complexe permet d'obtenir une expression pour l'*inverse multiplicatif* d'un nombre complexe z dénoté comme pour les réels par z^{-1}. On a en effet

$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{a-bj}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}j. \tag{1.23}$$

1.3.6 Structure de l'ensemble des nombres complexes

On a vu jusqu'ici les opérations arithmétiques élémentaires sur les nombres complexes. Pour terminer, il convient de mentionner que $\mathbb{C}$ muni des opération d'addition et de multiplication telles que définies précédemment, possède tout comme $\mathbb{R}$ la structure d'un corps, à savoir que la somme ou le produit de deux nombres complexes est aussi un complexe, l'addition et la multiplication complexes sont associatives, il y a des éléments neutres pour l'addition et la multiplication, ce qui permet de définir les opérations de soustraction et de division, etc.

Facultatif Une alternative un peu plus abstraite pour traiter les nombres complexes est de les représenter par des couples. Dans cette représentation, un nombre complexe $z = a + bj$ est plutôt écrit comme

$$z = (a, b). \tag{1.24}$$

On définit alors comme suit de façon abstraite l'addition de deux nombres complexes ($w = (c, d)$) :

$$\begin{aligned} z + w &= (a, b) + (c, d) \\ &\equiv (a + c, b + d). \end{aligned} \tag{1.25}$$

L'addition est ainsi effectuée comme l'addition de vecteurs.

Pour ce qui de la multiplication de deux nombres complexes, elle est définie d'emblée comme

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a, b) \cdot (c, d) \\ &\equiv (ac - bd, ad + bc). \end{aligned} \tag{1.26}$$

On notera qu'il n'y a pas d'équivalent chez les vecteurs sur lequel se baser pour définir la multiplication de deux nombres complexes. [10] On remarquera en outre qu'il aurait été difficile d'arriver à cette définition de la multiplication sans la représentation $a + bj$. En fait cette définition est basée directement sur l'éq. (1.13), dont elle est une traduction dans la représentation sous forme de couples.

On n'utilisera pas la notation des couples dans le présent ouvrage, car elle est moins intuitive et elle n'est pas utilisée en pratique. Il convenait toutefois d'en parler, car on la rencontre parfois dans certains ouvrages.

1.4 Plan complexe

On va maintenant voir comment on peut représenter géométriquement des nombres complexes comme des points dans un plan. Il s'agit là d'une représentation puissante menant à une interprétation géométrique des calculs faits avec les nombres complexes [11] et qui va aussi mener à la représentation polaire des nombres complexes.

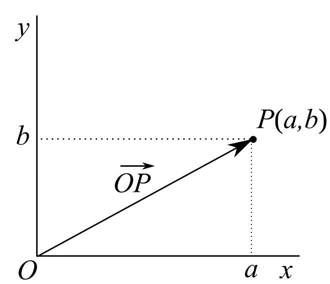

FIGURE 1.1

[10] On rappellera qu'il y a toutefois d'autres types de « multiplications » pour les vecteurs comme le produit scalaire et le produit vectoriel.

[11] L'esprit humain aime bien pouvoir se représenter géométriquement les objets mathématiques qu'il manipule, car cela aide à la visualisation et à la compréhension.

1.4.1 Nombre complexe comme point ou vecteur dans le plan

Donc, soit le nombre complexe $z = a + bj$. On rapporte ce nombre dans un plan cartésien où la partie réelle a est l'abscisse et la partie imaginaire b est l'ordonnée tel qu'illustré à la figure 1.1. Avec cette représentation cartésienne, la forme $z = a + bj$ est parfois appelée *forme rectangulaire* d'un nombre complexe.

Le nombre complexe $a+bj$ est donc représenté comme le point (a, b) dans le plan. Cette façon de représenter les nombres complexes établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des nombres complexes et l'ensemble des points du plan. On parle alors du *plan complexe* et l'axe des x (abscisses) devient l'*axe réel* et l'axe des y (ordonnées) l'*axe imaginaire*. Ces désignations viennent du fait que chaque réel, pouvant être mis sous la forme $a + 0j$, est représenté par un point situé sur l'axe des x, alors qu'un nombre imaginaire pur de la forme $0 + bj$ se situe sur l'axe des y.

Une alternative fort utile de représenter un nombre complexe est de plutôt le considérer comme le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ du point P, soit le vecteur reliant l'origine O à P (figure 1.1).

Avec la représentation vectorielle des nombres complexes, la somme de deux nombres complexes est équivalente à la somme vectorielle des vecteurs qui leurs sont associés (figure 1.2).

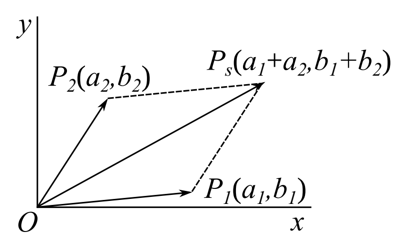

FIGURE 1.2

Exercice de lecture 1.11. Qu'advient-il du vecteur position $\overrightarrow{OP}$ d'un nombre complexe z lorsqu'on multiplie z par j ? Indice : Représenter z et jz dans le plan complexe.

1.4.2 Module d'un nombre complexe

Dans la représentation vectorielle d'un nombre complexe, la longueur du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est donnée par $\sqrt{a^2+b^2}$. Cette longueur est appelée *module du nombre complexe z* et est dénotée par $|z|$, ou encore par la lettre minuscule r ; ainsi

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1.27}$$

En se rappelant que $z \cdot z^* = a^2 + b^2$ (éq. (1.20)), soit $z \cdot z^* = |z|^2$, le module peut donc aussi être écrit comme

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*}. \tag{1.28}$$

Exercice de lecture 1.12. Montrer qu'avec le module, l'inverse multiplicatif (éq. (1.23)) peut s'écrire comme

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{1.29}$$

Le module satisfait certaines propriétés. Par rapport à la multiplication, on a la propriété suivante :

$$|z \cdot w| = |z||w|. \tag{1.30}$$

En mots, le *module d'un produit est le produit des modules.*

Exercice de lecture 1.13. Soit $z = 2 - 3j$ et $w = -1 + 2j$. Vérifier que pour ces nombres, la propriété précédente pour le module de leur produit est vraie.

Exercice de lecture 1.14. Démontrer que la propriété précédente pour le module d'un produit est vraie pour tous nombres complexes z et w. Indice : Écrire les nombres complexes comme $z = a + bj$ et $w = c + dj$ et calculer le module au carré de zw, c'est plus facile. Il s'agit d'un simple calcul ; des termes se simplifieront et il y aura à faire une petite factorisation par un facteur commun.

Inégalité du triangle Pour ce qui est de l'addition, il n'est pas vrai en général que le module d'une somme est la somme des modules comme le montre l'exercice de lecture 1.15 plus bas. En fait, le module d'une somme satisfait plutôt à l'inégalité suivante, appelée *inégalité du triangle* :

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \tag{1.31}$$

Exercice de lecture 1.15. Soit $z = 2 - 3j$ et $w = -1 + 2j$. Vérifier que pour ces nombres, le module de leur somme n'est pas égal à la somme des modules et que l'inégalité du triangle est bien satisfaite. Ceci n'est pas une démonstration de l'inégalité du triangle qui est laissée en exercice à la fin de ce chapitre.

1.5 Forme polaire d'un nombre complexe

On peut utiliser les coordonnées polaires pour repérer un point $P(a, b)$ dans le plan. Ces coordonnées sont données par l'angle θ que le vecteur position du point fait par rapport à l'axe des x et la distance r du point à l'origine (figure 1.3). Par trigonométrie, on a alors les relations suivantes

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta, \\ b &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.32}$$

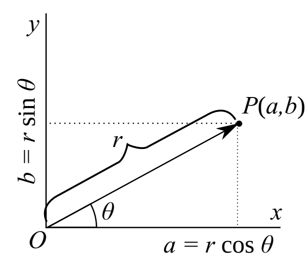

FIGURE 1.3

1.5.1 Représentation polaire d'un nombre complexe

On peut aussi utiliser une représentation en coordonnées polaires pour les nombres complexes, ce qui mène à écrire un nombre complexe comme

$$z = a + bj = r(\cos\theta + j\sin\theta). \tag{1.33}$$

Dans ce qui suit, on considérera qu'un angle spécifié en radians est compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ (dans l'intervalle $[0, 360°[$ si l'angle est en degrés). [12]

La représentation d'un nombre complexe à l'aide de son module r et de l'angle θ est appelée *forme polaire ou forme trigonométrique du nombre complexe* (on la dénote aussi parfois par *forme sinusoïdale*, bien qu'il y ait un cosinus et un sinus). Cette forme a des propriétés algébriques fort intéressantes et mène à une interprétation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes comme on le verra dans ce qui suit.

[12]Beaucoup de calculatrices et de librairies informatiques de fonctions mathématiques utilisent plutôt l'intervalle $[-\pi, \pi[$ pour spécifier un angle ; il est toujours prudent de vérifier les spécifications des outils qu'on utilise.

À noter qu'on dénote aussi le module d'un nombre complexe z par $\mathrm{mod}(z)$, donc $\mathrm{mod}(z) \equiv |z| = r$. L'angle θ de z est aussi appelé *phase* ou *argument* de z, dénoté dans ce dernier cas par $\arg(z)$. On retrouve aussi parfois la forme polaire dénotée par

$$z = r\angle\theta, \tag{1.34}$$

ce qui est un notation abrégée pour signifier $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$.

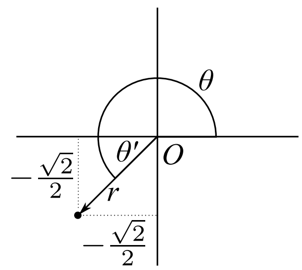

FIGURE 1.4

Exemple 1.1. Donner la forme polaire du nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j$.

Solution. Tel qu'illustré à la figure 1.4, ce nombre complexe se situe dans le troisième quadrant du plan complexe, car ses deux composantes sont négatives. L'angle θ' que ce nombre fait avec l'axe réel négatif est 45° et l'angle total qu'il fait avec l'axe réel positif, qui est l'angle que l'on recherche, est $\theta = 180° + \theta' = 225°$. Son module est donné par $r^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ainsi, la représentation polaire du nombre est

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + j\sin\theta) = 1\cdot\big(\cos(225°) + j\sin(225°)\big) \\ &= 1\angle 225°. \end{aligned}$$

Il convient de mentionner ici qu'il faut faire attention lorsqu'on calcule un angle avec une calculatrice ou avec un programme informatique. Souvent ces outils utilisent la fonction trigonométrique inverse $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ qui ne tient pas compte correctement des signes de a et b, car elle utilise le rapport b/a, qui une fois calculé perd l'information sur les signes respectifs de a et de b. P. ex. cette fonction donnera le même angle pour les nombres complexes $-2-3j$ et $2+3j$, car $\tan^{-1}(-3/-2) = \tan^{-1}(3/2) = 56.3°$, alors que l'angle correct dans le premier cas est 236.3°. Il faut donc porter attention à calculer correctement un angle en identifiant d'abord dans quel quadrant le nombre se trouve. Pour ce faire, il est fortement recommandé de dessiner le point dans le plan complexe correspondant au nombre complexe avant de calculer l'angle. C'est ce qui a été fait à l'exemple précédent.

Exercice de lecture 1.16. Écrire sous forme polaire le nombre complexe suivant : $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j$.

1.5.2 Conjugué et inverse multiplicatif d'un nombre complexe

En notation polaire, le conjugué de z devient

$$z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta).$$

Or, en utilisant que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, on peut alors réécrire le conjugué comme

$$z^* = r\left(\cos(-\theta) + j\sin(-\theta)\right) = r\angle -\theta. \tag{1.35}$$

Ainsi, pour obtenir le conjugué complexe, on garde le même module, mais on prend l'inverse additif de son angle $(-\theta)$.

Pour ce qui est de l'inverse multiplicatif z^{-1}, d'un nombre complexe z, on a l'éq. (1.29) qui devient sous forme polaire

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\theta) + j\sin(-\theta)\right) = r^{-1}\angle -\theta. \tag{1.36}$$

Ainsi, pour obtenir l'inverse multiplicatif, on prend l'inverse multiplicatif de son module et l'inverse additif de son angle.

Exercice de lecture 1.17. Faire la petite démonstration pour arriver à l'équation précédente.

1.5.3 Multiplication et puissances sous forme polaire ; formule de de Moivre

On va maintenant voir comment on peut multiplier deux nombres complexes en utilisant leurs représentations polaires. Soit $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ et $w = s(\cos\phi + j\sin\phi)$, alors

$$\begin{aligned} z\cdot w &= r\,s\,(\cos\theta + j\sin\theta)\cdot(\cos\phi + j\sin\phi) \\ &= r\,s\left((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + j(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\right). \end{aligned}$$

En utilisant les formules bien connues de trigonométrie pour le cosinus et le sinus de la somme d'angles, soit

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\phi) &= \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi, \\ \sin(\theta+\phi) &= \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi, \end{aligned}$$

on arrive alors à

$$z\cdot w = r\,s\left(\cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi)\right). \tag{1.37}$$

Il s'agit là d'un résultat remarquable : *pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie leurs modules et on additionne leurs angles (arguments)*, ce qu'on peut résumer par

$$z\cdot w = (r\,s)\angle\left(\theta+\phi\right). \tag{1.38}$$

Ceci donne une *interprétation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes* z et w. Si p. ex. on considère que dans cette multiplication w agit sur z, alors lorsqu'on multiplie z par w, il en résulte deux effets sur z : 1) cela fait changer la longueur de z par un facteur $s = |w|$ et 2) cela fait aussi tourner z d'un angle ϕ (= $\arg(w)$). Ceci est illustré à la figure 1.5 dans le cas où $s > 1$ (un étirement de z est illustré ici; si on avait plutôt eu $s < 1$, alors la longueur de z aurait été rétrécie). Si w est de module égal à 1 ($w = \cos\phi + j\sin\phi$), alors l'effet de w lorsqu'on multiplie z par w est une rotation pure de z; il n'y a pas de changement de la longueur.

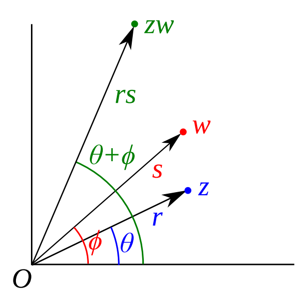

FIGURE 1.5

Un corollaire de l'équation précédente est que si on multiplie un nombre par lui-même sous forme polaire (c.à.d. on prend son carré), on obtient

$$z^2 = r^2\left(\cos(2\theta) + j\sin(2\theta)\right), \tag{1.39}$$

c.à.d. on met son module au carré et on prend le double de son angle. Si on répète la procédure et qu'on multiplie z^2 par z et ainsi de suite, on se convainct aisément que la puissance n^{e} d'un nombre complexe sera donnée par

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)\right). \tag{1.40}$$

Ce dernier résultat est la *formule de de Moivre* qui peut aussi être écrite sous la forme

$$z^n = r^n\angle n\theta. \tag{1.41}$$

Ainsi, *la puissance n^{e} d'un nombre complexe est obtenue en mettant son module à la puissance n et en multipliant son angle par un facteur n.*

Exercice de lecture 1.18. Calculer $(2+i)^{100}$.

Les développements précédents illustrent la grande beauté de la représentation polaire des nombres complexes.

1.5.4 Nombres complexes unitaires

Sous forme polaire, un nombre complexe a toujours une partie qui s'exprime comme $\cos\theta + j\sin\theta$. Cette partie correspond à un *nombre complexe unitaire*, c.à.d. un nombre complexe dont le module vaut 1 étant donné que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Inversement, tout nombre complexe u unitaire ($|u| = 1$) peut être écrit sous la forme

$$u = \cos\theta + j\sin\theta. \tag{1.42}$$

Exercice de lecture 1.19. Vérifier que le nombre complexe $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}j$ est unitaire et donner son angle dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1.5.5 Conditions pour l'égalité entre deux nombres complexes sous formes polaires

On peut utiliser la forme polaire afin d'exprimer les conditions pour que deux nombres complexes soient égaux. À prime abord, il apparaît évident en se faisant un petit dessin que deux nombres complexe sont égaux si leurs modules et leurs angles sont égaux. Il y a toutefois une subtilité concernant les angles, car pour les fonctions trigonométriques un angle est défini à un multiple de 2π près. Si on suppose que $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ et $w = s(\cos\phi + j\sin\phi)$ sont égaux. On a alors

$$r\cos\theta + jr\sin\theta = s\cos\phi + js\sin\phi. \tag{1.43}$$

En prenant les modules au carré de part et d'autre de cette équation, on obtient

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = s^2\cos^2\phi + s^2\sin^2\phi.$$

En factorisant r^2 et s^2 de part et d'autre et en utilisant que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on arrive à $r^2 = s^2$. Comme r et s sont par définition des nombres positifs, on a donc

$$r = s. \tag{1.44}$$

En revenant à l'éq. (1.43) et en utilisant que $r = s$, on a donc

$$\cos\theta + j\sin\theta = \cos\phi + j\sin\phi.$$

Or, on a vu que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et si leurs parties imaginaires sont égales, d'où

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\phi, \\ \sin\theta &= \sin\phi. \end{aligned}$$

Selon les lois de la trigonométrie, le cosinus et le sinus d'un angle sont respectivement simultanément égaux au cosinus et au sinus d'un autre angle si et seulement si ces angles sont égaux à $2k\pi$ près, où k est un nombre entier. [13] Ainsi, dans le cas présent pour les angles des nombres complexes on a

$$\theta = \phi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \ \text{(c.à.d. } k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.45}$$

En regroupant les résultats des éqs. (1.44) et (1.45), on a donc que deux nombres complexes sont égaux si leurs modules sont égaux ($r = s$) et si leurs angles diffèrent par un multiple entier de 2π ($\theta = \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$). En pratique, on travaille toujours avec des angles entre 0 et 2π et le terme supplémentaire $2k\pi$ peut sembler inutile. Or, il devient important d'un point de vue théorique pour trouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe, comme on va maintenant le voir.

1.5.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

De façon analogue aux nombres réels, z est une racine n^{e} du nombre complexe w si

$$z^n = w. \tag{1.46}$$

P. ex., on a que 1 et -1 sont les racines deuxièmes de 1 (1 a deux racines carrées, soit $\sqrt{1}$ et $-\sqrt{1}$). Un exemple un peu plus compliqué est donné par les nombres complexes 1, j, -1 et $-j$, qui sont quatre racines quatrièmes du nombre 1 étant donné que $1^4 = j^4 = (-1)^4 = (-j)^4 = 1$. On peut s'attendre en général à ce que tout nombre ait n racines n-ièmes différentes et on va arriver à ce résultat dans ce qui suit.

La question maintenant est de trouver une formule pour déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe. En écrivant z et w sous forme polaire ($z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ et $w = s(\cos\phi + j\sin\phi)$) et en utilisant la formule de de Moivre, l'équation de définition d'une racine n^{e} (éq. (1.46)) peut être écrite comme

$$r^n \left(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)\right) = s(\cos\phi + j\sin\phi). \tag{1.47}$$

[13] La démonstration de ce résultat de la trigonométrie va comme suit. Soit $\cos\theta = \cos\phi$ et $\sin\theta = \sin\phi$. En multipliant la première de ces équations par $\cos\phi$ de part et d'autre de l'égalité et de façon similaire en multipliant la seconde de ces équations par $\sin\phi$, on obtient les deux équations suivantes : $\cos\theta\cos\phi = \cos^2\phi$ et $\sin\theta\sin\phi = \sin^2\phi$. En additionnant ces deux dernières équations, on a $\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, ce qui est équivalent à $\cos(\theta - \phi) = 1$. Or, le cosinus vaut 1 seulement si l'angle est un multiple de $2k\pi$, avec k entier, d'où le résultat.

Ainsi, selon les conditions pour l'égalité de deux nombres complexes vues précédemment (éqs. (1.44) et (1.45)), on a :

$$r^n = s,$$
$$n\theta = \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Comme on cherche z, donc r et θ, on a ainsi

$$r = \sqrt[n]{s},$$
$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.$$

Ici, $\sqrt[n]{s}$ est la racine n^{e} positive de s, car r et s sont par définition des nombres réels positifs. Ainsi, comme k peut prendre plusieurs valeurs, il y a plusieurs racines n-ièmes d'un nombre complexe, données par

$$z_k = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \ k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.$$

Or, toutes les valeurs de k ne donnent pas des valeurs de z_k différentes, car les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π (p. ex. pour $k = n$ on retrouve la même valeur que pour $k = 0$, c.à.d. $z_n = z_0$; on a aussi $z_{n+1} = z_1$ et ainsi de suite). On se convainc facilement que les valeurs $k = 0, \ldots, n-1$ donnent toutes les valeurs possibles différentes des racines z_k, ce qui correspond à n valeurs différentes. On a ainsi démontré qu'il y a n racines n-ièmes d'un nombre complexe $w = s(\cos\phi + j\sin\phi)$, tel qu'attendu. Ces racines sont données par

$$z_k = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{s}\angle\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \ k = 0, \ldots, n-1. \tag{1.48}$$

On appelle *racine n^{e} principale*, la racine n^{e} correspondant à $k = 0$.

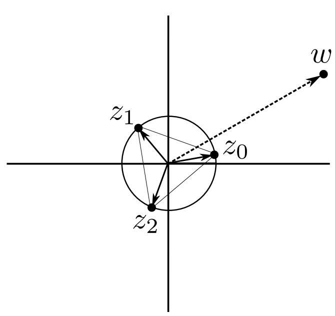

FIGURE 1.6

Exemple 1.2. Comme exemple des développements précédents, on va maintenant calculer les racines troisièmes du nombre $w = 4\sqrt{3} + 4j$.

Pour ce faire, on écrit d'abord w sous forme polaire (on travaillera avec des angles en degrés). Le module de ce nombre est $s = 8$. Ce nombre est situé dans le premier quadrant; son angle est donc simplement donné par $\phi = \arctan 1/\sqrt{3} = \pi/6$ (30°). Ainsi, ses racines 3-ièmes sont

$$z_0 = 2\angle 10^\circ,$$
$$z_1 = 2\angle(10^\circ + 120^\circ) = 2\angle 130^\circ$$
$$z_2 = 2\angle(10^\circ + 240^\circ) = 2\angle 250^\circ.$$

Il est intéressant d'illustrer ces racines dans le plan complexe. Ceci est fait à la figure 1.6 sur laquelle on montre également le nombre complexe original. On voit que les racines sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 2. En général, les racines n-ièmes d'un nombre complexe sont situées aux sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Exercice de lecture 1.20. Montrer qu'avec la formule donnée à l'éq. (1.48), les racines 4-ièmes de 1 sont bien données par 1, j, -1 et $-j$.

1.6 Forme exponentielle d'un nombre complexe

1.6.1 Formule d'Euler et exponentielle complexe

On va maintenant démontrer un des résultats les plus remarquables sur les nombres complexes (et en fait de toutes les mathématiques!), soit la relation

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \tag{1.49}$$

appelée *formule d'Euler*, en l'honneur d'Euler qui l'a découverte. Cette relation relie la fonction exponentielle aux fonctions trigonométriques, ce qui est étonnant, car dans le cadre des nombres réels ces fonctions n'ont absolument aucun lien entre elles. Cette relation est fort utile dans les développements mathématiques, car l'exponentielle est une fonction beaucoup plus facile à manipuler que les fonctions trigonométriques. L'exponentielle apparaissant dans cette relation est appelée une *exponentielle complexe*. Elle est notamment très utile en électricité pour analyser les circuits à courants alternatifs, car elle permet de représenter de façon concise des signaux alternatifs (ou oscillants) et de les manipuler efficacement. Dans ce qui suit, on va d'abord étudier quelques conséquences de la formule d'Euler pour terminer avec une démonstration de cette formule.

1.6.2 Relations basées sur la formule d'Euler

À partir de la formule d'Euler, on a les relations suivantes

$$\mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} = \cos\theta, \tag{1.50}$$

$$\mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} = \sin\theta, \tag{1.51}$$

$$|e^{j\theta}| = 1 \ \ (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1), \tag{1.52}$$

$$\left(e^{j\theta}\right)^* = e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta. \tag{1.53}$$

La dernière relation se démontre comme suit : $\left(e^{j\theta}\right)^* = (\cos\theta + j\sin\theta)^* = \cos\theta - j\sin\theta = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = e^{-j\theta}$. Cette relation est l'équivalent sous forme exponentielle de l'éq. (1.35).

La formule d'Euler permet d'écrire une exponentielle complexe en termes des fonctions cos et sin, mais on peut aussi faire l'inverse, soit écrire les fonctions cos et sin en termes d'exponentielles complexes, soit

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \tag{1.54}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}. \tag{1.55}$$

Ces expressions pour les fonctions trigonométriques sont souvent utiles en pratique.

Exercice de lecture 1.21. Démontrer les relations précédentes pour cos et sin en termes des exponentielles complexes.

1.6.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Avec la formule d'Euler, on peut écrire un nombre complexe sous forme polaire $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ comme

$$z = re^{j\theta}, \tag{1.56}$$

appelée *forme exponentielle du nombre complexe*. Dans le plan complexe, le nombre complexe $re^{j\theta}$ correspond au point illustré à la figure 1.7.

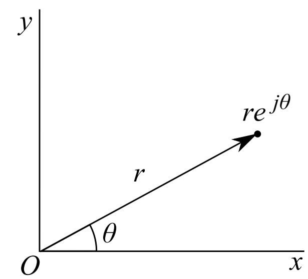

FIGURE 1.7

1.6.4 Multiplication, puissances, division et conjugaison avec la forme exponentielle

Lorsqu'on utilise la forme exponentielle pour multiplier deux nombres complexes $z = re^{j\theta}$ et $w = se^{j\phi}$ on a

$$z \cdot w = re^{j\theta} \cdot se^{j\phi} = rs\,e^{j(\theta+\phi)}. \tag{1.57}$$

Cette relation est l'équivalent de l'éq. (1.37). On voit ici plus directement pourquoi il faut additionner les angles dans un produit sur la base de la propriété de la fonction exponentielle, plutôt que sur la base de formules trigonométriques.

Avec la formule d'Euler, si on élève à la puissance n un nombre complexe, on obtient alors

$$z^n = \left(re^{j\theta}\right)^n = r^n e^{jn\theta}, \tag{1.58}$$

où on a utilisé les lois des exposants. On retrouve ainsi très simplement la formule de de Moivre (éq. (1.40)).

La division de deux nombres complexes avec la forme exponentielle est aussi très simple ; on a

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{j\theta}}{se^{j\phi}} = \frac{r}{s}e^{j(\theta-\phi)} = (r/s)\angle(\theta-\phi). \tag{1.59}$$

Pour ce qui est de la conjugaison, on a à l'aide de l'éq. (1.53)

$$z^* = (re^{j\theta})^* = re^{-j\theta}. \tag{1.60}$$

1.6.5 Relation remarquable

Si on prend $\theta = \pi$ dans la formule d'Euler, on obtient la relation

$$e^{j\pi} = -1$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$e^{j\pi} + 1 = 0. \tag{1.61}$$

On a ici une équation qui lie cinq des nombres les plus importants des mathématiques! Il s'agit de e qui est la base des logarithmes naturels, le nombre imaginaire j, π qui est central en trigonométrie, 1 qui est l'élément neutre pour la multiplication des nombres et 0 qui est le neutre pour l'addition des nombres. Ces nombres n'ont à priori aucun lien entre eux dans le cadre des nombres réels, mais les nombres complexes permettent de les relier. [14]

Exercice de lecture 1.22. Faires le détail du développement pour arriver à l'éq. (1.61) à partir de la formule d'Euler.

Exercice de lecture 1.23. Montrer que $e^{j2\pi} = 1$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ et $e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$. Il s'agit là d'autres valeurs (avec $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$) qu'il est bon de se rappeler, car on les rencontre souvent.

1.6.6 Exponentielle d'un nombre complexe

Dans la formule d'Euler, le nombre qui apparaît en exposant est un nombre imaginaire pur ($j\theta$). On peut aussi considérer une exponentielle avec un nombre complexe complet $z = a + jb$; son exponentielle est alors

$$e^z = e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^a(\cos b + j\sin b), \tag{1.62}$$

où on a utilisé la propriété de l'exponentielle d'une somme qui devient un produit d'exponentielles ainsi que la formule d'Euler. C'est la formule donnée à l'éq. (1.62) qu'on utilise en pratique lorsqu'on désire calculer l'exponentielle d'un nombre complexe particulier, c.à.d. dans ce cas on utilise les fonctions trigonométriques pour évaluer l'exponentielle du nombre complexe. À noter que dans cette formule, b est un nombre réel en radians.

Exercice de lecture 1.24. Calculer les exponentielles de $z = 1 + j$ et de $w = -2 + j\frac{\pi}{2}$.

Le fait que l'exponentielle d'une somme est le produit d'exponentielles est aussi valide pour les nombres complexes; on l'admettra ici sans démonstration. On a donc

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w. \tag{1.63}$$

En fait toutes les propriétés de l'exponentielle valides pour les nombres réels le sont aussi pour les nombres complexes.

[14]Cette formule n'est pas vraiment utile en pratique, mais elle est sommes toutes remarquable en liant ainsi ces constantes fondamentales des mathématiques.

1.6.7 Interprétation géométrique du produit par une exponentielle complexe

Lorsqu'on multiplie un nombre complexe $z = re^{j\theta}$ par l'exponentielle $e^{j\phi}$, on obtient

$$z \cdot e^{j\phi} = re^{j\theta} \cdot e^{j\phi} = re^{j(\theta+\phi)}. \tag{1.64}$$

On voit donc que l'effet de multiplier un nombre complexe par $e^{j\phi}$ donne un nouveau nombre de même module (longueur), mais dont l'angle est augmenté de ϕ. On a ainsi fait tourner z d'un angle ϕ. On peut donc ainsi assimiler $e^{j\phi}$ à une rotation par un angle ϕ (figure 1.8). Ceci est une façon différente de redire ce qui a été dit à la section 1.5.3 sur la multiplication sous forme polaire (voir en particulier la figure 1.5).

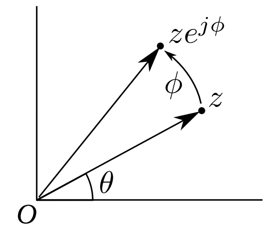

FIGURE 1.8

1.6.8 Démonstration de la formule d'Euler

On termine maintenant cette section en démontrant la formule d'Euler. On rappelle tout d'abord les développements en séries de MacLaurin des fonctions exponentielle, cosinus et sinus.[15] On supposera ces séries aussi valides pour les nombres complexes. [16] On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \tag{1.65}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \tag{1.66}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \tag{1.67}$$

On utilisera aussi les résultats suivants pour les puissances successives de j : $j^0 = 1$, $j^1 = j$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j, \dots$ Il y a donc une périodicité dans les puissances successives de j.

Maintenant, si utilise l'éq. (1.65) avec $x = j\theta$, on a

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + j\theta + j^2\frac{\theta^2}{2!} + j^3\frac{\theta^3}{3!} + j^4\frac{\theta^4}{4!} + j^5\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right), \end{aligned} \tag{1.68}$$

où pour la dernière étape on a regroupé les parties réelles et imaginaires. On voit ainsi apparaître comme partie réelle la série du cosinus (éq. (1.66)) avec $x = \theta$ et comme partie imaginaire la série du sinus (éq. (1.67)) avec $x = \theta$. On a ainsi démontré que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta.$$

[15]Au besoin, revoir le chapitre portant sur les séries de MacLaurin et de Taylor dans les notes de cours de Yves Bérubé-Lauzière sur le calcul différentiel et intégral.

[16]Ceci nécessiterait une démonstration qu'on ne fera pas ici.

1.7 Applications des nombres complexes

1.7.1 Zéros des polynômes

On rappelle qu'un polynôme en la variable x (ou simplement polynôme en x) est une expression algébrique de la forme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1.69}$$

où $a_n, \ldots, a_0$ sont appelés les *coefficients du polynôme* et où n est l'indice de la puissance de x la plus élevée et est appelé le *degré du polynôme*.

Un *zéro* d'un polynôme $p(x)$ est toute valeur de x qui annule le polynôme, c.à.d. pour laquelle $p(x) = 0$. Un zéro est donc une racine de l'équation $p(x) = 0$. [17]

Le *théorème fondamental de l'algèbre* stipule que : Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet exactement n zéros complexes. Le nombre de zéros auquel on réfère ici doit, s'il y a lieu, tenir compte des multiplicités des zéros. La *multiplicité d'un zéro* est le nombre de facteurs qui lui correspondent lorsqu'on factorise le polynôme. P. ex. le polynôme de degré 3 $p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$ se factorise comme $p(x) = (x-4)(x-4)(x+1) = (x-4)^2(x+1)$ et 4 est ici un zéro de multiplicité 2. Un zéro de multiplicité plus grande que 1 est appelé un *zéro multiple*.

On ne fera pas ici la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (qui a pour la première fois été démontré par Gauss), car elle dépasse le cadre du présent ouvrage. On peut toutefois se convaincre de sa plausibilité. Notamment, on sait que tout polynôme du second degré possède deux zéros, la formule pour ces zéros étant bien connue. Les mathématiciens italiens de la Renaissance ont aussi trouvé une formule donnant les trois zéros de tout polynôme du 3$^{\text{e}}$ degré. [18] On a aussi démontré précédemment qu'un nombre complexe w admet n racines n-ièmes, ce qui est équivalent à ce que $z^n - w = 0$ admette n solutions (racines), ce qui est la même chose que dire que le polynôme particulier $p(z) = z^n - w$ admet n zéros.

Le théorème fondamental de l'algèbre n'est pas qu'un résultat d'intérêt académique. Il est sous-jacent à des résultats importants en mathématiques, sciences et ingénierie, notamment dans la théorie de la commande des systèmes dynamiques (aussi appelée théorie des asservissements) qui a de nombreuses applications. C'est cette théorie qui est p. ex. à la base des régulateurs de vitesse dans les automobiles et des pilotes automatiques dans les avions. De nombreux polynômes apparaissent dans cette théorie par l'entremise d'un outil appelé la transformée de Laplace qu'on ne discutera pas ici. Cette théorie montre qu'un système commandé est stable lorsque tous les zéros d'un certain polynôme à coefficients réels se situent dans le demi-plan complexe de gauche (région du plan complexe où la partie réelle

[17] Il y a une distinction subtile entre les notions de zéro et de racine ; les zéros font référence aux fonctions, un zéro étant une valeur de l'argument de la fonction qui fait que la fonction prend une valeur nulle, alors que les racines font référence aux équations. P. ex., 5 est une racine de l'équation $x^2 - 25 = 0$ et donc un zéro du polynôme (ou de la fonction polynomiale) $p(x) = x^2 - 25$. Formellement, zéro et racine ne sont donc pas exactement des synonymes. Malgré cela, on les utilise souvent comme des synonymes.

[18] Incidemment, c'est cette formule pour les zéros des polynômes du 3$^{\text{e}}$ degré, qui contient des nombres complexes même dans le cas où le résultat de cette formule mène à des zéros réels, qui a mené à l'acceptation des nombres complexes. Ce n'est pas la formule pour les zéros des polynômes du second degré dans le cas où le discriminant est négatif qui a convaincu les mathématiciens de l'époque que les nombres complexes avaient leur place dans les mathématiques, au même titre que les nombres réels.

des nombres complexes est négative). Sans le théorème fondamental de l'algèbre qui est un énoncé sur l'existence des zéros d'un polynôme et leur nombre exact, cette théorie n'aurait pas d'assises solides. P. ex., dans le cas du régulateur de vitesse de votre automobile, il permet que celui-ci soit conçu de façon telle qu'il ne s'emballe pas et donc qu'il soit sécuritaire.

Dans la majorité des cas considérés en ingénierie, les polynômes qu'on rencontre sont des *polynômes à coefficients réels* (c.à.d. que les coefficients $a_n, \ldots, a_0$ sont des nombres réels). Dans ce cas, les zéros sont soit des nombres réels ou des nombres complexes. On montre que si un zéro est complexe, alors son conjugué est aussi un zéro. L'argument est relativement simple et va comme suit. Soit z un zéro complexe du polynôme $p(x)$ à coefficients réels. Il satisfait donc

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = 0.$$

En prenant le conjugué complexe de cette équation et comme le conjugué complexe d'un nombre réel est égal à ce nombre (les coefficients sont ici réels; on utilise aussi que le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, de même pour un produit), on a alors

$$a_n (z^*)^n + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + \ldots a_1 z^* + a_0 = 0.$$

Ainsi, z^* est aussi un zéro du polynôme.

On a donc bien que si un zéro est complexe, alors son conjugué complexe est aussi un zéro. Dit autrement, *les zéros complexes viennent par paires de nombres complexes conjugués pour les polynômes à coefficients réels.*

1.7.2 Retrouver des identités trigonométriques à l'aide de l'exponentielle complexe

Comme application de nature plus mathématique des nombres complexes, on va maintenant donner un exemple de comment on peut retrouver des identités trigonométriques en partant de l'exponentielle complexe, et ce de façon purement algébrique. Si on considère $e^{j(\theta+\phi)}$. On a alors d'une part directement que

$$e^{j(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi). \tag{1.70}$$

D'autre part, si on écrit $e^{j(\theta+\phi)}$ comme $e^{j\theta} \cdot e^{j\phi}$, on a alors

$$\begin{aligned} e^{j\theta} \cdot e^{j\phi} &= (\cos\theta + j\sin\theta) \cdot (\cos\phi + j\sin\phi) \\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + j(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \end{aligned} \tag{1.71}$$

En comparant les résultats des éqs. (1.70) et (1.71), on retrouve les formules pour le cosinus et le sinus de la somme d'angles, soit

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi, \tag{1.72}$$

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi. \tag{1.73}$$

On constatera que les calculs précédents pour arriver aux formules sont purement algébriques, et ils sont très simples, alors que démontrer ces résultats de façon trigonométrique nécessite un argument géométrique et un peu plus de travail algébrique.

Il arrive souvent qu'on ait besoin d'écrire un produit de fonctions sinusoïdales comme une somme ou différence de fonctions sinusoïdales. On rencontre cette situation notamment en traitement des signaux dont on parlera un peu plus bas, en modulation de signaux et en analyse de Fourier.[19] Comme exemple, soit le produit de deux sinus suivant :

$$\sin\theta\sin\phi.$$

On peut alors utiliser les identités trigonométriques pour le cosinus de la somme et de la différence d'angles, soit la formule donnée à l'éq. (1.72) et son équivalent pour la différence, qu'on reprend ici :

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi) &= \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi,\\ \cos(\theta-\phi) &= \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi.\end{aligned}$$

On voit que si on soustrait la première de ces équations de la seconde, on obtient

$$\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi) = 2\sin\theta\sin\phi,$$

et donc

$$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)\right], \tag{1.74}$$

On voit qu'on a ainsi exprimé le produit de deux sinus comme la différence de fonctions cosinus, tel qu'on le désirait. On peut retrouver ce résultat très simplement à l'aide d'exponentielles complexes. On écrit les sinus en termes d'exponentielles complexes (éq. (1.55)) et on fait les multiplications, ainsi

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \left(\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}\right)\cdot\left(\frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}\right)\\ &= \frac{e^{j(\theta+\phi)}-e^{j(\theta-\phi)}-e^{-j(\theta-\phi)}+e^{-j(\theta+\phi)}}{-4},\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire de la façon suivante en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(\theta-\phi)}+e^{-j(\theta-\phi)}}{2}-\frac{e^{j(\theta+\phi)}+e^{-j(\theta+\phi)}}{2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)\right],\end{aligned} \tag{1.75}$$

où on a utilisé l'éq. (1.54) pour les angles $\theta-\phi$ et $\theta+\phi$. On a ainsi retrouvé l'éq. (1.74).

Exercice de lecture 1.25. Trouver une expression pour $\sin\theta\cos\phi$ comme somme (ou différence) de fonction sinusoïdales, et ce de deux façons, soit à l'aide d'identités trigonométriques et à l'aide d'exponentielles complexes.

[19] L'analyse de Fourier est un domaine des mathématiques dans lequel on étudie une fonction ou un signal représenté comme la somme de signaux oscillants. On dit alors que la fonction ou le signal est décomposé en ses composantes fréquentielles. L'analyse de Fourier est à la base de l'analyse spectrale des signaux.

1.7.3 Exponentielles tournantes et génie électrique

C'est l'ingénieur américain d'origine allemande Charles Proteus Steinmetz qui a le premier introduit et popularisé l'utilisation des nombres complexes en électricité. Il s'est aperçu que cela permettait de grandement simplifier les calculs pour les circuits à courant alternatif (CA), calculs qui étaient très fastidieux avec les fonctions trigonométriques. L'utilisation des nombres complexes s'est ensuite étendue au domaine du traitement des signaux. On utilise aussi beaucoup les nombres complexes en électromagnétisme, notamment pour décrire les ondes électromagnétiques. On ne verra évidemment pas ici tous les développements possibles avec les nombres complexes dans ces domaines, mais plutôt présenter quelques généralités communes qu'on y rencontre.

Dans ces domaines, on a souvent affaire à des quantités, qu'on appellera signaux dans ce qui suit, qui oscillent dans le temps et qu'on peut décrire par des fonctions sinusoïdales qui varient dans le temps. Ces signaux prennent la forme générale

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0). \tag{1.76}$$

Ici, A est un nombre réel positif appelé *amplitude*, ω est la *fréquence* en rad/s (la fréquence en Hz étant donnée par $f = \omega/2\pi$). La *phase complète* de la fonction varie dans le temps et est donnée par

$$\theta(t) = \omega t + \phi_0, \tag{1.77}$$

où ϕ_0 est la *phase initiale*, c.à.d. la phase à $t = 0$. [20] Noter qu'on pourrait aussi prendre un sinus au lieu d'un cosinus dans l'éq. (1.76), cela ne ferait que redéfinir la phase initiale. On choisit par convention le cosinus.

On a vu le lien qu'il y a entre les fonctions cosinus et sinus et l'exponentielle complexe via la formule d'Euler. Ceci mène à considérer une fonction exponentielle complexe de la forme

$$z(t) = Ae^{j(\omega t + \phi_0)} \tag{1.78}$$

au lieu du signal réel, car il est plus facile de manipuler une exponentielle qu'une fonction trigonométrique (c'est uniquement une question de commodité pour les calculs). Une telle fonction exponentielle complexe est appelée *représentation analytique du signal réel* donné à l'éq. (1.76), ou plus simplement *signal analytique*. L'amplitude A correspond dans ce cas au module du nombre complexe.

En utilisant la propriété d'additivité des exposants pour un produit d'exponentielles, le signal analytique peut être décomposé en une partie dite statique (c.à.d. constante) et une partie tournante dans le temps en l'écrivant sous la forme

$$z(t) = Ae^{j\phi_0}e^{j\omega t} = z_0 e^{j\omega t}, \tag{1.79}$$

où $z_0 = Ae^{j\phi_0}$ est la partie statique, aussi appelée *amplitude complexe*, et $e^{j\omega t}$ est la partie tournante (ou oscillante). Selon l'interprétation de la multiplication par une exponentielle complexe qui a été vue précédemment, cette équation montre que la partie statique subit la rotation de la partie tournante. Le signal analytique $z(t)$ est aussi appelé un *phaseur*, bien que cette appellation soit aussi utilisée dans certains ouvrages pour dénoter la partie statique (amplitude complexe) z_0 du signal analytique.

[20] Malheureusement, la phase initiale est aussi souvent simplement appelée phase, ce qui peut mener à une certaine confusion, car la phase complète est aussi parfois appelée phase, mais il est généralement clair selon le contexte de quoi on parle.

Pour retrouver le signal réel à partir du signal analytique, on n'a qu'à prendre la partie réelle de ce dernier, car

$$\mathrm{Re}\{z(t)\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega t+\phi_0)}\} = A\cos(\omega t+\phi_0) = x(t). \tag{1.80}$$

Ainsi, pour faire des calculs avec des quantités oscillantes, au lieu de travailler avec le signal réel, on fait tous les calculs avec le signal analytique, car plus simple à manipuler, et à la fin on prend la partie réelle du résultat et cela redonne la même chose que si on avait fait le calcul avec le signal réel plus difficile à manipuler. C'est de cette façon que le signal analytique est utilisé en pratique. À noter que cette façon de procéder n'est valide que lorsqu'on a à faire à des opérations qui agissent linéairement sur les signaux oscillants.[21]

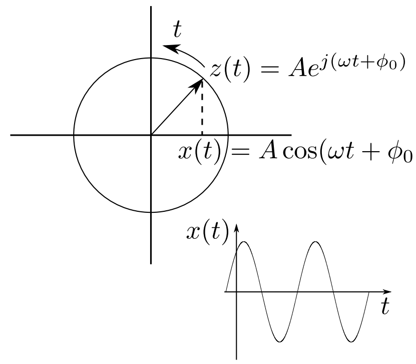

FIGURE 1.9

Le signal analytique correspond à un nombre complexe qui tourne dans le plan complexe sur un cercle de rayon A (figure 1.9). En effet, son module est constant et égal à A et son angle (phase complète) qui varie dans le temps est donné par l'éq. (1.77). Cet angle croit donc dans le temps. La projection du signal analytique sur l'axe des x (axe réel ; cette projection correspond à prendre la partie réelle du signal analytique) est le signal réel qui oscille.

Dans les cas typiques de calculs avec un signal analytique qu'on rencontre dans les applications, on a souvent à considérer sa dérivée par rapport au temps t. La dérivée d'une exponentielle complexe obéit aux mêmes règles que la dérivée d'un exponentielle réelle (on ne démontrera pas cela ici). Ainsi, la dérivée par rapport au temps du signal analytique est donnée par

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}Ae^{j(\omega t+\phi_0)} = j\omega Ae^{j(\omega t+\phi_0)} = j\omega z(t). \tag{1.81}$$

On voit ici que le signal analytique ressort multiplié par $j\omega$. Donc lorsqu'on a à calculer la dérivée d'un signal analytique, on peut simplement la remplacer par une multiplication par $j\omega$ ($d/dt \to j\omega$). C'est une des raisons pourquoi il est commode de travailler avec le signal analytique. Noter que ça ne serait pas aussi simple si on utilisait le signal réel, car la dérivée d'un cosinus donne un sinus et vice-versa (avec des signes appropriés) ; on n'a alors pas la même fonction dans le résultat.

Pour illustrer, avec le présent exemple de la dérivée, ce qui a été dit précédemment sur comment on fait les calculs avec le signal analytique en pratique, on va maintenant montrer que si on calcule la dérivée du signal analytique et qu'on prend la partie réelle à la fin, on obtient alors la même chose que si on calcule la dérivée du signal réel. La dérivée du signal analytique est donnée à l'éq. (1.81). Comme $j = e^{j\pi/2}$, on a

$$\frac{dz(t)}{dt} = e^{j\pi/2}\omega Ae^{j(\omega t+\phi_0)} = \omega Ae^{j(\omega t+\phi_0+\pi/2)} \tag{1.82}$$

[21]Une opération est dite linéaire si 1) lorsqu'appliquée à une somme d'éléments (p. ex. des signaux), cela revient à la même chose que faire la somme de cette opération sur chacun des éléments de la somme, et 2) lorsqu'appliquée à un multiple d'un élément, alors cela revient à faire le multiple de l'opération sur l'élément. En termes plus mathématiques, si $\mathcal{O}$ est l'opération et que g et h sont deux éléments et que α est un nombre, alors $\mathcal{O}$ est linéaire si les égalités suivantes sont satisfaites : $\mathcal{O}(g+h) = \mathcal{O}(g)+\mathcal{O}(h)$, c.à.d. l'opération sur une somme d'éléments est la somme de l'opération appliquée à chacun des éléments, et $\mathcal{O}(\alpha g) = \alpha\mathcal{O}(g)$.

et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\text{Re}\{\frac{dz(t)}{dt}\} = \omega A \cos(\omega t + \phi_0 + \pi/2). \tag{1.83}$$

Or, on rappelle que pour tout angle θ, $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$, ainsi le résultat précédent peut être écrit comme

$$\text{Re}\{\frac{dz(t)}{dt}\} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0). \tag{1.84}$$

Maintenant, le calcul direct de la dérivée du signal réel (éq. (1.76)) donne

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0), \tag{1.85}$$

ce qui est le même résultat qu'avec le signal analytique en prenant la partie réelle à la fin. Ceci est un exemple simple illustrant l'équivalence de travailler avec le signal analytique en prenant la partie réelle à la fin (dans le cas présent, il n'y a pas vraiment d'avantage à travailler avec le signal analytique, mais dans des situations plus compliquées, il y a un net avantage à le faire).

On a vu que pour un signal analytique, chaque dérivée est remplacée par une multiplication par $j\omega$. Dans le cas d'une dérivée n-ième, celle-ci est remplacée par une multiplication par $(j\omega)^n$.

Exercice de lecture 1.26. Montrer avec un calcul que la dérivée seconde par rapport au temps du signal analytique peut simplement être remplacée par la multiplication par $(j\omega)^2 = -\omega^2$.

Exercice de lecture 1.27. Soit $\mathscr{L}$ l'« opérateur différentiel » qui prend une fonction $g(t)$ et la transforme en la combinaison suivante des dérivées de la fonction $g(t)$ et de la fonction elle-même :

$$\mathscr{L}[g(t)] = a\frac{d^2g(t)}{dt^2} + b\frac{d^2g(t)}{dt^2} + cg(t),$$

où a, b et c sont des nombres réels constants. Calculer l'effet de cet opérateur sur le signal analytique $z(t) = Ae^{j(\omega t+\phi_0)}$. Note : Ce type d'opérateur est communément rencontré dans les équations différentielles décrivant des circuits électriques linéaires.

Tout comme on peut dériver une exponentielle complexe, on peut aussi l'intégrer. L'intégrale indéfinie (primitive) du signal analytique par rapport au temps est donnée par

$$\int z(t)dt = \int Ae^{j(\omega t+\phi_0)}dt = \frac{1}{j\omega}Ae^{j(\omega t+\phi_0)} = \frac{1}{j\omega}z(t). \tag{1.86}$$

Pour calculer une intégrale définie, on n'a qu'à évaluer la primitive entre les bornes d'intégration, comme on le fait en calcul intégral usuel avec des fonctions réelles.

Exercice de lecture 1.28. Montrer que l'intégrale du signal analytique $z(t) = Ae^{j(\omega t+\phi_0)}$ sur une période est nulle. Rappel : La période est donnée par $T = 1/f = 2\pi/\omega$, où f est la fréquence en Hertz. Indice : Pour calculer l'intégrale demandée, on peut intégrer sur l'intervalle $[0, T]$. Note : La fonction $Ae^{j(\omega t+\phi_0)}$ est une fonction périodique de période T et on peut aisément montrer que peu importe l'intervalle de longueur T choisi, le résultat de l'intégrale sera le même, d'où le fait qu'on puisse choisir $[0, T]$ comme intervalle.

Une autre situation où la forme exponentielle est utile est lorsqu'on a à considérer le produit de signaux à des fréquences différentes, comme p. ex. $\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$. Ce type de produit survient souvent notamment en théorie de la modulation de signaux et en analyse de Fourier. Il est souvent plus utile d'écrire ce produit comme une somme de signaux oscillants. Pour ce faire, on peut écrire les sinus à l'aide d'exponentielles complexes et faire un développement similaire à celui qui a mené à l'équation (1.75), ou bien utiliser directement cette équation, d'où il vient

$$\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\left[\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right) - \cos\left((\omega_1+\omega_2)t\right)\right]. \tag{1.87}$$

On voit alors que le produit de deux sinus à des fréquences différentes donne lieu à la somme de deux sinus, un à une fréquence qui correspond à la différence des fréquences (basse fréquence) et l'autre à une fréquence qui correspond à la somme des fréquences (haute fréquence). Un exemple d'application de cette dernière équation est lorsqu'on module un signal pour le transmettre via une antenne. Après la réception par une autre antenne du signal modulé, il faut alors le démoduler pour retrouver le signal original. Pour cette démodulation, on effectue les deux actions suivantes : on remodule à la fréquence de modulation le signal modulé reçu et on filtre le résultat pour ne garder que la partie à la fréquence initiale. On n'ira pas ici plus loin dans la théorie de la modulation, le but étant simplement d'illustrer l'utilité pratique des résultats obtenus.

1.8 Exercices

Exercice 1.1. Si $z^* = -z$, que peut-on dire sur le nombre complexe z ?

Exercice 1.2. Si $z^* = -jz$, que peut-on dire sur le nombre complexe z ?

Exercice 1.3. Soit $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ qu'on désire écrire comme e^w, où $w = c + jd$. Trouver c et d en termes de r et θ. Quels résultats vus dans la théorie sont utilisés dans ce développement ?

Exercice 1.4. Démontrer que $\mathrm{Re}\{zw\} \le |z||w|$. Indice : Une façon simple est d'utiliser la représentation exponentielle pour z et w et que $\cos(\theta+\phi)$ est toujours inférieur ou égal à 1.

Exercice 1.5. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour démontrer l'inégalité du triangle. Indice : Commencer par développer $|z+w|^2$; on voit alors apparaître $\mathrm{Re}\{zw^*\}$.

Exercice 1.6. Avec la formule d'Euler, exprimer sous forme exponentielle l'éq. (1.48) donnant les racines n-ièmes d'un nombre complexe $w = se^{j\phi}$

Exercice 1.7. Calculer la somme des racines n-ièmes d'un nombre $w = se^{j\phi}$. Indice : Utiliser la forme exponentielle pour calculer la somme ; il s'agit de la somme d'une suite géométrique. Rappel : Une suite géométrique est un ensemble de nombres du type $\{a^0 = 1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ (ensemble des puissances successives), où a est un nombre appelé « raison » de la suite. La somme d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante : $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Exercice 1.8. Soit $z = re^{j\theta}$, montrer que logarithme de z est donné par (rappel : $v = \ln u$ est équivalent à $u = e^v$) :

$$\ln z = \ln r + j\theta.$$

Exercice 1.9. Trouver une expression pour $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ comme somme (ou différence) de fonction sinusoïdales :

i) à l'aide d'identités trigonométriques;
ii) à l'aide d'exponentielles complexes.

Pourquoi est-ce que ça ne fonctionne pas ici de prendre les signaux analytiques correspondant à $\cos(\omega_1 t)$ et $\cos(\omega_2 t)$, de multiplier ces signaux analytiques et de prendre la partie réelle à la fin? Faire le calcul et comparer pour bien montrer que ça ne redonne pas le résultat de i) et ii).

Exercice 1.10. Les nombres complexes sont une généralisation des nombres réels. Le lecteur ne sera peut-être pas surpris d'apprendre qu'il y a des généralisations des nombres complexes. Une de ces généralisations sont les quaternions (aussi appelés nombres hypercomplexes) découverts par William Rowan Hamilton, grand scientifique irlandais ayant fait des découvertes fondamentales en mathématiques, mécanique analytique et en optique. Les quaternions sont très utilisés en robotique, en vision numérique 3D, en mécanique spatiale appliquée à l'aéronautique/aérospatiale, en infographie 3D, ... Ils permettent de traiter efficacement des rotations, notamment lorsqu'on désire les implanter sur des processeurs numériques. On n'ira pas jusque-là ici.

Un quaternion s'exprime sous la forme

$$q = r + ai + bj + ck, \tag{1.88}$$

où r, a, b et c sont des nombres réels et les quaternions de base i, j et k satisfont les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

ainsi que

$$ijk = -1.$$

Les relations pour $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ généralisent d'une certaine façon le nombre complexe pur $j^2 = -1$. Pour ce qui est de la relation $ijk = -1$, elle porte en elle en quelque sorte les rotations, car elle donne lieu à des relations qui ressemblent au produit vectoriel des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

a) Montrer à partir des relations pour i, j et k que $ij = k$, $jk = i$ et $ki = j$ (ceci est analogue aux produits vectoriels $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ et ainsi de suite).

b) Soient deux quaternions $q_1 = r_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k$ et $q_2 = r_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k$. Calculer leur produit $q_1 q_2$.

c) Le produit entre quaternions est-il commutatif? Calculer $q_2 q_1$ et comparer avec $q_1 q_2$ calculé en b).

Exercices pour le séminaire sur les nombres complexes

Exercice 1.11. Soit $z = 2-7j$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de ce nombre? Donner la réponse avec la bonne notation.

Exercice 1.12. Si $z = a+bj$ et $w = -b+aj$ et que $z+w = 3+j$. Que valent a et b?

Exercice 1.13. Dire en quoi 1 et -1 sont des racines carrées de 1.

Exercice 1.14. Soit $z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$. Calculer z^3. Que peut-on dire de z?

Exercice 1.15. Si $z = -7-17j$ et $w = 2-3j$. Calculer $z-w$.

Exercice 1.16. Soit $z = -7-17j$. Calculer son conjugué complexe. Utiliser la bonne notation pour donner votre réponse.

Exercice 1.17. Soit $z = a+bj$. Calculer $z\cdot z^*$. Écrire en mots comment on calcul le produit d'un nombre complexe et de son conjugué.

Exercice 1.18. Si $z = -25+50j$ et $w = 3-4j$. Calculer z/w.

Exercice 1.19. Soit $z = -2+3j$.

a) Tracer z dans le plan complexe ainsi que z^*.

b) Comment sont situés z et z^* l'un par rapport à l'autre?

c) Comment obtient-on géométriquement z^* par rapport à z.

d) Calculer $|z|$.

e) Calculer $\arg(z)$.

f) Représenter z sous forme polaire.

g) Calculer z^{10}. Donner le résultat sous forme rectangulaire (c.à.d. sous la forme $z = a+bj$).

h) Représenter z sous forme exponentielle.

Exercice 1.20. Soit $z = -8+-8\sqrt{3}j$. Calculer les racines quatrièmes de z.

Exercice 1.21. Représenter $z = 4e^2+3e^{-1+j}$ sous forme rectangulaire et sous forme exponentielle.

Exercice 1.22. Soit $g(t) = e^{st}$, où s est considéré comme une constante et $z(t) = e^{j2\pi ft}$, où f est une constante (si t est le temps, alors f est une fréquence).

a) Calculer dg/dt.

b) Calculer dz/dt.

c) Calculer l'intégrale indéfinie $\int z(t)dt$.

Exercice 1.23. Trouver les zéros du polynôme x^2-2x+5.

Exercice 1.24. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 2\cos\omega t,$$

dont on cherche une solution particulière. Dans ce type de problème, comme $\cos\omega t$ est la partie réelle de $e^{j\omega t}$, une méthode pour trouver une solution particulière est de plutôt considérer l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = 2e^{j\omega t}$$

et de chercher une solution particulière de cette dernière équation. Cela est plus facile, car on peut alors utiliser l'exponentielle complexe qui est facile à manipuler. Comme les dérivées par rapport à t de $e^{j\omega t}$ donnent des multiples de $e^{j\omega t}$, on pose une solution particulière de la forme

$$z(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}, \tag{1.89}$$

où A et ϕ sont des nombres réels à déterminer de façon à ce que $z(t)$ solutionne l'équation différentielle. Une fois A et ϕ trouvés, la solution de l'équation originale est $x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = A\cos(\omega t+\phi)$. Déterminer A et ϕ en fonction de ω à l'aide de cette méthode.