UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et génie informatique

ANNEXE APP6

Circuits et systèmes du 2ème ordre

Présenté à
Équipe de formateurs de la session S1

Présenté par
Raphael Bouchard – bour0703
Alexis Guérard – guea0902

Sherbrooke – 29 novembre 2022

Annexe A RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DES CIRCUITS D'ORDRE 1 ET 2

Relation $V - I$ nécessaire pour les calculs :

$$I_C = I_L = I_R = I$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int I_C(t)dt$$

$$I_L = \frac{1}{L}\int V_L(t)dt$$

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$V = RI$$

1. Mise en équation du circuit RLC d'ordre 2

Pour la charge :

- Boucle 1 :

$$V_1 = R_2(I_2 - I_1)$$

- Boucle 2 :

$$R_2(I_2 - I_1) = V_{C1} + R_1 I_2 + V_{L1}$$

Équation formée des deux boucles :

$$V_1 = V_{C1} + R_1 I_2 + V_{L1}$$

Équation différentielle :

$$V_1 = \frac{1}{C_1}\int I_c(t)dt + \frac{R_1}{L_1}\int V_{L1}(t)dt + V_{L1}$$

$$V_1 = \frac{1}{C_1}\int \frac{1}{L}\int V_{L1}(t)dt + \frac{R_1}{L_1}\int V_{L1}(t)dt + V_{L1}$$

$$V_1{}' = \frac{1}{C_1 L_1}\int V_{L1}(t)dt + \frac{R_1}{L_1}V_{L1} + V_{L1}{}'$$

$$V_1'' = \frac{1}{C_1L_1}V_{L1} + \frac{R_1}{L_1}V_{L1}' + V_{L1}''$$

$$0 = V_{L1}'' + \frac{R_1}{L_1}V_{L1}' + \frac{1}{C_1L_1}V_{L1}$$

Résolution de l'équation différentielle :

- Solution complémentaire :

  Hypothèse : $V_{L1c}(t) = k_1e^{\lambda t}$

$$0 = \lambda^2k_1e^{\lambda t} + \frac{R_1}{L_1}\lambda k_1e^{\lambda t} + \frac{1}{C_1L_1}k_1e^{\lambda t}$$

$$0 = k_1e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \frac{R_1}{L_1}\lambda + \frac{1}{C_1L_1}\right) \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow a \pm bj = -1000 \pm 8516j$$

- Formule d'Euler :

$$0 = k_1\left(e^{-1000t} \times e^{8516jt}\right) + k_2(e^{-1000t} \times e^{-8516jt})$$

$$0 = k_1\left(e^{-1000t}(\cos(t) + j\sin(t))\right) + k_2(e^{-1000t}(\cos(t) - j\sin(t)))$$

$$0 = (k_1 + k_2)(e^{-1000t}\cos(t)) + (k_1j - k_2j)(e^{-1000t}\sin(t))$$

$$V_{L1c}(t) = A_1e^{-1000t}\cos(t) + A_2e^{-1000t}\sin(t)$$

- Solution générale :

$$V_{L1}(t) = V_{L1c}(t) + V_{L1p}(t)$$

$$V_{L1}(t) = A_1e^{-1000t}\cos(8516t) + A_2e^{-1000t}sin(8516t)$$

$$Où\ A_1 = k_1 + k_2\ et\ A_2 = jk_1 - jk_2\ et\ k_2 =^* k_1$$

$$Si\ V_{L1}(0) = 12 \rightarrow 12 = A_1e^{-1000(0)}\cos\left(8516(0)\right) + A_2e^{-1000(0)}\sin\left(8516(0)\right)$$

$$12 = A_1(1)(1) + A_2(1)(0) \rightarrow A_1 = 12$$

$$\frac{dV_{L1}}{dt} = \frac{d\left(12e^{-1000(t)}\cos\left(8516(t)\right) + A_2e^{-10\quad(t)}\sin\left(8516(t)\right)\right)}{dt}$$

$$\rightarrow -102192e^{-1000t}\sin(8516t) - 12000e^{-1000t}\cos(8516t)$$

$$+8516A_2e^{-1000t}\cos(8516t) - 1000A_2e^{-1000t}\sin(8516t)$$

$$Si\frac{dV_{L1}}{dt}(0) = 0$$

$$0 = -102192e^{-1000(0)}\sin\left(8516(0)\right) - 12000e^{-1000(0)}\cos\left(8516(0)\right)$$

$$+8516A_2e^{-1000(0)}\cos\left(8516(0)\right) - 1000A_2e^{-1000(0)}\sin(8516(0))$$

$$0 = 0 - 12000 + 8516A_2 - 0 \rightarrow A_2 = 1{,}41$$

$$V_{L1}(t) = 12e^{-1000t}\cos(8516t) + 1{,}41e^{-1000}\ \sin(8516t)$$

Pour la décharge :

- Boucle :

$$0 = V_{R2} + V_C + V_L$$

Équation différentielle :

$$0 = R_2 I + \frac{1}{C_1}\int I_C(t)dt + V_{L1}$$

$$0 = \frac{R_2}{L1}\int V_{L1}(t)dt + \frac{1}{C_1}\int \frac{1}{L_1}\int V_{L1}(t)dt + V_{L1}$$

$$0 = \frac{R_2}{L_1}V_{L1} + \frac{1}{C_1 L_1}\int V_{L1}(t)dt + V'_{L1}$$

$$0 = \frac{R_2}{L_1}V'_{L1} + \frac{1}{C_1 L_1}V_{L1} + V''_{L1}$$

$$0 = V''_{L1} + \frac{R_2}{L_1}V'_{L1} + \frac{1}{C_1 L_1}V_{L1}$$

Résolution de l'équation différentielle :

- Solution complémentaire :
- Hypothèse : $V_{L1c}(t) = ke^{\lambda t}$

$$0 = \lambda^2 k_1 e^{\lambda t} + \frac{R_2}{L_1}\lambda k_1 e^{\lambda t} + \frac{1}{C_1 L_1}k_1 e^{\lambda t}$$

$$0 = \left(\lambda^2 + \frac{R_2}{L_1}\lambda + \frac{1}{CL}\right)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to \lambda_1 : 0\ \lambda_2 : -5 \times 10^6$$

$$V_{L1c}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Solution particulière : $V_{L1p}(t) = 0$
- Solution générale :

$$V_{L1}(t) = V_{L1c}(t) + V_{L1p}(t)$$

$$V_{L1}(t) = k_1 e^{(0)t} + k_2 e^{-5\times 10^6 t}$$

$$Si\ V_{L1}(0) = -12 \to\ -12 = k_1 e^{(0)(0)} + k_2 e^{-5\times 10^6 (0)}$$

$$-12 = k_1 + k_2$$

$$Si\ V_{L1}(\infty) = 0 \to 0 = k_1 e^{(0)(\infty)} + k_2 e^{-5\times 10^6 (\infty)}$$

$$0 = k_1 + 0 \rightarrow k_1 = 0$$

$$-12 = 0 + k_2$$

$$V_{L1}(t) = -12e^{-5\times10^6(t)}$$

Trouver R_3 et R_4 par rapport à l'équation différentielle obtenue de la charge du circuit RLC d'ordre 2 :

- Diviseur de tension :

$$Pour\ R_4 \rightarrow\ V_{ref} = \frac{R_5}{R_4 + R_5} \times V_{in}$$

$$0{,}45 = \frac{1k}{R_4 + 1k} \times 12$$

$$(R_4 + 1k) = 26666{,}667$$

$$R_4 = 25\ 667\ \Omega$$

$$Pour\ R_3 \rightarrow V_{ref} = \frac{R_5}{R_{eq} + R_5} \times V_{in}$$

$$R_{eq} = R_3 // R_4 = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$4 = \frac{1k}{R_{eq} + 1k} \times 12$$

$$(R_{eq} + 1k) = 3000$$

$$R_{eq} = 2k\Omega$$

$$\frac{1}{2000} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{2000} = \frac{1}{25\ 667} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_3 = 2169\ \Omega$$

2. Mise en équation des circuits d'ordre 1 C2R6/R7 $V_{R6/7}(t)$:

- Boucle :

$$V_s = V_{C2} + V_{R6/7}$$

Équation différentielle :

$$V_s = \frac{1}{C_2 R_{6/7}} \int V_{R6/7}(t)dt + V_{R6/7}$$

$$V_s' = \frac{1}{C_2 R_{6/7}} V_{R6/7} + V'_{\frac{R6}{7}}$$

$$0 = \frac{1}{C_2 R_{6/7}} V_{R6/7} + V'_{\frac{R6}{7}}$$

$$0 = V'_{R_6/R_7} + \frac{1}{C_2 R_{6/7}} V_{R6/7}$$

Résolution de l'équation différentielle

- Solution complémentaire :

  Hypothèse : $V_{R6/7c}(t) = Ae^{\lambda t}$

$$0 = A\lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{C_2 R_{6/7}} Ae^{\lambda t}$$

$$0 = Ae^{\lambda t}\left(\lambda + \frac{1}{C_2 R_{6/7}}\right) \rightarrow \lambda + \frac{1}{C_2 R_{6/7}} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{C_2 R_{6/7}}$$

$$V_{R6/7}(t) = Ae^{-\frac{1}{C_2 R_{6/7}} t}$$

- Solution particulière :

$$V_{R6/7p}(t) = 0$$

- Solution générale :

$$V_{R6/7}(t) = V_{R6/7c}(t) + V_{R6/7p}(t)$$

$$V_{R6/7}(t) = Ae^{-\frac{1}{C_2 R_{6/7}} t} + 0$$

$$V_{R6/7}(t) = Ae^{-\frac{1}{C_2 R_{6/7}} t}$$

Solution pour la charge de $C_2 R_7$ $V_{R7}(t)$:

$$Si\ V_{R7}(0) = 24 \rightarrow 24 = Ae^{-\frac{1}{C_2 R_7}(0)} \rightarrow 24 = Ae^0 \rightarrow 24 = A$$

$$Si\ V_{R7}(150 \times 10^{-6}) = 4 \rightarrow 4 = 24e^{-\frac{1}{C_2 R_7}(150 \times 10^{-6})} \rightarrow \frac{1}{6} = e^{-\frac{1}{C_2 R_7}(150 \times 10^{-6})}$$

$$\frac{1}{6} = e^{-\frac{1}{C_2 R_7}(150 \times 10^{-6})} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{C_2 R_7}(150 \times 10^{-6}) \rightarrow R_7 = \frac{1}{C_2 \ln\left(\frac{1}{6}\right)}(150 \times 10^{-6}) \rightarrow R_7 = 8372\Omega$$

Solution pour la décharge de $C_2 R_6$ $V_{R6}(t)$:

$$Si\ V_{R6}(0) = -24 \rightarrow -24 = Ae^{-\frac{1}{C_2R_6}(0)} \rightarrow\ -24 = Ae^0 \rightarrow -24 = A$$

On veut une perte de 63,7%, donc que V_{R6} soit à 36,7% de sa différence de potentiel de départ, soit -24V.

$$V_{R6} = \frac{36,3}{100} \times -24 = -8,71$$

$$Si\ V_{R6}(-8,71) = 15 \times 10^{-6} \rightarrow -8,71 = -24e^{-\frac{1}{C_2R_6}(15\times10^{-6})} \rightarrow 0,363 = e^{-\frac{1}{C_2R_6}(15\times10^{-6})}$$

$$0,363 = e^{-\frac{1}{C_2R_7}(15\times10^{-6})} \rightarrow \ln(0,363) = \frac{1}{C_2R_6}(15 \times 10^{-6}) \rightarrow R_6 = \frac{1}{C_2 \ln(0,363)}(15 \times 10^{-6})$$

$$R_6 = 1480\Omega$$

3. Mise en équation des circuits d'ordre 1 $C_3R_{10}/R_{11}\ V_{C3}(t)$:

Pour charge :

- Boucle :

$$V_s = V_{R10} + V_{C3}$$

- Équation différentielle :

$$V_S = R_{10}I + V_{C3}$$

$$V_S = R_{10}C_3V'_{C3} + V_{C3}$$

$$\frac{V_S}{R_{10}C_3} = V'_{C3} + \frac{V_{C3}}{R_{10}C_3}$$

Résolution de l'équation différentielle :

- Solution complémentaire

  Hypothèse : $V_{C3c}(t) = ke^{\lambda t}$

$$0 = \lambda k_1e^{\lambda t} + \frac{1}{R_{10}C_3}k_1e^{\lambda t}$$

$$0 = k_1e^{\lambda t}\left(\lambda + \frac{1}{R_{10}C_3}\right)$$

$$0 = \left(\lambda + \frac{1}{R_{10}C_3}\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{R_{10}C_3}$$

$$V_{C3c}(t) = k_1 e^{-\frac{t}{R_{10}C_3}}$$

- Solution particulière
  Hypothèse : k_2 car V_s est constant

$$V_{C3p}(t) = k_2$$

- Solution générale

$$V_{C3}(t) = V_{C3c}(t) + V_{C3p}(t)$$

$$V_{C3}(t) = k_1 e^{-\frac{t}{R_{10}C_3}} + k_2$$

$$Si\ V_{C3}(0) = 0$$

$$0 = k_1 e^0 + k_2$$

$$0 = k_1 + k_2$$

$$Si\ V_{C3}(\infty) = V_S = k_1 e^{-\infty} + k_2$$

$$V_S = k_2 = 12V$$

$$0 = k_1 + 12 \rightarrow k_1 = -12$$

$$V_{C3}(t) = -12e^{-\frac{t}{R_{10}C_3}} + 12$$

Trouver R_{10} :

$$1\ impulsion = 150\mu s$$

$$Donc, pour\ 5\ impulsions = 750\mu s \rightarrow t = 750\mu s$$

$$Si\ V_{C3}(750\mu s) = 5$$

$$5 = -12e^{\frac{-750x\ \ ^{-6}}{R_{10}(1\times10^{-6})}} + 12$$

$$\frac{-7}{-12} = e^{-\frac{750}{R_{10}}}$$

$$\ln\left(\frac{7}{12}\right) = -\frac{750}{R_{10}} \rightarrow R_{10} = 1391\ \Omega$$

Pour décharge :

- Boucle :

$$0 = V_{C3} + V_{R11}$$

- Équation différentielle :

$$0 = V_{C3} + R_{11}I$$

$$0 = V_{C3} + R_{11}C_3V'_{C3}$$

$$0 = V'_{C3} + \frac{V_{C3}}{R_{11}C_3}$$

Résolution de l'équation différentielle

- Solution complémentaire :

  Hypothèse : $V_{C3c}(t) = ke^{\lambda t}$

$$0 = \lambda k_1 e^{\lambda t} + \frac{1}{R_{11}C_3}k_1 e^{\lambda t}$$

$$0 = k_1 e^{\lambda t}\left(\lambda + \frac{1}{R_{11}C_3}\right)$$

$$0 = \left(\lambda + \frac{1}{R_{11}C_3}\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{R_{11}C_3}$$

$$V_{C3}(t) = k_1 e^{-\frac{t}{R_{11}C_{11}}}$$

- Solution particulière

$$V_{C3p}(t) = 0$$

- Solution générale

$$V_{C3}(t) = V_{C3c}(t) + V_{C3p}(t)$$

$$V_{C3}(t) = k_1 e^{-\frac{t}{R_{11}C_{11}}}$$

$$Si\ V_{C3}(0) = V$$

$$V = k_1 e^0 \rightarrow k_1 = V$$

- Trouver R_{11}

On veut une perte de 99,3%, donc que V_{C3} soit à 0,7% de sa différence de potentiel de départ.

$$Si\ V_{C3}(1ms) = 0{,}7\%$$

$$V(0{,}7\%) = Ve^{\frac{1\times10^{-3}}{R_{11}(1\times10^{-6})}}$$

$$\ln(0{,}7\%) = \frac{-1\times10^{-3}}{R_{11}(1\times10^{-6})}$$

$$R_{11} = 201{,}538\Omega$$