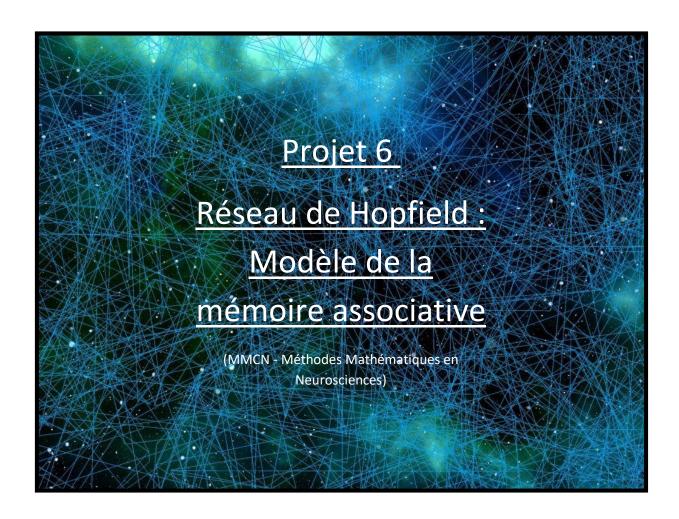


AUVERGNE Antoine LEROY Adrien LENCE Alex



Introduction

Le réseau de Hopfield est un modèle mathématique d'un réseau de neurones. Ce réseau est dit récurent en ce sens que chaque neurone est lié à tous les autres par des poids synaptiques qui en régissent les modalités d'allumage. Il permet une mémorisation d'information ainsi qu'un rappel de cette information par "association". L'apprentissage d'une information repose sur la loi de Hebb qui renforce les poids synaptiques de neurones qui partagent une forte activité. (Equation 1a et 1b)

$$\Delta w_{ij} = \eta.y_i(p).y_j(p)$$

Équation 1a. Gradient des poids Synaptiques entre deux neurones i et j

$$W_{ki} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_k^{(n)} y_i^{(n)}$$

Équation 1b. Poids du réseau dans la mémorisation de N motifs binaires

Le rappel "associatif" d'une information consiste quant à lui à récupérer l'information d'origine à partir d'un fragment de celle-ci. Si l'on appelle état du réseau l'ensemble des états des neurones qui le composent (0 ou 1), le rappel correspond à la convergence du réseau vers un état localement stable, ou bassin d'attraction à partir d'un état initial qui correspond à l'information initiale donnée au réseau. Cette convergence est permise par l'optimisation de l'Hamiltonien du système ou son « énergie », que l'on cherche minimale, la recherche d'un état stable consiste donc en une descente de gradient de cette énergie vers un minimum local (Equation 2)

$$\frac{dy_k}{dt} = -y_k + g\left(\sum_{i=1}^K Wk_i y_i\right)$$

Équation 2. Dynamique du potentiel de membrane d'un neurone k (K=nombre de neurones du réseau)

$$g(a) = \tan(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$$

Équation 3. Tangente hyperbolique

Au cours de ce projet on construira un réseau de 25 neurones et 125 synapses qui sera chargé de mémoriser jusque 6 motifs de 25 pixels (5x5), puis de s'en rappeler à partir de motifs plus ou moins bruités.

Résultats

Première Partie

Dans un premier temps nous avons essayé de faire mémoriser au réseau un seul motif. Pour cela nous avons créé une fonction *Entrainement* capable d'initialiser les poids synaptiques du réseau ainsi qu'une fonction *Rappel*, qui permet de « corriger » l'activation de chaque neurone en fonction des poids synaptique associés pour atteindre un minimum local.

Ainsi si on entraine le réseau pour un seul motif, le motif 1 (D) et que l'on bruite ce même motif à hauteur de 6 pixels (soit ¼ des pixels du motif) on obtient les résultats suivants :

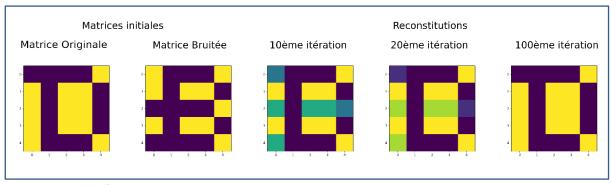


Figure 1. Rappel de l'image 1

Le réseau semble capable de reconstituer l'image originale à partir d'une image bruitée, grâce à l'entrainement hebbien des poids synaptiques.

Le rappel semble par ailleurs efficace pour l'ensemble des motifs proposés dans le projet dans le cadre de la mémorisation d'un seul motif. Si l'on constate une augmentation linéaire de l'erreur de rappel du motif en fonction du bruit de départ dans l'image qui initialise le rappel, cependant, dans la mesure où les neurones n'ont que deux états possibles, cette erreur, largement inférieure à 1 semble imputable à des erreurs d'approximation lors du rappel ou de l'apprentissage tant elle est faible. (Figure 2)

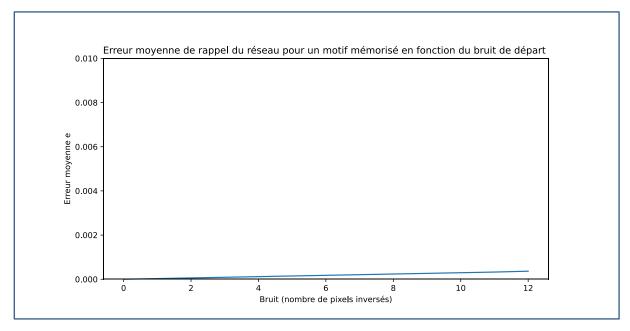


Figure 2. Erreur Moyenne de rappel du réseau pour un seul motif mémorisé. L'erreur correspond à la somme des différences entre le motif rappelé et l'original divisée par 2. La moyenne a lieu sur 100 essais avec un motif aléatoire parmi 6 motifs différents.

On peut donc en conclure que ce réseau est bien capable de mémoriser un seul motif et de se le rappeler même lorsque la moitié des pixels sont bruité.

Deuxième Partie

Dans un second temps nous avons voulu savoir si notre réseau était capable de se rappeler de plusieurs motifs. Nous avons donc repris la représentation de la première partie c'est-à-dire l'erreur moyenne en fonction du bruit, et en représentant par différente courbe le nombre de motif enregistrés lors de l'entraînement. (Figure 3)

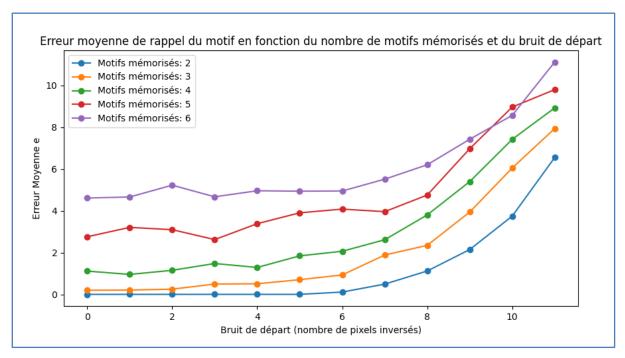


Figure 3. Erreur moyenne de rappel du réseau pour plusieurs motif mémorisés. L'erreur correspond à la somme des différences entre le motif rappelé et l'original divisée par 2. La moyenne a lieu sur 100 essais avec un motif aléatoire rappelé parmi les motifs mémorisés par le réseau.

Il apparait clairement que, de manière générale, plus le nombre motifs entrainés augmente plus l'erreur moyenne est grande à niveau de bruit constant (ex : Pour 6 motifs appris et aucun bruit l'erreur moyenne est de 5). Cependant il semble qu'avec l'augmentation du bruit, toutes les courbes convergent vers un même maximum.

Le nombre maximal de motifs sauvegardés avec un bruit de 6 (c'est-à-dire le nombre de motifs sauvegardé pour lesquels l'erreur moyenne pour un bruit de 6 est inférieur à 1 une fois le rappel effectué) est de 3.

Lors de l'étude de l'erreur de rappel en fonction du nombre de motifs mémorisé, nous avons pu constater des différences de capacité de rappel des différents motifs en fonction des motifs utilisés lors de la mémorisation, mettant en évidence une influence qualitative des motifs utilisés en plus d'un simple lien quantitatif.

Par exemple, en enlevant le 6^{ème} motif de la liste des motifs des différences significatives sont observées par rapport au groupe contrôle (tous les motifs peuvent être choisis (figure 4).

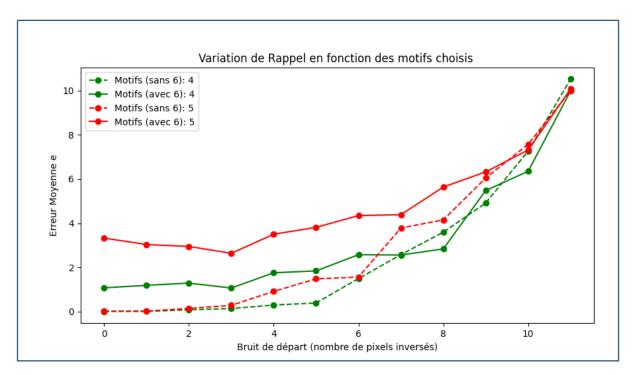
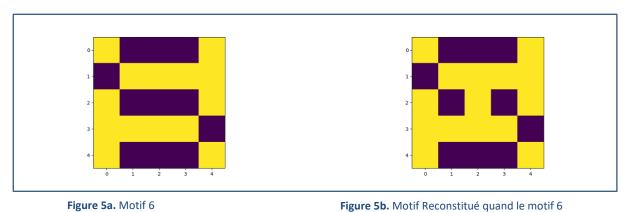


Figure 4. Influence du choix des motifs dans l'erreur moyenne de rappel du réseau. Le réseau donne des résultats similaires pour moins de 4 motifs mémorisés avec ou sans le motif 6

On voit clairement qu'avec des bruits inférieurs à 4 pixels inversés, même lorsqu'on entraine le système avec 5 motifs, le réseau reconstitue les images avec une erreur moyenne inférieure à 1. Il semble donc que le motif 6 soit capable de dérégler à lui tout seule la matrice de poids synaptique. C'est d'ailleurs ce que l'on observe lorsqu'on reconstitue les images bruitées avec des entrainements contenant le motif 6, l'image reformé est très souvent la suivante qu'importe l'image bruité donnée en entrée :



Ce réseau semble donc capable de se rappeler jusque 3 motifs efficacement avec un bruit de 6 pixels inversés.

est présent

Cependant dans le cas du rappel d'image non bruitées, la capacité de mémorisation du réseau semble liée aux motifs choisis lors de l'apprentissage. En effet, en présence du motif n°6 le réseau peut retenir jusque 3 motifs, en son absence, le réseau peut se reconstituer jusque 5 motifs.

Troisième Partie

La capacité du réseau constitue une mesure pertinente de sa qualité. Elle consiste à calculer le nombre de motifs maximum rappelé avec un bruit de 0 divisé par le nombre de neurones.

Comme indiqué précédemment, le choix des motifs est un facteur important quant à la détermination de la capacité du réseau.

On observe qu'en présence du motif 6, la capacité du réseau oscille entre 0.12 et 0.16 (en fonction du choix des motifs à mémoriser), avec une moyenne de 0.1324 ce qui correspond à la littérature sur le sujet (Hertz et al. 1991), 1324 motifs peuvent donc être mémorisés pour 10.000 neurones.

Dans le cas où le motif n°6 est retiré de la liste des motifs appris, la capacité du réseau monte jusque 0.2, doublant presque la capacité d'apprentissage du réseau ce qui indique bien un effet qualitatif majeur des motifs dans la capacité de mémorisation du réseau qui les apprend.

Partie Subsidiaire : Mémorisation des nuances de gris

Il nous a semblé intéressant d'étudier la manière dont le réseau s'échelonnait à des tâches de mémorisation plus complexes. Cette partie décrit donc la mémorisation d'images 37*37 pixels en nuances de gris. Le réseau utilisé possède 111 neurones et 12321 connections synaptiques.

Binarisation des images

Puisque les neurones du réseau ne peuvent exister qu'en deux états distincts, la première étape de cette partie consiste à décomposer les nuances de gris en compositions de noir et blanc sans perdre trop d'informations. Nous avons décidé de décomposer chaque pixel de l'image en 9 sous pixels. Le nombre de sous pixels ayant pour valeur 1 dépendra de la noirceur du pixel initial

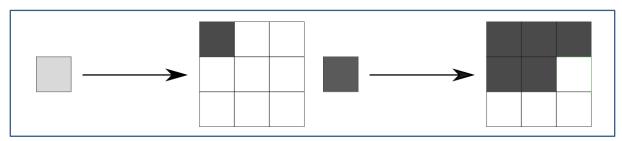


Figure 6. Encodage des nuances de gris en pixels allumés ou éteints

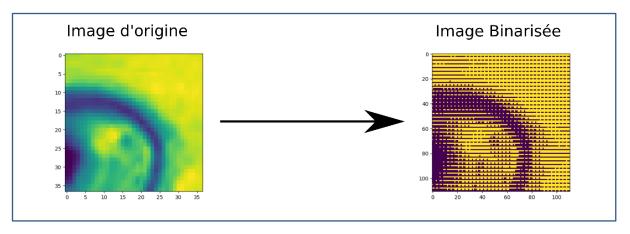


Figure 7. Motif mémorisé une fois binarisé. Taille 37x37 pixels vers 111x111 pixels. Le nombre de sous pixels à colorier en noir a été obtenu en multipliant par 9 puis en arrondissant la valeur Greyscale du pixel d'origine

Résultats Obtenus

Si pour un seul motif appris, le réseau peut reconstituer parfaitement l'image. Il lui est en revanche impossible de reconstituer une seule image si deux motifs lui ont été appris. (Figure 8)

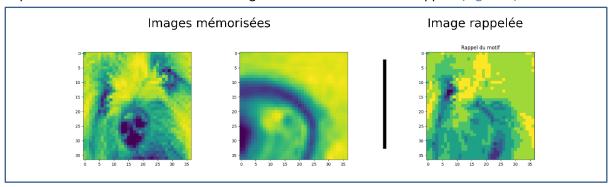


Figure 8. Mémorisation d'images de plus grande taille dans le réseau de Hopfield

Dans ces conditions, le motif rappelé correspond invariablement à l'image présentée figure 8. Cette tentative laisse à penser que la structure du réseau de Hopfield ne s'échelonne pas très bien et que plus le nombre de neurones augmente plus la chance de voir apparaître des « faux » points attracteurs augmente, rendant son utilisation en l'état impossible pour toute application réelle, selon nous.

Conclusion

L'ensemble de ces expériences met en évidence l'intérêt conceptuel du réseau de Hopfield dans la mise en place d'une mémoire associative algorithmique. Cependant ce modèle ne semble pas bien s'échelonner du fait de la présence de nombreux minimums locaux qui nuisent à la reconstitution de l'information telle qu'elle peut être mémorisée au départ. Les machines de Boltzmann semblent être une alternative bien plus robuste dans le cas d'exemples pratiques.

En un certain sens, ce modèle semble mieux correspondre à une validation du dogme scientifique, qui attribue aux réseaux récurrents in vivo la fonction de mémorisation de l'information.