Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) des Grades n hat die Form

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0$$

wobei F stetig und y eine n-fach nach x differenzierbare, unbekannte Funktion darstellt.

Lineare ODE (LODE)

Eine ODE ist linear, falls sie in Form

$$\underbrace{\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\partial^k y}{\partial x^k}}_{(*)} = b$$

mit $a_i, b \in C^0(I, \mathbb{E})$, $i \in [n]$ über ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ darstellbar ist. Gilt $b \equiv 0$, so ist die Gleichung homogen.

Die Lösungsmenge

$$\mathcal{S}_b = \{y \in C^n(I, \mathbb{E}) \mid (*) = b\}$$

hat $\dim(\mathcal{S}_b) = n$. $\mathcal{S}_0$ ist ein Vektorraum. Im inhomogenen Fall genügt das Finden einer Lösung $y_0 \in \mathcal{S}_b$. Dann ist

$$\mathcal{S}_b = \{y_0 + y \mid y \in S_0\}$$

Für beliebige $x_0 \in \mathbb{E}$, $z_0 \in \mathbb{E}^n$ existiert eine eindeutige Lösung $y_e \in \mathcal{S}_b$, so dass

$$\left(y_e(x_0), \dots \frac{\partial y_e}{\partial x}(x_0), \frac{\partial^{n-1} y_e}{\partial x^{n-1}}(x_0)\right) = z_0$$

LODE, Grad 1, homogen. Alle Lösungen von $y + a\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ haben die Form $z\exp(-A)$, wobei $z \in \mathbb{C}$, $A = \int a\,dx$. Nur $y_e(x) = z_0 \exp(A(x_0) - A(x))$ erfüllt zudem $y_e(x_0) = z_0$.

LODE, Grad 1, inhomogen. Eine Lösung y_0 von $y + a\frac{\partial y}{\partial x} = b$, die $y_0(x_0) = 0$ erfüllt, ist

$$y_0(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a(u)\,du\right) dt\right)$$

LODE Grad n, konstante Koeffizienten, homogen. Sind alle $a_i \in \mathbb{E}$, $i \in [n]$ und hat das charakteristische Polynom die Nullstellen $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \binom{\mathbb{C}}{l}$, $l \le n$, also

$$x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \prod_{j=1}^{l} (x - \alpha_j)^{m_j}$$

so ist

$$\mathcal{S}_0 = \left\{x \mapsto \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=0}^{m_j - 1} \xi_{(j,q)} \exp(\alpha_j x) x^q \;\middle|\; \xi_{(j,q-1)} \in \mathbb{C},\ q \in [m_j],\ j \in [l]\right\}$$

Im reellen Fall, also mit $a_i \in \mathbb{R}$ kommen alle komplexen Nullstellen paarweise, also in Form $\beta_i \pm \gamma_i i$ vor. Ihre beigetragenen Basisfunktionen lassen sich in der Definition von $\mathcal{S}_0$ ersetzen durch die reellen

$$\exp(\beta_i x)\cos(\gamma_i x) x^q$$

und

$$\exp(\beta_i x)\sin(\gamma_i x) x^q$$

LODE Grad 2, konstante Koeffizienten, inhomogen. Eine inhomogene Lösung $y_0 \in \mathcal{S}_b$ der Form $y_0 = z_1 f_1 + z_2 f_2$ mit Basisfunktionen $f_1, f_2 \in C^1(I, \mathbb{C})$ von $\mathcal{S}_0$ sowie Funktionen $z_1, z_2 \in C^1(I, \mathbb{C})$, welche

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

erfüllt, ist durch Variation der Konstanten

$$y_0(x) = -f_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f_2(t) b(t)}{W(t)}\,dt + f_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t) b(t)}{W(t)}\,dt,$$

$$W(t) = f_1(t) \frac{\partial f_2}{\partial t}(t) - f_2(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t)$$

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Skalarprodukt. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert $\langle x, y \rangle := x^T y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Norm. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ erfüllt $\|x\| \ge 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ sowie $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ nach Cauchy-Schwarz.

Konvergenz

Eine Folge $(x_k)_{k \ge 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert mit Grenzwert l, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \ge 1\ \forall k \ge N\ : \|x_k - y\| < \varepsilon$$

Existiert ein Grenzwert, so definiert dieser $\lim_{k \to \infty} x_k := y$.

Äquivalent gilt

$$\lim_{k \to \infty} x_k = y \iff \lim_{k \to \infty} x_{k,j} = y_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^+$$

Stetigkeit

Eine Funktion $f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ist in $x_0 \in X$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X :$$

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und stetig, falls obiges $\forall x_0 \in D$ gilt.

---

f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \ge 1}$ in X gilt, dass

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \implies \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Grenzwert einer Funktion. Eine Funktion $f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ hat den Grenzwert $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \ne x_0}} f(x) = l$ genau dann wenn

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X \setminus \{x_0\} \\ l & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig ist.

Konvexe Menge. $K \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex $\Leftrightarrow \forall x, y \in K\ \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in K$.

Beschränkte Menge. $X \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists R \ge 0\ \forall x \in X : \|x\| \le R$

Abgeschlossene Menge. $X \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ X enthält die Grenzwerte seiner konvergenten Folgen.

Kompakte Menge. $X \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ X ist beschränkt und abgeschlossen.

Offene Menge. $X \subset \mathbb{R}^n$ is offen $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists \delta > 0 : \bigtimes_{i=1}^{n}\ ]x_i - \delta, x_i + \delta[\ \subset X$

Offen $\leftrightarrow$ Geschlossen. $X \subset \mathbb{R}^n$ ist offen $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X$ ist abgeschlossen.

Stetigkeit über Urbild. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, falls für jede abgeschlossene / offene Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ das Urbild $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in M\}$ abgeschlossen / offen ist.

Partielle Differentiation

Für $f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die partielle Ableitung nach der j-ten Variablen an der Stelle $x_0 \in X$, falls existent,

$$\partial_j f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_j) - f(x_0)}{h}$$

Existieren alle partiellen Ableitungen, fasst die $m \times n$ *Jacobi-Matrix*

$$J_f(x) := (\partial_j f_i(x))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

diese zusammen.

Gradient. Im Spezialfall $m = 1$ bezeichnet $\nabla f(x) := J_f^T(x) = (\partial_i f(x))_{1\leq i\leq n}$ den Gradienten, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Divergenz. Im Spezialfall $m = n$ bezeichnet $\operatorname{tr}(J_f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \partial_i f_i(x)$ die Divergenz, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Differential

$f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist in $x_0 \in X$ differenzierbar, falls eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$v \mapsto Av,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

existiert, so dass $\forall v \in X - x_0$:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + R(x_0, v)$$

mit $\lim\limits_{\substack{v\to 0\\ v\neq 0}} \frac{\|R(x_0,v)\|}{\|v\|} = 0.$

Das Differential an der Stelle x_0 wird als $df(x_0) := L$ bezeichnet. Es gilt

$$df(x_0) = J_f(x_0)$$

Differenzierbarkeit erkennen. Sind alle $\partial_j f_i \in C^1(X, \mathbb{R})$, $j \in [n]$, $i \in m$, so ist f differenzierbar.

Differenzierbar → Stetig. Jede in x_0 differenzierbare Funktion ist in x_0 stetig.

Kombinationen. Für differenzierbare $f, g \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, sind

i) $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
ii) für $m = 1$, $d(fg)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + df(x_0)g(x_0)$
iii) für $m = 1$, $\frac{f}{g}$ differenzierbar, falls $g(x) \neq 0\ \forall x \in X$

Verknüpfung. Für die Verknüpfung zweier differenzierbarer Funktionen $f \in Y^X$, $g \in (\mathbb{R}^p)^Y$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, erfüllt

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

Tangentialraum. Die affine Approximation einer differenzierbaren $f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist gegeben durch die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid y = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)\}$.

Richtungsableitung

Für $f \in (\mathbb{R}^m)^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Richtungsableitung an der Stelle $x_0 \in X$ in die Richtung $\sigma \in \mathbb{R}^n$, falls existent,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x_0 + t\sigma) - f(x_0)}{t}$$

Existiert df, so ist obiger Ausdruck äquivalent zu $df(x_0) \cdot \sigma$.

Der Gradient als Maximalmass. Ist $m = 1$, so hat f maximalen Zuwachs in die Richtung $\nabla f(x_0)$.

Höhere Ableitungen

Ist $f \in C^k(X, \mathbb{R}^n)$, $X \subset R^n$, so hängt eine partielle Ableitung k-ter Ordnung nicht von der Reihenfolge der Einzelableitungen ab. Der ∂-Operator kommutiert.

Für $f \in C^2(X, \mathbb{R})$ fasst die symmetrische $n \times n$ *Hesse-Matrix* alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung zusammen:

$$H_f(x) := (\partial_i\partial_j f(x))_{1\leq i,j\leq n}$$

Multiindex. Zur vereinfachten Notation definiere für MI $m = (m_1, \ldots, m_n)$

i) $m! := \prod_{i=1}^{n}(m_i!)$
ii) $|m| := \sum_{i=1}^{n} m_i$
iii) $y^m := \prod_{i=1}^{n} y_i^{m_i}$ für $y \in \mathbb{E}^n$

Taylorapproximation

$f \in C^k(X, \mathbb{R})$ wird durch das Taylorpolynom der k-ten Ordnung

$$T_k f(y; x_0) := \sum_{\substack{\text{MI } m\\ |m|\leq k}} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{|m|} f}{\prod_{i=1}^{n} \partial x_i^{m_i}}(x_0) y^m$$

approximiert. Hierbei gilt

$$f(x) = T_k f(x - x_0; x_0) + E_k f(x; x_0)$$

mit $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{E_k f(x;x_0)}{\|x-x_0\|^k} = 0.$

Für $k = 1$ ist

$$T_1 f(y; x_0) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y\rangle$$

Für $k = 2$ ist

$$T_2 f(y; x_0) = T_1 f(y; x_0) + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)y, y\rangle$$

Hypercubus. Um jedes $x \in \mathbb{R}^n$ herum definiert

$$C(x, \delta) := \bigtimes_{i=1}^{n}]x_i - \delta, x_i + \delta[$$

einen Hypercubus mit Kantenlänge $2\delta > 0$.

Extremalstellen

$x_0 \in X$ ist für $f \in \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine lokale Maximalstelle / Minimalstelle, falls

$$\exists \delta > 0 : C(x_0, \delta) \subset X \wedge \forall y \in C(x_0, \delta) :$$
$$f(y) \leq f(x_0)\ /\ f(y) \geq f(x_0)$$

Kritische Punkte

$x_0 \in X$ ist für differenzierbare $f \in \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein kritischer Punkt, falls $df(x_0) = 0$ (also $\nabla f(x_0) = 0$).

Allgemein gilt: x_0 ist eine Extremalstelle von $f \Rightarrow x_0$ ist ein kritischer Punkt. Eine notwendige Bedingung für Extremalstellen ist also, dass sie kritische Punkte sind.

Nichtdegenerierte kritische Punkte. Ist x_0 ein kritischer Punkt, f zweimal differenzierbar und $\det(H_f(x_0)) \neq 0$, so ist x_0 nichtdegeneriert.

Definitheit. Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist positiv / negativ definit, falls $\forall y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$: $\langle y, Ay\rangle > 0\ /\ \langle y, Ay\rangle < 0$. Unter Einbezug von Gleichheit ergibt sich Semidefinitheit.

Ist A hermitesch, so bestimmt das Vorzeichen der Eigenwerte λ_i, $i \in [n]$, die (Semi)Definitheit.

Hauptminorenkriterium. Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ mit Hauptminoren $h_q := \det((A)_{1\leq i,j\leq q})$, $q \in [n]$, ist genau dann

i) positiv definit, falls $\forall q \in [n] : h_q > 0$.
ii) negativ definit, falls $\forall q \in [n] \setminus (2 \cdot \mathbb{N}^+) : h_q < 0$ und $\forall q \in [n] \cap (2 \cdot \mathbb{N}^+) : h_q > 0$

Eigenwerte. Alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilden die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0\}$.

Hinreichende Bedingungen für Extremalstellen

Für zweimal differenzierbare $f \in \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist ein nichtdegenerierter kritischer Punkt $x_0 \in X$ eine Maximalstelle / Minimalstelle, falls $H_f(x_0)$ negativ / positiv definit ist. Ist $H_f(x_0)$ semi- oder indefinit, so ist x_0 kein lokales Extremum.

Da $H_f(x_0)$ symmetrisch ist, gilt obiges genau dann, falls alle Eigenwerte negativ / positiv sind.

Extrema im kompakten Intervall

Ziel: Finde lokale Maxima und Minima

$$f : \mathbb{R}^n \supset K \text{ kompakt} \to \mathbb{R}$$

Zerlege zunächst $K = X \uplus B$ in das offene Innere X und den Rand B.

Bestimme die kritischen Punkte von $f|_X$ und gegebenenfalls ihren Typ mittels H_f.

Bestimme die lokalen Extremalstellen von $f|_B$. Für $n = 2$ kann B durch parametrisierte Kurven konstruiert und das Problem auf den eindimensionalen Fall reduziert werden.

Vergleiche die Funktionswerte an allen Stellen und fasse zusammen.

Extrema mit Nebenbedingungen

Ziel: Maximiere oder minimiere

$$f : \mathbb{R}^n \supset Y \to \mathbb{R}$$

wobei $Y = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ und $f, g \in C^1(X, \mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beachte folgendes, um potentielle Extremalstellen zu finden:

Nebenbedingungen $\leftrightarrow$ Gradient

Falls $x_0 \in Y$ eine lokale Extremalstelle von $f|_Y$ ist, gilt entweder $\nabla g(x_0) = 0$ oder $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Parametrisierte Kurve. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, für welche $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ existieren, so dass $\forall i \in [k] : \gamma|_{]t_{i-1}, t_i[} \in C^1(]t_{i-1}, t_i[, \mathbb{R}^n)$ gilt, parametrisiert eine Kurve in $\mathbb{R}^n$.

Kurvenintegral

Für stetige $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$, ist das Kurvenintegral entlang einer parametrisierten Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma([a, b]) \subset X$ definiert als

$$\int_\gamma f(s)\, ds := \int_a^b \langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle\, dt$$

Physikalischer Zusammenhang. Die verrichtete Arbeit durch Bewegen eines Massepunktes entlang der durch γ parametrisierten Kurve im Kraftfeld f entspricht dem Kurvenintegral.

Reparametrisierung. Wird eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ durch eine streng monoton wachsende, auf $]c, d[$ differenzierbare, stetige Funktion $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ zu $\gamma \circ \varphi$ reparametrisiert, so ist

$$\int_\gamma f(s)\, ds = \int_{\gamma \circ \varphi} f(s)\, ds$$

Konkatenation. Für parametrisierte Kurven $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ist

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(s)\, ds = \int_{\gamma_1} f(s)\, ds + \int_{\gamma_2} f(s)\, ds$$

Potential. Existiert $g \in \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $\nabla g = f$, so bezeichnet g ein Potential von f und es gilt

$$\int_\gamma f(s)\, ds = (g \circ \gamma)(b) - (g \circ \gamma)(a)$$

Wegzusammenhängend. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ Alle Punkte in X können durch eine parametrisierte Kurve über X verbunden werden.

Konservatives Vektorfeld

Ein stetiges Vektorfeld $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$, ist konservativ, falls das Kurvenintegral ausschliesslich von den Endpunkten der Kurve abhängt.

f ist genau dann konservativ, wenn für alle parametrisierten Kurven $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(a) = \sigma(b)$

$$\int_\sigma f(s)\, ds = 0$$

gilt. Dies ist äquivalent zur Existenz eines Potentials g von f. Ist X wegzusammenhängend, so ist g bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Sternförmig. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist sternförmig $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X\ \forall x \in X\ \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x_0 + tx \in X$

Notwendige Bedingung für Konservativität. Damit f konservativ ist, muss $\forall i, j \in [n] : \partial_j f_i \equiv \partial_i f_j$ gelten. Ist X sternförmig, so ist diese Bedingung hinreichend.

Ober- und Untersummen. Für Abbildungen der Signatur $f : R \to \mathbb{R}$ über einen Hypercubus $R \subset \mathbb{R}^n$ werden Partitionen P_i, $i \in [n]$, mit Indexraum $N := \bigtimes_{i=1}^n [|P_i|]$ definiert, die R in Hypercuben I_a, $a \in N$, der Volumina $\mu(I_a)$ teilen.

Dann definieren

$$s\left(\bigtimes_{i=1}^n P_i\right) := \sum_{a \in N} \inf_{s \in I_a} (f(s)) \cdot \mu(I_a)$$

$$S\left(\bigtimes_{i=1}^n P_i\right) := \sum_{a \in N} \sup_{s \in I_a} (f(s)) \cdot \mu(I_a)$$

Unter- und Obersumme für das Riemannintegral.

Indikatorfunktionen. Für $B \subset \mathbb{R}^n$ definiert

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in B \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Riemannintegral

Ist $g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset$ Hypercubus R, beschränkt und existiert

$$\int_R \underbrace{g(s)\chi_A(s)}_{=: f(s)}\, ds$$

also Partitionen P_i, $i \in [n]$, so dass $s\left(\bigtimes_{i=1}^n P_i\right) = S\left(\bigtimes_{i=1}^n P_i\right)$, so bezeichnet dieser gemeinsame Wert

$$\int_A g(s)\, ds$$

Kombinationen. Für auf A integrierbare $f, g \in \mathbb{R}^A$ gilt

i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_A (\alpha f(s) + \beta g(s))\, ds = \alpha \int_A f(s)\, ds + \beta \int_A g(s)\, ds$ (Linearität)

ii) für $f \leq g : \int_A f(s)\, ds \leq \int_A g(s)\, ds$ (Positivität)

iii) $\left|\int_A f(s)\, ds\right| \leq \int_A |f(s)|\, ds$ (Dreiecksungleichung)

Satz von Stolz. Für über $R = [a, b] \times [c, d]$ integrierbare $f \in \mathbb{R}^R$ gilt

$$\int_R f(s)\, ds = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

falls $y \mapsto f(x, y)$ für alle $x \in [a, b]$ auf $[c, d]$ integrierbar ist.

Stetigkeit $\to$ Integrabilität. $f \in \mathbb{R}^R$, $R = [a, b] \times [c, d]$, ist stetig $\Rightarrow$ f ist auf R integrierbar.

Nullmenge. $X \subset R \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge, falls für alle $\varepsilon > 0$ Rechtecke $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$, $k \in [n]$, existieren, so dass $X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k$ und $\sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \varepsilon$.

Unstetigkeit. $f \in \mathbb{R}^R$, beschränkt, $R = [a,b] \times [c,d]$, ist auf R integrierbar, falls die Menge der Unstetigkeitspunkte von f in R eine Nullmenge ist.

Satz von Fubini

Mit stetigen $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetige $f \in \mathbb{R}^A$ über $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ integrierbar. Es gilt

$$\int_A f(s)\, ds = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Im umgekehrten Fall, also für stetige $\varphi_1, \varphi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ und $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ gilt entsprechend

$$\int_A f(s)\, ds = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Rand. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert $\partial A := \{s \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \delta > 0 : C(s,\delta) \cap A \neq \emptyset \wedge C(s,\delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$ den Rand.

Variablensubstitution

Für eine geeignete $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, mit $\phi(B) = A$ und $f \in C^0(A, \mathbb{R})$, wobei A, B kompakt, $\partial A, \partial B$ Nullmengen, $\phi|_{B \setminus N \to A}$ injektiv für Nullmengen $N \subset B$ gilt

$$\int_A f(s)\, ds = \int_B (f \circ \phi)(s)\, |\det J_\phi(s)|\, ds$$

Polarkoordinaten

Verwendet man

$$\phi : \overbrace{]0,\infty[\times]0, 2\pi[}^{\mathbb{S}:=} \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

ist wegen $\det(J_\phi) = r$ beispielsweise

$$\int_{x^2+y^2<R^2} f(s)\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R f\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} r\, dr\, d\theta$$

Sphärische Koordinaten

Verwendet man

$$\phi : \mathbb{S} \times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

ist $\det(J_\phi) = r^2 \sin(\theta)$.

Jordan-Kurve. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, die auf $]a,b]$ injektiv ist, beschreibt eine Jordan-Kurve.

Reguläres Gebiet. $A \subset \mathbb{R}^2$ ist ein reguläres Gebiet, falls

i) A offen und beschränkt ist

ii) $\partial A = \biguplus_{i=1}^k \mathrm{Im}(\gamma_i)$ für Jordan-Kurven γ_i, $i \in [k]$

Orientierung einer Basis. In $\mathbb{R}^2$ ist eine Basis (b_1, b_2) positiv orientiert, falls die Basiswechselmatrix T von (e_1, e_2) zu (b_1, b_2) $\det(T) > 0$ erfüllt.

Orientierung einer Kurve. Eine parametrisierte Jordan-Kurve γ ist bezüglich des Gebiets A positiv orientiert, falls (n, γ') eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, wobei $n \perp \gamma'$ nicht in A hinein zeigt.

"Aussen" verläuft die Kurve gegen den, "Innen" mit dem Uhrzeigersinn.

Satz von Green

Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt oder ein reguläres Gebiet mit Randkurven γ_i, $i \in [k]$, positiv orientiert, und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $A \cup \partial A \subset U \subset \mathbb{R}^2$, offen, gilt

$$\int_{\partial A} F(s)\, ds = \int_A (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)(s)\, ds$$

für $\int_{\partial A} F(s)\, ds := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F(s)\, ds$.

Diverses

Länge einer Kurve. Die Länge der Kurve $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist $\int_a^b \sqrt{1+(\theta'(t))^2}\,dt$.

Binomialsatz

$\forall x,y \in \mathbb{C}\ \forall n \geq 1:$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Binomialkoeffizient. Mit "n choose k" bezeichnet man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Differentiationsregeln. $\forall f,g \in \mathbb{R}^D$, $D \subseteq \mathbb{R}$, in x_0 differenzierbar,

i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
iii) $\left(f/g\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, falls $g(x_0) \neq 0$.

Partielle Integration. Für stetig differenzierbare $f,g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ gilt

$$\int_a^b (fg')(x)\,dx = \underbrace{\Big[(fg)(x)\Big]_a^b}_{(fg)(b)-(fg)(a)} - \int_a^b (f'g)(x)\,dx$$

Substitution. Für stetige $f \in \mathbb{R}^I$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und stetig differenzierbarer $\phi \in D^{[a,b]}$ auf $D \subseteq I$ gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ \phi)(t)\ \phi'(t)\,dt$$

Angewandt heisst dies z.B.

i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$
ii) $\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$

Die trigonometrischen Funktionen

S3.41 $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ und}$$

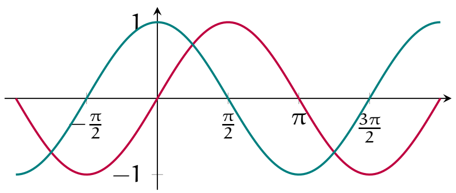
$\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

sind in $\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelten

S3.42 $\forall z,w \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

i) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$
ii) $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$
iii) $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$, $\cos(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$
iv) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$, $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
v) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$
vi) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
vii) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
viii) $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$
ix) $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
x) $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
xi) $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Nullstellen von sin
xii) $\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Nullstellen von cos



deg	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Tangens. Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ ist $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ ist $\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ definiert.

Die reelle Exponentialfunktion

S3.24 $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

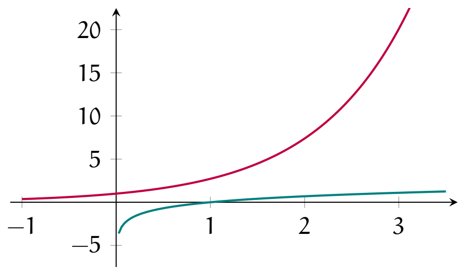
ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv (also bijektiv). Es gelten

i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
ii) $\exp(x) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
iii) $\exp(x) \geq 1 + x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
iv) $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(2i\pi) = 1$

Der natürliche Logarithmus

K3.28 Die Umkehrabbildung von exp, $\ln\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Ferner gilt

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\ \ \forall a,b \in\ ]0,\infty[$$



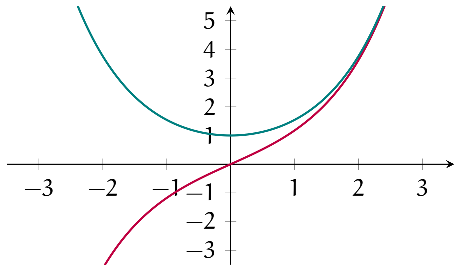
Hyperbelfunktionen

$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z \mapsto \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$

$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z \mapsto \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$



Tangens hyperbolicus. Wie auch bei den trigonometrischen Funktionen existiert

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Ansätze zum Finden einer inhomogenen Lösung bei LODEs. Abhängig von b lohnt sich oftmals Ausprobieren. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ und $A,B,C \in \mathbb{E} \cup \mathcal{P}_n$,

$b(x)$	potenzielles $y_0(x)$
$A\exp(\alpha x)$	$B\exp(\alpha x)$
$A\sin(\alpha x)$ / $A\cos(\alpha x)$	$B\sin(\alpha x) + C\cos(\alpha x)$
$A\exp(\alpha x)\sin(\beta x)$ / $A\exp(\alpha x)\cos(\beta x)$	$\exp(\alpha x)(B\sin(\beta x) + C\cos(\beta x))$

Differentiationstabelle

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx - C$
kx^{k-1} für $k \neq 0$	x^k	$\begin{cases} \frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{für } k \neq -1 \\ \ln(x) & \text{sonst } (x > 0) \end{cases}$
ke^{kx}	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$-\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x\operatorname{arctanh}(x) + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$