Reelle Zahlen

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

A1 Assoziativität. $x+(y+z) = (x+y)+z$
A2 Neutrales Element. $x + 0 = x$
A3 Inverses Element. $\exists j : x + j = 0$
A4 Kommutativität. $x + z = z + x$
M1 Assoziativität. $x(yz) = (xy)z$
M2 Neutrales Element. $x \cdot 1 = x$
M3 Inverses Element. $\forall x \neq 0\ \exists j : xj = 1$
M4 Kommutativität. $xz = zx$
D Distributivität. $x(y + z) = xy + xz$
O1 Reflexivität. $x \leq x$
O2 Transitivität. $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
O3 Antisymmetrie. $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
O4 Total. $\forall x, y : x \leq y$ oder $y \leq x$
K1 $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
K2 $\forall x, y \geq 0 : xy \geq 0$
V Ordnungsvollständigkeit. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit

i) $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$
ii) $\forall a \in A,\ \forall b \in B : a \leq b$

gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$.

K 1.6

i) Eindeutigkeit der Inversen
ii) $0x = 0$
iii) $(-1)x = -x$
iv) $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$
v) $y^2 \geq 0$
vi) $x \leq y$ und $u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$
vii) $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \Rightarrow xu \leq yv$

Archimedisches Prinzip

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$.

S1.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}$

i) $|x| \geq 0$
ii) $|xy| = |x||y|$
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$
iv) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Young'sche Ungleichung

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

S1.24 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 = x + yi$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
ii) $z_1 \overline{z_1} = x^2 + y^2 = ||z||^2$

Fundamentalsatz der Algebra

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ a_j \in \mathbb{C}$ existieren für

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

n Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

Folgen

Konvergenz. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent, falls $\exists l \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$$\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\} \text{ endlich ist.}$$

Grenzwert. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l =: \lim_{n\to\infty} a_n$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \geq 1\ \ \forall n \geq N : |a_n - l| < \varepsilon$$

S2.8 Für $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$ gelten

i) $\lim(a_n + b_n) = a + b$
ii) $\lim(a_n b_n) = ab$
iii) $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ falls $b_n, b \neq 0\ \ \forall n \geq 1$
iv) $\exists K \geq 1\ \ \forall n \geq K : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Weierstrass-Kriterium

Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend / fallend und nach oben / unten beschränkt, so konvergiert die Folge mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\} \ /$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{l(n)})_{n\geq 1}$.

Als Konsequenz definiert jede *beschränkte* Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zwei Teilfolgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ sowie $c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Hier gelten dann

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

und die Folge konvergiert genau dann wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Cauchy-Kriterium

$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \geq 1 :$$
$$\forall n, m \geq N\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Einschliessungskriterium. Besitzen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ denselben Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: \alpha$, so gilt dieser ebenfalls für $(b_n)_{n\geq 1}$, falls $a_n \leq b_n \leq c_n$ nach S2.8.iv) gegeben ist.

S2.33 In $\mathbb{R}^d$ konvergiert eine Vektorfolge genau dann gegen einen Vektorgrenzwert, wenn die einzelnen Koordinatenfolgen zu ihrer entsprechenden Grenzkoordinate konvergieren.

Reihen

Konvergenz. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst konvergent, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$

S2.40 Für konvergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ sowie $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j\right)$
ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha\, a_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Cauchy-Kriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \geq 1 :$$
$$\forall n, m \geq N\ \ \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$$

Weierstrass. Mithilfe der Reihendefinition können Sätze folgender Form gezeigt werden: S2.42 Gilt $a_n \geq 0\ \forall n \geq 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, falls $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist.

Vergleichssatz

Falls $\exists K \geq 1 : \forall k \geq K\ \ 0 \leq a_k \leq b_k$, so gelten die Zusammenhänge

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Absolute Konvergenz. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

S2.46 Die Implikation "absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz" gilt und

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

S2.52 Die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert zum selben Grenzwert.

Leibniz über alternierende Reihen

Für monoton fallende $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \geq 0 \ \ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ konvergiert die Reihe S_∞ mit

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

S_n hat zudem $\forall i \geq 1$ die Eigenschaft

$$S_{2i} \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq S_{2i-1}$$

Cauchy-Quotientenkriterium

Für $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \ \ \forall n \geq 1$ sowie

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Für $\alpha > 1$ divergiert sie.

Cauchy-Wurzelkriterium

Für $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Für $\alpha > 1$ divergieren sie und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$.

Doppelreihen. Mithilfe einer Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann eine Reihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ linear angeordnet werden zu $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$.

S2.59 Existiert $B \geq 0$, so dass $\forall m \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B$$

gilt, so konvergieren

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}, \ \ U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \ \ \forall i, j \geq 0,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_i$$

sowie jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, letztere drei mit demselbem Grenzwert.

Cauchy-Produkt

Konvergieren $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut, so konvergiert ihr Cauchy-Produkt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

S2.64 Ist $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine parametrisierte Folge mit existierenden

i) $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j) \ \ \forall j \in \mathbb{N}$
ii) $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$ so dass
 i) $|f_n(j)| \leq g(j) \ \ \forall n, j \geq 0$ gilt
 ii) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

so ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$.

Spezielle Beispiele

Folgen

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$	**K2.65** Euler-Folge mit $z \in \mathbb{C}$
$\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0$	**B2.12** mit $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	**B2.14**

Summen

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	Summe einer geometrischen Folge mit $q \neq 1$
$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd) = \frac{(2a_0+nd)(n+1)}{2}$	Summe einer arithmetischen Folge mit $a_0, d \in \mathbb{R}$
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	Summe der ersten n Zahlen

Reihen

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	geometrische Reihe mit $\lvert q\rvert < 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	harmonische Reihe, divergiert
$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$	Zeta-Funktion, konvergiert absolut für $s > 1$, divergiert für $s \leq 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$	**B2.47**, konvergiert (jedoch nicht absolut!)
$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	Exponentialfunktion, konvergiert absolut für $z \in \mathbb{C}$
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$	**K2.57** Potenzreihe, konvergiert absolut für $\lvert z\rvert < \rho$, divergiert für $\lvert z\rvert > \rho$,

wobei $\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell}, & \text{falls } \ell > 0 \end{cases}$ den Konvergenzradius mittels $\ell := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ setzt.

Stetige Funktionen

Reelle Funktionen. Der Vektorraum $\mathbb{R}^D$ enthält alle Funktionen der Signatur $f : D \to \mathbb{R}$. Addition und Multiplikation zweier $f, g \in \mathbb{R}^D$ (sowie skalar mit $\alpha \in \mathbb{R}$) sind immer möglich. $f \in \mathbb{R}^D$ ist monoton steigend / fallend, falls $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ / $f(x) \geq f(y)$ gilt.

Stetigkeit

$f \in \mathbb{R}^D$ ist *in $x_o \in D \subseteq \mathbb{R}$ stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D :$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und *stetig*, falls obiges $\forall x_0 \in D$ gilt.

S3.7 f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K3.8 Für in $x_0 \in D$ stetige $f, g \in \mathbb{R}^D$

i) sind $f + g$, $\lambda \cdot f$ und $f \cdot g$ stetig in x_0.
ii) ist $\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$.
∗) (L3.17) sind $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ stetig.

Bolzano-Zwischenwertsatz

Ist $f \in \mathbb{R}^I$ stetig über ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so gilt

$$\forall a, b \in I \ \ \forall c \text{ zwischen } f(a) \text{ und } f(b)$$
$$\exists z \text{ zwischen } a \text{ und } b : f(z) = c$$

Min-Max-Satz

Ist $f \in \mathbb{R}^I$ stetig über ein *kompaktes* Intervall $I = [a, b]$, so ist f beschränkt und es existieren $u, v \in I$, so dass

$$\forall x \in I : f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

S3.20 Für $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \to D_2 \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D_1$ sowie $g: D_2 \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$ ist $g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz über die Umkehrabbildung

S3.22 Ist $f \in \mathbb{R}^I$ auf dem Intervall I stetig und streng monoton, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1}: f(I) \to I$ ebenfalls stetig und streng monoton.

Die reelle Exponentialfunktion

S3.24 exp: $\mathbb{R} \to]0, \infty[$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv (also bijektiv). Es gelten

$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

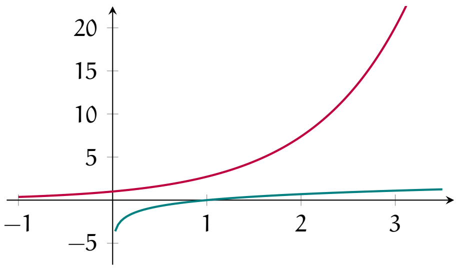
K3.25 $\exp(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ sowie $\exp(x) > 1 \ \ \forall x > 0$ gelten.

K3.27 $\exp(x) \geq 1 + x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Der natürliche Logarithmus

K3.28 Die Umkehrabbildung von exp, ln: $]0, \infty[\to \mathbb{R}$, ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Ferner gilt

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \ \ \forall a, b \in]0, \infty[$$



Reelle Exponenten. Für $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ definiert man $x^a := \exp(a \ln(x))$.

K3.29 $\forall x > 0$ ist

i) x^a für $a > 0$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.

ii) x^a für $a < 0$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.

iii) $\ln(x^a) = a \ln(x) \ \ \forall a \in \mathbb{R}$

iv) $x^a x^b = x^{a+b} \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

v) $(x^a)^b = x^{ab} \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Funktionenfolgen. Eine Abbildung der Signatur $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$ ist eine Folge einfach parametrisierter Funktionen $(f_n)_{n \geq 0}$.

Konvergenz von Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert *punktweise* gegen $f \in \mathbb{R}^D$, falls

$$\forall x \in D: \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

gilt und *gleichmässig* gegen f, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0:$$
$$\forall n \geq N \ \ \forall x \in D \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Man nennt $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig konvergent, falls sie sowohl punktweise als auch gleichmässig zur selben Funktion f konvergiert.

K3.35 $(f_n)_{n \geq 0}$ kovergiert genau dann gleichmässig in D, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0:$$
$$\forall n, m \geq N \ \ \forall x \in D \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

S3.33 Ist $(f_n)_{n \geq 0}$ stetig und konvergiert gleichmässig gegen f, so ist f ebenfalls stetig.

D3.37 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

S3.38 Ist f_n stetig $\forall n \geq 0$ und gilt $|f_n(x)| \leq c_n| \ \ \forall x \in D$ für die Summanden der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D mit stetigem Grenzwert.

S3.40 Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ konvergiert gleichmässig auf $[-r, r]$ und ist stetig auf $]-\rho, \rho[\ \ \forall 0 \leq r < \rho$.

Die trigonometrischen Funktionen

S3.41 sin: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und}$$

cos: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

sind in $\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelten

S3.42 $\forall z, w \in \mathbb{C}$

i) $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$

ii) $\sin(-z) = -\sin(z)$,
$\cos(-z) = \cos(z)$

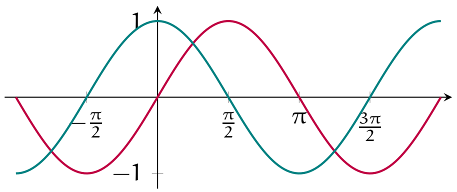
iii) $\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$,
$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$

iv) $\sin(z + w)$
$= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$,
$\cos(z + w)$
$= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

v) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

∗) (K3.43) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

∗) (K3.43) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$



S3.44 Als Kreiszahl bezeichnet man

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin(t) = 0\}$$

K3.46 Ferner sind mit $k \in \mathbb{Z}$

i) $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(2i\pi) = 1$

ii) $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$,
$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

iii) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

iv) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$,
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

v) $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Nullstellen von sin
$\sin(x) > 0 \ \ \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$
$\sin(x) < 0 \ \ \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

vi) $\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Nullstellen von cos
$\cos(x) > 0$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$
$\cos(x) < 0$
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[$

Tangens. Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ sind

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

definiert.

Grenzwerte von Funktionen

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, also gilt

$$\forall \delta > 0 \ \ (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

so bezeichnet $\lim_{x \to x_0} f(x) := A$ den Grenzwert, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:$$
$$\forall x \in (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\})$$
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

S3.52 Ist $f \in E^D$ eine Funktion mit Grenzwert $\lim_{x\to x_0} =: y_0 \in E$, $g \in \mathbb{R}^E$ eine in y_0 stetige Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Einseitige Grenzwerte. Für $f \in \mathbb{R}^D$ ist der rechts- / linksseitige Grenzwert an dem einseitigen Häufungspunkt x_0 von $D \cap]x_0, \infty[$ / $D \cap]-\infty, x_0[$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{D\cap]x_0,\infty[}(x) \;/$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{D\cap]-\infty,x_0[}(x)$$

Differenzierbare Funktionen

Ziel. Die Ableitung einer Funktion gibt ein Mass der Werteänderung einer Funktion in kleiner Umgebung um eine bestimmte Stelle.

Differenzierbarkeit einer Funktion

$f \in \mathbb{R}^D$ ist im Häufungspunkt x_0 von D differenzierbar, falls

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. Dieser ist äquivalent zum Grenzwert für $h \to 0$ mit $x = x_0 + h$.

S4.3 Genau dann existieren $c \in \mathbb{R}$ und in x_0 stetige $r \in \mathbb{R}^D$ mit $r(x_0) = 0$ sowie

$$f(x) = f(x_0) + c\cdot(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$$

wobei $c = f'(x_0)$.

S4.4 Genau dann existiert in x_0 stetige $\phi \in \mathbb{R}^D$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$$

wobei $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Vollständige Differenzierbarkeit. Ist $f \in \mathbb{R}^D$ für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f in D differenzierbar.

S4.9 $\forall f, g \in \mathbb{R}^D$ in x_0 differenzierbar,

i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
iii) $({}^f\!/_g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, falls $g(x_0) \neq 0$.

S4.11 Für in x_0 differenzierbare $f \in E^D$ und in $f(x_0)$ differenzierbare $g \in \mathbb{R}^E$ gilt

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

K4.12 Für bijektive, in x_0 differenzierbare $f \in E^D$ mit $f'(x_0) \neq 0$ sowie f^{-1} stetig in $f(x_0)$ gilt

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Extrema. $f \in \mathbb{R}^D$ besitzt ein lokales Minimum / Maximum in x_0, falls

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap D$$
$$f(x) \geq f(x_0) \;/\; f(x) \leq f(x_0)$$

S4.15 Für in x_0 im Intervall I differenzierbare $f \in \mathbb{R}^I$ $\exists\delta > 0$:

i) falls $f'(x_0) > 0$,
$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$ und
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
ii) falls $f'(x_0) < 0$,
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$ und
$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$

Ist x_0 eine lokale Extremstelle, so ist $f'(x_0) = 0$.

Zwischenwertsatz

Für stetige $f \in \mathbb{R}^I$ auf $I = [a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$
S4.16 gilt nach Rolle mit $f(a) = f(b)$

$$\exists\xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0$$

S4.17 und nach Lagrange allgemeiner

$$\exists\xi \in]a,b[: f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

K4.18 $\forall f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar gilt das Folgende:

i) Falls $f'(\xi) = 0$ $\forall\xi \in]a,b[$, ist f konstant.
ii) Falls $f'(\xi) = g'(\xi)$ $\forall\xi \in]a,b[$, $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b]$ $f(x) = g(x) + c$.
iii) Falls $f'(\xi) \geq 0$ $\forall\xi \in]a,b[$, ist f monoton wachsend.
iv) Falls $f'(\xi) > 0$ $\forall\xi \in]a,b[$, ist f strikt monoton wachsend.
v) Falls $f'(\xi) \leq 0$ $\forall\xi \in]a,b[$, ist f monoton fallend.
vi) Falls $f'(\xi) < 0$ $\forall\xi \in]a,b[$, ist f strikt monoton fallend.

Existiert $M \geq 0$ mit $|f'(\xi)| \leq M$ $\forall\xi \in]a,b[$, so ist f lipschitzstetig und $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : |f(x_1) - f(x_2) \leq M|x_1 - x_2|$.

S4.22 Für stetige $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ in $]a,b[$ differenzierbar $\exists\xi, \in]a,b[$:

$$g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a))$$

l'Hôpitals Regel

Für differenzierbare $f, g \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ mit

i) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$
ii) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ \pm\infty \end{cases}$
iii) existierendem $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

gilt für den Grenzwert

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{wobei } c \begin{cases} \in]a,b[& \text{oder} \\ = a^+ & \text{oder}. \\ = b^- \end{cases}$$

Konvexität. $f \in \mathbb{R}^I$ ist im Intervall I konvex / streng konvex, falls

$$\forall\lambda \in [0,1] \;\; \forall x, y \in I \text{ mit } x \leq / < y :$$
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq / <$$
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Dies entspricht einer Linkskurve in positiver x-Richtung.

S4.29 Differenzierbare $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

Höhere Ableitungen. Ist eine Funktion $f \in \mathbb{R}^D$ n-mal differenzierbar, so bezeichnet $f^{(n)} := f^{(n-1)\prime}$ die n-te Ableitung.
Man spricht von stetiger Differenziation, falls $f^{(n)}$ in D stetig bleibt.
f ist glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist.

S4.34 Sind $f, g \in \mathbb{R}^D$ n-mal differenzierbar, so sind

i) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
ii) $(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
∗) (S4.36) $\frac{f}{g}$ n-mal differenzierbar, falls $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$
∗) (S4.37) $(g\circ f)^{(n)}$ $= \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(g^{(k)} \circ f)$, wobei A_{nk} Polynome in $f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n+1-k)}$ sind.

S4.39 Eine Funktionenfolge mit einmal stetig differenzierbaren Gliedern $f_n \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ $\forall n \geq 0$ und gleichmässig konvergenten $(f_n)_{n\geq 0}$ und $(f'_n)_{n\geq 0}$ hat den stetig differenzierbaren Grenzwert

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$$

S4.40 Eine einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ entstammten Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

ist auf $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ differenzierbar, wobei

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

und (K4.41) allgemeiner

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \tfrac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$$

Taylor-Approximation

Für stetige $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $(n+1)$-mal differenzierbar in $]a, b[$, approximiert

$$T_n(f, x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - x_0)^k$$

den Wert von $f(x)$ um die Entwicklungsstelle $x_0 \in]a, b[$. (K4.44) Es existiert ξ zwischen x und x_0, so dass

$$\underbrace{T_n(f, x, x_0)}_{\text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{Fehlerterm}}$$
$$= f(x)$$

Taylor-Reihen. Zahlreiche glatte Funktionen können durch die Wahl $n = \infty$ exakt als Reihe dargestellt werden. Siehe beispielsweise die trigonometrischen Funktionen auf S. 3.

K4.45 Für $(n+1)$-mal stetig differenzierbare $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ mit $f^{(k)}(x_0)$ $\forall k \in [1, n]$ gilt Folgendes:

i) Falls n gerade und x_0 eine lokale Extremstelle ist, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

ii|i) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > / < 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle / Maximalstelle.

Das Riemann Integral

Partitionen. Eine endliche Teilmenge $P = \{p_0, \dots, p_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ mit $P \subsetneq [a, b]$, $p_{i-1} < p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}^+$ sowie $\{a, b\} \subseteq P$ und definiert eine Partition. Eine zweite Partition P' verfeinert P, falls $P' \subseteq P$.

Unter- und Obersumme. Für $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ sind über P die Untersumme als

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1}) \inf_{x \in [p_{i-1}, p_i]} f(x)$$

und die Obersumme als

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1}) \sup_{x \in [p_{i-1}, p_i]} f(x)$$

definiert. (L5.2) Stets ist $s(f, P) \le S(f, P)$. Für Verfeinerungen P' gilt
$s(f, P) \le s(f, P') \le S(f, P') \le S(f, P)$.

Riemann-Integrabilität

Beschränkte $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ ist Riemann integrierbar, falls

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f, P)$$

gilt. Dann definieren die obigen Terme

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

S5.4 Genau dann ist

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \in \mathcal{P}([a, b]) :$$
$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

S5.8 Orientiert an Feinheit gelten genau dann ausserdem

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 :$$
$$\forall P \in \{P \in \mathcal{P}([a, b]) \mid \max_{i \in \mathbb{N}^+} (p_i - p_{i-1}) \le \delta\}$$
$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

K5.9 und für die Riemannsche Summe mit $A := \int_a^b f(x)\,dx$

(vorherige Quantoren ...) $\forall \xi_i \in [p_{i-1}, p_i]$

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(p_i - p_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

S5.10 Für integrierbare $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und f/g (falls $|g(x)| > 0 \quad \forall x \in [a, b]$) integrierbar.

Gleichmässige Stetigkeit

$f \in \mathbb{R}^D$ ist in $D \subseteq \mathbb{R}$ gleichmässig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in D :$$
$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

S5.15 Ist f stetig auf kompaktem Intervall $D = [a, b]$, so ist f gleichmässig stetig.

S5.16&17 Für $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ gilt Folgendes:

$$f \text{ ist integrierbar} \Leftarrow \begin{cases} f \text{ ist stetig oder} \\ f \text{ ist monoton} \end{cases}$$

S5.19 Für integrierbare $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gelten

$$\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,dx$$
$$= \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx,$$

S5.20 $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b]$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ und

S5.22 die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right|$$
$$\le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}\;.$$

Cauchy-Mittelwertsatz

Für stetige $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ existiert $\xi \in [a, b]$, so dass $f(\xi)$ der Mittelwert von f ist, also

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a)$$

S5.25 Für $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, wobei f stetig, g integrierbar und $g(x) \ge 0 \;\; \forall x \in [a, b]$ sind, existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Stammfunktionen. Ist $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig, so bezeichnet $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ eine ihrer Stammfunktionen, falls F stetig differenzierbar ist und $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in [a, b]$ erfüllt.

S5.26 Die Integralfunktion

$$F_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von f.

Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Für stetige $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ gilt mit einer beliebigen Stammfunktion $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stets

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

F ist bis auf eine additive Konstante C eindeutig bestimmt.

Partielle Integration. Für stetig differenzierbare $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ gilt

$$\int_a^b (fg')(x)\,dx$$
$$= \underbrace{\Big[(fg)(x)\Big]_a^b}_{(fg)(b)-(fg)(a)} - \int_a^b (f'g)(x)\,dx$$

Substitution. Für stetige $f \in \mathbb{R}^I$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und stetig differenzierbarer $\phi \in D^{[a,b]}$ auf $D \subseteq I$ gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ \phi)(t)\,\phi'(t)\,dt$$

K5.33 Angewandt heisst dies z.B.

i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$

ii) $\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$

S5.34 Eine Funktionenfolge mit integrierbaren Gliedern $f_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ $\forall n \geq 0$ gleichmässig konvergentem $(f_n)_{n\geq 0}$ erfüllt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

K5.35 Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmässig, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

K5.36 Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ ist auf $]-\rho, \rho[$ integrierbar, wobei

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

Bernoulli-Polynome. Die Zahlen

B_0	B_1	B_2	B_n
1	$-1/2$	$1/6$	$-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$

definieren die charakteristischen Polynome

$B_0(x)$	$B_1(x)$	$B_n(x)$
1	$x - 1/2$	$\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$

wiederholt $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $\forall x \in [k, k+1[$

$$\tilde{B}_n(x) := B_n(x-k)$$

Euler-McLaurin-Summationsformel

Für k-mal stetig differenzierbare $f \in \mathbb{R}^{[0,n]}$ gilt für $k = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x)\,f'(x)\,dx$$

und für $k \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\,dx$$

Stirlingsche Formel

Eine qualitative Aussage über die Grösse der Fakultät trifft $\forall n \geq 1$

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}\,n^n}{\exp(n)} \exp\left(\frac{1}{12n} + \underbrace{R_3(n)}_{\leq \frac{\sqrt{3}}{216n^2}}\right)$$

Uneigentliche Integrale. Für $f \in \mathbb{R}^{[a,\infty[}$ auf $[a,b]$ $\forall b > a$ integrierbar und $g \in \mathbb{R}^{]a,b]}$ auf $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ integrierbar bezeichnet ein Grenzwert, falls er existiert, das uneigentliche Integral:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx =: \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

L5.51 Mit $f \in \mathbb{R}^{[a,\infty[}$ auf $[a,b]$ $\forall b > a$ und $g \in \mathbb{R}^{[a,\infty[}$ auf $[a,\infty[$

i) integrierbar, ist f auf $[a,\infty[$ integrierbar, falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ gilt.

ii) divergiert, divergiert $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\forall x \geq a$

S5.53 Ist $f \in [0,\infty[^{[1,\infty[}$ monoton fallend, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Die Gamma-Funktion

$$\Gamma\colon\ ]0,\infty[\to]0,\infty[$$
$$s \longmapsto \int_0^{\infty} \exp(-x)\,x^{s-1}\,dx$$

S3.42

i) erfüllt

a) $\Gamma(1) = 1$

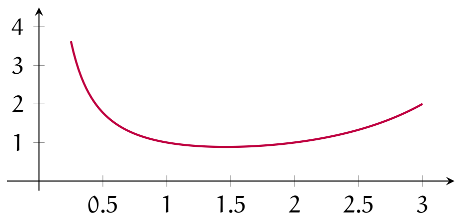
b) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ $\forall s > 0$

c) Das Kriterium für logarithmische Konvexität: $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}$ $\forall x, y > 0$ $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$

ii) ist die einzige Funktion mit gegebener Signatur, die obige drei Kriterien erfüllt.

Ferner gilt

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^s}{\sum_{i=0}^{n}(s+i)}$$



S5.62 Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt für alle stetigen $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$

$$\int_a^b |fg|(x)\,dx \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f|(x)^p\,dx}\ \sqrt[q]{\int_a^b |g|(x)^p\,dx}$$

Unbestimmte Integrale. Stetige $f \in \mathbb{R}^I$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ besitzen nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung stets eine Stammfunktion $F \in \mathbb{R}^I$. Ihr unbestimmtes Integral ist definiert durch

$$\int f(x)\,dx := F(x) + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige additive Konstante ist.

Binomialsatz

$\forall x, y \in \mathbb{C}$ $\forall n \geq 1$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

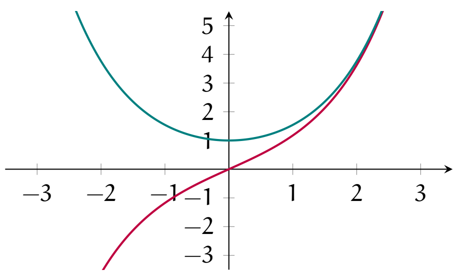
Binomialkoeffizient. Mit "n choose k" bezeichnet man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$



Tangens hyperbolicus. Wie auch bei den trigonometrischen Funktionen existiert

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Guides

Integrieren rationaler Funktionen. Eine Funktion der Form $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q elementar sind, wird in $\mathbb{R}$ folgendermassen integriert:

i) Auf den Fall $\deg(P) < \deg(Q)$ mithilfe des euklidischen Algorithmus zurückführen:

$$P(x) = \underbrace{S(x)Q(x)}_{\text{Vielfaches von } Q} + \underbrace{\tilde{P}(x)}_{\text{Restfunktion}}$$

ii) Q in Linearfaktoren zerlegen, also die Nullstellen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_m \pm i\beta_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bestimmen, und mithilfe dieser eine Partialbruchzerlegung von R durchführen:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j} \ (*) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}+B_{ij}x}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^j} \ (\star)$$

iii) Die Partialbrüche einzeln integrieren:

$$\int (*)\, dx = \begin{cases} C_{ij} \ln(x-\gamma_i) & \text{für } j = 1 \\ \frac{-C_{ij}}{(j-1)(x-\gamma_i)^{j-1}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int (\star)\, dx = \frac{A_{ij}+B_{ij}\alpha_i}{\beta_i^{2j-1}} \int \frac{1}{(t^2+1)^j}\, dt$$

Umgang mit $e^{\lambda x}$. Substituiere am besten $u := e^{\lambda x} \Rightarrow du = \lambda e^{\lambda x} dx$. Dann gilt

$$\int R(e^{\lambda x})\, dx = \int \frac{R(u)}{\lambda u}\, du$$

Umgang mit sin und cos. Wähle $u := \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du$. Dann gilt

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}\, du$$

Bei bestimmten Integralen lohnt sich oft die Einsicht, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$$

gilt. Sind beispielsweise $(a, b) = (0, \pi)$, so erlaubt die Einsicht $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ sowie $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ unter Umständen einen vereinfachten Ausdruck als Vielfaches.

Alternativen zu $\sin^2$ und $\cos^2$. Zur einfacheren Behandlung lohnt sich manchmal die Einsicht, dass

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

Gemischte Grenzwerte mit ln. Ausnutzen der Logarithmuseigenschaften erlaubt

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} -\frac{\ln(y)}{y} = 0$$

Grenzwerte von Wurzelsummen. Verwende die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, um zu einem Bruch mit wurzelfreiem Zähler zu gelangen:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{e^x + x} - \sqrt{e^x - x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x + x) - (e^x - x)}{\sqrt{e^x + x} + \sqrt{e^x - x}} = \frac{2x}{\sqrt{e^x + x} + \sqrt{e^x - x}} = 0$$

Differentiationstabelle

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx - C$
kx^{k-1} für $k \neq 0$	x^k	$\begin{cases} \frac{x^{k+1}}{k+1} & \text{für } k \neq -1 \\ \ln(x) & \text{sonst } (x > 0) \end{cases}$
ke^{kx}	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$-\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcos(x)$	$x\arcos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x\operatorname{arctanh}(x) + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$