Université de Montréal
MILA

Devoir 3

Alex Maggioni (20266243)
Canelle Wagner (20232321)

Robin Milosz

2 avril 2024

Question 1 : (2 points) Preuve que $2^n \in \Omega(4^n)$:

Par définition de Ω, on cherche c et n_0 tels que $2^n \geq c4^n$, $\forall n \geq n_0$.

$$
\begin{align}
2^n &\geq c4^n \tag{1}\\
\frac{2^n}{4^n} &\geq c \tag{2}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq c \tag{3}\\
\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq \log_{\frac{1}{2}} c \tag{4}\\
n &\geq \log_{\frac{1}{2}} c \tag{5}
\end{align}
$$

Comme $\log_{\frac{1}{2}} c$ est une constante, en prenant $c = \frac{1}{2}$, on aura $n \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$, ce qui est vrai en prenant $n_0 = 1$.

Ainsi, nous avons trouvé $c = \frac{1}{2}$ et $n_0 = 1$ tels que $2^n \geq c4^n$, $\forall n \geq n_0$.

Nous avons donc $2^n \in \Omega(4^n)$.

Bonne solution

Par définition de Ω, on cherche c et n_0 tels que $2^n \geq c4^n$, $\forall n \geq n_0$.

$$
\begin{align}
2^n &\geq c4^n \tag{1}\\
\frac{2^n}{4^n} &\geq c \tag{2}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq c \tag{3}\\
\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n &\leq \log_{\frac{1}{2}} c \tag{4}\\
n &\leq \log_{\frac{1}{2}} c \tag{5}
\end{align}
$$

Comme $\log_{\frac{1}{2}} c$ est une constante, en prenant $c = \frac{1}{2}$, on aura $n \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$, ce qui est vrai en prenant $n_0 = 1$.

Ainsi, nous avons trouvé $c = \frac{1}{2}$ et $n_0 = 1$ tels que $2^n \leq c4^n$, $\forall n \geq n_0$.

Nous avons donc $2^n \in O(4^n)$.

Les erreurs dans la solution originale

1. L'équation (4) était erronée. En effet, l'inégalité aurait dû changer de sens avec $\log_{\frac{1}{2}}(n) \in \mathbb{R}^- \ \forall n \geq 1$.
2. La conclusion est donc différente parce que si $2^n \in \Omega(4^n)$ on aurai du avoir $2^n \geq c4^n$ ce qui n'est pas le cas puisque nous avons $2^n \leq c4^n$.

Question 2 : (2 points) Preuve que $2^n \in \Omega(4^n)$:

En utilisant le critère de la limite,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} && (1)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{lg(2^n)}{lg(2^{2n})} && (2)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} && (3)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} && (4)\\
&= \frac{1}{2} && (5)
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, le critère de la limite nous permet de conclure que $2^n \in \Theta(4^n)$.

Ainsi, par définition de $\Theta(4^n)$, nous avons $2^n \in \Omega(4^n)$.

Bonne solution

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2^n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Ainsi le critère de la limite nous permet de conclure que $2^n \in O(4^n)$.

Les erreurs dans la solution originale

1. Le passage de l'équation (1) à (2) est erroné. En effet l'ordre de croissance asymptotique de 2^n n'est pas le même que pour $\lg(2^n)$ sur $\lg((2^n)^2)$.
2. La conclusion est donc différence puisque la règle de la limite nous dit que si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ alors $f(n) \in O(g(n)), g(n) \notin O(f(n))$.

Question 3 : (2 points) Voici la définition formelle de $\Omega(f(n))$:

$$\Omega(f(n)) = \{t(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^{\geq 0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) f(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

Bonne réponse

$$\Omega(f(n)) = \{t(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \forall n \geq n_0, t(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

Les erreurs dans la solution originale

1. La condition $\exists c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ devrait être $\exists c \in \mathbb{R}^{+}$ car si $c = 0$, alors le terme $c \cdot f(n) = 0$ et on ne compare plus du tout les taux de croissances asymptotiques.
2. Le terme $f(n) \geq cf(n)$ est erroné car la comparaison doit s'effectuer avec $t(n)$ sinon la condition est vérifiée par défaut.

Question 4 : (2 points) :

Preuve que $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x \geq y$ est vrai

$$\begin{aligned}(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x \geq y &\iff (1)\\ (\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) x \geq y &\iff (2)\end{aligned}$$

La dernière ligne est vraie car pour un certain y, on prend $x = y + 1 \geq y$ donc $x \geq y$.

Bonne réponse

Il est faux de prétendre l'existence d'un élément maximal dans l'ensemble des nombres naturels. En effet, pour tout nombre naturel choisi, il est toujours possible de trouver un autre nombre naturel strictement supérieur.

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre naturel x qui est plus grand ou égal à tous les nombres naturels. Pour tout y choisi, en prenant $y = x$, l'existence d'un x tel que $x \geq y$ est satisfaite. Cependant, pour $y = x$, il est clair que $x + 1$ est aussi un nombre naturel et $x + 1 > x$, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Les erreurs dans la solution originale

La solution originale commet une erreur de raisonnement en intervertissant les quantificateurs. L'énoncé correct est que pour tout y, il existe un x tel que $x > y$. La solution proposée suppose à tort qu'un seul x peut satisfaire cette inégalité pour tous les y, ce qui impliquerait faussement l'existence d'un plus grand nombre naturel.

Question 5 : (2 points)

Soit f et g deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ telles que $f(n) < g(n)$ pour tout $n \geq n_0$.
Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Bonne réponse

Soit f et g deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists c \in \mathbb{R}^{+})$ telles que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Les erreurs dans la solution originale

La règle de la limite nous dit que si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ alors $f(n) \in O(g(n)), g(n) \notin O(f(n))$.

Grand O : $f(n) \in O(g(n))$ veut dire que $f(n)$ est asymptotiquement plus petite ou égale à $g(n)$.

Pour être plus précis il manque aussi la constante c.
O(g(n)) $= t(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists c \in \mathbb{R}^{+})\forall n \geq n_0, t(n) \leq c \cdot g(n)$.

Nous pouvons aussi prendre un contre exemple pour montrer que l'affirmation est fausse. Prenons $f(n) = n$ et $g(n) = 2n$.
Alors $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{2} \neq 0$