Université de Montréal
MILA

Devoir 1

Alex Maggioni (20266243)
Canelle Wagner (20232321)

Robin Milosz

21 février 2024

1 Question 1

En utilisant les définitions de O, Ω, Θ, vu en classe (sans utiliser les limites), montrer ou infirmez les énoncés suivants :

1.1 $2^n \in \Theta\left(3^n\right)$

Rappelons que si $2^n \in \Theta(3^n)$, alors par définition 2^n doit appartenir à la fois à $\Omega(3^n)$ et $O(3^n)$.

Commençons par examiner si 2^n appartient à $\Omega(3^n)$. Supposons par l'absurde que c'est le cas. Alors, il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \geq n_0$, nous avons $2^n \geq c \cdot 3^n$.

$$2^n \geq c \cdot 3^n$$

Considérons le logarithme naturel (fonction monotnone croissante) de chaque côté de cette inégalité pour obtenir :

$$n \ln(2) \geq \ln(c) + n \ln(3)$$

$$n(\ln(2) - \ln(3)) \geq \ln(c)$$

Comme $\ln(2) < \ln(3)$, nous avons $\ln(2) - \ln(3) < 0$. En divisant les deux côtés de l'inégalité par cette quantité négative, la direction de l'inégalité change :

$$n \leq \frac{\ln(c)}{\ln(2/3)}$$

Cela signifie que n doit être inférieur ou égal à une constante pour l'inégalité à être vraie, ce qui est une contradiction puisque n peut être arbitrairement grand. Par conséquent, notre hypothèse initiale est fausse, et 2^n n'appartient pas à $\Omega(3^n)$. Ce résultat implique donc que 2^n ne peut pas non plus appartenir à $\Theta(3^n)$, car $\Theta(3^n)$ nécessite que la fonction soit à la fois dans $\Omega(3^n)$ et $O(3^n)$.

1.2 $2^{n+b} \in \Theta\left(2^n\right)$

Nous allons établir que 2^{n+b} appartient à la fois aux classes $\Omega(2^n)$ et $O(2^n)$, ce qui par définition, impliquerait que $2^{n+b} \in \Theta(2^n)$. Nous considérons que $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Preuve pour $\Omega(2^n)$. Pour montrer que $2^{n+b} \in \Omega(2^n)$, nous devons trouver une constante $c > 0$ et un entier n_0 tels que $2^{n+b} \geq c \cdot 2^n$ pour tout $n \geq n_0$. Soit $c = 2^b$, et choisissons $n_0 = 1$. Démontrons que pour tout $n \geq n_0$, l'inégalité est vérifiée :

$$
\begin{aligned}
2^{n+b} &= 2^n \cdot 2^b \\
&\Rightarrow 2^n \cdot 2^b \geq c \cdot 2^n \\
&\Rightarrow 2^n \cdot 2^b \geq 2^1 \cdot 2^n \text{ (Sachant que } 2^b \geq 2^2 > 2^1 \text{ pour tout } b \geq 2) \\
&\Rightarrow 2^n \cdot 2^b \geq 2 \cdot 2^n \quad \forall n \geq n_0 = 0, c = 2
\end{aligned}
$$

Cela prouve que $2^{n+b} \in \Omega(2^n)$.

□

Preuve pour $O(2^n)$. De manière similaire, pour montrer que $2^{n+b} \in O(2^n)$, nous devons trouver une constante $c > 0$ et un entier n_0 tels que $2^{n+b} \leq c \cdot 2^n$ pour tout $n \geq n_0$. Avec le même choix de $c = 2^b$ et $n_0 = 1$, démontrons que pour tout $n \geq n_0$, l'inégalité est vérifiée :

$$
\begin{aligned}
2^{n+b} &= 2^n \cdot 2^b \\
&\Rightarrow 2^n \cdot 2^b \leq c \cdot 2^n \\
&\Rightarrow 2^n \cdot 2^b \leq 2^b \cdot 2^n \quad \forall n \geq n_0 = 0, c = 2^b
\end{aligned}
$$

Cela prouve que $2^{n+b} \in O(2^n)$.

□

En réunissant les deux résultats, nous concluons que $2^{n+b} \in \Theta(2^n)$.

2 Question 2

En utilisant la règle de la limite, déterminez l'ordre relatif (O, Ω ou Θ) des fonctions suivantes :

2.1 $f(n) = 2^n$ et $g(n) = 3^n$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi $2^n \in \mathcal{O}(3^n)$, $3^n \notin \mathcal{O}(2^n)$

2.2 $f(n) = \frac{n}{\ln n}$ et $g(n) = \sqrt{n}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]
\end{aligned}
$$

(Règle Hôpital !)

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}\ln(n) = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = \infty
\end{aligned}
$$

Alors $\frac{n}{\ln n} \notin \mathcal{O}(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} \in \mathcal{O}(\frac{n}{\ln n})$

3 Question 3

Montrez que la fonction suivante est lisse :

$$f(n) = 2n^2 - 3n - 4$$

Une fonction est lisse si :

1. La fonction est éventuellement non décroissante.
2. $f(bn) \in O(f(n))$ pour tout $b \geq 2$.

Première condition : Éventuellement non décroissante
Pour montrer que $f(n)$ est éventuellement non décroissante, nous devons montrer que :

$$f(n) \leq f(n+1) \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

En développant $f(n+1)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 4 \\ &= 2(n^2+2n+1) - 3(n+1) - 4 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 - 4 \\ &= 2n^2 + n - 5. \end{aligned}$$

Pour que $f(n) \leq f(n+1)$, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} 2n^2 - 3n - 4 &\leq 2n^2 + n - 5 \\ 1 &\leq 4n \\ n &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq \frac{1}{4}$, $f(n)$ est non décroissante.

Deuxième condition : $f(bn) \in O(f(n))$ **pour tout** $b \geq 2$

En développant $f(bn)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(bn) &= 2(bn)^2 - 3(bn) - 4 \\ &= 2b^2n^2 - 3bn - 4. \end{aligned}$$

Nous devons trouver la limite de $\frac{f(bn)}{f(n)}$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{f(bn)}{f(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2b^2n^2 - 3bn - 4}{2n^2 - 3n - 4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2b^2 - 3b/n - 4/n^2}{2 - 3/n - 4/n^2} \\ &= \frac{2b^2}{2} = b^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la règle de la limite, nous obtenons que pour tout $b \geq 2$, $f(bn)$ est dans $\Theta(f(n))$. Cela implique donc, par définition de Θ, que $f(bn) \in O(f(n))$ pour tout $b \geq 2$.

En combinant les deux conditions, nous concluons que $f(n) = 2n^2 - 3n - 4$ est une fonction lisse.