

数值与符号计算

北京邮电大学软件学院

数值积分

1. `double gauss_ch1(double(*f)(double), int n);` 求积分 $\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

实现 n 点 Gauss-Chebyshev 积分公式; 返回积分的近似值.

在区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项为 $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
 $T_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 n 个根是 $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$, $k = 1, \dots, n$. n 点 Gauss-Chebyshev 积分公式为

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$$

2. `double gauss_ch2(double(*f)(double), int n);` 求积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)dx$.

实现 n 点 Gauss-Chebyshev II 型积分公式; 返回积分的近似值.

在区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项为 $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}$.
 $U_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的 n 个根是 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n+1})$, $k = 1, \dots, n$. n 点 Gauss-Chebyshev II 型积分公式为

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) f\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

3. `double comp_trep(double (*f)(double), double a, double b);` 求积分 $\int_a^b f(x)dx$.

函数实现逐次减半法复化梯形公式; 返回积分的近似值.

4. `double romberg(double (*f)(double), double a, double b);` 求积分 $\int_a^b f(x)dx$.

函数实现 Romberg 积分法; 返回积分的近似值.

5. `double gauss_leg_9(double (*f));` 求积分 $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

实现 9 点 Gauss-Legendre 求积公式.

- 使用上面实现的各种求积方法求下面的积分:

$$\int_{-1}^1 e^x \sqrt{1-x^2} dx \quad \left(= \int_{-1}^1 \frac{xe^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$$

填写下面表格

	方法名称	结果	运行时间	运行细节
1				
2				
3				
4				
5				

- 使用第 3, 4, 5 个函数求积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad (= 1)$$

填写下面表格

	方法名称	结果	误差	运行时间	运行细节
3					
4					
5					