线性代数方程组求解

北京邮电大学软件学院

子) 用 C/C++ 语言实现如下函数:

1. `bool lu(double* a, int* pivot, int n);` 矩阵的 LU 分解.

   假设数组 $a_{n\times n}$ 在内存中按行优先次序存放. 此函数使用高斯列选主元消去法将其就地进行 LU 分解. pivot 为输出参数. pivot[0, n) 中存放主元的位置排列.

   函数成功时返回 false, 否则返回 true.

2. `bool guass(double const* lu, int const* p, double* b, int n);` 求线代数方程组解的列选主元 Gauss 消去法.

   假设矩阵 $lu_{n\times n}$ 为某个矩阵 $a_{n\times n}$ 的 LU 分解, 在内存中按行优先次序存放. p[0,n) 为 LU 分解的主元排列. b 为方程组 $Ax = b$ 的右端向量.

   此函数计算方程组 $Ax = b$ 的解, 并且将结果存放在数组 b[0,n) 中.

   函数成功时返回 false. 否则返回 true.

3. `void qr(double* a, double* d, int n);` 矩阵的 QR 分解.

   假设数组 $a_{n\times n}$ 在内存中按行优先次序存放. 此函数使用 Householder 变换将其就地进行 QR 分解.

   d 为输出参数. d[0, n) 存放 QR 分解的上三角矩阵对角线元素.

4. `bool hshld(double const*qr, double const*d, double*b, int n);` 求线代数方程组解的 Householder 变换法.

   假设矩阵 $qr_{n\times n}$ 为某个矩阵 $a_{n\times n}$ 的 QR 分解, 在内存中按行优先次序存放. d[0,n) 为其 QR 分解上三角矩阵的对角线元素. b 为方程组 $Ax = b$ 的右端向量.

   函数计算方程组 $Ax = b$ 的解, 并且将结果存放在数组 b[0,n) 中.

   函数成功时返回 false, 否则返回 true.

丑) 上面若干函数实现了列选主元 Gauss 消去法和 Householder 变换方法求解线性代数方程组. 使用他们求解下面几个问题.

第一题) n 阶 Hilbert 矩阵 H 在第 j 行第 k 列处的值为

$$H_{jk} = \frac{1}{j+k-1}, \quad (1 \leqslant j, k \leqslant n)$$

令 n 维向量 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, 其中 b_j 为 Hilbert 矩阵的第 j 行元素之和. 分别对 $n = 5, 10, 15$ 求解 n 阶线代数方程组 $Hx = b$. 此方程的精确解为 $x = (1, 1, \cdots, 1, 1)^T$. 用 Guass 消去法和 Householer 方法两种方法求解此问题. 对两种方法, 分别填写下表.

n	绝对误差	相对误差	用时
5			
10			
15			

第二题) 令 $n \times n$ 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & \cdots & & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

令 n 维向量 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, 其中 b_j 为矩阵 G 的第 j 行之和. 即

$$b = (2, 1, 0, -1, -2, \cdots, 5-n, 4-n, 2-n)^T$$

此方程的精确解为 $x = (1, 1, \cdots, 1, 1)^T$. 用 Guass 消去法和 Householer 方法两种方法分别对 $n = 10, 30, 60$ 求解线代数方程 $Gx = b$. 对两种方法, 分别填写下表.

n	绝对误差	相对误差	用时
10			
30			
60			

第三题) 矩阵与上面相同。再令 b_j 为矩阵 G 的第 j 元素绝对值之和. 即:

$$b = (2, 3, 4, \cdots, n, n)^T$$

用 Guass 消去法和 Householer 方法两种方法分别对 $n = 10, 30, 60$ 求解线代数方程 $Gx = b$. 对两种方法, 分别填写下表.

n	残量 $\|\|r\|\| = \|\|Ax - b\|\|$	相对残量 $\frac{\|\|r\|\|}{\|\|x\|\|}$	用时
10			
30			
60			

寅)提交实验报告, 其中至少包含下面内容.

1. 填写表格

   注意: 表格中实数书写格式为 $d_0.d_1d_2d_3d_4Exx$, 或者是 $0.d_1d_2d_3d_4d_5Exx$.

2. 实验总结

3. 程序清单