

Práctica 2. Algoritmos divide y vencerás - Suma de dos elementos

Noelia Escalera Mejías Alejandro Menor Molinero
Javier Núñez Suárez Adra Sánchez Ruiz
Jesús Torres Sánchez

22 de marzo de 2019

1. Introducción

El problema que se nos plantea en esta práctica es, a grandes rasgos, el de encontrar dos elementos en un vector que sumen un valor específico.

1.1. Eficiencia teórica: algoritmo básico

El algoritmo obvio, utiliza dos bucles anidados para probar todas las posibilidades del vector hasta encontrar una pareja que sume el valor dado como parámetro. Este algoritmo es de orden cuadrático $O(n^2)$.

1.2. Eficiencia teórica: algoritmo DyV

Para aplicar la técnica divide y vencerás necesitamos tener alguna certeza sobre los elementos del vector y así dividir el problema en subproblemas. Como estos son generados aleatoriamente, necesitamos ordenarlos. Para esto, hacemos uso del algoritmo Quicksort.

Una vez ordenado el vector, el algoritmo Divide y Vencerás realiza la suma del primer elemento y el último del vector.

A partir de ahí pueden ocurrir tres cosas:

- Que la suma sea el valor que estamos buscando.
- Que la suma sea menor que el valor que estamos buscando.
- Que la suma sea mayor que el valor que estamos buscando.

Si se da el primer caso devolvemos esta solución, de lo contrario, realizamos una llamada recursiva con los mismos elementos menos el primero o el último elemento respectivamente.

```

1 sumaDyV(vector, izda, dcha, x){
2     sum = v[izda] + v[dcha]
3     if (dcha - izda == 1 || sum == x)
4         return solucion
5     else if (sum > x)
6         return sumaDyV(vector, izda, dcha - 1, x)
7     else
8         return sumaDyV(vector, izda + 1, dcha, x)
9 }
10

```

Listing 1: Pseudocódigo del algoritmo DyV

A la hora de dividir en subproblemas, realmente, estamos ante una reducción puesto que en cada paso reducimos el problema a uno análogo de tamaño $n - 1$. A causa de esto, la combinación de todos estos es trivial: hacemos uso de la pila de subrutinas para devolver la solución.

Hemos calculado la eficiencia teórica de esta parte del algoritmo, mediante el método de expansión. Este método consiste en desarrollar progresivamente la ecuación de recurrencia para diversos niveles sustituyendo cada aparición del valor de la función por la expresión que se especifica en la recurrencia. Es necesario identificar un patrón general, y aplicarlo para resolver.

$$T(n) = T(n - 1) + c$$

$$T(n) = T(n - 2) + 2c$$

$$T(n) = T(n - i) + ic$$

$$(i = n - 2)$$

$$T(n) = T(2) + (n - 2)c$$

$$T(n) = cn + k - 2c$$

Como acabamos de demostrar el orden de eficiencia de esta parte es $O(n)$. Como resultado, el orden de eficiencia total es el máximo de los dos segmentos en los que hemos dividido el problema. Como Quicksort está acotado por $O(n * \log n)$ y el de nuestro algoritmo por $O(n)$, **la eficiencia conjunta es de orden $O(n * \log n)$** ya que este es dominante.

2. Análisis de eficiencia empírica

Vamos a medir el tiempo que tardan en ejecutarse los dos algoritmos. Además, los compararemos entre ellos cuando sea interesante hacerlo.

He aquí una tabla comparativa del tiempo que tarda cada algoritmo según el tamaño del vector a ordenar. Para elaborar esta tabla hemos usado tamaños de vector desde 2 hasta 10000, en intervalos de 50. Hemos medido para cada tamaño 100 veces el tiempo, hemos calculado la media de dichos tiempos y ese es el valor representado para tal tamaño.

Tamaño del vector	Tiempos con algoritmo obvio	Tiempos con algoritmo divide y vencerás
2	1.2924e-07	2,63E-04
52	1.07248e-05	1.26865e-05
102	3.50414e-05	2.67046e-05
152	7.59376e-05	4.1936e-05
202	5.56089e-05	5.73871e-05
252	7.89973e-05	2.08299e-05
302	0.00010781	2.17031e-05
352	0.000140278	2.98889e-05
402	0.000182669	3.08486e-05
452	0.000229592	3.52622e-05
502	0.000282326	3.94338e-05
552	0.000340752	4.5054e-05
602	0.000404462	4.84906e-05
652	0.000474133	5.30354e-05
702	0.000550061	5.8354e-05
752	0.000633286	6.2162e-05
802	0.000752916	6.72947e-05
852	0.000806551	7.07294e-05
902	0.000903983	7.62306e-05
952	0.00101016	8.07653e-05
1002	0.00112748	8.53134e-05
1052	0.00122338	8.82979e-05
1102	0.00133783	9.37333e-05
1152	0.00147163	9.93348e-05
1202	0.00161119	0.000102006
1252	0.00172966	0.000107358
1302	0.00187488	0.000113005
1352	0.0020381	0.000116932
1402	0.00216357	0.000120731
1452	0.0023202	0.000128124
1502	0.00254558	0.000131672
1552	0.00265279	0.000136404
1602	0.00283962	0.000140153
1652	0.0030034	0.000145704
1702	0.00322624	0.000151027
1752	0.00337908	0.000156419
1802	0.00359821	0.000162374
1852	0.00378694	0.000168315
1902	0.00401242	0.000171145
1952	0.00421789	0.00017807
2002	0.00443473	0.000181655
2052	0.00466831	0.000190365

2102	0.00485557	0.000193026
2152	0.00511763	0.000197088
2202	0.00543528	0.000199874
2252	0.00560486	0.00021286
2302	0.00585189	0.000212914
2352	0.00611448	0.000218924
2402	0.00636008	0.000221981
2452	0.00660472	0.00022756
2502	0.00698231	0.000231273
2552	0.00715784	0.000236687
2602	0.00746965	0.000254065
2652	0.00774443	0.000254985
2702	0.00805125	0.00025201
2752	0.00834981	0.000256611
2802	0.00866045	0.000263844
2852	0.00895092	0.000275502
2902	0.00927373	0.000275377
2952	0.00961669	0.000277578
3002	0.0100844	0.000288198
3052	0.0102326	0.000293423
3102	0.0106085	0.000294533
3152	0.0110291	0.000300316
3202	0.0112732	0.000304138
3252	0.0117902	0.000310318
3302	0.0120512	0.000327855
3352	0.0124521	0.000331585
3402	0.0127606	0.000327506
3452	0.0131763	0.000335943
3502	0.0137258	0.000342597
3552	0.014027	0.00035208
3602	0.0142926	0.000363522
3652	0.0146585	0.000372
3702	0.0150581	0.000388923
3752	0.0154795	0.000383769
3802	0.015958	0.000388151
3852	0.0163076	0.000392653
3902	0.0167318	0.000394175
3952	0.0176898	0.000402757
4002	0.0188954	0.000410174
4052	0.0187919	0.00040309
4102	0.0192961	0.000405281
4152	0.0196487	0.000423668
4202	0.0208504	0.000415645

4252	0.0212144	0.000420764
4302	0.0223817	0.000427357
4352	0.0219622	0.000432821
4402	0.0226035	0.000438693
4452	0.0225804	0.000458516
4502	0.0234626	0.000464868
4552	0.0245493	0.000498882
4602	0.0244892	0.000508813
4652	0.0253656	0.000499163
4702	0.0253671	0.000488681
4752	0.0249446	0.000496277
4802	0.0252559	0.000499227
4852	0.0258745	0.000507609
4902	0.0267505	0.000508594
4952	0.0279315	0.000530366
5002	0.0285257	0.000553612
5052	0.0289256	0.00053935
5102	0.0286501	0.000557164
5152	0.029081	0.000551248
5202	0.0298208	0.000547572
5252	0.0303569	0.00055586
5302	0.0308366	0.000543844
5352	0.0314377	0.000568829
5402	0.032035	0.000580758
5452	0.0326124	0.000582503
5502	0.0335289	0.000591532
5552	0.0337874	0.000562229
5602	0.0345751	0.000569521
5652	0.035593	0.000576387
5702	0.0359639	0.000585342
5752	0.0362786	0.000604199
5802	0.0369571	0.000630955
5852	0.0401922	0.000632735
5902	0.0413387	0.000620298
5952	0.0404016	0.000622768
6002	0.0427071	0.00064486
6052	0.0418601	0.000644819
6102	0.0412707	0.000661322
6152	0.041784	0.000626894
6202	0.043056	0.000634944
6252	0.043146	0.000641708
6302	0.0460017	0.000646953
6352	0.0458783	0.000658047

6402	0.0471116	0.0006529
6452	0.0489031	0.000726562
6502	0.0480484	0.000711373
6552	0.0506584	0.000825281
6602	0.0490175	0.000868788
6652	0.0498296	0.000754546
6702	0.0525766	0.000717796
6752	0.0517779	0.000710808
6802	0.0531025	0.000708588
6852	0.0526342	0.000712429
6902	0.0554639	0.000723362
6952	0.0535908	0.000719322
7002	0.0565233	0.000768295
7052	0.0574797	0.000782286
7102	0.0579865	0.000793095
7152	0.0593768	0.000792248
7202	0.0576529	0.000808728
7252	0.0592291	0.000811163
7302	0.0604172	0.000822073
7352	0.0603504	0.000813531
7402	0.0604276	0.0008125
7452	0.0619357	0.000868281
7502	0.0653653	0.000849655
7552	0.0664603	0.000827294
7602	0.0680857	0.000815002
7652	0.0671396	0.00080591
7702	0.0683615	0.000811489
7752	0.0695572	0.000844817
7802	0.069214	0.000860518
7852	0.0699345	0.000858407
7902	0.0714936	0.000858995
7952	0.0715503	0.000846543
8002	0.0739281	0.000842728
8052	0.0749469	0.000859317
8102	0.0749397	0.000853653
8152	0.078582	0.000859815
8202	0.0782962	0.000871943
8252	0.078807	0.000885368
8302	0.0801562	0.000892515
8352	0.0798039	0.000887462
8402	0.0797402	0.000891047
8452	0.0816974	0.0008969
8502	0.0823709	0.000901171

8552	0.081603	0.000910187
8602	0.0810998	0.000915118
8652	0.0827913	0.000914494
8702	0.0854845	0.000919405
8752	0.0875262	0.000930408
8802	0.0875256	0.000933171
8852	0.0876953	0.000943334
8902	0.0877304	0.000954054
8952	0.0878086	0.000988322
9002	0.0890702	0.00100255
9052	0.0914813	0.00101775
9102	0.0917751	0.00101937
9152	0.0913303	0.0010266
9202	0.0926901	0.0010076
9252	0.0991961	0.0010183
9302	0.103345	0.0010104
9352	0.101013	0.00104976
9402	0.101412	0.00104057
9452	0.0982718	0.00104326
9502	0.0994359	0.00102554
9552	0.100967	0.00102609
9602	0.103773	0.00103448
9652	0.105992	0.001034
9702	0.105317	0.0010377
9752	0.105496	0.00105498
9802	0.107417	0.00105341
9852	0.110844	0.00106947
9902	0.113998	0.00106406
9952	0.112215	0.00106635

He aquí las gráficas correspondientes a dichos tiempos:

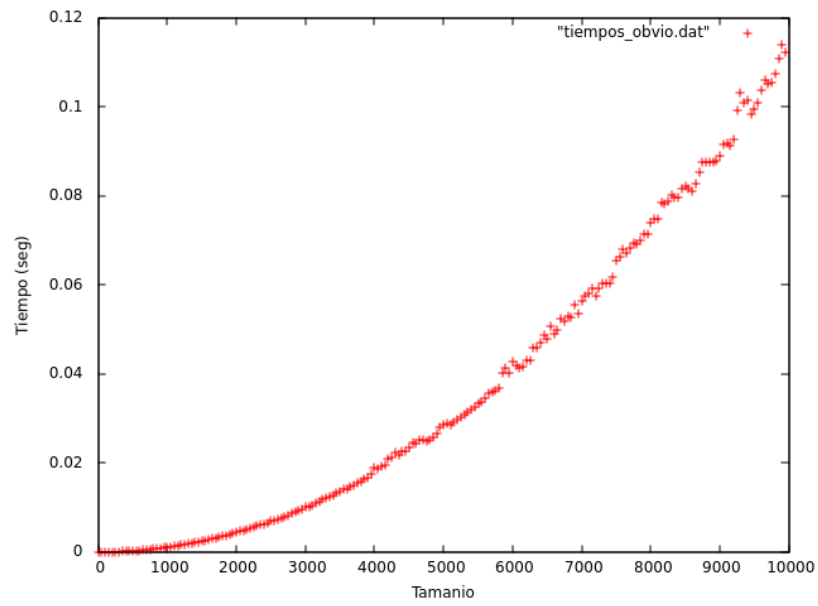


Figura 1: Gráfica empírica del algoritmo obvio

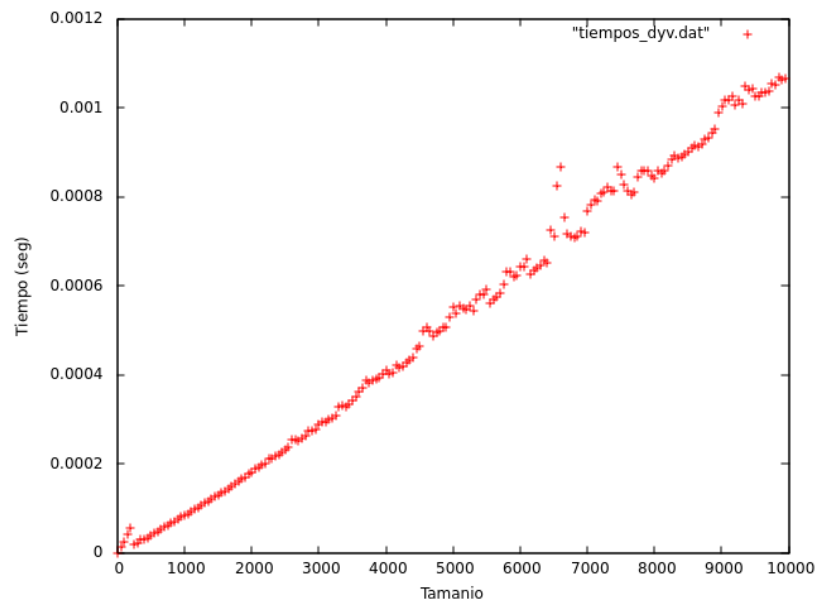


Figura 2: Gráfica empírica del algoritmo divide y vencerás

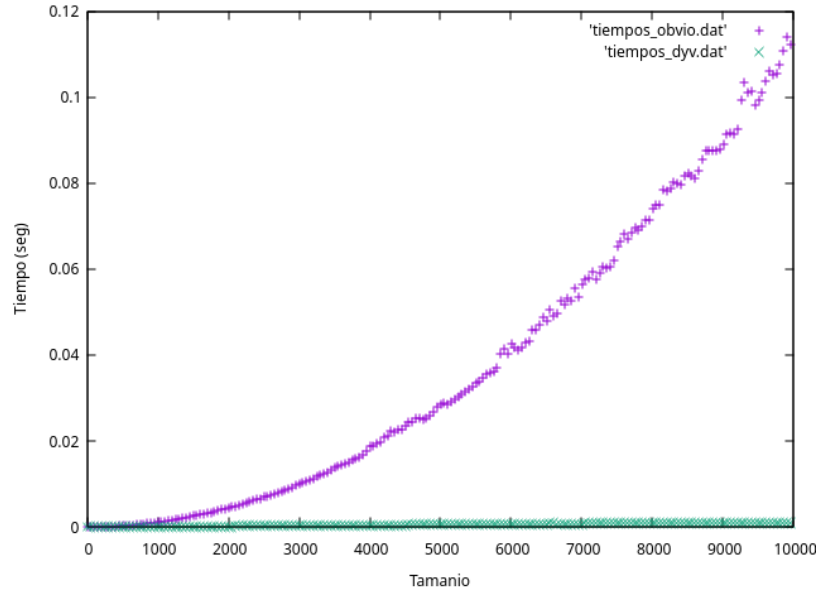


Figura 3: Gráfica comparativa entre ambos algoritmos

Como se podía anticipar de las eficiencias teóricas, la diferencia entre ambos algoritmos es abismal.

3. Análisis de eficiencia híbrida

Ajuste de los algoritmos de acuerdo a su eficiencia teórica y los datos obtenidos en la eficiencia empírica.

3.1. Ajuste del algoritmo básico

Hemos ajustado nuestros tiempos a una función $g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (debido al orden de eficiencia $O(n^2)$) y hemos obtenido las siguientes constantes ocultas:

Constante	Valor	Error estándar
a0	1.12169e-09	0.9625 %
a1	1.10848e-07	100.2 %
a2	-0.000225747	106 %

Son unas constantes bastante pequeñas. Podemos mencionar el gran error que tienen las constantes a1 y a2, sin embargo esto no es muy importante ya que la constante "dominante" sería a0 y ésta tiene un error bajísimo.

Ahora mostramos la gráfica ajustada:

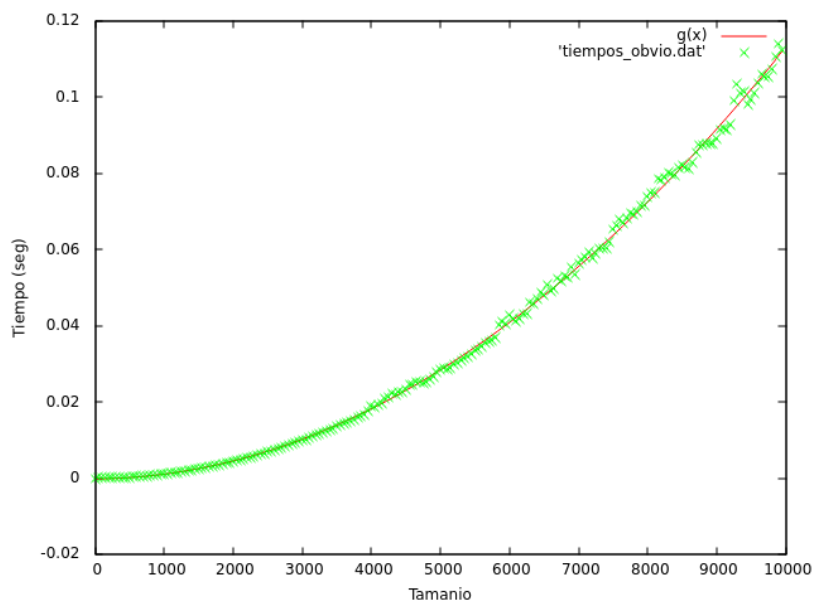


Figura 4: Ajuste algoritmo básico

3.2. Ajuste del algoritmo Divide y Vencerás

Los tiempos del algoritmo Divide y Vencerás los hemos ajustado a una función $f(x) = b0 * x * \log(x) + b1 * x + b2$ y nos han dado las siguientes constantes ocultas:

Constante	Valor	Error estándar
b0	7.472e-09	22.27 %
b1	4.17793e-08	37.34 %
b2	-6.70324e-06	94.89 %

Las constantes son bastante más grandes, pero tampoco son muy preocupantes. Aquí el error de b0 (la constante más importante) no ha dado un poco más alto, vamos a ver la gráfica ajustada para comprobar si los tiempos se desvían mucho:

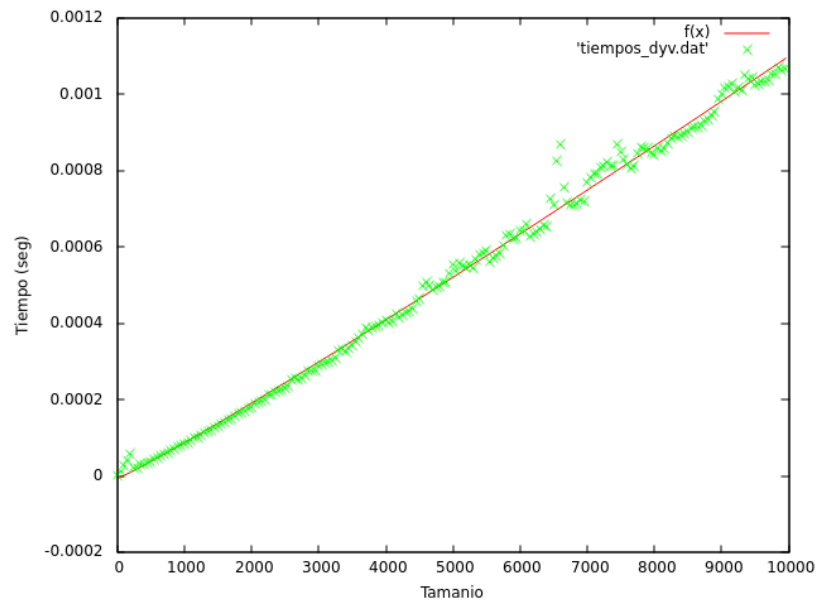


Figura 5: Ajuste algoritmo Divide y Vencerás

Como vemos, los tiempos están algo dispersos, pero sí que podemos decir que respetan la función original.

Ahora vamos a comparar las gráficas ajustadas:

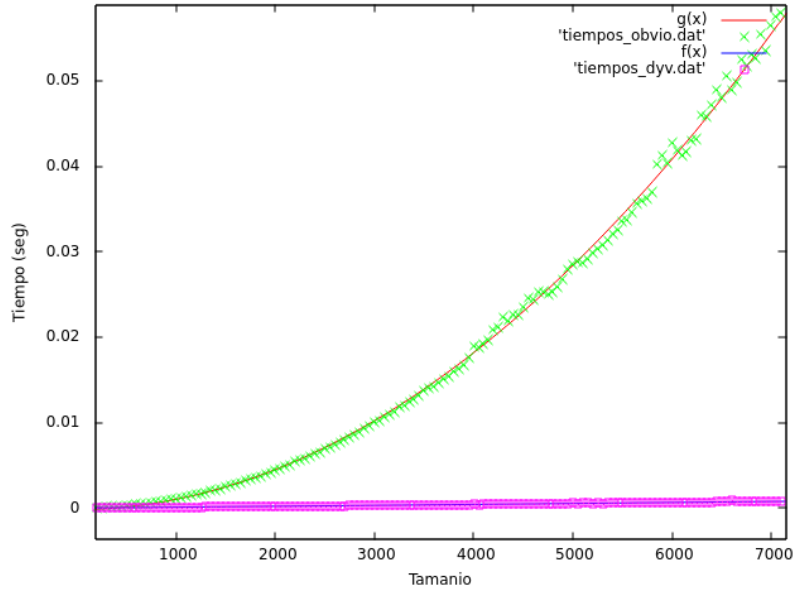


Figura 6: Ajustes comparativos

Se sigue viendo la gran diferencia entre ambos algoritmos.

4. El precio de la recurrencia

Como actividad adicional, nos ha parecido interesante investigar cómo afectan las constantes ocultas en la recurrencia de este algoritmo. Para ello, en el archivo **genera_tiempos.cpp** hemos añadido una función adicional, cuyo objetivo es realizar el mismo trabajo que nuestra función recursiva, pero con punteros y sin llamadas a sí misma, eso sí, siguiendo el mismo algoritmo. He aquí una tabla que ilustra los tiempos obtenidos:

Tamaño del vector	Tiempo con el alg. recursivo	Tiempo con el alg. iterativo	Cociente entre tiempos
2	2.63E-04	2.23E-04	1.17937219730942
52	1.27E-05	6.13E-06	2.06936318127175
102	2.67E-05	1.29E-05	2.06858461919812
152	4.19E-05	2.03E-05	2.06970752845256
202	5.74E-05	2.82E-05	2.03770603566432
252	2.08E-05	3.90E-05	0.533876866847958
302	2.17E-05	2.83E-05	0.768177908660057
352	2.99E-05	2.52E-05	1.18816560990638
402	3.08E-05	3.35E-05	0.92060915159853
452	3.53E-05	3.53E-05	0.999897918096286
502	3.94E-05	3.95E-05	0.997510889856876

552	4.51E-05	4.18E-05	1.07860036197535
602	4.85E-05	4.67E-05	1.03861394197199
652	5.30E-05	5.04E-05	1.0524254120075
702	5.84E-05	5.47E-05	1.06599392781332
752	6.22E-05	5.93E-05	1.04891045738179
802	6.73E-05	6.38E-05	1.05546571975727
852	7.07E-05	6.77E-05	1.04423532329788
902	7.62E-05	7.61E-05	1.00227459188825
952	8.08E-05	7.89E-05	1.02306948841015
1002	8.53E-05	8.35E-05	1.02213846183338
1052	8.83E-05	8.88E-05	0.994514833040303
1102	9.37E-05	9.28E-05	1.00986884988036
1152	9.93E-05	9.70E-05	1.02359418455955
1202	0.000102006	1.00E-04	1.02009978389157
1252	0.000107358	0.000103916	1.03312290696332
1302	0.000113005	0.00010925	1.03437070938215
1352	0.000116932	0.000113826	1.02728726301548
1402	0.000120731	0.000118393	1.01974778914294
1452	0.000128124	0.000122945	1.04212452722762
1502	0.000131672	0.000127366	1.03380808064947
1552	0.000136404	0.00013242	1.03008608971454
1602	0.000140153	0.000136411	1.02743180535294
1652	0.000145704	0.000142313	1.0238277599376
1702	0.000151027	0.000146299	1.03231737742568
1752	0.000156419	0.000150775	1.03743326148234
1802	0.000162374	0.000161107	1.00786433860726
1852	0.000168315	0.000170044	0.989832043471102
1902	0.000171145	0.000170165	1.00575911615197
1952	0.00017807	0.000186775	0.953393120064249
2002	0.000181655	0.000183533	0.98976750775065
2052	0.000190365	0.00018714	1.01723308752805
2102	0.000193026	0.000194033	0.994810161158153
2152	0.000197088	0.000199301	0.98889619219171
2202	0.000199874	0.00020092	0.994793947839936
2252	0.00021286	0.00020046	1.06185772722738
2302	0.000212914	0.000204847	1.03938061089496
2352	0.000218924	0.000210554	1.03975227257616
2402	0.000221981	0.000215934	1.02800392712588
2452	0.00022756	0.000220837	1.03044326811177
2502	0.000231273	0.000224179	1.03164435562653
2552	0.000236687	0.000229298	1.0322244415564
2602	0.000254065	0.000236982	1.07208564363538
2652	0.000254985	0.000254445	1.00212226610859

2702	0.00025201	0.000252719	0.997194512482243
2752	0.000256611	0.000258336	0.99332264957265
2802	0.000263844	0.000262392	1.00553370529589
2852	0.000275502	0.000262609	1.04909580402804
2902	0.000275377	0.000266272	1.03419435764932
2952	0.000277578	0.000284482	0.975731329222938
3002	0.000288198	0.000280591	1.02711063433966
3052	0.000293423	0.000279477	1.04990034958154
3102	0.000294533	0.000285245	1.03256148223457
3152	0.000300316	0.000291832	1.02907152060089
3202	0.000304138	0.000294516	1.03267055100572
3252	0.000310318	0.000301658	1.02870800708087
3302	0.000327855	0.000305699	1.07247652102231
3352	0.000331585	0.000310644	1.0674115708013
3402	0.000327506	0.000328134	0.998086147732329
3452	0.000335943	0.000330577	1.01623222426243
3502	0.000342597	0.000335463	1.02126613069102
3552	0.00035208	0.00033573	1.04869984809222
3602	0.000363522	0.000334575	1.08651871777628
3652	0.000372	0.000348276	1.068118388864
3702	0.000388923	0.000366153	1.06218711849964
3752	0.000383769	0.000364122	1.05395719017252
3802	0.000388151	0.000364716	1.06425547549326
3852	0.000392653	0.000360984	1.08772965006759
3902	0.000394175	0.000365541	1.07833321022813
3952	0.000402757	0.000372264	1.0819122987987
4002	0.000410174	0.000386677	1.0607664795165
4052	0.00040309	0.00039788	1.0130944003217
4102	0.000405281	0.000399916	1.01341531721662
4152	0.000423668	0.000403961	1.04878441235664
4202	0.000415645	0.000398454	1.04314425253605
4252	0.000420764	0.000415525	1.01260814632092
4302	0.000427357	0.0004258	1.00365664631282
4352	0.000432821	0.000425858	1.01635052059607
4402	0.000438693	0.000421854	1.03991665362898
4452	0.000458516	0.000423614	1.08239104467747
4502	0.000464868	0.000429558	1.08220077381867
4552	0.000498882	0.000444604	1.12208167267951
4602	0.000508813	0.000448798	1.13372385794946
4652	0.000499163	0.000444615	1.12268591927848
4702	0.000488681	0.000453192	1.0783089727974
4752	0.000496277	0.000459666	1.07964696105433
4802	0.000499227	0.000482418	1.03484322724276

4852	0.000507609	0.000468961	1.08241197029177
4902	0.000508594	0.000472725	1.07587709556296
4952	0.000530366	0.000480948	1.10275123298153
5002	0.000553612	0.000483154	1.14582928010531
5052	0.00053935	0.000502996	1.07227492862766
5102	0.000557164	0.000493199	1.12969409913645
5152	0.000551248	0.000513397	1.07372657027602
5202	0.000547572	0.000505904	1.0823634523546
5252	0.00055586	0.000531445	1.04594078408866
5302	0.000543844	0.000514739	1.0565432189906
5352	0.000568829	0.000522083	1.08953748733439
5402	0.000580758	0.000525245	1.10568972574703
5452	0.000582503	0.000528176	1.1028577595347
5502	0.000591532	0.000555758	1.06436974366541
5552	0.000562229	0.000541778	1.03774793365548
5602	0.000569521	0.000545981	1.04311505345424
5652	0.000576387	0.000566533	1.01739351458785
5702	0.000585342	0.000558648	1.04778321948705
5752	0.000604199	0.000564631	1.07007762591852
5802	0.000630955	0.000567655	1.11151139336393
5852	0.000632735	0.000575031	1.10034937246861
5902	0.000620298	0.000598215	1.03691482159424
5952	0.000622768	0.000584437	1.06558619663026
6002	0.00064486	0.000588543	1.09568884516509
6052	0.000644819	0.000622762	1.03541802486343
6102	0.000661322	0.000600975	1.10041515870045
6152	0.000626894	0.000604567	1.03693056352728
6202	0.000634944	0.00061003	1.04084061439601
6252	0.000641708	0.000637194	1.00708418472239
6302	0.000646953	0.000619811	1.0437907684762
6352	0.000658047	0.000628724	1.04663890673809
6402	0.0006529	0.000645861	1.01089862989095
6452	0.000726562	0.000638418	1.13806628259228
6502	0.000711373	0.000643474	1.10551941492586
6552	0.000825281	0.000648541	1.27251939353102
6602	0.000868788	0.000666584	1.30334361460821
6652	0.000754546	0.000657322	1.14790924387134
6702	0.000717796	0.000664936	1.07949637258323
6752	0.000710808	0.000690564	1.02931516847099
6802	0.000708588	0.000676012	1.04818849369538
6852	0.000712429	0.000681378	1.04557088723146
6902	0.000723362	0.000685043	1.05593663463461
6952	0.000719322	0.000718498	1.00114683687359

7002	0.000768295	0.000711942	1.07915391984178
7052	0.000782286	0.000702295	1.11389942972682
7102	0.000793095	0.000740205	1.07145317851136
7152	0.000792248	0.000717368	1.10438157263775
7202	0.000808728	0.000718833	1.12505686299878
7252	0.000811163	0.000741166	1.09444173100223
7302	0.000822073	0.000729955	1.12619682035194
7352	0.000813531	0.000735451	1.10616614839058
7402	0.0008125	0.000773426	1.05052067036795
7452	0.000868281	0.000749253	1.15886222677787
7502	0.000849655	0.000750811	1.13164964285286
7552	0.000827294	0.000757065	1.09276482204302
7602	0.000815002	0.000775777	1.05056221053215
7652	0.00080591	0.000768661	1.04845959402129
7702	0.000811489	0.000811743	0.999687093082417
7752	0.000844817	0.000792263	1.06633403301681
7802	0.000860518	0.000787568	1.09262692237369
7852	0.000858407	0.00078843	1.08875486726786
7902	0.000858995	0.000795117	1.08033786222657
7952	0.000846543	0.000823808	1.02759744989124
8002	0.000842728	0.000816258	1.03242847237026
8052	0.000859317	0.000830779	1.03435089235525
8102	0.000853653	0.000841626	1.01429019540746
8152	0.000859815	0.000842036	1.02111429915111
8202	0.000871943	0.000832184	1.04777669361584
8252	0.000885368	0.000862361	1.02667908219412
8302	0.000892515	0.000846056	1.05491244078406
8352	0.000887462	0.000853143	1.04022655053139
8402	0.000891047	0.000853199	1.04436010825142
8452	0.0008969	0.000859305	1.04375047276578
8502	0.000901171	0.000883573	1.01991686029338
8552	0.000910187	0.000891062	1.02146315295681
8602	0.000915118	0.00087487	1.04600454924732
8652	0.000914494	0.000877503	1.04215484163587
8702	0.000919405	0.000883319	1.04085273836519
8752	0.000930408	0.000904586	1.02854565513948
8802	0.000933171	0.000910877	1.02447531335186
8852	0.000943334	0.000910968	1.03552923922684
8902	0.000954054	0.000910996	1.04726475198574
8952	0.000988322	0.000912443	1.08316026316164
9002	0.00100255	0.000934308	1.07304015378226
9052	0.00101775	0.000958624	1.06167798845011
9102	0.00101937	0.000934126	1.09125535527327

9152	0.0010266	0.000937817	1.09466985563282
9202	0.0010076	0.000943069	1.06842659444855
9252	0.0010183	0.000978791	1.0403651034797
9302	0.0010104	0.000974243	1.03711291741383
9352	0.00104976	0.00095956	1.09400141731627
9402	0.00104057	0.00096655	1.07658165640681
9452	0.00104326	0.000970943	1.07448120023524
9502	0.00102554	0.00102091	1.00453516960359
9552	0.00102609	0.000996626	1.02956374808604
9602	0.00103448	0.000988877	1.04611594768611
9652	0.001034	0.000987037	1.04757977664464
9702	0.0010377	0.00101615	1.02120749889288
9752	0.00105498	0.00103489	1.0194126912039
9802	0.00105341	0.00105282	1.00056039968846
9852	0.00106947	0.00102051	1.047976011994
9902	0.00106406	0.00104296	1.02023088133773
9952	0.00106635	0.00103605	1.02924569277545

He aquí una gráfica comparativa entre los tiempos del algoritmo recursivo y del iterativo:

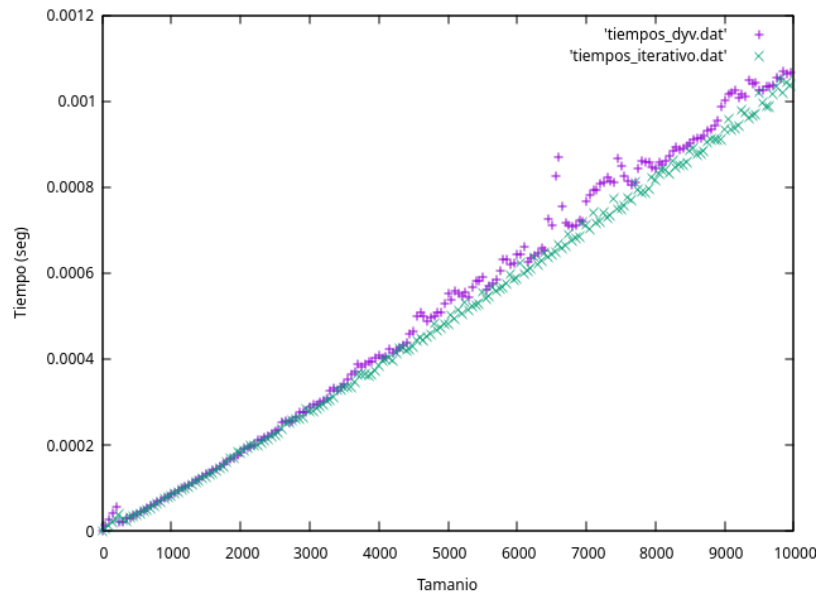


Figura 7: Gráfica comparativa entre el algoritmo iterativo y el recursivo

Podemos observar que no hay mucha diferencia, no obstante, es interesante como conforme aumenta el tamaño del vector, al aumentar el número de lla-

muchas recursivas, se van separando ambas gráficas poco a poco. Si dividimos ambos tiempos:

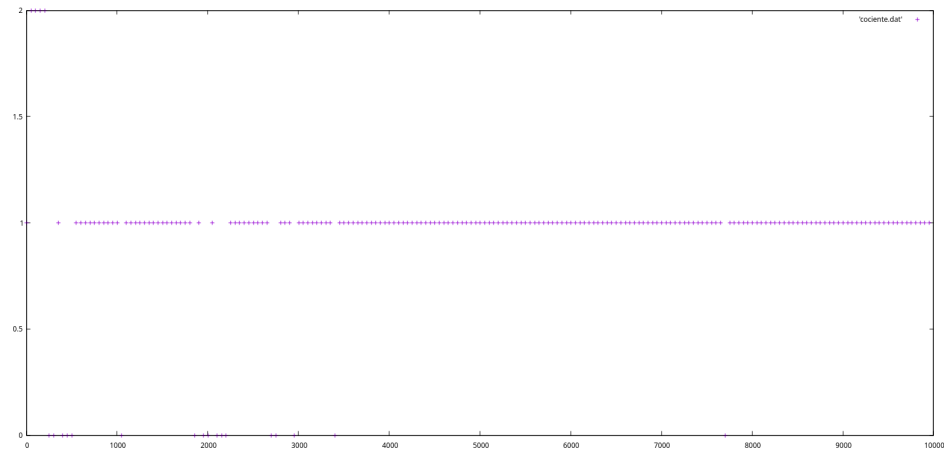


Figura 8: Gráfica cociente entre los tiempos del algoritmo recursivo y del iterativo

Efectivamente, nos sale una gráfica prácticamente constante en el 1. Lo podíamos anticipar de los resultados del apartado de eficiencia híbrida. Seguramente con unos tamaños de vector más grandes notaríamos más la diferencia.