Теорема 182. *Если* $0 < x < 1$, *то*

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{m} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} x^{\nu} = \sqrt{1+x}.$$

Доказательство. Для целых $m \geqslant 0$ имеем

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{m+1}\right| = \frac{\left|\prod\limits_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)\right|}{(m+1)!} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=0}^{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(m+1)!} < \frac{\prod\limits_{k=0}^{m}(k+1)}{(m+1)!} = 1.$$

Следовательно, в формуле теоремы 181

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{m+1}\frac{x^{m+1}}{y^{m+\frac{1}{2}}}\right| < x^{m+1} \to 0.$$

Теорема 183. *Для каждого целого* $m \geqslant 1$ *и* $x > 0$ *существует* y *такое, что*

$$1 < y < 1 + x,$$

$$\log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{m} \tfrac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu} + \tfrac{(-1)^m x^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}}$$

Доказательство. Для

$$f(x) = \log x \quad (x > 0)$$

имеем

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

и, следовательно (пример 2) к определению 41), для целых $\nu \geqslant 1$

$$f^{(\nu)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{x^{\nu}},$$

$$\frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}.$$

Следовательно, теорема 177 с $\xi = 1$, $h = x$, $n = m + 1$ обеспечивает существование требуемого y.

Теорема 184. *Если* $0 < x \leqslant 1$, *то*

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu} = \log(1+x).$$

Доказательство. В формуле теоремы 183 имеем:

$$\left| \frac{(-1)^m x^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}} \right| < \frac{1}{m+1} \to 0.$$

Теорема 183 имеет место для каждого $x > 1$; однако, формула теоремм 184 неверна ни для какого $x > 1$, Действительно уже из одного существования

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu} = \varphi(x)$$

следовало бы, что для целых $m > 1$ при $m \to \infty$

$$\frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu} - \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu} \to \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

и, значит,

$$\frac{x^m}{m} \to 0,$$

тогда как, в силу теоремы 180, для целых $m \geqslant 2$ мы имеем

$$\frac{x^m}{m} = \frac{(1+(x-1))^m}{m} > \frac{\binom{m}{2}(x-1)^2}{m} =$$

$$= (m-1)\frac{(x-1)^2}{2} \geqslant \frac{(x-1)^2}{2} \quad (>0).$$