DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 3

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.

- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.

- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!

- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Fotografia na okładce: Shutterstock/AliseFox.

Fotografie: Agencja Gazeta/Cezary Aszkiełowicz s. 24; BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 110 (zamek Czocha), IanDagnall Computing s. 158, Witold Skrypczak s. 110 (zamek w Czersku); Getty Images: Dorling Kindersley: Gary Ombler/Jonathan Sneath s. 44, iStock Unreleased/ewg3D s. 110 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus - Alberto Gagliardi s. 215, AndrewScherbackov s. 18, Andrey Mitrofanov s. 145, Moment - Pierre Ogeron s. 9, Troy Harrison s. 297; Shutterstock: Alexey Boldin s. 312 (smartwatch), Brester Irina s. 48, Dmitry Demkin s. 161 (słoneczniki), Ev. Safronov s. 225, f11photo s. 268 (miasto nocą), Ian 2010 s. 161 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 110 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 312 (bieg), Marzolino s. 268 (Leibniz), Nicku s. 268 (Newton), oriontrail s. 22, Pecold s. 110 (zamek w Gniewie), Photerkop s. 15; Thinkstock/Getty Images: Fuse s. 301, Photodisc/Digital Vision s. 267; Lech Chańko s. 83.

Spis treści

3. Ciągi

* 4. Rachunek różniczkowy

5. Statystyka

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

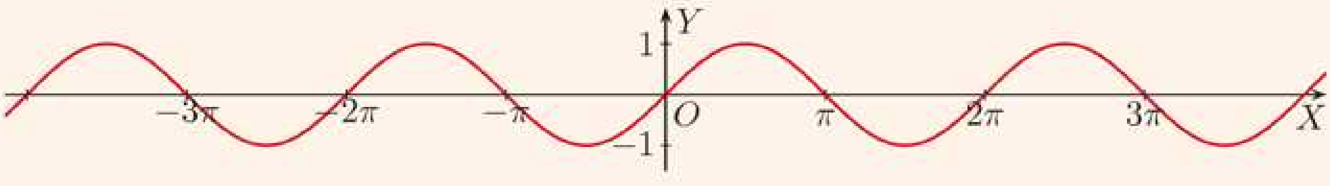
D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Funkcje trygonometryczne

Mont Saint-Michel [czyt. mą sę miszel] w czasie odpływu. Podnoszenie się i opadanie poziomu oceanów jest zjawiskiem powtarzającym się okresowo.

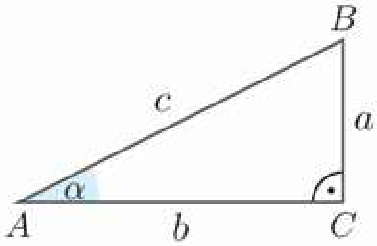
Omawiane w tym rozdziale funkcje trygonometryczne mogą stanowić model służący do opisu niektórych zjawisk powtarzających się okresowo. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres jednej z funkcji trygonometrycznych – funkcji sinus. Wykres ten nazywamy sinusoidą.



Warto powtórzyć

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Jeśli α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, to sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.



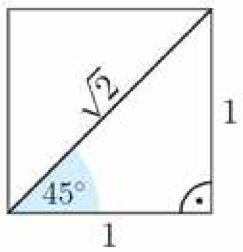
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

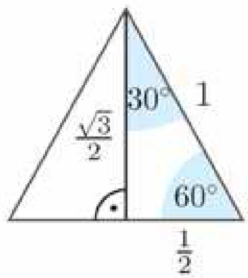
Cosinus, tangens i cotangens kąta α definiujemy następująco:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Wartości funkcji trygonometycznych nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α.

Podane w tabeli wartości można wyznaczyć, korzystając z poniższych rysunków.





α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych.

a) 3, 4 b) 9, 12 c) 5, 12 d) 1, 2

2. W trójkącie prostokątnym dana jest długość przeciwprostokątnej c oraz sinus kąta ostrego α. Oblicz długości przyprostokątnych.

a) $c = 10$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $c = 25$, $\sin\alpha = 0{,}28$

3. W trójkącie prostokątnym dany jest tangens kąta ostrego α oraz długość boku a leżącego naprzeciwko kąta α. Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$, $a = 10$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $a = 2$

D **4.** Uzasadnij, że między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α zachodzi podana zależność.

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

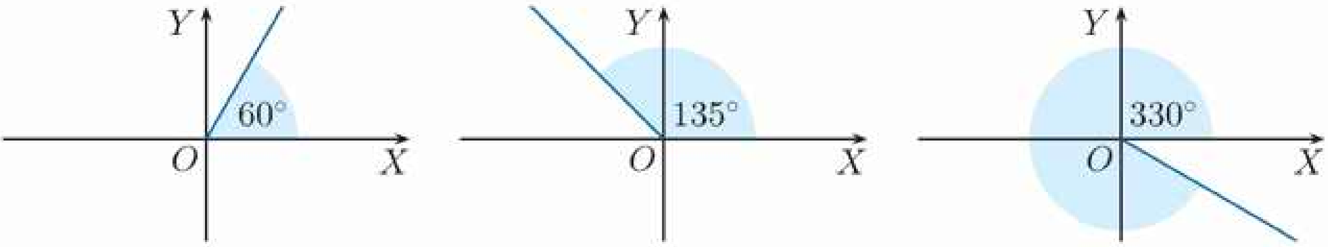
d) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

e) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

f) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

*1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Rozpatrujemy kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jego ramię początkowe zawiera się w dodatniej półosi OX. Kąt jest odłożony od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz może przyjmować miarę od 0° do 360°.

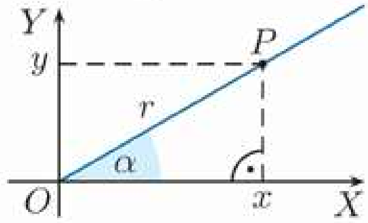


Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$



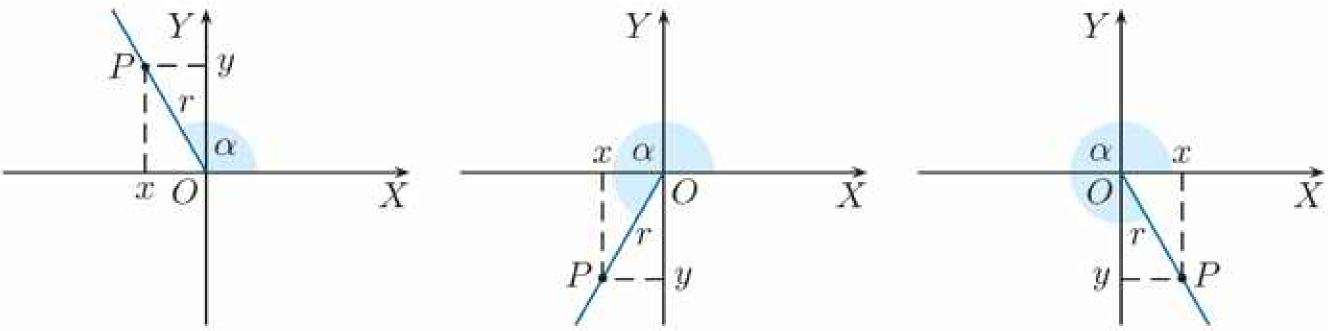
Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Narysuj ten kąt i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

a) $P(4, 3)$ b) $P(2, 3)$ c) $P(\sqrt{5}, 2)$ d) $P(1, 2\sqrt{2})$

Podane powyżej wzory w klasie II posłużyły do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Definicję tę możemy rozszerzyć na dowolny kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

Na rysunkach poniżej ramię końcowe kąta leży odpowiednio w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.



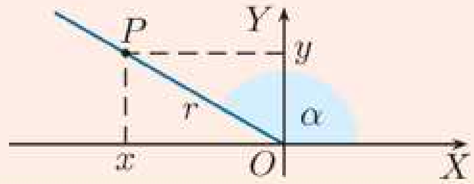
Definicja

Niech $P(x,y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$,

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$,

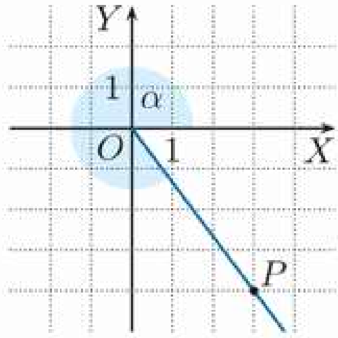
gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Uwaga. Każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P. Nie określamy wartości funkcji tangens dla 90° i 270° oraz funkcji cotangens dla 0°, 180° i 360°.

Przykład 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3,-4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5},\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

a) $P(-4,3)$ b) $P(8,-6)$ c) $P(-1,-3)$ d) $P(-2,-6)$

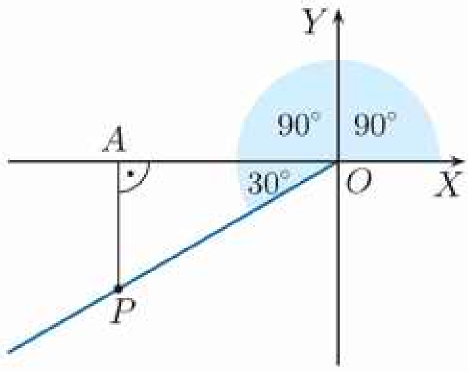
Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 210°.

Zauważmy, że $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$.
Rozpatrzmy trójkąt POA o kątach 30°, 60°, 90° i boku $|OP| = 1$ (rysunek obok), wówczas:

$$|AP| = \frac{1}{2},\ |AO| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 210° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, a stąd:



$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2},\ \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) 135°, b) 225°, c) 300°.

W zależności od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych położone jest ramię końcowe kąta α, wartości: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ są dodatnie lub ujemne.

dla $\alpha \in (90°; 180°)$ $\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha < 0$ $\operatorname{tg}\alpha < 0$ $\operatorname{ctg}\alpha < 0$	dla $\alpha \in (0°; 90°)$ $\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha > 0$ $\operatorname{tg}\alpha > 0$ $\operatorname{ctg}\alpha > 0$
dla $\alpha \in (180°; 270°)$ $\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha < 0$ $\operatorname{tg}\alpha > 0$ $\operatorname{ctg}\alpha > 0$	dla $\alpha \in (270°; 360°)$ $\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha > 0$ $\operatorname{tg}\alpha < 0$ $\operatorname{ctg}\alpha < 0$

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij, że:

a) $\sin\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°; 180°)$,

b) $\cos\alpha > 0$ dla $\alpha \in \langle 0°; 90°) \cup (270°; 360°\rangle$,

c) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°; 90°) \cup (180°; 270°)$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0°; 90°) \cup (180°; 270°)$.

Zadania

1. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(5, 12)$ b) $P(-5, -12)$ c) $P(\sqrt{3}, -1)$ d) $P(-\sqrt{3}, -1)$

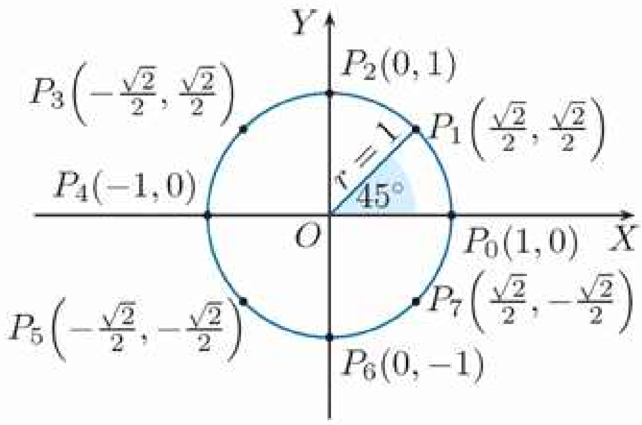
D **2.** Uzasadnij, że jeśli punkt $P(x, y)$ należy do okręgu jednostkowego o środku $O(0, 0)$ oraz leży na ramieniu kąta α, to: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Okrąg o promieniu 1 nazywamy **okręgiem jednostkowym**.

3. Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy o środku $O(0, 0)$ oraz zaznaczono punkty: $P_0, \ldots, P_7$.

a) Podaj miarę kąta α_i, do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla $i = 0, 1, \ldots, 7$.

b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.



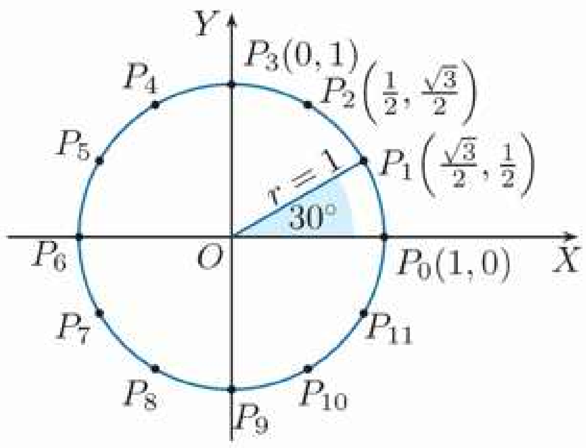
α	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\sin\alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	×	?	?	?	×	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	×	?	?	?	×	?	?	?	×

4. Oblicz.

a) $\sin^2 315^\circ + \cos^2 135^\circ$ b) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 225^\circ$ c) $\sin 225^\circ + \cos^3 315^\circ$

5. a) Na okręgu jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami 30° (rysunek obok). Podaj współrzędne punktów: $P_4, \ldots, P_{11}$.

b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.



α	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
$\sin\alpha$	?	?	?	$\frac{1}{2}$	?	?	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	?	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?	$-\sqrt{3}$	?	?	?	?

6. Oblicz.

a) $\sin^2 300^\circ + \cos^2 150^\circ$

b) $\dfrac{\cos 120^\circ}{\sin^2 330^\circ} + \dfrac{\operatorname{tg} 150^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ}$

c) $\cos 330^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$

d) $\dfrac{\cos^2 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ}$

7. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha < 0$,

b) $\operatorname{tg}\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$,

c) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$,

d) $\cos\alpha < 0$ i $\sin\alpha\cos\alpha > 0$?

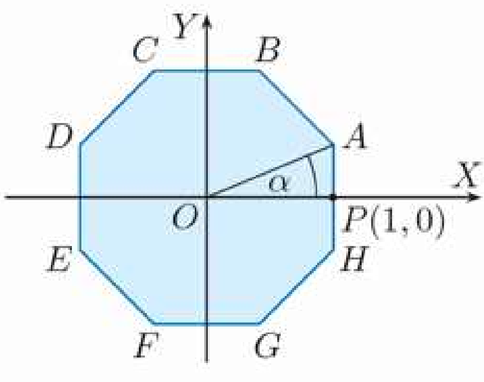
8. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15°. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeżeli:

a) $\alpha = 165^\circ$,   b) $\alpha = 195^\circ$,   c) $\alpha = 345^\circ$,   d) $\alpha = 75^\circ$.

9. Ośmiokąt foremny umieszczono w układzie współrzędnych tak jak na rysunku obok.

a) Oblicz długość boku tego ośmiokąta.

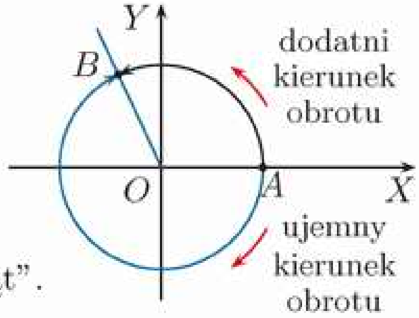
b) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA oraz kąta POC.



*1.2. Kąt obrotu

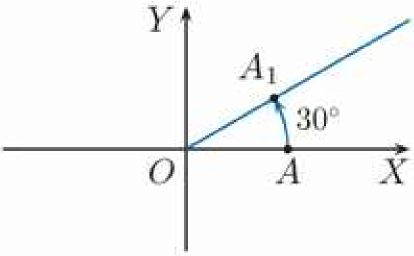
W życiu codziennym często spotykamy przykłady obrotów, np. obrót koła roweru, koła samochodu czy obrót wskazówek zegara.

Niech półprosta OA pokrywa się z dodatnią półosią OX układu współrzędnych. **Kątem obrotu** AOB nazywamy kąt, o jaki należy obrócić półprostą OA wokół punktu O, aby pokryła się ona z półprostą OB. Półprostą OA nazywamy **ramieniem początkowym** kąta obrotu, a półprostą OB – **ramieniem końcowym**.

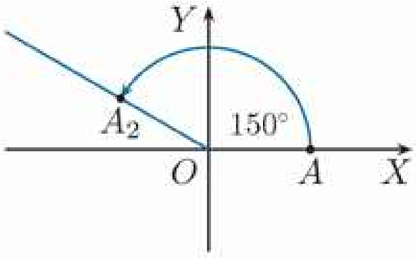


Uwaga. Zamiast „kąt obrotu" będziemy krótko mówić „kąt".

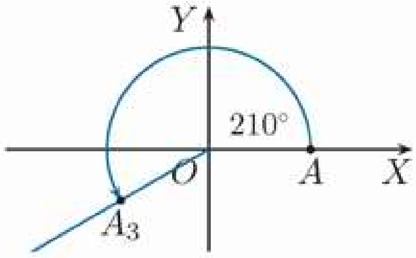
Przyjmujemy, że:
- **dodatni kierunek obrotu** jest kierunkiem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
- **ujemny kierunek obrotu** jest kierunkiem zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



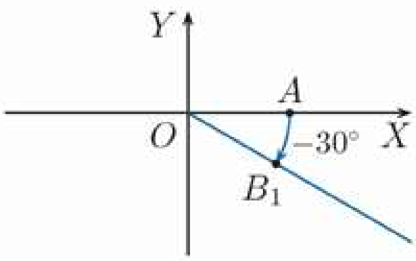
Półprosta OA po obrocie o 30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_1.



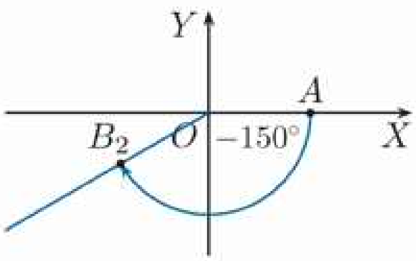
Półprosta OA po obrocie o 150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_2.



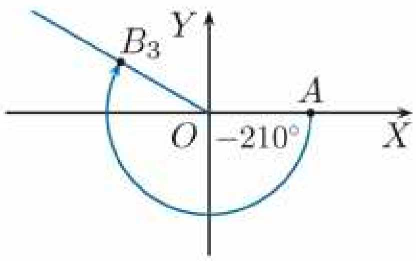
Półprosta OA po obrocie o 210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_3.



Półprosta OA po obrocie o -30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_1.



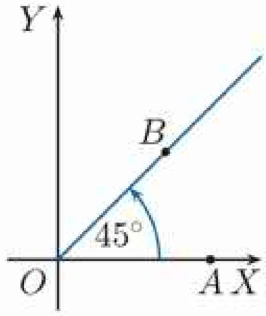
Półprosta OA po obrocie o -150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_2.



Półprosta OA po obrocie o -210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_3.

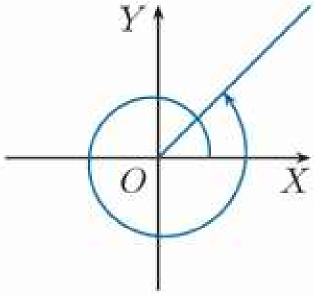
Przykład 1

Rozpatrzmy kąt AOB przedstawiony na rysunku obok. Półprosta OA pokryje się z półprostą OB nie tylko po obrocie wokół początku układu współrzędnych o kąt 45°, ale również po obrocie na przykład o kąty:

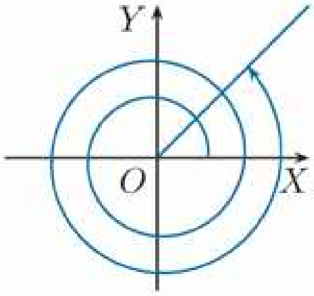


$360^\circ + 45^\circ = 405^\circ \qquad (-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ = -315^\circ$

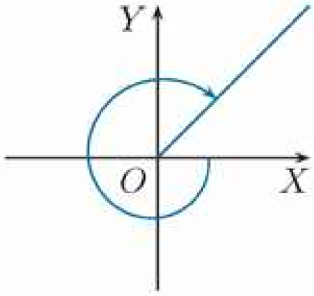
$2 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 765^\circ \qquad (-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ = -675^\circ$



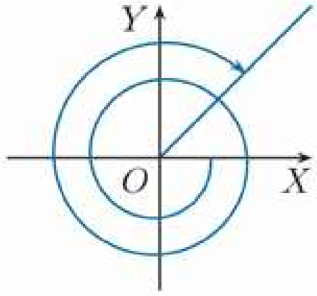
$360^\circ + 45^\circ$



$2 \cdot 360^\circ + 45^\circ$



$(-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ$



$(-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ$

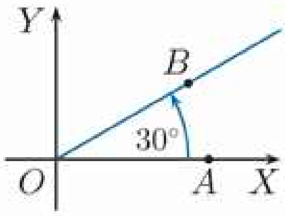
Ogólnie, aby półprosta OA pokryła się z półprostą OB, należy obrócić ją wokół początku układu współrzędnych o kąt równy $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Kąty o mierze $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, mają więc wspólne ramię końcowe.

Ćwiczenie 1

O które z podanych kątów można obrócić półprostą OA, aby pokryła się ona z półprostą OB (rysunek obok)?

390°, 750°, 1100°, 1470°, -330°, -690°, -1050°, -1400°



Ćwiczenie 2

Podaj przykłady trzech kątów, których ramię końcowe pokrywa się z ramieniem końcowym kąta α.

a) $\alpha = 80^\circ$ b) $\alpha = 560^\circ$ c) $\alpha = -50^\circ$ d) $\alpha = -320^\circ$

Przykład 2

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

a) $1400^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 320^\circ$

b) $730^\circ 10' = 2 \cdot 360^\circ + 10^\circ 10'$

c) $-700^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 20^\circ$

d) $-1080^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 0^\circ$

Ćwiczenie 3

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

a) 850° b) 1413° c) -695° d) -3590° e) $1439^\circ 30'$ f) $-1079^\circ 25'$ g) $-710^\circ 15'$ h) $630^\circ 20'$

Definicje funkcji trygonometrycznych podane w poprzednim temacie można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

Dla kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$ takiego, że $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ i $k \in \mathbf{Z}$, definiujemy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$
$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 90^\circ \text{ i } \alpha \neq 270^\circ$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 0^\circ \text{ i } \alpha \neq 180^\circ$$

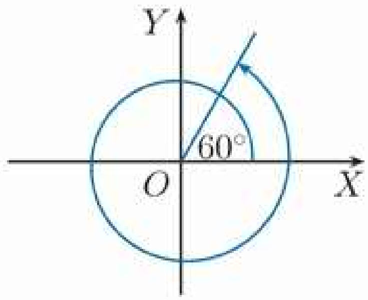
Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 420°.

$420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, zatem:

$\sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 420^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Ramię końcowe kąta 420° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta 60°.

Przykład 4

a) $\sin 750^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}(-1035^\circ) = \operatorname{tg}(-3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sin 405^\circ$ $\quad$ b) $\sin 780^\circ$ $\quad$ c) $\sin 1110^\circ$ $\quad$ d) $\operatorname{tg} 765^\circ$ $\quad$ e) $\operatorname{tg} 1500^\circ$ $\quad$ f) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$ $\quad$ g) $\cos(-690^\circ)$ $\quad$ h) $\cos(-1395^\circ)$

Zadania

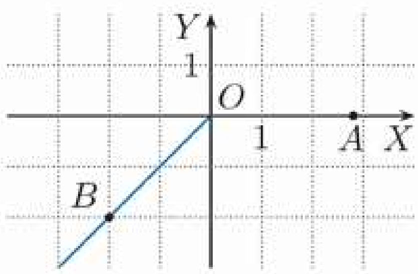
1. Zaznacz w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego kąta α.

a) $\alpha = 315^\circ$ $\quad$ b) $\alpha = -120^\circ$ $\quad$ c) $\alpha = 570^\circ$ $\quad$ d) $\alpha = -1305^\circ$ $\quad$ e) $\alpha = -2130^\circ$ $\quad$ f) $\alpha = 4260^\circ$

2. Zapisz w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, miary kątów, do których ramienia końcowego należy punkt $P(1, -1)$.

3. Półprosta OA po obrocie o kąt α pokryła się z półprostą OB (rysunek obok). Wyznacz ten kąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$, $\quad$ b) $\alpha \in \langle 360^\circ; 720^\circ)$, $\quad$ c) $\alpha \in \langle 1080^\circ; 1440^\circ)$, $\quad$ d) $\alpha \in \langle -1080^\circ; -720^\circ)$.



4. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3, 3\sqrt{3})$. Wyznacz ten kąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha \in \langle 0°; 360°)$, b) $\alpha \in \langle 1080°; 1440°)$, c) $\alpha \in \langle -360°; 0°)$.

5. Czy punkt $P(-\sqrt{3}, 1)$ należy do ramienia końcowego kąta α?

a) $\alpha = 150°$ c) $\alpha = 510°$ e) $\alpha = 2310°$

b) $\alpha = -210°$ d) $\alpha = -930°$ f) $\alpha = -1210°$

6. Oblicz.

a) $\sin(-330°)$	e) $\cos 1140°$	i) $\mathrm{tg}(-720°)$	m) $\mathrm{tg}\, 495°$
b) $\cos(-675°)$	f) $\mathrm{tg}(-660°)$	j) $\cos(-1080°)$	n) $\cos 855°$
c) $\sin 840°$	g) $\sin 810°$	k) $\sin 630°$	o) $\cos(-495°)$
d) $\mathrm{tg}(-300°)$	h) $\cos 900°$	l) $\mathrm{tg}(-180°)$	p) $\mathrm{ctg}\, 750°$

7. Wyznacz kąt α taki, że:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (360°; 450°)$, d) $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$ i $\alpha \in (360°; 540°)$,

b) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (1080°; 1170°)$, e) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\alpha \in (720°; 900°)$,

c) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (720°; 810°)$, f) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$ i $\alpha \in (-360°; -270°)$.

8. Podaj, dla jakich kątów α:

a) $\sin\alpha = 0$, b) $\cos\alpha = 0$, c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, d) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$.

9. Oblicz sumę miar wszystkich kątów z przedziału $\langle 0°; 500° \rangle$, których ramię końcowe jest zawarte w wykresie funkcji f.

a) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \sqrt{3}x$

10. Czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą całkowitą?

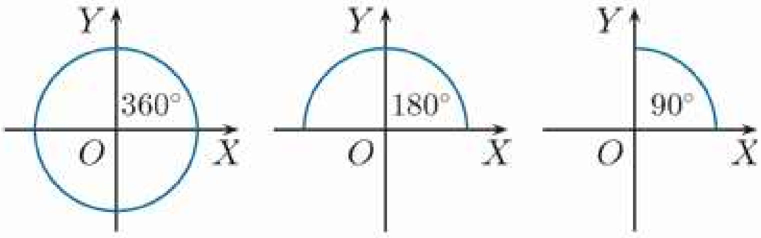
$$\cos 30° + \cos 60° + \cos 90° + \ldots + \cos 870° + \cos 900°$$

11. Wskazówka minutowa zegara ma długość 10 cm. Oblicz, jaką drogę przebędzie punkt na końcu tej wskazówki w ciągu:

a) godziny, b) 250 minut, c) doby, d) roku.

12. Wskazówka godzinowa zegara jest o 25% krótsza od wskazówki minutowej. Punkt na końcu wskazówki minutowej przebył drogę 36 cm. Jaką drogę w tym samym czasie przebył punkt na końcu wskazówki godzinowej tego zegara?

*1.3. Miara łukowa kąta



Kąt pełny Kąt półpełny Kąt prosty

Mierzenie kąta w stopniach, minutach i sekundach wprowadzili starożytni Babilończycy. Używali oni sześćdziesiątkowego systemu zapisu liczb.

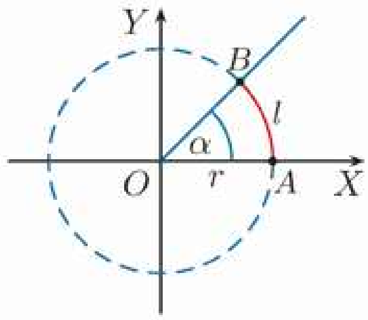
Miarę kąta zwykle podajemy w stopniach. Gdy potrzebna jest większa dokładność, posługujemy się minutami oraz sekundami.

Aby podać miarę kąta, można, oprócz miary stopniowej, wykorzystać:

- miarę łukową – jej jednostką jest 1 radian (kąt półpełny ma π radianów);
- miarę gradusową – jej jednostką jest 1 gradus będący $\frac{1}{400}$ kąta pełnego (miara używana w geodezji);
- tysiączne artyleryjskie – jej jednostką jest 1 tysiączna artyleryjska będąca $\frac{1}{1000}$ radiana (miara używana w wojskowości).

Rozpatrzmy okrąg o środku w wierzchołku kąta α. **Miarą łukową** kąta α nazywamy stosunek długości łuku l, wyznaczonego na okręgu przez ten kąt, do promienia r tego okręgu.

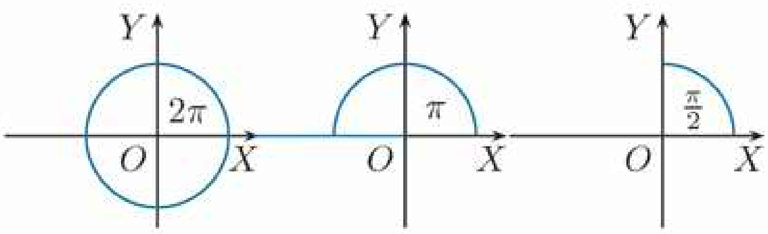
$$\alpha = \frac{\text{długość łuku}}{\text{promień okręgu}} = \frac{l}{r}$$



Jednostką miary łukowej jest **radian**, w skrócie piszemy: **rad**.

Miary łukowe kąta pełnego, półpełnego i prostego są równe:

- kąt pełny: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ [rad],
- kąt półpełny: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}{r} = \pi$ [rad],
- kąt prosty: $\frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}$ [rad].

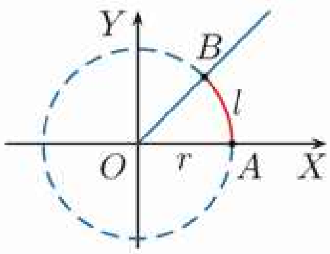


Ćwiczenie 1

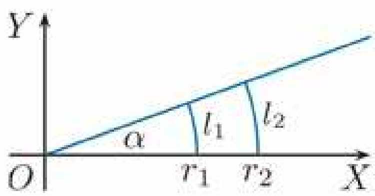
Podaj miarę łukową kąta AOB, jeśli:

a) $r = 4$, $l = 6$, c) $r = \frac{5}{4}$, $l = \frac{\pi}{4}$ (rysunek obok),

b) $r = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{6}$, d) $r = \frac{2}{3}$, $l = \pi$.



Zauważmy, że miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia okręgu, gdyż $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ (rysunek obok). Zatem wygodnie jest posługiwać się okręgiem jednostkowym. Wówczas:



Miara łukowa kąta jest równa długości łuku, jaki ramiona tego kąta wyznaczają na okręgu jednostkowym o środku w wierzchołku kąta.

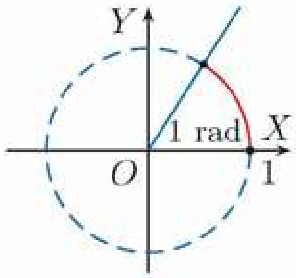
Kąt ma miarę 1 radiana (1 rad), jeśli łuk wyznaczony przez ten kąt na okręgu jednostkowym ma długość 1.

Kąt pełny ma miarę łukową 2π radianów, zatem:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ = 57^\circ 18'$$

natomiast:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$



Uwaga. Kiedy podajemy miarę łukową kąta, zwyczajowo pomijamy nazwę jednostki. Zamiast: „kąt o mierze 2π radianów, $\frac{\pi}{2}$ radianów czy 3 radianów" mówimy krótko: „kąt o mierze 2π, $\frac{\pi}{2}$, 3".

Przykład 1

a) Podaj miarę łukową kąta 120°.

$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$

Aby wyznaczyć miarę łukową kąta 120°, możemy również skorzystać z proporcji:

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

$$x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

b) Podaj miarę łukową kąta 1140°.

$1140^\circ = 1080^\circ + 60^\circ = 3 \cdot 360^\circ + \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 2\pi + \frac{1}{3} \cdot \pi = 6\frac{1}{3}\pi$

Ćwiczenie 2

Podaj miarę łukową kąta.

a) 30° b) 45° c) 72° d) 780° e) $11^\circ 15'$

Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta w stopniach.

a) $\frac{1}{12}\pi$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{4}{5}\pi$ d) $\frac{19}{10}\pi$ e) $\frac{28}{15}\pi$

W radianach będziemy również wyrażać miarę kąta obrotu. Niech α_1 i α będą miarami tego samego kąta wyrażonymi odpowiednio w stopniach i w radianach, przy czym $\alpha_1 \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$. Dla dowolnej liczby $k \in \mathbf{Z}$ zamiast $k \cdot 360^\circ + \alpha_1$ możemy pisać $2k\pi + \alpha$.

Przykład 2

> Wartości funkcji trygonometrycznych kąta α i kąta $\alpha + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, są równe.

a) Oblicz $\cos \frac{9}{4}\pi$.

$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos 2\frac{1}{4}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos \frac{1}{4}\pi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Oblicz $\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$.

$\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{3}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-4\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 4

Przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij, a następnie oblicz:

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	?	?	?
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	?	?
$\operatorname{ctg} \alpha$	?	?	?

a) $\sin \frac{7}{3}\pi$, d) $\sin \frac{17}{4}\pi$, g) $\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$,

b) $\operatorname{tg} \frac{13}{6}\pi$, e) $\sin(-4\pi)$, h) $\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$,

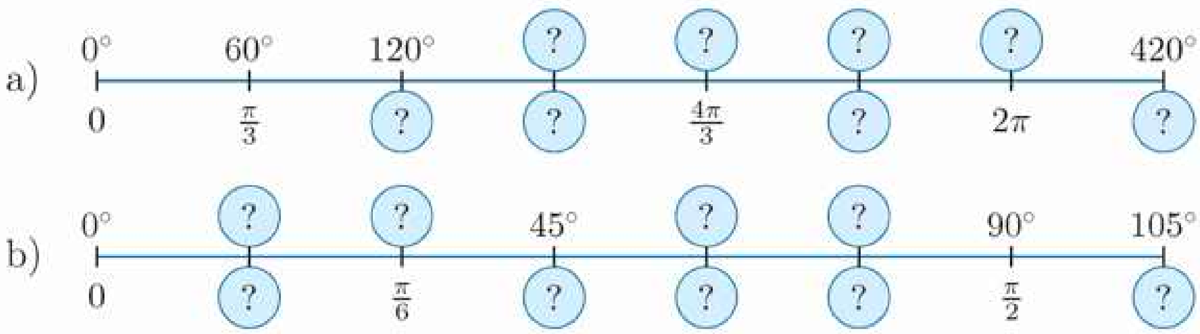
c) $\operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi$, f) $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$, i) $\sin\left(-\frac{23}{4}\pi\right)$.

Zadania

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Miara kąta [°]	5°	10°	?	36°	?	?	?	225°	315°	?
Miara kąta [rad]	?	?	$\frac{\pi}{8}$	?	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$	?	?	$\frac{11\pi}{6}$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary kątów: stopniową i łukową. Przerysuj go do zeszytu i uzupełnij puste miejsca.



3. Podaj miarę łukową kąta.

a) 20° b) 315° c) 765° d) -420° e) -1100°

4. Podaj miarę kąta w stopniach.

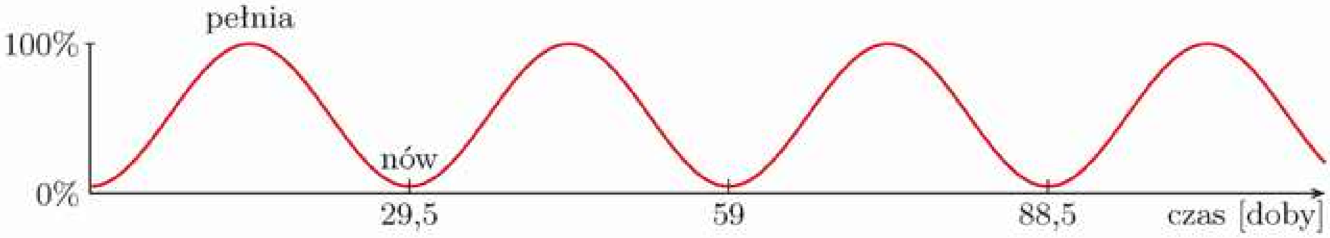
a) $\frac{3}{4}\pi$ b) $\frac{7}{12}\pi$ c) $\frac{16}{9}\pi$ d) $-\frac{9}{4}\pi$ e) $-\frac{13}{3}\pi$

5. Oblicz.

a) $\sin \frac{9}{4}\pi$ b) $\cos \frac{7}{3}\pi$ c) $\cos \frac{17}{4}\pi$ d) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ e) $\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$

*1.4. Funkcje okresowe

Na zdjęciach powyżej przedstawiono kolejne fazy Księżyca: od pełni do nowiu. Pełny cykl zmian faz Księżyca trwa średnio 29 i pół doby.



Na schematycznym wykresie powyżej pokazano, jaki procent tarczy Księżyca jest widoczny z Ziemi w kolejnych dniach cyklu.

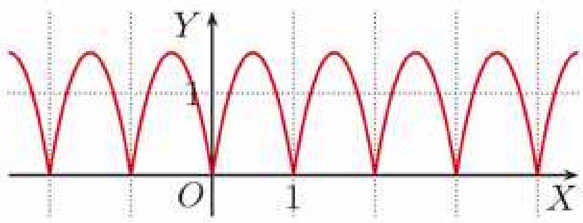
Definicja

Funkcję f określoną na zbiorze D nazywamy **okresową**, jeśli istnieje liczba $T \neq 0$ taka, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k:

$$x + kT \in D \text{ oraz } f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji okresowej. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Okresem tej funkcji jest dowolna liczba całkowita różna od zera. Liczba 1 jest najmniejszym okresem dodatnim tej funkcji.

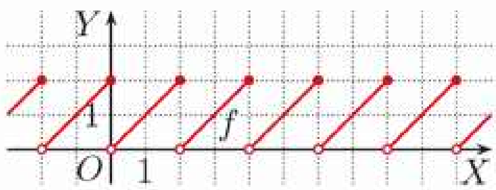


Najmniejszy okres dodatni funkcji (jeśli istnieje) nazywany jest **okresem podstawowym** albo **zasadniczym**.

Zwróć uwagę, że jeśli T jest okresem funkcji f, to każda liczba $k \cdot T$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, też jest okresem tej funkcji.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz wartości $f(100)$ i $f(100\frac{1}{2})$.



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie podstawowym $T = 5$. Oblicz $f(101)$ i $f(-96)$.

$$f(101) = f(20 \cdot 5 + 1) = f(1) = 3$$

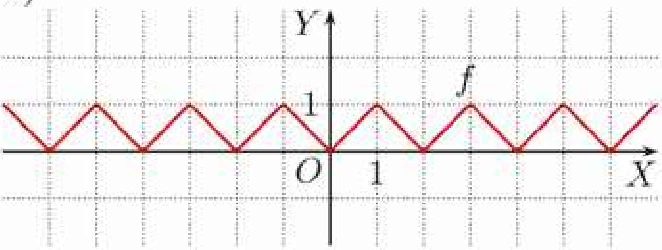
$$f(-96) = f(-20 \cdot 5 + 4) = f(4) = 1$$

Dla funkcji f mamy:
$f(x) = f(x+5) = f(x+2\cdot 5) = \ldots$

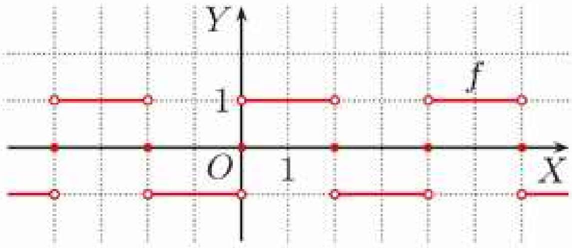
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu okres podstawowy tej funkcji. Oblicz $f(-11)$, $f(80\frac{1}{2})$ i $f(103)$.

a)



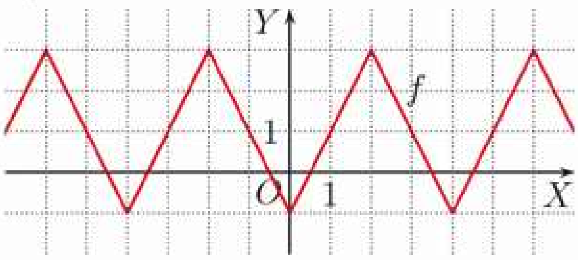
b)



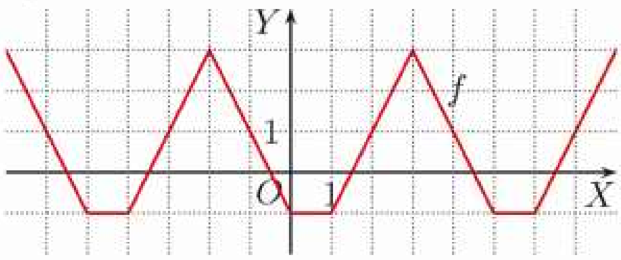
Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie T. Oblicz $f(33)$, $f(42)$ i $f(-48)$.

a) $T = 4$



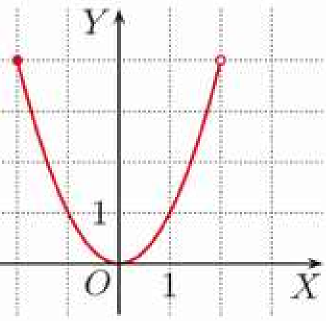
b) $T = 5$



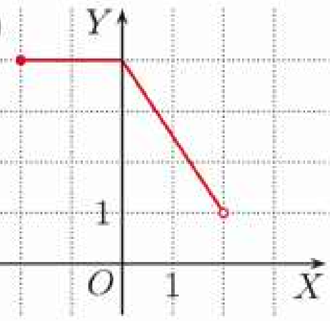
D **2.** Uzasadnij, że funkcja stała $f(x) = c$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$ jest funkcją okresową, ale nie istnieje dla niej okres podstawowy.

3. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie $T = 4$. Naszkicuj wykres tej funkcji dla $x \in \langle -6; 10\rangle$.

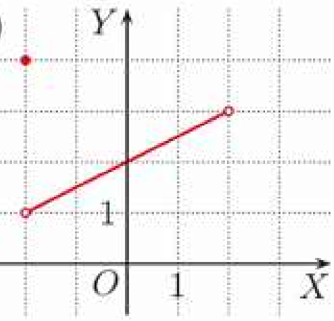
a)



b)



c)



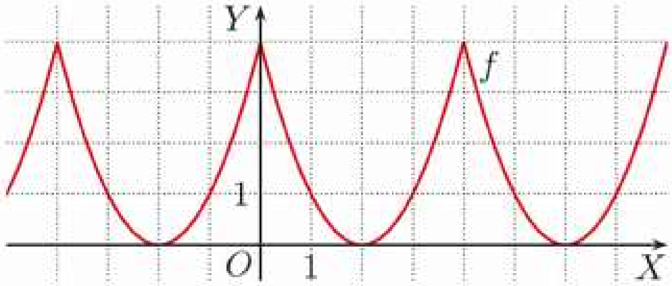
4. Naszkicuj wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 2$, jeśli wiadomo, że w przedziale $\langle -1; 1)$ pokrywa się on z wykresem funkcji g.

a) $g(x) = |x|$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = 1 - x^2$ d) $g(x) = x^2 - 2x$

5. Naszkicuj wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 4$, jeśli wiadomo, że pokrywa się on z wykresem funkcji $g(x) = |x - 1| - 2$ w przedziale:

a) $\langle -1; 3)$, b) $\langle 0; 4)$, c) $(-2; 2\rangle$, d) $(-4; 0\rangle$.

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie $T = 4$.



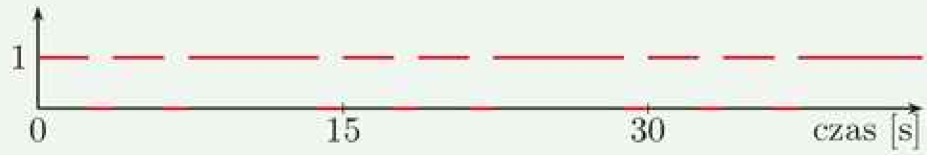
a) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 1$ należących do przedziału $\langle 0; 20\rangle$.

b) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ należących do przedziału $\langle 0; 400\rangle$.

7. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x - [x]$ i podaj jej okres podstawowy.

Czy wiesz, że...

Sygnały świetlne wysyłane przez latarnie morskie powtarzają się okresowo. Charakterystyka światła wysyłanego przez latarnię morską w Gąskach koło Mielna: światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 6,4 s, przerwa – 1,2 s (okres – 15 s).



Wartość 1 odpowiada światłu, 0 odpowiada przerwie.

8. Naszkicuj schematyczny wykres przedstawiający charakterystykę światła wysyłanego przez latarnię morską:

a) w Helu: światło – 5 s, przerwa – 5 s (okres wynosi 10 s),

b) w Krynicy Morskiej: światło – 2 s, przerwa – 2 s, światło – 2 s, przerwa – 6 s (okres wynosi 12 s).

Latarnia morska w Gąskach

*1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Funkcje trygonometryczne możemy traktować jako funkcje zmiennej x, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą będącą miarą pewnego kąta wyrażoną w radianach. Wówczas dla każdego $x \in \mathbf{R}$ mamy: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ oraz $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Zatem sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie $T = 2\pi$. Można wykazać, że jest to ich okres podstawowy.

> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

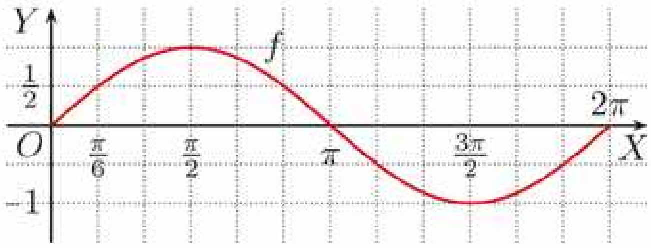
Wykres funkcji sinus

W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ dla wybranych argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

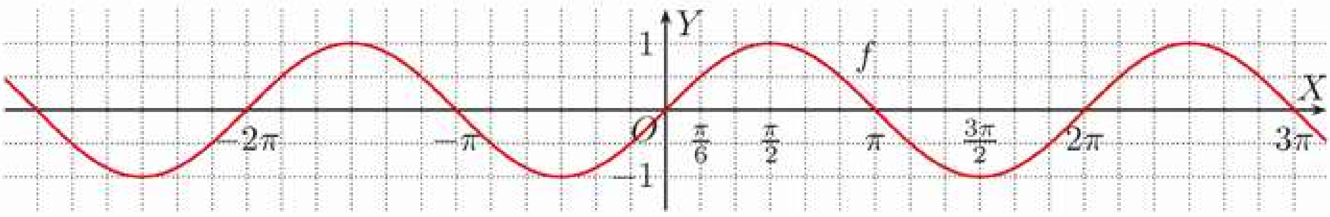
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Przybliżone wartości funkcji sinus dla innych argumentów niż podane w tabeli możemy obliczyć, korzystając z kalkulatora, lub odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.



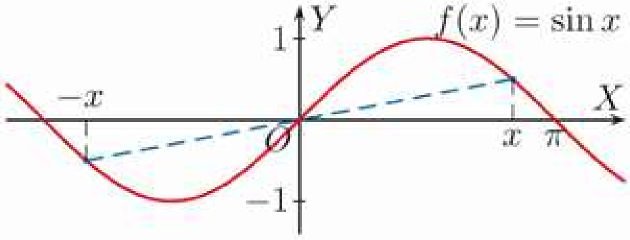
Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z okresowości tej funkcji. Wykres funkcji sinus nazywamy **sinusoidą**.



Wybrane własności funkcji $f(x) = \sin x$:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
- Funkcja f wartość 0 przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f wartość największą 1 przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f wartość najmniejszą -1 przyjmuje dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każdy punkt o współrzędnych $(k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. W szczególności jest nim punkt $O(0,0)$ – prawdziwa jest więc poniższa własność.



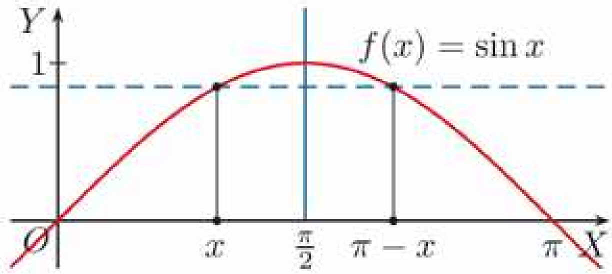
> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $$\sin(-x) = -\sin x$$

Ćwiczenie 1

a) Podaj wartość $\sin(-75^\circ)$, jeśli wiadomo, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) Podaj wartość $\sin 15^\circ$, jeśli wiadomo, że $\sin(-15^\circ) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

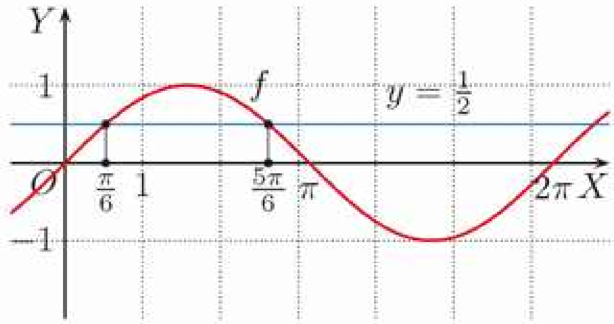
Osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każda prosta pionowa określona równaniem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
W szczególności jest nią prosta $x = \frac{\pi}{2}$, prawdziwa jest więc poniższa własność.



> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $$\sin(\pi - x) = \sin x$$

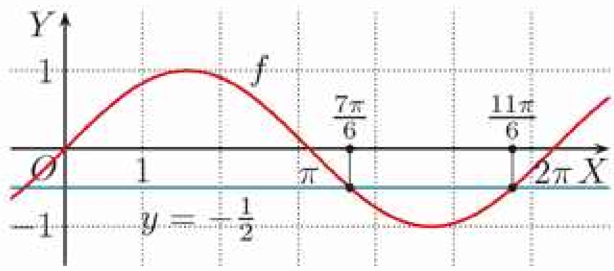
Przykład 1

a) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = \frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz dla $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

b) Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = -\frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$ oraz dla $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.

Ćwiczenie 2

Podaj te argumenty $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

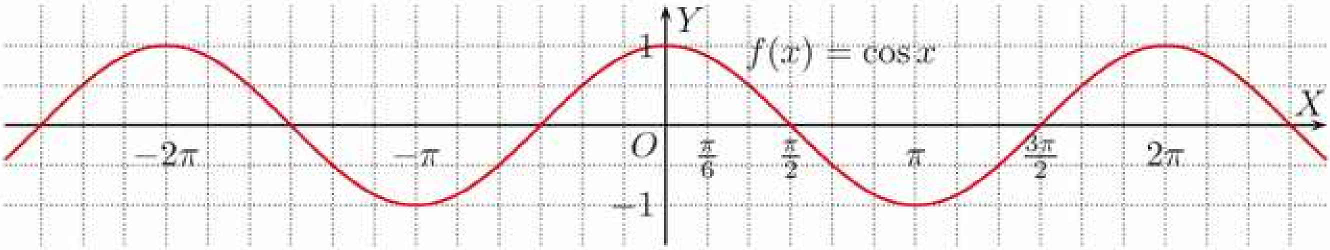
Wykres funkcji cosinus

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	?	?	?	?	?	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbf{R}$, możemy skorzystać z tego, że jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
Wykres funkcji cosinus nazywamy **cosinusoidą**.



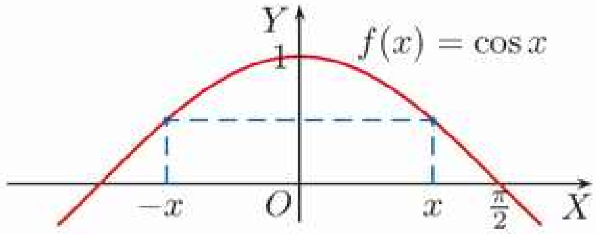
Dziedziną funkcji $f(x) = \cos x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1\rangle$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość: a) 1, b) 0, c) -1?

Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \cos x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

> Dla każdego $x \in \mathbf{R}$:
> $$\cos(-x) = \cos x$$

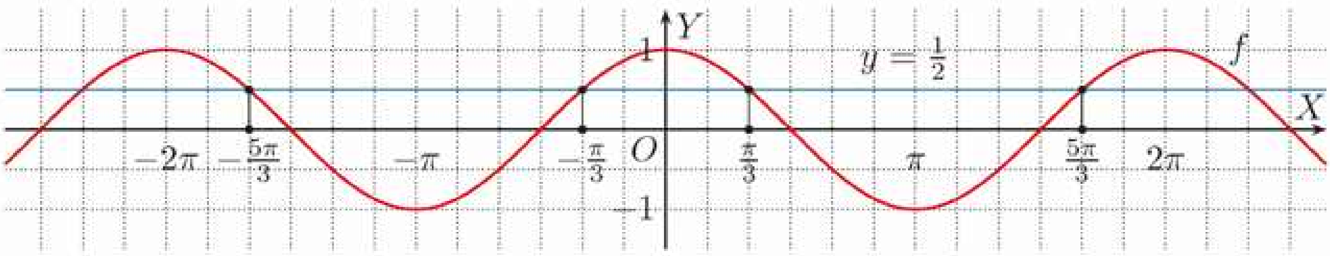


Ćwiczenie 5

Podaj równania prostych, które są osiami symetrii wykresu funkcji $y = \cos x$, oraz współrzędne punktów, które są środkami symetrii tego wykresu.

Przykład 2

Podaj te argumenty $x \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.



Z wykresu odczytujemy, że $\cos x = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{-\frac{5}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$.

Ćwiczenie 6

Podaj te argumenty $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadania

1. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$ b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $(0; 5\pi \rangle$ d) $(0; 32)$

2. Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$, c) $\left(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right\rangle$, d) $\left(-\frac{9}{2}; \frac{15}{2}\right)$.

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f:

a) przyjmuje wartości dodatnie, b) rośnie, c) maleje.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f:

a) przyjmuje wartości ujemne, b) rośnie, c) maleje.

5. Ile rozwiązań w podanym przedziale ma poniższe równanie w zależności od parametru m?

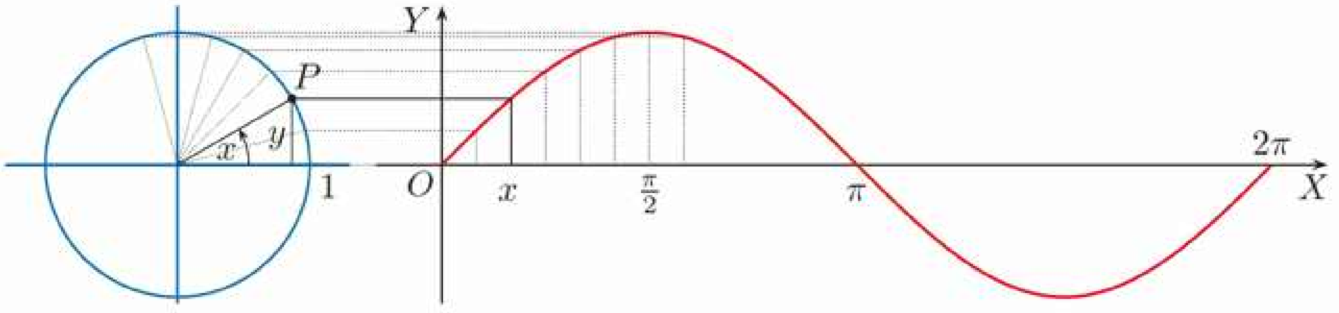
a) $\sin x = m$, $\langle 0; 4\pi \rangle$
b) $\sin x = m$, $(-\pi; 3\pi)$
c) $\cos x = m$, $\langle 0; 4\pi \rangle$
d) $\cos x = m$, $(-\pi; 3\pi)$

6. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania:

a) $\sin x = 0{,}7$, które należą do przedziału $\langle 0; 6\pi \rangle$,

b) $\cos x = \frac{1}{3}$, które należą do przedziału $\langle -4\pi; 4\pi \rangle$.

7. Objaśnij sposób otrzymywania sinusoidy, korzystając z rysunku (kątowi x odpowiada punkt P na okręgu o promieniu 1).

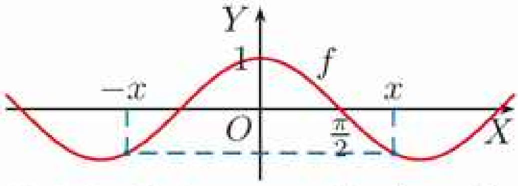


Warto wiedzieć

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

Funkcję $f\colon D \to \mathbf{R}$ nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = f(x)$$

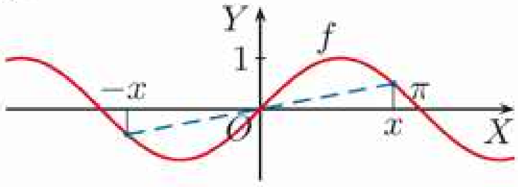


Funkcja $f(x) = \cos x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest parzysta.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

Funkcję $f\colon D \to \mathbf{R}$ nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = -f(x)$$



Funkcja $f(x) = \sin x$, określona dla $x \in \mathbf{R}$, jest nieparzysta.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $O(0,0)$.

Przykład

Zbadaj parzystość funkcji f.

a) $f(x) = x^3 \sin x$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R}$, zatem dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \cdot \sin x = f(x)$$

Zatem funkcja f jest parzysta.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon\ k \in \mathbf{Z}\}$, zatem dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$$

Zatem funkcja f jest nieparzysta.

c) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x+1}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Zauważ, że $1 \in D$, ale $-1 \notin D$, zatem funkcja f nie jest ani funkcją parzystą, ani funkcją nieparzystą.

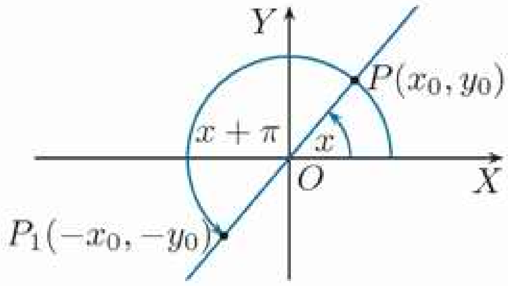
1. Zbadaj parzystość funkcji f.

a) $f(x) = -\sin x$	e) $f(x) = x \sin x + 1$	i) $f(x) = \frac{1}{x}(\cos x + 1)$
b) $f(x) = \sin x \cos x$	f) $f(x) = x^2 \sin x$	j) $f(x) = x - \cos x$
c) $f(x) = \sin^2 x$	g) $f(x) = x \sin^2 x$	k) $f(x) = x^2 \sin^2 x + \cos x$
d) $f(x) = -\lvert \sin x \rvert$	h) $f(x) = -x^2 \cos^2 x$	l) $f(x) = x^2 \cos x + \sin x$

*1.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, korzystając z rysunku obok, że liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.



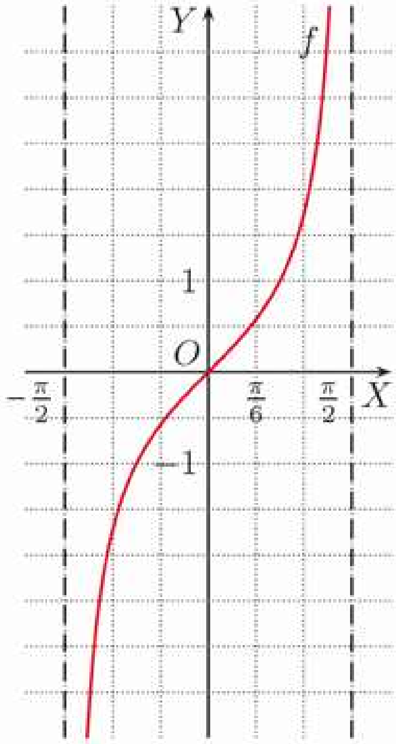
Można wykazać, że π jest okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens.

Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$: $\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.
Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$: $\operatorname{ctg}(x + n\pi) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

Wykres funkcji tangens

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

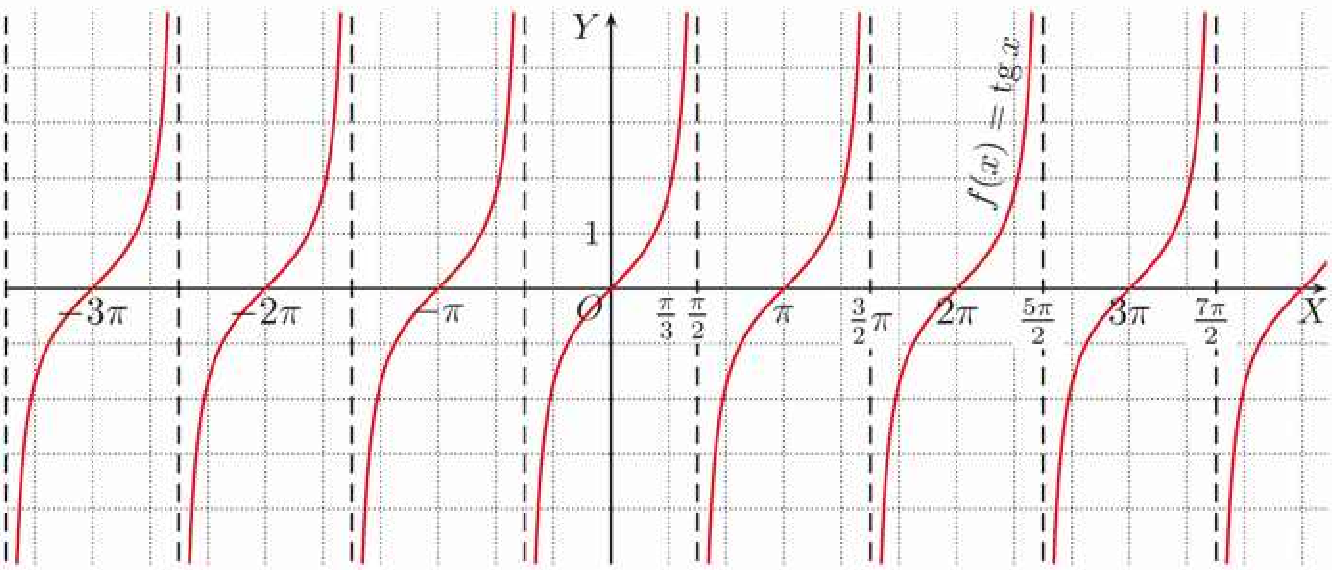
x	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f.

Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x$ określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$. Aby otrzymać jej wykres, korzystamy z tego, że jest ona okresowa.

Wykres funkcji tangens nazywamy **tangensoidą**.

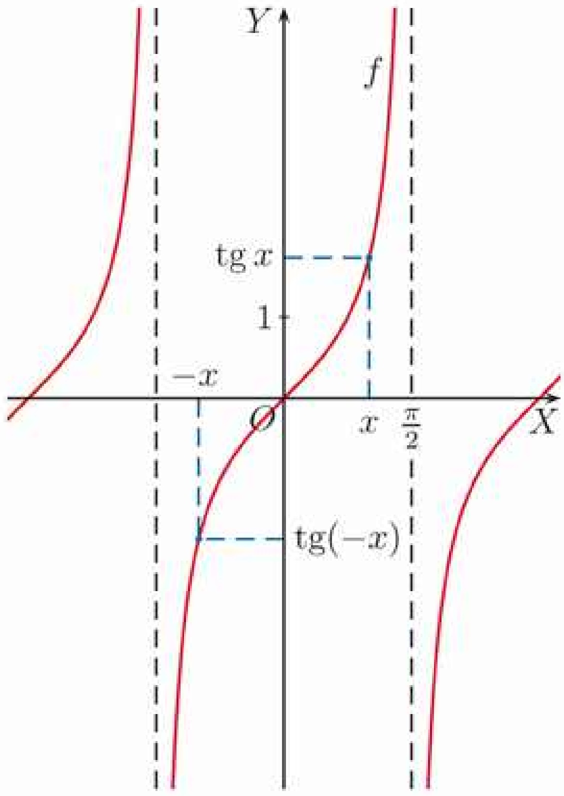


Wybrane własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \pi$.
- Wartość 0 funkcja f przyjmuje dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja f rośnie w każdym z przedziałów $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 2

Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.



Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

Ćwiczenie 3

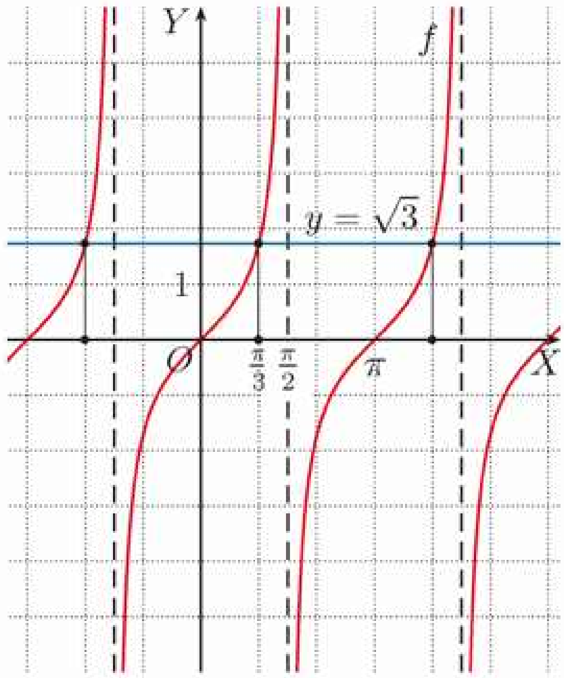
a) Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$.

b) Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$.

c) Podaj wartość $\operatorname{tg} x$, jeśli $\operatorname{tg}(-x) = \frac{5}{8}$.

Przykład 1

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.



W przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ dla $x = \frac{\pi}{3}$. Na podstawie okresowości funkcji tangens otrzymujemy rozwiązanie równania:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 4

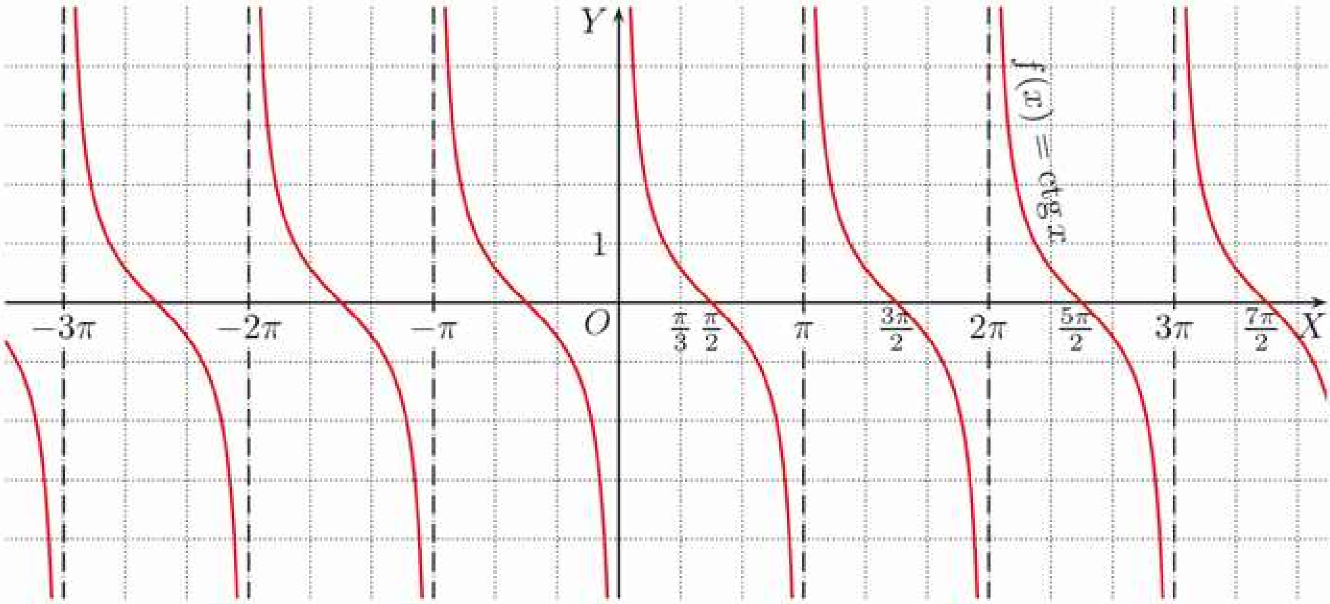
Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, wyznacz rozwiązanie równania:

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$,

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wykres funkcji cotangens

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, a jej okres podstawowy jest równy π. Wykres funkcji cotangens nazywamy **cotangensoidą**.



Ćwiczenie 5

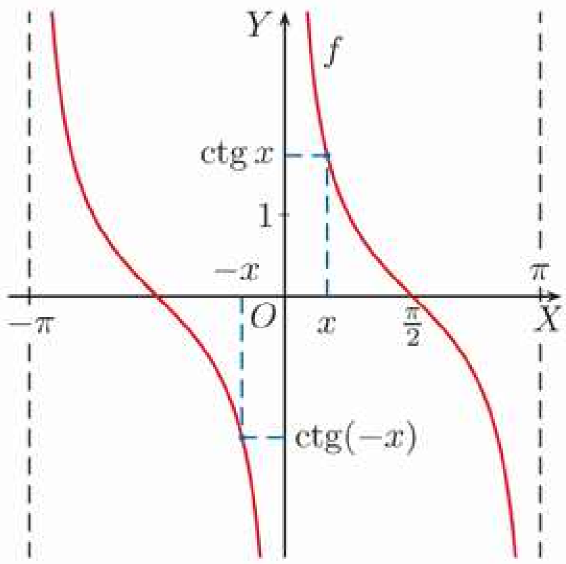
Podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ oraz równania asymptot pionowych jej wykresu.

Ćwiczenie 6

Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$, zachodzi więc poniższa własność.

> Dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$:
> $$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$



Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{6})$ b) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4})$ c) $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})$

Ćwiczenie 8

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$, wyznacz rozwiązania równania:

a) $\operatorname{ctg} x = 1$, b) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$, c) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji tangens lub cotangens i rozwiąż równanie. Podaj najmniejszą liczbę z przedziału $(3;\infty)$ spełniającą to równanie.

a) $\operatorname{tg} x = 0$ c) $\operatorname{tg} x = -1$ e) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\operatorname{ctg} x = -1$

2. Wyznacz x taki, że:

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi\rangle$,

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi\rangle$,

c) $\operatorname{tg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi\rangle$,

d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle 3\pi; 4\pi\rangle$,

e) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle -4\pi; -3\pi\rangle$,

f) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi\rangle$.

3. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; 4\pi\rangle$.

a) $\operatorname{tg} x = 0$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ g) $\operatorname{ctg} x = 1$

b) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{tg} x = -1$ f) $\operatorname{ctg} x = 0$ h) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Wyznacz przybliżone rozwiązanie równania należące do przedziału $\langle 2\pi; 3\pi\rangle$. Skorzystaj z informacji zamieszczonych obok.

a) $\operatorname{tg} x = 0{,}3249$ b) $\operatorname{tg} x = -1{,}3764$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \approx 0{,}3249$

$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} \approx 1{,}3764$

5. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; 2\pi\rangle$, korzystając z danych z tabeli.

a) $\operatorname{tg} x = 2-\sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}-1$

c) $\operatorname{ctg} x = 2-\sqrt{3}$

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\operatorname{tg} x$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$2+\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$

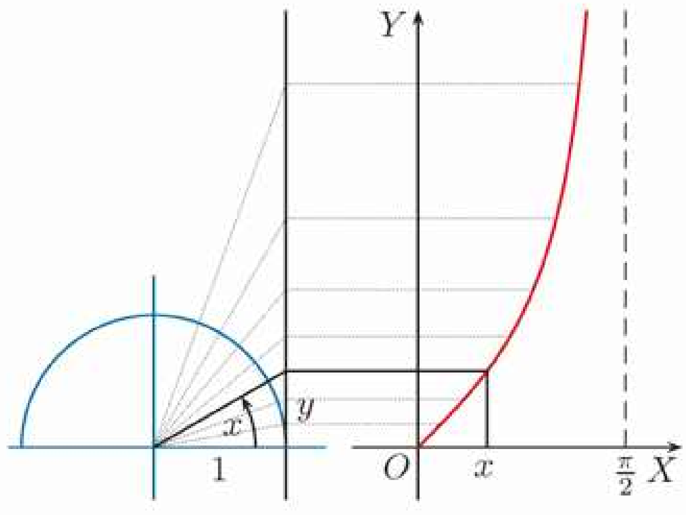
6. Rozwiąż równanie, korzystając z danych z powyższej tabeli.

a) $\operatorname{tg} x = 1-\sqrt{2}$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}-2$

c) $\operatorname{ctg} x = -1-\sqrt{2}$

7. Objaśnij sposób otrzymywania tangensoidy dla $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$, korzystając z rysunku obok.

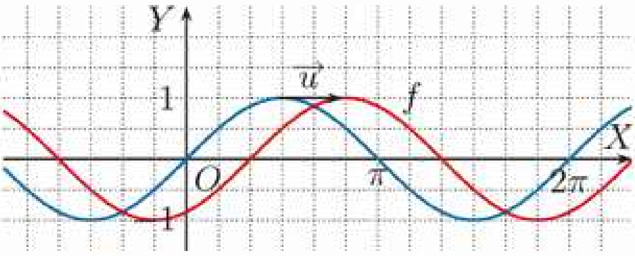


*1.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

Przykład 1

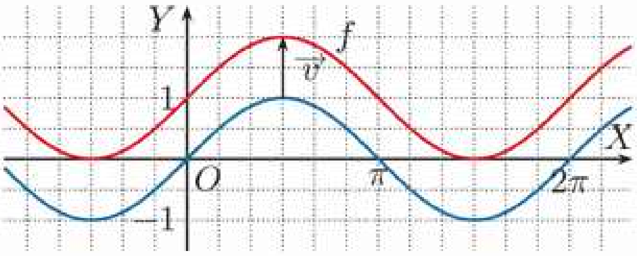
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\overrightarrow{u} = [\frac{\pi}{3}, 0]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

b) $f(x) = \sin x + 1$



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\overrightarrow{v} = [0, 1]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; 2 \rangle$.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości oraz okres podstawowy.

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$
b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$
c) $f(x) = \sin x - 1$
d) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$
e) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 1$
f) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$

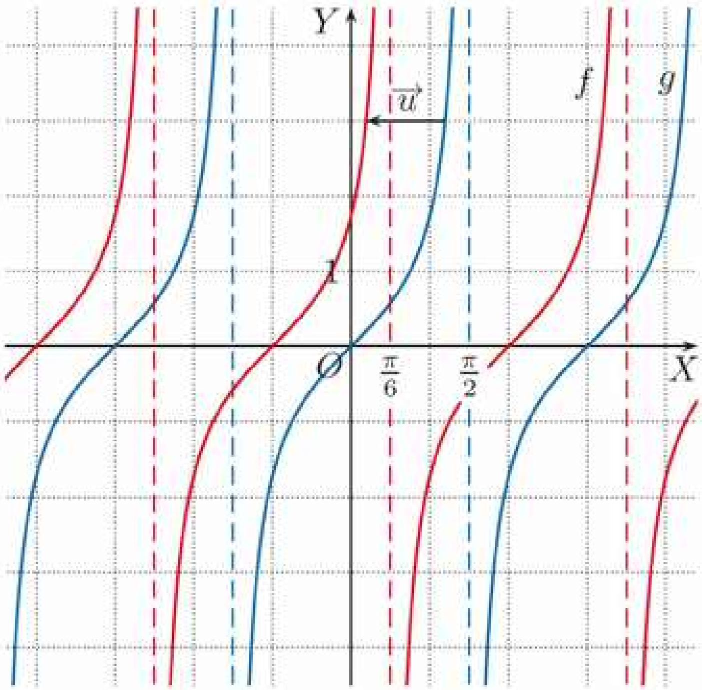
Zauważmy, że przesunięcie wykresu funkcji o wektor nie zmienia jej okresu podstawowego.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \operatorname{tg}(x + \tfrac{\pi}{3})$$

i podaj jej dziedzinę.



Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ o wektor $\overrightarrow{u} = [-\frac{\pi}{3}, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

$$D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{6} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z} \right\}$$

Ćwiczenie 2

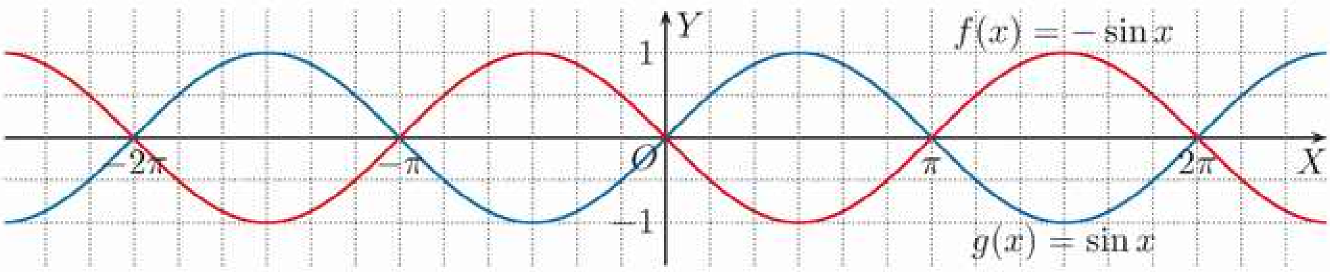
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
c) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$
d) $f(x) = \operatorname{ctg} x - 2$
e) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$
f) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\sin x$.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $g(x) = \sin x$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

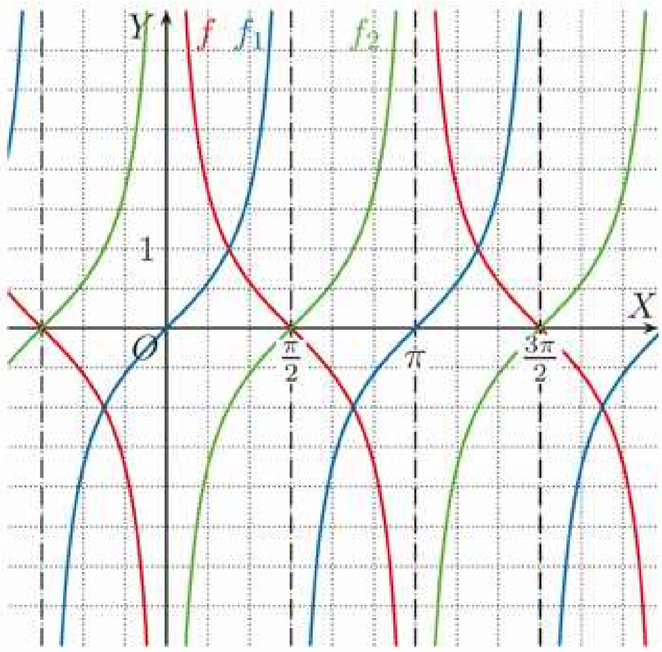
b) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Podaj przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



Szkicujemy kolejno wykresy funkcji: $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, $f_2(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Zauważ, że $-\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg} x$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ b) $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podana równość jest prawdziwa. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ e) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ f) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ e) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = \cos(x + \pi)$ f) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

2. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin x + 3$ c) $f(x) = \sin x - 2$ e) $f(x) = 2 - \cos x$

b) $f(x) = \cos x + 2$ d) $f(x) = -\sin x + 1$ f) $f(x) = -\sin x - 3$

3. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$ d) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

4. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 1$

b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

5. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -\operatorname{tg} x + 1$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg} x - 1$

b) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) - 2$ d) $f(x) = 1 + \operatorname{ctg}(-x)$

6. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj równania jego asymptot.

a) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ d) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 1$

7. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

b) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

8. Naszkicuj wykres funkcji f i korzystając z niego, podaj rozwiązania równania $f(x) = a$ należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $a = \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Podaj zbiór wartości funkcji f.

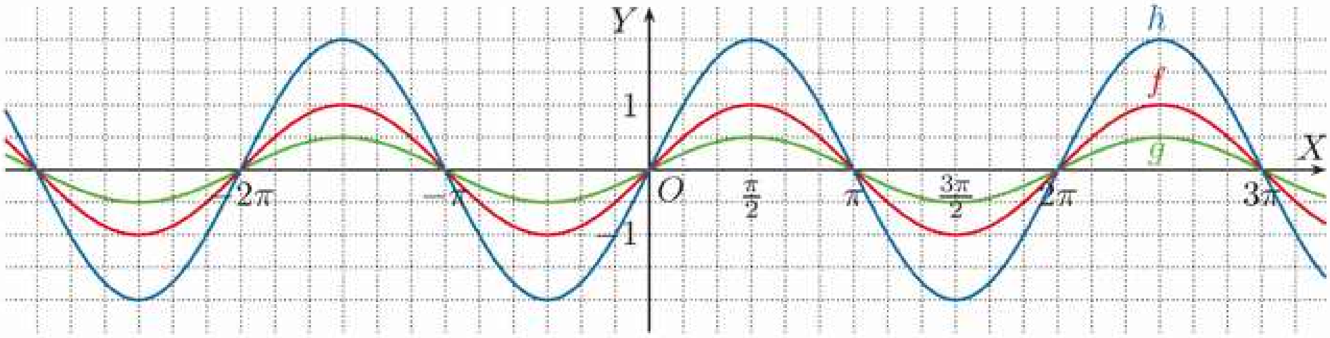
a) $f(x) = \sin x + 4$ d) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ g) $f(x) = \sin^2 x + 1$

b) $f(x) = \sin x - 3$ e) $f(x) = 3 - \cos x$ h) $f(x) = 1 - \cos^2 x$

c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}$ f) $f(x) = -1 - \sin x$ i) $f(x) = 2 + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

*1.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ (kolor zielony), $f(x) = \sin x$ (kolor czerwony), $h(x) = 2\sin x$ (kolor niebieski).



Zauważmy, że jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ należy punkt (x_0, y_0), to do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ należy punkt $\left(x_0, \frac{1}{2}y_0\right)$, a do wykresu funkcji $h(x) = 2\sin x$ – punkt $(x_0, 2y_0)$. Wykres funkcji g jest „ściśnięty” wzdłuż osi OY w stosunku do wykresu funkcji f, a wykres funkcji h – „rozciągnięty”.

Definicja

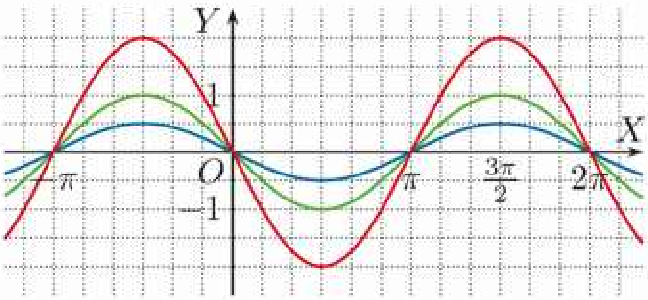
Dla funkcji $y = a\sin x$ oraz dla funkcji $y = a\cos x$, $a \neq 0$, liczbę $|a|$ nazywamy **amplitudą** wykresu tej funkcji.

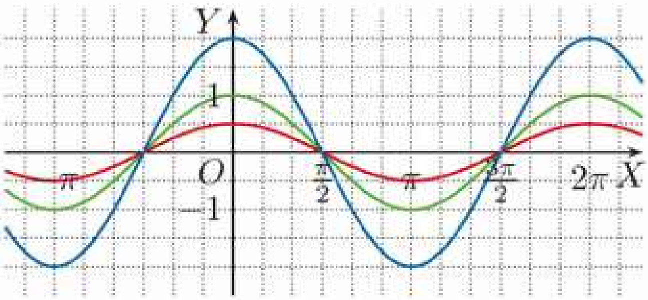
Ćwiczenie 1

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji: f, g i h. Dobierz wzór do każdego wykresu i podaj zbiór wartości każdej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$, $g(x) = -\sin x$, $h(x) = -2\sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 2\cos x$





Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f, podaj jej zbiór wartości i amplitudę jej wykresu.

a) $f(x) = 3\sin x$

b) $f(x) = 4\cos x$

c) $f(x) = \frac{3}{2}\sin x$

d) $f(x) = -2\cos x$

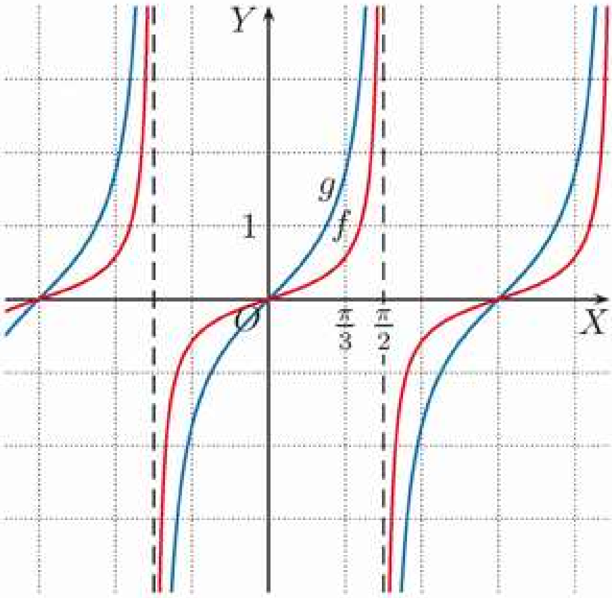
e) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$

f) $f(x) = -2{,}5\sin x$

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

Szkicujemy wykres funkcji f, korzystając z tego, że jeśli do wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ należy punkt (x_0, y_0), to do wykresu funkcji f należy punkt $\left(x_0, \frac{1}{3}y_0\right)$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

Zadania

1. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f, g i h.

a) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

b) $f(x) = 3\cos x$, $g(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $h(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

d) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $h(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 3$

2. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

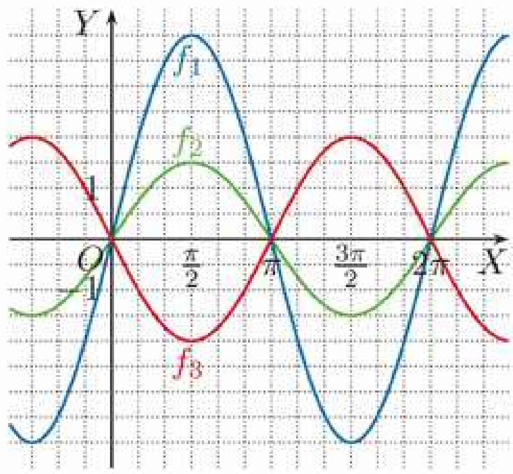
c) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$

d) $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -2\operatorname{tg} x$ b) $f(x) = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f_1(x) = a_1 \sin x$, $f_2(x) = a_2 \sin x$, $f_3(x) = a_3 \sin x$. Wyznacz: a_1, a_2, a_3. Podaj amplitudy tych wykresów.



5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a\cos x$, jeśli: a) $f(\pi) = -\frac{3}{2}$, b) $f(\pi) = 2$.

6. Punkt P należy do wykresu funkcji f. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $f(x) = a\sin x$, $P\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$

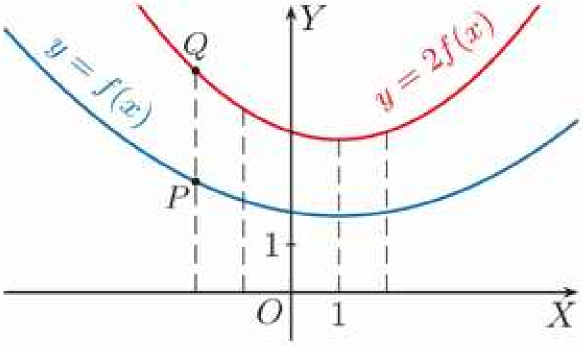
b) $f(x) = a\cos x$, $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

c) $f(x) = a\operatorname{tg} x$, $P\left(-\frac{\pi}{6}, 1\right)$

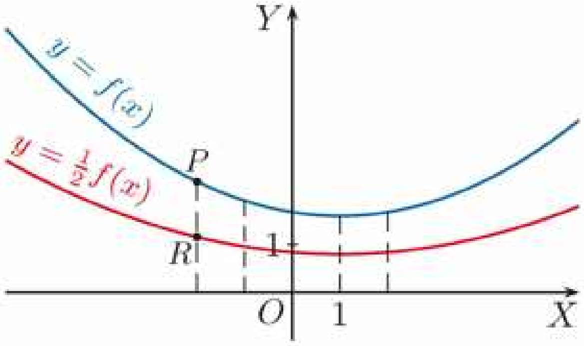
d) $f(x) = a\operatorname{ctg} x$, $P\left(\frac{4}{3}\pi, -6\right)$

7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = 2f(x)$ oraz wykres funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$.



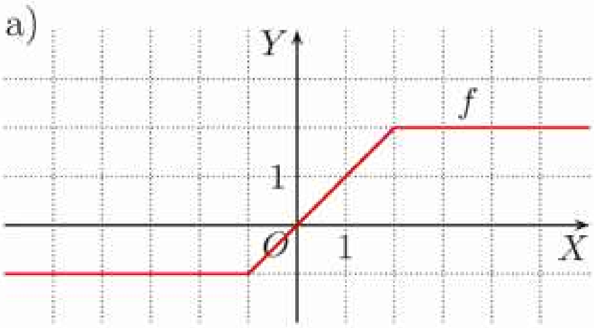
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = 2f(x)$ należy punkt $Q(x_0, 2y_0)$.



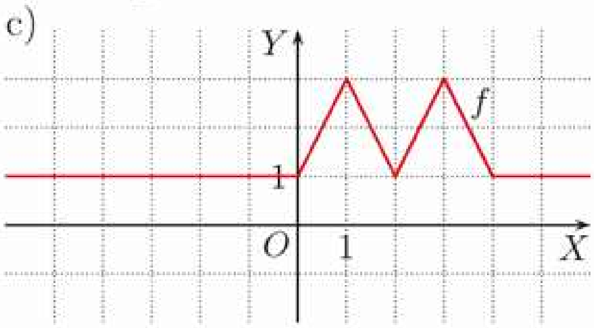
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}f(x)$ należy punkt $R(x_0, \frac{1}{2}y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji $y = 2f(x)$ oraz $y = \frac{1}{2}f(x)$.

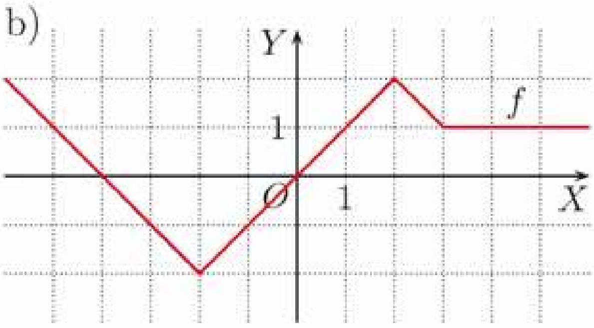
a)



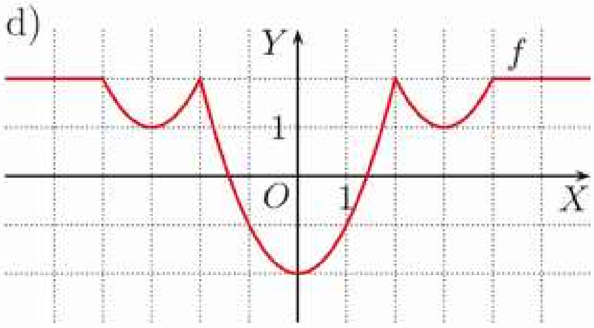
c)



b)



d)



8. Naszkicuj wykresy funkcji: f, g i h.

a) $f(x) = x$, $g(x) = 3f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = \frac{1}{4}f(x)$

c) $f(x) = |x|$, $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = -\frac{1}{3}f(x)$

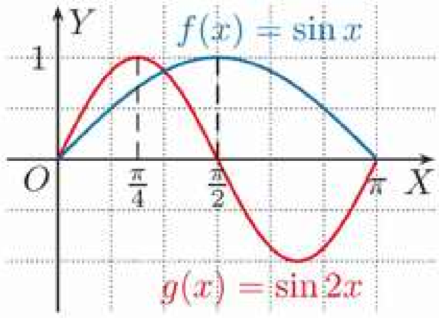
d) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{3}{2}f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$

9. Czy wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = af(x)$, gdzie $a \neq 1$, mogą mieć punkty wspólne?

*1.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

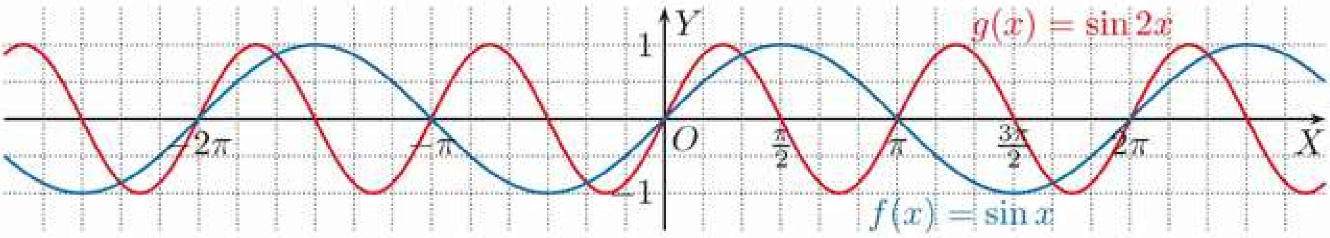
W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin 2x$. Na rysunku przedstawiono wykresy tych funkcji dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
$\sin 2x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



Zauważ, że funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{2}$, natomiast funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 1 dla $x = \frac{\pi}{4}$.

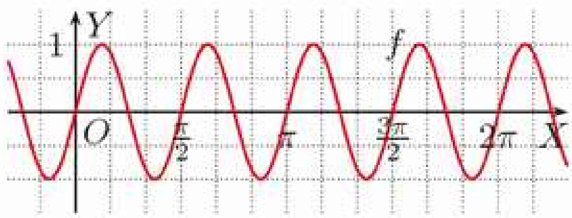
Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $2x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, czyli dla $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin 2x$ jest równy π.



Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „ściśnięty” wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

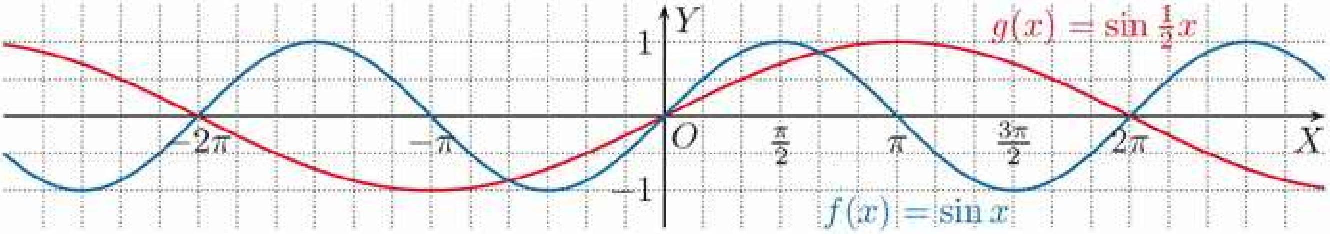
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin 4x$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.



Przykład 1

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ i naszkicuj jej wykres.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $\frac{1}{2}x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, czyli dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ jest równy 4π.

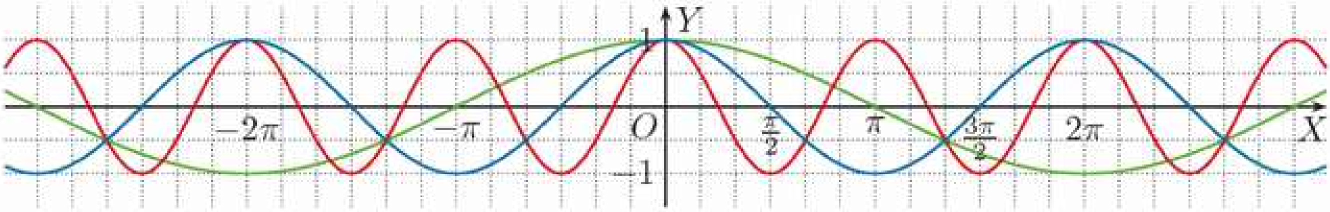


Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „rozciągnięty” wzdłuż osi OX.

Okres podstawowy funkcji $y = \sin ax$ oraz funkcji $y = \cos ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{2\pi}{a}$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$ i $h(x) = \cos \frac{1}{2}x$. Dobierz wzór do każdego wykresu. Podaj okres podstawowy oraz miejsca zerowe każdej z funkcji: f, g i h.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

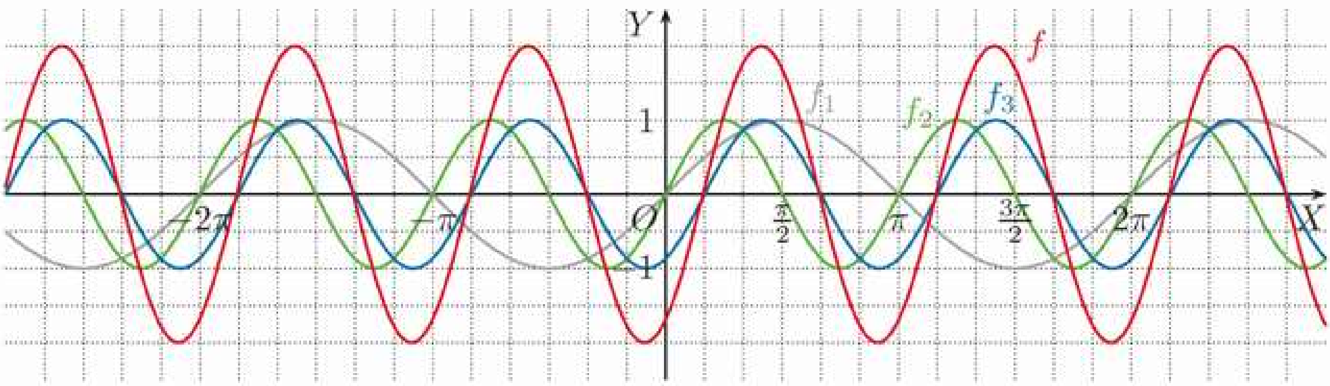
a) $f(x) = \cos 4x$ b) $f(x) = \sin 3x$ c) $f(x) = -\cos \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = -\sin \frac{1}{2}x$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, a następnie szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ i $f(x) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f.

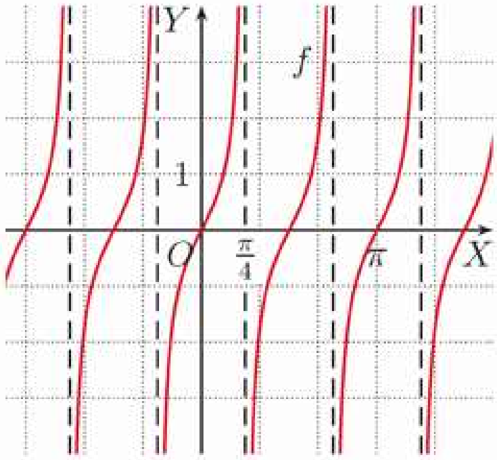
a) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Ćwiczenie 5

Podaj miejsca zerowe funkcji f należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = \sin 4x$ b) $f(x) = 2\sin \frac{x}{4}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos \pi x$

Przykład 3



Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 2x$. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

Okres podstawowy funkcji f jest równy $\frac{\pi}{2}$.
$\operatorname{tg} 2x = 0$ dla $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

> Okres podstawowy funkcji $y = \operatorname{tg} ax$ oraz $y = \operatorname{ctg} ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{\pi}{a}$.

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \pi x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = 3\sin 2x$ c) $f(x) = -2\sin 3x$ e) $f(x) = 4\cos 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ d) $f(x) = 3\cos\frac{x}{2}$ f) $f(x) = 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$

2. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = 3\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \sin 2(x - \pi)$ e) $f(x) = 2\sin(\pi - 2x)$

c) $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

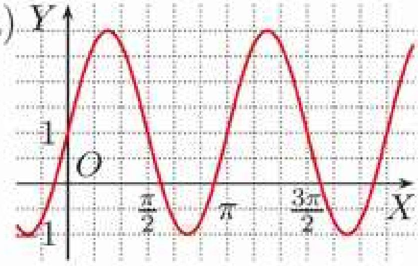
3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

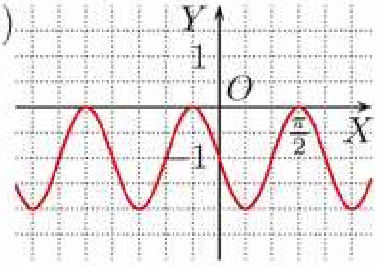
a) $f(x) = \sin \pi x$ b) $f(x) = \cos 2\pi x$ c) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

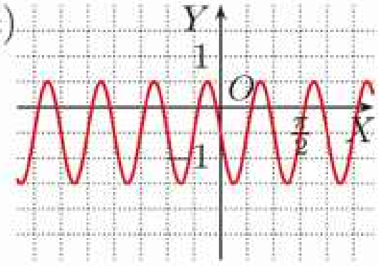
4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą tej funkcji.

a) $f(x) = 2\sin(3x + \pi) + 1$ b) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = A\sin Bx + C$, gdzie A, B, C są pewnymi stałymi. Wyznacz ich wartości.

a)


b)


c)


6. Wyznacz dziedzinę oraz miejsca zerowe funkcji f i funkcji g. Naszkicuj ich wykresy oraz podaj okresy podstawowe.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$

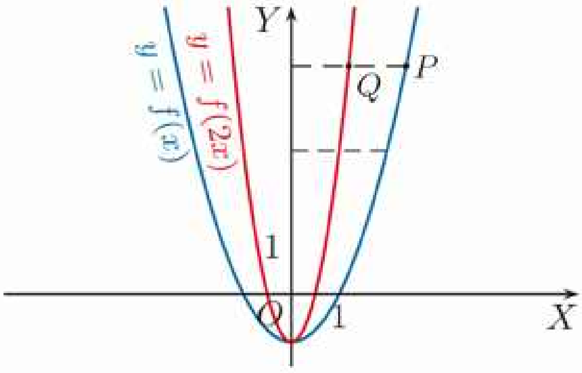
b) $f(x) = -\operatorname{tg} 2x$, $g(x) = -\operatorname{tg} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$, $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$

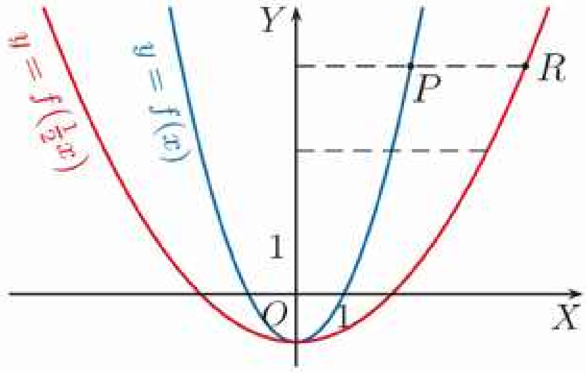
d) $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right)$

7. Przeczytaj informację w ramce.

Na rysunkach poniżej pokazano, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = f(2x)$ oraz wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



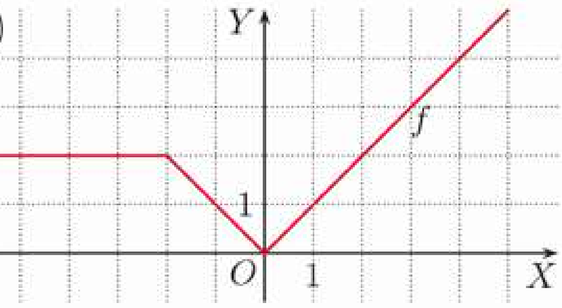
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f(2x)$ należy punkt $Q\left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$.



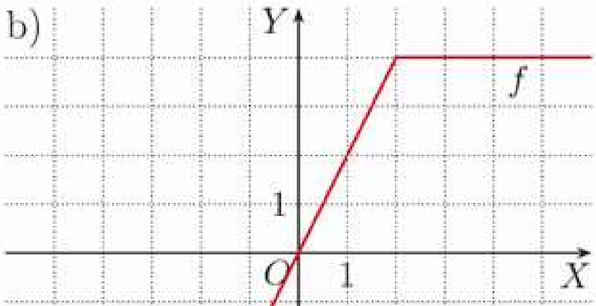
Jeśli do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt $P(x_0, y_0)$, to do wykresu funkcji $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ należy punkt $R\,(2x_0, y_0)$.

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(2x)$ oraz $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

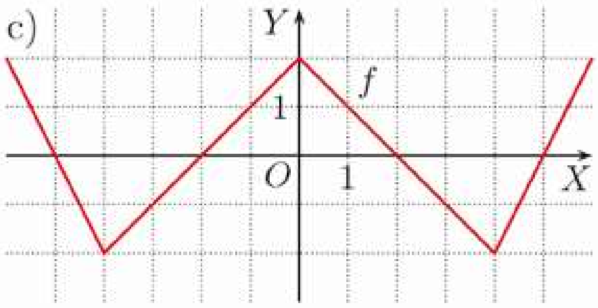
a)



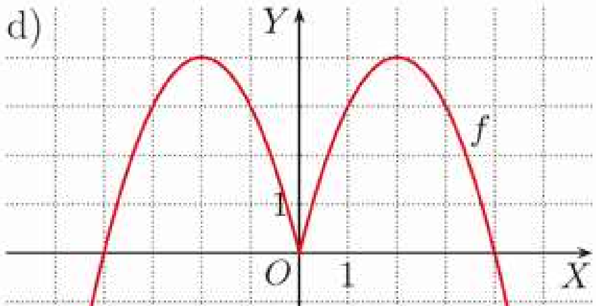
b)



c)



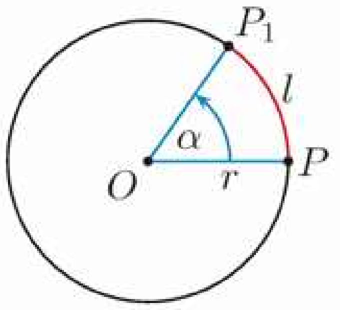
d)



Warto wiedzieć

Ruch po okręgu

Jeśli ciało poruszające się po okręgu przemieściło się z punktu P do punktu P_1 w czasie t, to opisując ten ruch, możemy podać zarówno **prędkość kątową** $\omega = \frac{\alpha}{t}$ (stosunek kąta obrotu α do czasu t), jak i **prędkość liniową** $v = \frac{l}{t}$ (stosunek długości łuku l do czasu t).



Prędkość kątową ω zwykle podaje się w radianach na sekundę [rad/s]. Miara łukowa kąta α to stosunek długości łuku l do promienia r ($\alpha = \frac{l}{r}$), więc otrzymujemy $\omega = \frac{l}{r \cdot t}$ i stąd mamy zależność $v = r \cdot \omega$.

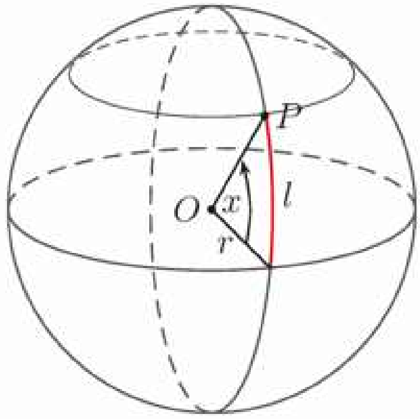
Przykład

Ziemia wykonuje pełny obrót wokół swojej osi w ciągu 24 godzin, zatem prędkość kątowa jej ruchu obrotowego jest równa:

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ [rad/h]}$$

Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370 km, to punkt na jej równiku porusza się na skutek ruchu obrotowego z prędkością liniową:

$$v = r\omega = 6370 \cdot \frac{\pi}{12} \approx 1668 \text{ [km/h]}$$



Dla punktu P leżącego na szerokości geograficznej x prędkość liniowa wyraża się wzorem:

$$v_P = v \cos x \text{ (uzasadnij)}$$

1. Oblicz, z jaką prędkością liniową porusza się punkt leżący na tym samym równoleżniku co Kraków, którego szerokość geograficzna wynosi 50°N.

2. Przednie koło bicyklu (ilustracja obok) ma średnicę równą 144 cm, a tylne 36 cm. Ile razy prędkość kątowa, z jaką podczas jazdy obraca się tylne koło, jest większa od prędkości kątowej, z jaką obraca się przednie koło?

3. Ile obrotów wykonuje w ciągu sekundy koło samochodu jadącego z prędkością 60 km/h, jeśli średnica koła jest równa 52 cm? Z jaką prędkością kątową (w radianach na sekundę) obraca się to koło?

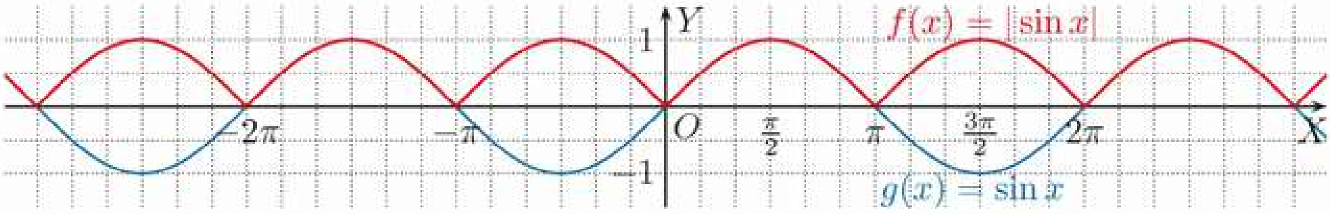
4. Przedni wał walca drogowego ma średnicę 2 m. Gdy walec jechał po prostej drodze, jego przedni wał wykonał w ciągu pół godziny 500 obrotów. Z jaką prędkością poruszał się walec? Z jaką prędkością kątową (w radianach na sekundę) poruszał się przedni wał?

*1.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ i podaj jej okres podstawowy.

Wykres funkcji $f(x) = |\sin x|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji $g(x) = \sin x$, która znajduje się pod osią OX. Pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.



Okres podstawowy funkcji f jest równy π.

Ćwiczenie 1

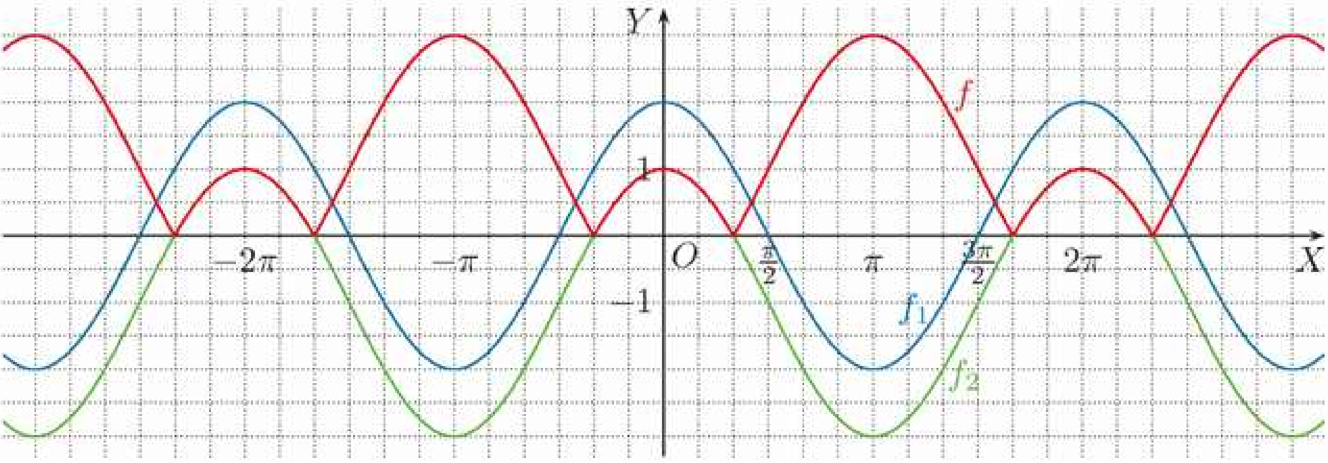
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

a) $f(x) = |\cos x|$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = -|\sin x|$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2\cos x - 1|$ i podaj jej okres podstawowy.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:
$f_1(x) = 2\cos x$, $f_2(x) = 2\cos x - 1$ i $f(x) = |2\cos x - 1|$.



Okres podstawowy funkcji f jest równy 2π.

Ćwiczenie 2

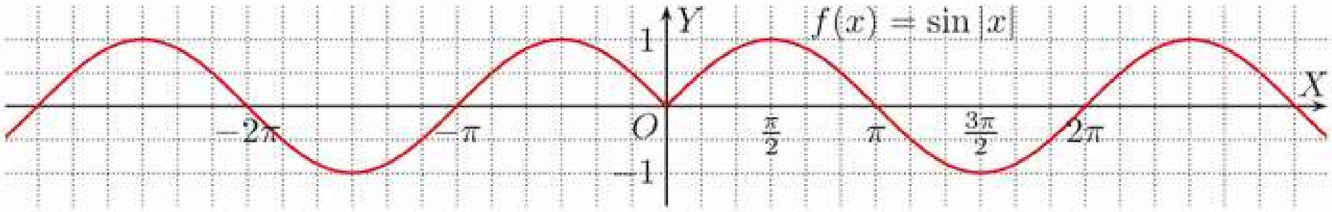
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f, g i h. Podaj okresy podstawowe tych funkcji.

a) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = |\sin 2x|$, $h(x) = |\sin 2x| - 1$
b) $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = |\cos 3x|$, $h(x) = |\cos 3x| + 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$. Czy funkcja f jest okresowa?

Wykres funkcji $f(x) = \sin|x|$ jest symetryczny względem osi OY. Dla $x \geqslant 0$ wykres funkcji f pokrywa się z wykresem funkcji $y = \sin x$. Zauważ, że dla $x < 0$ wykres funkcji f pokrywa się z wykresem funkcji $y = -\sin x$.



Funkcja f nie jest funkcją okresową.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f. Czy funkcja f jest okresowa?

a) $f(x) = \sin\left|x - \frac{\pi}{6}\right|$ b) $f(x) = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = \cos\left(|x| + \frac{\pi}{3}\right)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ c) $f(x) = 2|\sin x| - 1$ e) $f(x) = \left|\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

b) $f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ d) $f(x) = -3|\cos x|$ f) $f(x) = 2 - |3\sin x|$

2. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$ c) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$

b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 1$ d) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$ f) $f(x) = \left|\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = |\cos 2x|$ c) $f(x) = |2\sin 3x|$ e) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$

b) $f(x) = |\sin \frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = |4\cos 3x|$ f) $f(x) = |\operatorname{ctg} \frac{1}{2}x|$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

a) $f(x) = |\sin x| + 2$ b) $f(x) = |\cos x| - 1$ c) $f(x) = |\sin(x-\pi)| - 1$

5. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin|2x|$ c) $f(x) = 2 - \sin|x|$ e) $f(x) = 2\sin|2x| - 1$

b) $f(x) = \cos\left|\frac{1}{2}x\right|$ d) $f(x) = 1 - \cos|x|$ f) $f(x) = 3\cos|2x| + 1$

6. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj przedziały, w których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

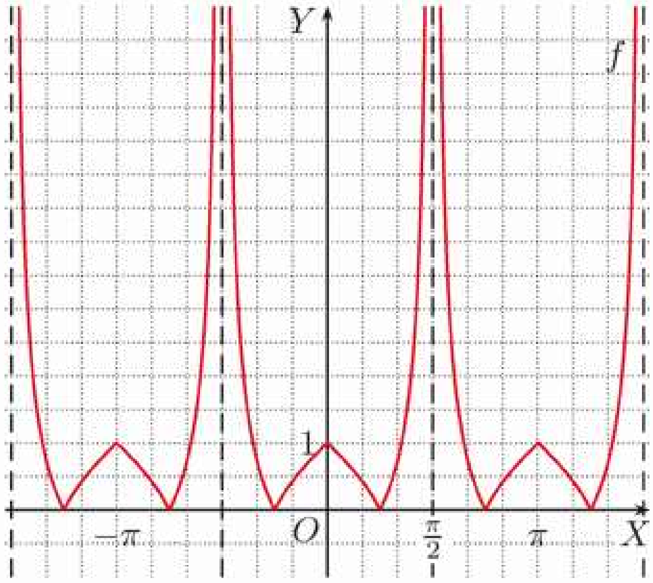
a) $f(x) = |\sin x| + \sin x$

b) $f(x) = |\cos x| + \cos x$

c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \big||\operatorname{tg} x| - 1\big|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $\langle -\pi; \pi\rangle$ w zależności od parametru m.



8. Podaj zbiory wartości funkcji f oraz funkcji $g(x) = |f(x)|$.

a) $f(x) = 3\sin 2x$ c) $f(x) = 2\sin x - 3$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos \pi x - 1$

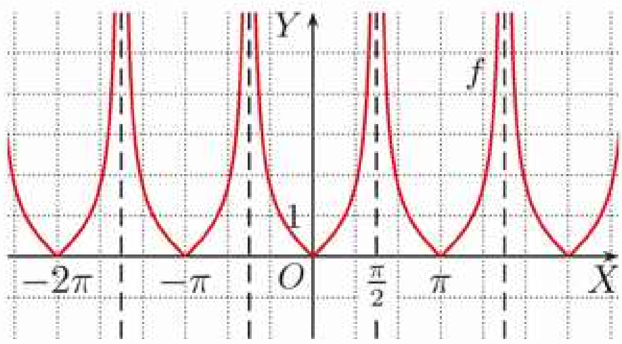
b) $f(x) = \sin 3x + 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$ f) $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-1}$

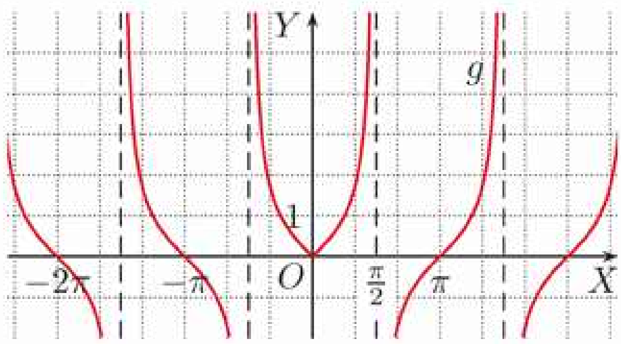
9. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązania?

a) $f(x) = |3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)|$ c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 2$ e) $f(x) = \frac{1}{|2-\cos x|}$

b) $f(x) = 2 - |\cos 2x|$ d) $f(x) = |\operatorname{tg}^2 x - 4|$ f) $f(x) = \frac{1}{2-|\cos x|}$

10. Podaj rozwiązania równania $|\operatorname{tg} x| = 1$ oraz równania $\operatorname{tg}|x| = 1$ należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi\rangle$. Skorzystaj z wykresów funkcji $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ i $g(x) = \operatorname{tg}|x|$.





11. Naszkicuj wykres funkcji f.

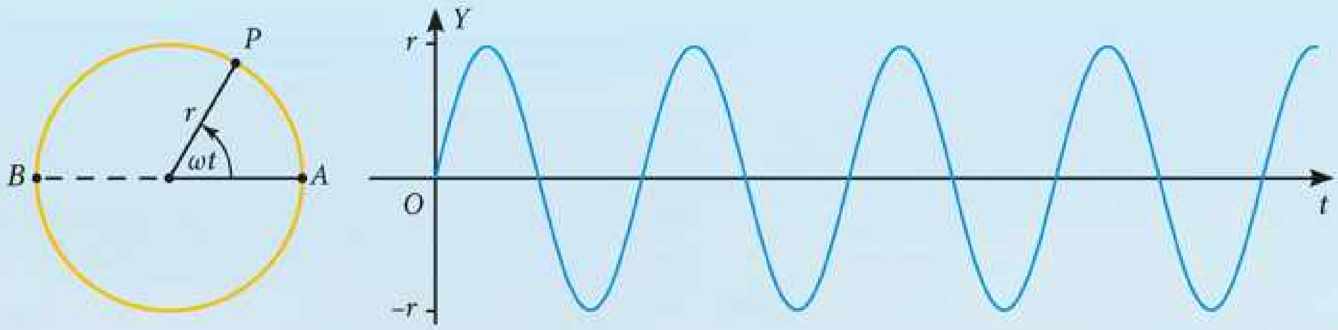
a) $f(x) = -\operatorname{tg}|x| + 1$ b) $f(x) = \operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(|x| - \frac{\pi}{3})$

12. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ b) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$

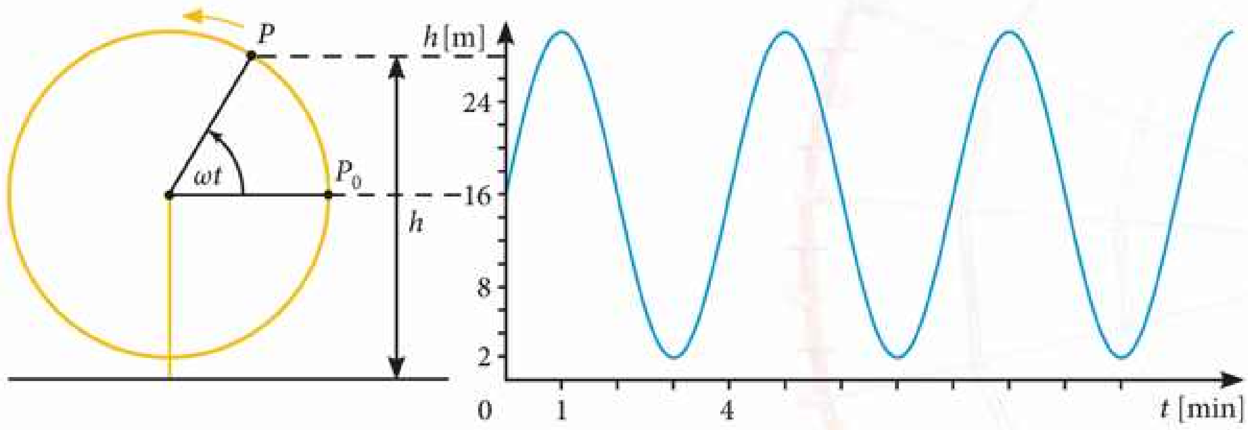
Ruch po okręgu a sinusoida

Na rysunku niżej punkt P porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością kątową ω po okręgu o promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (prędkość kątowa to stosunek kąta zakreślonego podczas ruchu do czasu, w którym to nastąpiło). Początkowe położenie punktu P oznaczono przez A – jest to jeden z końców poziomej średnicy AB. Wykres przedstawiający zmiany odległości punktu P od średnicy AB w czasie jest sinusoidą.



Diabelski młyn

Diabelski młyn to obracające się wielkie koło, na którym są zamocowane wagoniki. Na rysunku schematycznie pokazano diabelski młyn o średnicy 28 m, obracający się ze stałą prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wagonik w najniższym położeniu jest zawieszony 2 m nad ziemią, a jeden pełny obrót koła trwa 4 minuty.



Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ wagonik znajdował się w punkcie P_0, czyli 16 m nad ziemią. Wysokość h, na której wagonik znalazł się po upływie czasu t (punkt P na rysunku), jest opisana wzorem:

$$h(t) = 14 \sin(\omega t) + 16$$

1 Na jakiej wysokości nad ziemią znajdzie się ten wagonik po upływie 5 minut? A na jakiej po upływie 8 minut?

*1.11. Tożsamości trygonometryczne

Tożsamość trygonometryczna to taka równość, w której występują funkcje trygonometryczne i która jest prawdziwa dla tych wszystkich wartości zmiennej, dla których wyrażenia występujące w tej równości mają sens.

Przypomnijmy, że między wartościami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego x zachodzą podane obok związki.
Równości te są też prawdziwe dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$, dla którego obie strony równości są określone.

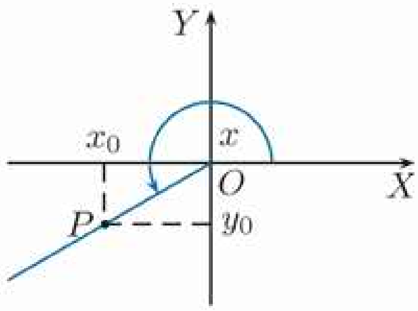
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ — jedynka trygonometryczna
2. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$
3. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$
4. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ oraz $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \colon k \in \mathbf{Z}\}$

Dowód jedynki trygonometrycznej

Niech punkt $P(x_0, y_0)$, różny od początku układu współrzędnych, będzie dowolnym punktem na ramieniu końcowym kąta x. Wówczas:



$$\sin x = \frac{y_0}{r}, \quad \cos x = \frac{x_0}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Zatem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{y_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{r^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2} = 1$$

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij tożsamości trygonometryczne: 2, 3 i 4.

D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$

b) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \colon k \in \mathbf{Z}\}$

D Przykład 1

Udowodnij, że $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Zakładamy, że tangens jest określony, $1 + \sin x \neq 0$ oraz $\cos x \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

$$\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} =$$

Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$= \frac{\sin x(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} =$$

$$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} =$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x}$$

D Ćwiczenie 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

c) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x$

d) $\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x$

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że podane wyrażenie jest równe 1 dla wszystkich x, dla których jest określone.

a) $\frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 1}$

b) $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

c) $\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{1 - \sin^2 x \cos^2 x}$

Czasami, aby udowodnić tożsamość trygonometryczną, warto przekształcić zarówno jej prawą, jak i lewą stronę.

D Przykład 2

Udowodnij, że $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$\mathrm{L} = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

Przekształcamy lewą stronę równości.

$$\mathrm{P} = 1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

Przekształcamy prawą stronę równości.

Równość $\mathrm{L} = \mathrm{P}$ zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, zatem udowodniliśmy powyższą tożsamość trygonometryczną.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x}$

b) $\frac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2$

Przykład 3

Oblicz $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, jeśli wiadomo, że $\sin x = \frac{3}{5}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Wartość $\cos x$ obliczamy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}$$

$$\cos x = -\tfrac{4}{5} \text{ lub } \cos x = \tfrac{4}{5}$$

Dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ cosinus jest ujemny, zatem $\cos x = -\frac{4}{5}$. Stąd:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\tfrac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\tfrac{4}{3}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\sin x = -\frac{4}{5}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

b) $\cos x = -\frac{12}{13}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

c) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ i $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

D

Ćwiczenie 7

Udowodnij powyższe tożsamości trygonometryczne.

Przykład 4

Oblicz $\cos x$ i $\sin x$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

Korzystamy z tożsamości $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ i otrzymujemy:

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

stąd $\cos^2 x = \frac{1}{10}$, czyli $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Dla $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ cosinus jest dodatni, zatem $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Korzystamy z tożsamości $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ i otrzymujemy:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cos x = -\tfrac{3\sqrt{10}}{10}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

d) $\operatorname{ctg} x = -4$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

Zadania

D **1.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $(1+\cos x)(1-\cos x)=\sin^2 x$

b) $\cos x\sin^2 x+\cos^3 x=\cos x$

c) $1-2\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^2$

d) $2\sin^2 x-1=1-2\cos^2 x$

e) $\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x\cos^2 x=1$

f) $\cos x+\operatorname{tg}^2 x\cos x=\frac{1}{\cos x}$

D **2.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg} x$

b) $\frac{\operatorname{tg} x+\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

c) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

d) $\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2}{\sin x}$

e) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$

f) $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{2}{\cos x}$

D **3.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}-\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{-4\sin x}{\cos^2 x}$

b) $\frac{\operatorname{tg} x(1+\operatorname{ctg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin x\cos x}$

c) $\frac{\operatorname{ctg} x+1}{\operatorname{ctg} x-1}=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$

d) $\frac{\cos x+\operatorname{tg} x\sin x}{\operatorname{ctg} x}=\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$

e) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\sin^2 x$

f) $\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+1}$

4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\cos x=-\frac{1}{4}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

b) $\cos x=-\frac{1}{4}$ i $x\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$

c) $\sin x=\frac{2}{3}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

d) $\sin x=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $x\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x (uwzględnij dwa przypadki).

a) $\sin x=\frac{1}{3}$

b) $\sin x=-\frac{12}{13}$

c) $\cos x=-\frac{2}{3}$

d) $\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

e) $\sin x=\frac{7}{25}$

f) $\cos x=-\frac{7}{25}$

g) $\sin x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

h) $\cos x=\frac{\sqrt{21}}{5}$

6. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}$ i $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

b) $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}$ i $x\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$

c) $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{ctg} x=\frac{2}{3}$ i $x\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$

7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x (uwzględnij dwa przypadki).

a) $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$

b) $\operatorname{tg} x=-4$

c) $\operatorname{tg} x=-\frac{12}{5}$

d) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$

8. Oblicz $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$ oraz $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$, jeśli $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=3$.

Warto wiedzieć

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych

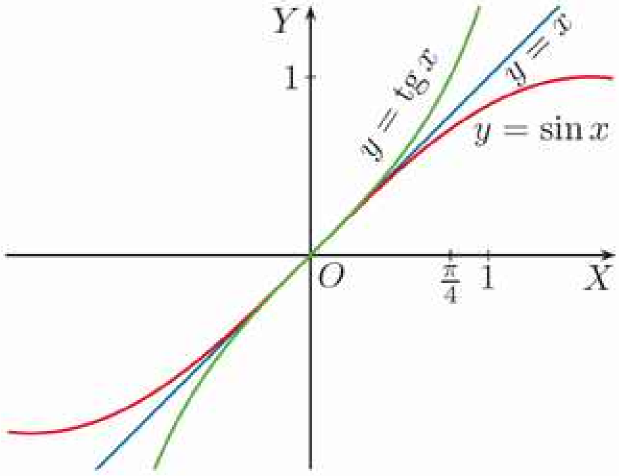
Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = x$, $y = \sin x$ i $y = \operatorname{tg} x$.

Dla „małych” kątów x wykres funkcji $y = x$ jest dobrym przybliżeniem wykresów funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \operatorname{tg} x$.

Na przykład $\frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314159$, natomiast:

$\sin \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314108$,

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314263$.



Zwróć uwagę, że:

- jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$,
- jeśli $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, to $\operatorname{tg} x > x$.

1. Nie korzystając z kalkulatora, uzasadnij podaną nierówność.

a) $\sin \frac{\pi}{20} < 0{,}2$ b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{10} > 0{,}09$ c) $\sin^2 \frac{\sqrt{\pi}}{10} < 0{,}032$

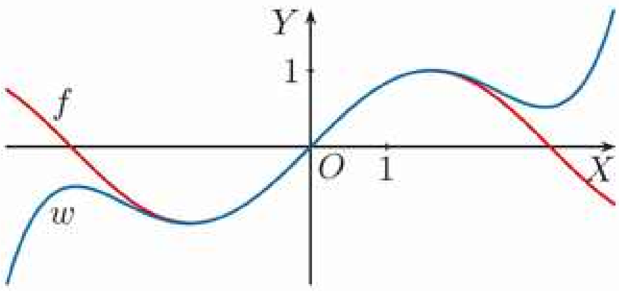
Przybliżone wartości funkcji sinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Na przykład:

$$\sin \frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \approx 0{,}707$$



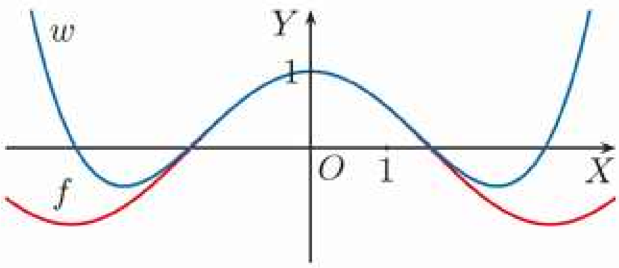
Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $w(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Przybliżone wartości funkcji cosinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Na przykład:

$$\cos \frac{\pi}{6} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \approx 0{,}8660539.$$



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \cos x$ i $w(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. Sprawdź, czy błąd podanego wyżej przybliżenia wartości $\cos \frac{\pi}{6}$ jest mniejszy od 0,00003.

3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przybliżonych wartości funkcji sinus i cosinus, korzystając z powyższych wzorów.

α	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin \alpha$	?	?	0,707
$\cos \alpha$	?	?	?

*1.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Twierdzenie

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$ sinus sumy kątów

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$ sinus różnicy kątów

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ cosinus sumy kątów

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$ cosinus różnicy kątów

Dowód wzoru na sinus sumy kątów i wskazówki, jak udowodnić pozostałe wzory, został podany na str. 75.

Przykład 1

a) Oblicz $\sin 75^\circ$.

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) Oblicz $\sin\frac{\pi}{12}$.

Korzystamy ze wzoru na sinus różnicy kątów.

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ćwiczenie 1

a) Oblicz $\cos 75^\circ$, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów.

b) Oblicz $\sin 105^\circ$, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów.

c) Oblicz $\cos\frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

Oblicz.

a) $\cos 28^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 28^\circ \cdot \sin 17^\circ = \cos(28^\circ + 17^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin 3^\circ \cdot \cos 33^\circ - \cos 3^\circ \cdot \sin 33^\circ = \sin(3^\circ - 33^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

c) $\sin\frac{3}{10}\pi \cdot \cos\frac{1}{5}\pi + \cos\frac{3}{10}\pi \cdot \sin\frac{1}{5}\pi = \sin(\frac{3}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\sin 85^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ$

b) $\sin 33^\circ \cdot \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cdot \cos 33^\circ$

c) $\cos \frac{8}{7}\pi \cdot \cos \frac{1}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi \cdot \sin \frac{1}{7}\pi$

d) $\sin \frac{\pi}{18} \cdot \sin \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{4}{9}\pi$

Ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów bezpośrednio wynikają wzory na sinus podwojonego kąta i cosinus podwojonego kąta.

D Ćwiczenie 3

Wyprowadź podane obok wzory na sinus podwojonego kąta i cosinus podwojonego kąta.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$:

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$,

b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

Przykład 3

Oblicz $\cos 2\alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \tfrac{8}{9} = \tfrac{1}{9}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$, jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$,

b) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$.

Przykład 4

Oblicz $\sin \frac{\pi}{8}$ i $\cos \frac{\pi}{8}$.

Podstawiamy $\alpha = \frac{\pi}{8}$ do wzoru $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ i otrzymujemy:

$$\cos \tfrac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \tfrac{\pi}{8}$$

$$\sin^2 \tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos \tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \tfrac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin \tfrac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Sprzeczność, bo $\sin \frac{\pi}{8} > 0$.

Po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Ćwiczenie 6

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli:

a) $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $2\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{i} \quad \alpha \neq \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbf{Z}.$$

Dowód

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

D **Ćwiczenie 7**

Udowodnij podane obok tożsamości trygonometryczne.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

a) $\operatorname{tg} 15^\circ$ b) $\operatorname{tg} 75^\circ$ c) $\operatorname{tg} 105^\circ$ d) $\operatorname{tg} 120^\circ$

D **Ćwiczenie 9**

Udowodnij, że dla $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, zachodzi tożsamość $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

Zadania

1. Oblicz $\sin(30^\circ+\beta)$ i $\sin(60^\circ-\beta)$, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\beta = \frac{4}{5}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$,
b) $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ i $\beta \in (90^\circ; 180^\circ)$,
c) $\cos\beta = \frac{5}{13}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$,
d) $\sin\beta = -\frac{7}{25}$ i $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$.

2. Oblicz $\cos(45^\circ+\beta)$ i $\cos(60^\circ-\beta)$, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$,
b) $\sin\beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$.

3. a) Oblicz $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin\alpha = \tfrac{24}{25} \text{ i } \alpha \in (0; \tfrac{\pi}{2}) \text{ oraz } \cos\beta = -\tfrac{3}{5} \text{ i } \beta \in (\tfrac{\pi}{2}; \pi)$$

b) Oblicz $\sin(\alpha-\beta)$ i $\cos(\alpha-\beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin\alpha = -0{,}8 \text{ i } \alpha \in (\tfrac{3}{2}\pi; 2\pi) \text{ oraz } \cos\beta = -0{,}75 \text{ i } \beta \in (\pi; \tfrac{3}{2}\pi)$$

c) Oblicz $\sin(\alpha-\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$, jeśli wiadomo, że:

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{3} \text{ i } \alpha \in (\tfrac{\pi}{2}; \pi) \text{ oraz } \cos\beta = \tfrac{2\sqrt{2}}{3} \text{ i } \beta \in (\tfrac{3\pi}{2}; 2\pi)$$

D **4.** Uzasadnij, że poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
b) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
c) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
d) $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$
e) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
f) $\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

D **5.** Uzasadnij, że poniższa zależność jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

c) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

d) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

6. Oblicz.

a) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$

b) $\sin 111^\circ \cos 66^\circ - \cos 111^\circ \sin 66^\circ$

c) $\sin \frac{1}{12}\pi \sin \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{1}{12}\pi \cos \frac{3}{4}\pi$

d) $\cos \frac{4}{3}\pi \cos \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi \sin \frac{2}{3}\pi$

7. Oblicz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

c) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

d) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

D **8.** a) Wyprowadź podane obok wzory.

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{12}$ i $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

9. Oblicz $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$,

b) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$.

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \sin x - \cos x$

b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

c) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$.

11. Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} + 1$, d) $\operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

12. Oblicz $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, a $\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$.

*1.13. Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0; \frac{\pi}{2})$.

Przykład 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$

Skorzystamy ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	
$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$	
$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$	
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

Ćwiczenie 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ b) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ c) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

W podanych wzorach redukcyjnych miarę kąta można przedstawić w postaci $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbf{N}$ oraz $\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right)$. Zauważmy, że:

- jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja sinus zmienia się na cosinus, a funkcja cosinus – na funkcję sinus (mówimy, że funkcja zmienia się na cofunkcję). Analogicznie jest dla pary funkcji tangens i cotangens;
- jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja pozostaje bez zmiany;
- znak plus lub minus przed funkcją zależy od tego, czy wartość wyjściowej funkcji jest dodatnia, czy ujemna w danej ćwiartce układu współrzędnych.

$\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha < 0$ $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$	$\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha > 0$ $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$
$\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha < 0$ $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$	$\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha > 0$ $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$

Dla kątów, których miary podano w stopniach, wzory redukcyjne mają następującą postać:

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	
$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	
$\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

Przykład 2

Oblicz $\sin 210^\circ$, korzystając ze wzoru $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

$\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

Zauważ, że ten sam wynik otrzymamy, zapisując kąt 210° w postaci $180^\circ + 30^\circ$ i korzystając ze wzoru $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.

Przykład 3

Oblicz $\cos(-\frac{13}{4}\pi)$.

$\cos(-\frac{13}{4}\pi) = \cos\frac{13}{4}\pi =$ — $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$= \cos(2\pi + \frac{5}{4}\pi) = \cos\frac{5}{4}\pi =$ — Korzystamy z okresowości funkcji cosinus.

$= \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} =$ — $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 240^\circ$ d) $\cos\frac{11}{3}\pi$ g) $\sin(-330^\circ)$ j) $\sin(-\frac{11}{4}\pi)$

b) $\cos 480^\circ$ e) $\sin\frac{5}{3}\pi$ h) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ k) $\cos(-\frac{16}{3}\pi)$

c) $\operatorname{tg} 225^\circ$ f) $\cos\frac{7}{6}\pi$ i) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$ l) $\operatorname{ctg}(-\frac{4}{3}\pi)$

Zadania

D **1.** Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ c) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$

b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ d) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$

2. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ d) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ g) $\sin\frac{8}{3}\pi$ j) $\cos(-11\pi)$

b) $\sin\frac{5}{4}\pi$ e) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ h) $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$ k) $\operatorname{ctg}\frac{4}{3}\pi$

c) $\cos\frac{7}{4}\pi$ f) $\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$ i) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ l) $\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi$

3. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 120^\circ$ d) $\cos 855^\circ$ g) $\operatorname{tg} 510^\circ$ j) $\sin(-870^\circ)$

b) $\sin 135^\circ$ e) $\cos 840^\circ$ h) $\operatorname{tg} 570^\circ$ k) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$

c) $\cos 330^\circ$ f) $\sin 660^\circ$ i) $\operatorname{tg} 1035^\circ$ l) $\operatorname{ctg}(-750^\circ)$

4. Oblicz, korzystając z wartości podanych obok.

a) $\sin 72^\circ$ d) $\sin 666^\circ$

b) $\cos 108^\circ$ e) $\sin(-468^\circ)$

c) $\cos 234^\circ$ f) $\cos(-864^\circ)$

α	18°	36°	54°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

5. Wiadomo, że $\cos x = \frac{1}{4}$ oraz $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Oblicz:

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

6. Oblicz.

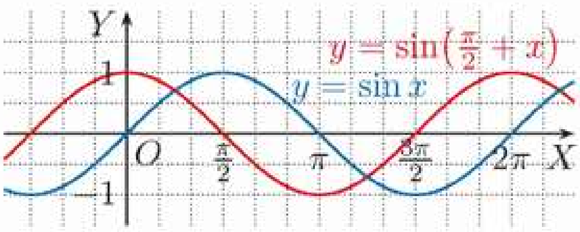
a) $2\sin 120^\circ + 4\cos 60^\circ$
b) $\sin 420^\circ\ \cos(-390^\circ)$
c) $\operatorname{ctg} 120^\circ + \operatorname{tg}(-210^\circ)$
d) $4\sin 45^\circ\ \cos 135^\circ$
e) $\operatorname{tg} 300^\circ\ \operatorname{ctg} 210^\circ$
f) $\frac{2\cos 120^\circ}{\operatorname{ctg} 120^\circ}\operatorname{tg} 45^\circ$
g) $\sin^2 310^\circ + \cos^2 310^\circ$
h) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 225^\circ$
i) $\operatorname{tg}^2 780^\circ - 3\operatorname{ctg}^2 420^\circ$

7. Oblicz.

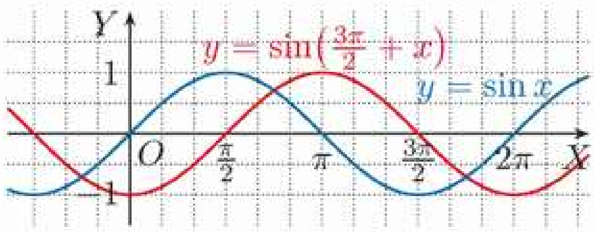
a) $\sin \frac{5}{6}\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
b) $6\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi\ \cos\frac{7}{3}\pi$
c) $8\sin\frac{5}{4}\pi\ \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$
d) $\sin\frac{7}{6}\pi + \cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$
e) $\sin^2\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + \cos^2\frac{7}{4}\pi$
f) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{7\pi}{3}$

D **8.** Przeczytaj informację w ramce.

Wzory redukcyjne można uzasadnić, korzystając z odpowiedniego przesunięcia wykresu funkcji trygonometrycznej. Poniżej przedstawiono uzasadnienia wzorów: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$ oraz $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = \cos x$.



Wykres funkcji $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = -\cos x$.

Uzasadnij wzór, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji.

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$ b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{ctg} x$

9. Korzystając z podanego obok fragmentu tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz:

a) $\sin 413^\circ$,
b) $\cos 769^\circ$,
c) $\operatorname{tg} 597^\circ$,
d) $\sin 589^\circ$,
e) $\cos 860^\circ$,
f) $\operatorname{tg} 954^\circ$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504

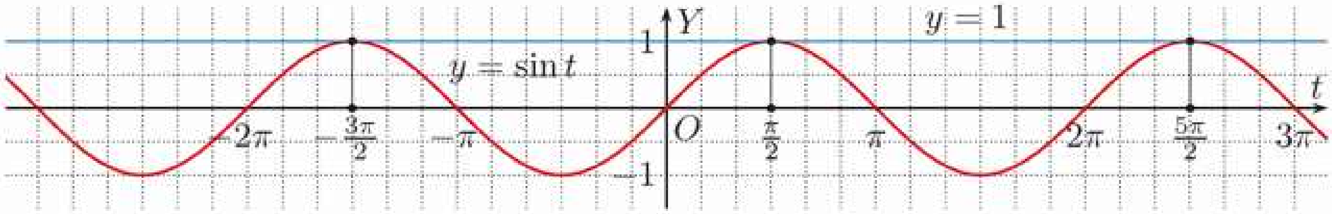
D **10.** Korzystając ze wzorów redukcyjnych, uzasadnij, że wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0^\circ; 45^\circ\rangle$.

*1.14. Równania trygonometryczne (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\sin 2x = 1$.

Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = 1$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = 1$:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

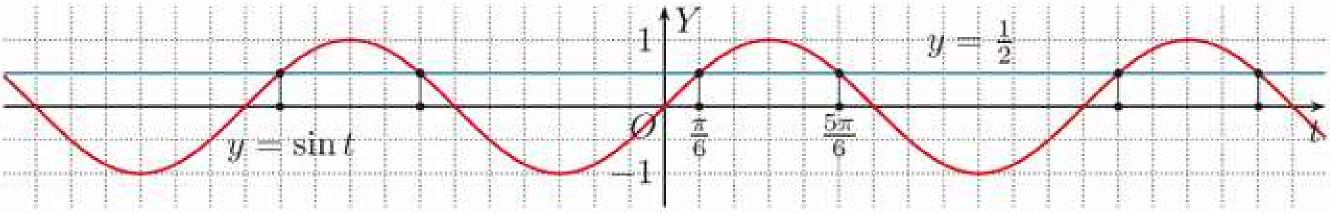
Wracamy do niewiadomej x:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Podstawiamy $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = \frac{1}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ lub }\; t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ lub }\; 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\text{ lub }\; 2x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \;\text{ lub }\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x = 1$

b) $\cos 2x = -1$

c) $\cos 4x = \frac{1}{2}$

d) $2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

e) $\cos(3x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

g) $6\sin(\pi - \frac{\pi x}{4}) = 3$

h) $2\sin \pi x - \sqrt{3} = 0$

i) $2\cos 2\pi x + \sqrt{2} = 0$

Przykład 3

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania $\sin^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1, \text{ gdy } \sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -1$$

Pierwiastkami równania $\sin^2 x = 1$ są liczby postaci: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Suma dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania jest równa:

$$\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right) = 10 \cdot \frac{\pi}{2} + (1 + 2 + \ldots + 9)\pi =$$
$$= 5\pi + 45\pi = 50\pi$$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania.

a) $\cos^2 x = 1$ b) $2\sin^2 x = 1$ c) $4\sin^2 x = 3$

Ćwiczenie 3

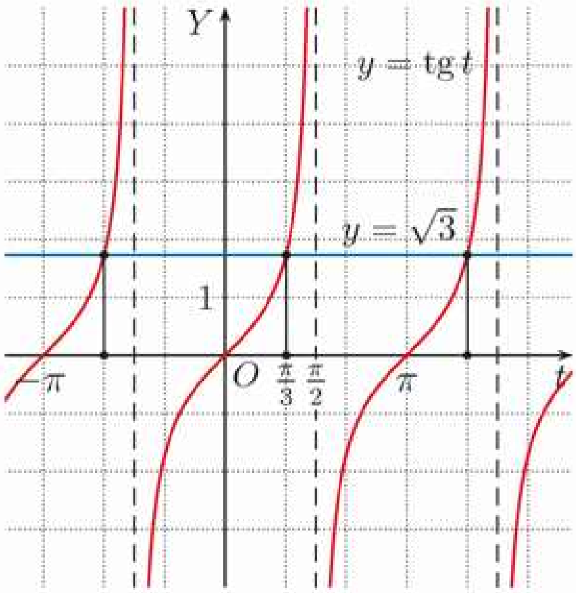
Ile pierwiastków równania należy do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$?

a) $\sin^2 3x = 1$ c) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ e) $\left|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$

b) $2\cos^2 2x = 1$ d) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$ f) $\left|\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1{,}5$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.



Zakładamy, że $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, czyli $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Podstawiamy $t = 4x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$. Z wykresu funkcji tangens odczytujemy rozwiązania tego równania: $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Wracamy do niewiadomej x:

$$4x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} 2x = -1$ c) $\operatorname{tg}^2 2x = 3$ e) $3\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b) $3\operatorname{tg} \pi x = \sqrt{3}$ d) $3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1$ f) $\sqrt{6}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg}^2 2x = 1$ b) $\operatorname{tg}^2 4x = 1$ c) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 4x = 1$ c) $2\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 1$ e) $2\cos(\frac{\pi}{4} - x) = -\sqrt{2}$

b) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ d) $\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1$ f) $2\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} 4x = -1$ c) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $3\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} 6x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ f) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 4x = 1$ c) $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$ e) $|2\cos 3x| = 1$

b) $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$ d) $6\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ f) $|\sin 2x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ b) $3\operatorname{tg}^2 \pi x = 1$ c) $\left|\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 3$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Rozwiąż równanie $\sin^2 x = 3\sin x$.
>
> $$\sin^2 x - 3\sin x = 0$$
> $$\sin x(\sin x - 3) = 0$$
> $$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = 3$$
>
> Równanie $\sin x = 3$ jest sprzeczne. Równanie $\sin x = 0$ jest spełnione przez liczby postaci $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ – jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x = -\sin x$ c) $\sin^3 x + \sin x = 0$ e) $4\sin^3 x = \sin x$

b) $2\cos^2 x = \cos x$ d) $2\cos^3 x - \cos x = 0$ f) $3\cos^3 x = 4\cos x$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ b) $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$ c) $\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$

7. Podaj rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$.

a) $2\sin^2 x = \sin x$ c) $4\cos^3 x - \cos x = 0$ e) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$

b) $2\cos^2 x = \sqrt{2}\cos x$ d) $3\sin x - 4\sin^3 x = 0$ f) $3\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\cos 2x(1 + \operatorname{tg} x) = 0$ b) $\sin x \operatorname{tg} 2x = \sin x$ c) $\cos 2x = \sin 4x$

*1.15. Równania trygonometryczne (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

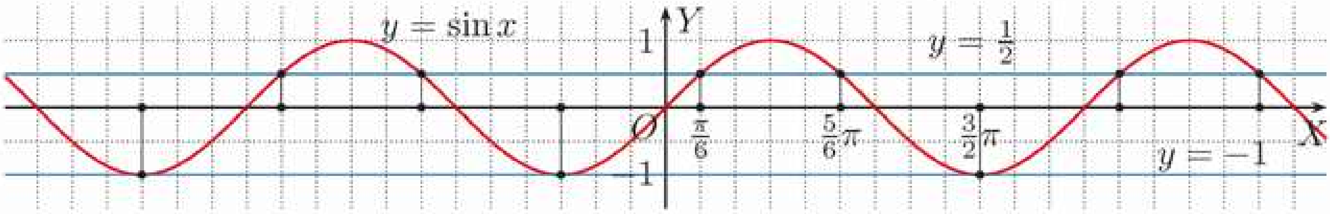
Podstawiamy $t = \sin x$, zakładamy, że $t \in \langle -1; 1\rangle$, i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \ \ \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1, \ \ t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Wracamy do niewiadomej x: $\sin x = -1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ lub } \ x = \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Uwaga. Powyższe rozwiązanie można też zapisać w postaci $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x - \cos x = 1$

b) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$

d) $\dfrac{\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{4}}{\sin x} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 2 = 0$$

$$\sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -1$$

$$x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$

b) $4\cos^2 x - \sin^2 x = -1$

c) $2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x + 1$

d) $2 + \sin^2 x = 4 - \cos^2 x + \cos x$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $2\sin x\cos x - \sin x - 2\cos x + 1 = 0$.

Grupujemy wyrazy znajdujące się po lewej stronie równania.

$$\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik.

$$(2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = 1$$

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Zatem $x \in \left\{-\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $2\sin x\cos x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$

b) $4\sin x\cos x - 2\cos x - 2\sin x + 1 = 0$

c) $2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x + 2\sin x - \sqrt{3} = 0$

d) $4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x + 3$

Przykład 4

Wyznacz te pierwiastki równania $4\cos 5x\cos 2x = 2\cos 7x + 1$, które należą do przedziału $\langle 0;\pi\rangle$.

Korzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów:

$$\cos 7x = \cos(5x + 2x) = \cos 5x\cos 2x - \sin 5x\sin 2x$$

Zatem równanie można zapisać w postaci:

$$4\cos 5x\cos 2x = 2\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\sin 2x + 1$$

$$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 5x\sin 2x = 1$$

$$2\cos(5x - 2x) = 1$$

Korzystamy ze wzoru $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

$$\cos 3x = \tfrac{1}{2}$$

$$3x = -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 3x = \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\tfrac{\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \tfrac{\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Do przedziału $\langle 0;\pi\rangle$ należą pierwiastki: $x = \tfrac{\pi}{9}$, $x = \tfrac{5}{9}\pi$, $x = \tfrac{7}{9}\pi$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz te pierwiastki równania, które należą do przedziału $\langle 0;2\pi\rangle$.

a) $2\sin 5x\sin 3x = 1 - \cos 8x$

b) $4\cos 3x\cos x = 2\cos 2x + \sqrt{3}$

c) $2\sin 3x\cos x = \sin 2x - 1$

d) $4\sin 5x\cos 3x = 2\sin 8x + \sqrt{2}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

b) $\cos^2 x + 6\cos x + 5 = 0$

c) $2\sin^2 x - \sin x = 1$

d) $\cos^2 x + 2\sin x = 1$

e) $2\sin^2 x - 3\cos x = 3$

f) $\mathrm{tg}^2\, x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 2x = \cos x$

b) $\cos x + \sin 2x = 0$

c) $\cos 2x - \sin x = 0$

d) $\cos^3 x - \cos 2x = 1$

e) $\sin 2x\,\mathrm{tg}\, x = \sin x$

f) $\sin x \cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + 1$

b) $2\sin^2 x - \sin^2 2x = \cos^2 2x$

c) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = 1 - 2\sin^2 x$

d) $\sin^2 2x + 6\sin^2 x = 6$

*e) $1 + \sin 2x = \cos 2x$

*f) $\frac{1}{2}(\cos 4x - 1) = \cos^2 x$

4. Znajdź liczby należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$ i spełniające równanie:

a) $\sin x + \cos x = 1$,

b) $\sin x - \cos x = 1$,

c) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$,

d) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$,

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$,

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$.

5. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x - \dfrac{1}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x - 1$

b) $\mathrm{tg}\, x - 2\sin x = 2 - \dfrac{1}{\cos x}$

c) $\sin 2x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}\sin x - 1$

d) $\cos 2x = 1 + 2\sqrt{2}\sin^2 x \cos x$

***6.** Wyznacz największy ujemny pierwiastek równania.

a) $4\sin 6x \cos x - 2\sin 5x = 1$

b) $2\sin 6x \sin 3x = 1 - \cos 9x$

c) $2\sin 2x \cos^2 2x - \sin 2x \cos 4x = 1$

d) $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = \mathrm{tg}\, 2x$

$\sin\beta = \sin\alpha \;\Leftrightarrow\; \beta = \alpha + 2k\pi$ lub $\beta = (\pi - \alpha) + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

$\cos\beta = \cos\alpha \;\Leftrightarrow\; \beta = \alpha + 2k\pi$ lub $\beta = -\alpha + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

***7.** Rozwiąż równanie, korzystając z powyższej własności.

a) $\sin 3x - \sin 2x = 0$

b) $\sin 4x + \sin 3x = 0$

c) $\cos 5x - \cos 3x = 0$

d) $\cos 4x + \cos 3x = 0$

e) $\cos 3x - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

f) $\sin 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Warto wiedzieć

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów

Twierdzenie

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ prawdziwe są poniższe wzory.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$ suma sinusów

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$ różnica sinusów

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$ suma cosinusów

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$ różnica cosinusów

Dowód wzoru na sumę sinusów

Niech $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, wówczas $x + y = \alpha$ oraz $x - y = \beta$. Zatem:

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y) = \\ &= \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = \\ &= 2\sin x\cos y = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

Dowody pozostałych wzorów przeprowadza się analogicznie.

Przykład

Rozwiąż równanie $\sin 5x + \sin x = 0$.

$$\begin{aligned}\sin 5x + \sin x &= 2\sin\tfrac{5x+x}{2}\cos\tfrac{5x-x}{2} = \\ &= 2\sin 3x\cos 2x\end{aligned}$$ Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów.

Zatem zapisujemy równanie w postaci:

$$2\sin 3x\cos 2x = 0$$

$$\sin 3x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = 0$$

$$3x = k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x = \tfrac{k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

1. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$

b) $\cos 5x - \sin 3x = \cos x$

c) $\cos 6x + \sin 5x + \cos 2x = \sin 3x$

d) $\cos 7x - \sin 7x = \cos x - \sin x$

2. Korzystając ze wzoru na sumę sinusów lub sumę cosinusów, oblicz wartość wyrażenia:

a) $2\cos 70^\circ\cos 10^\circ - \cos 80^\circ$,

b) $2\sin 115^\circ\cos 70^\circ - \sin 185^\circ$,

c) $\sin 37^\circ 30'\cos 7^\circ 30'$,

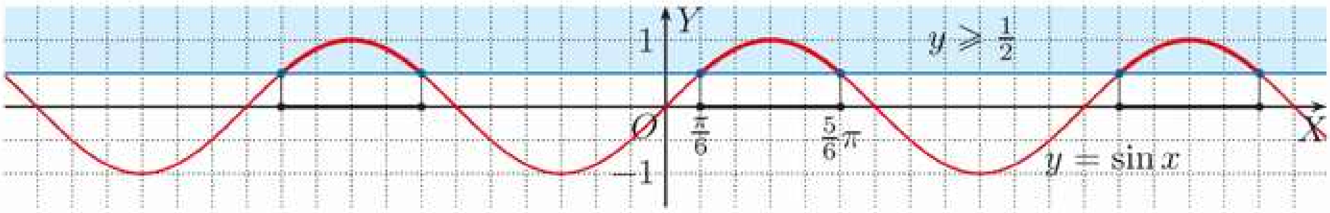
d) $\cos 52^\circ 30'\cos 7^\circ 30'$.

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź kąty α i β takie, że $\frac{\alpha+\beta}{2} = 70^\circ$ i $\frac{\alpha-\beta}{2} = 10^\circ$.

*1.16. Nierówności trygonometryczne

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Powyższy zapis oznacza, że zbiór rozwiązań nierówności jest sumą wszystkich przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

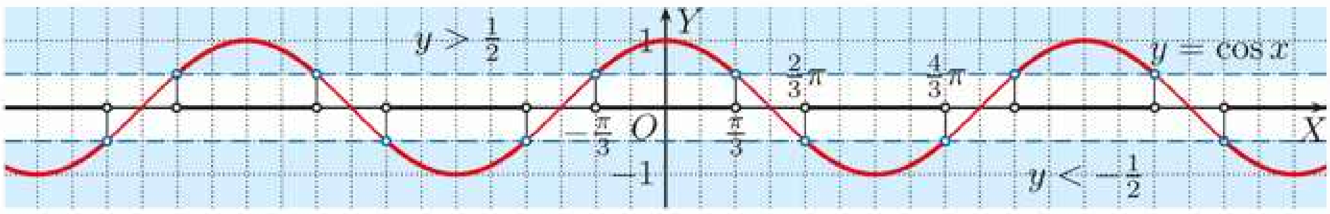
a) $2\sin x \leqslant 1$ b) $\cos x > -\frac{1}{2}$ c) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$.

Zauważmy, że nierówność $\cos^2 x > \frac{1}{4}$ jest równoważna dwóm warunkom:

$$\cos x < -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x > \frac{1}{2}$$



Z wykresu funkcji cosinus odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ lub } x \in \left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Odpowiedź można zapisać prościej: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin^2 x < 1$ b) $4\cos^2 x \geqslant 3$ c) $|\cos x| \leqslant \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi)$ zachodzi nierówność?

a) $4\sin^2 x > 3$ b) $2\cos^2 x \leqslant 1$ c) $|2\sin x| \leqslant \sqrt{2}$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$.

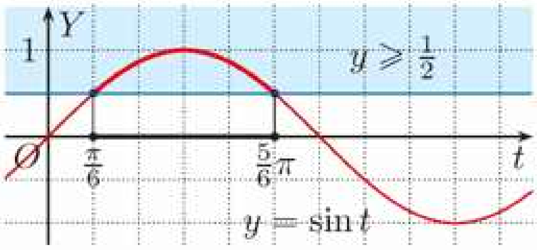
Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy nierówność $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$. Z wykresu funkcji sinus odczytujemy:

$$t \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$2x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

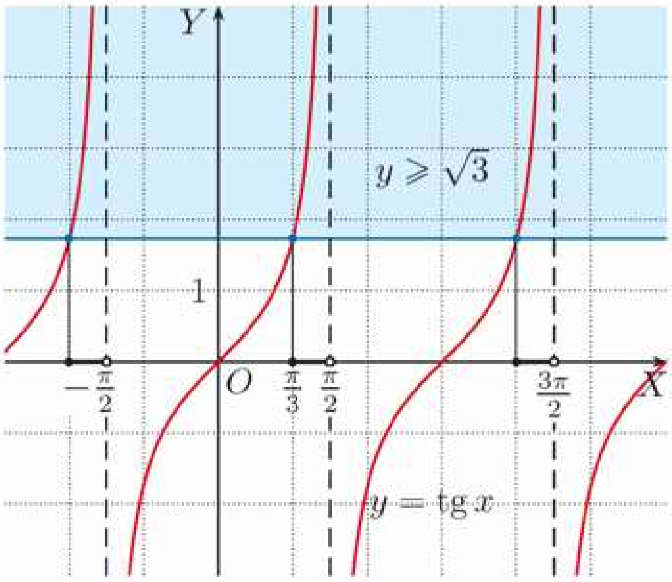
a) $\sin 3x \leqslant \frac{1}{2}$ b) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ d) $\cos^2 2x > \frac{1}{4}$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$.

Zakładamy, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Z wykresu funkcji tangens odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}$$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg} x > -1$

b) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$ d) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność: a) $\operatorname{tg}^2 x > 1$, b) $\operatorname{tg}^2 2x \leqslant 1$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich $x \in \langle 0; \pi \rangle$ zachodzi nierówność: a) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$, b) $\operatorname{tg} 4x > 1$?

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $2 \sin x < \sqrt{2}$ b) $2 \sin x \geqslant \sqrt{3}$ c) $2 \cos x \geqslant -\sqrt{3}$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin 3x \geqslant -\frac{1}{2}$ c) $2 \cos 2x \geqslant 1$ e) $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $2 \sin \frac{x}{2} < \sqrt{3}$ d) $\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \leqslant 2$ f) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x \leqslant -1$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x \geqslant 1$ c) $|\cos x| < 1$ e) $\sin^2 x < 1$

b) $\cos x < 1$ d) $|\sin x| \geqslant 1$ f) $\cos^2 x \geqslant 1$

4. Dla jakich $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$ zachodzi nierówność?

a) $|2\cos x| > 1$ c) $\cos^2 x \geqslant \frac{1}{2}$ e) $4\cos^2 2x - 3 < 0$

b) $|2\sin x| > \sqrt{3}$ d) $4\sin^2 x \leqslant 1$ f) $2\sin^2 2x - 1 > 0$

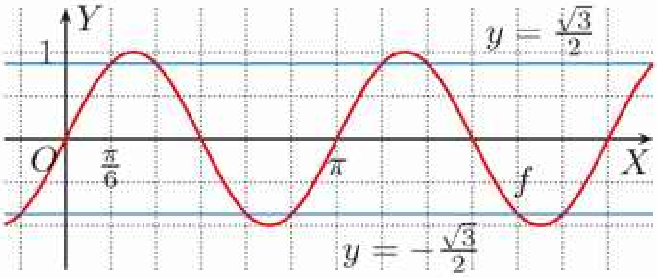
5. Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ zachodzi nierówność?

a) $\operatorname{tg} x < -1$ c) $\operatorname{tg}^2 x - 1 \leqslant 0$ e) $|3\operatorname{tg} 2x| < \sqrt{3}$

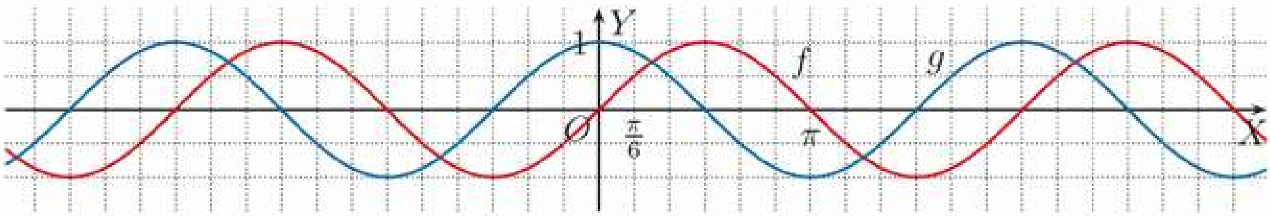
b) $3\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg}^2 x - 3 > 0$ f) $\left|\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| > 3$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin 2x$. Korzystając z rysunku, podaj rozwiązanie nierówności:

a) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



7. a) Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$. Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ zachodzi nierówność $\sin x \geqslant \cos x$?



b) Dla jakich $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$ zachodzi nierówność $\sin x < -\cos x$?

8. Narysuj wykresy odpowiednich funkcji i odczytaj z nich zbiór rozwiązań nierówności zawarty w przedziale $(0; \pi)$.

a) $\sin x \leqslant \operatorname{tg} x$ b) $\sin 2x \geqslant \cos x$ c) $|\cos x| > \sin x$

9. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x + |\sin x| > 1$ b) $2\cos x + |\cos x| \leqslant \frac{3}{2}$ c) $|\sin x| \cdot \cos x \geqslant \frac{1}{2}$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$ c) $2\sin^2 x - 3\cos x > 3$

b) $2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x > 2$ d) $5\cos x \leqslant 4 + \cos 2x$

11. Rozwiąż nierówność.

a) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x < 3$ b) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x \leqslant 0$

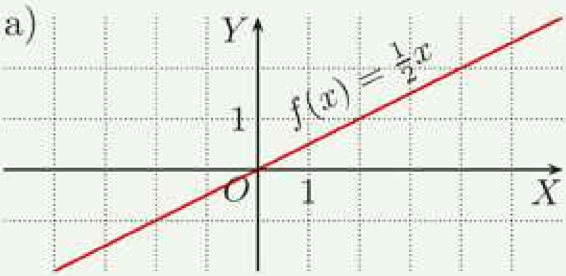
*1.17. Zagadnienia uzupełniające

Różnowartościowość funkcji

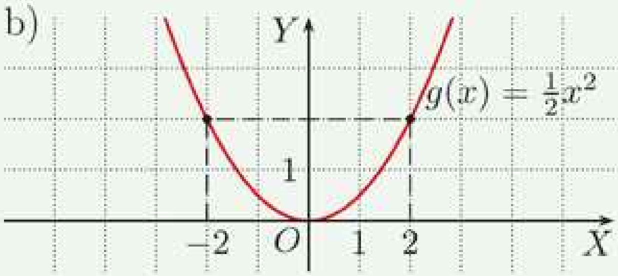
Funkcja $f\colon X \to Y$ jest **różnowartościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości.

Przykład 1

a)



b)



Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = \frac{1}{2}x$ **jest** różnowartościowa.
Jeśli $x_1 \neq x_2$, to $\frac{1}{2}x_1 \neq \frac{1}{2}x_2$.

Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ **nie jest** różnowartościowa.
Na przykład $-2 \neq 2$, ale $g(-2) = g(2)$.

Uwaga. Dowolna prosta równoległa do osi OX (prosta o równaniu $y = m$) przecina wykres funkcji różnowartościowej w co najwyżej jednym punkcie.

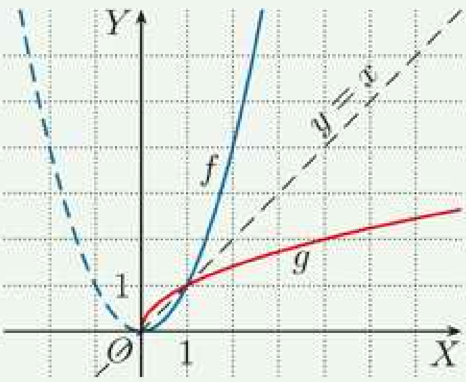
Funkcje odwrotne

Jeśli funkcja $f\colon X \to Y$, gdzie Y jest zbiorem wartości funkcji f (tzn. dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$), jest różnowartościowa, to istnieje funkcja $g\colon Y \to X$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $g(f(x)) = x$. Funkcję g nazywamy funkcją **odwrotną** do funkcji f.

Przykład 2

Funkcja $g\colon \langle 0; \infty) \to \langle 0; \infty)$ określona za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f\colon \langle 0; \infty) \to \langle 0; \infty)$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$, gdyż dla każdego $x \in \langle 0; \infty)$ zachodzi równość:

$$g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$



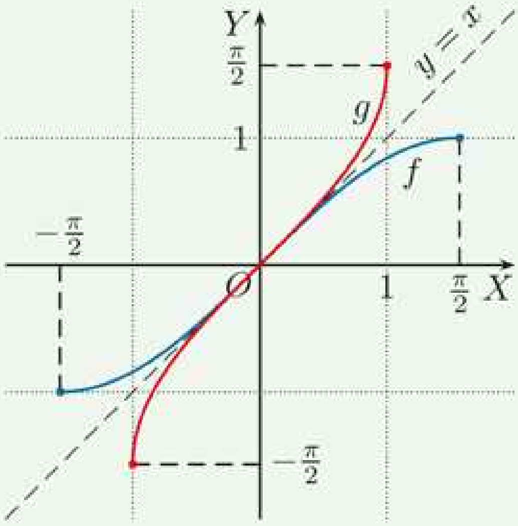
Uwaga. Jeśli funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f, to funkcja f jest funkcją odwrotną do funkcji g. Wykresy wzajemnie odwrotnych funkcji f i g są do siebie symetryczne względem prostej $y = x$.

1. Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ – odwrotnej do f.

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

Rozpatrzmy funkcję $f\colon \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1; 1\rangle$ określoną wzorem $f(x) = \sin x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1\rangle$.

Funkcja $g\colon \langle -1; 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus sinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arcsin x$ (kolor czerwony).
Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 3

a) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

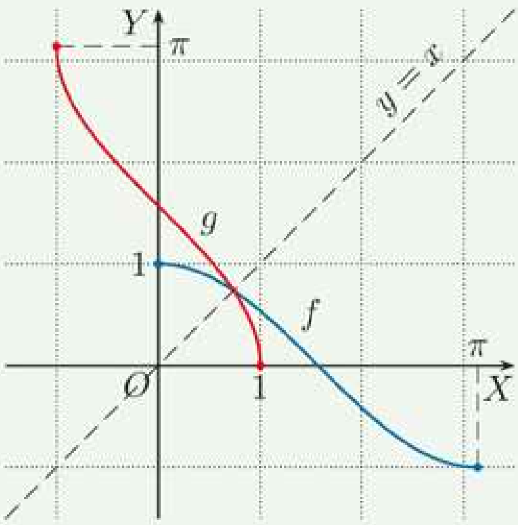
b) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

2. Oblicz.

a) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\arcsin(-1)$

Rozpatrzmy funkcję $f\colon \langle 0; \pi\rangle \to \langle -1; 1\rangle$ określoną wzorem $f(x) = \cos x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 1\rangle$.

Funkcja $g\colon \langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus cosinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arccos x$ (kolor czerwony).
Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 4

a) $\cos 0 = 1$, więc $\arccos 1 = 0$

b) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

3. Oblicz.

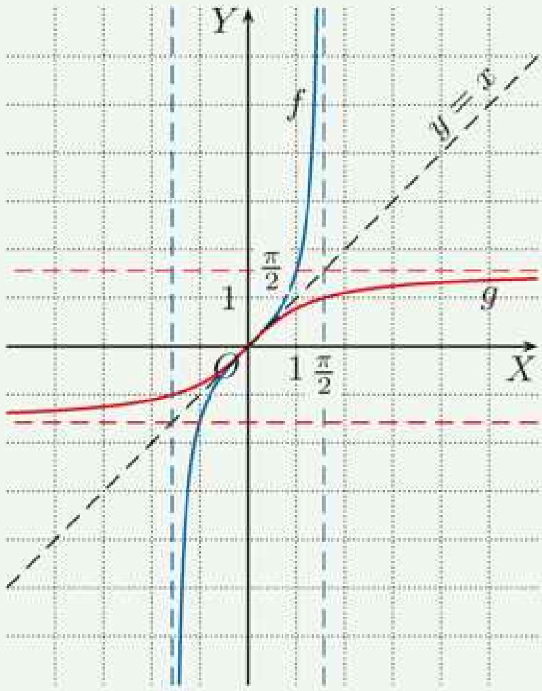
a) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos(-1)$

Rozpatrzmy funkcję $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ określoną wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus tangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arctg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ma asymptoty poziome $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$.



Przykład 5

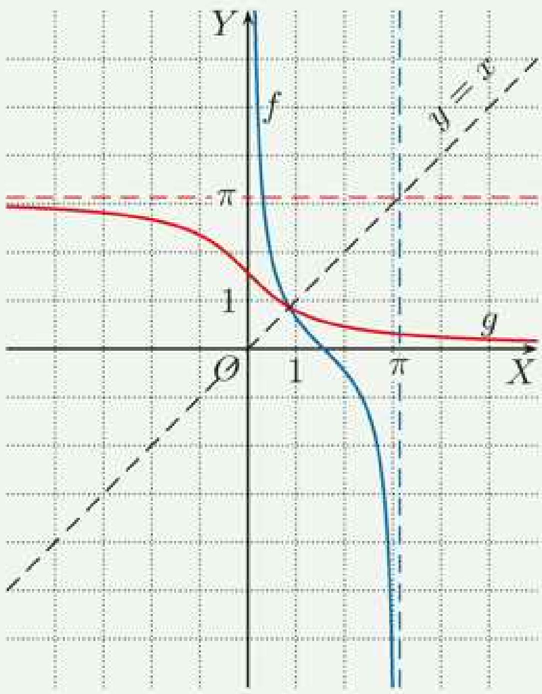
a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, więc $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ b) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Rozpatrzmy funkcję $f\colon (0; \pi) \to \mathbf{R}$ określoną wzorem $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (kolor niebieski). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to (0; \pi)$ odwrotna do funkcji f nosi nazwę **arcus cotangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arcctg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arcctg} x$ ma asymptoty poziome $y = 0$ i $y = \pi$.



Przykład 6

a) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, więc $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ b) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, więc $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$

4. Oblicz.

a) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ b) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\operatorname{arctg}(-1)$ d) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów – dowody

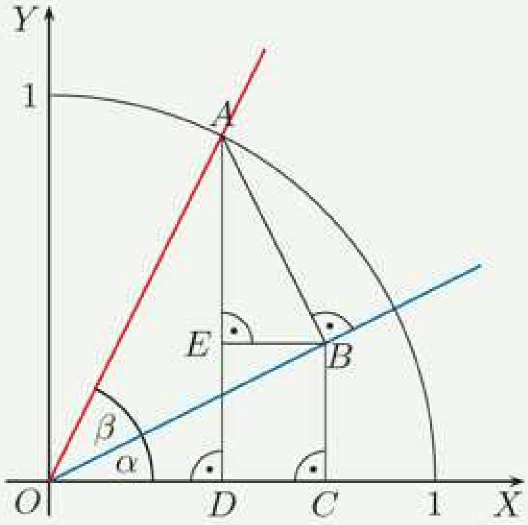
Rozpatrzmy kąty α i β położone tak jak na rysunku obok, gdzie:

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Punkt A jest punktem przecięcia ramienia końcowego kąta $\alpha+\beta$ z okręgiem jednostkowym.

Prowadzimy odcinek AB prostopadły do ramienia końcowego kąta α, odcinki BC i AD prostopadłe do osi OX oraz odcinek EB prostopadły do odcinka AD.

Kąt EAB ma miarę α (uzasadnij).



Boki trójkąta OAB mają długości:

$$|OA| = 1,\ |OB| = \cos\beta,\ |AB| = \sin\beta$$

Zauważmy, że $\frac{|BC|}{|OB|} = \sin\alpha$, więc:

$$|BC| = |OB|\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$$

Podobnie $\frac{|AE|}{|AB|} = \cos\alpha$, więc:

$$|AE| = |AB|\cos\alpha = \cos\alpha\sin\beta$$

oraz $\frac{|AD|}{|OA|} = \sin(\alpha+\beta)$, więc:

$$|AD| = |OA|\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

Zatem otrzymujemy:

$$\sin(\alpha+\beta) = |AD| = |ED| + |AE| = |BC| + |AE| =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

D **5.** Korzystając z powyższego rysunku, uzasadnij, że:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \text{ gdzie } \alpha,\beta,\alpha+\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Wskazówka. Rozpatrz długości odcinków OD, DC i OC.

D **6.** Wykaż prawdziwość wzoru $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, gdy:

* a) $\alpha,\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\alpha+\beta \in (90^\circ; 180^\circ)$,

* b) $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\beta, \alpha+\beta \in (90^\circ; 180^\circ)$.

D **7.** Uzasadnij wzory na sinus i cosinus różnicy kątów. Skorzystaj ze wzorów na sinus i cosinus sumy kątów oraz własności:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta \quad \text{i} \quad \cos(-\beta) = \cos\beta$$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Podaj miarę łukową kąta.

a) 40° b) 108° c) 110° d) 144°

2. Podaj miarę kąta w stopniach.

a) $\frac{3}{5}\pi$ b) $\frac{7}{8}\pi$ c) $\frac{5}{9}\pi$ d) $\frac{11}{12}\pi$

3. Oblicz.

a) $(\sin 30^\circ + \cos 120^\circ) \cdot \operatorname{tg} 930^\circ$

b) $\sin 225^\circ \cdot \operatorname{tg} 495^\circ - \cos 330^\circ$

c) $\cos(-570^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-1230^\circ)$

d) $\frac{\sin 120^\circ + \cos 300^\circ}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} - \sin(-390^\circ)$

e) $(\sin(-315^\circ) + 3\cos 45^\circ)^2$

f) $\frac{\sin 270^\circ + 2\cos(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} + \cos(-240^\circ)$

4. Oblicz.

a) $\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right) - \operatorname{tg}\frac{31}{6}\pi - \cos\frac{3}{2}\pi$

b) $\sqrt{2}\cos\frac{5}{4}\pi + \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-\frac{25}{3}\pi\right)$

c) $\frac{\sin\frac{37}{6}\pi - 2\cos\frac{\pi}{6}}{-\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi}$

d) $\left(\sin\frac{13}{6}\pi + \cos\frac{7}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

e) $3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \sin\frac{11}{6}\pi\right)$

f) $\frac{\sin\frac{5}{4}\pi - \cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{4}{3}\pi}$

5. Wyznacz kąty $\alpha \in (-360^\circ; 360^\circ)$ spełniające warunek:

a) $\sin\alpha = \sin 15^\circ$, c) $\cos\alpha = \cos 55^\circ$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 85^\circ$,

b) $\sin\alpha = -\sin 15^\circ$, d) $\cos\alpha = -\cos 55^\circ$, f) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg} 85^\circ$.

6. Wyznacz kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ\rangle$ spełniający warunki:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\cos\alpha < 0$,

b) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ i $\cos\alpha > 0$,

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\alpha < 0$,

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$,

e) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$,

f) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$.

7. Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\pi; 2\pi)$

c) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $(0; \pi)$

d) $|\sin x| = \frac{1}{2}$, $(-\pi; 0)$

e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$

g) $\cos^2 x = 1$, $(2\pi; 4\pi)$

h) $|\cos x| = \frac{1}{2}$, $\left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$

8. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 0; 8\pi\rangle$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin x = 0{,}9$ d) $\sin x = 0{,}3$

9. Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego zbioru.

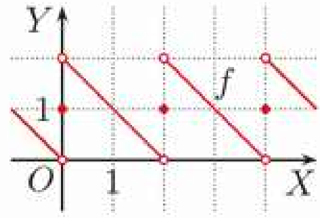
a) $\operatorname{tg} x = 1$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$

b) $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

c) $|\operatorname{tg} x| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right)$

d) $|\operatorname{ctg} x| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(-\pi; 0)$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o okresie 2. Naszkicuj wykres tej funkcji w przedziale $\langle -4; 4)$. Ile rozwiązań równania $f(x) = 1$ należy do tego przedziału?



11. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości i miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$

b) $f(x) = -1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

d) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

12. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

b) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,

c) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,

d) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

13. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,

b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

14. Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?

a) $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x$

b) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \sin^2 x = \cos^2 x$

c) $2\cos^2 x \operatorname{tg} x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$

d) $(\cos x - 1)\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x}$

D **15.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x - \sin^4 x$ jest funkcją stałą.

D **16.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}$

b) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$

c) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

d) $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

e) $\sin x \cos x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(\cos^2 x + 1)$

f) $\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} + \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\cos x}$

17. Podaj liczbę rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$ w zależności od parametru m.

a) $\cos x + 1 = m$

b) $2\sin x - 1 = m$

c) $|\sin x| + \frac{1}{2} = m$

18. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = 1 - 3\sin x$

b) $f(x) = |\operatorname{tg} 3x| - 4$

c) $f(x) = \frac{2}{|\sin x - 3|}$

Zestaw II

1. Oblicz.

a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

b) $\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ$

c) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 15^\circ$

d) $\sin 23^\circ \cdot \cos 67^\circ + \cos 23^\circ \cdot \sin 67^\circ$

e) $\cos 66^\circ \cdot \sin 21^\circ - \sin 66^\circ \cdot \cos 21^\circ$

f) $\sin 82^\circ \cdot \sin 52^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 52^\circ$

2. Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?

a) $1 + \sin\alpha = (\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})^2$

b) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\sin^4\alpha + 8\cos^2\alpha = 8\cos^4\alpha + 1$

d) $\sin\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 2\cos\alpha = \sin\alpha$

D **3.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$

b) $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta}$

d) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\beta}$

4. a) Oblicz $\cos\frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$, jeśli $\sin\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ i $x \in (\pi; 3\pi)$.

b) Oblicz $\sin\frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$, jeśli $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ i $x \in (3\pi; 4\pi)$.

5. Oblicz.

a) $\sin 15^\circ + \sin 105^\circ$

b) $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$

c) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 105^\circ$

***6.** Oblicz $\sin 2x$ i $\cos 2x$, jeśli $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ i $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos x$.

***7.** Wiadomo, że $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Oblicz:

a) $\sin 2x$,

b) $\cos x - \sin x$,

c) $\operatorname{tg} 2x$.

***8.** Oblicz $\sin 3x$ i $\cos 3x$, jeśli:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

9. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -2|\sin x|$

b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 3$

c) $f(x) = -4|\cos x| + 4$

d) $f(x) = -|\operatorname{tg} x| - 2$

e) $f(x) = 4|\sin 2x|$

f) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right| - 4$

10. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = \sin 2x - 1$

b) $f(x) = \sin 2x + 1$

c) $f(x) = 3|\sin 2x|$

d) $f(x) = \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}$

e) $f(x) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

f) $f(x) = 1 + \left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$

g) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - 1$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2$

i) $f(x) = -\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - 1$

11. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$?

a) $f(x) = \sin x,\ \ g(x) = 2 - \sin x$

b) $f(x) = \cos x,\ \ g(x) = 1 - \sin x$

c) $f(x) = \sin x + \cos x,\ \ g(x) = \sqrt{2}$

d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x,\ \ g(x) = 1$

12. Uprość wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $f(x) = \cos(-x)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x) - \sin(\pi + x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

13. Rozwiąż równanie.

a) $2\cos(-3x) = 1$

b) $2\sin(2x - \pi) = 1$

c) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

d) $2\cos^2(3x + \pi) = 1$

e) $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3}$

f) $\mathrm{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 3$

14. Rozwiąż równanie.

a) $2\cos^2 x + 5\cos x = 3$

b) $\sin^2 x - \sin x = 2$

c) $\sin^2 x - 3\cos x = 3$

d) $5\cos^2 x + 7\sin^2 x = 6$

e) $\cos^2 x + 5\sin x = 5$

f) $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin x - 1$

15. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$

b) $\cos^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\mathrm{tg}^2 x + \cos 2x = 1$

d) $\sin x \cos 2x - \sin x = \frac{1}{2}\sin 4x - \sin 2x$

e) $\cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x + \frac{1}{2}\cos 3x$

f) $\sin x \cos 2x = \sin 2x - \frac{3}{2}\sin x$

16. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

a) $2\cos^3 x - \cos^2 x = 2\cos x - 1$

*b) $\cos x + |\cos x| = \sin 2x$

17. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej wartości najmniejszą i największą.

a) $f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x$

b) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

*c) $f(x) = \cos^2 x + |\sin x| \cdot \sin x$

*d) $f(x) = |\mathrm{tg}\, x| \cdot \mathrm{ctg}\, x + \sin 2x$

18. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x$, której dziedziną jest przedział $(0; 2\pi)$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) > \frac{3}{4}$.

19. Podaj rozwiązania nierówności należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$

b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$

c) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \leqslant -\sqrt{3}$

20. Wyznacz zbiór tych $x \in \langle -\pi; 2\pi\rangle$, które spełniają podane warunki.

a) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x < \sqrt{3} \\ \sin x > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sin x + 1 \geqslant 0 \\ 2\cos x - 1 \leqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |2\sin x| < 3 \\ |\cos x| < 1 \end{cases}$

Sposób na zadanie

Przykład

Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób (Metoda analizy starożytnych)

Metoda analizy starożytnych rozwiązywania równań polega na kolejnym przekształcaniu równania wyjściowego w ten sposób, aby każde następne równanie wynikało z poprzedniego (nie musi być mu równoważne). Zbiór rozwiązań ostatniego równania zawiera wszystkie rozwiązania równania wyjściowego. Na koniec należy sprawdzić, które liczby z tego zbioru spełniają równanie wyjściowe.

Obie strony równania $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ podnosimy do kwadratu.

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$$
$$1 + \sin 2x = 2$$
$$\sin 2x = 1$$

Zauważ, że nie sprawdziliśmy, czy obie strony równania mają ten sam znak.

Zatem $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, czyli $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Teraz sprawdzimy, które z otrzymanych liczb spełniają równanie wyjściowe.

Dla $k = 2n$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$:

$$\sin x + \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) =$$
$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Dla $k = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$:

$$\sin x + \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) = \sin\frac{5}{4}\pi + \cos\frac{5}{4}\pi =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Sprzeczność

Zatem jedynymi rozwiązaniami równania są liczby $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

II sposób

Zauważ że:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

Zatem:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbf{Z}$$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, to kąt α może mieć miarę:

A. -390°, **B.** 780°, **C.** 1650°, **D.** 1950°.

2. Jeśli $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, to:

A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$, **B.** $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, **C.** $\alpha = \frac{7}{6}\pi$, **D.** $\alpha = \frac{4}{3}\pi$.

3. Jeśli $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\operatorname{tg} x > 0$, to wyrażenie $\cos^2 x + \sin x$ jest równe:

A. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, **B.** $-\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{1}{2}$, **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

4. Jeśli $\operatorname{tg}^2\alpha = 3$, to $\sin^2 2\alpha$ jest równy:

A. $\frac{3}{4}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{1}{4}$, **D.** $\frac{1}{8}$.

5. Jeśli $\cos x = -\frac{1}{2}$ i $x \in (\pi; 3\pi)$, to $\cos\frac{x}{2}$ jest równy:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** $-\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, **D.** $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

6. Wyrażenie $\sin 7^\circ 30' \cdot \cos 52^\circ 30' - \sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ jest równe:

A. $-\frac{1}{2}$, **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Niech $a = \cos 75^\circ + \cos 165^\circ$. Liczba a należy do przedziału:

A. $(-1{,}5; -0{,}7)$, **B.** $(-0{,}7; -0{,}5)$, **C.** $(-0{,}5; 0)$, **D.** $(0; 0{,}5)$.

8. Niech n będzie liczbą punktów wspólnych wykresów funkcji $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in \langle 0; 99\pi\rangle$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbf{Z}$. Wówczas n jest równe:

A. 98, **B.** 99, **C.** 100, **D.** 198.

9. Tożsamością trygonometryczną jest wyrażenie:

A. $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$, **C.** $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$,

B. $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$, **D.** $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

10. Dokładnie cztery rozwiązania w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi\rangle$ ma równanie:

A. $2\cos^2 x = 1$, **B.** $\cos^2 x = 1$, **C.** $2\sin^2 x = 1$, **D.** $\sin^2 x = 1$.

11. Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{3}$ jest:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 4.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Punkt $P(-3, -\sqrt{7})$ należy do ramienia końcowego kąta α. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby:

$$\frac{\operatorname{tg} 585^\circ - \sin 675^\circ}{\sin 495^\circ + 2\cos 750^\circ}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Dany jest kąt $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ taki, że $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$. Wyznacz cosinus kąta x. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba a jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania:

$$2\sin 2\pi x - 1 = 0$$

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby a.

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2|\sin x| \cdot \cos x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

Zadanie 6 (4 pkt)

Wyznacz liczby $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ spełniające równanie $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz sumę pierwiastków równania $2\sin^2 x + 1 = \sqrt{3}\cos x$ należących do przedziału $\langle 0; 4\pi \rangle$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2\sin x \cos 2x + \sin 5x = 2\sin 2x \cos 3x$.

Zadanie 9 (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0; \pi)$ równanie:

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos\alpha = 0$$

ma dwa różne pierwiastki?

Zadanie 10 (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru α suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 4x\sin\alpha + 2\cos 2\alpha = 0$ jest większa od 8?

2 Geometria analityczna

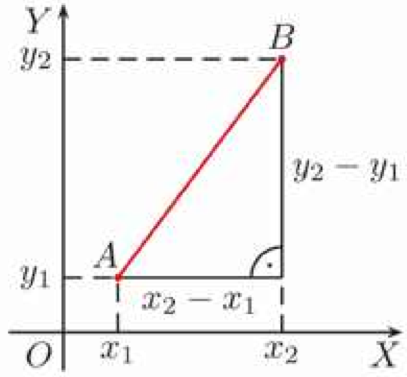
Dzięki wprowadzeniu układu współrzędnych, w którym punktom płaszczyzny odpowiadają pary liczb (x, y), problemy geometryczne można rozwiązywać metodami algebraicznymi.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej na wyspie w archipelagu Utklippan w Szwecji – szerokość geograficzna: $55°57'10''$N, długość geograficzna: $15°42'06''$E.

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB.
Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość między punktami $A(2, 5)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B.

a) $A(-3, -1)$, $B(-5, -1)$

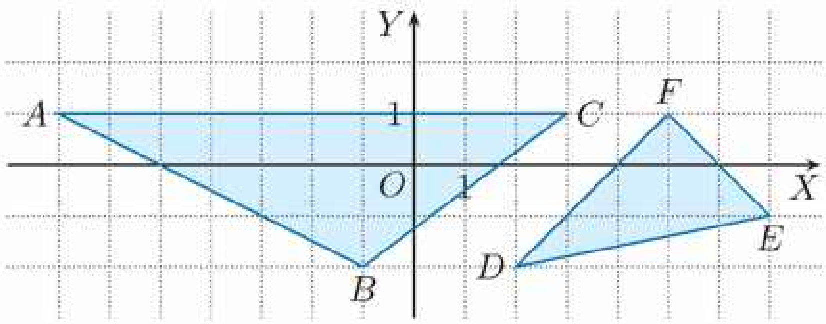
b) $A\left(5, -6\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-7, -1\frac{1}{2}\right)$

c) $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

d) $A\left(3+\sqrt{3}, \sqrt{7}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, -4+\sqrt{7}\right)$

Ćwiczenie 2

Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunku obok.



Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny.

a) $A(1, 3)$, $B(6, 4)$, $C(4, -1)$

b) $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$

c) $A(-3, -3)$, $B(12, -3)$, $C(6, 9)$

d) $A(-1, 0)$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(2-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Przykład 2

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2,-4)$, $B(4,2)$ i $C(1,5)$ jest prostokątny.

$$|AB| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$
$$|AC| = \sqrt{(1-(-2))^2 + (5-(-4))^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$
$$|BC| = \sqrt{(1-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że: $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny. Czy jest prostokątny?

a) $A(-1,2)$, $B(4,1)$, $C(2,4)$

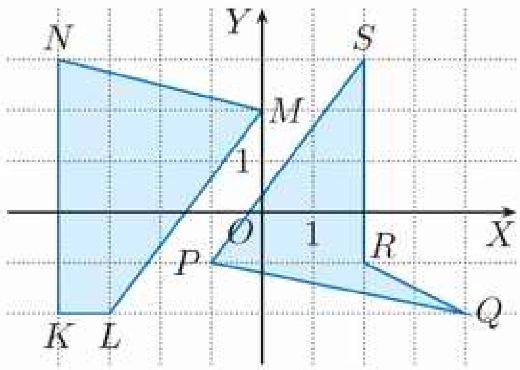
b) $A(-3,0)$, $B(1,-4)$, $C(5,4)$

c) $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(-1,6)$

d) $A(-4,0)$, $B(-1,-3)$, $C(5,3)$

Zadania

1. Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?



2. Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?

a) $A(1,-2)$, $B(4,4)$, $C(2,2)$, $D(8,-2)$

b) $A(-2,3)$, $B(4,1)$, $C(-1,1)$, $D(4,6)$

c) $A(3,-2)$, $B(8,-2)$, $C(-2,2)$, $D(2,5)$

3. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

a) $A(3,0)$, $B(-6,8)$, $C(-2,-2)$

b) $A(-5,-1)$, $B(4,1)$, $C(3,5)$

4. Sprawdź, czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne.

a) $A(2,2)$, $B(8,5)$, $C(1,4)$, $D(-2,0)$, $E(4,-3)$, $F(5,-1)$

b) $A(-1,1)$, $B(2,5)$, $C(0,4)$, $D(4,4)$, $E(0,2)$, $F(-2,-4)$

c) $A(1,-1)$, $B(3,2)$, $C(-1,3)$, $D(0,3)$, $E(-4,-3)$, $F(4,-5)$

5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych:

a) $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY,

b) $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX.

6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.

a) $A(-3,0)$, $B(0,1)$, $C(1,4)$, $D(-2,3)$

b) $A(-5,-2)$, $B(2,-1)$, $C(7,4)$, $D(0,3)$

7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej l, których odległość od punktu P jest równa d.

a) $l\colon y = 2x - 2$, $P(5,3)$, $d = \sqrt{10}$ b) $l\colon y = -x + 6$, $P(3,2)$, $d = \sqrt{13}$

8. Dane są punkty $A(-2,2)$ i $C(5,3)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D prostokąta $ABCD$, jeśli należą one do prostej o równaniu $y = 4 - x$.

9. Dane są wierzchołki $A(-4,2)$, $B(8,-2)$ i $C(6,4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawie AB. Oblicz współrzędne wierzchołka D.

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

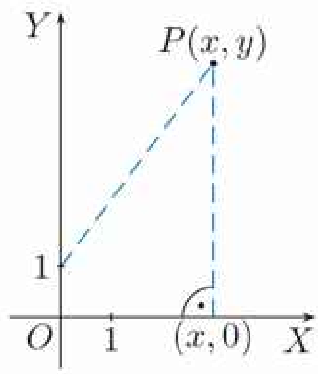
Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu $(0,1)$.

Niech $P(x,y)$ będzie punktem spełniającym warunki zadania. Odległość punktu P od osi OX jest równa:

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} = |y|$$

a odległość od punktu $(0,1)$:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$



Otrzymujemy zatem równanie:

$$|y| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Obie strony równania są dodatnie.

Stąd $y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$, czyli $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Szukaną krzywą jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu: a) $(0,-4)$, b) $(4,6)$.

11. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:

a) od prostej $y = -2$ i punktu $(2,6)$,

b) od prostej $y = 5$ i punktu $(-4,-1)$.

12. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:

a) od osi OY i punktu $(2,0)$,

b) od prostej $x = 4$ i punktu $(2,-4)$.

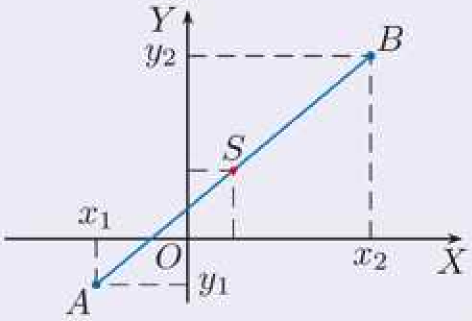
2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.

a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(5, -8)$ c) $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$.

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1), wówczas:

$$\frac{x_1-3}{2} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{y_1+4}{2} = 5$$
$$x_1 - 3 = 2 \quad \text{i} \quad y_1 + 4 = 10$$
$$x_1 = 5 \quad \text{i} \quad y_1 = 6$$

Ćwiczenie 2

a) Dany jest punkt $A(5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli punkt $S(-1, -3)$ jest środkiem odcinka AB.

b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB.

c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x+y, x-y)$. Oblicz długość odcinka AB.

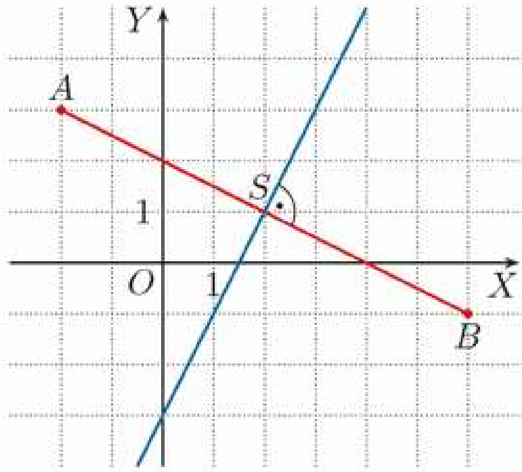
Ćwiczenie 3

Punkty $P(-3, 2)$, $Q(-1, 0)$ i $R(1, 4)$ są środkami boków trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz równania prostych zawierających jego środkowe.

Przypomnijmy, że **symetralną odcinka** AB jest prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek. Jest ona zbiorem punktów, których odległości od punktów A i B są równe. W poniższym przykładzie przedstawiamy dwa sposoby wyznaczenia równania symetralnej odcinka.

Przykład 3

a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.



Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax+b$, w której zawarty jest odcinek AB:

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

Wyznaczamy środek odcinka AB:

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu S do równania prostej $y = 2x + b$:

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Zatem symetralna odcinka AB opisana jest równaniem $y = 2x - 3$.

b) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 2)$ i $B(4, 0)$.

Punkt $P(x, y)$ należy do symetralnej odcinka AB, jeśli $|PA| = |PB|$, więc:

$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

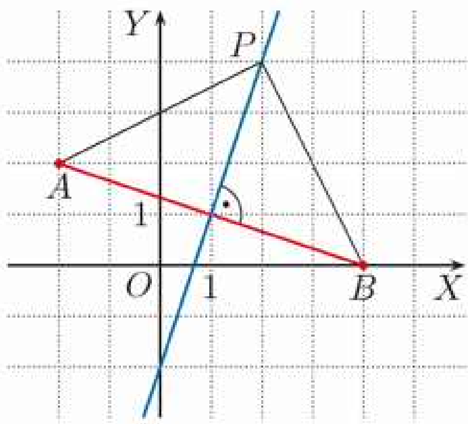
$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$-4y = -12x + 8$$

Zatem symetralna opisana jest równaniem:

$$y = 3x - 2$$



Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

a) $A(1, 8)$, $B(6, 4)$ b) $A(-2, 6)$, $B(10, 0)$ c) $A(-2, -3)$, $B(4, -1)$

Zadania

1. Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.

a) $A(1,6)$, $B(-7,2)$ b) $A(-7,7)$, $B(11,1)$ c) $A(9,\sqrt{7})$, $B(-4,-\sqrt{7})$

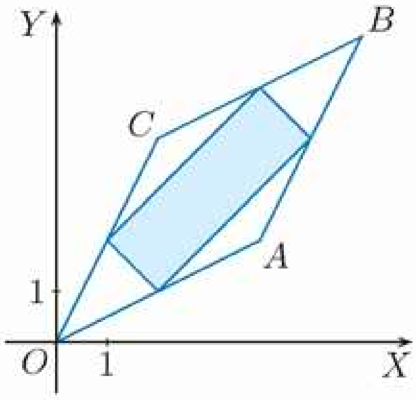
2. Dany jest punkt $A(4,5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

a) $S(-2,3)$ b) $S(6,7)$ c) $S(-3,1)$

3. Dany jest punkt $A(-4,-3)$. Oblicz długość odcinka AB, jeśli:

a) jego środkiem jest punkt $(-1,-2)$,

b) jego środek leży na osi OX, a odcięta punktu B jest równa 2.



4. Oblicz długości przekątnych rombu o wierzchołkach $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(6,6)$ i $C(2,4)$ (rysunek obok). Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$.

5. Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4,-3)$, $B(8,3)$, $C(6,7)$ i $D(-6,1)$.

a) Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.

b) Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.

6. Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD. Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?

a) $A(-2,-1)$, $B(17,2)$, $C(18,5)$, $D(-1,2)$

b) $A(1,-1)$, $B(7,1)$, $C(8,5)$, $D(2,2)$

7. Punkty $A(1,2)$, $B(-1,-1)$ i $C(5,2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC oraz współrzędne wierzchołka D.

8. Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta ABC.

a) $A(-2,3)$, $B(4,-1)$, $C(2,7)$ b) $A(-5,-3)$, $B(5,-1)$, $C(-1,5)$

9. Oblicz pole trójkąta, którego środkami boków są punkty $P(1,0)$, $Q(-2,3)$ i $R(-4,1)$.

D **10.** Punkty $A(2,-4)$ i $C(-1,-1)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Uzasadnij, że przekątna BD tego rombu jest zawarta w prostej $x-y-3=0$.

11. a) Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2,1)$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(1,-2)$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.

b) Pole kwadratu jest równe 58, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2,-3)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli wiadomo, że punkt ten należy do prostej $y = x - 4$.

12. Odcinek AB leżący na prostej k ma długość d. Środkiem tego odcinka jest punkt S. Wyznacz współrzędne punktów A i B.

a) $k\colon y = x$, $d = 4\sqrt{2}$, $S(3,3)$ b) $k\colon y = \frac{3}{4}x + 2$, $d = 10$, $S(12,11)$

13. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D czworokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że:

a) jest on kwadratem oraz $A(-3,5)$ i $C(5,1)$,

b) jest on rombem oraz $A(1,-3)$, $C(9,5)$ i $|BD| = 2|AC|$.

14. Pole rombu $ABCD$ jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D, jeśli wiadomo, że:

a) $A(-4,-2)$, $C(4,6)$, b) $A(2,3)$, $C(4,1)$.

15. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

a) $A(-2,-1)$, $B(4,1)$ b) $A(-1,3)$, $B(5,-1)$

16. a) Prosta $y = 2x - 1$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli $A(-1,5)$.

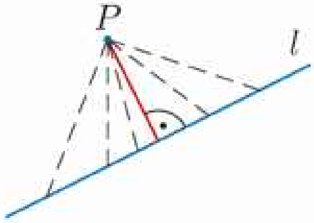
b) Prosta $y = x - 2$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktów A i B, jeśli wiadomo, że $|AB| = 4$, odcięta środka odcinka AB jest równa 2, a punkt A leży w I ćwiartce układu współrzędnych.

17. Punkty $A(-3,1)$ i $B(2,-1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Bok AC jest zawarty w prostej $y = 2x+7$, a jedna ze środkowych trójkąta ma równanie $y = x+4$. Oblicz współrzędne wierzchołka C i wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki tego trójkąta.

18. Boki AB i AC trójkąta ABC zawierają się odpowiednio w prostych $y = -\frac{1}{2}x$ i $y = x + 3$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli dany jest środek $S(4,1)$ boku BC.

19. Punkty $A(2,0)$ i $C(4,2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{5}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.

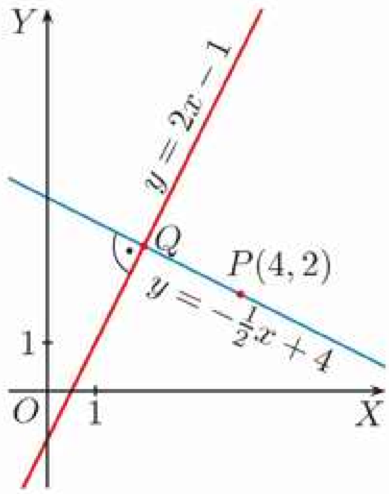
2.3. Odległość punktu od prostej



Przypomnijmy, że **odległością punktu P od prostej l** nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l, to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.

Przykład 1

Oblicz odległość punktu $P(4,2)$ od prostej $y=2x-1$.



Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej $y=2x-1$. Ma ona równanie postaci $y=-\frac{1}{2}x+b$. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu P i otrzymujemy $2=-\frac{1}{2}\cdot 4+b$, czyli $b=4$.
Zatem l: $y=-\frac{1}{2}x+4$.
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$$

i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych: $Q(2,3)$.
Obliczamy długość odcinka PQ:

$$|PQ|=\sqrt{(2-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu P od prostej $y=2x-1$ jest równa $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu P od prostej l.

a) $P(5,1)$, l: $y=x$

b) $P(-1,3)$, l: $y=\frac{4}{3}x-4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

> Odległość punktu $P(x_0,y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym:
> $$Ax+By+C=0$$
> wyraża się za pomocą wzoru:
> $$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Przykład 2

Oblicz odległość punktu $P(5,-1)$ od prostej $y=-\frac{4}{3}x+2$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x+3y-6=0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników: $A=4$, $B=3$ i $C=-6$. Wartości te razem ze współrzędnymi $x_0=5$ i $y_0=-1$ podstawiamy do wzoru:

$$d=\frac{|4\cdot 5+3\cdot(-1)-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|20-3-6|}{\sqrt{25}}=\frac{11}{5}$$

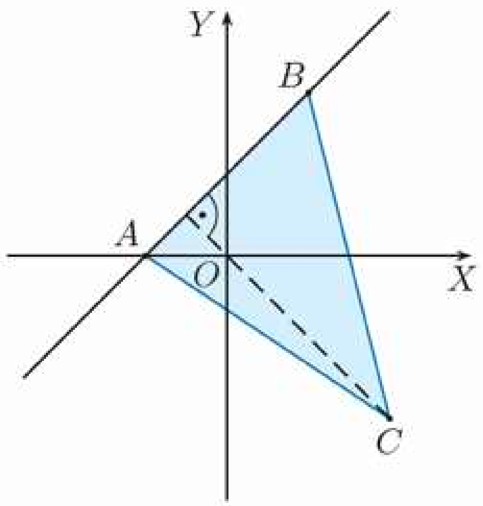
Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów $A(0,3)$, $B(-1,0)$ i $C(-1,3)$ od prostej l.

a) $l\colon y-x=1$ b) $l\colon 3x-y-7=0$ c) $l\colon y=-\frac{1}{2}x+2{,}5$

Przykład 3

Punkty $A(-1,0)$, $B(1,2)$ i $C(2,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz pole tego trójkąta.



Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru $P=\frac{1}{2}a\cdot h$, w którym $a=|AB|$, a h jest odległością punktu C od prostej AB.

$$a=\sqrt{(1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=x+1$ i zapisujemy je w postaci ogólnej: $x-y+1=0$. Obliczamy odległość punktu C od prostej AB:

$$h=\frac{|1\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta: $P=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=5$.

Ćwiczenie 3

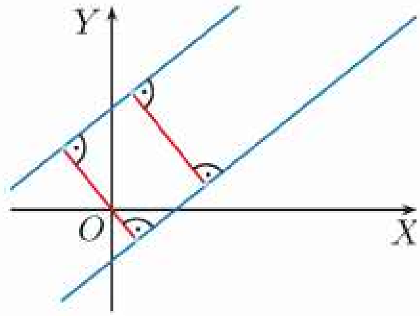
Oblicz odległość punktu C od prostej l oraz pole trójkąta ABC, którego wierzchołki A i B są punktami przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych.

a) $l\colon y=3x+6$, $C(2,-4)$ b) $l\colon y=-\frac{2}{3}x+4$, $C(1,-1)$

Ćwiczenie 4

Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y=\frac{3}{5}x-6$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołek D ma współrzędne $(1,4)$.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.
Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi l: $3x - 2y + 2 = 0$ i k: $3x - 2y - 11 = 0$.

Dane proste są równoległe. Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 1$, zatem punkt $A(0, 1)$ należy do tej prostej.
Obliczamy odległość punktu A od prostej k:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

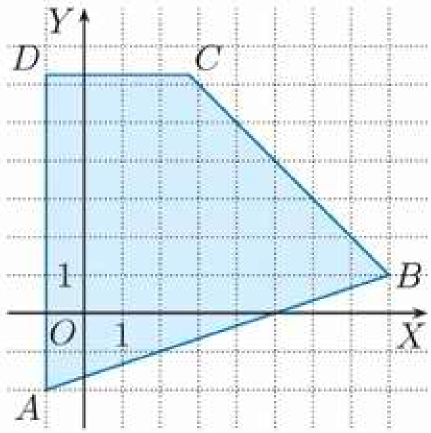
a) $y = x - 1$ i $y = x + 3$,
b) $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$,
c) $x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x + 6$,
d) $3x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Zadania

1. Oblicz odległości punktów A i B od prostej l. Czy prosta AB jest równoległa do prostej l?

a) $A(1, 4)$, $B(5, 5)$, l: $y = \frac{2}{5}x - 6$
b) $A(-4, -2)$, $B(2, 6)$, l: $y = 1\frac{1}{3}x - 5$
c) $A(-5, -1)$, $B(7, -6)$, l: $y = -2{,}4x$

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(8, 1)$, $C\left(\frac{11}{4}, \frac{25}{4}\right)$ i $D\left(-1, \frac{25}{4}\right)$ (rysunek obok). Oblicz odległości punktu $S(2, 4)$ od boków tego czworokąta.



3. Punkty $A(6, 4)$, $B(-3, 7)$ oraz $C(-2, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB oraz pole tego równoległoboku.

4. Oblicz pole trójkąta ABC.

a) $A(-1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$
b) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$, $C(2, -1)$

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych k i l.

a) k: $2x - y + 4 = 0$, l: $2x - y - 6 = 0$ b) k: $y = \frac{3}{4}x + 6$, l: $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$

6. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.

a) $A(-2, -6)$, $B(6, 2)$, $C(0, 3)$, $D(-3, 0)$

b) $A(-9, -2)$, $B(3, -6)$, $C(3, 4)$, $D(0, 5)$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz równanie prostej l_2 równoległej do prostej $l_1\colon y = 2x$, jeśli wiadomo, że odległość między tymi prostymi jest równa 4.
>
> Równanie prostej l_2 ma postać $y = 2x + b$. Dla $x = 0$ otrzymujemy punkt $P(0, b)$ należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej l_1 w postaci ogólnej: $-2x + y = 0$. Wyznaczamy odległość punktu P od tej prostej:
>
> $$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$
>
> Ale $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$, zatem $|b| = 4\sqrt{5}$, czyli równanie prostej l_2 zapisujemy w postaci:
>
> $$y = 2x + 4\sqrt{5} \text{ lub } y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej odległej o 10 od prostej: a) $y = x$, b) $y = x + 3$.

8. a) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = 2x - 4$ z osiami układu współrzędnych, a punkt C leży na prostej $y = 2x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABC.

b) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$ z osiami układu współrzędnych, a punkty C i D leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x - 1$. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

9. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostych k i l oraz równo odległej od każdej z nich.

a) k: $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$, l: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$

b) k: $1{,}4x + 2y + 10 = 0$, l: $7x + 10y - 20 = 0$

10. Korzystając z podanego obok wzoru na odległość d między prostymi równoległymi $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$, oblicz odległość między prostymi:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

a) $2x - y + 4 = 0$ i $2x - y - 6 = 0$, b) $y = \frac{12}{5}x - \frac{6}{5}$ i $y = \frac{12}{5}x + \frac{7}{5}$.

Warto wiedzieć

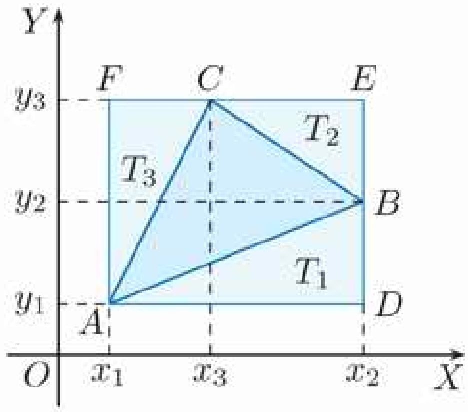
Pole trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2\right|$$

Dowód



Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ (rysunek obok).

Wierzchołki prostokąta $ADEF$ mają współrzędne $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_1)$, $E(x_2, y_3)$ i $F(x_1, y_3)$.

Wyznaczamy pole prostokąta $ADEF$:

$$P_{ADEF} = (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) =$$
$$= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1$$

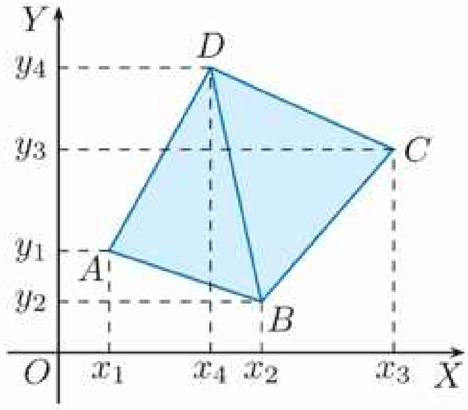
Wyznaczamy pola trójkątów T_1, T_2, T_3:

$$P_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}(x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1)$$
$$P_2 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) = \tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_3y_2)$$
$$P_3 = \tfrac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) = \tfrac{1}{2}(x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1)$$

Zatem pole trójkąta ABC: $P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$, skąd otrzymujemy (sprawdź):

$$P = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$

Zauważmy, że wierzchołki trójkąta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ są położone w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Jeśli wierzchołki te byłyby położone w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, to otrzymalibyśmy równość: $P = -\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$. Oba wzory można zapisać w postaci: $P = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2\right|$.



1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta ABC.

a) $A(-3, 3)$, $B(3, -2)$, $C(5, 1)$

b) $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$, $C(6, 3)$

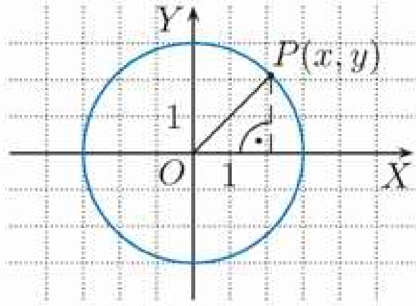
D **2.** Wyznacz pola trójkątów ABD i BCD (rysunek obok), a następnie uzasadnij, że pole czworokąta $ABCD$ dane jest wzorem:

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_1y_4 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3\right|$$

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

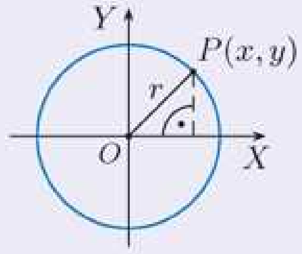
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$”.

Ćwiczenie 1

Narysuj okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r. Podaj równanie tego okręgu. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

a) $r = 5$ b) $r = 2$ c) $r = \sqrt{2}$ d) $r = \sqrt{5}$

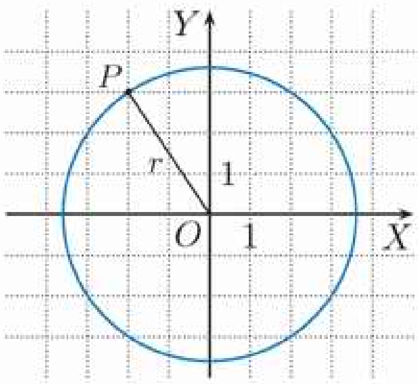
Ćwiczenie 2

Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych przechodzącego przez punkt: a) $(0, 6)$, b) $(-8, 0)$.

Przykład 1

Punkt $P(-2, 3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$: $(-2)^2 + 3^2 = r^2$.
Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie i promień okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$, jeśli okrąg ten przechodzi przez punkt P.

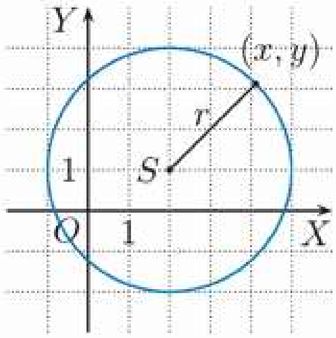
a) $P(5, -12)$ b) $P(-3, -3)$ c) $P(-4, -5)$ d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

Przykład 2

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, 1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x, y), których odległość od punktu $S(2, 1)$ jest równa 3, zatem jego równanie ma postać:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$



Twierdzenie

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, a następnie narysuj ten okrąg.

a) $S(2, 5)$, $r = 3$ b) $S(-7, 6)$, $r = 2$ c) $S(-4, -3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$,
b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = 2\frac{7}{9}$,
c) $x^2 + \left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 10$,
d) $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 8$,
e) $(x+5)^2 + (y+9)^2 = 225$,
f) $\left(x - 1\frac{1}{6}\right)^2 + y^2 = 45$.

Przykład 3

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, -1)$ przechodzącego przez punkt $P(3, 1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.
Zatem równanie okręgu ma postać: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P. Narysuj ten okrąg.

a) $S(0, -1)$, $P(1, 1)$ b) $S(-3, -1)$, $P(-1, 3)$ c) $S(-1, 1)$, $P(2, 2)$

Przykład 4

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$(x^2 + 2x + \mathbf{1}) + (y^2 + 2 \cdot 5y + \mathbf{25}) - 10 - \mathbf{1} - \mathbf{25} = 0$$
$$(x+1)^2 + (y+5)^2 = 36$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, -5)$ i promieniu 6.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$(x^2 + 2 \cdot 3x + \mathbf{9}) + (y^2 - 2 \cdot 2y + \mathbf{4}) + 13 - \mathbf{9} - \mathbf{4} = 0$$
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla $x = -3$ i $y = 2$, zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu $(-3, 2)$. Nie jest to więc równanie okręgu.

c) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$(x^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}x + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}) + (y^2 - 2 \cdot \tfrac{3}{2}y + \tfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}) + 3 - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} - \tfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} = 0$$
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 = -\tfrac{1}{2}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

Ćwiczenie 7

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4\frac{1}{2} = 0$

e) $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 4y + 2 = 0$

> Równanie $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są stałymi, jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

Dowód

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \left(x + \tfrac{A}{2}\right)^2 - \tfrac{A^2}{4} + \left(y + \tfrac{B}{2}\right)^2 - \tfrac{B^2}{4} + C = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \tfrac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{B}{2}\right)^2 = \tfrac{A^2}{4} + \tfrac{B^2}{4} - C$$

- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$ równanie jest sprzeczne.
- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$ równanie opisuje punkt $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Dla $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$ równanie opisuje okrąg o środku $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ i promieniu $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$.

Powyższe równanie nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej**.

Zadania

1. Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r.

a) $S(1,3)$, $r = 2$ b) $S(-6,2)$, $r = \frac{3}{4}$ c) $S(-5,-1)$, $r = 2\sqrt{5}$

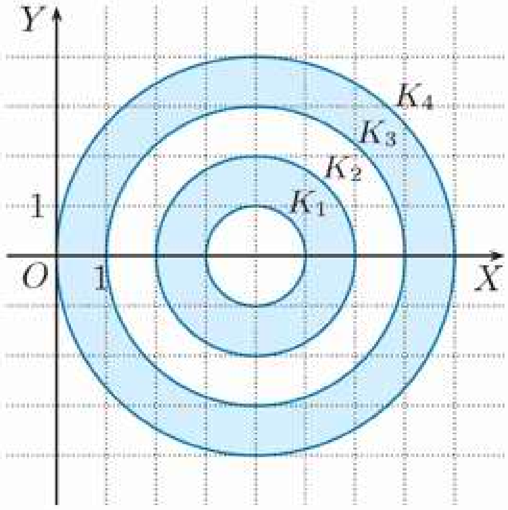
2. Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P.

a) $S(2,0)$, $P(1,3)$ b) $S(2,-3)$, $P(4,-1)$ c) $S(-5,2)$, $P(-8,-2)$

3. a) Podaj równania okręgów K_1, K_2, K_3 i K_4 przedstawionych na rysunku obok.

b) Do których z przedstawionych okręgów należą punkty $A(4-\sqrt{6}, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{7})$ i $C(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?

c) Jaki procent koła ograniczonego okręgiem K_4 został zacieniowany?



4. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB. Narysuj ten okrąg.

a) $A(1,2)$, $B(7,2)$ b) $A(-1,-2)$, $B(3,6)$ c) $A(-3,-4)$, $B(5,2)$

5. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC.

a) $A(-1,2)$, $B(6,-2)$, $C(3,4)$ b) $A(2,3)$, $B(5,-1)$, $C(-3,-7)$

6. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu. Narysuj ten okrąg.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ d) $2x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$ e) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$ f) $3x^2 + 3y^2 + 24x - 6y + 3 = 0$

7. Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ d) $x^2 + y^2 - x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$ e) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$

8. Dla jakich wartości parametru m podane równanie jest równaniem okręgu?

a) $x^2 + y^2 - 4 + m^2 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 16x + 2y = -64 - m^2$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ e) $x^2 + y^2 + 4x - 8y = m^2 - m - 22$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - m^2 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 2mx - 2y = -2m - 16$

9. Dla jakich wartości parametru m podane równanie jest równaniem okręgu o promieniu 4?

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = m^2 + 2m - 4$

b) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = m^2 - 2m + 3$

c) $x^2 + 4x + y^2 - my + m^2 - \frac{1}{4}m - 12 = 0$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz równanie okręgu o promieniu $5\sqrt{2}$ przechodzącego przez punkty $A(-2,0)$ i $B(2,2)$.
>
> Środek okręgu S leży na symetralnej odcinka AB. Jest to prosta o równaniu $y = -2x + 1$ (sprawdź).
> Zatem szukamy punktu $S(x_0, -2x_0 + 1)$ takiego, że $|SA| = 5\sqrt{2}$.
> $$|SA| = \sqrt{(x_0 - (-2))^2 + (-2x_0 + 1 - 0)^2}$$
> Otrzymujemy więc równanie:
> $$\sqrt{(x_0 + 2)^2 + (-2x_0 + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$
> Równanie jest spełnione, gdy $x_0 = -3$ lub $x_0 = 3$, zatem $S(-3,7)$ lub $S(3,-5)$. Czyli równanie okręgu ma postać:
> $$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 50 \quad \text{lub} \quad (x-3)^2 + (y+5)^2 = 50$$

Wyznacz równanie okręgu o promieniu r przechodzącego przez punkty A i B.

a) $r = 3\sqrt{5}$, $A(2,1)$, $B(2,-5)$

b) $r = 2\sqrt{5}$, $A(-3,-3)$, $B(3,3)$

c) $r = 5$, $A(1,4)$, $B(3,0)$

d) $r = \sqrt{26}$, $A(-3,1)$, $B(1,5)$

11. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B, którego środek należy do prostej l.

a) $A(3,-2)$, $B(5,0)$, $l\colon y = x + 1$

b) $A(-1,4)$, $B(2,1)$, $l\colon y = 2x + 6$

12. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

a) $A(-3,2)$, $B(9,2)$, $C(5,10)$

b) $A(3,-3)$, $B(9,3)$, $C(-3,9)$

13. Punkt $S(4,-3)$ jest środkiem okręgu, a punkt $A(2,1)$ jest środkiem jego cięciwy. Wyznacz równanie okręgu, wiedząc, że długość tej cięciwy jest równa $2\sqrt{5}$.

D **14.** Wykaż, że jeżeli $m \neq n$, to równanie $x^2 + y^2 + mx + ny + \frac{mn}{2} = 0$ przedstawia okrąg. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

Warto wiedzieć

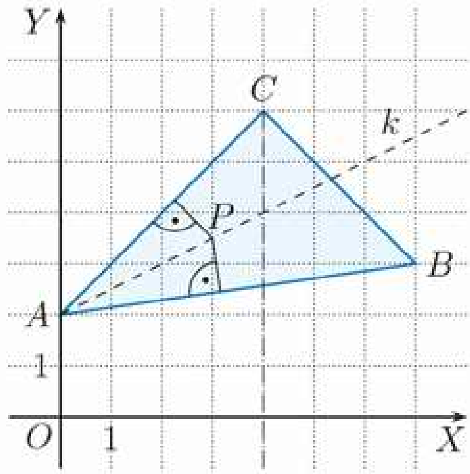
Okrąg wpisany w trójkąt

Przykład

Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A(0,2)$, $B(7,3)$ i $C(4,6)$.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Prosta AC opisana jest równaniem $x-y+2=0$, a prosta AB: $x-7y+14=0$ (sprawdź).



Dwusieczna kąta CAB (półprosta k na rysunku obok) jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta CAB.

Rozważmy punkt $P(x,y)$ należący do dwusiecznej kąta CAB. Odległość punktu P od ramienia AC jest równa:

$$\frac{|1\cdot x+(-1)\cdot y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$$

Odległość punktu P od ramienia AB jest równa:

$$\frac{|1\cdot x+(-7)\cdot y+14|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{|x-7y+14|}{5\sqrt{2}}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-7y+14|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x-y+2|=|x-7y+14|$$

$$5(x-y+2)=x-7y+14 \text{ lub } -5(x-y+2)=x-7y+14$$

$$5x-5y+10=x-7y+14 \text{ lub } -5x+5y-10=x-7y+14$$

$$2y=-4x+4 \text{ lub } 12y=6x+24$$

$$y=-2x+2 \text{ lub } y=\tfrac{1}{2}x+2$$

Dwusieczna kąta CAB jest zawarta w prostej $y=\frac{1}{2}x+2$ (prosta $y=-2x+2$ zawiera dwusieczne kątów rozwartych utworzonych przez proste AC i AB).

Dwusieczna kąta ACB jest zawarta w prostej $x=4$ (sprawdź).

Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia prostych $y=\frac{1}{2}x+2$ i $x=4$. Ma on zatem współrzędne $(4,4)$.

1. Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

a) $A(-2,4)$, $B(3,-6)$, $C(6,0)$ b) $A(-12,-1)$, $B(0,-5)$, $C(3,4)$

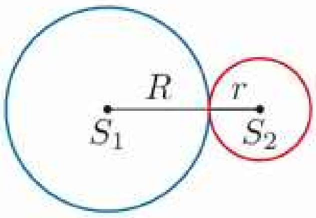
2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

Okręgi styczne

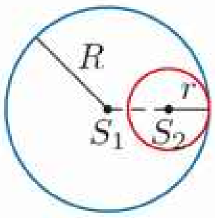
(mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie



$|S_1S_2| = R + r$

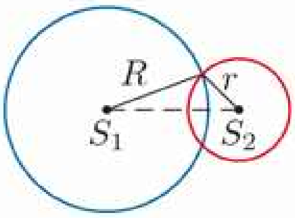
styczne wewnętrznie



$|S_1S_2| = |R - r|$

Okręgi przecinające się

(mają dwa punkty wspólne)

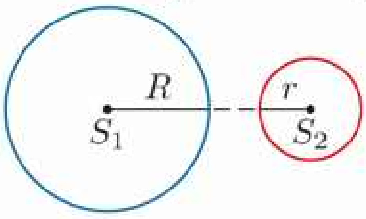


$|R - r| < |S_1S_2| < R + r$

Okręgi rozłączne

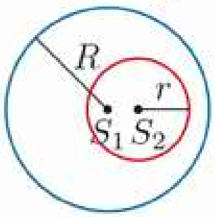
(nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



$|S_1S_2| > R + r$

rozłączne wewnętrznie



$|S_1S_2| < |R - r|$

Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r. Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

a) $S_1(-1,0)$, $R = 5$, $S_2(1,0)$, $r = 2$

b) $S_1(0,3)$, $R = 4$, $S_2(0,-2)$, $r = 1$

c) $S_1(-2,0)$, $R = 6$, $S_2(-2,4)$, $r = 2$

d) $S_1(0,0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2,2)$, $r = \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu o środku w punkcie S_1 i promieniu R z okręgiem o środku w punkcie S_2 i promieniu r w zależności od r.

a) $S_1(-3,0)$, $R = 5$, $S_2(4,0)$

b) $S_1(2,0)$, $R = 4$, $S_2(2,-1)$

c) $S_1(\sqrt{2},0)$, $R = 3$, $S_2(\sqrt{2},-\sqrt{3})$

d) $S_1(\frac{1}{2},0)$, $R = 1$, $S_2(-\frac{10}{3},0)$

Przykład 1

Określ wzajemne położenie okręgów:

$$K_1\colon x^2+y^2+2x-6y+2=0 \text{ oraz } K_2\colon x^2+y^2-8x+4y+2=0$$

Zapisujemy równania okręgów K_1 i K_2 w postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne ich środków oraz promienie.

$K_1\colon x^2+y^2+2x-6y+2=0$

$x^2+2x+1-1+y^2-6y+9-9+2=0$

$(x+1)^2+(y-3)^2=8$, środek $S_1(-1,3)$, promień $r_1=2\sqrt{2}$

$K_2\colon x^2+y^2-8x+4y+2=0$

$x^2-8x+16-16+y^2+4y+4-4+2=0$

$(x-4)^2+(y+2)^2=18$, środek $S_2(4,-2)$, promień $r_2=3\sqrt{2}$

Obliczamy odległość między środkami okręgów:

$$|S_1S_2|=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$|S_1S_2|=r_1+r_2$, zatem okręgi K_1 i K_2 są styczne zewnętrznie.

Ćwiczenie 3

Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2.

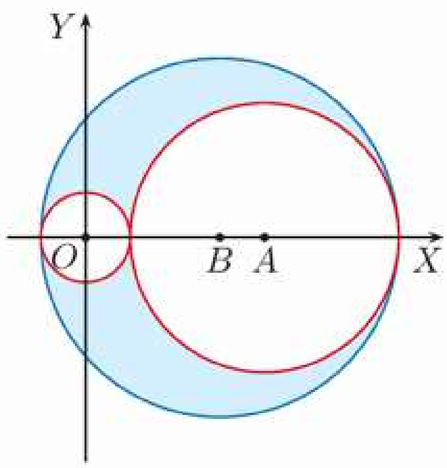
a) $K_1\colon x^2+y^2+6x+2y-3=0$, $K_2\colon x^2+y^2-10x-4y+19=0$

b) $K_1\colon x^2+y^2+4x+4y+4=0$, $K_2\colon x^2+y^2-6x-2y+5=0$

c) $K_1\colon x^2+y^2+4x-16y-30=0$, $K_2\colon x^2+y^2-4x+2=0$

Zadania

1. Dwa okręgi o środkach $O(0,0)$ i $A(11,0)$ są styczne zewnętrznie. Oba te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku $B(8,0)$ (rysunek obok). Oblicz promienie tych trzech okręgów i pole zacieniowanego obszaru.



2. Dany jest okrąg $x^2+y^2=16$ i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0,4)$ i $B(4,0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

3. Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu opisanego podanym równaniem z okręgiem o środku $S(1,3)$ i promieniu r w zależności od tego promienia.

a) $x^2+y^2+4x+2y+1=0$

b) $x^2+y^2-14x+10y-26=0$

c) $x^2+y^2-8x+6y=0$

d) $x^2+y^2+4x-12y+8=0$

4. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2.

a) $K_1\colon x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0,$ $K_2\colon x^2 - 6x + y^2 - 12y + 29 = 0$

b) $K_1\colon x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7 = 0,$ $K_2\colon x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0$

c) $K_1\colon x^2 + 4x + y^2 + 2y - 95 = 0,$ $K_2\colon x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0$

d) $K_1\colon x^2 + 8x + y^2 - 10y + 5 = 0,$ $K_2\colon x^2 + 10x + y^2 + 4y + 13 = 0$

e) $K_1\colon x^2 + 2x + y^2 - 16y + 16 = 0,$ $K_2\colon x^2 - 2x + y^2 - 12y + 33 = 0$

f) $K_1\colon x^2 - 14x + y^2 - 4y + 4 = 0,$ $K_2\colon x^2 + 10x + y^2 + 6y + 9 = 0$

5. Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2. Podaj, dla jakich wartości parametru m okręgi te mają jeden punkt wspólny.

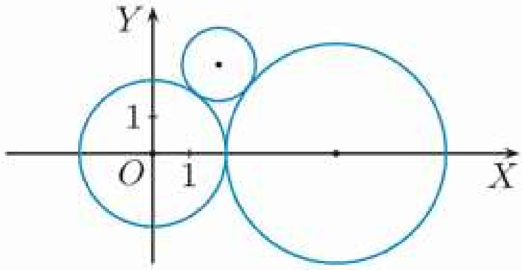
a) $K_1\colon x^2 + 12x + y^2 - 2y + m = 0,$ $K_2\colon x^2 - 4x + y^2 + 10y - 20 = 0$

b) $K_1\colon x^2 - 10x + y^2 + 2y - 38 = 0,$ $K_2\colon x^2 + 14x + y^2 - 8y - m + 5 = 0$

c) $K_1\colon x^2 + y^2 + 6x + 2y + m = 0,$ $K_2\colon x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4m - 35 = 0$

d) $K_1\colon x^2 + 4x + y^2 + 2y - 11 = 0,$ $K_2\colon x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18 - m = 0$

6. Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



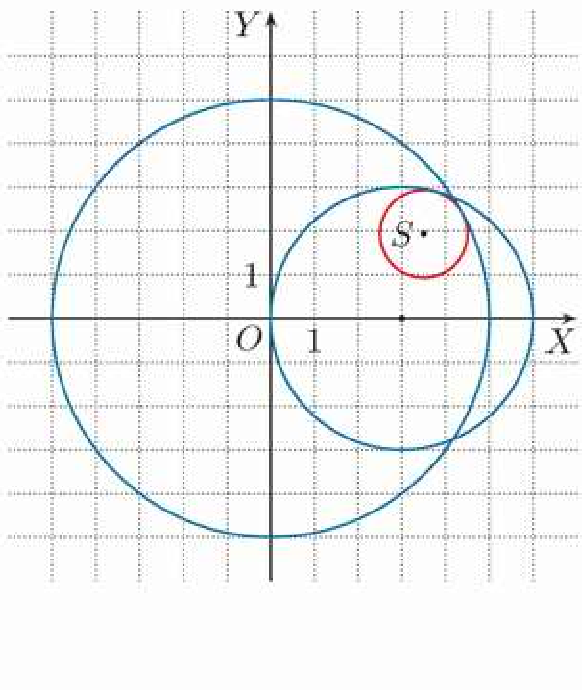
7. Punkty A, B i C są środkami trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie. Oblicz odległości między środkami tych okręgów i ich promienie.

a) $A(0,0)$, $B(7,0)$, $C\left(\frac{30}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$ b) $A(-6,0)$, $B(4,0)$, $C\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right)$

8. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 1 (rysunek obok) jest styczny wewnętrznie do okręgów:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ oraz } (x-3)^2 + y^2 = 9$$

Wyznacz współrzędne punktu S.



9. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $r = 1$ stycznego wewnętrznie do okręgów: o środku S_1 i promieniu r_1 oraz o środku S_2 i promieniu r_2.

a) $S_1(0,3)$, $r_1 = 5$, $S_2(6,3)$, $r_2 = 3$

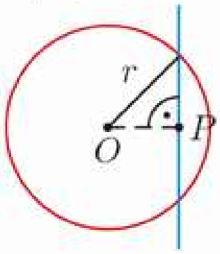
b) $S_1(0,0)$, $r_1 = 6$, $S_2(4,4)$, $r_2 = 2$

2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

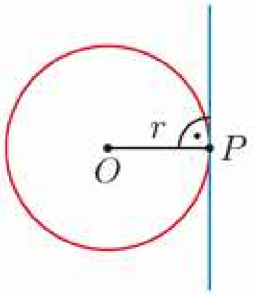
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$|OP| < r$



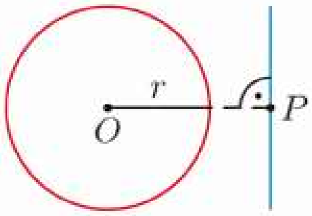
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$|OP| = r$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$|OP| > r$



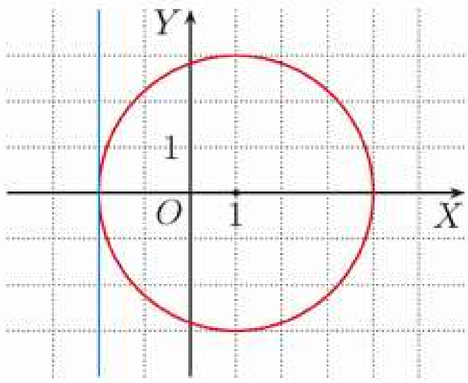
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.



Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

a) $S(2, -2)$, k: $y = 2$

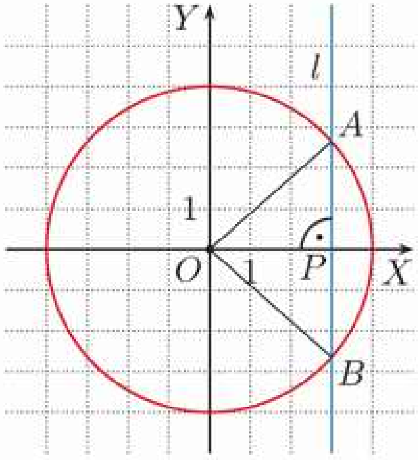
b) $S(-2, 2)$, k: $x = \sqrt{3}$

c) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, k: $x = 1 - \sqrt{2}$

d) $S(-1, 3)$, k: $y = x + 2$

Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta l: $x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.



Środkiem okręgu jest punkt $(0,0)$, a promień jest równy 4. Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l, a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą.
Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 2\sqrt{7}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 25$.

a) l: $x = 4$ b) l: $x = -1$ c) l: $y = \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S. Wyznacz równanie tego okręgu.

a) l: $x = 3$, $S(-1,-2)$ b) l: $y = -2$, $S(4,1)$

Przykład 3

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$ ma prosta l: $x - 3y + 3 = 0$?

Promień okręgu jest równy $\sqrt{10}$, a środkiem okręgu jest punkt $S(4,-1)$. Obliczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 4 ma prosta l?

a) $S(3,4)$, l: $12x + 5y - 4 = 0$

b) $S(7,4)$, l: $3x + 4y - 12 = 0$

c) $S(-3,2)$, l: $4x + 3y + 6 = 0$

d) $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, l: $x + y = 0$

Przykład 4

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 - 6x + y^2 - 4y = m$ oraz prostej l: $x - 2y + 6 = 0$ w zależności od parametru m.

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej:

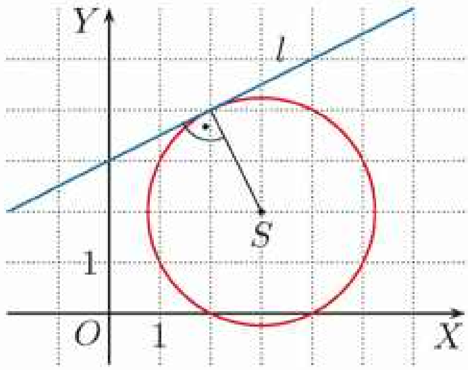
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = m + 13$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = m + 13$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu dla $m \in (-13; \infty)$.

Środkiem okręgu jest punkt $S(3, 2)$, a promień jest równy $\sqrt{m+13}$.

Obliczamy odległość środka okręgu od prostej l:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



- Okrąg ma jeden punkt wspólny z prostą l, gdy $\sqrt{m+13} = \sqrt{5}$, czyli dla $m = -8$ (rysunek obok).
- Okrąg ma dwa punkty wspólne z prostą l, gdy $\sqrt{m+13} > \sqrt{5}$, czyli dla $m \in (-8; \infty)$.
- Okrąg nie ma punktów wspólnych z prostą l, gdy $m \in (-13; -8)$.

Ćwiczenie 5

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu O i prostej l w zależności od parametru m.

a) $O: x^2 + y^2 + 2y = m$, $l: y = \frac{1}{2}x - 6$ b) $O: x^2 + 6x + y^2 = m$, $l: y = -\frac{3}{4}x + 4$

Przykład 5

Wyznacz równania stycznych do okręgu o środku w punkcie $S(3, 2)$ i promieniu 2 przechodzących przez początek układu współrzędnych.

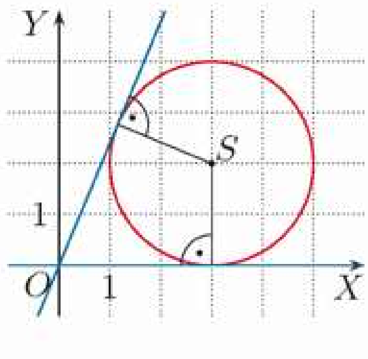
Równanie stycznej $y = ax$ zapisujemy w postaci ogólnej $ax - y = 0$.

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa promieniowi okręgu:

$$\frac{|a \cdot 3 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$
$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

Obie strony równania są dodatnie.

Obie strony równania podnosimy do kwadratu.



$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$
$$5a^2 - 12a = 0$$
$$a(5a - 12) = 0$$
$$a = 0 \text{ lub } a = \frac{12}{5}$$

Równania szukanych stycznych: $y = 0$ oraz $y = \frac{12}{5}x$.

Ćwiczenie 6

Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu o środku w punkcie S i promieniu r. Wyznacz równania tych stycznych i oblicz odległość punktu A od punktów styczności.

a) $A(4,1)$, $S(0,2)$, $r=1$ b) $A(-3,-2)$, $S(2,3)$, $r=\sqrt{10}$

Zadania

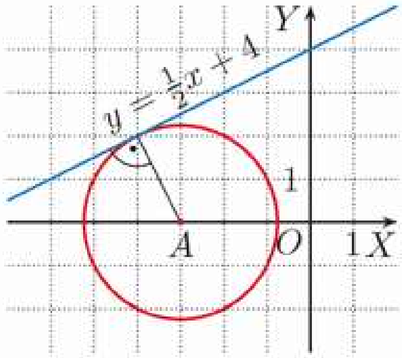
1. Prosta l jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A. Oblicz promień tego okręgu.

a) l: $y=\frac{1}{2}x+4$, $A(-3,0)$ (rysunek obok)

b) l: $3x+4y-5=0$, $A(-4,-2)$

c) l: $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, $A(2,1)$

d) l: $y=3x-1$, $A(-5,4)$



2. Oblicz odległość punktu S od prostej o podanym równaniu. Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma ta prosta?

a) $S(1,3)$, $2x+y=0$

b) $S(-7,2)$, $x-2y+1=0$

c) $S\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, $3x+y-1=0$

d) $S\left(-8\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right)$, $x-7y+7=0$

3. Określ liczbę punktów wspólnych podanej prostej z okręgiem o środku w punkcie S w zależności od promienia r tego okręgu.

a) $3x+4y-1=0$, $S(1,2)$

b) $\sqrt{2}x-y=0$, $S(6,0)$

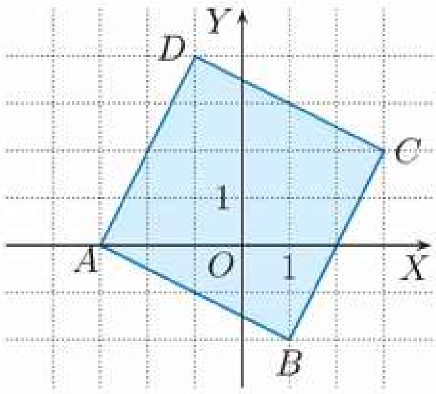
c) $0{,}5x-y-1{,}5=0$, $S(-5,1)$

d) $\sqrt{3}x-y+4=0$, $S(2\sqrt{3},-1)$

4. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3,0)$, $B(1,-2)$, $C(3,2)$ i $D(-1,4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

a) wpisanego w ten kwadrat,

b) opisanego na tym kwadracie.



5. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x+1)^2+(y+3)^2=100$ w punktach A i B. Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a) $|AB|=12$, b) $|AB|=10\sqrt{2}$, c) $|AB|=10$, d) $|AB|=20$.

6. Oś OX przecina okrąg o promieniu $2\sqrt{2}$ w punktach $A(5,0)$ i B. Cięciwa AB ma długość 4. Oblicz współrzędne środka okręgu.

7. Okrąg o środku w punkcie $S(3,2)$ ma z prostą $x-y-3=0$ punkty wspólne A i B. Wiadomo, że $|AB| = 6\sqrt{2}$. Wyznacz równanie tego okręgu.

8. Wyznacz równanie prostej, która w przecięciu z okręgiem O wyznacza cięciwę o środku w punkcie $A(1,-3)$.

a) $O\colon (x-3)^2+(y+2)^2=25$ b) $O\colon (x+2)^2+(y+1)^2=25$

9. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2,1)$ stycznych do podanego okręgu.

a) $x^2+y^2=1$ b) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ c) $(x-3)^2+(y-6)^2=5$

10. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(8,8)$ oraz:

a) stycznego do osi OX w punkcie $B(4,0)$,

b) stycznego do osi OY w punkcie $B(0,12)$.

11. Dla jakich wartości parametru m prosta $3x+4y=0$ jest styczna do okręgu:

a) $x^2+y^2-14x-2y+2m=0$, b) $x^2+y^2+12x+16y+m=1$?

12. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która w przecięciu z okręgiem $x^2+y^2-10x-10y+40=0$ wyznacza cięciwę długości $2\sqrt{5}$.

13. Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2+y^2-10x-10y+45=0$:

a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,

b) równoległych do prostej $y=-2x$.

14. Wyznacz równania stycznych do okręgu O poprowadzonych z punktu A.

a) $O\colon x^2+y^2-8x-4y+4=0$, $A(-3,-2)$

b) $O\colon x^2+y^2-6x-16=0$, $A(-4,1)$

D **15.** Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Wykaż, że jeśli okrąg ten jest styczny do osi OX, to spełniony jest warunek $a^2-4c=0$.

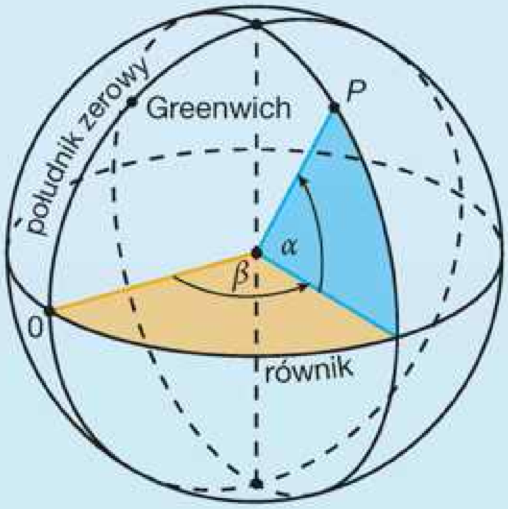
16. a) Wyznacz równanie okręgu o promieniu $\sqrt{10}$ stycznego do prostej $3x-y-1=0$ w punkcie $A(1,2)$.

b) Dany jest okrąg styczny do prostej $x-y+1=0$ i przechodzący przez punkt $A(-3,2)$. Wyznacz współrzędne środka okręgu, jeśli leży on na prostej $4x+y=0$.

***17.** Wyznacz równania wspólnych stycznych do okręgów: $x^2+y^2=5$ oraz $(x-5)^2+(y-5)^2=20$.

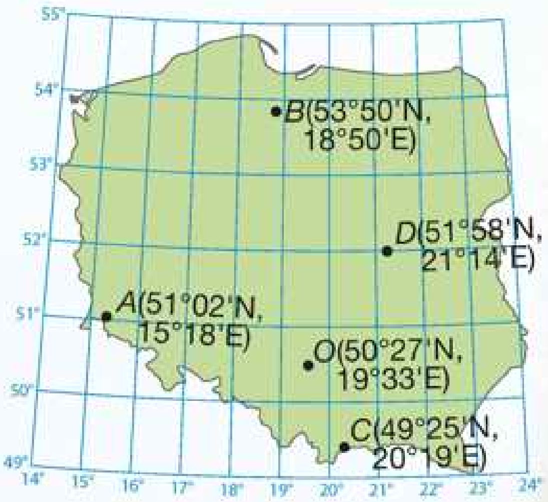
Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:
szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),
długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).



Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.

Na mapie punkt *O* oznacza położenie zamku Ogrodzieniec (50°27'N, 19°33'E) pokazanego na zdjęciu obok.



1 Czy potrafisz wskazać, które z punktów *A*, *B*, *C*, *D* odpowiadają położeniu zamków na zdjęciach?


Zamek w Niedzicy


Zamek w Czersku


Zamek Czocha


Zamek w Gniewie

2.7. Układy równań drugiego stopnia

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

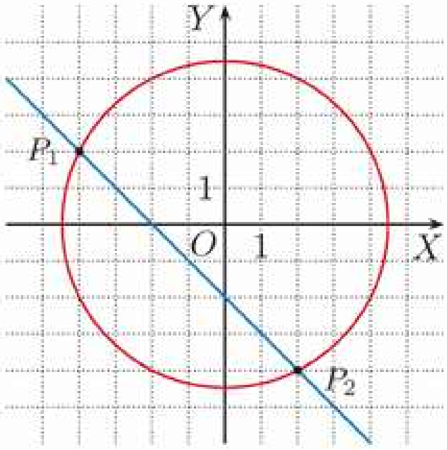
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -x - 2$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + (-x-2)^2 = 20$$
$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad / : 2$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 20$ i prosta $x+y+2=0$ mają dwa punkty wspólne: $P_1(-4, 2)$ i $P_2(2, -4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 9 \\ y = 5 - x \end{cases}$

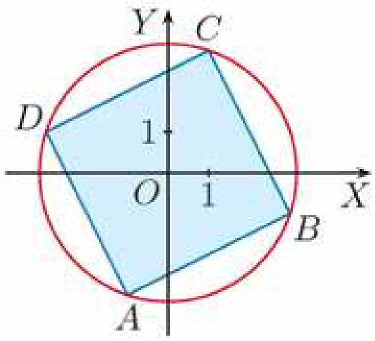
Ćwiczenie 2

Prosta l przecina okrąg $x^2 + y^2 = 20$ w punktach A i B. Oblicz długość cięciwy AB.

a) l: $y = -x - 6$ b) l: $y = 3x - 10$

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono kwadrat wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 10$. Bok AB jest zawarty w prostej $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.



Ćwiczenie 4

W okrąg o równaniu $(x-2)^2+y^2 = 25$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli wiadomo, że jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y = 8$.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $x^2 + y^2 = 9$ do drugiego równania i otrzymujemy $9 - 6x = 0$, skąd $x = \frac{3}{2}$. Podstawiamy $x = \frac{3}{2}$ do równania $x^2 + y^2 = 9$:

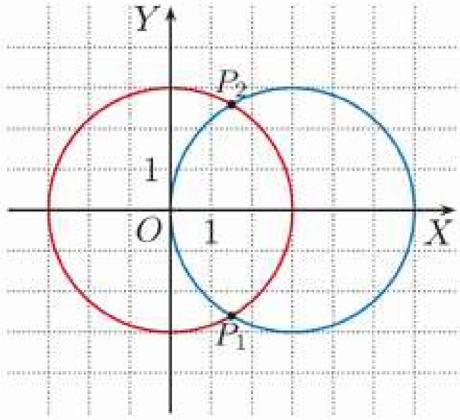
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = \tfrac{27}{4}$$

$$y = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{lub} \quad y = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Równanie $x^2+y^2-6x=0$ można przekształcić do postaci:

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

Okrąg ten ma dwa punkty wspólne z okręgiem $x^2+y^2=9$: $P_1(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ i $P_2(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-4)^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

Przykład 3

Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$$

Podstawiamy $y = x + m$ do pierwszego równania:

$$x^2 + (x+m)^2 - 2x - 4(x+m) + 3 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2mx + m^2 - 2x - 4x - 4m + 3 = 0$$

$$2x^2 + (2m-6)x + m^2 - 4m + 3 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego. Liczba rozwiązań układu równań jest równa liczbie rozwiązań tego równania.

$$\Delta = (2m-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 4m + 3) = 4m^2 - 24m + 36 - 8m^2 + 32m - 24 =$$
$$= -4m^2 + 8m + 12 = -4(m^2 - 2m - 3) = -4(m-3)(m+1)$$

- $\Delta = 0$ dla $m \in \{-1, 3\}$ – układ ma jedno rozwiązanie,
- $\Delta > 0$ dla $m \in (-1; 3)$ – układ ma dwa rozwiązania,
- $\Delta < 0$ dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ – układ nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 6

Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \\ y = -2x + m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = m^2 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = |x| \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = |x+2| \end{cases}$

2. a) W okrąg $x^2 + y^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne $(2, 4)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

b) W okrąg $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

3. a) Jeden z boków prostokąta wpisanego w okrąg $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$ jest zawarty w prostej $y = x + 4$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

b) Bok kwadratu jest zawarty w prostej $y = 2x - 6$, a jego przekątne przecinają się w punkcie $A(3, 5)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie i współrzędne jego wierzchołków.

4. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 8$ zawarta jest w prostej $3x + 2y - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.

5. Oblicz długość cięciwy danego okręgu zawartej w prostej l.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0,\ l\colon y = x - 2$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0,\ l\colon y = -2x + 2$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0,\ l\colon y = x + 2$

6. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2+8y=-15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+8y=-7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+4x=0 \\ x^2+y^2-2x=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2-6x=0 \\ x^2+y^2-8y=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2-8y=-6 \\ x^2+y^2+2y=4 \end{cases}$

7. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów K_1 i K_2. Wykonaj rysunek.

a) $K_1\colon x^2+8x+y^2-9=0$, $K_2\colon x^2-8x+y^2-9=0$

b) $K_1\colon x^2+y^2=10$, $K_2\colon x^2-6x+y^2-6y+14=0$

8. Oblicz pole czworokąta S_1AS_2B, gdzie S_1 i S_2 są odpowiednio środkami okręgów K_1 i K_2, natomiast A i B są punktami wspólnymi tych okręgów.

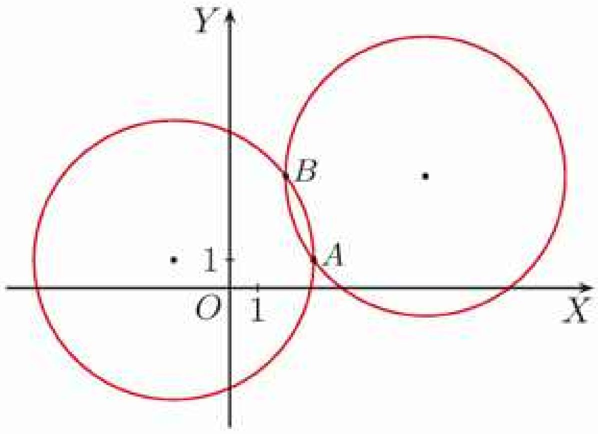
a) $K_1\colon x^2+y^2=10$, $K_2\colon x^2+y^2-8x-8y+22=0$

b) $K_1\colon x^2+y^2+4y-1=0$, $K_2\colon x^2+y^2-10x-6y-11=0$

9. Wyznacz równania okręgów o promieniu 5 przechodzących przez punkty $A(3,1)$ i $B(2,4)$ (rysunek obok), rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} (3-a)^2+(1-b)^2=25 \\ (2-a)^2+(4-b)^2=25 \end{cases}$$

Dwa rozwiązania tego układu są współrzędnymi środków szukanych okręgów.



10. Wyznacz równania okręgów o promieniu r przechodzących przez punkty A i B.

a) $r=\sqrt{5}$, $A(4,2)$, $B(1,3)$ c) $r=3$, $A(0,0)$, $B(1,1)$

b) $r=2$, $A(1,2)$, $B(-1,0)$ d) $r=\sqrt{13}$, $A(5,2)$, $B(0,1)$

11. Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

a) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=-x+m \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y=0 \\ y=-x+2m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2-2y-1=0 \\ y=x+m \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=m^2-1 \\ y=x+4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=mx-5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2-6x=m \\ y=3x+1 \end{cases}$

*2.8. Koło w układzie współrzędnych

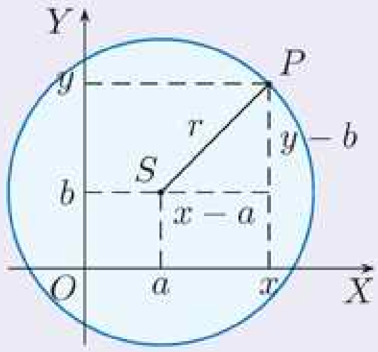
Przypomnijmy, że kołem o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza od r lub równa r (zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła).

Punkt $P(x, y)$ należy do koła o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu r, gdy $|PS| \leqslant r$.

Twierdzenie

Koło o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$$



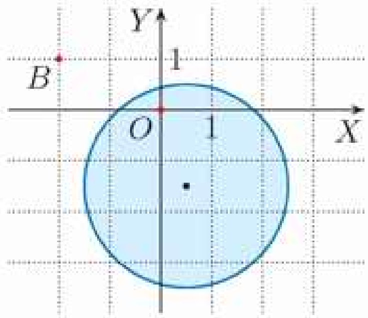
Przykład 1

Sprawdź, czy punkty $O(0, 0)$ i $B(-2, 1)$ należą do koła $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 \leqslant 4$.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktów O i B spełniają nierówność opisującą koło.

Punkt O: $(0 - \frac{1}{2})^2 + (0 + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \leqslant 4$, czyli punkt O należy do koła.

Punkt B: $(-2 - \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{25}{2} > 4$, czyli punkt B leży na zewnątrz koła.



Ćwiczenie 1

Wyznacz nierówność opisującą koło o najmniejszym polu i o środku w punkcie $S(1, 1)$, jeżeli do tego koła należy punkt P.

a) $P(5, -2)$ b) $P(-7, -5)$ c) $P(3, 3)$ d) $P(-3, 0)$

Ćwiczenie 2

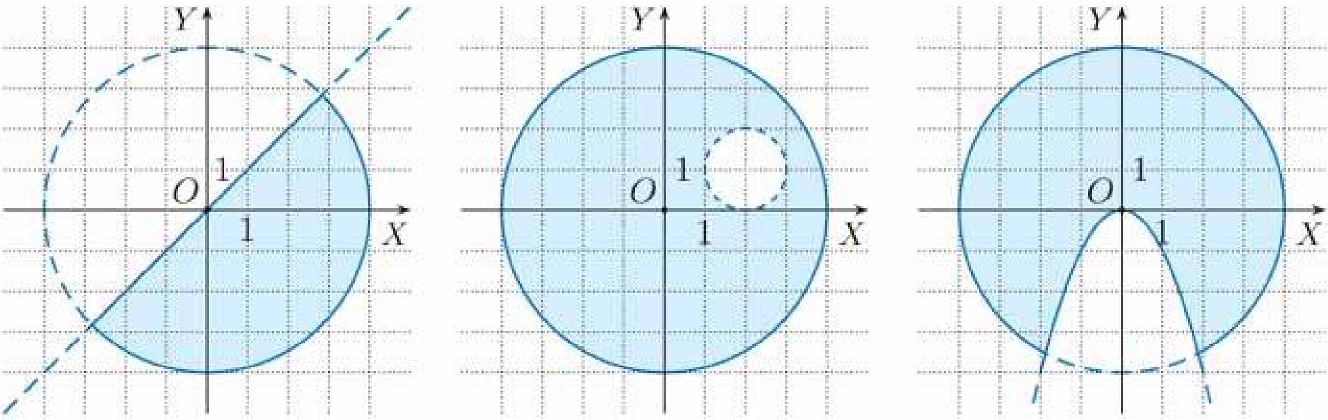
Oblicz pole najmniejszego koła o środku w punkcie $S(-3, 2)$, jeżeli do tego koła należą punkty A, B i C.

a) $A(-6, 6)$, $B(-3, 7)$, $C(1, 2)$ b) $A(-1, 3)$, $B(-2, 6)$, $C(-6, 3)$

Przykład 2

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y \leqslant x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 > 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y \geqslant -x^2 \end{cases}$



W przykładzie a) zbiorem punktów płaszczyzny spełniających podane warunki jest półkole. W przykładzie b) otrzymujemy zbiór punktów płaszczyzny, które należą do koła o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 4 oraz nie należą do koła o środku w punkcie $(2, 1)$ i promieniu 1.

Ćwiczenie 3

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

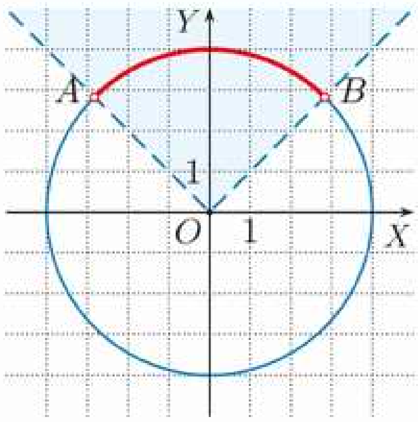
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ y \leqslant x^2 - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y > |x| \end{cases}$$

Szukanym zbiorem jest łuk $\widehat{AB}$ bez punktów końcowych A i B.



Ćwiczenie 4

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y > x^2 \end{cases}$

Zadania

1. Dane są trzy koła:

$$K_1\colon x^2+y^2\leqslant 16,\quad K_2\colon (x-2)^2+y^2\leqslant 4,\quad K_3\colon (x-2)^2+(y+3)^2\leqslant 9$$

Do których z tych kół należy punkt P?

a) $P(-2,2)$ b) $P(2,1)$ c) $P(2,-1)$ d) $P(4,-4)$

2. Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9 \\ (x+1)^2+(y+1)^2\geqslant 1 \end{cases}$

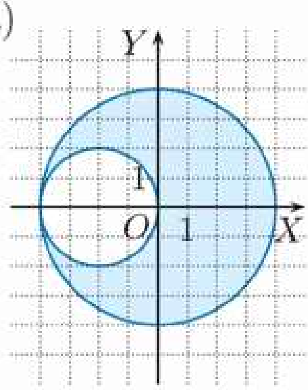
b) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16 \\ (x+3)^2+y^2\geqslant 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2-6x\leqslant 0 \\ x^2+y^2-8y+7\geqslant 0 \end{cases}$

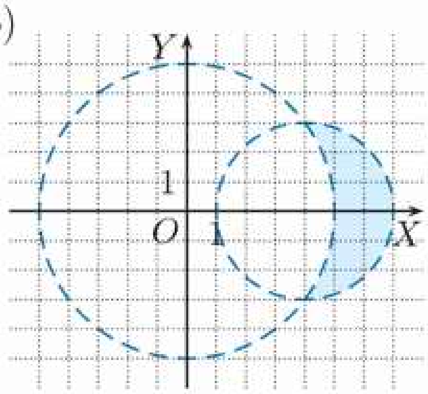
d) $\begin{cases} x^2+y^2-6x+4y-3\leqslant 0 \\ x^2+y^2-6x+4y+9\geqslant 0 \end{cases}$

3. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.

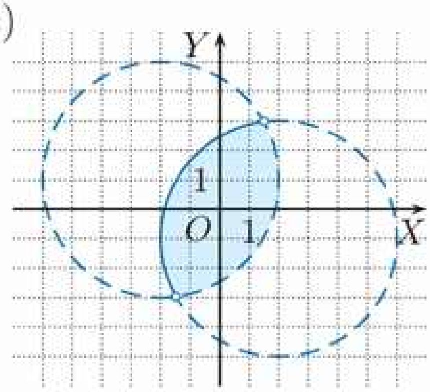
a)



b)



c)



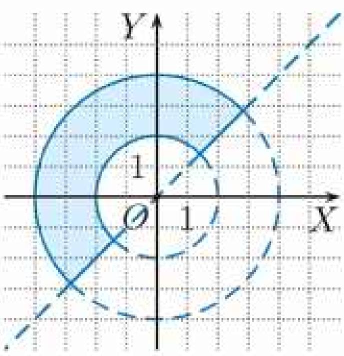
4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A\cap B$, $A\setminus B$ oraz $B\setminus A$.

a) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon x^2+y^2<9\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon y+x\leqslant 0\}$

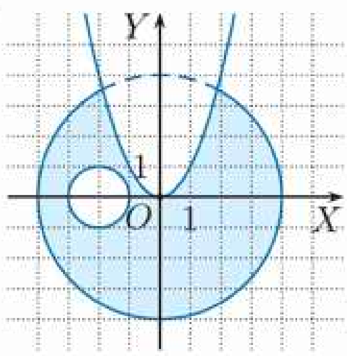
b) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon x^2+y^2+4x-12\leqslant 0\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon y<x-2\}$

5. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.

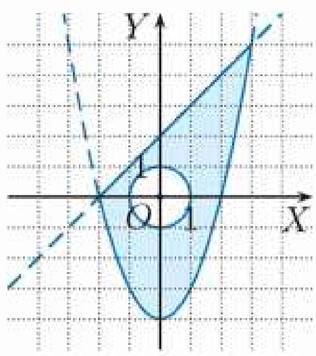
a)



b)



c)



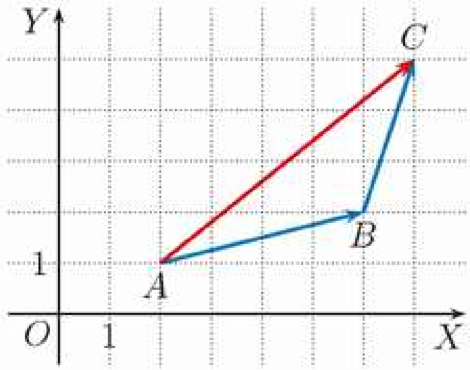
*2.9. Działania na wektorach

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. O wektorze $\overrightarrow{AC}$ mówimy, że jest **sumą wektorów** $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, i piszemy:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Zauważ, że $\overrightarrow{AB} = [4, 1]$, $\overrightarrow{BC} = [1, 3]$ oraz:

$$\overrightarrow{AC} = [4 + 1, 1 + 3] = [5, 4]$$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Podaj współrzędne tych wektorów.

a) $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$

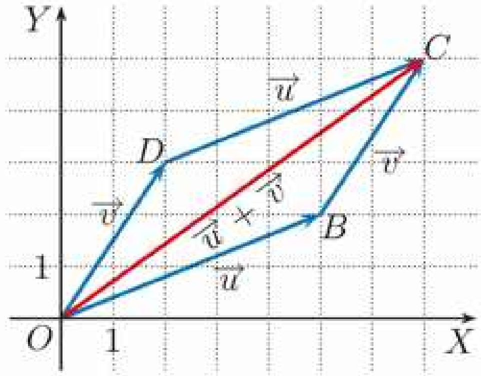
b) $A(3, 4)$, $B(1, -2)$, $C(-4, 1)$

Sumą wektorów $\overrightarrow{u} = [a, b]$ i $\overrightarrow{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [a + c, b + d]$$

Powyższa definicja wywodzi się z obserwacji fizycznych.

Na rysunku obok wektor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ odpowiada przekątnej OC równoległoboku $OBCD$.



Na rysunku przedstawiono wektory $\overrightarrow{u} = [5, 2]$, $\overrightarrow{v} = [2, 3]$ oraz ich sumę $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [7, 5]$.

Ćwiczenie 2

Narysuj wektor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Podaj jego współrzędne.

a) $\overrightarrow{u} = [3, -2]$, $\overrightarrow{v} = [2, 6]$

b) $\overrightarrow{u} = [-5, -4]$, $\overrightarrow{v} = [-2, 3]$

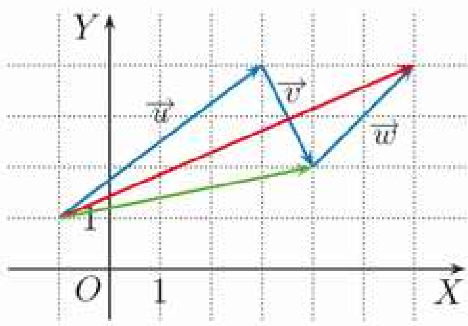
Aby dodać wektory geometrycznie, rysujemy je w ten sposób, aby koniec jednego wektora był początkiem następnego. Początek sumy leży w początku pierwszego z dodawanych wektorów, a koniec – w końcu ostatniego.

Przykład 1

Dane są wektory:

$$\overrightarrow{u} = [4, 3],\ \overrightarrow{v} = [1, -2],\ \overrightarrow{w} = [2, 2]$$

- Suma wektorów $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (kolor zielony):
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [4, 3] + [1, -2] = [5, 1]$$
- Suma wektorów $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ (kolor czerwony):
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = [4, 3] + [1, -2] + [2, 2] = [7, 3]$$



Ćwiczenie 3

Oblicz i narysuj sumę wektorów $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

a) $\overrightarrow{u}=[2,1]$, $\overrightarrow{v}=[1,3]$, $\overrightarrow{w}=[2,-6]$ b) $\overrightarrow{u}=[-3,3]$, $\overrightarrow{v}=[6,2]$, $\overrightarrow{w}=[2,1]$

Ćwiczenie 4

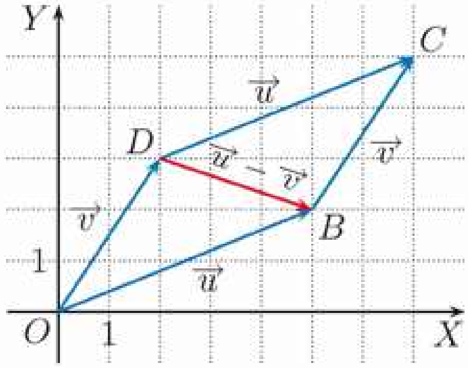
Wyznacz wektory $-\overrightarrow{u}$ i $-\overrightarrow{v}$ przeciwne do wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Oblicz i narysuj sumę wektorów $-\overrightarrow{u}$ i $-\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u}=[2,3]$, $\overrightarrow{v}=[4,2]$ b) $\overrightarrow{u}=[-4,-2]$, $\overrightarrow{v}=[4,-3]$

Definicja

Różnicą wektorów $\overrightarrow{u}=[a,b]$ **i** $\overrightarrow{v}=[c,d]$ jest wektor:

$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=[a-c,b-d]$$



Na rysunku przedstawiono wektory $\overrightarrow{u}=[5,2]$, $\overrightarrow{v}=[2,3]$ oraz ich różnicę $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=[3,-1]$.

Na rysunku obok wektor $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ odpowiada przekątnej DB równoległoboku $OBCD$. Zauważ, że różnica wektorów $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ jest równa sumie wektora $\overrightarrow{u}$ i wektora $-\overrightarrow{v}$ (przeciwnego do wektora $\overrightarrow{v}$).

Ćwiczenie 5

Oblicz i narysuj różnice wektorów $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ oraz $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$.

a) $\overrightarrow{u}=[3,-2]$, $\overrightarrow{v}=[2,6]$ b) $\overrightarrow{u}=[-5,-4]$, $\overrightarrow{v}=[-2,3]$

Definicja

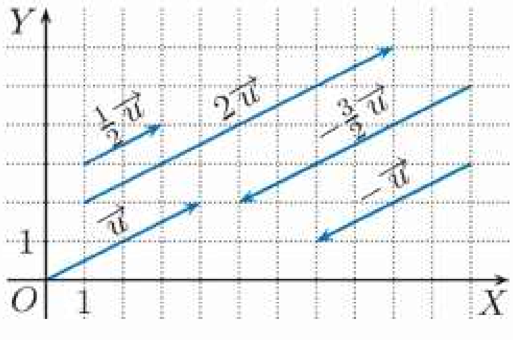
Iloczynem wektora $\overrightarrow{u}=[a,b]$ **przez liczbę** $\alpha\in\mathbf{R}$ nazywamy wektor:

$$\alpha\overrightarrow{u}=[\alpha a,\alpha b]$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wektor $\overrightarrow{u}=[4,2]$ oraz wektory:

$$\tfrac{1}{2}\overrightarrow{u}=[2,1],\quad 2\overrightarrow{u}=[8,4]$$
$$-\overrightarrow{u}=[-4,-2]$$
$$-\tfrac{3}{2}\overrightarrow{u}=[-6,-3]$$



Ćwiczenie 6

Dane są wektory $\overrightarrow{u}=[2,-1]$ i $\overrightarrow{v}=[-3,-2]$. Oblicz i narysuj wektor:

a) $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$, b) $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, c) $-4\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$, d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

Symbolem $\overrightarrow{0}$ oznaczamy **wektor zerowy**: $\overrightarrow{0} = [0, 0]$.

Ćwiczenie 7

Dla jakiego α zachodzi równość $\alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$?

a) $\overrightarrow{u} = [2, -3]$, $\overrightarrow{v} = [-6, 9]$

b) $\overrightarrow{u} = [-12, 9]$, $\overrightarrow{v} = [-16, 12]$

Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.
Jeśli niezerowe wektory są równoległe, to mówimy, że mają ten sam **kierunek**.

Twierdzenie

Dwa niezerowe wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają ten sam kierunek wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\alpha \neq 0$, że $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.

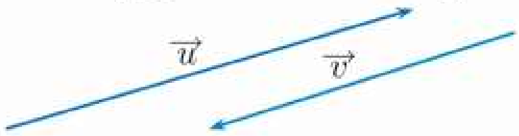
Przykład 3

Dane są wektory $\overrightarrow{u} = [12, 8]$ i $\overrightarrow{v} = [9, 6]$. Wektory te mają ten sam kierunek, gdyż $\overrightarrow{u} = \frac{4}{3}\overrightarrow{v}$.

Rozpatrzmy niezerowe wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, dla których istnieje liczba $\alpha \neq 0$, taka że $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.

- Jeśli $\alpha > 0$, to mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają **ten sam zwrot**.
- Jeśli $\alpha < 0$, to mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają **przeciwne zwroty**.

Wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.



Wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty.

Ćwiczenie 8

Wśród poniższych wektorów wskaż te, które mają ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overrightarrow{u} = [-6, 8]$, oraz te, które mają ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$, ale przeciwny zwrot.

$\overrightarrow{v_1} = \left[-2, 2\frac{2}{3}\right]$, $\overrightarrow{v_2} = [3, -4]$, $\overrightarrow{v_3} = [18, -16]$, $\overrightarrow{v_4} = \left[-\frac{3}{4}, 1\right]$, $\overrightarrow{v_5} = [24, -32]$

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ (oznaczamy ją $|\overrightarrow{AB}|$) to długość odcinka AB.

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\overrightarrow{u}$ ma współrzędne $[u_1, u_2]$, to **długość wektora** $\overrightarrow{u}$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

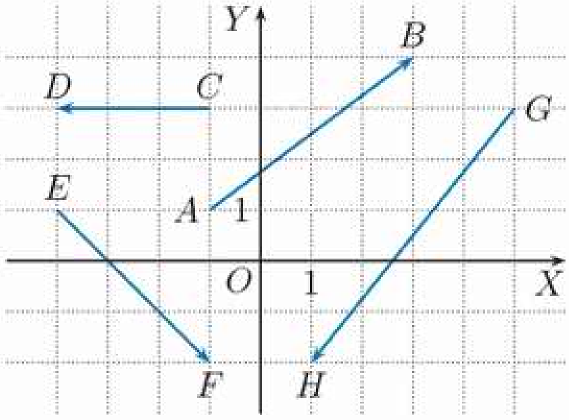
Ćwiczenie 9

Oblicz długość wektora $\overrightarrow{u}$.

a) $\overrightarrow{u} = [-3, 4]$ b) $\overrightarrow{u} = [-5, -12]$ c) $\overrightarrow{u} = [3, 3]$

Ćwiczenie 10

Dane są wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ oraz $\overrightarrow{GH}$ przedstawione na rysunku obok. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{u}$.



a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{GH} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$

d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Zadania

1. Sprawdź, czy wektor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{w}$.

a) $\overrightarrow{u} = \left[\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right]$, $\overrightarrow{v} = \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right]$, $\overrightarrow{w} = \left[\frac{5}{4}, -\frac{25}{4}\right]$

b) $\overrightarrow{u} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $\overrightarrow{v} = \left[\frac{3}{2}, -2\right]$, $\overrightarrow{w} = \left[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right]$

2. Dane są punkty $A(2,1)$ i $B(4,5)$. Wyznacz współrzędne punktu P.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BP}$ c) $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BA}$ e) $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP}$ f) $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$

3. Dane są trzy punkty A, B i C. Wyznacz współrzędne punktu D takiego, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AD}$.

a) $A(0,0)$, $B(4,3)$, $C(-1,2)$ c) $A(4,6)$, $B(3,1)$, $C(6,2)$

b) $A(-1,2)$, $B(-2,-3)$, $C(4,2)$ d) $A(-1,-3)$, $B(-4,1)$, $C(2,4)$

4. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

A	B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$3\overrightarrow{BA}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$\lvert 3\overrightarrow{AB}\rvert$
$(3,4)$	$(1,2)$	?	?	?	?	?
?	$(6,3)$	?	$[8,9]$	?	?	?
$(-1,4)$	?	$[2,-3]$	?	?	?	?
$(1,4)$	?	?	$[-2,6]$	?	?	?
?	$(2,\frac{1}{3})$	?	?	$[3,-4]$	?	?

5. Sprawdź, czy wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.

a) $\overrightarrow{u}=[-2,4]$, $\overrightarrow{v}=\left[\frac{1}{2},-1\right]$ c) $\overrightarrow{u}=[12,14]$, $\overrightarrow{v}=[72,86]$

b) $\overrightarrow{u}=[12,-9]$, $\overrightarrow{v}=\left[2,-\frac{3}{2}\right]$ d) $\overrightarrow{u}=\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right]$, $\overrightarrow{v}=\left[1,2+\sqrt{2}\right]$

6. Dla jakich wartości parametru m wektor $\overrightarrow{u}$ ma ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{v}=[3,1]$?

a) $\overrightarrow{u}=[m+1,2]$ b) $\overrightarrow{u}=[6,m^2+1]$ c) $\overrightarrow{u}=[12m,m^3]$

D **7.** Dany jest wektor $\overrightarrow{u}=[x,y]$. Uzasadnij, że $|\alpha\overrightarrow{u}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{u}|$.

8. Dany jest wektor $\overrightarrow{u}=[-3,4]$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{v}$, który ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overrightarrow{u}$, jeśli:

a) $|\overrightarrow{v}|=20$,   b) $|\overrightarrow{v}|=8$.

9. Dany jest wektor $\overrightarrow{u}=[3,-1]$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{v}$, który ma ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$, ale przeciwny zwrot, jeśli:

a) $|\overrightarrow{v}|=20$,   b) $|\overrightarrow{v}|=3$.

D **10.** Dany jest niezerowy wektor $\overrightarrow{u}=[x,y]$. Wykaż, że wektor $\left[\frac{x}{|\overrightarrow{u}|},\frac{y}{|\overrightarrow{u}|}\right]$ jest wektorem jednostkowym.

Wektor, którego długość jest równa 1, nazywamy **wektorem jednostkowym**.

11. Wyznacz wektor jednostkowy równoległy do wektora $\overrightarrow{u}$.

a) $\overrightarrow{u}=[-8,6]$ b) $\overrightarrow{u}=[1,1]$

12. Dane są wektory $\overrightarrow{u}=[1,2]$ i $\overrightarrow{v}=[3,-1]$. Wyznacz wartości parametrów α i β, dla których prawdziwa jest poniższa równość.

a) $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}=[-1,5]$ c) $\alpha\overrightarrow{u}-\beta\overrightarrow{v}=\left[-3,2\frac{1}{2}\right]$

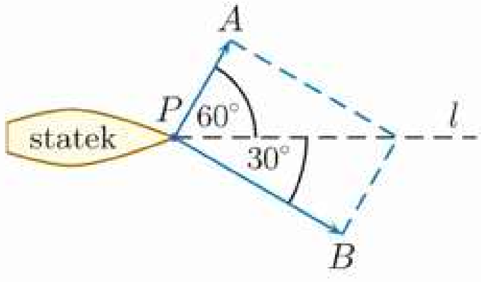
b) $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}=[3,-4]$ d) $\alpha\overrightarrow{u}-\beta\overrightarrow{v}=[-1,-23]$

13. Wyznacz wartość parametru m, dla której $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}-m\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.

a) $\overrightarrow{u}=[1,3]$, $\overrightarrow{v}=[-4,2]$, $\overrightarrow{w}=[-5,6]$

b) $\overrightarrow{u}=[4,2]$, $\overrightarrow{v}=[-6,9]$, $\overrightarrow{w}=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$

D **14.** Statek holowany jest przez dwa holowniki. Jeden z nich ciągnie ten statek z siłą o wartości F w kierunku PA. Uzasadnij, że jeżeli drugi holownik – ciągnący statek w kierunku PB – użyje siły o wartości $\sqrt{3}F$, to statek ten będzie poruszał się wzdłuż prostej l.



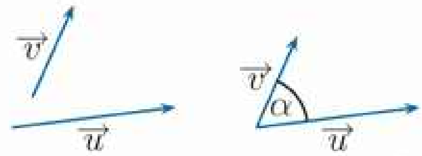
Warto wiedzieć

Iloczyn skalarny wektorów

Iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów jest liczbą równą iloczynowi długości tych wektorów i cosinusa kąta między nimi:

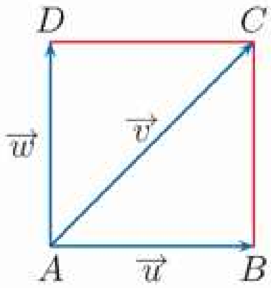
$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha$$

Jeśli jeden z wektorów jest wektorem zerowym, przyjmuje się, że ich iloczyn skalarny jest równy zero.



Kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ jest kąt wypukły, w którego wierzchołku leży początek obu tych wektorów oraz wektory te wyznaczają ramiona kąta.

Przykład 1

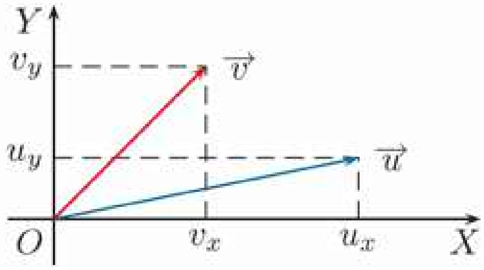


Dane są kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 oraz wektory $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. Oblicz $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$ oraz $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w}$.

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

> Niezerowe wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} = 0$.



Iloczyn skalarny wektorów możemy wyrazić za pomocą współrzędnych tych wektorów.

> Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y]$ zachodzi związek:
> $$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

D **1.** Udowodnij powyższe twierdzenie, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

Oblicz miarę kąta między wektorami $\overrightarrow{u} = [4, 2]$ i $\overrightarrow{v} = [-3, 1]$.

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad |\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cos\alpha = 10\sqrt{2} \cos\alpha$$

jednocześnie:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -10$$

Otrzymujemy równość: $10\sqrt{2}\cos\alpha = -10$, czyli $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, skąd $\alpha = 135^\circ$.

2. Oblicz miarę kąta między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u} = [4, 2]$, $\overrightarrow{v} = [2, 6]$

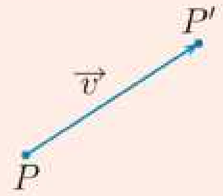
b) $\overrightarrow{u} = [3, 9]$, $\overrightarrow{v} = [-3, 1]$

c) $\overrightarrow{u} = [-\sqrt{3}, -1]$, $\overrightarrow{v} = [2, 2\sqrt{3}]$

d) $\overrightarrow{u} = [1 - \sqrt{5}, 1]$, $\overrightarrow{v} = [1 + \sqrt{5}, 4]$

*2.10. Wektory – zastosowania

Przesunięciem (lub translacją) o wektor $\overrightarrow{v}$ nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt P', że $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{v}$. Mówimy, że punkt P' jest **obrazem** punktu P w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v}$.

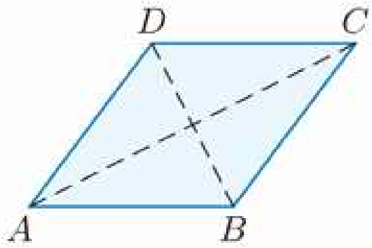


Obrazem punktu $P(x, y)$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v} = [a, b]$ jest punkt $P'(x+a, y+b)$.

Ćwiczenie 1

Dany jest romb $ABCD$ o polu równym 4 (rysunek obok). Romb $A'B'C'D'$ otrzymujemy przez przesunięcie rombu $ABCD$ o wektor $\overrightarrow{v}$. Oblicz pole figury będącej częścią wspólną obu rombów, jeśli:

a) $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, b) $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Ćwiczenie 2

Dany jest prostokąt F o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(4, 4)$ i $D(0, 6)$. Prostokąt F_1 jest obrazem prostokąta F w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v}$. Oblicz pole części wspólnej obu prostokątów.

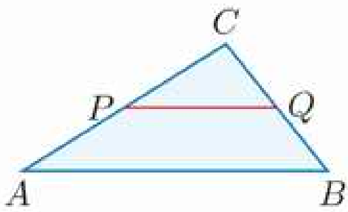
a) $\overrightarrow{v} = [1, 2]$ b) $\overrightarrow{v} = [0, -5]$ c) $\overrightarrow{v} = [4, 2]$

Ćwiczenie 3

Koło K_2 jest obrazem koła K_1 o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 4$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v} = [4, 4]$. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

D Przykład 1

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Punkt P jest środkiem boku AC, a punkt Q – środkiem boku BC. Udowodnij, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.



Wektor $\overrightarrow{PQ}$ zapisujemy jako sumę:

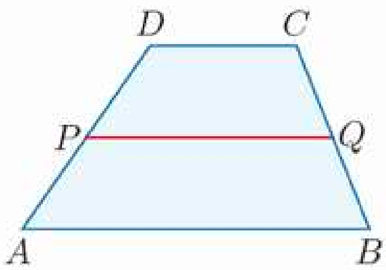
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Oznacza to, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.

D Ćwiczenie 4

Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a długość tego odcinka jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Wskazówka. Zauważ, że $\overrightarrow{DC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ dla pewnej stałej α.



Przykład 2

Sprawdź, czy punkty $A(-4,-5)$, $B(2,-1)$ i $C(26,15)$ są współliniowe.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=[2-(-4),-1-(-5)]=[6,4]$, $\overrightarrow{AC}=[26-(-4),15-(-5)]=[30,20]$

Zauważmy, że $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}$, zatem punkty A, B i C są współliniowe.

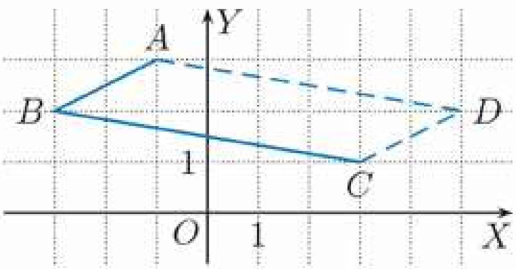
Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy punkty P, Q i R są współliniowe.

a) $P(2,-1)$, $Q(-2,4)$, $R(10,-11)$ b) $P(-5,2)$, $Q(13,8)$, $R(19,10)$

Przykład 3

Dane są współrzędne wierzchołków $A(-1,3)$, $B(-3,2)$ i $C(3,1)$ równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D.



Zauważmy, że $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Wyznaczamy wektor $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=[3-(-3),1-2]=[6,-1]$$

Wierzchołek D jest obrazem punktu A w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{AD}$, zatem $D(-1+6,3-1)$, czyli $D(5,2)$.

Ćwiczenie 6

Punkty P, Q i R są kolejno środkami boków AB, BC i CD równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli:

a) $B(3,3)$, $P(5,1)$, $Q(-1,2)$,

b) $P(2,0)$, $Q(7,4)$, $R(4,4)$,

c) $\overrightarrow{BA}=[-5,5]$, $\overrightarrow{BC}=[2,4]$, $Q(3,-1)$,

d) $\overrightarrow{AB}=[8,2]$, $Q(7,2)$, $R(6,4)$.

Zadania

D **1.** Dane są punkty $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ oraz $S\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Wykaż, że:

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SB}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wyznacz wektor $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, a następnie współrzędne punktów P i Q dzielących odcinek AB na trzy równe części.

a) $A(-3,-2)$, $B(3,1)$ b) $A(-10,6)$, $B(8,-6)$ c) $A(1,-1)$, $B(2,1)$

3. Wyznacz współrzędne końców odcinka AB, jeśli wiadomo, że punkty:

a) $P(2,1)$ i $Q(5,4)$ dzielą go na trzy równe części,

b) $P(4,-2)$, $Q(3,1)$ i $R(2,4)$ dzielą go na cztery równe części.

4. a) Dane są punkty $A(-4, 7)$ i $B(6, -8)$. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB w stosunku $2:3$. Rozpatrz dwa przypadki.

b) Punkt $P(3, -2)$ dzieli odcinek AB w stosunku $3:4$. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli $B(-9, 16)$. Rozpatrz dwa przypadki.

5. a) Punkty $A(-2, -3)$ i $B(4, -1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $P(2, 0)$ jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

b) Punkt $P(3, 1)$ jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie $S(-1, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli $\overrightarrow{CD} = [2, -4]$.

6. Dane są wektory $\overrightarrow{AC} = [12, 3]$, $\overrightarrow{BC} = [9, 9]$ oraz punkt $A(-5, 3)$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte wysokości trójkąta ABC.

7. a) Dane są wektor $\overrightarrow{AB} = [6, 3]$ oraz punkt $C(1, 6)$. Punkt $S\left(2, 3\frac{1}{2}\right)$ jest środkiem odcinka BC. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC.

b) Dane są wektory $\overrightarrow{AB} = [4, -4]$, $\overrightarrow{CD} = [6, 6]$ oraz punkt $C(6, 7)$ będący wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB i wysokości CD. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta.

8. Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest dwa razy dłuższa od podstawy CD. Wyznacz współrzędne wierzchołka C, jeśli $A(4, -5)$, $B(8, 1)$, $D(-3, -1)$.

***9.** Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest trzy razy dłuższa od podstawy CD. Wyznacz współrzędne:

a) punktu przecięcia przekątnych tego trapezu, jeśli $A(-2, 2)$ i $C(3, 4)$,

b) wierzchołków B, C i D, jeśli $A(1, 2)$, $\overrightarrow{AD} = [1, 3]$ i $\overrightarrow{DB} = [5, 0]$.

D ***10.** a) Udowodnij, że współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

b) Dane są wierzchołki $A(-1, 0)$ i $B(2, 5)$ trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego środek ciężkości ma współrzędne $(-1, 2)$.

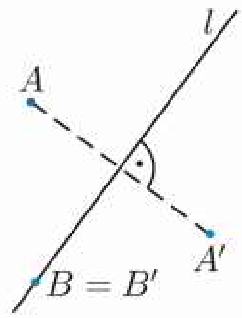
***11.** Dane są równania prostych zawierających dwie środkowe trójkąta: $y = 2$ i $y = -x+3$ oraz jeden z jego wierzchołków: $(1, -2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

2.11. Symetria osiowa

Załóżmy, że punkt A nie należy do prostej l.

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej** l, jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

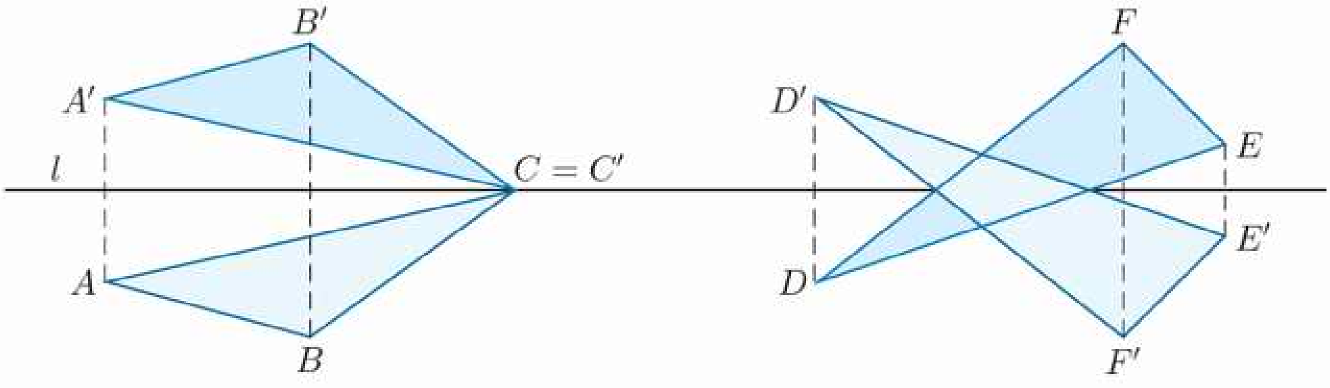
Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).



Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l.
Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.



Odległość między obrazami dwóch punktów w symetrii osiowej jest równa odległości między tymi punktami (mówimy, że symetria osiowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami). Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a) l_1, b) l_2, c) l_3.

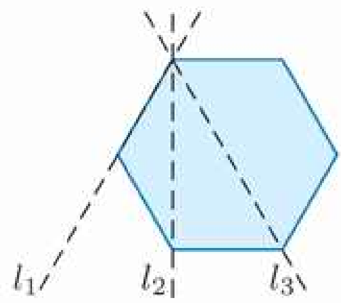
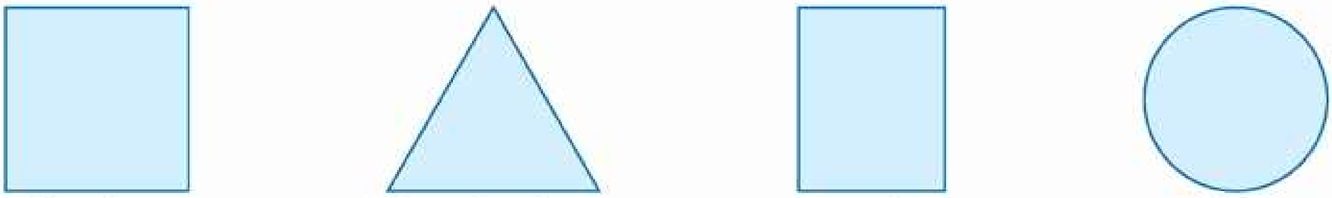


Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l. Prostą l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.

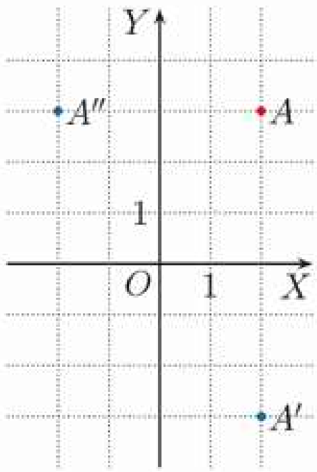


kwadrat | trójkąt równoboczny | prostokąt | koło

Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

Obrazem punktu $A(2,3)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(2,-3)$. Obrazem punktu $A(2,3)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A''(-2,3)$.



Punktem symetrycznym do punktu $P(x,y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $P'(x,-y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x,y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $P''(-x,y)$.

Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY. Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB, $A'B'$ i $A''B''$.

a) $A(0,3)$, $B(3,0)$ b) $A(1,-2)$, $B(-4,3)$ c) $A(-5,1)$, $B(1,4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(0,3)$, $B(2,-1)$, $C(3,-1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX, b) osi OY.

Ćwiczenie 5

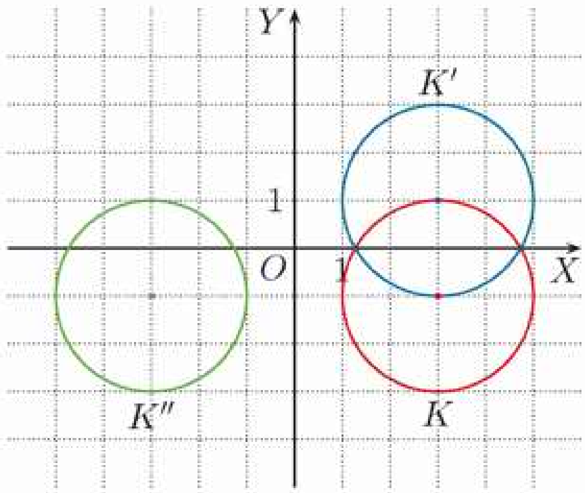
Dane są punkty $A(-2,1)$, $B(2,-3)$, $C(4,-1)$ i $D(0,3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX, b) osi OY.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY.

a) $K\colon (x+3)^2+(y-2)^2=16$

b) $K\colon (x+2)^2+(y+4)^2=13$

c) $K\colon x^2+y^2-6x-4y+12=0$

d) $K\colon x^2+y^2+2x+12y-12=0$

Zadania

1. Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY.

a) $A(-2,1)$, $B(3,-2)$, $A'(-2,-1)$, $B'(3,2)$

b) $A(-3,4)$, $B(-1,-2)$, $A'(3,4)$, $B'(1,-2)$

c) $A(-4,-3)$, $B(2,2)$, $A'(-4,3)$, $B'(-2,2)$

d) $A(-2,0)$, $B(0,4)$, $A'(2,0)$, $B'(0,-4)$

2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY.

a) $A(-1,2)$, $B(5,3)$, $C(2,5)$

b) $A(-3,0)$, $B(-2,-5)$, $C(0,3)$

c) $A(-3,2)$, $B(0,-3)$, $C(3,2)$

d) $A(-3,-1)$, $B(9,-2)$, $C(2,1)$

3. Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5,1)$, $(-2,-2)$, $(1,1)$, $(-2,4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:

a) osi OX,

b) osi OY.

4. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX. Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K'.

a) $K\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$
b) $K\colon (x-2)^2 + (y+2)^2 = 41$
c) $K\colon (x+3)^2 + y^2 = 4$
d) $K\colon (x+1)^2 + (y-4)^2 = 40$

5. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OY. Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.

a) $K\colon x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$
b) $K\colon x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

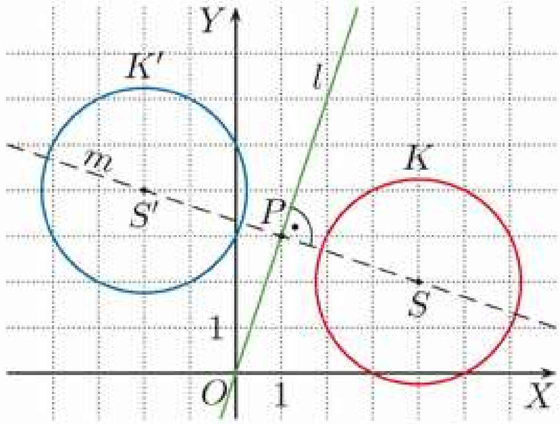
Dany jest okrąg K o środku w punkcie $S(4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $l\colon y = 3x$.

Niech $m\colon y = ax + b$ będzie prostą przechodzącą przez punkt S oraz $m \perp l$. Zatem $a = -\frac{1}{3}$ oraz:

$$m\colon y = -\tfrac{1}{3}x + b$$

Do równania prostej m podstawiamy współrzędne punktu $S(4, 2)$ i otrzymujemy:

$$m\colon y = -\tfrac{1}{3}x + 3\tfrac{1}{3}$$



Niech P będzie punktem przecięcia prostych l i m. Jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem $P(1, 3)$.

Współrzędne punktu S' – środka okręgu K' – wyznaczamy, korzystając z tego, że punkt P jest środkiem odcinka $S'S$. Otrzymujemy $S'(-2, 4)$.

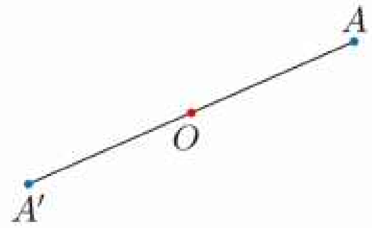
Ponieważ okrąg K' ma ten sam promień co okrąg K, jego równanie ma postać $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu K względem prostej l.

a) $K\colon (x-5)^2 + (y-2)^2 = 2,\ \ l\colon y = 2x - 3$
b) $K\colon x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0,\ \ l\colon x + 3y - 2 = 0$
c) $K\colon x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0,\ \ l\colon 2x + 3y - 9 = 0$

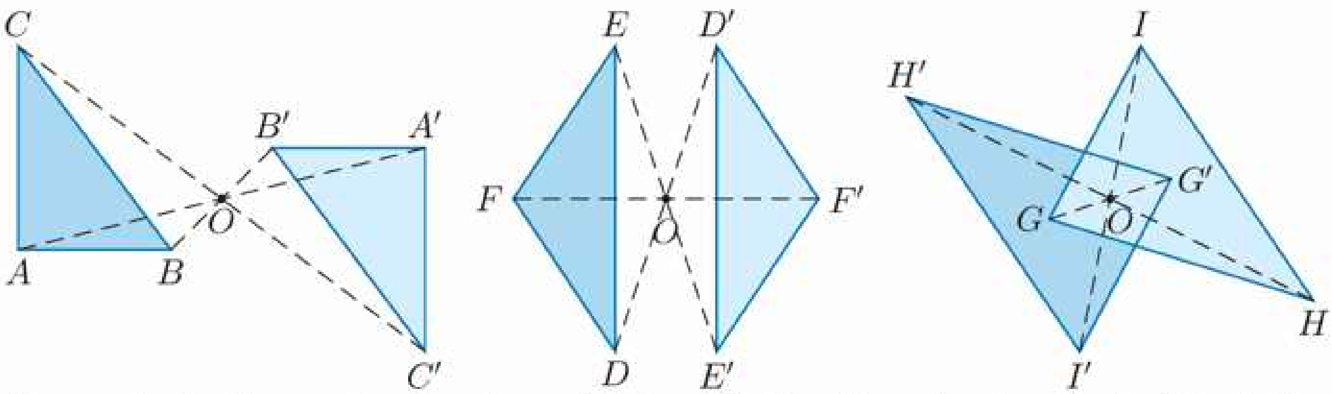
2.12. Symetria środkowa

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu** O $(A \neq O)$, jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A'.
Punktem symetrycznym do O jest on sam.



Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O.
Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC, DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O.



Symetria środkowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami. Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny ABC, a następnie przekształć go symetrycznie względem:

a) jednego z jego wierzchołków,
b) środka jednego z jego boków,
c) punktu przecięcia jego dwusiecznych,
d) punktu leżącego na zewnątrz niego.

Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli istnieje taki punkt O, że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

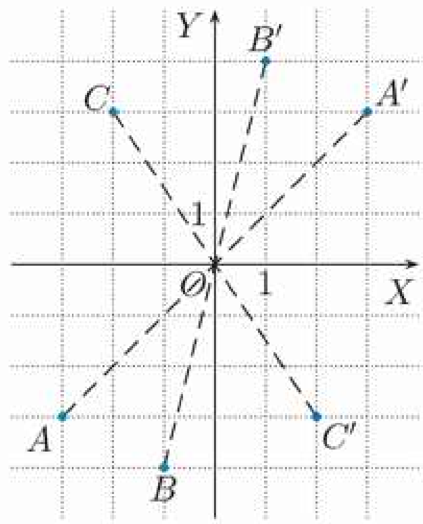
Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

Punktami symetrycznymi do punktów $A(-3,-3)$, $B(-1,-4)$ i $C(-2,3)$ względem początku układu współrzędnych są odpowiednio punkty $A'(3,3)$, $B'(1,4)$ i $C'(2,-3)$.



> Punktem symetrycznym do punktu $P(x,y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P'(-x,-y)$.

Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

a) $A(3,-2)$, $B(-2,-1)$, $C(-1,4)$ b) $A(2,-2)$, $B(1,3)$, $C(-3,1)$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

a) $A(-3,-2)$, $B(5,-2)$, $C(5,3)$, $D(-3,3)$

b) $A(-2,1)$, $B(1,-2)$, $C(3,0)$, $D(0,3)$

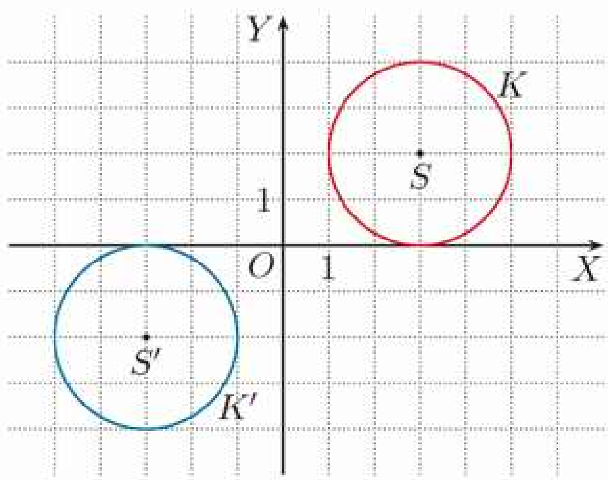
Przykład 2

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K\colon (x-3)^2+(y-2)^2=4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3,2)$, a jego promień $r=2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3,-2)$, a jego promień $r'=2$.

Oznacza to, że okrąg K' jest dany równaniem $(x+3)^2+(y+2)^2=4$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K\colon (x+5)^2+(y-3)^2=16$. Narysuj te okręgi.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K. Narysuj te okręgi.

a) $K\colon x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$
c) $K\colon x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
b) $K\colon x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$
d) $K\colon x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Zadania

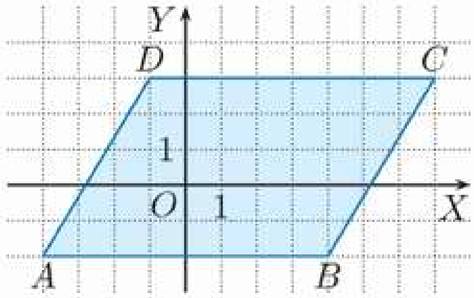
1. Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA', jeśli wiadomo, że:

a) $A(3, 4)$, b) $A(-1, 4)$, c) $A(-6, -8)$, d) $A(a, a)$.

2. Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i znajdź jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.

a) $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$
b) $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-3, 2)$

3. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu O. Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.



D **4.** Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX, a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY. Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.

5. Wyznacz punkty wspólne okręgu K oraz jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

a) $K\colon (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$
c) $K\colon (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$
b) $K\colon (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$
d) $K\colon (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$

6. Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej kół przez nie ograniczonych.

a) $K\colon x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$
c) $K\colon x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 9 = 0$
b) $K\colon x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$
d) $K\colon x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}y - 18 = 0$

7. Okrąg $K\colon (x+2)^2 + (y-4)^2 = r^2$ i okrąg K' będący jego obrazem w symetrii względem początku układu współrzędnych są styczne zewnętrznie. Podaj równania wspólnych stycznych tych okręgów.

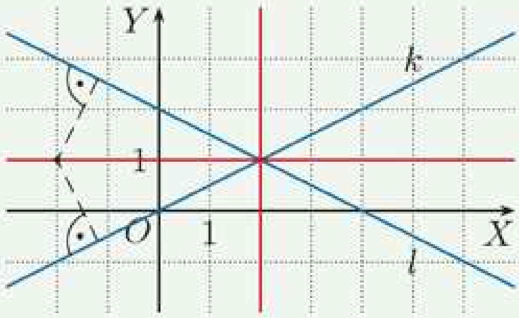
2.13. Zagadnienia uzupełniające

Zbiory punktów o danej własności

Przykład 1

Punkty równo odległe od dwóch przecinających się prostych leżą na dwusiecznych kątów utworzonych przez te proste.
Na rysunku obok przedstawiono proste:

$$k\colon y = \tfrac{1}{2}x \quad \text{i} \quad l\colon y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$



Proste k i l przecinają się w punkcie $(2, 1)$, zatem zbiór punktów równo odległych od tych prostych jest sumą dwóch prostych: $x = 2$ oraz $y = 1$.

1. Wyznacz zbiór punktów równo odległych od prostych k i l.

a) $k\colon y = 2x + 5, \ \ l\colon y = -2x - 2$

b) $k\colon y = 3, \ \ l\colon x = 1$

c) $k\colon y = 0, \ \ l\colon y = \sqrt{3}x$

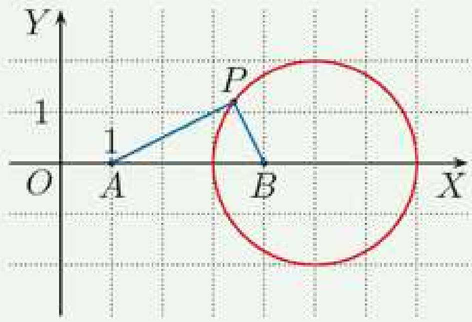
d) $k\colon y = -3, \ \ l\colon y = 1$

Przykład 2

Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu $A(1, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(4, 0)$.

Niech $P(x, y)$ będzie punktem, takim że $|PA| = 2|PB|$. Wówczas:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2$$
$$-3x^2 - 3y^2 + 30x - 63 = 0 \ / : (-3)$$
$$x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$$
$$(x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 = 0$$
$$(x-5)^2 + y^2 = 4$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest okrąg o środku $(5, 0)$ i promieniu 2.

2. Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu:

a) $A(0, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(6, 0)$,

b) $A(-2, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(4, 0)$,

c) $A(0, 1)$ jest trzy razy większa od odległości od punktu $B(0, -3)$.

Przykład 3

Wyznacz zbiór środków okręgów stycznych do osi OX i przechodzących przez punkt $A(0,2)$.

Niech punkt $P(x,y)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, a $Q(x,0)$ – punktem styczności tego okręgu z osią OX.

Wówczas:

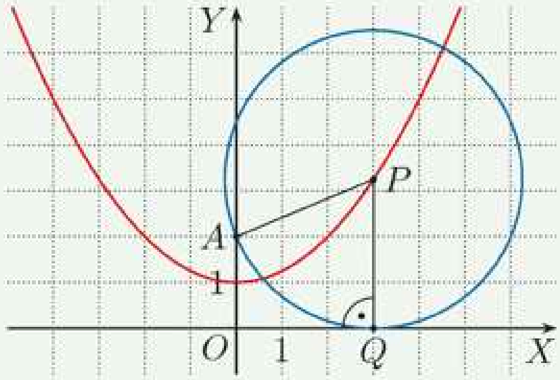
$$|PA| = |PQ|$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = y \qquad y > 0$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$4y = x^2 + 4$$

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 + 1$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

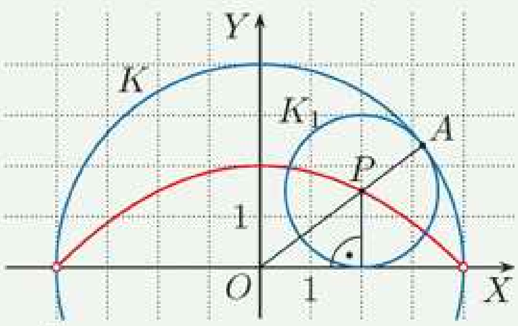
3. Wyznacz zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt:

a) $A(0,4)$ i stycznych do osi OX, b) $A(6,0)$ i stycznych do osi OY.

Przykład 4

Wyznacz zbiór punktów o dodatniej rzędnej będących środkami okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu K: $x^2+y^2=16$ i stycznych do osi OX.

Niech punkt $P(x,y)$ będzie środkiem okręgu K_1 spełniającego warunki zadania. Promień tego okręgu jest równy y i spełnia warunek $y \in (0;2\rangle$. Niech A będzie punktem styczności okręgów K i K_1. Wówczas $|OP| = 4 - |PA| = 4 - y$ oraz $|OP| = \sqrt{x^2+y^2}$, zatem otrzymujemy równanie:



$$\sqrt{x^2+y^2} = 4 - y \qquad 4 - y > 0$$

$$x^2 + y^2 = 16 - 8y + y^2$$

$$8y = -x^2 + 16$$

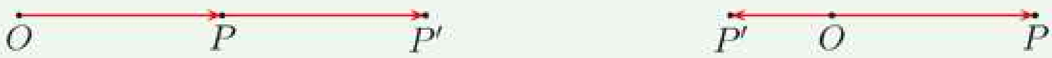
Otrzymaliśmy równanie paraboli $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$, zatem szukanym zbiorem punktów jest jej fragment dla $x \in (-4;4)$.

4. Wyznacz zbiór punktów o dodatniej odciętej będących środkami okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu $x^2+y^2=4$ i stycznych do osi OY.

Jednokładność

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje punkt P' taki, że:

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$$



Punkt P' jest obrazem punktu P w jednokładności o środku O i skali 2.

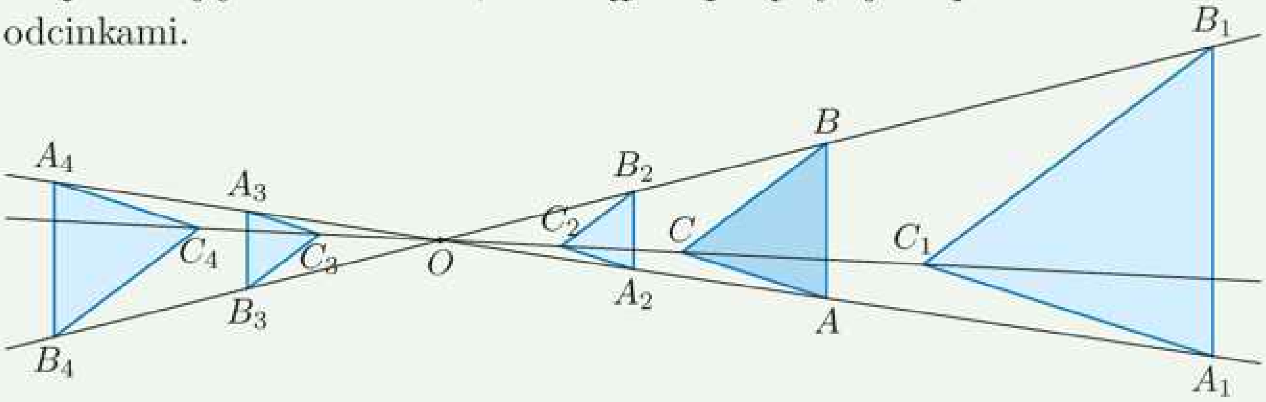
Punkt P' jest obrazem punktu P w jednokładności o środku O i skali $-\frac{1}{2}$.

Obrazem odcinka AB w jednokładności o skali k jest odcinek $A'B'$ równoległy do odcinka AB taki, że $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

5. Dany jest odcinek AB, gdzie $A(4,-2)$, $B(2,2)$. Narysuj obraz odcinka AB w jednokładności o środku $O(0,0)$ i skali k. Oblicz długość otrzymanego odcinka, jeśli:

a) $k = \frac{1}{2}$, b) $k = -1$, c) $k = -\frac{1}{2}$, d) $k = 3$.

Figury F_1 i F_2 nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli istnieje jednokładność przekształcająca figurę F_1 na figurę F_2.
Aby narysować obraz dowolnego wielokąta w jednokładności o środku O i skali k, wystarczy znaleźć obrazy wszystkich wierzchołków danego wielokąta w tej jednokładności, a następnie połączyć je odpowiednio odcinkami.



Każdy z trójkątów: $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ i $A_4B_4C_4$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku O i skali, odpowiednio, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2}$ i $k_4 = -1$.

6. Dane są punkty $A(2,0)$, $B(4,-4)$ i $C(4,2)$. Narysuj trójkąt $A'B'C'$ będący obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $O(0,0)$ i skali k. Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$.

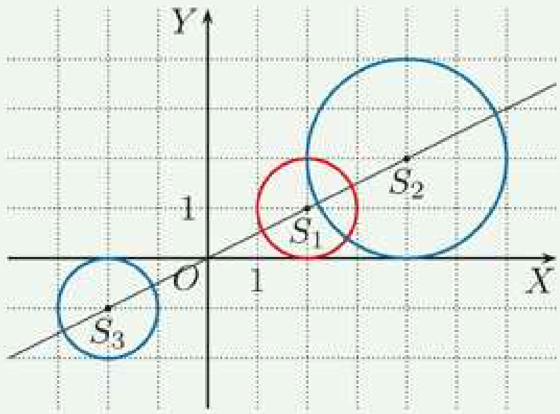
a) $k = 2$ b) $k = -1$ c) $k = -\frac{1}{2}$ d) $k = 3$

Jeśli skala jednokładności dwóch figur jest równa k, to skala ich podobieństwa jest równa $|k|$.

Obrazem okręgu o środku w punkcie S_1 i promieniu r_1 w jednokładności o środku w punkcie O i skali k jest okrąg o środku w punkcie S_2 takim, że $\overrightarrow{OS_2} = k \cdot \overrightarrow{OS_1}$, i promieniu r_2 takim, że $r_2 = |k| \cdot r_1$.

Na rysunku przedstawiono okrąg K_1 o środku $S_1(2,1)$ i promieniu $r_1 = 1$.

- Obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku O i skali $k = 2$ jest okrąg K_2 o środku $S_2(4,2)$ i promieniu $r_2 = 2$.
- Obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku O i skali $k = -1$ jest okrąg K_3 o środku $S_3(-2,-1)$ i promieniu $r_3 = 1$.



Zauważmy, że jednokładność o skali $k = -1$ jest symetrią środkową.

7. Narysuj okrąg K_2 będący obrazem okręgu K_1: $(x-3)^2 + y^2 = 4$ w jednokładności o środku $O(0,0)$ i skali:

a) $k = 2$, b) $k = -1$, c) $k = -2$.

8. Dany jest okrąg K_1 o równaniu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Okrąg K_2 jest obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku w punkcie P i skali k. Podaj równanie okręgu K_2.

a) $P(0,0)$, $k = 2$ b) $P(4,2)$, $k = 3$ c) $P(2,-4)$, $k = -\frac{1}{2}$

9. Okrąg K_2 o równaniu $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$ jest obrazem w pewnej jednokładności okręgu K_1 o równaniu $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 0$. Wyznacz środek tej jednokładności oraz podaj jej skalę. Rozpatrz dwa przypadki.

10. Okrąg K_2 o równaniu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ jest obrazem okręgu K_1 o promieniu 1 w jednokładności o środku w punkcie $P(3,-1)$. Wyznacz równanie okręgu K_1. Rozpatrz dwa przypadki.

***11.** Okrąg K_1 o środku w punkcie $(4,-2)$ jest styczny do osi OX. Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o skali $k = -\frac{3}{2}$ i środku w punkcie P należącym do prostej $x + 2y = 0$. W ten sposób otrzymano okrąg K_2. Podaj równanie okręgu K_2, jeśli jest on styczny do osi: a) OX, b) OY.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz długości odcinków AB, BC i AC. Czy punkty A, B i C są współliniowe?

a) $A(-4,5)$, $B(0,2)$, $C(8,-4)$

b) $A(13,5)$, $B(-3,-3)$, $C(5,1)$

c) $A(-4,-12)$, $B(2,-4)$, $C(10,2)$

d) $A(-2\sqrt{2},8)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{2},-4)$

2. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

a) $A(-3,1)$, $B(3,-3)$, $C(1,7)$

b) $A(-3,4)$, $B(10,-2)$, $C(5,8)$

D **3.** Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

a) $A(0,6)$, $B(2,0)$, $C(8,2)$

b) $A(-7,-2)$, $B(2,1)$, $C(-1,10)$

4. Kwadrat, którego jeden z wierzchołków ma współrzędne $(1,-4)$, ma obwód równy $8\sqrt{5}$. Punkt przecięcia przekątnych tego kwadratu należy do prostej $y = x - 1$, a współrzędne tego punktu są liczbami ujemnymi. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

5. W trójkącie o wierzchołkach $A(2,-1)$, $B(1,2)$ i $C(-3,4)$ poprowadzono środkową AD i wysokość AE. Oblicz ich długości.

6. a) Na prostej przechodzącej przez punkty $A(1,-3)$ i $B(6,7)$ wyznacz punkty, których odległość od punktu A jest równa 2.

b) Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(2,-1)$, równo oddalonej od punktów $B(2,4)$ i $C(0,3)$.

7. Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r. Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

a) $S(-4,0)$, $r = 5$

b) $S(2,3)$, $r = 5$

c) $S(-1,2)$, $r = 4$

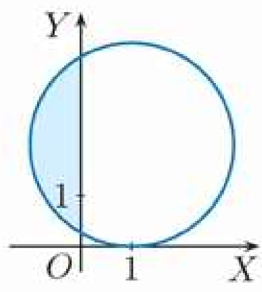
d) $S(-3,-4)$, $r = 1$

8. Do okręgu o środku $(1,2)$ należy punkt $(3,2)$.

a) Wyznacz równanie tego okręgu.

b) Wyznacz współrzędne punktów, w których okrąg ten przecina oś OY.

c) Oblicz pole zacieniowanego obszaru (rysunek obok).



9. Okrąg o środku w punkcie K_1 jest styczny do prostej l, a okrąg o środku w punkcie K_2 jest styczny do prostej k. Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

a) $K_1(-1,4)$, $l\colon x=1$, $K_2(1,4)$, $k\colon x=3$

b) $K_1(-3,-3)$, $l\colon y=-2$, $K_2(-3,-4)$, $k\colon y=-6$

10. Dla jakich wartości parametru m równanie nie opisuje okręgu?

a) $x^2+y^2-4x+2y=m^2-9$ b) $x^2+y^2-2mx+4y=m^2+m-7$

11. Dla jakich wartości parametru m okręgi K_1 i K_2 są styczne zewnętrznie?

a) K_1: $x^2+y^2+2x+2y=m^2-2$, K_2: $x^2+y^2-4x-6y=4m^2-13$

b) K_1: $x^2+y^2+6x-4y=m^2-13$, K_2: $x^2+y^2-2x-4y=m^2+2m-4$

12. Dla jakich wartości parametru m okręgi K_1 i K_2 mają tylko jeden punkt wspólny?

a) K_1: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$, K_2: $x^2+y^2+6x-2y+10-m=0$

b) K_1: $x^2+y^2-4x+2y+4=0$, K_2: $x^2+y^2+2x-6y+10-\frac{m}{4}=0$

Zestaw II

1. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych trójkąta ABC. Podaj równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

a) $A(0,0)$, $B(4,-4)$, $C(4,8)$ b) $A(-2,-2)$, $B(6,-2)$, $C(2,6)$

2. Punkt P leży na prostej l, a jego odległość od prostej $y=-x+2$ jest równa $4\sqrt{2}$. Wyznacz współrzędne punktu P.

a) l: $y=x+2$ b) l: $y=\frac{5}{3}x-6$

3. Jeden z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie P jest zawarty w prostej k. Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki tego kwadratu.

a) $P(-2,1)$, k: $y=3x-3$ b) $P(3,1)$, k: $y=-\frac{3}{4}x+10$

4. Oblicz odległość między prostą l_1: $y=-x+b_1$ a prostą l_2: $y=-x+b_2$, jeśli wiadomo, że pierwsza z nich jest odległa od punktu $(0,0)$ o 2, a druga – o 6 oraz $b_1, b_2>0$. Wyznacz równania tych prostych.

5. Dla jakich wartości parametru m trójkąt ABC ma pole równe 24?

a) $A(-1,1)$, $B(3,-3)$, $C(m,m)$ b) $A(-4,-6)$, $B(8,6)$, $C(m,6-m)$

6. Oblicz promień okręgu stycznego jednocześnie do prostych k i l. Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli jego środek leży na prostej $y = -x$.

a) k: $y = x + 2$, l: $y = x + 6$ b) k: $y = \frac{1}{2}x + 2$, l: $y = \frac{1}{2}x - 8$

7. Trójkąt równoramienny jest wpisany w okrąg $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

a) jego podstawa jest zawarta w prostej $y = x - 7$,

b) jedno z jego ramion jest zawarte w prostej $y = \frac{1}{2}x + 4$.

8. Bok AB trójkąta ABC zawiera się w prostej $x + y - 2 = 0$, a bok AC – w prostej $3x - 5y - 14 = 0$. Punkt $S(0, -2)$ jest środkiem boku BC. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na nim.

9. Oblicz odległość punktu $P(0, -3)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów $x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$ oraz $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$.

D **10.** Uzasadnij, że w pewnej symetrii środkowej okrąg $x^2+y^2+12x+32 = 0$ jest obrazem okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. Wyznacz środek tej symetrii.

11. Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu $x^2+y^2+6x-4y-3 = 0$ względem:

a) osi OX, b) osi OY, c) prostej $y = x - 3$, d) prostej $y = -2x + 6$.

12. a) Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 35 = 0$, prostopadłych do prostej $3x - y = 0$.

b) Przez punkt $A(3, -4)$ poprowadzono styczne do okręgu o środku $S(3, 1)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.

13. Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 2mx + 3m = 0$ opisuje okrąg styczny do prostej $x = 2$?

14. Oblicz pole części wspólnej trójkąta ABC i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v} = [-4, 1]$.

a) $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$ b) $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3\sqrt{3})$

15. Punkty P i Q są środkami boków odpowiednio AB i AC trójkąta ABC. Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC, jeśli:

a) $A(-4, 1)$, $P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{CB} = [1, -8]$,

b) $P(1, 3)$, $\overrightarrow{AP} = [4, 2]$, $\overrightarrow{PQ} = [-3, 1]$.

Przykład

Dla jakich wartości parametru m okrąg $(x-2)^2+(y-m)^2=5$ jest styczny do prostej $y=2x-1$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Okrąg jest styczny do prostej, gdy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-2)^2+(y-m)^2=5 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Przekształcamy drugie równanie i otrzymujemy:

$$x^2+y^2-4x-2my+m^2-1=0$$

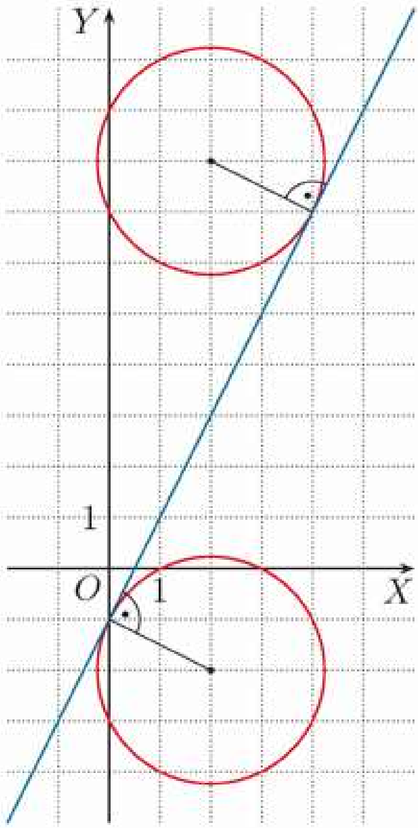
Podstawiamy $y=2x-1$:

$$x^2+(2x-1)^2-4x-2m(2x-1)+m^2-1=0$$
$$x^2+4x^2-4x+1-4x-4mx+2m+m^2-1=0$$
$$5x^2-4(m+2)x+m(m+2)=0$$

$\Delta=16(m+2)^2-20m(m+2)=-4m^2+24m+64=-4(m+2)(m-8)$

Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta=0$, czyli dla $m\in\{-2,8\}$.

II sposób



Okrąg jest styczny do prostej, gdy odległość jego środka od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Środkiem okręgu jest punkt $S(2,m)$, a jego promień $r=\sqrt{5}$.

Równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$2x-y-1=0$$

Odległość punktu S od prostej $2x-y-1=0$:

$$\frac{|2\cdot 2-1\cdot m-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3-m|}{\sqrt{5}}$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{|3-m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$$|3-m|=5$$
$$3-m=5 \quad \text{lub} \quad 3-m=-5$$
$$m=-2 \quad \text{lub} \quad m=8$$

Odpowiedź: Dany okrąg jest styczny do prostej $y=2x-1$ dla $m\in\{-2,8\}$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Punkty $A(-3,2)$, $B(1,2)$, $C(5,6)$ i $D(1,6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału:

A. $\langle 13;16\rangle$,
B. $(16;19\rangle$,
C. $(19;22\rangle$,
D. $(22;25\rangle$.

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu 3 oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny, jeśli:

A. $S_1(1,2)$, $S_2(4,5)$,
B. $S_1(2,1)$, $S_2(3,2)$,
C. $S_1(-6,2)$, $S_2(-2,-1)$,
D. $S_1(-4,-3)$, $S_2(-2,-2)$.

3. Okrąg o środku w punkcie $S(-1,2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ ma dwa punkty wspólne z prostą AB, gdy:

A. $A(-3,-2)$, $B(1,-1)$,
B. $A(-2,-5)$, $B(2,2)$,
C. $A(0,5)$, $B(3,4)$,
D. $A(2,1)$, $B(4,7)$.

4. Punkty $A(-3,7)$, $B(17,-3)$ i $C(13,5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek D ma współrzędne:

A. $(-7,15)$,
B. $(-4,10)$,
C. $(-4,8)$,
D. $(-20,10)$.

5. Punkty $A(-4,-4)$, $B(6,-4)$ i $C(14,2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Okrąg wpisany w ten romb dany jest równaniem:

A. $x^2-8x+y^2+2y+1=0$,
B. $x^2-8x+y^2+2y+8=0$,
C. $x^2+y^2-10x+2y-10=0$,
D. $x^2+y^2-10x+2y+17=0$.

6. Obrazem okręgu $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v}=[5,-4]$ jest okrąg:

A. $x^2+y^2+4x-6y-4=0$,
B. $x^2+y^2-4x+6y+9=0$,
C. $x^2+y^2-4x-6y-9=0$,
D. $x^2+y^2+4x+6y+4=0$.

7. Żaba, wykonując skok, przesuwa się o wektor $\overrightarrow{u}=[3,1]$ lub $\overrightarrow{v}=[-1,2]$. Na początku znajdowała się w punkcie $P(-2,-3)$. Wszystkie punkty, w których może znaleźć się żaba po wykonaniu trzech skoków, leżą na prostej danej równaniem:

A. $y=3x+1$,
B. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
C. $y=-x+2$,
D. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Dane są punkty $A(-5,1)$, $B(-3,5)$, $C(5,-1)$ i $D(11,-3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD.

Zadanie 2 (2 pkt)
Oblicz odległość punktu $P(1,6)$ od prostej $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4,1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K\colon (x-4)^2+(y+3)^2 = 4$ względem osi OX. Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D **Zadanie 5 (5 pkt)**
Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2,-1)$, $B(4,1)$, $C(6,7)$ i $D(0,5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 6 (4 pkt)
Punkty $A(4,2)$ i $B(1,6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(0,3)$. Wyznacz równanie symetralnej boku CD.

D **Zadanie 7 (3 pkt)**
Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$$
są styczne zewnętrznie.

Zadanie 8 (5 pkt)
W okrąg $(x-2)^2+(y-1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1,-3)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 9 (4 pkt)
Okrąg K' jest obrazem okręgu $K\colon (x+3)^2+(y-1)^2 = 17\frac{7}{9}$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu K' i wyznacz współrzędne punktów, w których przecina go prosta przechodząca przez środki tych okręgów.

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)
Punkty $A(-2,-1)$ i $C(4,1)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości 5. Oblicz pole tego rombu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)
Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(4,0)$ i $B(2,2)$ leży na prostej $y=-x$. Oblicz promień tego okręgu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg dany równaniem $x^2+y^2+6x-2y+6=0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (5 pkt)
Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego wpisanego w okrąg o równaniu $x^2+y^2+2x-4y-45=0$ jest średnicą tego okręgu. Oblicz wysokość tego trapezu, jeśli wiadomo, że jedno z jego ramion leży na prostej $y=3x-15$.

Zadanie 5 (6 pkt)
Punkty $A(-2,3)$, $B(0,1)$ i $C(3,6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu na nim opisanego.

Zadanie 6 (4 pkt)
Dla jakiej wartości parametru m okrąg $x^2+y^2-2mx-2y+m^2-67=0$ ma dwa punkty wspólne z prostą $y=-4x+3$?

Zadanie 7 (4 pkt)
W okrąg o równaniu $x^2+y^2-2x-4y-15=0$ wpisano trapez. Jego dłuższa podstawa jest zawarta w prostej $x-y=1$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa $4\sqrt{2}$.

Zadanie 8 (4 pkt)
Dane są wierzchołki $B(10,5)$ i $D(1,5)$ trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest trzy razy dłuższa od podstawy CD oraz $\overrightarrow{AB}=[12,6]$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu. Wyznacz wektor, którego początkiem jest środek ramienia AD, a końcem środek ramienia BC.

Zadanie 9 (5 pkt)
Dla jakiej wartości parametru m pole trójkąta o wierzchołkach $A(0,-3)$, $B(2,1)$ i $C(m,m^2+1)$ jest najmniejsze?

3 Ciągi

Pojęcia ciągu używamy, mówiąc o kolejno ustawionych obiektach. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

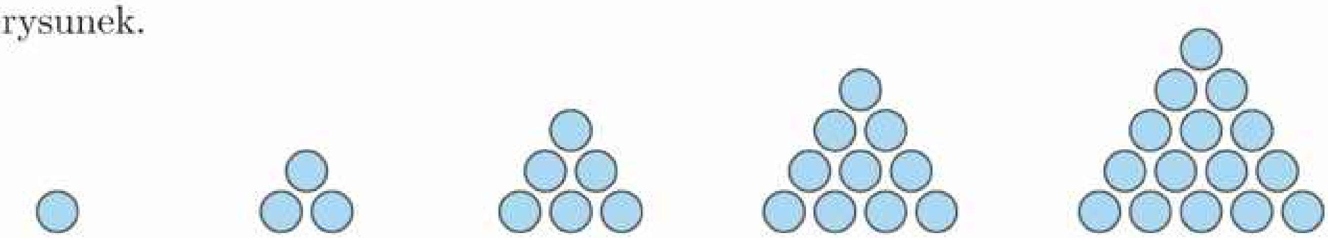
1, 4, 9, 16, 25, 36, … – ciąg kwadratów kolejnych liczb naturalnych dodatnich,

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \ldots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,

1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414214, 1,4142136, … – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.

3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, … to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



$a_1 = 1$ $\quad$ $a_2 = 3$ $\quad$ $a_3 = 6$ $\quad$ $a_4 = 10$ $\quad$ $a_5 = 15$

Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \ldots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, … wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyraz $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.
Ogólnie, n-ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_9 oraz a_{10} tego ciągu.

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$

c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

Definicja

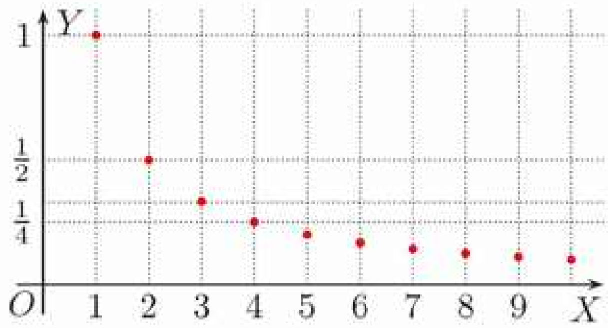
> **Ciągiem nieskończonym** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Czasem za dziedzinę ciągu przyjmowany jest zbiór wszystkich liczb naturalnych **N**.
Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a\colon \mathbf{N}_+ \to \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n). Kolejne wartości funkcji a, czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \ldots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

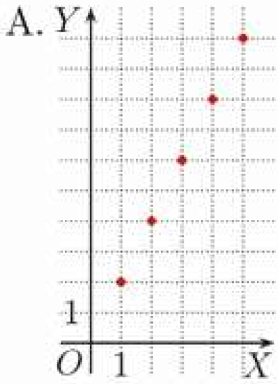
Przykład 2

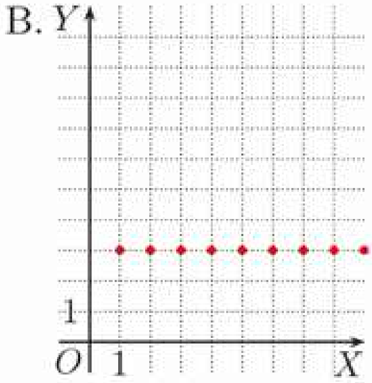
Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$



Ćwiczenie 2

Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10, …, a na rysunku B wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.





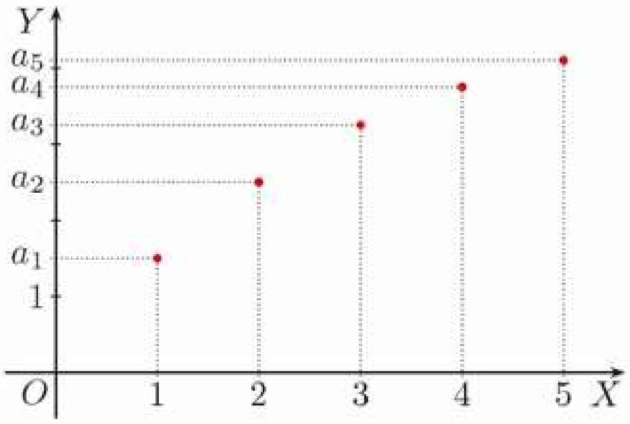
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres ciągu:

a) połówek kolejnych liczb naturalnych: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

b) kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) naprzemiennego: $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots$



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).

Ćwiczenie 4

Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów danego ciągu.

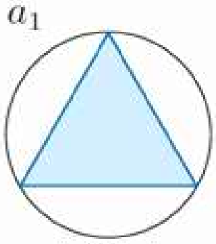
a) $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2}, \ldots$ b) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ c) $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Większość ciągów przez nas rozpatrywanych to ciągi, których wyrazami są liczby – takie ciągi nazywamy **ciągami liczbowymi**. Oprócz ciągów liczbowych rozpatruje się również inne ciągi, np. ciąg prostych, ciąg wielokątów.

Przykład 3

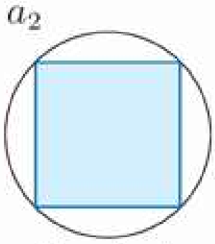
Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.

a_1



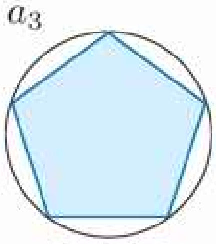
trójkąt

a_2



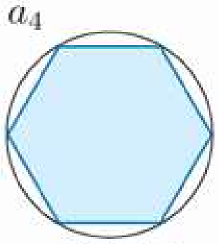
kwadrat

a_3



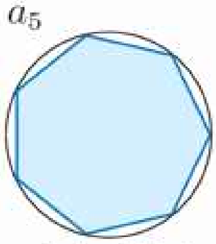
pięciokąt

a_4



sześciokąt

a_5



siedmiokąt

Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy **ciągiem n-wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

n	(a_n)	(b_n)
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zwróć uwagę na to, że w przeciwieństwie do zbiorów kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

Zadania

1. Podaj wyrazy a_7, a_8, a_9 i a_{10} ciągu:

a) kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, ...

b) odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

c) kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, ...

2. Naszkicuj wykres ciągu o wyrazach:

a) $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$

b) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots$

c) $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$

d) $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \ldots$

e) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$

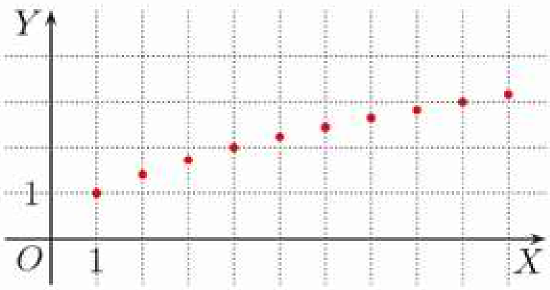
f) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$

3. Wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x, do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309505$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73205080756887729$
$\pi \approx 3{,}14159265358979324$

a) $x = \sqrt{2}$ b) $x = \sqrt{3}$ c) $x = \pi$

4. Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) o wyrazach: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ Z wykresu możemy odczytać, że do przedziału $(1; 2)$ należą dwa wyrazy tego ciągu: $a_2 = \sqrt{2}$ i $a_3 = \sqrt{3}$. Ile wyrazów ciągu (a_n) należy do przedziału:



a) $(2; 3)$, b) $(3; 4)$, c) $(4; 5)$, d) $(11; 12)$?

3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg możemy opisać słownie, podając warunki, jakie spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π.

Jest to ciąg: $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, \ldots$

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: $11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots$

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n-ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4, otrzymujemy:

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\ \ a_2 = \tfrac{2}{2^2} = \tfrac{1}{2},\ \ a_3 = \tfrac{3}{2^3} = \tfrac{3}{8},\ \ a_4 = \tfrac{4}{2^4} = \tfrac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10, otrzymujemy:

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{8}{9},\ \tfrac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) oraz wyraz a_{10}.

a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ c) $a_n = \dfrac{-3}{n(n+2)}$ d) $a_n = n^3 - n^2$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n): a_1, a_2, a_3, a_4 i a_{10}.

a) $a_n = (-1)^{n+1}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$

c) $a_n = (-1)^n \cdot n$

d) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n-1}{n+1}$

f) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2n-1}{2n+1}$

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
$3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$	$a_n = 2n + 1$
$4, 7, 12, 19, 28, \ldots$	$a_n = n^2 + 3$
$-3, 3, -3, 3, -3, \ldots$	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n-ty wyraz ciągu.

a) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots$

b) $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ \ldots$

c) $-1,\ 4,\ -9,\ 16,\ -25,\ 36,\ \ldots$

d) $3,\ -9,\ 27,\ -81,\ 243,\ \ldots$

e) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \ldots$

f) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{3}{17},\ \frac{3}{26},\ \frac{3}{37},\ \ldots$

g) $\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 6},\ \frac{1}{6\cdot 7},\ \ldots$

h) $\frac{1}{1\cdot 4},\ -\frac{1}{2\cdot 5},\ \frac{1}{3\cdot 6},\ -\frac{1}{4\cdot 7},\ \frac{1}{5\cdot 8},\ \ldots$

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n-ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 5

Trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) są równe: -1, 0 i 1. Oblicz wyrazy a_4, a_5 i a_6, jeśli:

a) $a_n = n - 2$,

b) $a_n = (n-2)^3$,

c) $a_n = -\cos(n-1)\frac{\pi}{2}$.

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zeru?

$$25 - n^2 = 0$$

$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbf{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zeru jest a_5.

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

a) $a_n = 12 - 3n$

b) $a_n = 14 - 3n$

c) $a_n = n^2 - 4$

d) $a_n = 40 - n^2$

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = 4n - 2$ d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

b) $a_n = 3n - n^2$ e) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$ h) $a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2}$

c) $a_n = 2^n - n$ f) $a_n = (-1)^{n+1} + n$ i) $a_n = n^2 + (-n)^{n-1}$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ c) $a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

3. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \ldots$ d) $2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \ldots$

b) $\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 7}, \frac{1}{7\cdot 9}, \frac{1}{9\cdot 11}, \ldots$ e) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \ldots$

c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ f) $0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \ldots$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

a) $a_n = n^2(n-3)$ c) $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$ e) $a_n = n^4 - 13n^2 + 36$

b) $a_n = \frac{n^2-4n+3}{n+1}$ d) $a_n = \frac{n^3-3n^2+4n}{2n^2+4}$ f) $a_n = \frac{(n^3-64)(64-n^2)}{3n-1}$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

a) $a_n = n^2 - 5n - 10$ b) $a_n = n^2 - 11n + 10$ c) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

a) $a_n = n^2 - 2n - 14$ b) $a_n = \frac{n^2-6n+15}{n+3}$ c) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

7. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od wyrazów ciągu (b_n)?

a) $a_n = n(n-5)$, $b_n = \frac{n}{n+5}$ b) $a_n = 2n+6$, $b_n = (n^2-9)(n-5)$

8. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n), które są liczbami całkowitymi.

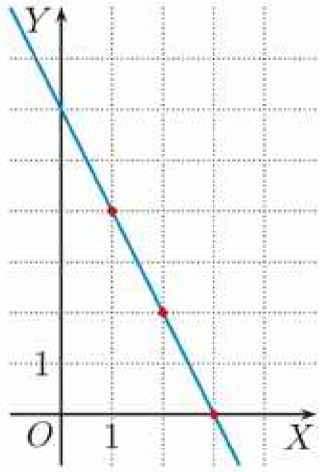
a) $a_n = \frac{n+4}{n}$ b) $a_n = \frac{2n+8}{n+1}$ c) $a_n = \frac{36-n^2}{n^2}$

D **9.** Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

a) $a_n = 2n^2 - n + 9$, $b_n = 6 - 8n$ b) $a_n = 4n^3$, $b_n = 4n^2 - n$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.



Punkty $(1,4)$ i $(3,0)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x+6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n), jeśli jego wykres zawiera się w prostej:

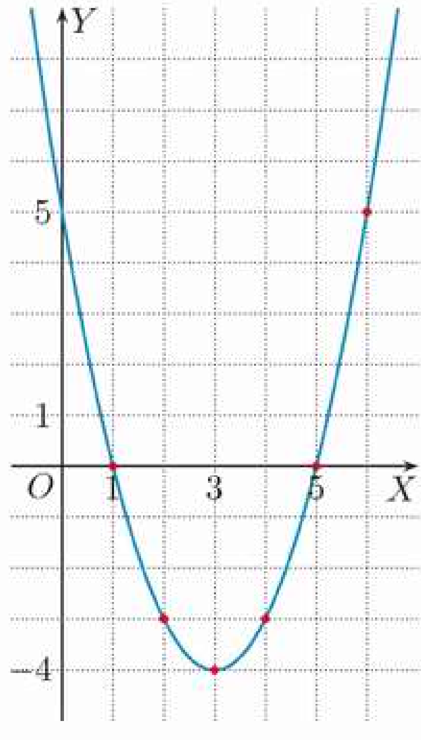
a) przechodzącej przez punkty $(2,2)$ i $(6,0)$,

b) równoległej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$,

c) prostopadłej do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

11. a) Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

b) Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leqslant 12$?



12. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2,8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

13. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez punkty $(0,0)$, $(2,1)$ i $(4,4)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6, a_{10} i a_{20}.

14. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w pewnej paraboli. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego ósmy wyraz, jeśli wiadomo, że:

a) wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(3,9)$ oraz $a_1 = 5$,

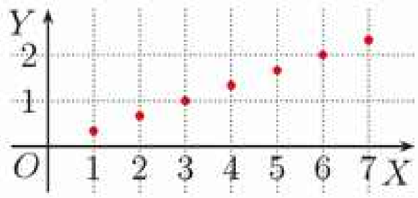
b) parabola ta przecina oś OX w punktach $(-2,0)$ i $(4,0)$ oraz $a_6 = 8$,

c) parabola ta przecina oś OY w punkcie $(0,-4)$ oraz $a_2 = 4$, $a_3 = 11$.

3.3. Ciągi monotoniczne (1)

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$ Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

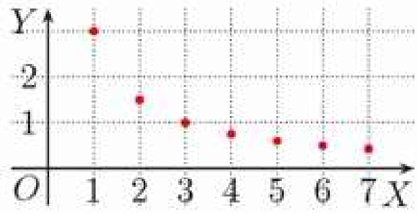


Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbf{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots$ Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbf{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu:

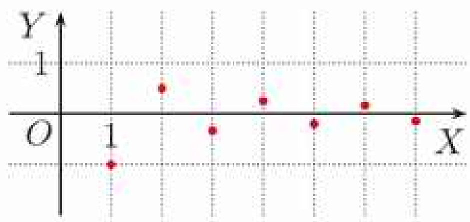
a) malejącego o wszystkich wyrazach większych od 10,

b) rosnącego o wszystkich wyrazach ujemnych.

D

Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.



Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).

D Ćwiczenie 2
Uzasadnij, że podany ciąg nie jest monotoniczny.

a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, -3, -3\frac{1}{2}, \ldots$

Ćwiczenie 3
Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n). Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = (n-3)^2$ b) $a_n = -n^2 + 4n$ c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest monotoniczny, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 4
Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1}.

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4}$$

Wyraz a_{n+1} otrzymujemy, wstawiając we wzorze ogólnym $n+1$ w miejsce n.

Ćwiczenie 4
Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ b) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$ c) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

D Przykład 5
Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Wyznaczamy wyraz a_{n+1}.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

D Ćwiczenie 5
Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = n^2 - n$ b) $a_n = \frac{n}{n+4}$ c) $a_n = \frac{2n-2}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{4n+1}{3n+1}$

D Ćwiczenie 6
Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{4n+2}{5n-1}$ c) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$ d) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geqslant a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leqslant a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

a) $1, 2, 3, 4, \boxed{?}, \boxed{?}, 4, 5, 6, \ldots$

b) $1, \frac{3}{2}, \boxed{?}, 2, \boxed{?}, \boxed{?}, 3, 3, 3, \ldots$

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n), dla którego: a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$

b) $a_n = 2n - n^2$ d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$

D **2.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = n^2 - 2n$ b) $a_n = 1-n^2$ c) $a_n = 3+\frac{7}{n}$ d) $a_n = \frac{2-4n^2}{n^2}$

D **3.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ e) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$ g) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$

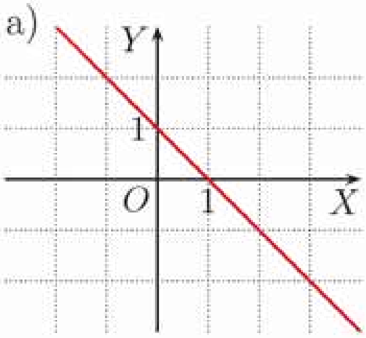
b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$ d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$ h) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

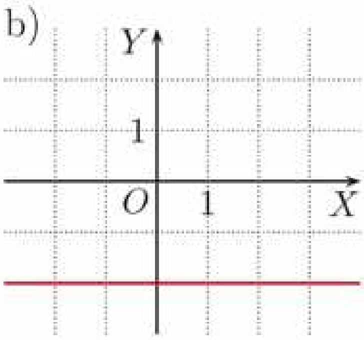
D **4.** Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n). Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

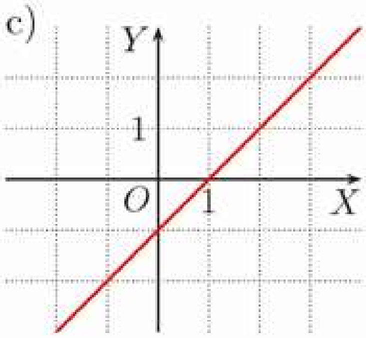
a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ c) $a_n = |n-4|$ e) $a_n = (n-1)(n-3)$

b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = |n^2-4|$ f) $a_n = 8n - n^2$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) 

b) 

c) 

6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k-1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) stały?

7. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = (2k-3)n - 6$ b) $a_n = (k^2-1)n + 4$ c) $a_n = (3-k^2)n$

8. Dla jakich wartości parametru t ciąg (a_n) jest nierosnący, a dla jakich niemalejący?

a) $a_n = \left(3 - \frac{1}{3}t\right)n + 2$ b) $a_n = (t^2-9)(n+1)$ c) $a_n = -n(t^2-2t)$

9. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest malejący?

a) $a_n = \frac{k^2+1}{k}n$ b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)n + 3$ c) $a_n = \frac{k}{k+1}n - 2$

10. Dla jakich wartości parametru p ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = n^2 - np$ b) $a_n = \frac{pn}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n+p}{n+2}$

11. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest rosnący.

b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest malejący.

12. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ jest rosnący.

b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ nie jest monotoniczny.

D **13.** a) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, $c > 0$ i $d \in \mathbf{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.

b) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, $c < 0$ i $d \in \mathbf{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1}, wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2, a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno: 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$a_4 = a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3. Oblicz wyrazy a_4, a_5 i a_6.

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$	$a_2 = a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$ $a_3 = a_2^2 - 1 = 0 - 1 = -1$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \ldots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{64} \\ a_{n+1} = 2^n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

Przykład 2

Oblicz wyrazy $a_3, a_4, \ldots, a_{10}$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonaczcziego].

Czy wiesz, że...

Leonardo z Pizy (ok. 1180–1250), znany jako Fibonacci, jest uważany za najwybitniejszego matematyka średniowiecznej Europy. Podróżując po krajach Wschodu, zapoznał się z osiągnięciami matematyki arabskiej i hinduskiej. W swoim dziele *Liber abaci* z 1202 roku dokonał podsumowania stanu ówczesnej wiedzy matematycznej.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = 0, \ a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2, \ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$

D

Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:
$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

D

Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n} \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy: $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

• Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n + 2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

• Rekurencyjne określenie ciągu możemy również wyznaczyć na podstawie ilorazu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

Stąd otrzymujemy inne rekurencyjne określenie ciągu (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Określ rekurencyjnie ciąg (a_n) na dwa sposoby. Skorzystaj najpierw z różnicy $a_{n+1} - a_n$, a następnie z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) $a_n = 2n + 1$

b) $a_n = n^2 + 1$

c) $a_n = 2 \cdot 3^n$

d) $a_n = (-1)^n$

e) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

f) $a_n = \sqrt{n+1}$

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu (a_n). Ile liczb dodatnich jest wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

a) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 + 1, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = (-1)^n a_n + n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n)?

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n - 4, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n).

a) $\begin{cases} a_1 = 1, \; a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 32, \; a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, \; a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

4. Oblicz x, jeśli $a_2 + a_5 = 9$. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

a) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n-1}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

5. Dla $n \geqslant 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Którą z liczb: -2, -1, 0, 1, 2 należy wybrać jako a_1, aby:

a) $a_3 = 0$,

b) $a_3 = 8$?

D **6.** Dla $n \geqslant 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru:

a) $a_{n+1} = a_n^2 - na_n$,

b) $a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)a_n$.

Wykaż, że niezależnie od tego, którą z liczb: -1, 1, 2 przyjmiemy za a_1, otrzymamy tę samą wartość wyrazu a_4.

7. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli:

a) $a_2 = -\frac{1}{2}$,

b) $a_2 = \frac{3}{2}$,

c) $a_3 = 1$,

d) $a_4 = 1\frac{1}{4}$.

Czy wiesz, że...

Rekurencji używa się do definiowania niektórych pojęć matematycznych. Jednym z przykładów jest $n!$ (n **silnia**). Dla $n > 1$ symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
Przyjmuje się również, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$.
Rekurencyjna definicja $n!$:

$$\begin{cases} 0! = 1, \; 1! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego

Pierwsze dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów.
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 . . .

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

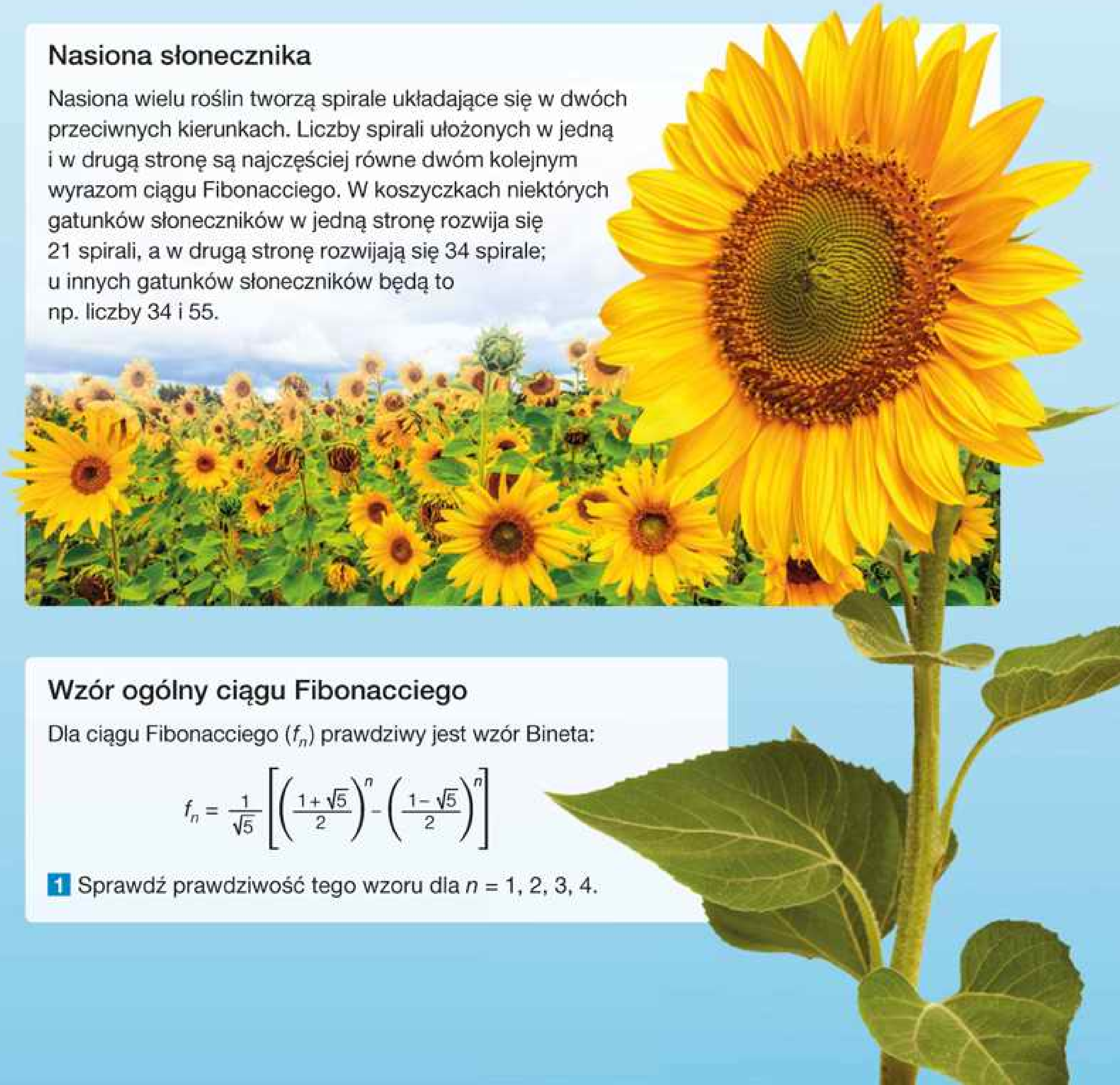
$$\frac{1}{1}=1; \quad \frac{2}{1}=2; \quad \frac{3}{2}=1{,}5; \quad \frac{5}{3}=1{,}(6); \quad \frac{8}{5}=1{,}6; \quad \frac{13}{8}=1{,}625; \quad \frac{21}{13}=1{,}61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszyczkach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwija się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

*3.5. Ciągi monotoniczne (2)

Definicja

Ciąg (c_n) nazywamy **sumą** ciągów (a_n) i (b_n), jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość $c_n = a_n + b_n$.

Podobnie definiujemy **różnicę** i **iloczyn** ciągów (a_n) i (b_n) oraz ich **iloraz** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Ćwiczenie 1

Dane są ciągi $a_n = n - 1$ i $b_n = n + 1$. Podaj wzór ogólny ciągu (c_n) oraz oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

D Ćwiczenie 2

Dane są ciągi $a_n = n^2$ i $b_n = \frac{12}{n}$. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n). Czy jest to ciąg monotoniczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

D Przykład 1

Dane są ciągi rosnące (a_n) i (b_n). Uzasadnij, że ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) też jest rosnący.

Ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$. Wyznaczamy różnicę $c_{n+1} - c_n$:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że suma ciągów malejących jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 4

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n), że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = a_n \cdot b_n$:

a) jest stały, b) jest malejący, c) nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 5

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n), że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ jest: a) rosnący, b) malejący.

Zadania

1. Dane są ciągi $a_n = \frac{n-1}{n}$ i $b_n = \frac{4n-1}{n}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $(a_n + b_n)$, b) $(a_n - b_n)$, c) $(a_n \cdot b_n)$, d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

D **2.** Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, to ciąg (c_n) też jest rosnący.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 2^{a_n + b_n}$

D **3.** Zbadaj monotoniczność ciągów $a_n = \frac{4n+5}{n+2}$ i $b_n = n^4$. Uzasadnij, że ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ jest rosnący.

D **4.** Uzasadnij, że ciągi $a_n = n^2 - n - 6$ i $b_n = n^4$ są rosnące, a ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ nie jest monotoniczny.

D **5.** Uzasadnij, że ciągi $a_n = 2^{-2n+1}$ i $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ są malejące. Zbadaj monotoniczność ciągów $c_n = a_n \cdot b_n$ i $d_n = \frac{a_n}{b_n}$.

6. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = n \sin\alpha - 3$ b) $a_n = -n\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right)$

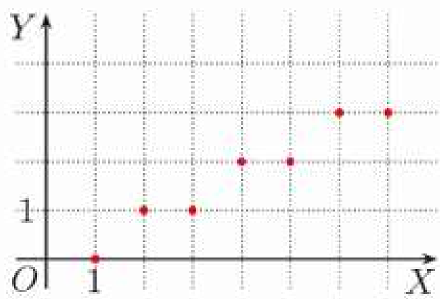
7. Dane są ciągi $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ i $b_n = \cos\frac{n\pi}{2}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $a_n + b_n$, b) $a_n - b_n$, c) $n + a_n$, d) $2n - b_n$.

8. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2k-1}{k+1}a_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = (nk+2)a_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Naszkicuj wykres ciągu $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]$. Czy jest to ciąg monotoniczny?
>
> Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Zatem:
>
> $a_1 = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $a_2 = [1] = 1$, $a_3 = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$,
> $a_4 = [2] = 2$, $a_5 = \left[\frac{5}{2}\right] = 2, \ldots$
>
> Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa 0 lub 1. Zatem ciąg (a_n) jest niemalejący.
>
> 
>

Naszkicuj wykres ciągu (a_n). Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = \left[\frac{n}{4}\right]$ b) $a_n = -\left[\frac{n}{4}\right]$ c) $a_n = \left[\frac{n-4}{4}\right]$

3.6. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2100 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 450 zł, a w każdym następnym odkładała po 150 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	1650	1800	1950	2100

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r, że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.
Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n).

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 12, 21, \ldots$ b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3, \ldots$ c) $7, 3, -1, \ldots$

Przykład 2

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli $a_1 = 6$ oraz $r = 5$.

$a_1 = 6$
$a_2 = 6 + 5 = 11$
$a_3 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$
$a_4 = 6 + 3 \cdot 5 = 21$
$\vdots$
$a_{11} = 6 + 10 \cdot 5 = 56$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $1, 11, 21, 31, 41, \ldots$ Oblicz trzydziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$, zatem wzór ogólny ma postać $a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1) \cdot 10 = 10n - 9$. Obliczamy trzydziesty wyraz: $a_{30} = 10 \cdot 30 - 9 = 291$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \ldots$ c) $3, 2, 1, 0, -1, -2, \ldots$

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1 = 4,\ a_4 = 10$, b) $a_1 = -5,\ a_6 = 20$, c) $a_1 = 5,\ a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

> Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:
> ▪ **rosnący**, gdy $r > 0$, ▪ **malejący**, gdy $r < 0$, ▪ **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

a) $9, 3, -3, -9, -15, -21, \ldots$ b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \ldots$ c) $2, 2, 2, 2, \ldots$

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

> Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:
> $b - a = c - b$

a) $a = 3$, $b = k + 1$, $c = 3k - 6$ b) $a = 1$, $b = k^2$, $c = k^2 + 2k + 2$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz wyrazy a_4 i a_5. Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m.

a) $a_1 = 4$, $a_2 = m + 6$, $a_3 = 2m + 8$

b) $a_1 = \frac{1}{2}m$, $a_2 = m - 3$, $a_3 = \frac{3}{2}m - 6$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = m^2$, $a_3 = 2m^2 - 1$

d) $a_1 = m^2$, $a_2 = m$, $a_3 = 2m - m^2$

Przykład 4

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b, aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x. Wówczas:

$$x - a = b - x$$
$$x = \frac{a+b}{2}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b. Otrzymujemy zatem ciąg: a, $\frac{a+b}{2}$, b.

> W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:
> $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geqslant 2$$

Dowód

Dla $n \geqslant 2$ wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r możemy zapisać w postaci: $a_{n-1} = a_n - r$ i $a_{n+1} = a_n + r$. Zatem:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Ćwiczenie 7

Oblicz x, jeśli podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

a) 9, x, 37 b) 4, x, -8 c) $\frac{1}{2}$, x, $\frac{1}{3}$

Zadania

1. Oblicz n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_1 = -5$, $r = 3$, $n = 14$ c) $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 20$

b) $a_1 = 4$, $r = -4$, $n = 11$ d) $a_1 = -2$, $r = 0{,}1$, $n = 35$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_1 = 6$, $a_3 = 20$ b) $a_1 = -4$, $a_4 = 5$ c) $a_1 = 9$, $a_6 = 6\frac{1}{2}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r.

a) $r = 2$, $a_3 = 5$ b) $r = -3$, $a_5 = 0$ c) $r = \frac{1}{2}$, $a_7 = -4$

4. Wyznacz liczby:

a) a, b tak, aby ciąg: $1, a, b, 10$ był arytmetyczny,

b) a, b, c tak, aby ciąg: $2, a, b, c, 100$ był arytmetyczny.

5. Wstaw między liczby 1 i 25:

a) pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,

b) siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.

6. W wieku od 3 do 10 lat dzieci zwykle rosną w stałym tempie. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, jeśli wiadomo, że wzrost pewnego dziecka w kolejnych latach tworzy ciąg arytmetyczny.

Wiek [lata]	3	4	5	6	7	8	9	10
Wzrost [cm]	98	?	?	117,5	?	?	?	?

7. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12}.

a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$

8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{a_5}{a_1} = -1 \\ a_2 \cdot a_7 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$

9. Oblicz x, jeśli wiadomo, że podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego.

a) $-2,\ 2 + x,\ 4 + x^2$ b) $2x - 3,\ 3x - 5,\ \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

10. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?

11. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że różnica tego ciągu jest równa 1, a iloczyn jego trzech ostatnich wyrazów jest równy -60.

12. Trzeci, piąty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) są równe odpowiednio 4, 10 i 40. Oblicz a_1 i wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

13. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że:

a) suma dwóch pierwszych liczb jest równa 4, a suma dwóch ostatnich jest równa -28,

* b) jego różnica jest równa 2, a iloczyn wszystkich liczb jest równy -15.

3.7. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciagu (a_n). Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$
$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$
$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby pokazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k, a_{k+1} oraz a_n, a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n-2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1-2)^3 + 2 = 1 \qquad a_3 = (3-2)^3 + 2 = 3$$
$$a_2 = (2-2)^3 + 2 = 2 \qquad a_4 = (4-2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) $2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, \ldots$

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \ldots$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D **Przykład 2**

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

D **Ćwiczenie 2**

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

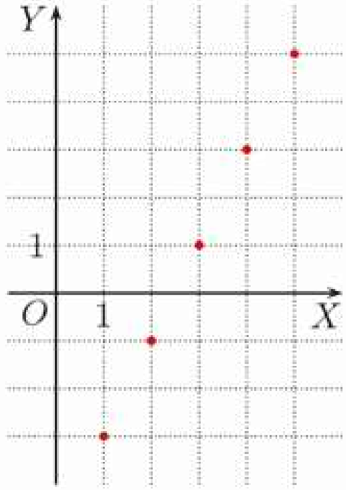
a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = \dfrac{2n-5}{3}$ c) $a_n = \sqrt{2}n$ d) $a_n = 13 - \frac{1}{10}n$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \ldots$$

Narysuj wykres tego ciągu.



Różnica tego ciągu jest równa 2.
Wyznaczamy wzór ogólny:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 =$$
$$= 2n - 5$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.

Ćwiczenie 3

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $6, 4, 2, 0, -2, \ldots$ Naszkicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

b) Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.

D **Ćwiczenie 4**

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres zawiera się w pewnej prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.

a) Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n).

D b) Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = \frac{n+2}{6}$ c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ e) $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$

b) $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$ d) $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$ f) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$

D **3.** Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $b_n = 3a_n + 2$ b) $b_n = -2a_n + n$ c) $b_n = 6 - \frac{a_n + 2}{4}$

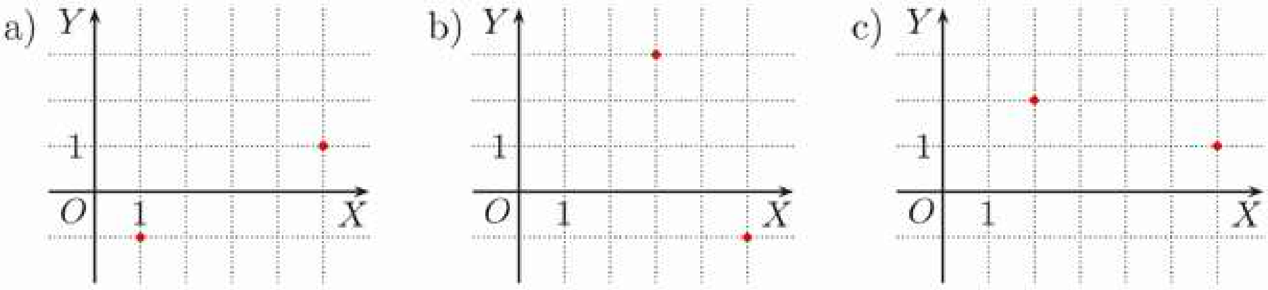
D **4.** Wykaż, że jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi, to ciąg (c_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 3a_n - 4b_n + \frac{n}{2}$ c) $c_n = \frac{4a_n - \sqrt{2}b_n}{3}$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $y = 5x - 4$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \sqrt{3}x - 2$

6. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



D **7.** Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 3\sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{2} \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

D **8.** a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n), określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n), określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

9. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 10.

D **10.** a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 18.

11. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i malejący?

a) $a_n = (k^2 + 2k - 1)n + 2$ b) $a_n = \frac{kn+2}{(k^2-1)n^2+2}$

12. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i rosnący?

a) $a_n = (2\sin k + 1)n$ b) $a_n = n - 4n\cos^2 k$

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Przykład 1

Oblicz sumę S_{100} wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Zapisujemy sumę S_{100} na dwa sposoby i dodajemy równości stronami:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} S_{100} &=& 1+ & 2+ & 3+ & 4+\ldots+ & 97+ & 98+ & 99+ & 100 \\ S_{100} &=& 100+ & 99+ & 98+ & 97+\ldots+ & 4+ & 3+ & 2+ & 1 \\ \hline 2S_{100} &=& 101+ & 101+ & 101+ & 101+\ldots+ & 101+ & 101+ & 101+ & 101 \end{array}$$

Zatem $2S_{100} = 101 \cdot 100$, czyli $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) od 1 do 50,　　　　b) od 1 do n.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dowód

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r, to sumę jego n początkowych wyrazów możemy zapisać w postaci:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \ldots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r)$$

oraz możemy zapisać sumowane wyrazy w odwrotnej kolejności:

$$S_n = (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + \ldots + (a_1 + r) + a_1$$

Dodajemy do siebie stronami powyższe równania i otrzymujemy:

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + \ldots + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r)$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$
$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6, a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: $1, 4, 7, 10, \ldots$
b) Oblicz wyraz a_{20}, a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

W obliczeniach wykorzystuje się również podaną niżej postać wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

> Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:
> $$S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: $3, 8, 13, 18, \ldots$

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6 + 100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: $3, 7, 11, \ldots$
b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: $-5, -8, -11, \ldots$

Przykład 4

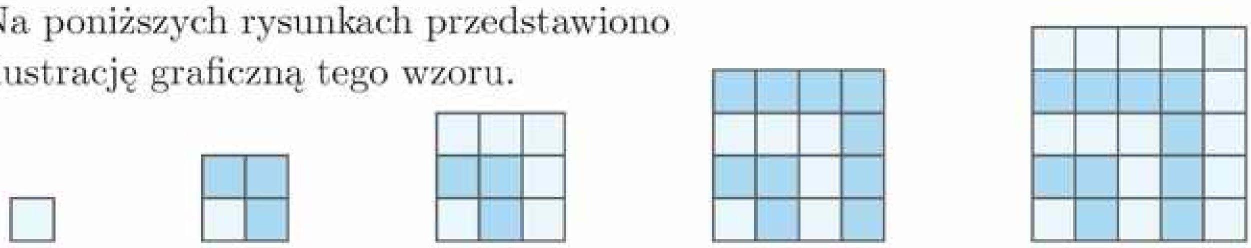
Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n - 1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

Na poniższych rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



$1 = 1^2$ $\quad 1 + 3 = 2^2$ $\quad 1 + 3 + 5 = 3^2$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

D **Przykład 5**

Uzasadnij wzór $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n - 2$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{1+(3n-2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2-n}{2}$$

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.

a) $n + 2n + 3n + \ldots + n^2 = \frac{n^3+n^2}{2}$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{n^2-n}{2}$

Przykład 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczby, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \;\; 6 \cdot 1 + 1 = 7, \;\; 6 \cdot 2 + 1 = 13, \;\; \ldots, \;\; 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1 + 97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

a) $7 + 11 + 15 + \ldots + 47 + 51$

b) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \ldots + 99\frac{1}{2} + 100$

c) $-5 - 7 - 9 - \ldots - 29 - 31$

d) $-18 - 15 - 12 - \ldots + 15 + 18$

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:

a) 3,
b) 4,
c) 3 lub 4.

Zadania

1. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r.

a) $a_1 = -2$ i $r = 3$
b) $a_1 = 4$ i $r = -5$
c) $a_1 = 1{,}5$ i $r = -0{,}1$

2. Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_4 = 6$ i $a_8 = 14$
b) $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$
c) $a_2 = 12$ i $a_4 = 0$

3. Ustal, ile wyrazów ma podany niżej ciąg arytmetyczny, i oblicz ich sumę.

a) $4, 7, 10, \ldots, 34$ b) $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, \ldots, 9\frac{2}{3}$ c) $-3, -5, -7, \ldots, -41$

4. a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 21 a 2021.

b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.

5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:

a) przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,

b) przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,

c) przez 6 jest większa od 3 i które są mniejsze od 100.

6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez:

a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.

7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:

a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe, c) są mniejsze od 500.

8. Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.

D **9.** Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.

a) $6 + 12 + 18 + \ldots + 6n = 3n(n+1)$

b) $4 + 10 + 16 + \ldots + (6n-2) = n(3n+1)$

10. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?

a) $6, 8, 10, \ldots$ b) $13, 17, 21, \ldots$ c) $-24, -22, -20, \ldots$

11. Rozwiąż równanie.

a) $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + x = 190$

b) $(1+x) + (3+x) + (5+x) + \ldots + (25+x) = 130$

c) $(1+x) + (2+3x) + (3+5x) + (4+7x) + \ldots + (50+99x) = 275$

d) $(1+x) + (5+2x) + (9+3x) + \ldots + (61+16x) = -48$

12. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

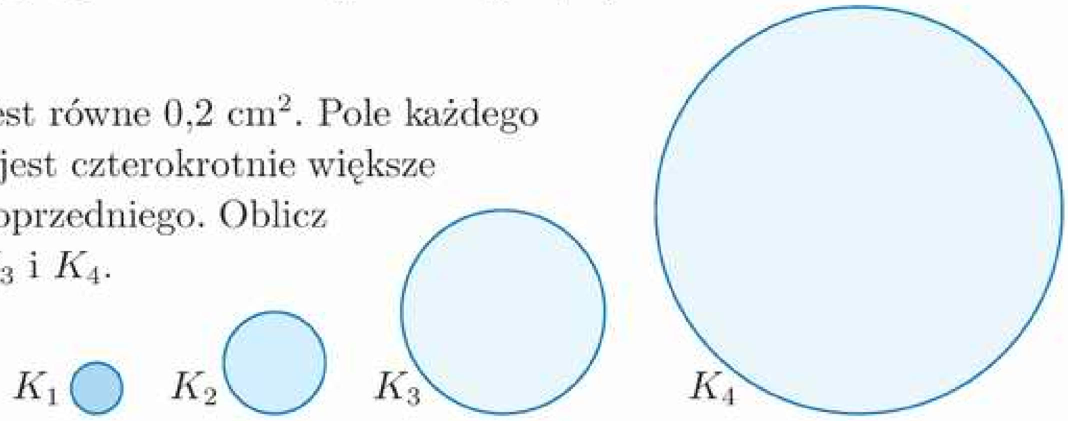
a) $a_n = \dfrac{5 + 10 + 15 + \ldots + 5n}{n+3}$ c) $a_n = \dfrac{6 + 12 + 18 + \ldots + 6n}{n^2}$

b) $a_n = \dfrac{3 + 6 + 9 + \ldots + 3n}{n+5}$ d) $a_n = \dfrac{3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1)}{n^2+n}$

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole koła K_1 jest równe 0,2 cm^2. Pole każdego kolejnego koła jest czterokrotnie większe od pola koła poprzedniego. Oblicz pola kół K_2, K_3 i K_4.



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q, że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.
Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n).

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 6, 12, \dots$
b) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$
c) $4, 2, 1, \dots$
d) $64, 16, 4, \dots$
e) $1, -2, 4, \dots$
f) $-27, 9, -3, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1 = 1,\ \ q = 3$
b) $a_1 = 16,\ \ q = \frac{1}{2}$
c) $a_1 = 5,\ \ q = -1$
d) $a_1 = \frac{1}{4},\ \ q = -2$
e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ q = \sqrt{2}$
f) $a_1 = \sqrt{2},\ \ q = \sqrt{6}$

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geqslant 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że jego dwa kolejne wyrazy to:

a) 27 i 243,
b) $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$,
c) -216 i -36,
d) $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$,
e) $\sqrt{2}$ i -4,
f) $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$.

D **Ćwiczenie 5**

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

a) $4, 8, 16, 32, 60, 120, \ldots$ b) $1, -2, 4, -8, 16, 32, \ldots$ c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \ldots$

Przykład 1

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeśli $a_1 = 3$ oraz iloraz ciągu $q = 2$.

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$ — Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$

$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

$\vdots$

$a_{11} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$ — Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = 2$, $n = 6$,

b) $a_1 = 25$, $q = \frac{1}{5}$, $n = 7$,

c) $a_1 = 8$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 4$,

d) $a_1 = \frac{1}{10}$, $q = 2\frac{1}{2}$, $n = 6$,

e) $a_1 = -2$, $q = -3$, $n = 5$,

f) $a_1 = -7$, $q = -1$, $n = 15$,

g) $a_1 = 5$, $q = \sqrt{2}$, $n = 9$,

h) $a_1 = \sqrt{3}$, $q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $n = 8$.

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeśli:

a) $a_4 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, b) $a_6 = 16$, $q = -2$, c) $a_8 = 81$, $q = 3$.

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7.

a) $128, 64, 32, \ldots$

b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \ldots$

c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \ldots$

d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \ldots$

e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \ldots$

f) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

2. Oblicz wyrazy czwarty i piąty podanego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+2, \ldots$ b) $\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1, \ldots$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli wiadomo, że $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.
>
> Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n), to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:
>
> $$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$
>
> Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:
>
> $$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$
>
> Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.
> Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \ldots$).
> Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \ldots$).

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli wiadomo, że:

a) $a_2 = \frac{5}{12}$, $a_3 = \frac{2}{15}$, c) $a_2 = 7$, $a_4 = 28$, e) $a_6 = 32$, $a_{10} = 2$,

b) $a_3 = 1\frac{1}{2}$, $a_4 = 1\frac{1}{4}$, d) $a_3 = -3$, $a_6 = -24$, f) $a_6 = 1$, $a_8 = 9$.

4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.

a) $\boxed{?}, \boxed{?}, -27, -9, \boxed{?}$ c) $\boxed{?}, 6, \boxed{?}, \boxed{?}, 48, \boxed{?}$ e) $8, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \frac{1}{4}$

b) $\boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 3, -6$ d) $\boxed{?}, \boxed{?}, 3, \boxed{?}, \boxed{?}, -81$ f) $\frac{5}{9}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 135$

5. Wstaw między liczby x i y trzy liczby tak, aby otrzymać ciąg geometryczny (podaj dwa rozwiązania).

a) $x = -2$, $y = -32$ b) $x = 3$, $y = 768$ c) $x = 7$, $y = 7$

6. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), jeśli wiadomo, że:

a) suma drugiego i trzeciego wyrazu tego ciągu jest równa 6, a różnica czwartego i drugiego wyrazu jest równa 24,

b) suma drugiego i szóstego wyrazu tego ciągu jest równa -34, a suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 17.

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan konta wyniesie:

$$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1{,}05 = 2100 \text{ [zł]}$$

Po upływie dwóch lat:

$$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1{,}05 = 2205 \text{ [zł]}$$

Wpłata:	2000,00
$2000{,}00 \cdot 1{,}05 = 2100{,}00$	
$2100{,}00 \cdot 1{,}05 = 2205{,}00$	
$2205{,}00 \cdot 1{,}05 = 2315{,}25$	
$2315{,}25 \cdot 1{,}05 \approx 2431{,}01$	
$2431{,}01 \cdot 1{,}05 \approx 2552{,}56$	

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:
- **rosnący**, gdy $q > 1$,
- **malejący**, gdy $0 < q < 1$,
- **stały**, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 1

D a) Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie o monotoniczności ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie ujemnym.

b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	?	$1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ nie jest monotoniczny
$q = 0$	$-3, 0, 0, 0, 0, \ldots$ niemalejący	?
$0 < q < 1$	?	?
$q > 1$	?	?

Uwaga. Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: $0, 0, 0, 0, \ldots$ Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli:

a) $a_3 = 2$, $a_5 = 4{,}5$, b) $a_1 = -8$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, c) $a_2 = -4$, $a_6 = -64$.

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy sprawdzić, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D **Przykład 2**

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$$

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D **Ćwiczenie 3**

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{5}{2^n}$ c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$ e) $a_n = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$ d) $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ f) $a_n = 4^{2n+1}$

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby a, b, c, różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x.

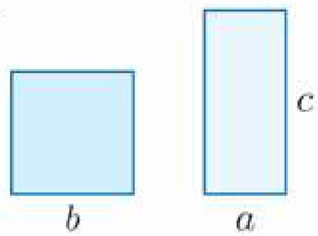
a) $x,\ x+1,\ x-3$ b) $\frac{1}{x+1},\ x,\ 3x^2$ c) $x^2-1,\ x+1,\ 2x-1$

Średnia geometryczna

Jeśli liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny są dodatnie, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c.

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c, jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c.



Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

Zadania

D **1.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{4}{3^n}$ b) $a_n = 2 \cdot (-5)^n$ c) $a_n = 4 \cdot (\sqrt{3})^{n+1}$ d) $a_n = -2 \cdot 5^{2n-1}$

D **2.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - n + 2$ nie jest geometryczny.
>
> Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... Badamy ilorazy:
> $$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{14}{8} \neq 2$$
> Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

a) $a_n = n^2 - 2n + 2$ b) $a_n = -n^2 + 4n - 2$

3. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n).

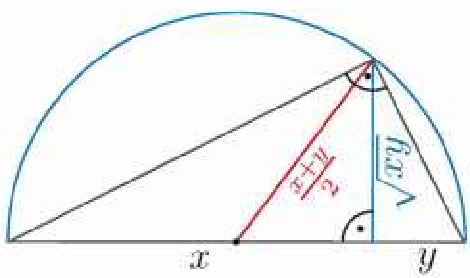
a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$

4. Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Suma dwóch liczb środkowych jest równa 24, a suma dwóch liczb skrajnych jest równa 36. Wyznacz te liczby.

5. Liczby x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.

D **6.** a) Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie wysokość ta dzieli przeciwprostokątną (rysunek obok).



b) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi następująca zależność między ich średnią arytmetyczną a geometryczną:
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$
Kiedy te średnie są równe?

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: a_1, $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, …, $a_n = a_1 q^{n-1}$, zatem:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n$$

Mnożymy obie strony równania przez q.

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1-q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

a) $1, 3, 9, 27, \ldots$ b) $1, -2, 4, -8, \ldots$ c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz:

a) $q = 2$, b) $q = 4$, c) $q = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n), jeśli wiadomo, że:

a) $a_1 = 3$, $a_2 = -6$, $n = 6$,

b) $a_1 = -4$, $a_2 = -12$, $n = 5$.

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$
$$1 - 3^n = -728$$
$$3^n = 729$$
$$n = 6$$

Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 4

a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?

b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Ćwiczenie 5

Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 26, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa -78. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61?

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n), jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności. Na przykład podciągami ciągu geometrycznego $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ są:

$2, 8, 32, 128, 512, \ldots$ – podciąg wyrazów o numerach parzystych,

$1, 4, 16, 64, 256, \ldots$ – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,

$512, 1024, 2048, 4096, \ldots$ – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a iloraz jest równy -2. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

a) nieparzystych,

b) parzystych.

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n), jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:

a) $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, b) 18, 6, c) 15, −30, d) −7, −7.

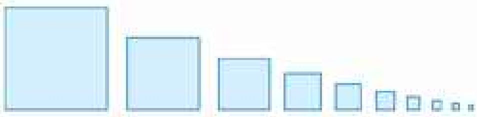
2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli:

a) $a_1 = -1$, $q = 2$, $n = 8$,
b) $a_1 = \frac{2}{9}$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 5$,
c) $a_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 10$,
d) $a_1 = 5$, $q = 1$, $n = 20$.

3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	?	?	242
?	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	?
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	?	?

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2. Oblicz sumę ich:



a) pól, b) obwodów.

5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli:

a) $q = 2$, $S_4 = 60$,
b) $q = \frac{1}{2}$, $S_4 = 2046$,
c) $q = 3$, $S_6 = 728$,
d) $q = -\frac{1}{2}$, $S_5 = 33$,
e) $q = -\sqrt{2}$, $S_6 = -7$,
f) $q = -1$, $S_{13} = 9$.

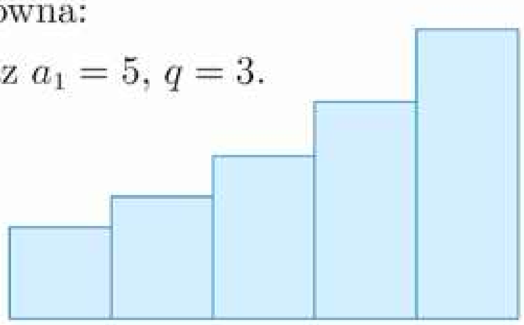
6. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:

a) 315, b) 2555, c) 5115?

7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli suma wszystkich wyrazów jest równa:

a) 258 oraz $a_1 = 6$, $q = -2$, b) 1820 oraz $a_1 = 5$, $q = 3$.

8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90}$ cm^2. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



9. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), jeśli wiadomo, że:

a) $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego jest równa 17,5,

b) $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego jest równa 8.

10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

11. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = -1$, jeśli wiadomo, że n jest liczbą:

a) parzystą, b) nieparzystą.

12. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

13. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 8, a suma kolejnych czterech jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

14. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

15. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

16. Iloczyn czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równy 324. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu, jeżeli $a_1 - a_2 = 6$.

17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?

18. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 93 \quad \text{i} \quad a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 372$$

Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

D **19.** Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu są różne od zera. Wykaż, że stosunek sumy wyrazów o numerach parzystych do sumy wyrazów o numerach nieparzystych jest równy ilorazowi tego ciągu.

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.
Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.
Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeśli:

a) $S_n = n^2 - 4$, b) $S_n = n^2 + 2n$, c) $S_n = 6n - 2n^2$, d) $S_n = 2n$.

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r$, a, $a + r$. Ich suma:

$$a - r + a + a + r = 21$$
$$a = 7$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r$, 7, $7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r$, 4, $6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$4^2 = (4 - r)(6 + r)$$
$$r^2 + 2r - 8 = 0$$
$$r = -4 \text{ lub } r = 2$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.
Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

Ćwiczenie 2

a) Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

b) Liczby a, b, c, których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a+1$, $b+2$, $c+6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a, b, c.

Zadania

1. a) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.

b) Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 20. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

2. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n). Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych do sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równy $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

3. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 15, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{3}{20}$. Wyznacz te liczby.

4. Wyrazy ciągu geometryczego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_5 = 68 \quad \text{i} \quad a_2 + a_6 = 136$$

Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?

5. W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.

6. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

7. a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1, wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

8. a) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

b) Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie ciągiem geometrycznym. Wyznacz te liczby, jeśli suma wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26.

9. a) Trzy liczby, których suma jest równa 13, tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

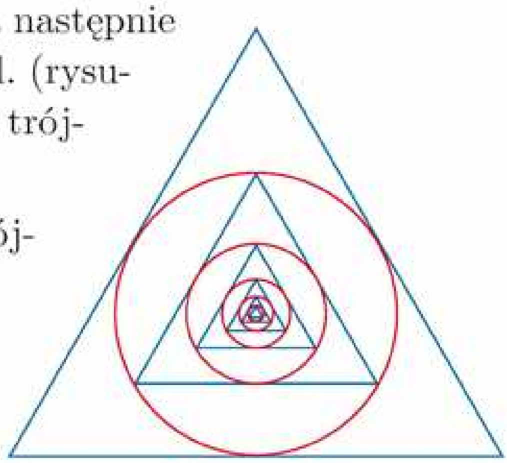
b) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 52. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 16, to otrzymamy kolejne wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

10. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.

b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.

11. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma pierwszej i ostatniej jest równa 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$.

12. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek obok). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.



D a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.

b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.

D **13.** Wykaż, że jeśli liczby $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x+z}$ i $\frac{1}{y+z}$ tworzą ciąg arytmetyczny, to również liczby x^2, y^2 i z^2 tworzą ciąg arytmetyczny.

D **14.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach całkowitych, to ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

Warto wiedzieć

Ciągi liczb całkowitych

Ponad pięćdziesiąt lat temu amerykański matematyk Neil Sloane [czyt. nil słołn] stworzył katalog ciągów liczb całkowitych obecnie funkcjonujący jako **Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line** (oeis.org). Opisanych jest w niej ponad ćwierć miliona różnych ciągów. Aby znaleźć informacje o ciągu, należy podać jego numer w katalogu, nazwę lub początkowe wyrazy. Na przykład:

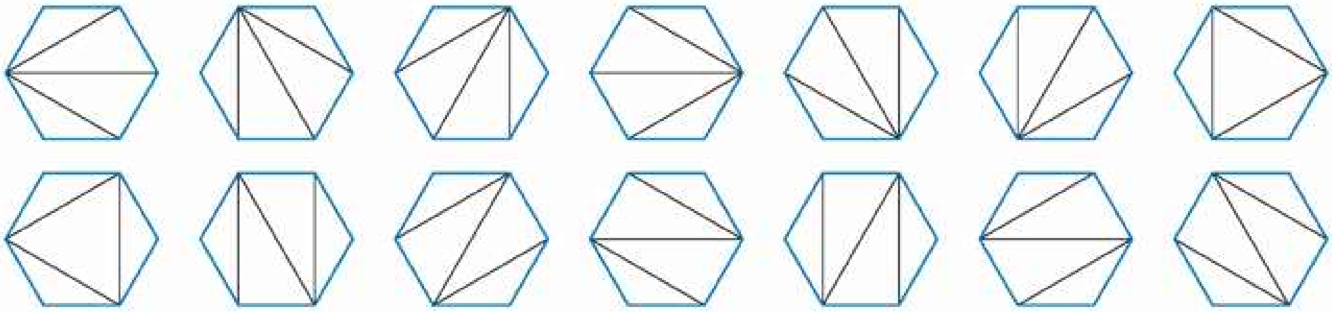
- pod numerem $A000045$ znajduje się ciąg Fibonacciego (patrz str. 158),
- pod numerem $A000108$ znajduje się ciąg liczb Catalana [czyt. katalana]:

$$1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ \ldots$$

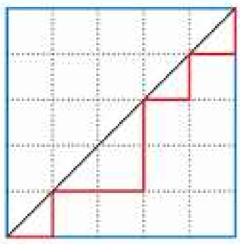
Ciąg liczb Catalana określony jest wzorem $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Zatem:

$$c_1 = \frac{2!}{2!1!} = 1,\ c_2 = \frac{4!}{3!2!} = 2,\ c_3 = \frac{6!}{4!3!} = 5,\ c_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14,\ \ldots$$

Ciąg ten ma wiele interpretacji geometrycznych, np. dla $(n+2)$-kąta wypukłego liczba jego możliwych podziałów na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi jest równa n-tej liczbie Catalana. Dla sześciokąta istnieje 14 takich podziałów:

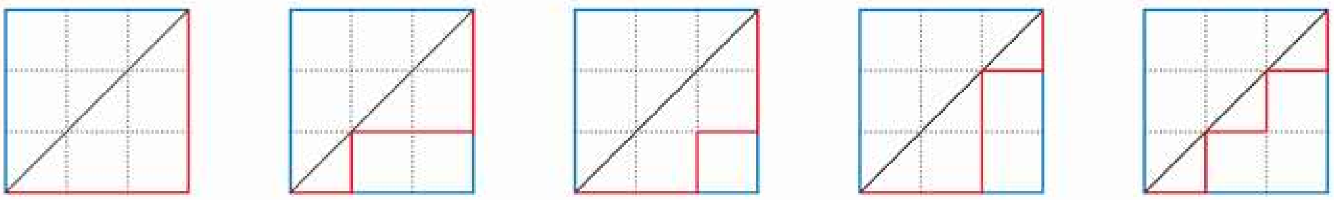


Rozważmy teraz kwadrat o wymiarach $n \times n$ z siatką całkowitą, jak na rysunku poniżej, oraz drogi prowadzące z lewego dolnego rogu tego kwadratu do jego prawego górnego rogu spełniające warunki:



- poruszamy się po siatce całkowitej w prawo albo w górę,
- nie przechodzimy nad przekątną kwadratu.

Okazuje się, że liczba takich dróg jest n-tą liczbą Catalana. Na poniższych rysunkach przedstawiono wszystkie możliwe drogi dla $n = 3$ ($c_3 = 5$).



1. Narysuj odpowiednie rysunki i sprawdź, czy dla kwadratu 4×4 istnieje $c_4 = 14$ różnych dróg spełniających warunki opisane wyżej.

3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k, złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym r, wzrośnie po roku do kwoty $k(1+r)$.

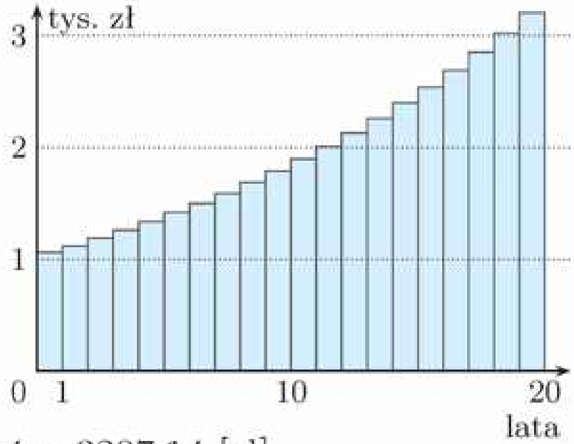
Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]
Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63{,}6 = 1123{,}6$ [zł]
Kwota po 3 latach: $1123{,}6 + 6\% \cdot 1123{,}6 = 1123{,}6 + 67{,}416 \approx 1191{,}02$ [zł]

Zauważ, że w kolejnych latach doliczane są odsetki w wysokości 6% do kapitału powiększonego o odsetki z poprzednich lat.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.



Kapitał wynosi więc:

po roku: $k \cdot 1{,}06$
po 2 latach: $k \cdot (1{,}06)^2$
po 3 latach: $k \cdot (1{,}06)^3$
$\vdots$
po 20 latach: $k \cdot (1{,}06)^{20} \approx 1000 \cdot 3{,}20714 = 3207{,}14$ [zł]

Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.

Kapitał w wysokości k, złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r, po n latach wzrośnie do kwoty $k(1+r)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r?

a) $n = 5$, $r = 4{,}5\%$ b) $n = 8$, $r = 5{,}5\%$ c) $n = 10$, $r = 3\%$

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1{,}06 \cdot (1{,}05)^2 = 5843{,}25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0{,}06 \cdot 0{,}8 = 0{,}048 = 4{,}8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1{,}048) \cdot (1{,}04)^2 \approx 5667{,}58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. Jak zmieni się wielkość kapitału, jeśli od odsetek naliczany jest podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

a) w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,

b) w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,

c) w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli dopisywane są co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k, złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do:

$$k \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A, B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A: $1000 \cdot (1 + 0{,}06) = 1060$ [zł],

w banku B: $1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1{,}015)^4 \approx 1000 \cdot 1{,}06136 = 1061{,}36$ [zł],

w banku C: $1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1{,}005)^{12} \approx 1000 \cdot 1{,}06168 = 1061{,}68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6%, w banku B – o $\frac{61{,}36}{1000} = 0{,}06136 \approx$ $\approx 6{,}14\%$, a w banku C – o $\frac{61{,}68}{1000} = 0{,}06168 \approx 6{,}17\%$.

Roczną stopę procentową r taką, że odsetki w wysokości $\frac{r}{m}$ kapitalizowane są m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa p, przy której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8%, a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie r. Dla jakiej wartości stopy r oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

A. $r = 4\%$ B. $r = 7{,}92\%$ C. $r = 8\%$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc.

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto trzynastoletniej córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka w wieku 18 lat?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$200 \cdot 1{,}05^5 + 200 \cdot 1{,}05^4 + 200 \cdot 1{,}05^3 + 200 \cdot 1{,}05^2 + 200 \cdot 1{,}05 =$$

$$= 200\left(1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}05^4 + 1{,}05^5\right) =$$

Korzystamy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.

$$= 200 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-(1{,}05)^5}{1-1{,}05} \approx 1160{,}38 \text{ [zł]}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki zostaną zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, począwszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku: a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Zadania

1. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym r?

a) $n = 2$, $r = 5\%$ b) $n = 5$, $r = 5\%$ c) $n = 10$, $r = 3\%$

2. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym r?

a) $n = 2$, $r = 4\%$ b) $n = 5$, $r = 3\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$

3. Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło w pierwszym roku:

a) 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,

b) 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.

4. Oprocentowanie lokat w banku A wynosiło w kolejnych czterech latach 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku B była w tym czasie stała i wynosiła r. Oblicz r, jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.

5. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby wpłacić, aby uzyskać taki sam kapitał końcowy po trzech latach?

6. Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?

7. Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?

8. Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

9. Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?

10. Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał na koniec okresu oszczędzania?

11. Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?

12. Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?

13. Pan Lech na budowę domu zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki naliczane są rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki	Stan zadłużenia
1.	$0{,}1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0{,}1 \cdot 80\,000 = 8000$	$80\,000 + 8000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0{,}1 \cdot 58\,000 = 5800$	$58\,000 + 5800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0{,}1 \cdot 33\,800 = 3380$	$33\,800 + 3380 - 30\,000 = 7180$
5.	$0{,}1 \cdot 7180 = 718$	$7180 + 718 - 7898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7898 = 127\,898$ [zł].

a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?

b) Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

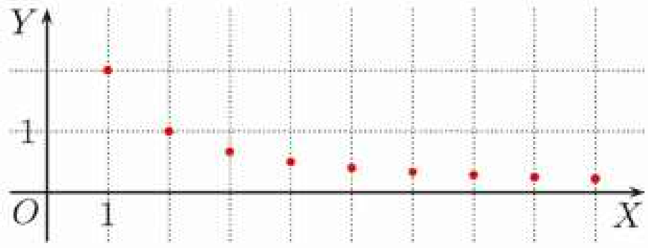
*3.14. Granica ciągu

Intuicyjne pojęcie granicy

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{n}$.

Kolejne wyrazy tego ciągu: 2, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, … są „coraz bliżej” liczby 0.

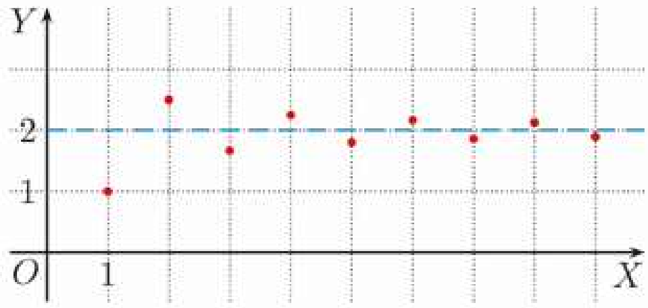


Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu:

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu: 1, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $1\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{6}$, $1\frac{6}{7}$, … są „coraz bliżej” liczby 2.



W powyższych przykładach wyrazy ciągu są „coraz bliżej” pewnej liczby. Liczbę tę nazywamy **granicą** lub **granicą właściwą** ciągu. Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g, to piszemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Skrót „lim” pochodzi od łacińskiego słowa *limes* – granica.

co czytamy: „granicą ciągu a_n przy n dążącym do nieskończoności jest liczba g” lub „ciąg a_n dąży do liczby g przy n dążącym do nieskończoności”. Informację tę możemy też zapisać tak: $a_n \to g$ przy $n \to \infty$.

Ćwiczenie 1

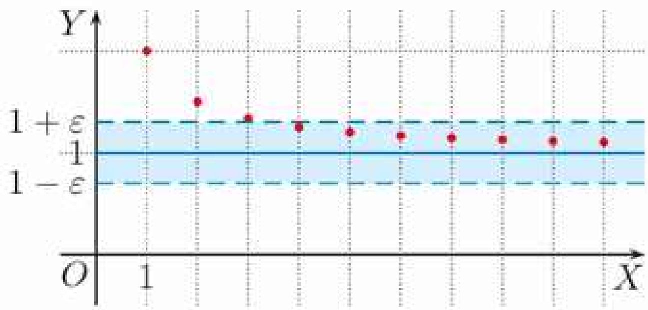
Naszkicuj wykres ciągu (a_n) i na jego podstawie podaj granicę tego ciągu.

a) $a_n = -\frac{3}{n}$ b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ c) $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Granicą tego ciągu jest liczba 1, co zapisujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$



Zauważmy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ **prawie wszystkie** (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy tego ciągu są oddalone od 1 o mniej niż ε, czyli $|a_n - 1| < \varepsilon$, co możemy też zapisać: $a_n \in (1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ dla prawie wszystkich n.

Definicja

Ciąg (a_n) ma **granicę** równą g, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

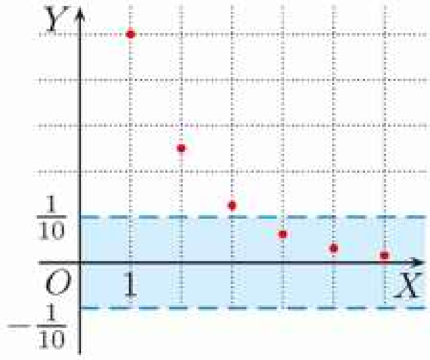
Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g, to mówimy, że jest **zbieżny** do g.

Przykład 4

Granicą ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest liczba 0.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 0$$

Na przykład dla $\varepsilon = \frac{1}{10}$ warunek $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$ jest spełniony, gdy $n > 3$, a dla $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, gdy $n > 9$.



Ćwiczenie 2

Dany jest ciąg $a_n = 0{,}9^n$. Sprawdź, dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$.

Twierdzenie

- Jeśli $q \in (-1; 1)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
- Jeśli $a \in (0; \infty)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Korzystać będziemy również z następujących granic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Twierdzenie

Jeśli $k > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

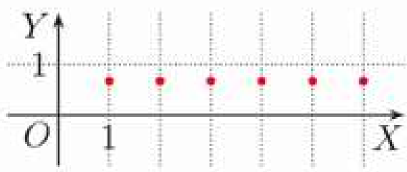
Ćwiczenie 3

Granicą ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest liczba 0. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

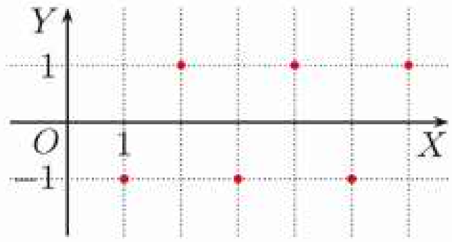
a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

Przykład 5

Ciąg stały $a, a, a, \ldots$ ma granicę równą a. Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{3}$. Granica tego ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.



Przykład 6



Ciąg naprzemienny $a_n = (-1)^n$ **nie ma granicy**. By to stwierdzić, wystarczy przyjąć $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nie istnieje liczba g taka, by wyrazy o numerach parzystych (równe 1) i wyrazy o numerach nieparzystych (równe -1) były jednocześnie odległe od g o mniej niż $\frac{1}{2}$.

Twierdzenie

> Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

Zauważ, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g, to liczba ta jest również granicą każdego jego podciągu.

Jeśli dwa podciągi ciągu (a_n) mają różne granice, to ciąg (a_n) nie ma granicy.

Przykład 7

Rozpatrzmy ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Podciąg wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych ma granicę równą 2, a podciąg wyrazów o numerach parzystych ma granicę równą 0. Zatem ciąg (a_n) nie ma granicy.

Ćwiczenie 4

Czy ciąg (a_n) ma granicę?

a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \sqrt[n]{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

Zadania

1. Naszkicuj wykres ciągu (a_n). Czy ten ciąg ma granicę?

a) $a_n = 1 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ e) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ f) $a_n = \frac{(-2)^n}{4}$

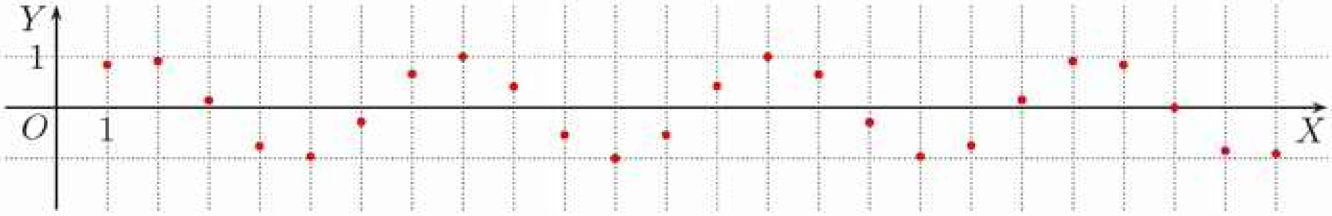
2. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{4}{n}$ spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

3. Dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$?

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $g = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ b) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $g = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{10\,000}$

*3.15. Ciągi rozbieżne



Ciąg, który ma granicę, nazywamy ciągiem zbieżnym. O ciągu, który nie ma granicy, mówimy, że jest **rozbieżny**. Przykładami ciągów rozbieżnych są ciągi $a_n = (-1)^n$ oraz $b_n = \sin n$ (wykres powyżej). Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do $-\infty$ i ciągi rozbieżne do ∞.

Definicja

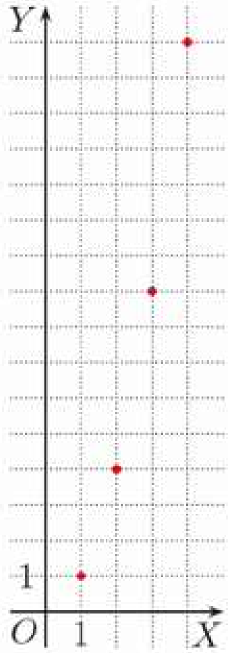
Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do ∞, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

O ciągu rozbieżnym do ∞ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą** ∞, i piszemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $a_n \to \infty$ przy $n \to \infty$.

Przykład 1

Ciąg $a_n = n^2$ jest rozbieżny do ∞, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Prawie wszystkie (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby M. Na przykład dla $M = 100$ wszystkie wyrazy, począwszy od jedenastego, spełniają warunek $a_n > M$.



Ćwiczenie 1

Podaj, dla jakich n zachodzi nierówność $a_n > M$. Czy dla dowolnie wybranej liczby M można wskazać takie n?

a) $a_n = n - 10,\ \ M = 100$

b) $a_n = \frac{1}{5}n,\ \ M = 50$

c) $a_n = \sqrt{n},\ \ M = 40$

d) $a_n = 2^n,\ \ M = 1000$

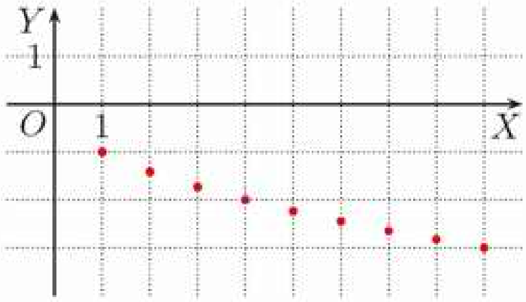
Definicja

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do** $-\infty$, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

O ciągu rozbieżnym do $-\infty$ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą** $-\infty$, i piszemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$ przy $n \to \infty$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = -\sqrt{n}$. Jest to ciąg rozbieżny do $-\infty$. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek:



a) $a_n < -10$,
b) $a_n < -500$,
c) $a_n < -1000$,
d) $a_n < -10\,000$?

Przykład 2

Czy ciąg $a_n = (-1)^n \cdot n$ ma granicę niewłaściwą?

Ciąg (a_n) nie jest rozbieżny ani do $-\infty$, ani do ∞, gdyż jego podciąg wyrazów o numerach parzystych jest rozbieżny do ∞, a podciąg wyrazów o numerach nieparzystych jest rozbieżny do $-\infty$.

Twierdzenie

- Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
- Jeśli $k > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$.

Ćwiczenie 3

Czy ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą?

a) $a_n = \begin{cases} -2^n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ -n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

Zadania

1. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ lub do ∞.

a) $a_n = -\frac{1}{10}n$
b) $a_n = (-4)^n$
c) $a_n = 3^n$
d) $a_n = (-2)^n$
e) $a_n = 0{,}1^n$
f) $a_n = (0{,}(9))^n$
g) $a_n = -n^3$
h) $a_n = n^2 - 100$

2. Które wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(M; \infty)$?

a) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 200$
b) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 20\,000$
c) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 50$
d) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 500$

3. a) Dany jest ciąg $a_n = \sqrt[6]{n}$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 10$, a dla jakich warunek $a_n > 100$?

b) Dany jest ciąg $a_n = n^3 + 40n^2 - 25n$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 1000$?

* D **4.** Wykaż, korzystając z definicji, że ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = -100$ oraz $r = 2$, jest rozbieżny do ∞.

*3.16. Obliczanie granic ciągów (1)

Przy obliczaniu granic ciągów będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, to:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbf{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ — granica sumy ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$ — granica różnicy ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$ — granica iloczynu ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$,
  gdy $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$ — granica ilorazu ciągów

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{5n^2+3n-1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 5 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 5 + 0 - 0 = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{-2n^2+4}{n^2}$ b) $a_n = \frac{6n^3-4n^2+n}{2n^3}$ c) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$

Przykład 2

a) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n+1}{4n+2}$.

W pierwszym kroku licznik i mianownik dzielimy przez n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{2}{n}\right)} = \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{5+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}} = \frac{2}{5}$$

Licznik i mianownik ułamka podzieliliśmy przez n^2.

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{n+3}{10n-6}$ b) $a_n = \frac{1-4n}{2n-5}$ c) $a_n = \frac{6-8n}{4-3n}$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{-8n^2-3n+1}{2n^2-n-3}$ b) $a_n = \frac{3n^3-n^2+2}{4n^3-3n+3}$ c) $a_n = \frac{1-4n-7n^3}{2n^3+4}$

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)}$.

Z każdego czynnika wyłączamy n przed nawias.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{n}}\right)\left(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{n}}\right)}{\left(2+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}}\right)\left(3-\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{6}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{(6n-1)(2n+1)}{(n+2)(4n-1)}$ c) $a_n = \frac{(2n+1)^3}{(n+2)^3}$ e) $a_n = \frac{(n^2-2)(2n+1)}{(6n-4)(n^2+1)}$

b) $a_n = \frac{(2n+7)(4+5n)}{(3n+5)(4-3n)}$ d) $a_n = \frac{(n+1)^4}{(n+2)^4}$ f) $a_n = \frac{(3-2n^2)(n-6)}{(2n-5)^3}$

Przykład 4

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{3n^3+4}$.

Licznik ułamka jest sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego, zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{3n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{3n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{6n^3+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n^2}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}}{6+\underset{\searrow 0}{\frac{8}{n^3}}} = \frac{0}{6} = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n-2n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+n+n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+8+12+\ldots+4n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{4^n}}}{3} = \frac{1}{3}$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez 4^n.

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{2^n+1}{2^n}$ c) $a_n = \frac{3^n+6}{3^n+1}$ e) $a_n = \frac{2^n+7^n}{4^n-3\cdot 7^n}$

b) $a_n = \frac{2^n}{2+3\cdot 2^n}$ d) $a_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ f) $a_n = \frac{3^n-8^n}{4^n+5\cdot 8^n}$

Przy wyznaczaniu niektórych granic można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla wszystkich (lub prawie wszystkich) $n \in \mathbf{N}_+$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład 6

Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{10^n + 7^n}$.

Zauważmy, że dla $n \in \mathbf{N}_+$ prawdziwe są nierówności:

$$\sqrt[n]{10^n} < \sqrt[n]{10^n + 7^n} < \sqrt[n]{10^n + 10^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 10 = 10$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 10^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot 10 = 1 \cdot 10 = 10.$

Zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n + 7^n} = 10.$

Ćwiczenie 7

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 8^n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7 + \sin n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 2^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 4^n - \cos n}$

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $\sqrt[n]{4^n - 2^n} = 4\sqrt[n]{1 - 2^{-n}}$.

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{\frac{1}{2}n+8}{2n+4}$ c) $a_n = \frac{-6n^2+n-5}{1+n+3n^2}$ e) $a_n = \frac{-4n^3+4n^2+2n-1}{-6n^4+4n^2+1}$

b) $a_n = \frac{3n^2-12}{2n^2+3n}$ d) $a_n = \frac{100n^2+1}{n^4+3n}$ f) $a_n = \frac{8n^8+6n^6-4n^4}{n^5+n^7-n^9}$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{(n+2)^2}{(2n-1)^2}$ c) $a_n = \frac{(n^2+1)(6-4n^2)}{(n-1)(n^3+1)}$ e) $a_n = \frac{2n^3-n^2+2n+1}{(n+1)(n^2-n+1)}$

b) $a_n = \frac{(2n+3)^3}{(n+3)^3}$ d) $a_n = \frac{(n-1)(3n+1)^2}{(3n-1)(n^2+4)}$ f) $a_n = \frac{(n+1)^2(2n-1)^2}{(n+2)^4}$

3. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{2^n+5^n}{5^n-2^n}$ b) $a_n = \frac{4^n+6 \cdot 9^n}{4^n-9^n}$ c) $a_n = \frac{3 \cdot 6^n+4^{n+1}}{6^{n+2}-2 \cdot 4^n}$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+2n}{n^2+1}$

b) $a_n = \frac{4n^2-3n+1}{1+2+3+\ldots+n}$

c) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n+(n+1)}{1+2+3+\ldots+n}$

d) $a_n = \frac{1000n}{1+3+5+7+\ldots+(2n+1)}$

e) $a_n = \frac{2+4+6+\ldots+(2n+2)}{n^3+2n+5}$

f) $a_n = \frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n+4}$

5. Korzystając z podanej obok informacji, oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$　　b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

6. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt[n]{6\cdot 5^n + 7\cdot 3^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{9^n - 3^n}$

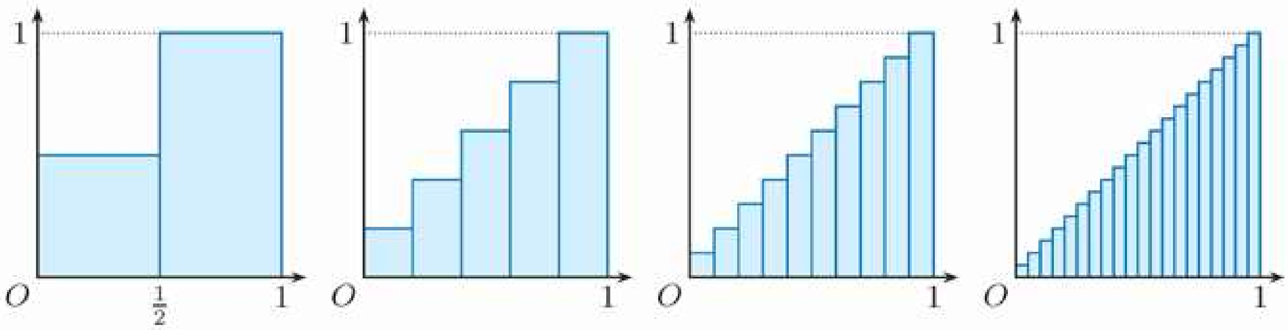
c) $a_n = \sqrt[n]{4n + \frac{10}{n}}$

d) $a_n = \sqrt[n]{6n + (-1)^n}$

e) $a_n = \frac{100\sin n}{\sqrt{n}}$

f) $a_n = \frac{8\cos n^2}{3n+1}$

7. Niech: $S_1 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}$, $S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}$, $S_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}$ i ogólnie: $S_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

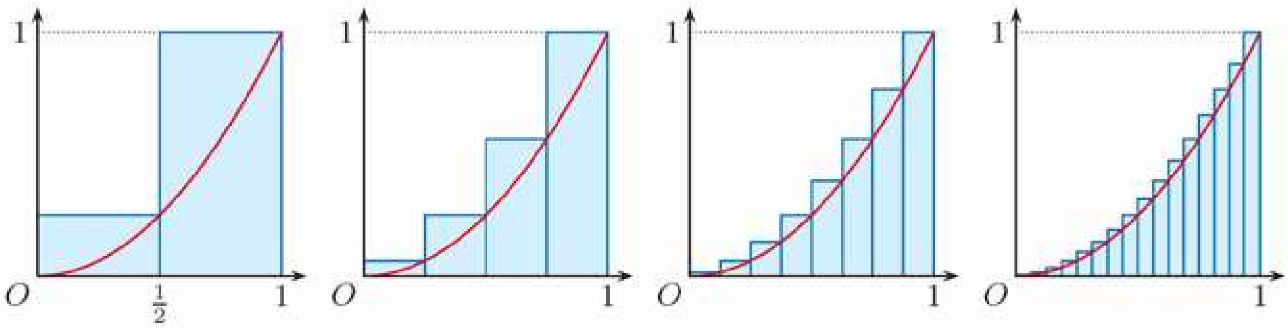


Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2, S_5, S_{10} i S_{20}.

8. Niech $S_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, korzystając z tego, że:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2, S_4, S_8 i S_{16}.

*3.17. Obliczanie granic ciągów (2)

Dla ciągów mających granicę niewłaściwą ∞ zachodzą poniższe własności. Analogiczne własności zachodzą dla ciągów mających granicę $-\infty$.

- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Ćwiczenie 1

Ile jest równa granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$, jeśli:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$?

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = n^4 - 100n^2 - 5n$.

$$\lim_{n\to\infty}(n^4 - 100n^2 - 5n) = \lim_{n\to\infty} \overset{\nearrow\infty}{n^4}\left(1 - \overset{\nearrow 0}{\frac{100}{n^2}} - \overset{\nearrow 0}{\frac{5}{n^3}}\right) = \infty$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(6n^3 - 2n^2 - 2022)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-7n^4 + 10n^3 + 3)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^4) \cdot 2^n$

Jeśli ciąg (b_n) o wyrazach niezerowych ma granicę $b \neq 0$ oraz:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, gdy $b > 0$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, gdy $b < 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, gdy $b > 0$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, gdy $b < 0$.

Przykład 2

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow\infty}{3n^3} - \overset{\nearrow 0}{\frac{2}{n}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n^2}}}{2 + \underset{\searrow 0}{\frac{5}{n^2}}} = \infty$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik jest rozbieżny do ∞, a mianownik ma granicę równą 2.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4-n^2+2}{3n^3+6}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2n^2+1}{6+n-n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+5n-2n^5}{8n^2-0,5n^3}$

Twierdzenie

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ (lub $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$), gdzie $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{10n^2-4n}{n^3+6n^2+5}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^2-4n}{n^3+6n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{10-\overset{\to 0}{\frac{4}{n}}}{\underset{\to\infty}{n}+6+\underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}} = 0$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik ma granicę równą 10, a mianownik jest rozbieżny do ∞.

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100n+8}{n^2+5n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{20n^2+6n}{6n^4+n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^2-1}{n^2-n^4}$

W następnym przykładzie wyznaczany jest $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Przykład 4

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$.

a) $a_n = n^3,\ b_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3 \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

b) $a_n = n^3,\ b_n = \frac{1}{n^4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3 \cdot \frac{1}{n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

c) $a_n = n^3,\ b_n = \frac{2}{n^3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3 \cdot \frac{2}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$

d) $a_n = n,\ \ b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ nie istnieje (uzasadnij).

Zwróćmy uwagę na to, że gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ może nie istnieć, natomiast gdy istnieje, nie możemy podać jej wartości bez szczegółowej analizy danego przykładu.

Mówimy wówczas, że mamy do czynienia z **symbolem nieoznaczonym** $[\infty \cdot 0]$. Inne symbole nieoznaczone to między innymi: $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oraz $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, gdzie $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \infty$.

Przykład 5

Oblicz $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})$.

Mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym typu $[\infty - \infty]$. Granicę obliczamy, mnożąc i dzieląc różnicę pierwiastków przez ich sumę.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})(\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+9)-(n+4)}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

b) $a_n = \sqrt{4n-1} - \sqrt{3n+5}$

c) $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$

d) $a_n = n - \sqrt{n^2-n}$

e) $a_n = \sqrt{2n^2+4} - \sqrt{n^2+5}$

f) $a_n = \sqrt{6n^2+n} - \sqrt{6n^2-n}$

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = n^2 - 10n$

b) $a_n = n^2 - n^3$

c) $a_n = n^3 - 2n + 1$

d) $a_n = 100n^3 - 0{,}1n^4$

e) $a_n = -n^3(6n - n^2)$

f) $a_n = n(1-n)(2-n^2)$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{2n^2+1}{n-8}$

b) $a_n = \frac{n^3-1}{2-n^2}$

c) $a_n = -\frac{-n^4+100}{5-n^2}$

d) $a_n = \frac{n^4+2n-5}{n^2-n+3}$

e) $a_n = \frac{3n-n^3+n^4}{9+n^2-6n^3}$

f) $a_n = \frac{2n^3-n^2-1}{(4n+1)^2}$

g) $a_n = \frac{(2n+3)(3n-1)^2}{(n-1)(1-n)}$

h) $a_n = \frac{(2-n)^3(4+n)}{(2+n)^2(6+n)}$

i) $a_n = \frac{(2n^3-1)(1-5n^2)}{(n^3+2)(1-2n)}$

3. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = 5^n - 3 \cdot 2^n$

b) $a_n = 4^n + 6^n - 8^n$

c) $a_n = 2^n + 4 \cdot 7^n - 5^n$

d) $a_n = -2^n + 8^n + 5^n$

e) $a_n = 4^n - 6 \cdot 2^n - 100$

f) $a_n = 3^n + 4^n - 12^n$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{4^n-1}{2^n+6}$

b) $a_n = \frac{4-6^n}{4^n-6}$

c) $a_n = \frac{4^n-3 \cdot 8^n+2}{2^n+2}$

5. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+2}$ b) $a_n = \frac{\sqrt{n^3}+1}{1-2\sqrt{n}}$ c) $a_n = \frac{n^2-\sqrt{n}}{5+\sqrt{n}}$ d) $a_n = \frac{2n-\sqrt[3]{n^2}}{1+n}$

6. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \leqslant 500 \\ \frac{6n^2+1}{2n+1} & \text{dla } n > 500 \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{2n}{1+n^2} & \text{dla } n \leqslant 1000 \\ \frac{1-n^2}{1+n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} 5-n^2 & \text{dla } n \leqslant 100 \\ \frac{5n^2+1}{n+1} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} \frac{3-n}{n^2+1} & \text{dla } n \leqslant 1000 \\ \frac{n^3+1}{1-n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases}$

7. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{2n+10}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1} - n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n^2+3}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+3n+4}\right)$

* **8.** Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2n+3n+\ldots+n^2}{\sqrt{4n^4+n+1}}$.

* **9.** Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rozbieżny do ∞?

a) $a_n = \frac{kn}{|k-2|n+3}$ b) $a_n = \frac{(k^2-1)n^2-n-100}{kn}$

* **10.** Wyznacz granicę ciągu (a_n) w zależności od parametru p.

a) $a_n = \frac{(p+2)n^2+(p+1)n}{|p^2-4|n^2+6}$ b) $a_n = \frac{(4p^2-9)n^3-pn^2}{|2p-3|n^2+n}$

Twierdzenie

- Jeśli $a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
- Jeśli $a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

D **11.** Korzystając z powyższego twierdzenia, uzasadnij, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n + \cos n) = \infty$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2\sqrt{n} + \sin n^2) = \infty$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - \sin 2n) = \infty$,

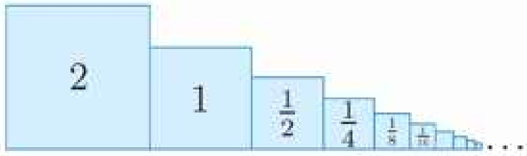
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{tg} \frac{n\pi}{3} - 2n) = -\infty$.

D * **12.** Niech a_n będzie sumą odwrotności liczb naturalnych od 1 do 2^n, czyli:
$a_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, ...
Uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

*3.18. Szereg geometryczny

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg geometryczny o wyrazach początkowych: 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … Iloraz tego ciągu $q = \frac{1}{2}$, więc suma jego n początkowych wyrazów dana jest wzorem:



Suma pól wszystkich kwadratów jest równa 4.

$$S_n = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Czy można obliczyć sumę $S = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ wszystkich wyrazów tego ciągu? Ponieważ $S_n \to 4$ przy $n \to \infty$ (gdyż $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ przy $n \to \infty$), przyjmujemy, że suma $S = 4$.

Definicja

> Wyrażenie $a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots$ nazywamy **szeregiem geometrycznym** o wyrazach: a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, … i ilorazie q.

Sumę $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$ nazywamy n-tą **sumą częściową** tego szeregu. I tak:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_1q, \quad S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2, \ldots$$

Jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, to granicę tę nazywamy **sumą szeregu**, szereg nazywamy **zbieżnym** i piszemy: $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots$
W przeciwnym wypadku szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Przykład 2

Wyznacz n-tą sumę częściową szeregu geometrycznego $12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

Pierwszy wyraz szeregu $a_1 = 12$, a jego iloraz $q = \frac{1}{3}$. Zatem n-ta suma częściowa wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{12\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = 18\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Obliczamy sumę szeregu:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 18\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 18$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz n-tą sumę częściową szeregu geometrycznego, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$

Twierdzenie

Szereg geometryczny o ilorazie $q \in (-1;1)$ jest zbieżny. Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem szeregu, to suma szeregu wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Dowód. Dla $|q| < 1$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Zatem:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Przykład 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \ldots$

Mamy $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{5} \in (-1;1)$, zatem suma $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ćwiczenie 2

Danych jest nieskończenie wiele odcinków. Pierwszy z nich ma długość $\frac{1}{2}$, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Ile jest równa suma długości wszystkich tych odcinków?

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots$

a) $a_1 = 100$, $q = 0{,}9$ b) $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{3}$ c) $a_1 = 2 - \sqrt{2}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykład 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0{,}(61) = 0{,}616161\ldots = 0{,}61 + 0{,}0061 + 0{,}000061 + \ldots =$

$$= \frac{61}{100} + \frac{61}{100^2} + \frac{61}{100^3} + \ldots = \frac{\frac{61}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{61}{99}$$

b) $0{,}5(027) = 0{,}5027027027\ldots =$

$$= 0{,}5 + 0{,}0027 + 0{,}0000027 + 0{,}0000000027 + \ldots =$$

$$= 0{,}5 + \frac{\frac{27}{10\,000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{2} + \frac{27}{9990} = \frac{1}{2} + \frac{1}{370} = \frac{93}{185}$$

Ćwiczenie 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0{,}7777\ldots$ b) $0{,}343434\ldots$ c) $0{,}1121212\ldots$ d) $0{,}0123123123\ldots$

Przykład 5

Uzasadnij, że szereg geometryczny $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\ldots$ jest rozbieżny.

Iloraz szeregu $q=\frac{3}{2}$. Wyznaczamy n-tą sumę częściową:

$$S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}=-2+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Badamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-2+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=\infty$$

Zatem szereg jest rozbieżny do ∞.

Twierdzenie

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1\neq 0$ i ilorazie q jest:
- zbieżny, gdy $|q|<1$,
- rozbieżny, gdy $|q|\geqslant 1$.

Uwaga. Jeśli $a_1=0$, to szereg ma postać $0+0+0+\ldots$ Jego suma jest równa 0.

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

a) $x+2x^2+4x^3+8x^4+\ldots$

b) $1-x+x^2-x^3+\ldots$

c) $1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{9x^2}+\frac{1}{27x^3}+\ldots$

d) $1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{(1+x^2)^3}+\ldots$

Przykład 6

Rozwiąż równanie: $4+4(x-1)+4(x-1)^2+\ldots=x+3$.

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie $q=x-1$. Szereg ten jest zbieżny, gdy $|x-1|<1$, czyli dla $x\in(0;2)$. Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i otrzymujemy:

$$\frac{4}{1-(x-1)}=x+3\ /\cdot(2-x)$$

$$4=-x^2-x+6$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x=-2 \text{ lub } x=1$$

$-2\notin(0;2)$, zatem rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $x-x^2+x^3-x^4+\ldots=2x-1$

b) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3+\ldots=1+\frac{1}{x}$

Zadania

1. Sprawdź, czy szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.

a) $10 + 9 + \frac{81}{10} + \frac{729}{100} + \ldots$

b) $-125 - 25 - 5 - 1 - \ldots$

c) $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots$

d) $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \ldots$

e) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \ldots$

f) $-2 + \frac{4}{5} - \frac{8}{25} + \frac{16}{125} - \ldots$

2. Sprawdź, czy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.

a) $a_1 = \sqrt{2} - 1$, $q = \sqrt{2} + 1$

b) $a_1 = \sqrt{2} + 1$, $q = \sqrt{2} - 1$

3. Uzupełnij brakującą informację dotyczącą szeregu geometrycznego zbieżnego o pierwszym wyrazie a_1, ilorazie q i sumie S.

a) $a_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $q = 1 - \sqrt{3}$, $S = \boxed{?}$

b) $a_1 = -\frac{1}{5}$, $q = \boxed{?}$, $S = -\frac{2}{5}$

c) $a_1 = \boxed{?}$, $q = \frac{1}{100}$, $S = 100$

d) $a_1 = -2\sqrt{2}$, $q = \boxed{?}$, $S = -3\sqrt{2}$

4. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) 0,(1)

b) 0,(9)

c) 0,0(2)

d) 1,3(6)

e) 0,(60)

f) 1,8(81)

g) −5,(45)

h) −1,(1001)

5. Suma pierwszych trzech wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 56, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 64. Oblicz cztery początkowe wyrazy tego ciągu.

6. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $\frac{4}{3}$, a iloczyn trzech początkowych jego wyrazów jest równy -1. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

7. a) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 9, a suma jego wyrazów o numerach parzystych jest równa $\frac{9}{4}$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

b) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

8. a) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = -\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie różnym od zera jest dwukrotnie mniejsza od sumy kwadratów jego wyrazów. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 20, a suma kwadratów jego wyrazów jest równa 240. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

9. Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

a) $1 + (2x-3) + (2x-3)^2 + \ldots$ b) $1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots$

10. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $x + 1 + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \ldots = 8x^2 - 1$

b) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \ldots = x^2 + x + 1$

11. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots$ c) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots$

b) $f(x) = -x + x^2 - x^3 + \ldots$ d) $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \ldots$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

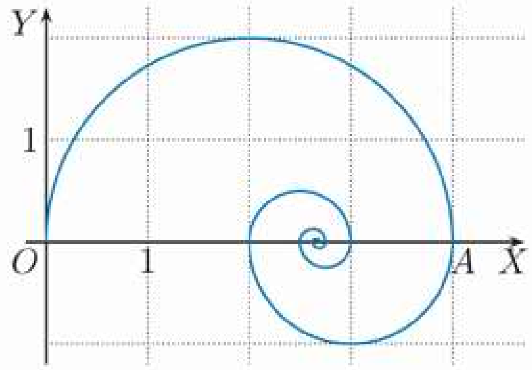
a) $f(x) = -1 + \frac{x-1}{x-2} - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + \ldots$

b) $f(x) = -1 + \frac{x-4}{x-3} - \left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2 + \ldots$

13. Spirala (rysunek obok) składa się z półokręgów o promieniach $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

a) Oblicz długość spirali.

b) Wyznacz współrzędne takiego punktu P, że spirala przecina każdy z odcinków OP i PA w nieskończenie wielu punktach.



Rozpatruje się również szeregi inne niż geometryczne. Na przykład szereg odwrotności liczb naturalnych zwany szeregiem harmonicznym:

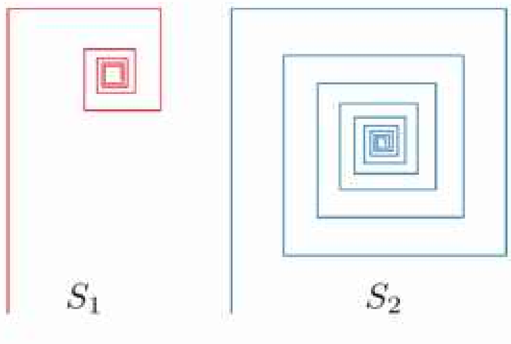
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

jest rozbieżny do ∞, podczas gdy szereg harmoniczny rzędu 2:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

jest zbieżny i jego suma jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

14. Na rysunku obok przedstawiono początkowe fragmenty spiral. Spirala S_1 składająca się z odcinków o długości $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ma nieskończoną długość. Oblicz długość spirali S_2 składającej się z odcinków o długości $1, 0{,}9, 0{,}9^2, 0{,}9^3, \ldots$



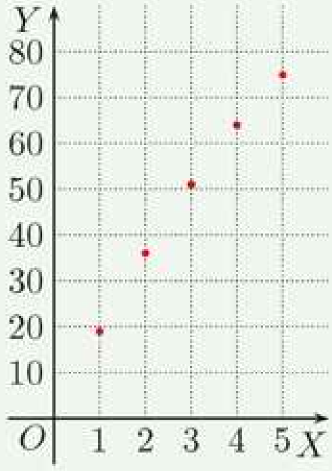
3.19. Zagadnienia uzupełniające

Ciągi ograniczone

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli istnieje liczba M taka, że $a_n \leqslant M$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg $a_n = 20n - n^2$. Początkowe wyrazy tego ciągu (wykres obok) to: $19, 36, 51, 64, 75, \ldots$ Czy ciąg ten może przyjmować dowolnie duże wartości?



Korzystamy ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 20x - x^2$ i otrzymujemy $y_w = 100$. Ramiona paraboli są skierowane w dół, zatem $a_n \leqslant 100$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$. Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry przez liczbę 100.

Zauważ, że w definicji nie wymagamy wskazania najmniejszej liczby ograniczającej dany ciąg z góry. W przykładzie ciąg (a_n) jest ograniczony z góry również przez liczby: 105, 110, 200 itp.

1. Wymień kilka liczb ograniczających ciąg (a_n) z góry.

a) $a_n = 10n - n^2$ b) $a_n = 100n - 2n^2$ c) $a_n = -n^2 + 14n - 40$

2. Podaj definicję ciągu ograniczonego z dołu.

3. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n). Czy ciąg ten jest ograniczony z dołu? Czy jest ograniczony z góry?

a) $a_n = 2n^2 - 10$ b) $a_n = \frac{1}{2n^2} - 4$ c) $a_n = n \cos n\pi$

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **ograniczonym**, jeśli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry, czyli istnieją liczby m i M takie, że $m \leqslant a_n \leqslant M$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D **4.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

a) $a_n = 5 \sin n + \frac{10}{n}$ b) $a_n = \frac{6}{2^n} + 2 \cos n^2$ c) $a_n = \frac{1000}{n^2} + \frac{500}{n} + 5$

D **5.** Uzasadnij, że ciąg rosnący jest ograniczony z dołu, a ciąg malejący – ograniczony z góry.

Jeśli ciąg rosnący jest ograniczony z góry, to ciąg ten ma granicę. Podobnie ciąg malejący ograniczony z dołu. Twierdzenie to zwykle formułuje się krótko:

> Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Można wykazać, że ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, zatem jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy literą e. Jest to liczba niewymierna, jej przybliżona wartość jest równa 2,718281828.

Można też udowodnić, że liczba e jest sumą szeregu:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots$$

6. a) Oblicz $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}$, $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$, $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$.

b) Oblicz przybliżoną wartość liczby e z dokładnością do piątego miejsca po przecinku, przyjmując, że:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

Indukcja matematyczna

O prawdziwości twierdzenia dotyczącego liczb naturalnych nie możemy wnioskować na podstawie sprawdzenia pewnej (nawet bardzo dużej) liczby przykładów. Twierdzeń dotyczących liczb naturalnych dowodzimy, korzystając z twierdzenia zwanego **indukcją matematyczną**.

Zasada indukcji matematycznej

> Jeżeli własność dotycząca liczb naturalnych spełnia warunki:
> 1. jest prawdziwa dla $n = 1$,
> 2. dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 1$ zachodzi wynikanie: jeśli własność jest prawdziwa dla liczby k, to jest prawdziwa dla liczby $k+1$,
>
> to własność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

Warunek 1. nazywamy krokiem początkowym, warunek 2. nazywamy krokiem indukcyjnym.

D **Przykład 2**

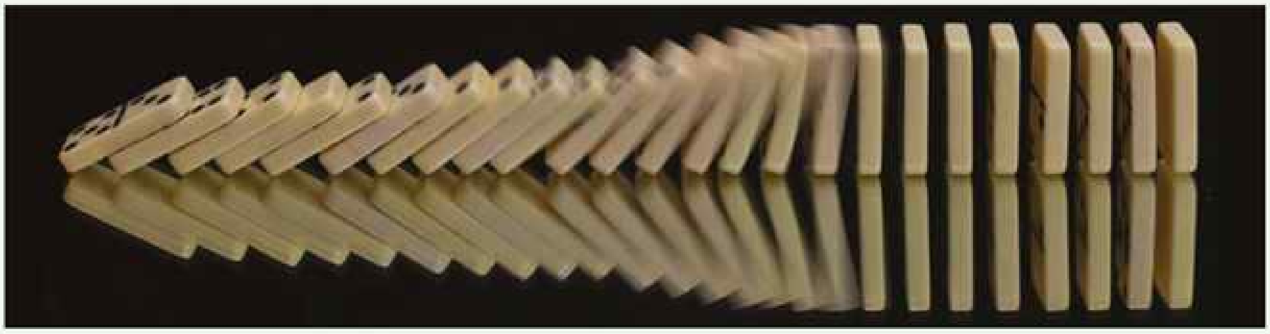
Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że suma n początkowych liczb nieparzystych wyraża się wzorem:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Dowód indukcyjny

1. Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n=1$:
lewa strona $\mathrm{L}=1$, prawa strona $\mathrm{P}=1^2$, zatem wzór jest prawdziwy.
2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej $k \geqslant 1$ (założenie to nazywamy **założeniem indukcyjnym**), czyli:
$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$
Korzystając z tego założenia, wykażemy, że wzór jest prawdziwy dla liczby $k+1$:
$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k^2}+(2(k+1)-1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

Sprawdziliśmy, że wzór jest prawdziwy dla $n=1$, a następnie wykazaliśmy, że z prawdziwości wzoru dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$ wynika jego prawdziwość dla $k+1$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.



Dobrą ilustracją zasady indukcji matematycznej jest domino. Kiedy mamy pewność, że wszystkie kamienie się przewrócą? Przy spełnieniu dwóch warunków:

1. musi się przewrócić pierwszy kamień,
2. przewrócenie któregokolwiek kamienia (k-tego) pociąga za sobą przewrócenie następnego ($(k+1)$-szego).

D **7.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi poniższa równość.

a) $1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

b) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $3+5+\ldots+(2n+1)=n(n+2)$

d) $1+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

e) $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

f) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

D

Przykład 3

Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

Dowód indukcyjny

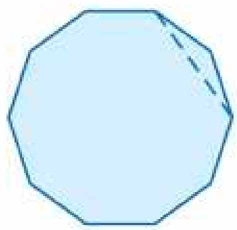
1. Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 0$: $4^0 + 5 = 6$ oraz $3|6$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
2. Zakładamy, że dla liczby naturalnej k, liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3. Pokażemy, że wtedy liczba $4^{k+1} + 5$ jest podzielna przez 3.
   Z założenia, że liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3, wynika istnienie liczby całkowitej a takiej, że $4^k + 5 = 3a$.
   Stąd $4^k = 3a - 5$, czyli:
   $$4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5 = (3a - 5) \cdot 4 + 5 = 12a - 15 = 3(4a - 5)$$
   Zatem liczba $4^{k+1} + 5$ jest również podzielna przez 3.

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

D **8.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że:

a) $6|n^3 - n$,
b) $3|n^3 + 2n$,
c) $6|n^3 + 11n$,
*d) $30|n^5 - n$,
e) $12|10^n - 4$ dla $n \geqslant 2$,
f) $9|4^n + 15n - 1$,
g) $9|7^n + 3n - 1$,
h) $6|10^n + 4^n - 2$.

D **9.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że suma kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



D **10.** Udowodnij twierdzenie, stosując zasadę indukcji matematycznej.

a) Każdy n-kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.
b) n prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n części.

D **11.** Odgadnij wzór ogólny ciągu (a_n). Postawioną hipotezę udowodnij, stosując zasadę indukcji matematycznej.

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz $a_{10} - b_8$.

a) $a_n = \frac{8-n}{4}$, $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$ b) $a_n = \frac{n^2+5}{n}$, $b_n = \frac{5n-8}{n^2}$

D **2.** Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

3. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.

a) $b_n = 4 - \frac{1}{2}n$ b) $b_n = \frac{n+3}{n}$ c) $b_n = \frac{9-4n^2}{2n+3}$

4. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_2 = 2$, $a_4 = 6$ b) $a_2 = 0$, $a_5 = 9$ c) $a_4 = 2$, $a_{10} = -10$

5. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$

6. Oblicz ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_2 = -10$, $a_5 = -40$ b) $a_7 + a_9 = 10$ c) $a_1 = 1$, $a_9 - a_6 = 6$

7. Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_1 = 2$, $a_{10} = 29$ c) $a_2 = 5$, $a_{10} = 21$ e) $a_1 = 16$, $S_4 = 52$

b) $a_1 = 3$, $r = 2$ d) $a_2 = -8$, $r = 3$ f) $a_3 = -4$, $S_{10} = -15$

8. Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{100} = \frac{2}{3}$ c) $a_1 = 5$, $a_{99} + a_{101} = 150$

b) $a_{10} = -1$, $a_{100} = -11$ d) $a_2 = b^2$, $a_3 = (b+1)^2$, $a_4 - a_2 = 2$

9. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

a) $3 + 5 + 7 + \ldots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \ldots + x = 156$

b) $8 + 6 + 4 + \ldots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \ldots + x = 110$

10. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:

a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.

11. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.

a) $b_n = 2^{-n}$ b) $b_n = 3 \cdot 5^n$ c) $b_n = 2^{3n-1}$

12. Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1 = 3,\ q = 2$ b) $a_1 = -4,\ q = \frac{1}{2}$ c) $a_2 = -25,\ a_3 = 5$

13. Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_6 = 100,\ q = 10$

b) $a_2 = 4,\ a_7 = 128$

c) $a_4 = 1,\ a_3 \cdot a_4 = 3$

d) $a_1 + a_3 = 10,\ a_3 = -8a_6$

14. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1 = 3,\ q = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = -10,\ q = -\frac{1}{2}$

c) $a_1 = 1,\ a_2 + a_3 = 20$

d) $a_1 = -4,\ S_3 = -12$

15. Dla jakich wartości x liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a dla jakich kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

a) $a = x - 9,\ b = x - 6,\ c = 2x - 4$ b) $a = -6x,\ b = 3x,\ c = x^2$

16. Oblicz $2a_5 - b_7$.

a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

17. Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n).

a) $a_n = n^2 - 3n + 1$

b) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$

c) $a_n = -\frac{5}{2^n}$

d) $a_n = \log n$

18. Do banku wpłacono 2000 zł na dwa lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeżeli odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc?

19. Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po roku, jeśli przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:

a) 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,

b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.

Zestaw II

1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{-n+2}{3}$ b) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{2n^2}$ d) $a_n = \frac{5-3n}{2n+1}$

2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

D **3.** Wykaż, że dla każdej wartości parametru t ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 3 \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 + 1 \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

4. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny?

a) $S_n = 3n^2 + 3n$ b) $S_n = n^3 + 7$

D **5.** Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.

6. a) Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

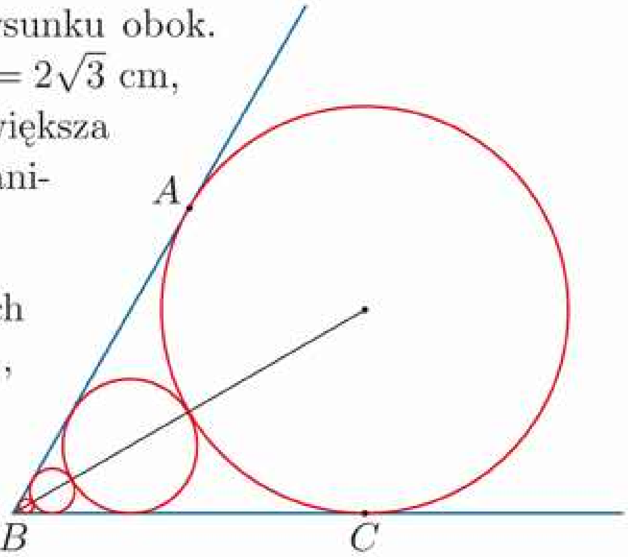
b) Trzy liczby, których suma jest równa 7, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

7. Suma trzech wyrazów b_1, b_2, b_3 ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 6. Jeśli od ostatniego wyrazu odejmiemy 18, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Oblicz b_1, b_2, b_3.

8. a) Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a suma wszystkich wyrazów jest cztery razy większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

b) Stosunek sumy dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy trzech początkowych wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu, jeśli wiadomo, że pierwszy wyraz jest równy 12.

D **9.** Cztery okręgi położone są jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ i $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.



10. Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.

11. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = -\frac{1}{2}n^4 + 10n^3 + 102n$

b) $a_n = \frac{2n^2+4n}{2n^3+n^2-6n}$

c) $a_n = \frac{(4-n^2)(4+n^2)}{2n^3-n^2+1}$

d) $a_n = \frac{\sqrt{6n}-n}{\sqrt{2n}+n}$

e) $a_n = \frac{0{,}3n+6}{\sqrt{n}+3}$

f) $a_n = \frac{3n^2+5n+6}{6n^2+4n+3}$

g) $a_n = \frac{(1-n)(6-n^2)}{(2+n)(8-n^2)}$

h) $a_n = \frac{3+n^3}{\sqrt{n^4+4}}$

12. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$

b) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$

13. Dla jakich wartości parametru b ciąg (a_n) ma granicę równą 2?

a) $a_n = \frac{bn}{(b+1)n+3}$

b) $a_n = \frac{b^2n}{(b+4)n+b}$

14. Oblicz sumę szeregu geometrycznego.

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$

b) $(1+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}+3}{3} + \frac{1+\sqrt{3}}{3} + \ldots$

15. Przedstaw ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.

a) 0,(12) b) 0,(342) c) 2,4(23) d) 3,(9)

16. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots$

b) $f(x) = 1 + \frac{x-2}{x-3} + \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + \ldots$

17. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{2}{3} + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \ldots = 2$

b) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \ldots = \frac{16}{5}$

c) $1 + 2x + 4x^2 + \ldots = \frac{1}{1-2x}$

d) $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{2n^2+1}$

Przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = 2 + 2\sin x, \quad \text{gdzie } x \in (0; 2\pi)$$

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \sin x$.

Szereg ten jest zbieżny, gdy $|\sin x| < 1$, czyli dla $x \in (0; 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$.

Wówczas równanie przybiera postać:

$$\frac{1}{1-\sin x} = 2 + 2\sin x \;/ \cdot (1 - \sin x)$$

$$2 - 2\sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}$$

$$\sin x = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$

Przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2\,\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{tg}^3 x + 2\,\mathrm{tg}^5 x + \ldots = \sqrt{3}, \quad \text{gdzie } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2\,\mathrm{tg}\, x$ i ilorazie $q = \mathrm{tg}^2 x$.

Szereg ten jest zbieżny, gdy:

$$|\mathrm{tg}^2 x| < 1$$

$$-1 < \mathrm{tg}\, x < 1$$

$$x \in \left(-\tfrac{\pi}{4}; \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Wówczas równanie przybiera postać:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x} = \sqrt{3} \;/ \cdot (1 - \mathrm{tg}^2 x)$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x = 2\,\mathrm{tg}\, x$$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$$

Podstawiamy $t = \mathrm{tg}\, x$ i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = 0, \; \sqrt{\Delta} = 4$$

$$t = -\sqrt{3} \;\text{ lub }\; t = \tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

Wracamy do niewiadomej x: $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$ lub $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, gdyż nie spełnia warunku $|\mathrm{tg}^2 x| < 1$.

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{6}$

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu:

A. $a_n = \frac{n^2-7}{n+1}$, **B.** $a_n = \frac{n^2+9}{n+1}$, **C.** $a_n = \frac{n^2+4n}{n+2}$, **D.** $a_n = \frac{2n^2-8}{n+2}$.

2. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7n - n^2$. Największy wyraz tego ciągu jest równy:

A. 16, **B.** 12, **C.** 10, **D.** 6.

3. Ciągiem malejącym jest ciąg:

A. $a_n = n^2 - 9n$, **C.** $a_n = \frac{2n-1}{3n-2}$,

B. $a_n = -n^2 + 3n$, **D.** $a_n = \frac{3n+4}{2n+3}$.

4. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2}n - n$. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $66\sqrt{2} - 66$ dla n równego:

A. 13, **B.** 11, **C.** 9, **D.** 6.

5. Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa:

A. 1595, **B.** 1485, **C.** 1375, **D.** 1265.

6. Ciąg (a_n) jest niemonotonicznym ciągiem geometrycznym takim, że $a_2^2 = 9$ oraz $a_4 = 27$. Suma piątego i szóstego wyrazu tego ciągu jest równa:

A. 162, **B.** 243, **C.** 324, **D.** 543.

7. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_2 = 2$ i $a_5 = 0{,}25$. Suma S_5 tego ciągu jest równa:

A. 6,25, **B.** 6,5, **C.** 7,75, **D.** 8,25.

8. Liczba $\sqrt{2}$ jest granicą ciągu:

A. $a_n = \frac{\sqrt{2}n^2-4}{n+1}$, **C.** $a_n = \frac{2n-\sqrt{8}n^2}{1-2n^2}$,

B. $a_n = \frac{\sqrt{2}n-6}{n^2+3}$, **D.** $a_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}n^2}{n^2+1}$.

9. Ciąg $a_n = \frac{bn-6}{(1-b)n+3}$ ma granicę niewłaściwą ∞ dla b równego:

A. -2, **B.** 0, **C.** 1, **D.** 2.

10. Suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $1 - \sqrt{3}$ i ilorazie równym $2 - \sqrt{3}$ wynosi:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **B.** -1, **C.** $\sqrt{3}$, **D.** $\sqrt{3} + 1$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = -\frac{n+3}{n+2}$.

D Zadanie 2 (2 pkt)

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \text{ dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)

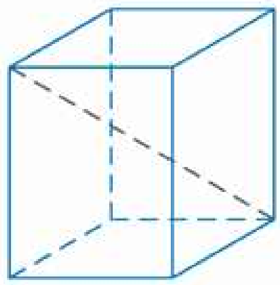
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że tworzą one ciąg arytmetyczny.

Zadanie 5 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 6 (5 pkt)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{84}$ cm, a jego objętość jest równa 64 cm^3. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.



Zadanie 7 (5 pkt)

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa 30, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 11. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

Zadanie 8 (4 pkt)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 13. Drugi wyraz jest o 5 mniejszy od różnicy między trzecim i pierwszym wyrazem. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dwa środkowe wyrazy ciągu geometrycznego składającego się z czternastu wyrazów są równe kolejno 6 i $3\sqrt{6}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n). Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

$$\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \frac{(1-a_n)^2}{a_{n-1}} \text{ dla } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{3n^2 + 6n} - \sqrt{3n^2 + n + 6}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $1 + \sin\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \ldots$ Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma wyrazów pierwszego, drugiego i piątego jest równa 27, a liczby $a_1 - 1$, $a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n).

Zadanie 6 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 7. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, a pierwsze dwie pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 7 (4 pkt)

Iloczyn trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 2^{12}, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 64. Oblicz sumę jego wyrazów o numerach nieparzystych.

Zadanie 8 (5 pkt)

Znajdź liczby $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ spełniające nierówność:

$$1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \ldots \geqslant \frac{2}{3}$$

4 Rachunek różniczkowy

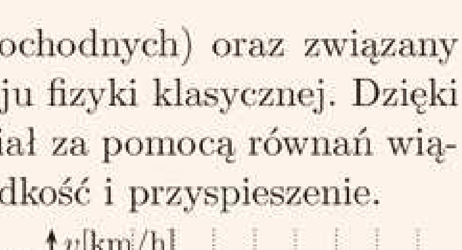
Rachunek różniczkowy (zwany też rachunkiem pochodnych) oraz związany z nim rachunek całkowy stały się podstawą rozwoju fizyki klasycznej. Dzięki nim możliwe było między innymi opisanie ruchu ciał za pomocą równań wiążących ze sobą takie wielkości jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Jeśli chcemy obliczyć średnie przyspieszenie samochodu od chwili t_0 do chwili t, korzystamy ze wzoru:

$$\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

(dzielimy przyrost prędkości przez czas, w którym on nastąpił).

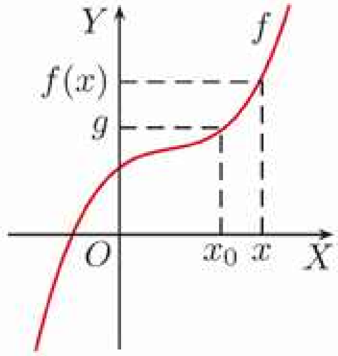
Jeśli chcemy obliczyć przyspieszenie w chwili t_0, korzystamy z tego, że jest ono **pochodną** funkcji prędkości od czasu (patrz str. 267).



Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się prędkość v samochodu w czasie t.

*4.1. Granica funkcji w punkcie

Intuicyjne pojęcie granicy



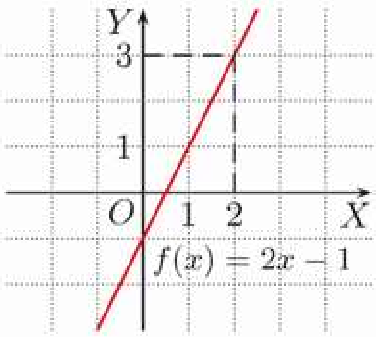
Granica funkcji jest jednym z podstawowych pojęć matematyki. Przez stwierdzenie, że „liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0” rozumiemy, że wartość funkcji f „zbliża się” do g, gdy x „zbliża się” do x_0. Piszemy wówczas:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \to g \text{ przy } x \to x_0$$

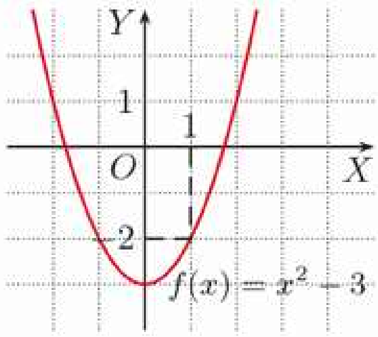
Przykład 1

Odczytaj z rysunku, ile jest równa granica funkcji w danym punkcie.

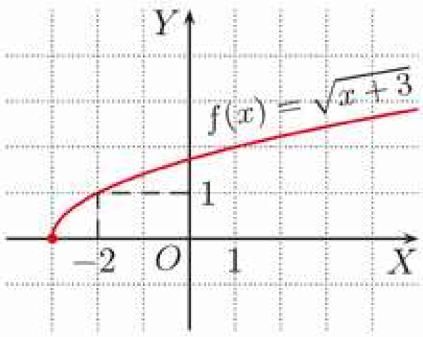
a) $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 3)$ c) $\lim\limits_{x \to -2}\sqrt{x+3}$



Gdy x „zbliża się” do 2, $f(x)$ „zbliża się” do 3:
$$\lim_{x \to 2}(2x - 1) = 3$$



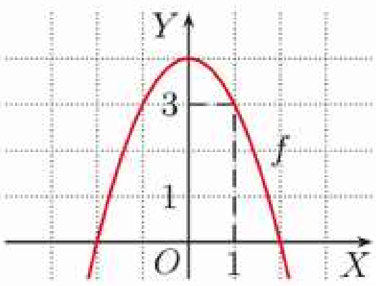
Gdy x „zbliża się” do 1, $f(x)$ „zbliża się” do -2:
$$\lim_{x \to 1}(x^2 - 3) = -2$$



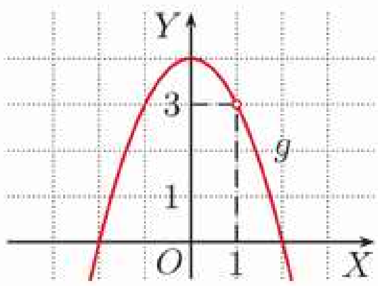
Gdy x „zbliża się” do -2, $f(x)$ „zbliża się” do 1:
$$\lim_{x \to -2}\sqrt{x+3} = 1$$

Przykład 2

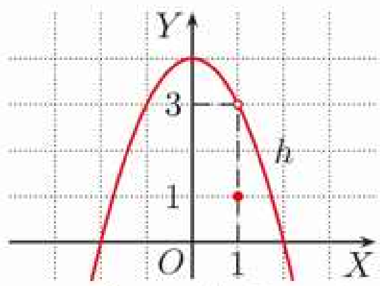
Poniżej przedstawiono wykresy funkcji f, g i h. W punkcie $x_0 = 1$ funkcje te mają tę samą granicę: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} h(x) = 3$.



$f(x) = 4 - x^2$, $D_f = \mathbf{R}$



$g(x) = 4 - x^2$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$



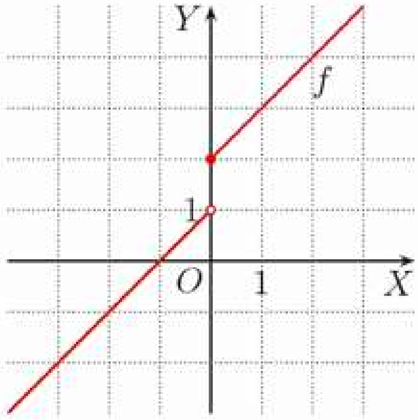
$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Punkt x_0, w którym badamy granicę, nie musi należeć do dziedziny funkcji (funkcja g). Jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość funkcji w punkcie x_0 nie ma wpływu na wartość tej granicy (funkcje f i h).

Przykład 3

Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 0 \\ x+2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$ (rysunek obok). Gdy x „zbliża się” do 0 z prawej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 2, natomiast gdy x „zbliża się” do 0 z lewej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 1.



Definicja

Liczba g jest **granicą** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Uwaga. Kiedy mówimy o granicy funkcji f w punkcie x_0, zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym **sąsiedztwie** punktu x_0, czyli zbiorze $(x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$, gdzie $r > 0$. Funkcja nie musi być określona w punkcie x_0.

D Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5$. Uzasadnij, że $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 2 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 5) = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n + 5) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$$

Zatem zgodnie z definicją $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

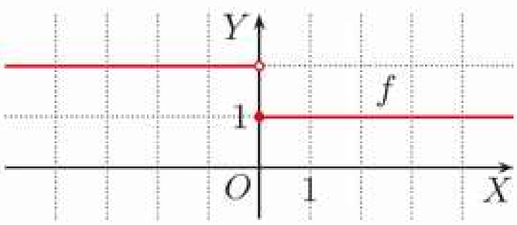
a) funkcja $f(x) = 6 - 2x^2$ ma w punkcie $x_0 = -1$ granicę równą 4,

b) funkcja $f(x) = \frac{3}{x+7}$ ma w punkcie $x_0 = 5$ granicę równą $\frac{1}{4}$.

D Przykład 5

Wykaż, że funkcja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.



Rozpatrzmy ciągi $a_n = -\frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$ zbieżne do zera. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 2, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1$$

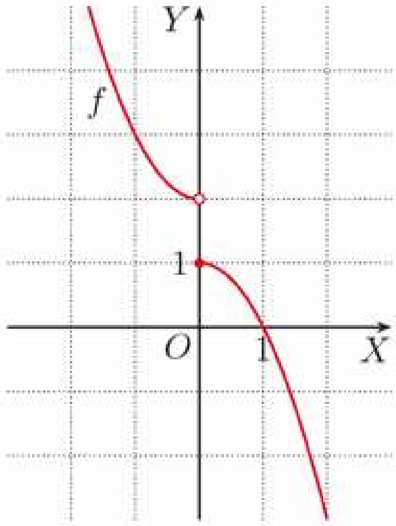
Funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

Zadania

D **1.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{dla } x<0\\ 1-x^2 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}$$

Wykaż, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0=0$.

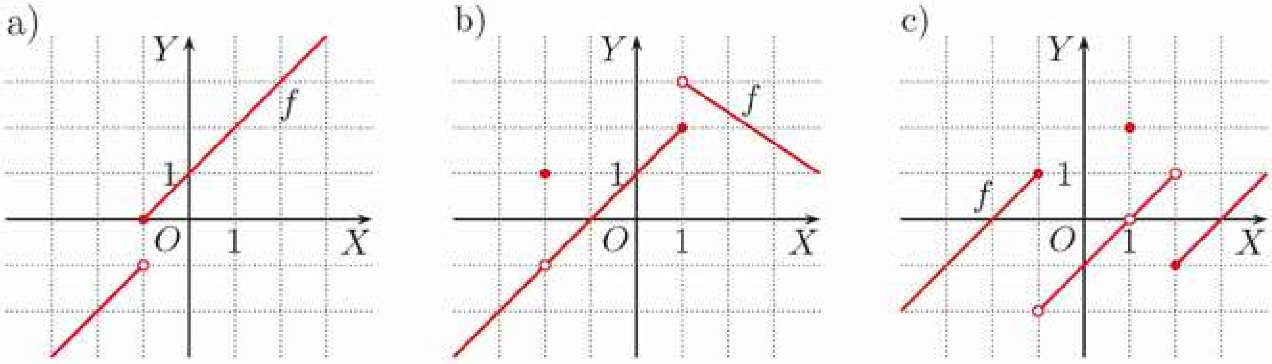


D **2.** Naszkicuj wykres funkcji sgn (signum) określonej wzorem:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla } x<0\\ 0 & \text{dla } x=0\\ 1 & \text{dla } x>0\end{cases}$$

Wykaż, że funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0=0$.

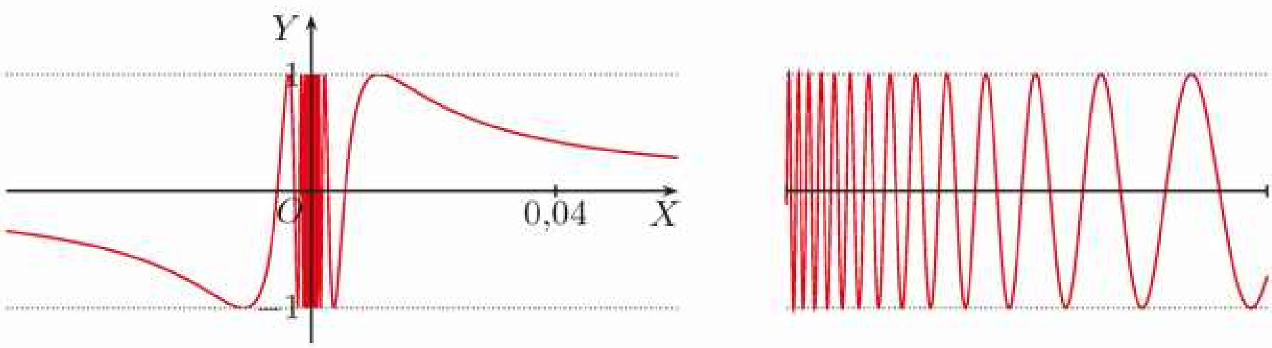
D **3.** Na podstawie wykresu funkcji f określ, dla jakich x_0 nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Odpowiedź uzasadnij.



D **4.** Uzasadnij, że funkcja f ma w x_0 granicę równą 6.

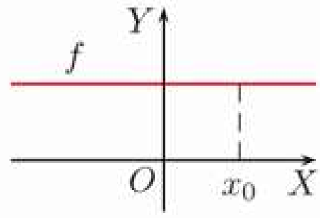
a) $f(x)=2x+4$, $x_0=1$ b) $f(x)=4x^2-10$, $x_0=2$

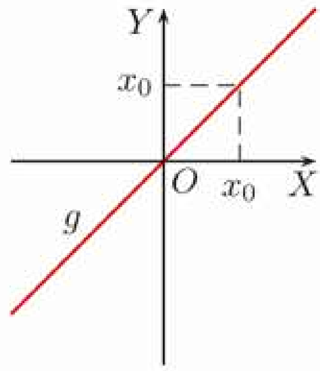
D **5.** Rozpatrzmy funkcję $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, gdzie $x\neq 0$. Wartości funkcji oscylują między -1 a 1, gdy x „zbliża się" do 0. Na rysunkach poniżej przedstawiono fragmenty wykresu funkcji f w przedziale $\langle -0{,}06; 0{,}06\rangle$ i w przedziale $\langle 0{,}00015; 0{,}0006\rangle$ odpowiednio przeskalowane.



Uzasadnij, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0=0$.

*4.2. Obliczanie granic funkcji





Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, możemy wykazać, że dla funkcji stałej $f(x) = c$ dla dowolnego x_0 zachodzi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Dla funkcji $g(x) = x$ dla dowolnego x_0 zachodzi:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = x_0$$

Przy obliczaniu granic często korzystamy z poniższego twierdzenia – jest ono wnioskiem z analogicznego twierdzenia dotyczącego granic ciągów (str. 200).

Twierdzenie

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, to:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbf{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a + b$ — granica sumy funkcji
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a - b$ — granica różnicy funkcji
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b$ — granica iloczynu funkcji
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, jeśli $b \neq 0$ — granica ilorazu funkcji

Przykład 1

Oblicz granicę funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3}(2x^2 + 5) = \lim_{x \to 3} 2x^2 + \lim_{x \to 3} 5 = 2 \cdot \lim_{x \to 3} x^2 + 5 = 2 \cdot \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + 5 =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 = 23$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ mamy $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 = 23$, czyli $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 + 5) = f(3)$.

> Jeżeli funkcja f jest wielomianem, to:
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to -2}(3x^2 - x + 2)$ b) $\lim\limits_{x \to 3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ c) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 1)^{10}$

Przykład 2

Oblicz $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^2+2}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)}=\frac{6}{3}=2$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+2}$ mamy $f(1)=2$, czyli $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

Jeśli f jest funkcją wymierną oraz x_0 należy do dziedziny tej funkcji, to $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli $f(x)=\frac{w(x)}{v(x)}$ jest funkcją wymierną, gdzie w, v są wielomianami, oraz $v(x_0)\neq 0$, to:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{w(x)}{v(x)}=\frac{w(x_0)}{v(x_0)}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3-x}{2x^2-10}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^4-4x^2+1}{2x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^3+4x-13}{x+7}$

Przykład 3

a) Oblicz $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$.

Dla $x=3$ wielomiany w liczniku i mianowniku przyjmują wartość 0 – mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$, nie możemy więc skorzystać z powyższego twierdzenia. Zauważmy jednak, że w rozkładzie na czynniki obu wielomianów występuje czynnik $(x-3)$. Zatem:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$$

b) Oblicz $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

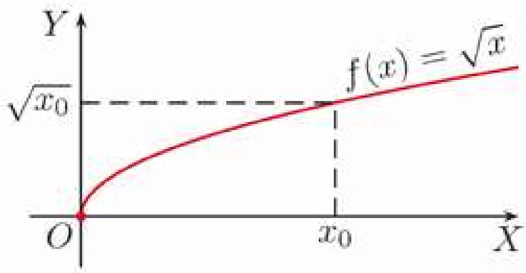
a) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x-x^3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-16}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

Kolejne twierdzenie dotyczy granicy funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek.

Jeśli $x_0 > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Ogólnie $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ dla:

- $x_0 > 0$, jeżeli n jest liczbą parzystą;
- $x_0 \in \mathbf{R}$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą.



Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 64} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ b) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0{,}001} (\sqrt[3]{x} + 100x)$

Twierdzenie

Jeśli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Przykład 4

Oblicz $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5}$.

$\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$, zatem $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5)} = \sqrt{9} = 3$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x - 4}$ b) $\lim\limits_{x \to -6} \frac{\sqrt{1 + 2x^2}}{\sqrt{|x| + 3}}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^4 + 9}}{\sqrt{3x - 2}}$

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$.

Zauważ, że $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{2x} - 2) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$. Aby obliczyć tę granicę, możemy postąpić następująco:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

Przykład 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+3}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-3x+8}{4x-x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+2)^5}{7-x^2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{3-x}$ d) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x+6}{x^2+5x-6}$ g) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+9x+14}{x^2+3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{12x^2-8x+1}{4x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3-x^2-12x}{2x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+7x-8}{x^3-1}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

a) $f(x)=\frac{4-2x}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{3x-6}{2x-x^2}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{3-x}}{2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ d) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{2x+6}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{1-\sqrt{x^2-3}}$

Twierdzenie

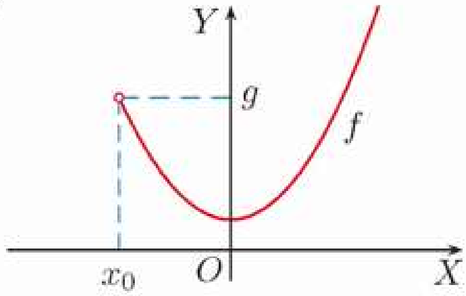
Dla dowolnego $x_0\in\mathbf{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

5. Oblicz granicę, korzystając z podanego wyżej twierdzenia.

a) $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x-\cos x)$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+6\right)$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)$

*4.3. Granice jednostronne

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Będziemy rozważać, do jakiej liczby „zbliża się” wartość funkcji, gdy x „zbliża się” do x_0 i $x \in (x_0; b)$. W tym przypadku mówimy, że x dąży do x_0 z prawej strony, i piszemy $x \to x_0^+$ (punkt x_0 może, ale nie musi, należeć do dziedziny funkcji).



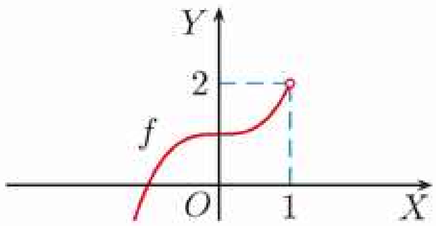
Funkcja $y = f(x)$ ma w x_0 granicę prawostronną równą g, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$.
Liczba g jest **granicą prawostronną** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 1

Niech f będzie funkcją określoną w przedziałe $(a; x_0)$. Sformułuj definicję **granicy lewostronnej** funkcji f w punkcie x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.



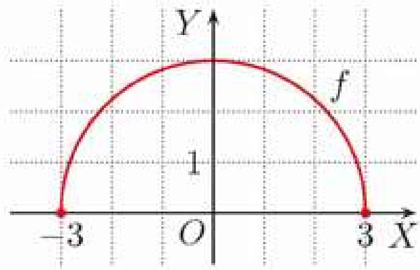
Funkcja $y = f(x)$ ma w $x_0 = 1$ granicę lewostronną równą 2, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Granica prawostronna funkcji oraz granica lewostronna funkcji nazywane są **granicami jednostronnymi** funkcji f w punkcie x_0.

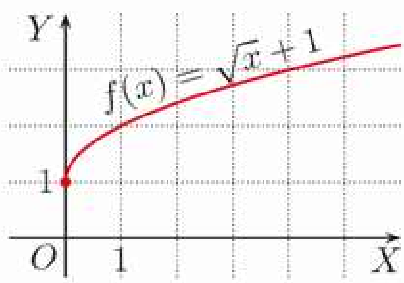
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -3; 3 \rangle$. Granice funkcji na krańcach dziedziny:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$$



Przy obliczaniu granic jednostronnych stosuje się analogiczne metody i twierdzenia, jak w przypadku obliczania granic.



Przykład 2

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$

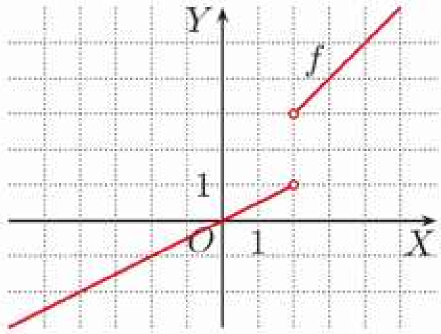
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}} = \frac{6}{2} = 3$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę jednostronną.

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-16}+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$

Przykład 3



Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x+1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

W punkcie $x_0 = 2$ można obliczyć obie granice jednostronne funkcji f:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\tfrac{1}{2}x\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$

Zauważ jednak, że $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. Funkcja f ma obie granice jednostronne, ale nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$.

Twierdzenie

Granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Zatem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$.

Zadania

1. Oblicz granicę jednostronną.

a) $\lim\limits_{x\to 4^+} \left(\sqrt{x-4}+2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ g) $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+5x+6}{2x^2-8}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ h) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}+1}$

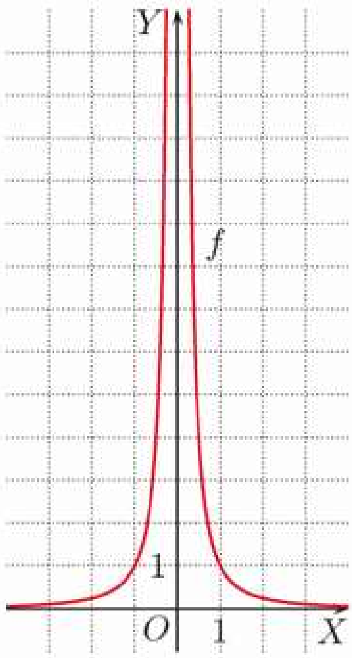
2. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Czy istnieje $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < -1 \\ x^3-1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x < -1 \\ x^2-1 & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^3+4 & \text{dla } x < -1 \\ 4-x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

*4.4. Granice niewłaściwe

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ (wykres obok). Zauważmy, że dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.



Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0.
Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

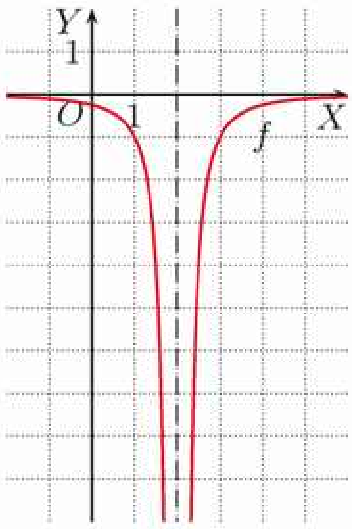
Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję **granicy niewłaściwej** równej $-\infty$ funkcji f w punkcie x_0.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ (rysunek obok), ma w punkcie $x_0 = 2$ granicę niewłaściwą równą $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$



Ćwiczenie 2

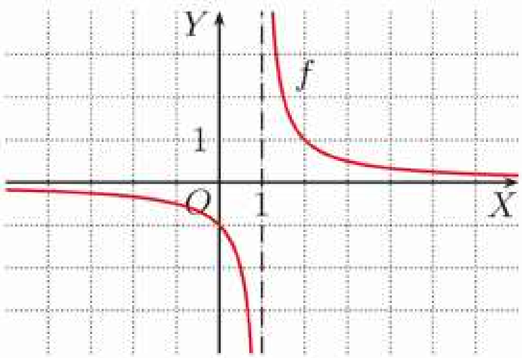
Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakiego $x_0 \in \mathbf{R}$ ma ona granicę niewłaściwą równą $-\infty$?

a) $f(x) = \dfrac{-1}{|x-1|}$ b) $f(x) = \dfrac{-4}{|x+2|}$

Przykład 2

Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ (rysunek obok), nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Istnieją natomiast **granice niewłaściwe jednostronne** w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$



Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą prawostronną** ∞ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Uwaga. Analogicznie definiujemy granice:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oznacza, że $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) > 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0;
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oznacza, że $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) < 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Twierdzenie

- Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

Uwaga. Analogiczne własności zachodzą dla granic jednostronnych.

Przykład 3

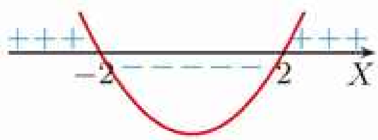
Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^+}\right]}{=} -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2-4) = 0$ oraz
$x^2 - 4 > 0$ dla $x \in (2; \infty)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^-}\right]}{=} \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-4) = 0$ oraz
$x^2 - 4 < 0$ dla $x \in (-2; 2)$



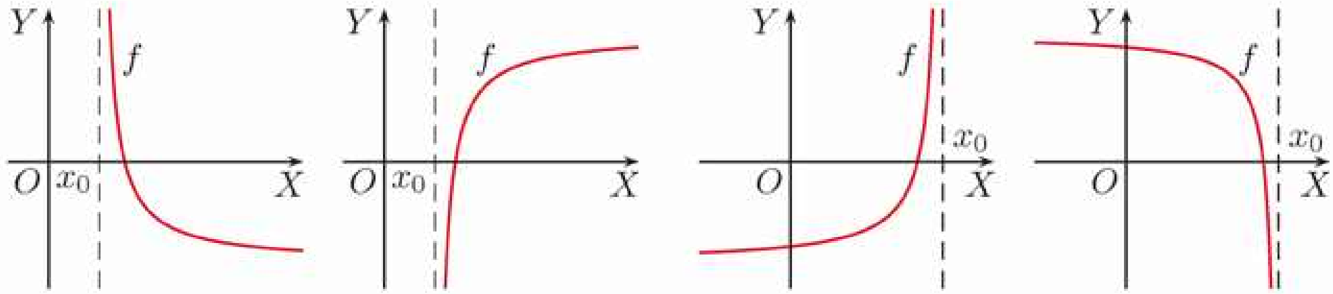
Aby ustalić znak mianownika, można naszkicować wykres funkcji $y = x^2 - 4$.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x-4}{3-x}$ d) $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x^2-4}$

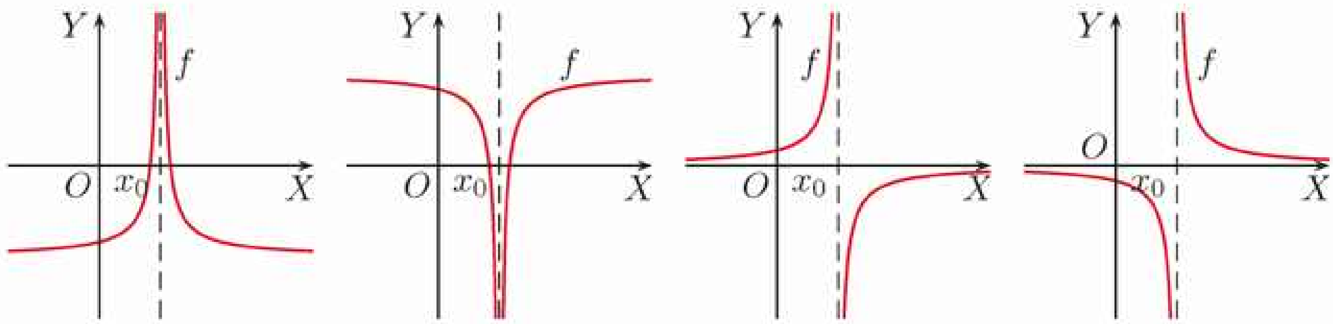
Asymptoty pionowe wykresu funkcji



Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu funkcji f.

Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu funkcji f.

Jeśli obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 są niewłaściwe, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową obustronną** (lub krótko – asymptotą pionową) wykresu funkcji f (patrz wykresy poniżej).



Istnienie asymptot pionowych w przypadku funkcji wymiernej badamy w miejscach zerowych mianownika.

Przykład 4

Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2} = \infty$, zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i wyznacz asymptoty pionowe jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że wykres funkcji f nie ma asymptoty pionowej w punkcie x_0. Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1-4x^2}{2x-1}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$, $x_0 = 2$

Twierdzenie

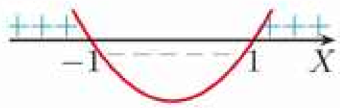
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=-\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=-\infty$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, wyznaczenie granicy $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ wymaga szczegółowych badań (mamy wówczas do czynienia z symbolem nieoznaczonym $[\infty-\infty]$).

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$$



Szkic wykresu funkcji $y=x^2-1$.

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{1-x}{5-x}$ d) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{4x+1}{x^2-x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+3}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-7}{2x-x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right)$

2. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ c) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ e) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

b) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-4}$ d) $f(x)=\frac{6x+2}{1-9x^2}$ f) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$

3. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x^2}$ b) $f(x)=\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{x}{|x-3|-|x-1|}$

Warto wiedzieć

Krzywe płaskie i ich asymptoty

Niektóre krzywe płaskie niebędące wykresami funkcji mają asymptoty pionowe.

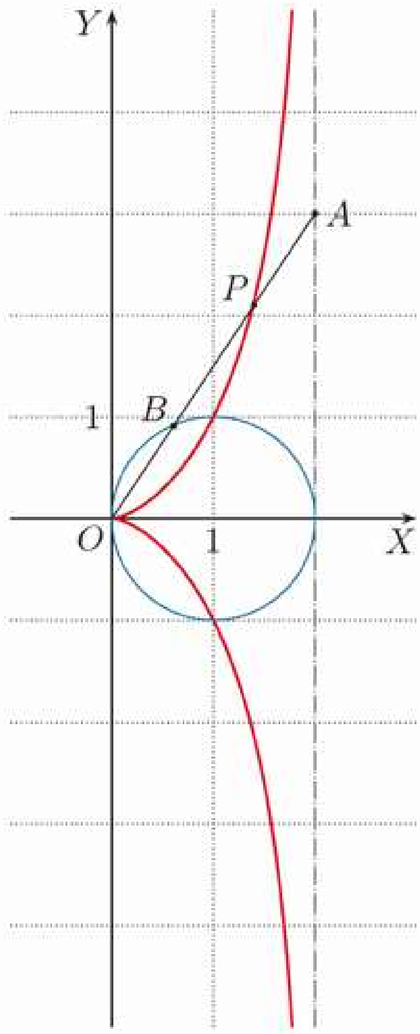
Taką krzywą jest na przykład **cisoida Dioklesa** dana równaniem:

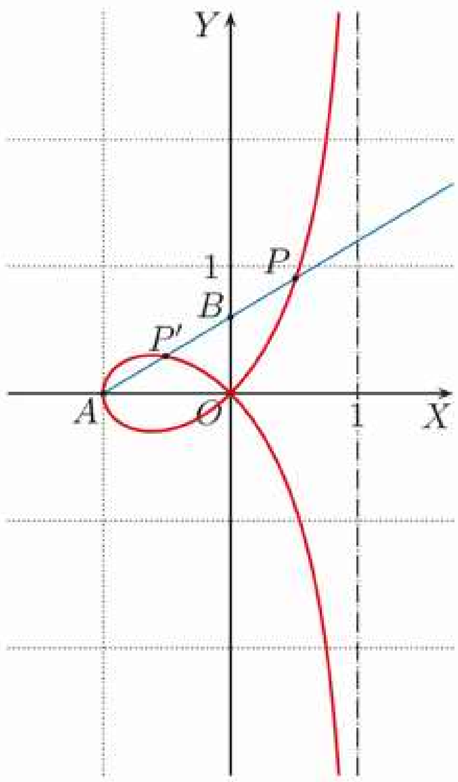
$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \text{ gdzie } a > 0$$

Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.

Aby wyznaczyć punkt P należący do cisoidy Dioklesa dla $a = 2$, postępujemy następująco:

- Rysujemy odcinek łączący punkt $O(0,0)$ z dowolnym punktem A leżącym na prostej $x = 2$.
- Odcinek OA przecina okrąg o środku w punkcie $(1,0)$ i promieniu 1 w punkcie B.
- Na odcinku OA wyznaczamy punkt P taki, że $|OP| = |AB|$.





Inną krzywą płaską mającą asymptotę pionową jest **strofoida**. Jest ona dana równaniem:

$$y^2 = \frac{a+x}{a-x}x^2, \text{ gdzie } a > 0$$

Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.

Na rysunku obok przedstawiono strofoidę dla $a = 1$.

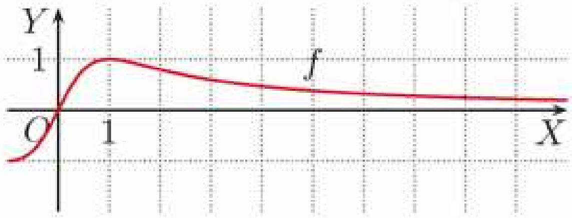
Strofoida ta jest zbiorem wszystkich punktów P leżących na półprostych wychodzących z punktu $A(-1,0)$, przecinających oś OY w punkcie $B(0,b)$ takich, że $|BP| = |BO| = |b|$ (zwróć uwagę na to, że dla każdej półprostej AB są dwa takie punkty P i P'.)

1. Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o następujących krzywych płaskich: **konchoida Nikomedesa**, **ofiuryda** (ogon węża), **panstrofoida**. Korzystając z odpowiedniego programu komputerowego lub kalkulatora graficznego, naszkicuj te krzywe i ich asymptoty.

*4.5. Granica funkcji w nieskończoności

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Rozpatrzmy ciąg argumentów (x_n) taki, że $x_n \to \infty$. Wówczas ciąg odpowiadających im wartości funkcji $(f(x_n))$ ma granicę równą zero.



Definicja

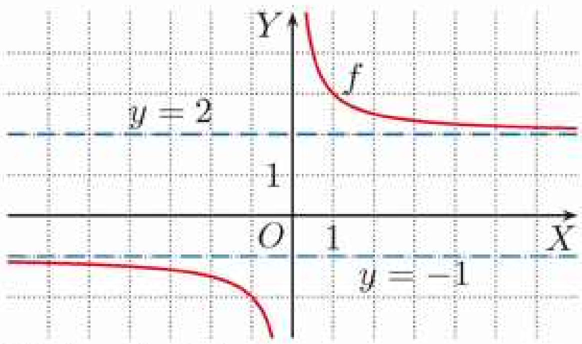
Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w ∞.

Jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, to prostą $y = l$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w $-\infty$.



Wykres funkcji f ma w ∞ asymptotę poziomą $y = 2$, a w $-\infty$ – asymptotę poziomą $y = -1$.

Przykład 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x^2}{2x^2+4}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2}-1}{2+\frac{4}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Wykres funkcji f ma w ∞ oraz w $-\infty$ asymptotę poziomą $y = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f.

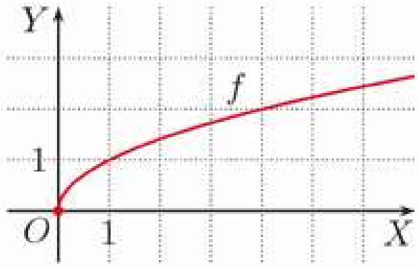
a) $f(x) = \frac{6-4x}{1+2x}$ b) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}$ c) $f(x) = \frac{2|x|+1}{x}$

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Przykład 3

Funkcja $f(x)=\sqrt{x}$ (wykres obok) ma w ∞ granicę niewłaściwą równą ∞.



Ćwiczenie 3

Sformułuj definicję:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f i określ granice $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

a) $f(x)=x$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x^3$

Twierdzenie

Dla każdego $n\in\mathbf{N}_+$:

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}\infty & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}=-\infty$ dla n nieparzystych

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{10}}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(-x^3)^2}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$

Twierdzenie

- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a>0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x))=\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a<0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x))=-\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a>0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x))=-\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a<0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x))=\infty$.

Przykład 4

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-6x^2-1)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

$\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$ oraz
$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=2$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(100+x-x^3)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4}{10}+2x^3+x^2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)^3$

Przykład 5

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{6x^3-4x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{2x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1}{x^3+x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$

Aby obliczyć te granice, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z mianownika.

Ćwiczenie 7

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2x}{1-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+4}{x^4+x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-10}{x+\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7}{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-1}{(x^2-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{4\sqrt{x}-x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5-x^3+3)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+\frac{1}{x})$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^4$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^3-3x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{x^5-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-6x}{2x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-x^3+1}{x-2x^4}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+9}{1-2x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+x+1}{x-3x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{1-x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x-1}{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-2x+1}{1-x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{x^3+3x-7}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x-1}{3-x^2}$

3. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(1-x)}{(1-6x)(x+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x^2-4)}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(4x-1)}{(2x-1)^2(3-x)}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

5. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)$

6. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{1-6x^2}{2x^2+x-1}$ e) $f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-1}}$

b) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+x+1}$ d) $f(x)=\frac{5x^4-x^2+1}{x^4+1}$ f) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}}$

7. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$ d) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ g) $f(x)=\frac{2x^2+x}{x^2-x-2}$

b) $f(x)=\frac{2x-1}{4-x}$ e) $f(x)=\frac{-3}{9-x^2}$ h) $f(x)=\frac{1-x}{x^2-4x-5}$

c) $f(x)=\frac{1-6x}{2-3x}$ f) $f(x)=\frac{5-x}{x^2-25}$ i) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+x-2}$

8. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\sqrt{\frac{1-4x}{1-x}}$ b) $f(x)=\sqrt{\frac{9x-1}{x-1}}$ c) $f(x)=\sqrt{\frac{1-16x^2}{4-x^2}}$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=$$

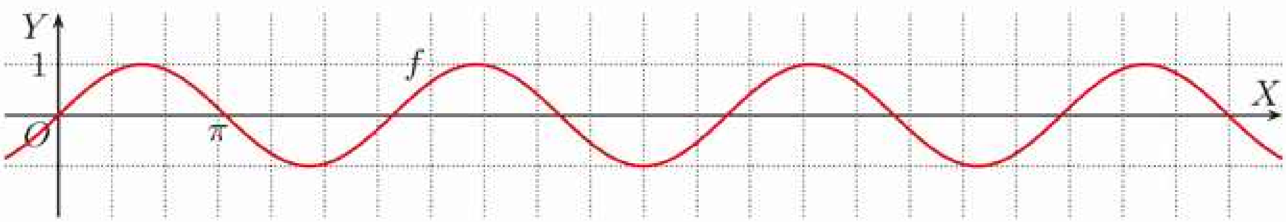
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=-1$$

$|x|=-x$ dla $x<0$

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{8x^3+3}}$

D **10.** Uzasadnij, że funkcja $f(x)=\sin x$ nie ma granicy w ∞.



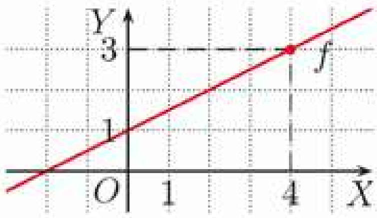
*4.6. Ciągłość funkcji

Definicja

Funkcja $f : (a; b) \to \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

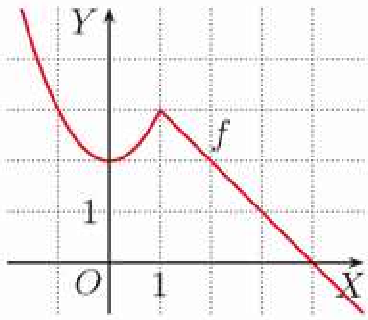
Uwaga. Analogiczną definicję przyjmujemy dla funkcji określonej w przedziale $(-\infty; b)$, $(a; \infty)$ lub w $\mathbf{R}$.

Przykład 1



Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 4$, gdyż $\lim\limits_{x \to 4} (\frac{1}{2}x + 1) = 3$ oraz $f(4) = 3$.

D Przykład 2



Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 4 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2) = 3, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = 3$$

Istnieje więc granica: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$. Ponadto $f(1) = 3$, więc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Funkcja f jest zatem ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

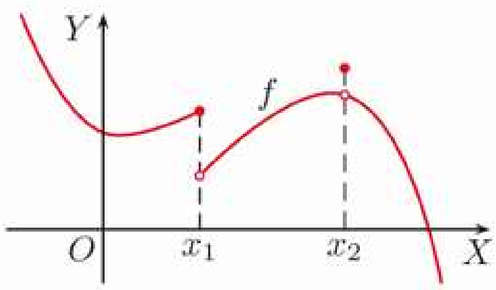
D Ćwiczenie 1

Wykaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$, i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & \text{dla } x < 2 \\ x & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{dla } x < 2 \\ (x-3)^3 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

Przykład 3



Funkcja f, której wykres przedstawiony jest na rysunku obok, nie jest ciągła w punkcie:

- x_1, gdyż $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ nie istnieje;
- x_2, gdyż $\lim\limits_{x \to x_2} f(x) \neq f(x_2)$.

Jeśli funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$, to mówimy, że jest **nieciągła w punkcie** x_0.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x^2+1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Przykład 4

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{4x-2} & \text{dla } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{dla } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{4x-2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2(2x-1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2} = 1$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\frac{1}{2}) = 1$, czyli dla $a = 1$.

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^3-x^2-x & \text{dla } x \neq 2 \\ a^2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

Definicja

Funkcję $f:(a;b) \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(a;b)$.

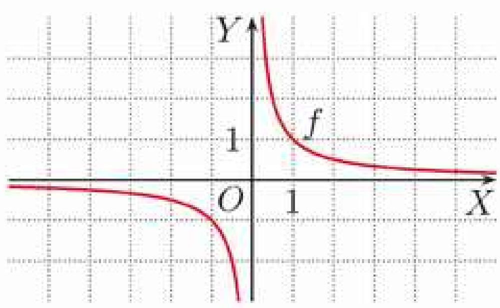
Uwaga. Analogicznie definiujemy funkcję ciągłą określoną w przedziale $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$ lub w $\mathbf{R}$.

Jeśli funkcja f jest nieciągła w choćby jednym punkcie dziedziny, to mówimy, że jest **nieciągła**.

Jeśli dziedziną funkcji f jest zbiór będący sumą przedziałów otwartych, to mówimy, że funkcja ta jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym z tych przedziałów.

Przykład 5

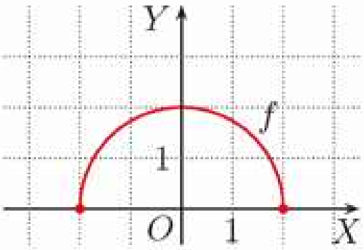
Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ określona na zbiorze $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$ jest ciągła, ponieważ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$ oraz $(0;\infty)$.



Funkcję $f\colon \langle a; b\rangle \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym** $\langle a; b\rangle$, jeżeli jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz:

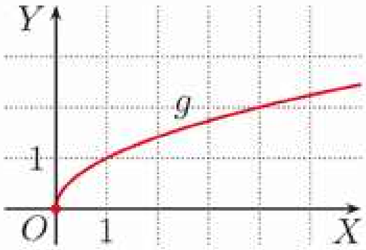
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Uwaga. Analogicznie definiujemy ciągłość funkcji w przedziałach postaci $\langle a; b)$ i $(a; b\rangle$ oraz $\langle a; \infty)$ i $(-\infty; b\rangle$.



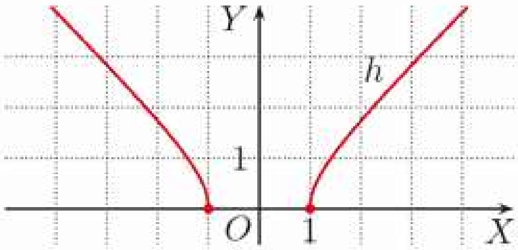
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Funkcja $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ określona w przedziale $\langle -2; 2\rangle$ jest ciągła.



$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$$

Funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ określona w przedziale $\langle 0; \infty)$ jest ciągła.



$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = h(-1)$$
$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = h(1)$$

Funkcja $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ określona na zbiorze $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$ jest ciągła.

Twierdzenie

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja:

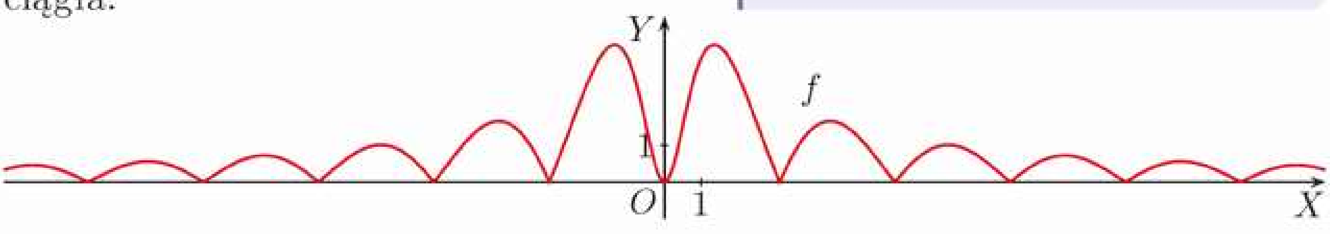
- $f+g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $f-g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $f\cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 pod warunkiem, że $g(x_0) \neq 0$.

Funkcjami ciągłymi są między innymi wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze i logarytmiczne, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens) oraz funkcje otrzymane z powyższych w wyniku operacji arytmetycznych.

Przykład 6

Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona wzorem $f(x) = \left|\frac{8x\sin x}{x^2+1}\right|$ (wykres poniżej) jest ciągła.

Jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $y = |f(x)|$ również jest ciągła.



Zadania

D **1.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

a) $f(x) = 2x^2 + 1,\ x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2},\ \ x_0 = 1$

2. Zbadaj ciągłość funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leqslant 3 \\ 4x+1 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 4 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2}{x-4} & \text{dla } x \neq 4 \\ 0 & \text{dla } x = 4 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{1-x} & \text{dla } x \neq 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

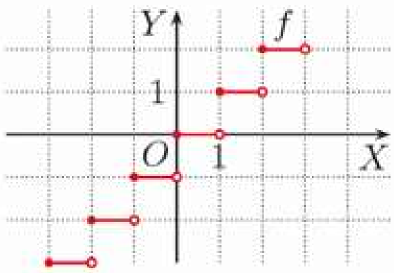
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2x^2}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{1-x^2} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 1 & \text{dla } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

3. Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 3x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{dla } x < 2 \\ 2x-a^2 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-ax & \text{dla } x < 3 \\ x-6 & \text{dla } x \geqslant 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} ax^2+a^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \frac{3}{x}-a & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

D **4.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Podaj, dla jakich argumentów $x \in \mathbf{R}$ funkcja ta nie jest ciągła. Odpowiedź uzasadnij.



5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x^2-x} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \\ a^3-7 & \text{dla } x = 0 \\ 2\sin b & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\} \\ a^2 - \frac{1}{6}a & \text{dla } x = -2 \\ \frac{1}{3}\cos b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+x-6} & \text{dla } x < -3 \\ b-1 & \text{dla } x = -3 \\ c|x+1| & \text{dla } x > -3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-4} & \text{dla } x < 2 \\ bx+1 & \text{dla } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

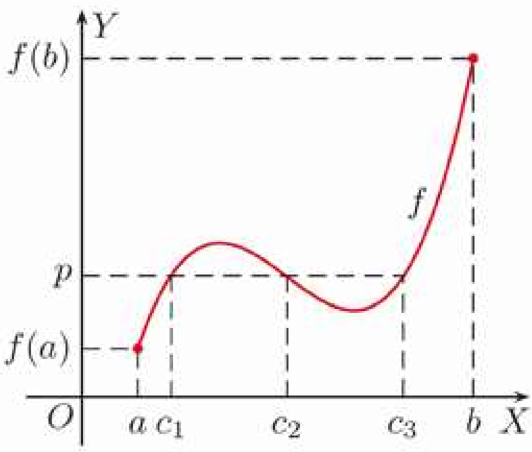
*4.7. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \neq f(b)$, to funkcja ta przyjmuje w przedziale $(a;b)$ każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Jeśli funkcja przyjmuje wartości pośrednie, to mówimy, że ma **własność Darboux** (Jean Gaston Darboux [czyt. żą gastą darbu], matematyk francuski żyjący w latach 1842–1917).

Powyższe twierdzenie można również sformułować następująco: jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) < f(b)$, to dla każdej liczby $p \in (f(a); f(b))$ istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a;b)$ taki, że $f(c) = p$.



Wniosek

Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz:

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0 \quad \text{lub} \quad f(a) > 0,\ f(b) < 0$$

to istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a;b)$ taki, że $f(c) = 0$.

D **Przykład 1**

Wykaż, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ma pierwiastek $c \in (0;1)$.

Wielomian w jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0;1\rangle$ oraz $w(0) = -1 < 0$ i $w(1) = 1 > 0$, zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich ma on pierwiastek $c \in (0;1)$.

D **Ćwiczenie 1**

Wykaż, że wielomian w ma pierwiastek należący do podanego przedziału.

a) $w(x) = -3x^4 + 6x^2 + 5,\ (0;2)$

b) $w(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 - 7,\ (-2;-1)$

Ćwiczenie 2

Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu.

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła oraz $f(-1) = -1 < 0$ i $f(1) = 1 > 0$, zatem równanie $\frac{1}{x} = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(-1;1)$.

D **Przykład 2**

Uzasadnij, że równanie $x = 4\cos x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

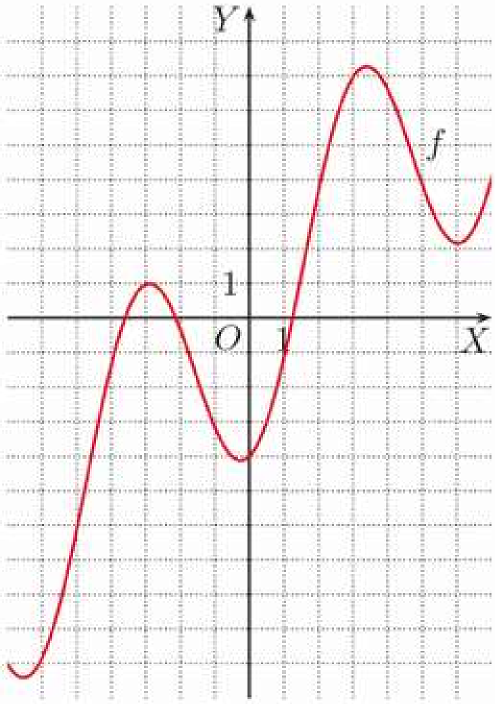
Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x - 4\cos x$ (wykres obok). Jest ona ciągła w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

$$f(0) = 0 - 4\cos 0 = -4 < 0$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2} - 4\cos\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2} > 0$$

Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, co oznacza, że równanie:

$$x - 4\cos x = 0$$

ma rozwiązanie należące do tego przedziału.



D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = 3 - 2x,\ \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

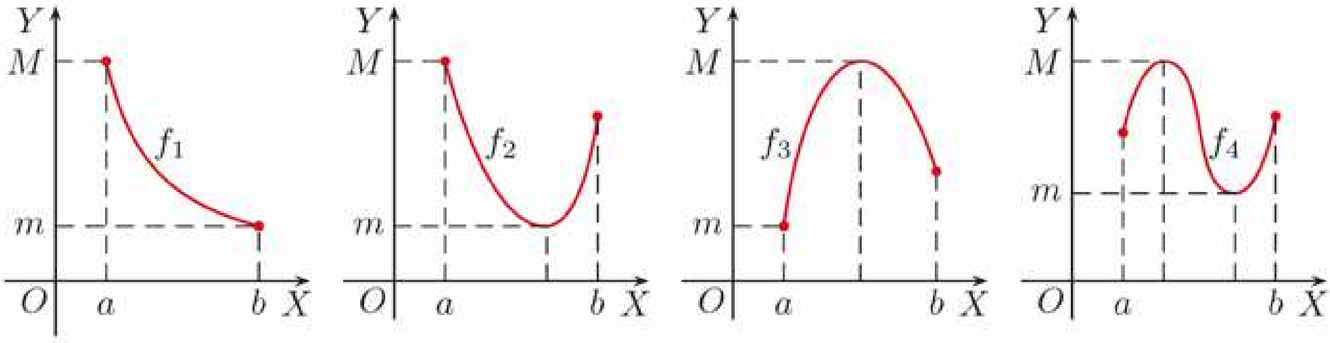
b) $\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 4,\ (1;2)$

Poniższe twierdzenie o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą wartości najmniejszej i największej, zwane też **twierdzeniem o osiąganiu kresów**, udowodnił matematyk niemiecki Karl Teodor Wilhelm Weierstrass [czyt. wajersztras] (1815–1897).

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja ta przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą.

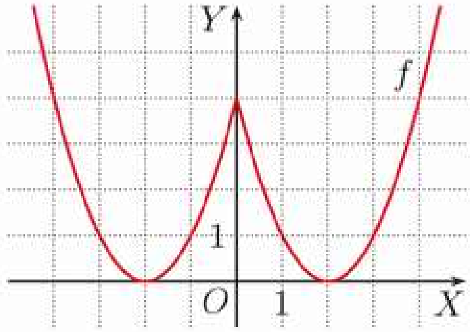
Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$ przyjmuje wartość najmniejszą m oraz wartość największą M albo na końcach przedziału $\langle a;b\rangle$, albo w którymś z jego punktów wewnętrznych (patrz przykłady poniżej).



Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = (|x| - 2)^2$. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale:

a) $\langle -4; -3\rangle$, b) $\langle -3; 3\rangle$, c) $\langle -1; 5\rangle$.



Zadania

1. Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(-1; 0)$.

a) $x^3 + 2x + 1 = 0$ b) $x^4 - 7x - 4 = 0$ c) $x^6 - 1 = 3x^3$

2. Uzasadnij, że równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^3 - 4x + 1 = 0$ b) $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^4 + 2x^3 = 4$

3. Wyznacz przedział długości $\frac{1}{2}$, do którego należy rozwiązanie równania.

a) $2x^3 + 4x - 1 = 0$ b) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 - 3x^3 + 3 = 0$

4. Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(2; 4)$.

a) $\frac{2}{x^2} = \sqrt{x} - 1$ b) $\log_2 x = \frac{3}{2}x - 3$ c) $4\sin\frac{\pi}{8}x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Znajdź największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 2; 4\rangle$.

a) $f(x) = (x-2)^2$ b) $f(x) = -(x-3)^2+1$ c) $f(x) = (x-4)^3$

6. Naszkicuj wykres funkcji f i na tej podstawie określ, czy funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą.

a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \\ 4 - x^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 1\rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in (0; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; 4\rangle \end{cases}$

7. Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 7 & \text{dla } x \in \langle -5; -1) \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } x \in \langle -1; 3\rangle \\ -2x + 10 & \text{dla } x \in (3; 5\rangle \end{cases}$$

i podaj wartość najmniejszą m oraz wartość największą M funkcji g.

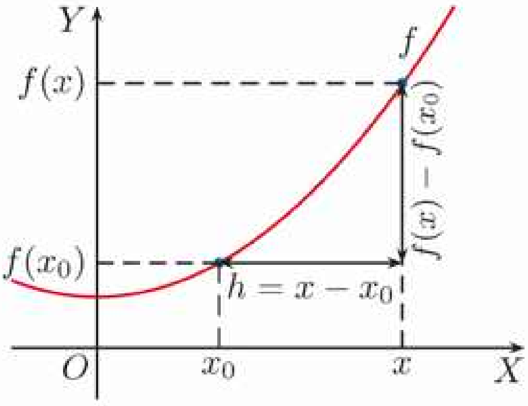
a) $g(x) = f(x-2) + 1$ b) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(|x|)$

8. Funkcja $f\colon \left\langle \frac{1}{2}; \frac{13}{2} \right\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła i dla argumentów n będących liczbami naturalnymi $f(n) = (-2)^n$. Uzasadnij, że f ma co najmniej pięć miejsc zerowych.

*4.8. Pochodna funkcji w punkcie

W temacie tym zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; b)$. Niech x_0 oraz x będą punktami należącymi do przedziału $(a; b)$.

Różnicę $h = x - x_0$ nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji (stąd $x = x_0 + h$).



Różnicę $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji**.

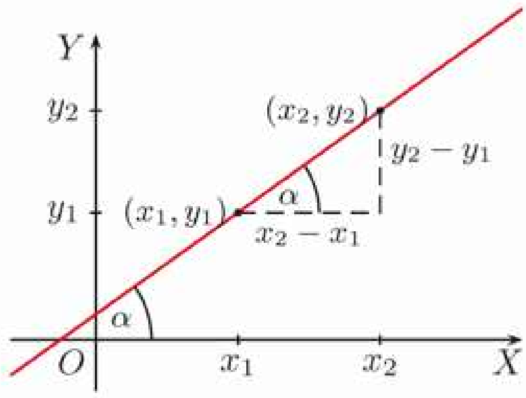
Iloraz $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (dla $x \neq x_0$), zapisywany też w postaci $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0.

Iloraz różnicowy można interpretować jako średnią prędkość przyrostu funkcji f w przedziale $\langle x_0; x \rangle$.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Przypomnijmy, że jeśli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2), to jej **współczynnik kierunkowy** możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



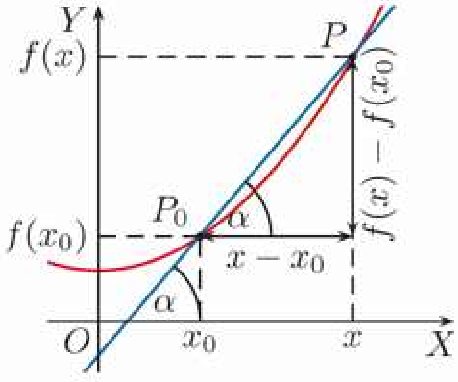
Jednocześnie iloraz $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ jest równy tangensowi kąta α (rysunek obok).

Twierdzenie

> Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax+b$ jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX: $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną** tego wykresu.

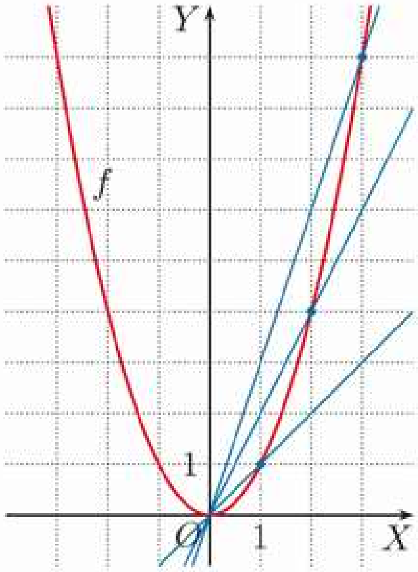
Rozpatrzmy sieczną wykresu funkcji f przecinającą ten wykres w punktach $P_0(x_0, f(x_0))$ i $P(x, f(x))$ (rysunek obok).



Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta α, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX, a zatem jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej P_0P.

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy siecznej wykresu funkcji $f(x) = x^2$ (rysunek obok) przecinającej ten wykres w punkcie $(0, 0)$ oraz w punkcie o odciętej równej: a) 1, b) 2, c) 3.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)^2$ oraz sieczną wykresu przechodzącą przez punkty o odciętych $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$. Oblicz współczynnik kierunkowy tej siecznej.

Pochodna funkcji w punkcie

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Uwaga. Można wykazać, że jeśli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła. Jednak z ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wynika istnienie pochodnej (patrz zad. 4).

Przykład 1

a) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

b) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2}(x^2+2x+4) = 12$$

Ćwiczenie 3

Oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x) = 2x, \ \ x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^2, \ \ x_0 = 4$

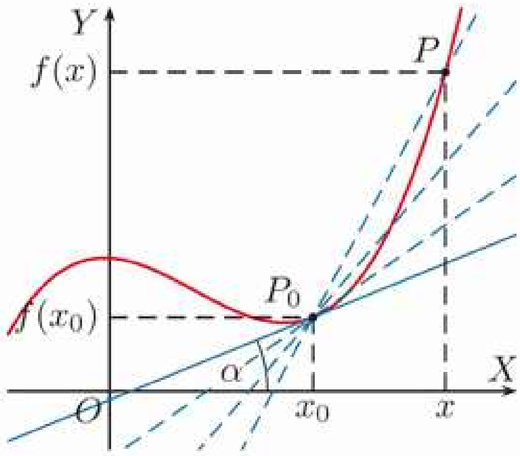
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \ \ x_0 = -2$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3, \ \ x_0 = 3$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną. Wówczas przy x dążącym do x_0 sieczne wykresu funkcji f przechodzące przez punkt P_0 (patrz rysunek) „zbliżają się” do prostej, zwanej **styczną do wykresu funkcji** w punkcie P_0.

Przypomnijmy, że iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX.

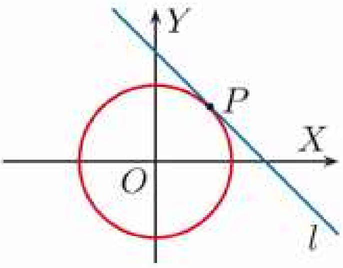


Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX (rysunek powyżej):

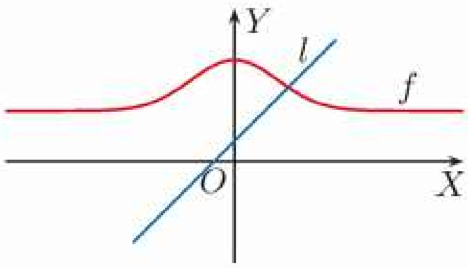
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

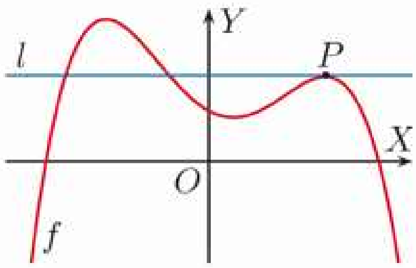
Zauważ, że o ile styczną do okręgu można zdefiniować jako prostą mającą z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, o tyle w przypadku stycznej do wykresu funkcji takie określenie byłoby niepoprawne.



Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie P. Prosta l ma z okręgiem jeden punkt wspólny.



Prosta l ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f, ale nie jest jego styczną.



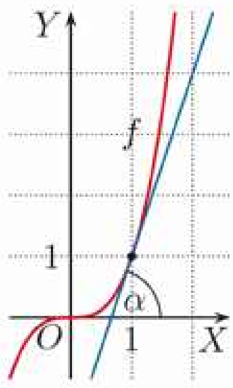
Prosta l jest styczną do wykresu funkcji f w punkcie P i ma trzy punkty wspólne z tym wykresem.

Przykład 2

Oblicz miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1, 1)$ tworzy z osią OX.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1^3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$$

Zatem $\operatorname{tg}\alpha = 3$, stąd $\alpha \approx 72^\circ$.



Ćwiczenie 4

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Podaj miarę kąta, jaki ta styczna tworzy z osią OX.

a) $f(x) = x^2, \;\; x_0 = 1$ b) $f(x) = x^3, \;\; x_0 = -1$ c) $f(x) = \frac{1}{x}, \;\; x_0 = 2$

Zadania

1. Oblicz pochodne funkcji f w punktach x_0 i x_1.

a) $f(x) = 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 6$

b) $f(x) = 3x - 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 5$

c) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$

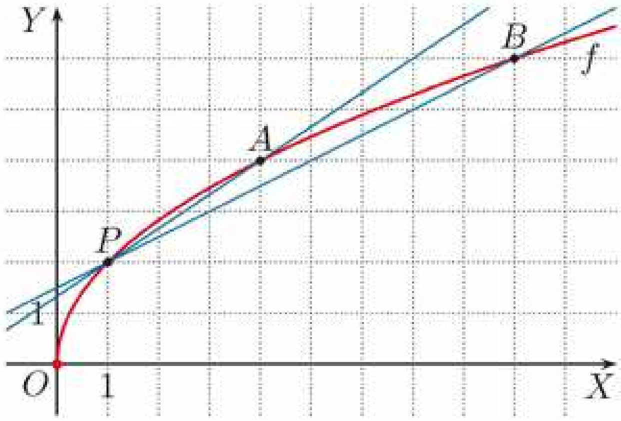
e) $f(x) = x^3$, $x_0 = -2$, $x_1 = -3$

f) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Oblicz współczynniki kierunkowe siecznych PA i PB oraz wyznacz ich równania.

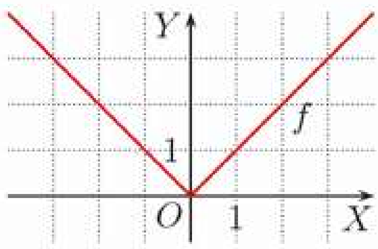
b) Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie P.



3. Oblicz miarę kąta, jaki z osią OX tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

a) $f(x) = x^2, \;\; x_0 = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}, \;\; x_0 = 1$ c) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; x_0 = \frac{1}{4}$

D **4.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Uzasadnij, że funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.
>
> 
>
>
> $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
>
> $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$
>
> Oznacza to, że $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$ (chociaż jest ciągła w tym punkcie).

Uzasadnij, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0.

a) $f(x) = |x - 2|, \;\; x_0 = 2$ b) $f(x) = x + |x|, \;\; x_0 = 0$

*4.9. Funkcja pochodna

D **Przykład 1**

Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2$ ma pochodną w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$.

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Zauważmy, że możemy określić funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in \mathbf{R}$ będzie przyporządkowywać wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 równą $2x_0$. Mamy więc dwie funkcje – funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f(x) = x^2$, oraz funkcję $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f'(x) = 2x$.

Definicja

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru (będącego przedziałem otwartym lub sumą przedziałów otwartych), to w tym zbiorze określona jest funkcja $y = f'(x)$, zwana **funkcją pochodną** funkcji f lub krótko **pochodną** funkcji f.
O funkcji f mówimy, że jest w tym zbiorze **różniczkowalna**.

D **Ćwiczenie 1**

Wykaż, że:

a) funkcja stała $f(x) = c$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 0,

b) funkcja $f(x) = x$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 1.

Wzory na pochodne zwykle zapisywane są krótko:

$(c)' = 0$, gdzie c – stała	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$
$(x)' = 1$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$

Uwaga. Wzory $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ są szczególnymi przypadkami wzoru podanego niżej.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbf{R}$.
Dla dowolnej liczby całkowitej $n < 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 2

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 7$.

$f'(x) = 2x$, zatem $f'(7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ćwiczenie 2

Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x) = x^3, \;\; x_0 = -5$ b) $f(x) = \frac{1}{x}, \;\; x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; x_0 = 1\frac{9}{16}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie $f'(x) = 2$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

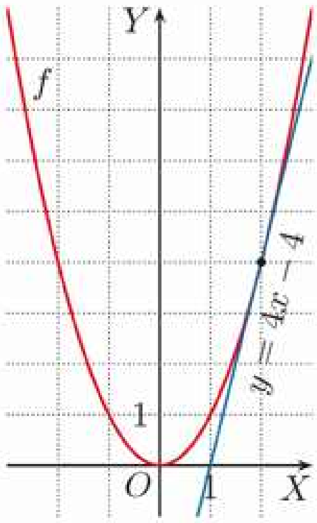
Podany obok wzór na pochodną funkcji $f(x) = x^a$, zwanej **funkcją potęgową**, jest prawdziwy dla dowolnego wykładnika $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i $x > 0$. Na przykład dla funkcji $f(x) = \sqrt[6]{x}$:

$$f'(x) = (\sqrt[6]{x})' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \tfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

Równanie stycznej

Przykład 3

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$.



Równanie stycznej zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i obliczamy jej współczynnik kierunkowy a:

$$f'(x) = 2x, \;\; \text{zatem} \;\; a = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Styczna ma więc równanie $y = 4x + b$. Aby wyznaczyć wartość b, podstawiamy współrzędne punktu $(2, 4)$ do równania stycznej: $4 = 4 \cdot 2 + b$ i stąd $b = -4$.
Otrzymaliśmy równanie stycznej $y = 4x - 4$.

Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ dana jest równaniem $y - f(x_0) = a(x - x_0)$. Aby wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, możemy skorzystać z poniższego wzoru.

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną, to **styczną** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o równaniu:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

a) $f(x) = x^2,\ P(3,9)$ b) $f(x) = x^2,\ P(-2,4)$ c) $f(x) = x^3,\ P(1,1)$

Zadania

1. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź wzór.

a) $(x^3)' = 3x^2$ b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$ c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = x^2,\ x_0 = -4$ b) $f(x) = x^3,\ x_0 = -3$ c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2}$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt 30°.
> $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc szukamy punktu x_0, dla którego $f'(x_0) = 2x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Stąd $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oraz $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{12}$. Zatem styczna ma równanie $y - \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, czyli $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt: a) 45°, b) 60°, c) 150°.

4. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do prostej $y = 6x - 11$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

5. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest prostopadła do prostej $y = -3x + 7$.

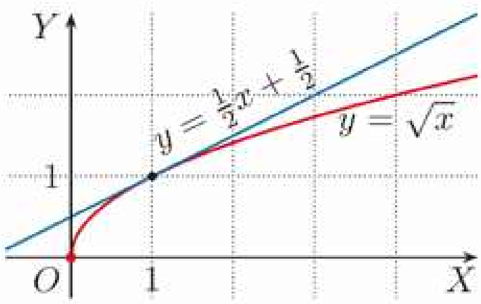
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

6. Czy istnieje styczna do wykresu funkcji f mająca współczynnik kierunkowy równy a? Jeżeli styczna istnieje, to wyznacz jej równanie.

a) $f(x) = x^3,\ a = 3$ b) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -4$ c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = -1$

D **7.** a) Wykaż, że prosta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

b) Korzystając z przybliżenia $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, oblicz $\sqrt{1{,}2}$ i $\sqrt{0{,}9}$. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi na kalkulatorze.



*4.10. Działania na pochodnych

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x oraz c jest dowolną stałą, to:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Przykład 1

a) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$ b) $(5x^{-4})' = 5(x^{-4})' = 5(-4x^{-5}) = -\frac{20}{x^5}$

Ćwiczenie 1

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 12x^3$ c) $f(x) = 4x^7$ e) $f(x) = 2x^{-6}$

b) $f(x) = 0{,}5x^6$ d) $f(x) = 6x^{-1}$ f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$

Pochodna sumy i pochodna różnicy funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{oraz} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Przykład 2

a) $(x^2 + 3x - 1)' = (x^2)' + 3(x)' - (1)' = 2x + 3$

b) $(2x^3 + \frac{4}{x} - x + 1)' = 2(x^3)' + 4\left(\frac{1}{x}\right)' - (x)' + (1)' = 6x^2 - \frac{4}{x^2} - 1$ dla $x \neq 0$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$ c) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x^3 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3x^4 - 7x^2 - 2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2x} - 2\sqrt{x}$

Pochodna iloczynu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Przykład 3

a) $(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
dla $x > 0$

b) $((x^2 + 1)(x^3 - 4))' = 2x(x^3 - 4) + (x^2 + 1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 8x$

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 2x\sqrt{x} - 4x^3 + 2$

b) $f(x) = -4x^6\sqrt{x} + 6x^2$

c) $f(x) = (2x^3 - 4)(x^4 + x)$

d) $f(x) = (x^3 + x^2 - 4)(4x^4 - x^2)$

e) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 4\sqrt{x})$

Pochodna ilorazu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x oraz $g(x) \neq 0$, to:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Przykład 4

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \text{ dla } x \neq 1$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że jeśli funkcja g ma pochodną w punkcie x i $g(x) \neq 0$, to prawdziwy jest wzór podany obok.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ćwiczenie 6

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}-4}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = -3x^2 + x + 4$

b) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

c) $f(x) = 2x^3 + 4x - 6$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - 3x$

2. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

c) $f(x) = (1 - 3x^2)(x^2 + x)$

d) $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 - 5)$

e) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

f) $f(x) = (x - 2)^2(1 - x^2)$

3. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

a) $f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}$ e) $f(x)=\frac{6x+2}{1-x^2}$ i) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{1-x}$

b) $f(x)=\frac{x^2}{1-2x}$ f) $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$ j) $f(x)=\frac{1}{5x-1}+\frac{1}{x}$

c) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2}$ g) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$ k) $f(x)=\frac{1}{1-x^4}-\frac{2}{x^3}$

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{3x-1}$ h) $f(x)=\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ l) $f(x)=\frac{3}{x^3-2}-\frac{1}{4x^4}$

4. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej. Oblicz $f'(1)$ i $f'(4)$.

a) $f(x)=\sqrt{x}\,(1-2x^2)$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ e) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt[4]{x}$

b) $f(x)=(\sqrt{x}+1)(x-5)$ d) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ f) $f(x)=\sqrt{x}(x+\sqrt[4]{x})$

D **5.** Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną sumy funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną sumy funkcji f i g w punkcie x_0.

$$(f(x_0)+g(x_0))'=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]+[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną różnicy funkcji.

D **6.** Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną iloczynu funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną iloczynu funkcji f i g w punkcie x_0.

$$(f(x_0)\cdot g(x_0))'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną ilorazu funkcji.

7. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x^2}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+3}$, $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}$, $x_0 = 2$

d) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-9}$, $x_0 = 4$

8. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x-1}$, $x_0 = -1$

e) $f(x) = x\sqrt{x} + 4$, $x_0 = 4$

f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

g) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1}$, $x_0 = -1$

h) $f(x) = \frac{x^2+4}{(x+2)^2}$, $x_0 = 2$

9. Czy istnieje prosta o współczynniku kierunkowym równym a styczna do wykresu funkcji f?

a) $a = 0$, $f(x) = (x^3 + 1)(4 - x)$

b) $a = -1$, $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$

c) $a = 2$, $f(x) = \sqrt{x} + x$

d) $a = 0$, $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$

10. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f równoległych do prostej $y = -2x + 3$.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

Twierdzenie

Każda z funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens i cotangens ma pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny.

$(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbf{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$

11. Oblicz $f'(\frac{\pi}{3})$ i $f'(\frac{\pi}{4})$.

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x$ d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

12. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \sin x \cos x$

b) $f(x) = (2x + 1)\sin x$

c) $f(x) = (x^2 + 3)\operatorname{tg} x$

d) $f(x) = \sin^2 x$

e) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$

f) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

g) $f(x) = \cos^2 x$

h) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

i) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

*4.11. Pochodna funkcji złożonej

Aby obliczyć wartość funkcji $h(x) = \sqrt{2x-6}$ dla argumentu $x \in \langle 3; \infty)$, wykonujemy kolejno operacje: najpierw mnożymy ten argument przez 2 i odejmujemy 6, a następnie obliczamy pierwiastek kwadratowy z otrzymanej liczby. Funkcja h jest **złożeniem** dwóch funkcji: $f(x) = 2x - 6$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\boxed{x} \xrightarrow{f} \boxed{2x-6} \xrightarrow{g} \boxed{\sqrt{2x-6}}$$

Na przykład dla $x = 5$: $5 \xrightarrow{f} 2 \cdot 5 - 6 \xrightarrow{g} \sqrt{4}$, zatem $h(5) = 2$.

Definicja

Jeśli $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to T$, to funkcję $h\colon X \to T$ określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** funkcji f i g.

Funkcję f nazywamy **funkcją wewnętrzną**, funkcję g – **funkcją zewnętrzną**.

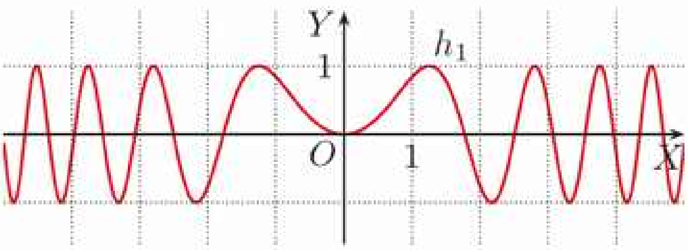
Złożenie funkcji f i g można również zapisać: $(g \circ f)(x)$.

Uwaga. Składanie funkcji nie jest operacją przemienną – funkcje $f \circ g$ oraz $g \circ f$ nie muszą być równe.

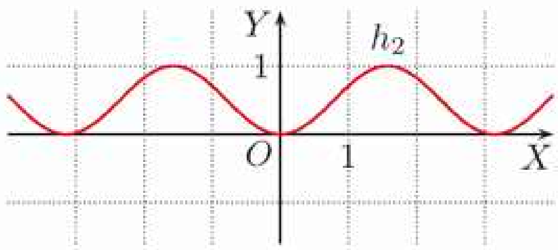
Przykład 1

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji złożonych:

$h_1(x) = g(f(x)) = \sin x^2$



$h_2(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$



Przykład 2

Podaj dziedzinę i wzór funkcji złożonej h, jeśli f jest funkcją wewnętrzną, a g – funkcją zewnętrzną.

a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$

$D_h = \langle 2; \infty)$, $h(x) = g(f(x)) = g(x-2) = \sqrt{x-2}$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$

$D_h = \langle 0; \infty)$, $h(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$.

Ćwiczenie 1

Podaj wzór funkcji $h(x) = g(f(x))$. Określ dziedzinę funkcji h.

a) $f(x) = x^2 + 4,\ \ g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 1,\ \ g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = 2x - 4$

d) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = \frac{1}{x}$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $h = g \circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 oraz:

$$h'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Przykład 3

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (2x + 1)^3$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^3$, zatem:

$$h'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot (2x+1)' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 =$$
$$= 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6$$

Pochodną funkcji h można również wyznaczyć, korzystając z tego, że:

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (3x^2 + 1)^5$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 3x^2 + 1$ i $g(x) = x^5$, zatem:

$$h'(x) = 5(3x^2+1)^4 \cdot (3x^2+1)' = 5(3x^2+1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2+1)^4$$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji h.

a) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

b) $h(x) = (x^2 - 3x)^4$

c) $h(x) = (3x^2 + x)^5$

d) $h(x) = (4x + 6)^6$

Przykład 4

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$, zatem:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$.

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+2x^2}} \cdot (x^4+2x^2)' = \frac{4x^3+4x}{2\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x(x^2+1)}{|x|\sqrt{x^2+2}}$$

Zauważ, że dziedziną funkcji h jest $\mathbf{R}$, a dziedziną funkcji h' – $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji h. Określ dziedziny funkcji h i h'.

a) $h(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$

b) $h(x) = \sqrt{3x^2 + x}$

c) $h(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

d) $h(x) = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = (x+1)^3$

b) $f(x) = (1 + x^2)^4$

c) $f(x) = (1 - x)^5$

d) $f(x) = (4x^2 + 2)^3$

e) $f(x) = (3x + 2)^5$

f) $f(x) = (5x^4 - 6x + 2)^6$

2. Wyznacz pochodną funkcji f. Określ dziedziny funkcji f i f'.

a) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{6x^2 + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 6x}$

e) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

3. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$.

a) $f(x) = (7x - 1)^3(2x + 1)^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)^2(3 - x)^2$

c) $f(x) = x^2\sqrt{4x + 1}$

d) $f(x) = x^3\sqrt{1 - 4x}$

4. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(1)$.

a) $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{3x+1}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

5. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Oblicz $h'(1)$, jeżeli:

a) $h = f \circ g$,

b) $h = g \circ f$.

6. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 4}$, $x_0 = -1$

7. Rozwiąż równanie $f(g(x)) = g(f(x))$, jeśli $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = \frac{1}{x}$.

8. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \sin 4x$

b) $f(x) = \cos 5x$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(6x - 1)$

d) $f(x) = \sin x^2$

e) $f(x) = \cos x^2$

f) $f(x) = \sin(x^3 - 1)$

g) $f(x) = \cos(x^2 - 1)$

h) $f(x) = \sin^2 x$

i) $f(x) = \cos^2 x$

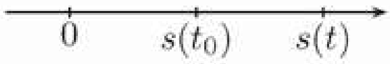
j) $f(x) = \sin^3 x$

k) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - x^3)$

l) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

*4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej

Przypuśćmy, że punkt materialny (lub krótko punkt) porusza się po osi liczbowej, a funkcja s opisuje jego położenie w chwili t.



Prędkość średnia punktu w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

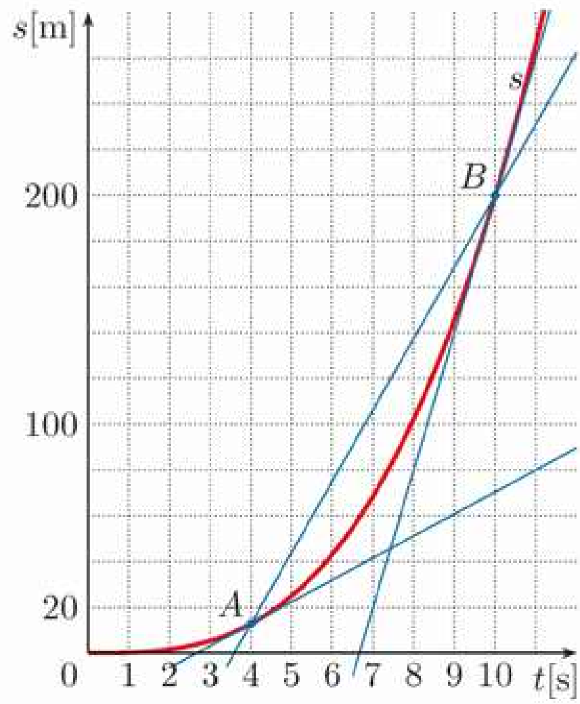
Prędkość w chwili t_0, czyli prędkość chwilową $v(t_0)$, określamy jako granicę ilorazu różnicowego przy t dążącym do t_0:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Zatem $v(t_0) = s'(t_0)$, czyli prędkość chwilowa jest pochodną położenia względem czasu.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji s opisującej położenie punktu poruszającego się po prostej w zależności od czasu t.



• Współczynnik kierunkowy siecznej AB wykresu funkcji s jest równy prędkości średniej od chwili $t_0 = 4$ do chwili $t = 10$:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s(10)-s(4)}{10-4}$$

• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie A jest równy prędkości w chwili $t_0 = 4$:

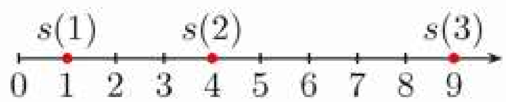
$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = s'(4)$$

• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie B jest równy prędkości w chwili $t = 10$:

$$v(10) = \lim_{t \to 10} \frac{s(t)-s(10)}{t-10} = s'(10)$$

Ćwiczenie 1

Położenie punktu na osi liczbowej w chwili t opisuje wzór $s(t) = t^2$. Niech $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. Oblicz prędkość średnią od chwili t_1 do chwili t_3 oraz prędkości w chwilach t_1, t_2 i t_3.



Jeżeli ciało wyrzucono pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową v_0, to funkcje $h(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$ oraz $v(t) = v_0 - gt$ opisują odpowiednio wysokość h, na której znajduje się ciało w chwili t, oraz prędkość v, z którą porusza się ono w chwili t ($g \approx 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ jest przyspieszeniem ziemskim).

Przykład 2

Metalowa kula została wystrzelona pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową $v_0 = 29{,}4$ m/s. Po podstawieniu wartości v_0 i g do wzoru:

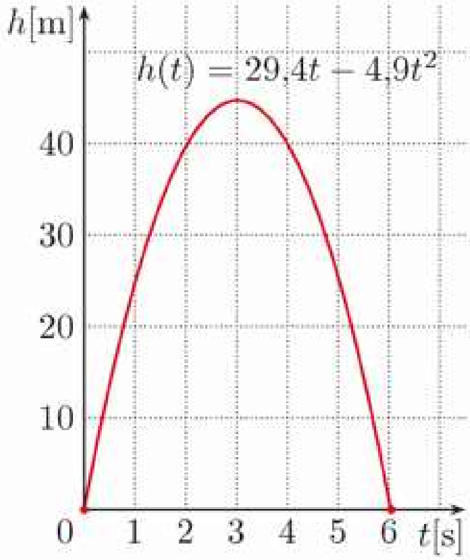
$$h(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

otrzymujemy funkcję:

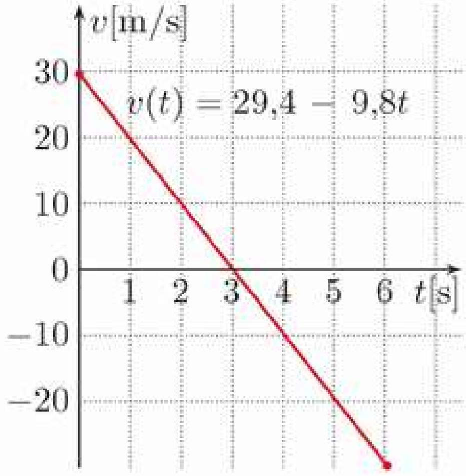
$$h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$$

opisującą wysokość, na której znajduje się kula w chwili t. W tabeli podano wysokości, na których znajdowała się kula w kolejnych sekundach.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
h[m]	0	24,5	39,2	44,1	39,2	24,5	0



Wykres funkcji h opisującej wysokość, na której znajdowała się kula w chwili t.



Wykres funkcji v opisującej prędkość, z którą poruszała się kula w chwili t.

Ćwiczenie 2

a) Sprawdź, czy jeśli funkcja h dana jest wzorem $h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$, to jej pochodną jest funkcja $v(t) = 29{,}4 - 9{,}8t$.

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wpisując prędkości metalowej kuli z przykładu 2. w kolejnych sekundach.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
v[m/s]	?	?	?	?	?	?	?

Pojawienie się znaku minus w obliczeniach (dla $t = 4$) świadczy o zmianie zwrotu wektora prędkości – kula najpierw poruszała się w górę, a potem w dół.

Zadania

1. Przyjmując, że drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało opisuje funkcja $s(t) = 4{,}9 \cdot t^2$ (gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach), oblicz prędkości ciała w chwilach $t_1 = 1$ i $t_2 = 3$. Odpowiedź podaj w m/s i w km/h.

2. Na Marsie przyspieszenie grawitacyjne wynosi około 3,7 $\mathrm{m/s^2}$, zatem funkcję opisującą drogę przebytą przez swobodnie spadające ciało można przedstawić w postaci $s(t) = 1{,}85t^2$, gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach. Oblicz prędkości w chwili $t = 4$, jakie osiągnie swobodnie spadające ciało na Ziemi oraz na Marsie. Odpowiedź podaj w km/h.

3. Ciało wyrzucone pionowo w górę z powierzchni Marsa z prędkością początkową $v_0 = 18{,}5$ m/s znajduje się w chwili t na wysokości:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

Oblicz prędkość, z którą poruszało się to ciało w chwili $t = 5$.

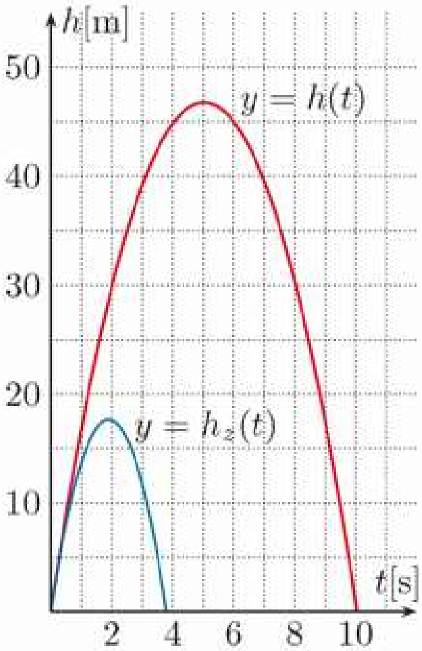
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

oraz dla porównania wykres funkcji:

$$h_z(t) = 18{,}5t - 4{,}9t^2$$

opisującej wysokość, na jakiej znajdowałoby się w chwili t ciało wyrzucone z tą samą prędkością początkową z powierzchni Ziemi.



Czy wiesz, że...

Przypuśćmy, że punkt porusza się po osi liczbowej, a funkcja v opisuje jego prędkość w zależności od czasu t.

$0 \quad v(t_0) \quad v(t)$

Przyspieszenie średnie w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$a_{\text{śr}} = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

Przyspieszenie $a(t_0)$ w chwili t_0 jest pochodną prędkości:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

4. Prędkość, z którą punkt porusza się po osi liczbowej, jest wyrażona za pomocą funkcji v. Oblicz przyspieszenia w chwilach $t = 1$ oraz $t = 4$.

a) $v(t) = 4t$ b) $v(t) = t^2 - t$ c) $v(t) = t^3 - 4t^2 + t$

5. Wysokość w metrach, na jakiej znajduje się kula wystrzelona pionowo w górę, jest opisana za pomocą funkcji $h(t) = 24{,}5t - 4{,}9t^2$. Wyznacz funkcję opisującą prędkość oraz funkcję opisującą przyspieszenie tej kuli.

Rachunek różniczkowy i całkowy

Rachunek pochodnych (zwany także rachunkiem różniczkowym) stworzono w XVII w. Wraz z powiązanym z nim rachunkiem całkowym stał się podstawą rozwoju fizyki klasycznej i astronomii. Umożliwił m.in. opis ruchu ciał (w tym planet) za pomocą równań wiążących ze sobą wielkości takie jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Za twórców rachunku różniczkowego i całkowego uważa się dwóch uczonych: Isaaca Newtona [czyt. izaaka niutona] i Gottfrieda Leibniza [czyt. gotfrida lajbnica].

Sir Isaac Newton (1643–1727)

Matematyk, fizyk i astronom angielski. Stworzył rachunek różniczkowy przy okazji prowadzonych badań – było to dla niego użyteczne narzędzie, które umożliwiło mu ścisłe sformułowanie praw fizyki dotyczących ruchu ciał oraz prawa powszechnego ciążenia. Z prac Newtona można się dowiedzieć, w jaki sposób to narzędzie wykorzystywał, nie ma w nich jednak żadnego wykładu teoretycznego na temat rachunku różniczkowego i całkowego.

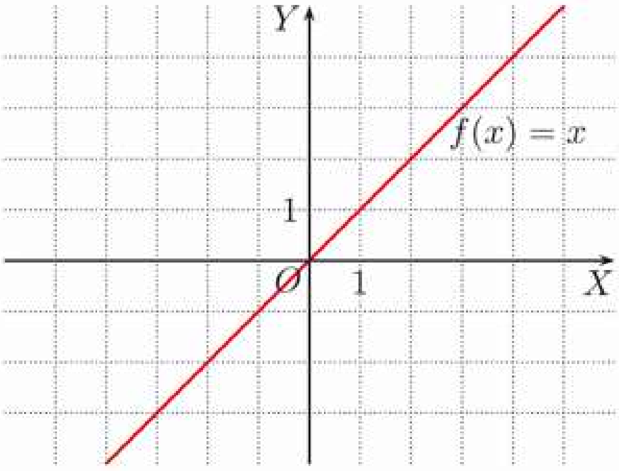
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Niemiecki filozof i matematyk. Pierwszą pracę dotyczącą rachunku różniczkowego i całkowego opublikował w 1684 r. Przedstawił w niej m.in. reguły różniczkowania iloczynu i ilorazu funkcji oraz wzór na pochodną funkcji potęgowej. Opublikowanie tej pracy przez Leibniza wywołało w Anglii ostre dyskusje. Oskarżono go o plagiat – zarzucano mu, że poznał metody Newtona podczas pobytu w Londynie w 1673 r. Spór trwał nawet po śmierci uczonych. Dziś przyjmuje się, że Newton i Leibniz dokonali tego odkrycia niezależnie.

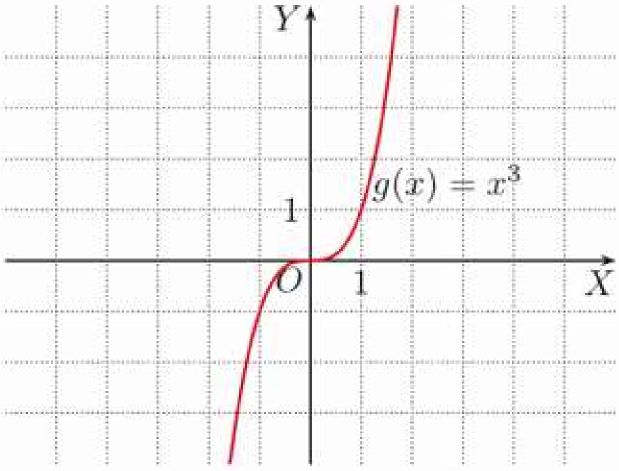
Rachunek różniczkowy umożliwił opisywanie zjawisk zmieniających się w czasie.

*4.13. Monotoniczność funkcji

Przykład 1



Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = x$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = 1$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.



Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = x^3$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $g'(x) = 3x^2$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $g'(x) \geqslant 0$.

Ogólnie prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest rosnąca i ma pochodną, to $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.
- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest malejąca i ma pochodną, to $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.

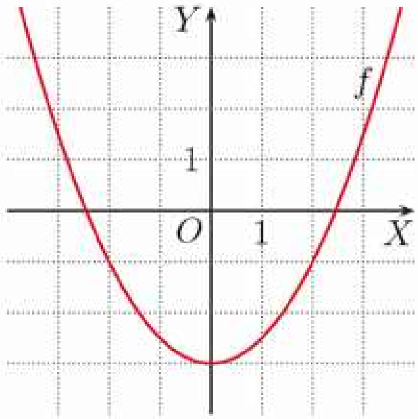
Uwaga. Przypomnijmy, że pochodna funkcji stałej w pewnym przedziale jest w tym przedziale równa 0.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (wykres obok):

- jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$,
- jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = x$.
Dla $x \in (-\infty; 0\rangle$ zachodzi nierówność $f'(x) \leqslant 0$, a dla $x \in \langle 0; \infty)$ – nierówność $f'(x) \geqslant 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i podaj jej przedziały monotoniczności. Określ znak pochodnej funkcji f w tych przedziałach.

Czy na podstawie znaku pochodnej można wnioskować o monotoniczności funkcji? Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

- Jeżeli pochodna funkcji f jest dodatnia w przedziale $(a;b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji f jest ujemna w przedziale $(a;b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 3

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Wyznaczamy pochodną: $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

Rozwiązania nierówności $(x+3)(x-1) > 0$ i nierówności $(x+3)(x-1) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej:

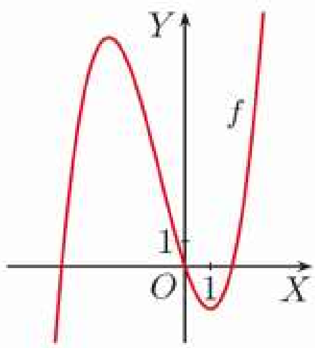
$f'(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

$f'(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (-3; 1)$

Na podstawie twierdzenia wnioskujemy, że funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; -3)$ oraz $(1; \infty)$, a maleje w przedziale $(-3; 1)$.

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a;b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a;b\rangle$.

Funkcja f z przykładu 3. jest wielomianem, czyli jest funkcją ciągłą, zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -3\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -3; 1\rangle$ (wykres obok).



D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja:

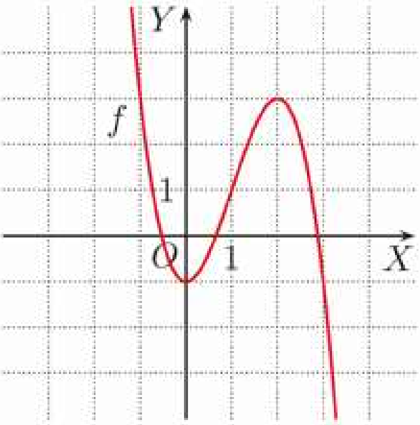
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$,

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

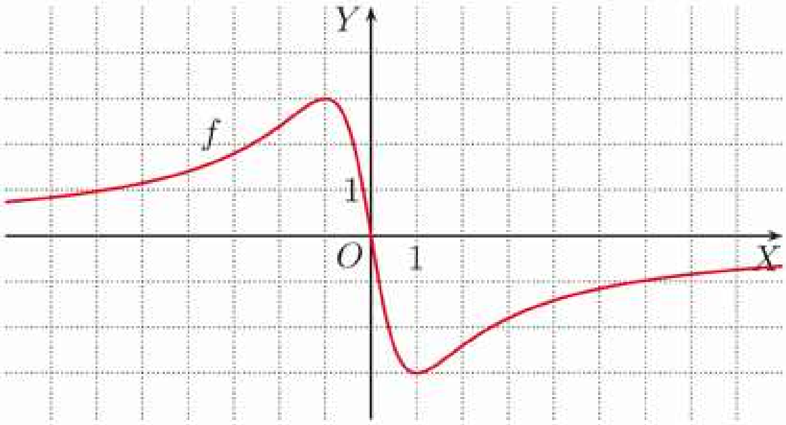
Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu jej przedziały monotoniczności. Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$



b) $f(x) = -\frac{6x}{x^2+1}$



Ćwiczenie 4

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 5$
b) $f(x) = x^5 - 20x + 1$
c) $f(x) = (x^2-4)(x^2-1)$
d) $f(x) = (x+3)^2(x-1)$
e) $f(x) = 6x^5 + 5x^3$
f) $f(x) = x^3 - 4x^2$

Ćwiczenie 5

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$
b) $f(x) = \frac{x+1}{x+8}$
c) $f(x) = \frac{x^2-7}{x-4}$

Zadania

D **1.** Wykaż, że funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = x^3 + 6x + 8$
b) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$
c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$
d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x$
e) $f(x) = x^5 + x$
f) $f(x) = 3x^5 + 4x$

D **2.** Wykaż, że funkcja f jest malejąca.

a) $f(x) = -x^3 - x$
b) $f(x) = -2x^3 - 15x$
c) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 7x$
d) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x$
e) $f(x) = -2x^5 - x$
f) $f(x) = -x^7 - 4x$

3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$
b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
c) $f(x) = x^3 + 9x^2 - 21x - 4$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 1$
e) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5$
f) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x$
g) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 2$
h) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 24x$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

b) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$

e) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$

g) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{5-x}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

i) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

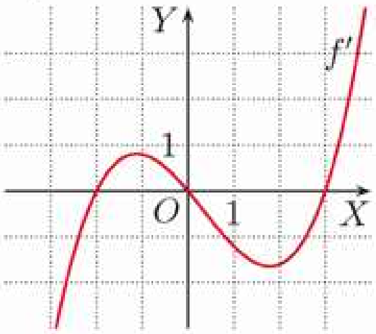
j) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2-1}$

k) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$

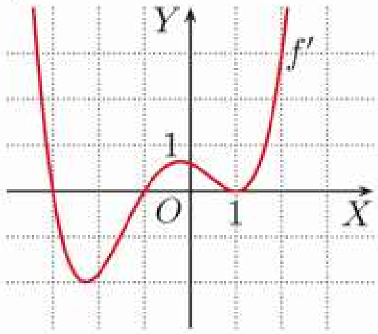
l) $f(x) = \frac{2x^2}{(x+3)^2}$

5. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f na podstawie wykresu jej pochodnej.

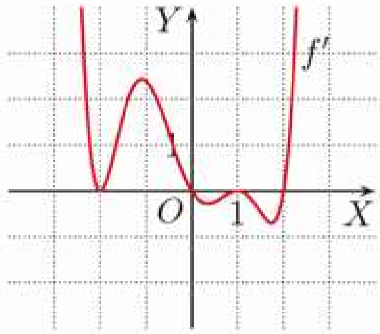
a)



b)



c)



6. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx + 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + 19$

c) $f(x) = x^3 + (k+2)x - 10$

d) $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 7$

7. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 14$

b) $f(x) = -5x^3 + kx + 10$

D **8.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$.
>
> Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.
>
> $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$
>
> $f'(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0; \frac{\pi}{2})$.
>
> Zauważmy, że $f(0) = 0$, więc $f(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
>
> Zatem dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ spełniona jest nierówność $\operatorname{tg} x > x$.

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność:

a) $\sin x < x$,

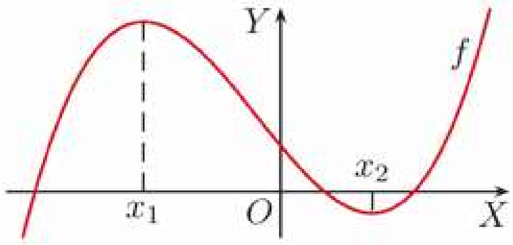
*b) $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3$.

*4.14. Ekstrema funkcji

Definicja

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **minimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.
Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **maksimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.

Minima lokalne i maksima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi** (lub po prostu ekstremami).
Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji f. Ma ona maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2.

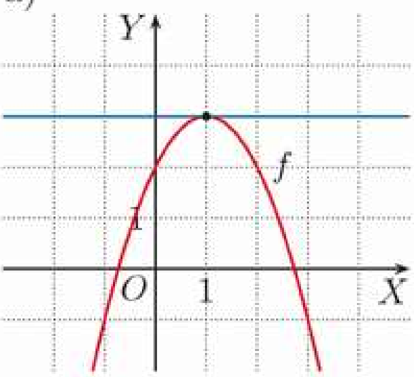


Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

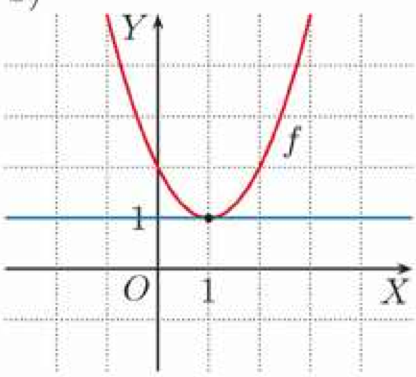
Przykład 1

a)



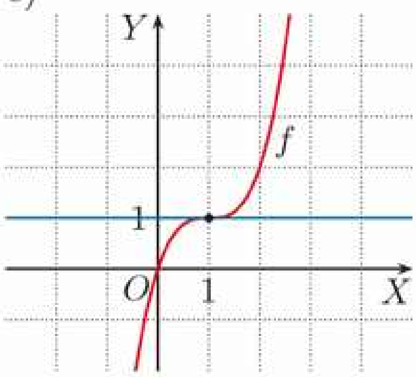
Funkcja $f(x) = -(x-1)^2+3$ osiąga maksimum w punkcie $x_0 = 1$.

b)



Funkcja $f(x) = (x-1)^2 + 1$ osiąga minimum w punkcie $x_0 = 1$.

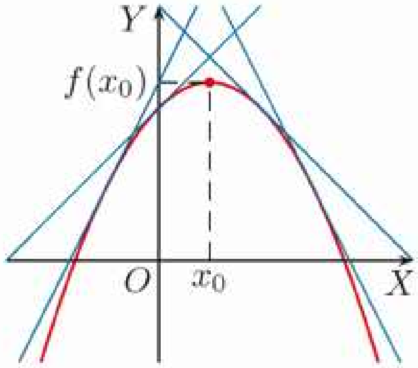
c)



Funkcja $f(x) = (x-1)^3 + 1$ nie ma ekstremum w punkcie $x_0 = 1$.

Zwróć uwagę na to, że wprawdzie wszystkie funkcje w powyższym przykładzie mają w punkcie $x_0 = 1$ pochodną równą 0 (styczna do wykresu funkcji jest dla $x_0 = 1$ równoległa do osi OX), ale tylko w podpunktach a) i b) funkcje mają w tym punkcie ekstremum.

Warunek $f'(x_0) = 0$ jest dla funkcji różniczkowalnej **warunkiem koniecznym istnienia ekstremum**, nie jest natomiast **warunkiem wystarczającym** (dostatecznym).



- Jeśli funkcja $f:(a;b) \to \mathbf{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a; x_0\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja $f:(a;b) \to \mathbf{R}$ jest malejąca w przedziale $(a; x_0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 minimum.

W przypadku funkcji różniczkowalnej o tym, czy funkcja rośnie, czy maleje w danym przedziale, można wnioskować na podstawie znaku pochodnej.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 minimum.

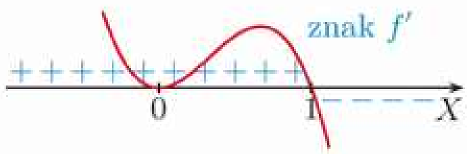
Uwaga. Często mówimy krótko, że jeżeli pochodna funkcji f zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma w tym punkcie maksimum, a jeżeli z ujemnego na dodatni, to funkcja ma w tym punkcie minimum.
Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i pochodna funkcji f w punkcie x_0 nie zmienia znaku, to w punkcie tym funkcja nie ma ekstremum.

Przykład 2

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

$f'(x) = -12x^3 + 12x^2$ Wyznaczamy pochodną funkcji f.

$f'(x) = 0$, gdy $-12x^3 + 12x^2 = 0$, czyli dla $x \in \{0, 1\}$ Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.



Rozwiązania nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej.

Zatem funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ ma maksimum w punkcie $x_0 = 1$. Jest ono równe $f(1) = -3 + 4 = 1$.

Korzystamy z warunku dostatecznego istnienia ekstremum (w $x_0 = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny).

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ nie ma ekstremum, gdyż pochodna nie zmienia w tym punkcie znaku.

Ćwiczenie 1

Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ d) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4$ g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 8x$ f) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 6$ i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 7$ nie ma ekstremum.

Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = x^2 - 4x + 4$ i znajdujemy jej miejsca zerowe:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \text{ dla } x = 2$$

Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = 2$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \neq 2$. Zatem funkcja f jest funkcją rosnącą w $\mathbf{R}$, więc nie ma ekstremum.

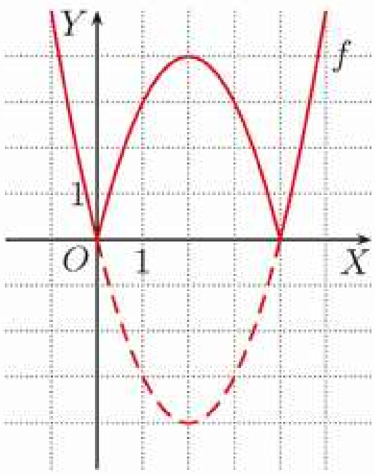
D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = -x^3 - 3x + 10$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ c) $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |(x-2)^2 - 4|$. Podaj jej ekstrema.



Z wykresu funkcji f odczytujemy, że ma ona jedno maksimum dla $x = 2$, $f(2) = 4$, oraz dwa minima dla $x = 0$, $f(0) = 0$, i dla $x = 4$, $f(4) = 0$.

Uwaga. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punktach $x = 0$ oraz $x = 4$.

Z istnienia ekstremum w punkcie x_0 **nie wynika** istnienie pochodnej w x_0 (ale jeśli pochodna istnieje, to musi być równa 0).

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj punkty, w których funkcja osiąga ekstrema. Określ, czy są to maksima, czy minima. Czy istnieje styczna do wykresu w tych punktach? Czy istnieje pochodna funkcji w tych punktach?

a) $f(x) = -|x|$ b) $f(x) = |x^2 - 4|$ c) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

Zadania

1. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = -x^3+3x^2+9x$ d) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 6$ g) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

b) $f(x) = x^3 - 12x - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 3$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 10x$ f) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 1$ i) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

2. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$ c) $f(x) = \frac{-x^2+9}{x+5}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ d) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ f) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-4}$

D **3.** Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x$ b) $f(x) = 2x^3-4x^2+3x$ c) $f(x) = -x^3 - x$

4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f osiąga minimum w punkcie $x_0 = 2$?

a) $f(x) = x^3 + 3mx^2 - 7$ b) $f(x) = x^3 - mx^2 + 6x$

5. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0? Określ rodzaj tego ekstremum.

a) $f(x) = mx^3 - x^2 + x + 3,\ \ x_0 = -1$

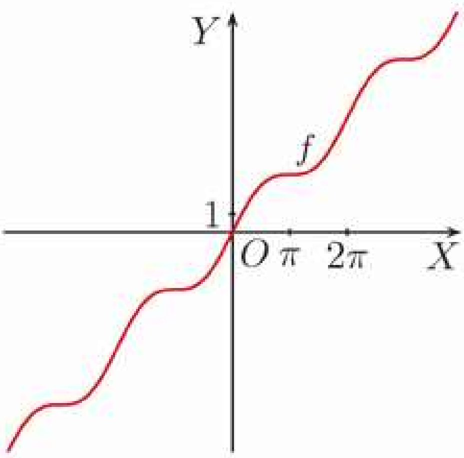
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5x - 3,\ \ x_0 = 1$

6. Dla jakich wartości parametru a funkcja f nie ma ekstremum?

a) $f(x) = -x^3 + ax$ b) $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ c) $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2-9}$

7. a) Wyznacz wartości a i b, dla których funkcja $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x-5}$ osiąga ekstremum równe 1 w punkcie $x_0 = 3$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum. Czy jest to jedyne ekstremum lokalne tej funkcji?

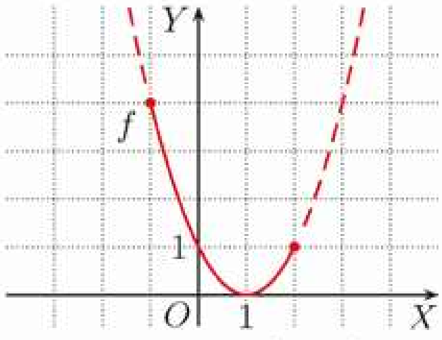
b) Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ osiąga ekstremum równe -1 dla $x = 2$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum.



D **8.** Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (wykres obok) nie ma ekstremum, mimo że dla nieskończenie wielu argumentów x zachodzi równość $f'(x) = 0$.

*4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

Przypomnijmy, że jeśli funkcja ciągła f określona jest w przedziale domkniętym, to przyjmuje w tym przedziale wartości najmniejszą i największą.



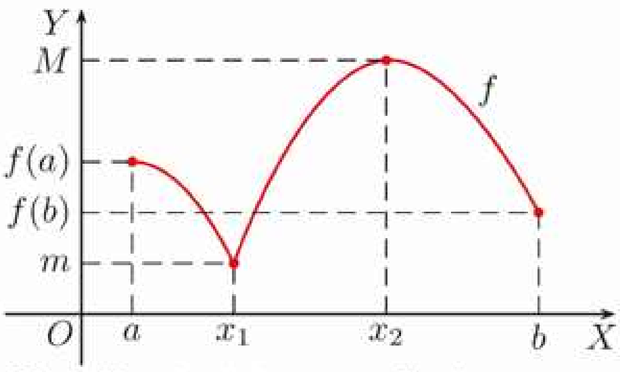
Wykres funkcji $f\colon \langle -1; 2\rangle \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = (x-1)^2$

Ćwiczenie 1

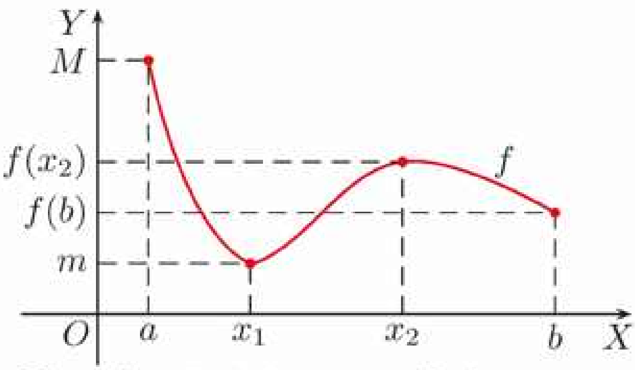
Podaj wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = (x-1)^2$ w przedziale:

a) $\langle -1; 2\rangle$ (rysunek obok), b) $\langle 2; 4\rangle$.

Wartością najmniejszą (największą) funkcji ciągłej f w przedziale $\langle a; b\rangle$ może być jedna z liczb $f(a)$, $f(b)$ lub jedno z ekstremów lokalnych.



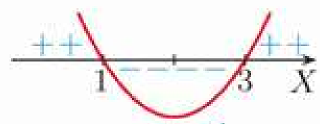
Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(x_2)$



Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(a)$

Przykład 1

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale $\langle -1; 4\rangle$.



znak f'

Wyznaczamy pochodną funkcji:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3\}$ – obie wartości należą do przedziału $\langle -1; 4\rangle$.

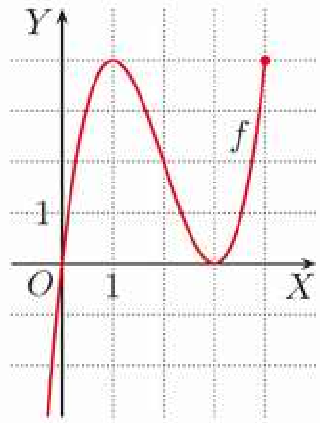
W punkcie $x_1 = 1$ funkcja osiąga maksimum: $f(1) = 4$.

W punkcie $x_2 = 3$ funkcja osiąga minimum: $f(3) = 0$.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(-1) = -16, \quad f(4) = 4$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji w przedziale $\langle -1; 4\rangle$ jest -16, a największą 4 – wartość ta przyjmowana jest dwukrotnie.



Ćwiczenie 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$, $\langle 1; 4\rangle$

b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$, $\langle 0; 2\rangle$

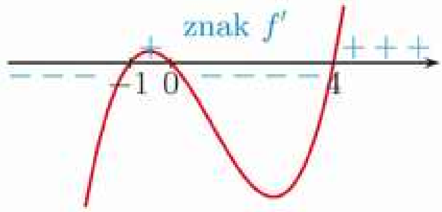
Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ w przedziale $\langle -2; 8\rangle$.

Wyznaczamy pochodną funkcji.

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}x(x^2 - 3x - 4) = \frac{1}{4}x(x+1)(x-4)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 0, 4\}$.



Na rysunku obok przedstawiono zmianę znaku pochodnej w tych punktach.
Funkcja f posiada minima lokalne w punktach $x = -1$ i $x = 4$ oraz maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.

Obliczamy wartości funkcji dla tych argumentów: $f(-1) = -\frac{3}{16}$, $f(0) = 0$, $f(4) = -8$ oraz wartości funkcji na końcach przedziału $\langle -2; 8\rangle$: $f(-2) = 1$, $f(8) = 96$.

Zatem najmniejsza wartość funkcji jest równa -8, a największa 96.

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^4 - 4x$, $\langle 0; 2\rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\langle 1; 3\rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$, $\langle -2; 2\rangle$

d) $f(x) = \frac{-4x}{x^2-4x+5}$, $\langle -3; 0\rangle$

Czy wiesz, że...

Odkrycie warunku koniecznego istnienia ekstremum przypisuje się francuskiemu uczonemu Pierre'owi de Fermatowi (1601 lub 1607–1665), który dzięki swoim dokonaniom jest uważany za jednego z prekursorów rachunku różniczkowego. W pracy *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* podał metodę znajdowania minimów i maksimów funkcji.

Zadania

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ w podanym przedziale.

a) $\langle -1; 3\rangle$ b) $\langle 1; 3\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$ d) $\langle -2; 4\rangle$

2. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 6x + 1, \ \langle -2; 0 \rangle$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6, \ \langle -2; 1 \rangle$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \ \langle -2; 4 \rangle$

d) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 6, \ \langle -2; 2 \rangle$

3. Oblicz wartości najmniejszą i największą funkcji f o dziedzinie D. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3}, \ D = \langle -1; 1 \rangle$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}, \ D = \langle 4; 7 \rangle$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}, \ D = \langle 1; 2 \rangle$

d) $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \ D = \langle -3; 3 \rangle$

e) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \ D = \langle -2; 3 \rangle$

f) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}, \ D = \langle -1; 2 \rangle$

4. Dla jakiej wartości parametru p najmniejsza wartość funkcji:

$$f(x) = x^4 - 4x + p$$

w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ jest równa 4?

5. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$?

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = m$

b) $x^5 - 5x + 4 = m$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$?

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź najpierw wartości największą i najmniejszą funkcji $g(x) = x^3 - 6x$ w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.

7. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie?

a) $3 \cos x - 4 \cos^3 x = m$

b) $2 \sin^3 x - 3 \sin x = m$

Wskazówka. W podpunkcie a) podstaw $t = \cos x$.

Czy wiesz, że...

Oznaczenie pochodnej funkcji f symbolem f' wprowadził francuski matematyk i fizyk Joseph Louis de Lagrange [czyt. lagranż] (1736–1813).

Inne używane oznaczenia pochodnej:

$\dot{f}$ – wprowadzone przez Isaaka Newtona (często stosowane przez fizyków),

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ – wprowadzone przez Gottfrieda Wilhelma Leibniza,

$\mathrm{D}_x f$ – wprowadzone przez Leonharda Eulera [czyt. ojlera] (1707–1783).

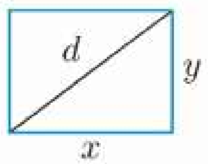
*4.16. Zagadnienia optymalizacyjne

Jednym z najczęstszych zastosowań rachunku różniczkowego jest jego wykorzystanie do wyznaczania wartości największej lub najmniejszej – zagadnienia takie będziemy nazywać **zagadnieniami optymalizacyjnymi**.
Jeśli mamy wyznaczyć największą (najmniejszą) wartość funkcji kwadratowej, to zamiast korzystać z rachunku różniczkowego, możemy skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 1

Który z prostokątów o obwodzie 12 cm ma najkrótszą przekątną? Jaka jest jej długość?

Oznaczamy długości boków prostokąta przez x i y, a długość jego przekątnej przez d, wówczas:



Wykonujemy (jeśli to możliwe) rysunek i wprowadzamy oznaczenia literowe.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oraz

$$2x + 2y = 12$$

stąd $x + y = 6$, czyli $y = 6 - x$.
Zauważmy, że: $0 < x < 6$ i $0 < y < 6$.

Piszemy równanie wyrażające wielkość, której najmniejszą (największą) wartość chcemy wyznaczyć za pomocą innych zmiennych, oraz inne równania wynikające z treści zadania.

Zatem długość przekątnej w zależności od x opisana jest przez funkcję:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$$

gdzie $x \in (0; 6)$.

Podstawiamy $y = 6 - x$ i otrzymujemy funkcję jednej zmiennej. Określamy dziedzinę tej funkcji.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji kwadratowej:

$$k(x) = 2x^2 - 12x + 36$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3, \quad k(3) = 18$$

Funkcje d i $k(x) = d^2(x)$ najmniejszą wartość przyjmują dla tego samego argumentu.

Czyli najmniejsza wartość funkcji d to $d(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$y = 6 - x = 3$, zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku 3 cm. Jego przekątna ma długość $3\sqrt{2}$ cm.

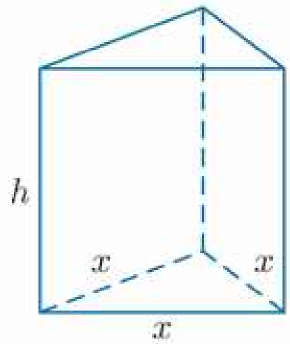
Ćwiczenie 1

a) Który z prostokątów o obwodzie 60 cm ma największe pole?

b) Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 16 cm i ramieniu 10 cm. Dwa wierzchołki prostokąta należą do podstawy tego trójkąta, pozostałe dwa do jego ramion. Wyznacz największe możliwe pole takiego prostokąta.

Przykład 2

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?



Długości krawędzi podstawy graniastosłupa oznaczamy przez x, a jego wysokość przez h. Pole podstawy, która jest trójkątem równobocznym, opisuje wzór:

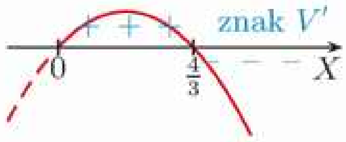
$$P = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa 12, czyli $6x+3h = 12$, stąd wyznaczamy wysokość $h = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$. Zatem:

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}(4-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x^2 - x^3)$$



Wyznaczamy pochodną funkcji V:

$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4x - 3x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(4-3x),\ D_{V'} = (0; 2)$$

$V'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ oraz $V'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

Funkcja V jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $\left(0; \frac{4}{3}\right\rangle$ i maleje w przedziale $\left\langle\frac{4}{3}; 2\right)$, czyli w punkcie $x_0 = \frac{4}{3}$ przyjmuje maksimum: $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Największa możliwa objętość takiego graniastosłupa jest równa $\frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

a) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

b) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 96. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego objętość była największa?

c) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?

Ćwiczenie 3

a) Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma długość 6 cm. Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego objętość była największa.

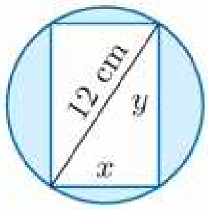
b) Objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa 27 cm^3. Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze.

Zadania

1. Który z prostokątów o polu 50 cm^2 ma najmniejszy obwód?

2. Powierzchnia zadrukowanej części kartki ma wynosić 192 cm^2. Marginesy górny i dolny mają mieć po 2 cm, a marginesy boczne – po 1,5 cm. Jakie powinny być wymiary tej kartki, aby jej powierzchnia była najmniejsza?

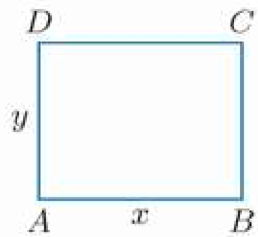
3. Prostokąt o bokach długości x i y jest wpisany w okrąg o średnicy równej 12 cm (rysunek obok). Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby iloczyn $x \cdot y^2$ miał największą wartość?



4. Właściciel hurtowni mebli ogrodowych poprosił swojego syna Karola o pomoc w rozwiązaniu następującego problemu. Należy ogrodzić prostokątny plac wystawowy o powierzchni 160 m^2. Trzy boki prostokąta mają być ogrodzone płotem drewnianym (koszt: 200 zł za metr bieżący płotu), a czwarty – ścianą z cegły (koszt: 800 zł za metr bieżący ściany). Jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby koszt ogrodzenia był najmniejszy?

W ramce poniżej podany jest fragment rozwiązania przedstawionego przez Karola. Dokończ to rozwiązanie.

Oznaczmy przez x i y boki prostokąta. Przyjmijmy, że ściana z cegły powstanie wzdłuż boku BC. Wówczas koszt ogrodzenia (w złotych) można przedstawić za pomocą wzoru:



$$k = (2x + y) \cdot 200 + y \cdot 800 = 400x + 1000y$$

Powierzchnia placu jest równa 160 m^2, czyli $x \cdot y = 160$, więc $y = \frac{160}{x}$.

Zatem należy znaleźć argument $x > 0$, dla którego funkcja:

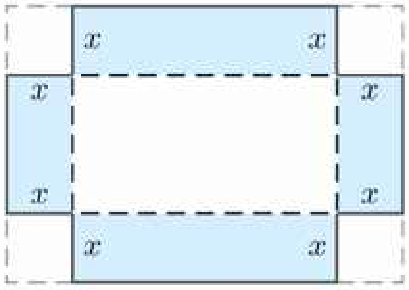
$$k(x) = 400x + \frac{160\,000}{x}$$

przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy pochodną funkcji k.

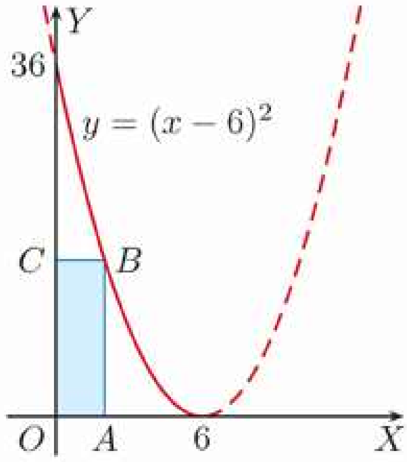
5. Pudełko w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 96 dm^3 ma zostać wykonane z dwóch rodzajów materiału. Materiał na dolną podstawę kosztuje 200 zł/m^2, zaś materiał na górną podstawę i ściany boczne – 100 zł/m^2. Jakie wymiary powinno mieć to pudełko, aby koszt jego wykonania był jak najmniejszy? Ile wyniesie koszt materiału potrzebnego na jego wykonanie?

6. W rogach prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 36 cm i 24 cm wycięto cztery przystające kwadraty. Następnie po zgięciu blachy wzdłuż linii zaznaczonych na rysunku otrzymano pudełko (bez górnej ścianki) o największej możliwej objętości. Oblicz wysokość pudełka.



7. Drut długości a dzielimy na dwie części. Z pierwszej wykonujemy szkielet sześcianu, a z drugiej – szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i polu ściany bocznej dwukrotnie większym niż pole podstawy. W jakiej proporcji należy podzielić ten drut, aby suma objętości tych brył była najmniejsza?

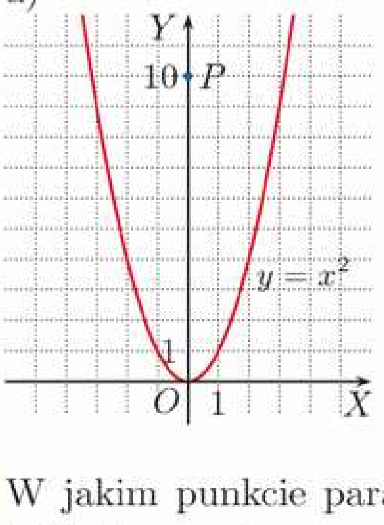
8. Wierzchołki A i C prostokąta $OABC$ należą do osi układu współrzędnych. Wierzchołek B należy do paraboli o równaniu $y = (x - 6)^2$, $x \in (0; 6)$ (rysunek obok). Dla jakiej długości boków tego prostokąta jego pole będzie największe?



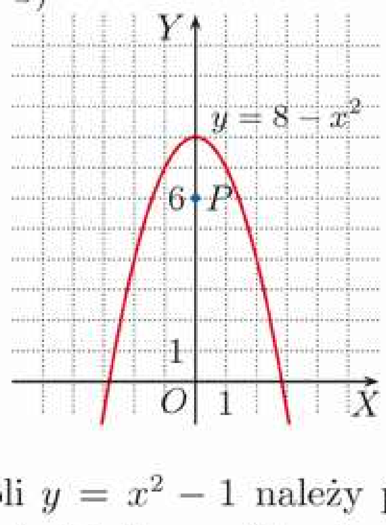
9. Wierzchołki trapezu należą do paraboli $y = -x^2 + 4$, przy czym końce dłuższej podstawy są punktami, w których parabola przecina oś OX. Wyznacz największe możliwe pole takiego trapezu.

10. Wyznacz punkty należące do paraboli, których odległość od punktu P jest najmniejsza.

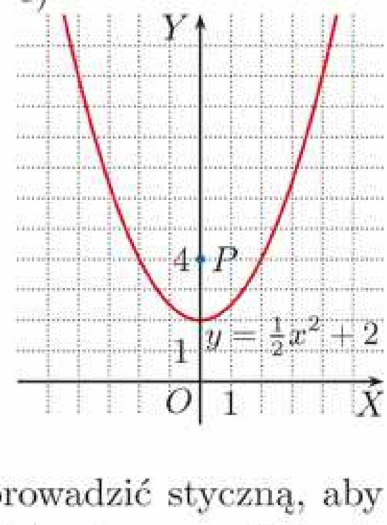
a)



b)



c)



11. W jakim punkcie paraboli $y = x^2 - 1$ należy poprowadzić styczną, aby trójkąt ograniczony osiami układu współrzędnych i tą styczną miał najmniejsze pole?

*4.17. Szkicowanie wykresu funkcji

Umiejętność obliczania granic oraz określania przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji na podstawie jej pochodnej pozwala naszkicować wykresy wielu funkcji. W tym celu badamy **przebieg zmienności funkcji**, postępując według następującego schematu.

1. Określamy dziedzinę funkcji.
2. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja jest określona, oraz wyznaczamy asymptoty wykresu funkcji, jeśli istnieją.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji i określamy jej dziedzinę.
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji.

Wszystkie otrzymane wyniki możemy zebrać w tabeli, a następnie naszkicować wykres funkcji.

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
   $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0,0)$.
   Aby znaleźć punkty, w których wykres przecina oś OX, rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$:
   $$\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3\left(\tfrac{1}{4}x - 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ lub } x = 4$$
   Zatem wykres funkcji f przecina oś OX w punktach $(0,0)$ i $(4,0)$.
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:
   $$\lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{x}\right) \overset{\left[\infty\cdot\frac{1}{4}\right]}{=} \infty$$
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{x}\right) \overset{\left[\infty\cdot\frac{1}{4}\right]}{=} \infty$$
   Zatem wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji f:
   $$f'(x) = \left(\tfrac{1}{4}x^4 - x^3\right)' = x^3 - 3x^2$$
   i określamy jej dziedzinę: $D_{f'} = \mathbf{R}$.

5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f.
Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

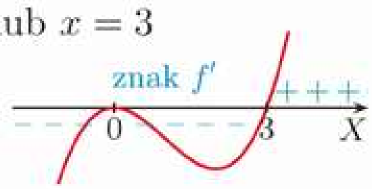
$$x^3 - 3x^2 = 0 \iff x^2(x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Ze szkicu wykresu f' (rysunek obok) odczytujemy rozwiązania nierówności:

$f'(x) > 0$ dla $x \in (3;\infty)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$.

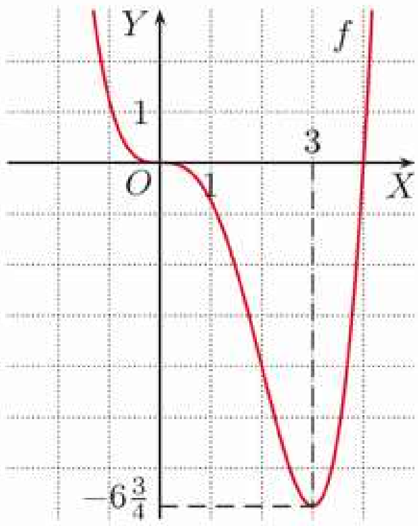
Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $\langle 3;\infty)$ i maleje w przedziale $(-\infty;3\rangle$. Dla $x_0 = 3$ funkcja osiąga minimum $f(3) = -6\frac{3}{4}$.



Otrzymane wyniki zbieramy w tabeli i szkicujemy wykres funkcji f (rysunek obok).

x	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$3<x<4$	4	$x>4$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\searrow$	$-6\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow \infty$

Strzałką $\searrow$ oznaczamy, że funkcja maleje, a strzałką $\nearrow$ – że rośnie.



Sprawdź otrzymany wykres, korzystając z odpowiedniego programu komputerowego.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ c) $f(x) = -x^4 + 2x^2$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbf{R}$.

2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
$f(0) = 1$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0,1)$.
Równanie $\frac{1}{x^2+1} = 0$ nie ma rozwiązań, więc wykres nie przecina osi OX.

3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ oraz } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$ i w ∞.

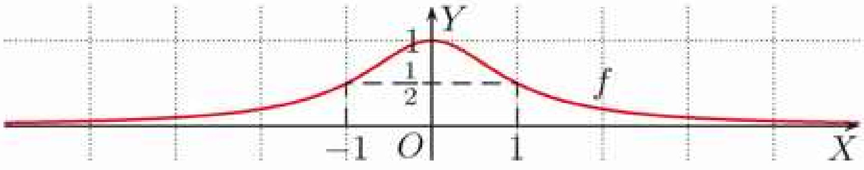
4. Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

oraz określamy jej dziedzinę: $D_{f'} = \mathbf{R}$.

5. Mianownik we wzorze pochodnej jest dodatni dla $x \in \mathbf{R}$, więc znak pochodnej ustalamy na podstawie licznika: $f'(x) > 0$ dla $x < 0$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > 0$. Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz maleje w przedziale $\langle 0; \infty)$. Dla $x_0 = 0$ funkcja osiąga maksimum $f(0) = 1$.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$



Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY.

Zwróć uwagę na to, że oprócz wykorzystania danych z tabeli warto wyznaczyć kilka dodatkowych punktów należących do wykresu funkcji, np. $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, \frac{1}{2})$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ b) $f(x) = \frac{9}{x^2-2x+4}$ c) $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$

Zadania

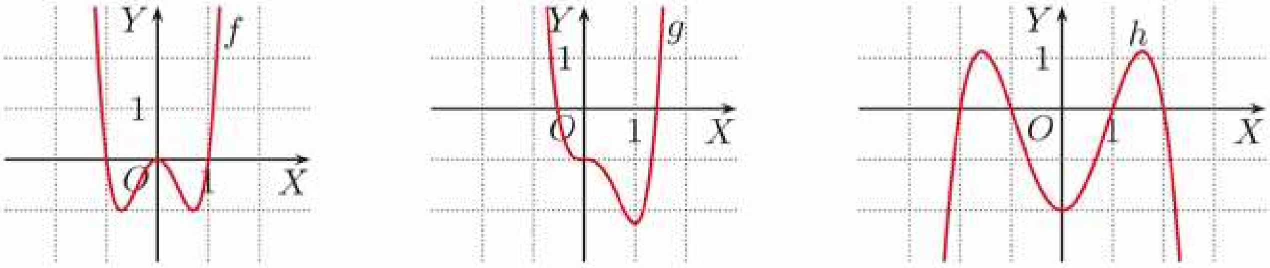
1. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ b) $f(x) = 6x^2 - x^4$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$

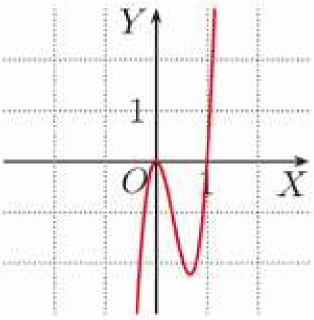
2. Naszkicuj wykres funkcji f.

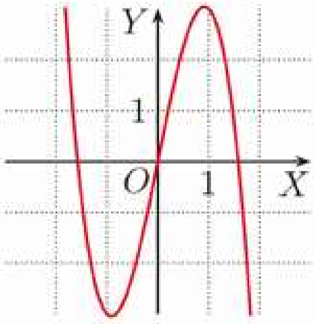
a) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^2+4}$ b) $f(x) = \frac{4}{x^2+2x+2}$ c) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+3}$

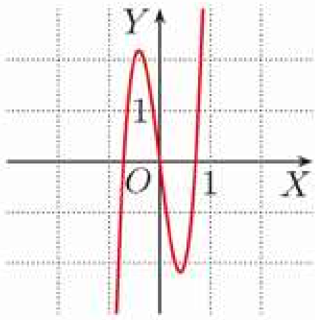
3. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji f, g i h.



Wykresy pochodnych tych funkcji przedstawione są na rysunkach A, B, C. Dopasuj pochodne do funkcji.

A.


B.


C.


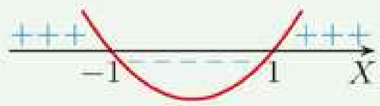
*4.18. Zagadnienia uzupełniające

Szkicowanie wykresu funkcji

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

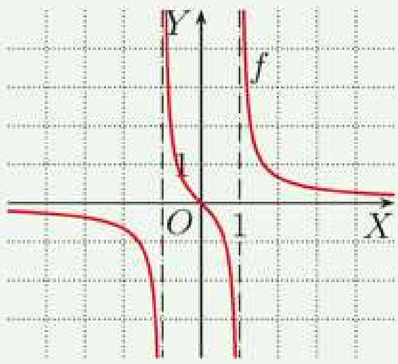
1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
   Dla każdego $x \in D_f$ mamy $-x \in D_f$ oraz:
   $$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$$
   Warto sprawdzić parzystość funkcji.
   Zatem funkcja jest nieparzysta (patrz str. 29), czyli jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.
2. $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.
   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$
   Prosta $y = 0$ jest obustronną asymptotą poziomą wykresu funkcji f.
   $$\lim_{x\to-1^-} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{-1}{0^+}\right]}{=} -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{-1}{0^-}\right]}{=} \infty$$



Szkic wykresu funkcji $y = x^2 - 1$

   $$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=} -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=} \infty$$
   Proste $x = -1$ oraz $x = 1$ są asymptotami pionowymi (obustronnymi) wykresu funkcji f.
4. Wyznaczamy pochodną:
   $$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}, \quad D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$
5. Pochodna f' jest ujemna dla $x \in D_{f'}$, zatem funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ i $(1; \infty)$ oraz nie ma ekstremów.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	×	$-$	0	$-$	×	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	×	$\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$	×	$\infty \searrow 0$



Uwaga. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, można przeprowadzić badanie funkcji tylko dla $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, naszkicować odpowiedni fragment wykresu i odbić go symetrycznie względem punktu $(0, 0)$.

Prosta $y = mx + n$ jest **asymptotą ukośną** wykresu funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$. Współczynniki m i n asymptoty ukośnej (jeśli istnieje) wyznaczamy następująco:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

Analogicznie wyznacza się asymptotę ukośną wykresu funkcji w $-\infty$.

Uwaga. Funkcja może mieć asymtotę ukośną tylko wtedy, gdy jej granica w $\pm\infty$ jest równa $\pm\infty$.
Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej – o współczynniku kierunkowym $m = 0$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.
2. $f(0) = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest punktem przecięcia z osią OY.
   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = \infty$$
   $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} \overset{\left[\frac{4}{0^-}\right]}{=} -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} \overset{\left[\frac{4}{0^+}\right]}{=} \infty$$
   Zatem prosta $x = 2$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f. Sprawdzamy, czy istnieje asymptota ukośna jej wykresu.
   $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 1$$
   $$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+2x}{x-2} =$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{2}{x}} = 2$$
   Zatem wykres funkcji ma w ∞ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 2$. Podobnie wyznaczamy asymptotę ukośną wykresu funkcji w $-\infty$. Jest to też prosta $y = x + 2$.
4. Wyznaczamy pochodną:
   $$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}, \quad D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

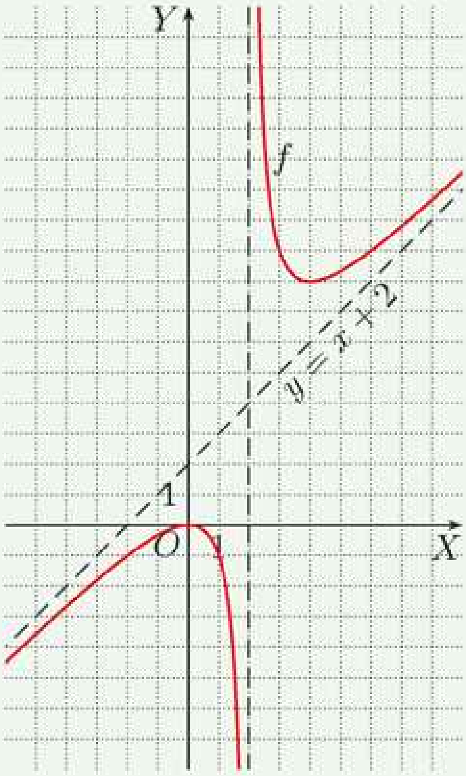
5. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x(x-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ lub $x = 4$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

$f'(x) < 0$ dla $x \in (0; 2) \cup (2; 4)$

Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziałach $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 4; \infty)$ oraz maleje w przedziałach $\langle 0; 2)$, $(2; 4\rangle$.

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f osiąga maksimum $f(0) = 0$, w punkcie $x_1 = 4$ osiąga minimum $f(4) = 8$.



x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<4$	4	$x>4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow$	8	$\nearrow \infty$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

   Dla każdego $x \in D_f$ mamy $-x \in D_f$ oraz:
   $$f(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{x^2}{|x|-1} = f(x)$$
   więc funkcja jest parzysta, czyli jej wykres jest symetryczny względem osi OY. Zbadamy zatem przebieg funkcji f dla $x \in \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$ (zauważ, że w tym zbiorze $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$).

2. $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.

   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, więc punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.

3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:

   $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} \overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=} -\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} \overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=} \infty$

   Oznacza to, że prosta $x = 1$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f.

   $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \infty$

Ponieważ granica funkcji f w ∞ jest równa ∞, sprawdzamy, czy istnieje asymptota ukośna jej wykresu.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

Zatem wykres funkcji ma w ∞ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$.

4. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \quad x \in \langle 0;1) \cup (1;\infty)$$

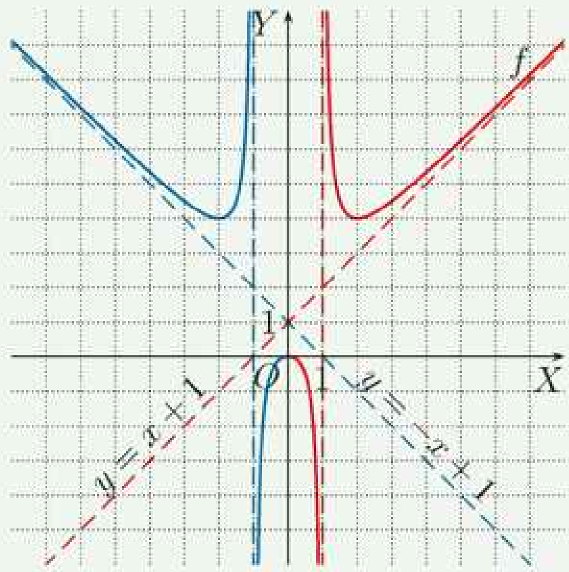
5. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ lub $x = 2$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (2;\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0;1) \cup (1;2)$

Funkcja f jest ciągła, zatem maleje w przedziałach $\langle 0;1)$ i $(1;2\rangle$ oraz rośnie w przedziale $\langle 2;\infty)$.

W punkcie $x_0 = 2$ funkcja f osiąga minimum $f(2) = 4$.

x	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow$	4	$\nearrow \infty$



Szkicujemy wykres funkcji f dla $x \in \langle 0;1) \cup (1;\infty)$ – kolor czerwony. Pozostałą część wykresu – kolor niebieski – otrzymujemy, korzystając z symetrii względem osi OY.

Funkcja f osiąga minima w $x_0 = 2$ i $x_1 = -2$ oraz maksimum w $x_2 = 0$. Asymptotą ukośną w ∞ jest prosta $y = x+1$, a w $-\infty$ prosta $y = -x+1$.

1. Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, gdzie u i v są wielomianami. Jaka jest zależność między stopniami wielomianów u i v, jeśli funkcja f ma asymptotę ukośną niebędącą asymptotą poziomą?

2. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-2}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$ d) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-10x+9}{x^2-11x+18}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-4}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -6} \frac{\sqrt{7+x}-1}{x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x-7}-1}{\sqrt{x-3}-1}$

3. Sprawdź, czy istnieje $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ 2x^2 - x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{3}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x}{4-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x^2-x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x^3+8}$

5. Zbadaj, czy granica istnieje.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-3}{x^2-4x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$

6. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^4 - x^2 + 6)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x+2}{3x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2+x}{8x^3-x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5 + x^2 + x)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^2+x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-5x^4 - 2x + 1)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8x^3-x^2+1}{1-4x^3}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+5x-1}{x+2}$

7. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-5x+6}$ e) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}+x$

D **8.** Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

a) $-3x^4 + 6x^2 + 5 = 0$, $(0;2)$ b) $x^5 - 5x^3 + x^2 - 7 = 0$, $(-2;-1)$

9. Zbadaj ciągłość funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & \text{dla } x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

10. Czy można tak dobrać wartość parametru a, żeby funkcja f była ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x+1} & \text{dla } x < 0 \\ a & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-1}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

11. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 1.

a) $f(x) = -5x^4 + \frac{x^3}{3} + x$ c) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{2x^3-x}{1+x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ d) $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x}}$

Zestaw II

1. Dla jakiej wartości parametru a granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{ax^2-x+1}$ jest równa:

a) 1, b) 2, c) $-\infty$?

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x + x^2} + x\right)$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4+2x}}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right)$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2}+x}$

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = (x - 4)^3$, $x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x$, $x_0 = -1$ e) $f(x) = \frac{x-3}{x}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $x_0 = 2$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$, $x_0 = 1$

4. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$, jeśli:

a) są one równoległe do prostej o równaniu $y = 7x - 4$,

b) są one prostopadłe do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$,

c) tworzą one z osią OX kąt 135°.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ e) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ f) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$

6. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$ d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ g) $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ e) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ h) $f(x) = \sqrt{2x^4 - x^2 + 1}$

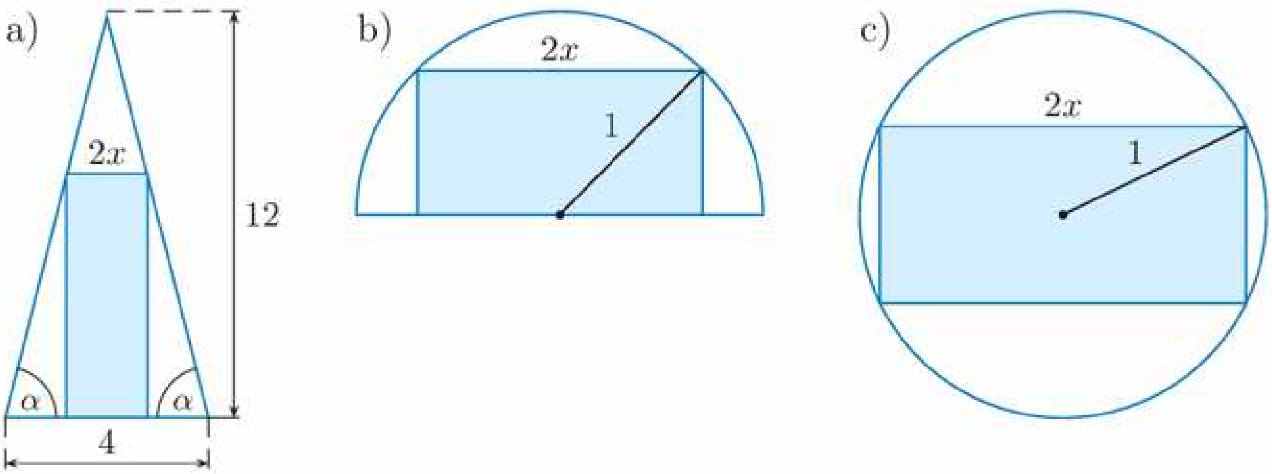
c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+4x+4}$ i) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 6x$, $\langle -2; 3 \rangle$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $\langle -4; 4 \rangle$

b) $f(x) = \frac{x-8}{x+2}$, $\langle 0; 8 \rangle$ d) $f(x) = \sqrt{2x(9-x)}$, $\langle 1; 3 \rangle$

8. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x. Dla jakiego argumentu x pole jest największe? Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



9. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ g) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$

b) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ e) $f(x) = \frac{8x}{x^2+8}$ h) $f(x) = \frac{6}{x^2-2x+8}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ f) $f(x) = \frac{-2}{x^2-1}$ i) $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x}$

10. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

11. Naszkicuj wykres funkcji f.

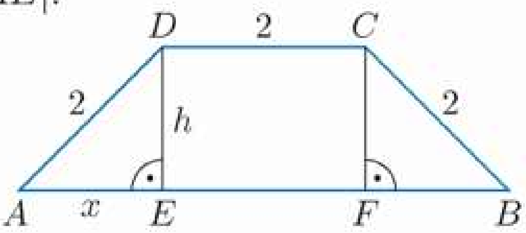
a) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ b) $f(x) = (4-x)\sqrt{x}$ *c) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$

Przykład

Jakie jest największe możliwe pole trapezu równoramiennego, którego ramiona i krótsza podstawa mają długość 2?

W trapezie $ABCD$ (rysunek obok) niech $x = |AE|$. Wówczas wysokość trapezu jest równa:

$$h = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}, \text{ gdzie } x \in (0;2)$$



Pole trapezu:

$$P = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |DE|$$

zapisujemy jako funkcję zmiennej x:

$$P(x) = \frac{(2+2x)+2}{2} \cdot \sqrt{4 - x^4} = (2+x)\sqrt{4-x^2} = \sqrt{(2+x)^2(4-x^2)}$$

$$P(x) = \sqrt{-x^4 - 4x^3 + 16x + 16}$$

gdzie $x \in (0;2)$.

Następnie wyznaczamy największą wartość funkcji P. W tym celu możemy:

• wyznaczyć pochodną funkcji P:

$$P'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^4-4x^3+16x+16}} \cdot (-4x^3 - 12x^2 + 16)$$

lub

• rozpatrzyć funkcję pomocniczą:

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 + 16x + 16$$

gdzie $x \in (0;2)$.

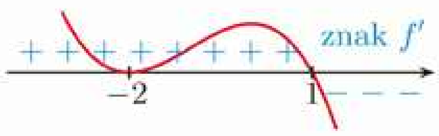
Funkcja $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje P i f osiągają wartość największą dla tego samego argumentu x.

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2 + 16, \text{ gdzie } x \in (0;2)$$

$$-4x^3 - 12x^2 + 16 = 0 \text{ dla } x \in \{-2, 1\} \text{ (sprawdź)}$$

Z założenia $x \in (0;2)$, zatem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Funkcja f rośnie w przedziale $(0;1\rangle$ i maleje w przedziale $\langle 1;2)$, zatem dla $x = 1$ funkcja f oraz funkcja P osiagają wartości największe.



$$P(1) = \sqrt{-1^4 - 4 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1 + 16} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole takiego trapezu jest równe $3\sqrt{3}$.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = a$, gdy:

A. $a = 12$, **B.** $a = 8$, **C.** $a = 4$, **D.** $a = 2$.

2. Wskaż wzór funkcji, dla której $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$.

A. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^4}$

B. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^3}$

C. $f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$

D. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

3. Prosta dana równaniem $x = -3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji:

A. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$,

B. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$,

C. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+3}$,

D. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$.

4. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$ jest ciągła, gdy:

A. $a = 6$, **B.** $a = 5$, **C.** $a = 1$, **D.** $a = -2$.

5. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ ma współczynnik kierunkowy równy:

A. 6, **B.** 4, **C.** -3, **D.** -7.

6. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$ poprowadzona w punkcie $(2, 0)$ tworzy z osią OX kąt α. Wartość bezwzględna różnicy $\beta - \alpha$ jest najmniejsza, gdy:

A. $\beta = 45^\circ$, **B.** $\beta = 52^\circ$, **C.** $\beta = 60^\circ$, **D.** $\beta = 76^\circ$.

7. Funkcja $f(x) = \frac{3x}{x^2-x+1}$ rośnie w przedziale:

A. $(-3; -1)$, **B.** $(-1; 1)$, **C.** $(1; 3)$, **D.** $(3; \infty)$.

8. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3$ w przedziale $\langle 0; 4\rangle$ jest równa:

A. -7, **B.** -4, **C.** -3, **D.** 0.

9. Jaki jest największy możliwy iloczyn liczb x^2 i y, jeżeli $x > 0$ i $2x + y = 4$?

A. $\frac{64}{27}$ **B.** $\frac{16}{9}$ **C.** 2 **D.** 4

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz:

$$\lim_{x \to -\frac{4}{3}} \frac{3x^3+4x^2-6x-8}{9x^2-16}$$

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

w punkcie $x_0 = 1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)

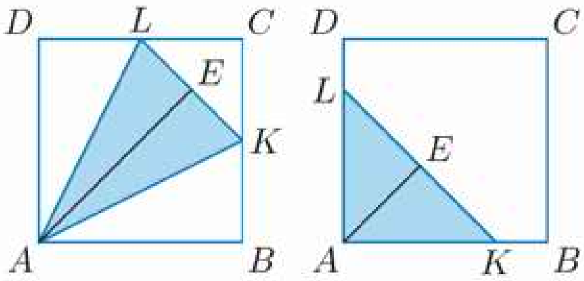
Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$ w przedziale $(-\infty; 1\rangle$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x = m$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\langle 0; 1\rangle$?

Zadanie 5 (5 pkt)

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość $2\sqrt{2}$. Wierzchołki K i L trójkąta równoramiennego AKL (gdzie $|AK| = |AL|$) należą do boków kwadratu (rysunek obok). Przedstaw pole P trójkąta AKL jako funkcję jego wysokości x (gdzie $x = |AE|$). Określ dziedzinę funkcji P. Zbadaj ciągłość tej funkcji i naszkicuj jej wykres.



Zadanie 6 (5 pkt)

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji:

$$f(a) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x-3ax^2}{(a^2+4)x^2+7}$$

w przedziale $\langle -5; 5\rangle$.

Zadanie 7 (7 pkt)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, którego ramię AD jest prostopadłe do dłuższej podstawy AB. Krótsza podstawa DC oraz ramię BC mają długość 4. Oblicz wysokość takiego trapezu $ABCD$ spełniającego podane warunki, którego pole jest największe.

5 Statystyka

Poniższa tabela zawiera szacunkowe dane dotyczące liczebności populacji bobra na terenie Polski w wybranych latach. Dane te pokazują, że od ostatniego ćwierćwiecza XX wieku następuje ciągły przyrost populacji bobra w naszym kraju.

Rok	1976	1980	1982	1986	1992	1994	2003	2020
Liczebność	500	1000	1800	3000	6000	7400	20 660	137 000

Na podstawie: *Krajowy plan ochrony gatunku. Bóbr europejski*, oprac. Andrzej Czech, Kraków 2007; www.wody.gov.pl

W tym rozdziale poznajemy pojęcia statystyczne związane z analizą danych. Wykorzystuje się je do opisu różnych zjawisk, także przy podejmowaniu kluczowych decyzji gospodarczych i społecznych.

5.1. Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli dwaj zawodnicy A i B w sześciu kolejnych meczach koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A:

$$\frac{8+18+10+20+16+12}{6} = 14$$

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika B:

$$\frac{24+18+4+0+0+2}{6} = 8$$

Definicja

Średnią arytmetyczną n liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Zamiast „średnia arytmetyczna” będziemy czasami pisać krótko: „średnia”.

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zauważ, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	?
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	?

Ćwiczenie 2

Wynagrodzenia miesięczne pracowników pewnej firmy wyniosły (w złotych): 3300, 3250, 5500, 3350, 7500, 3300, 3000, 3100 i 2700. Ilu pracowników tej firmy otrzymało wynagrodzenie poniżej średniej?

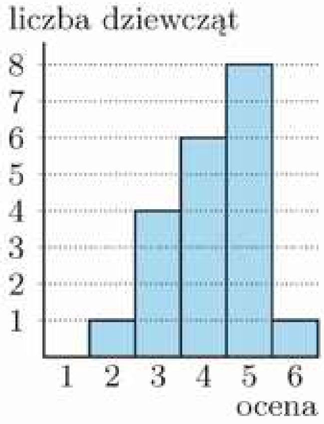
Ćwiczenie 3

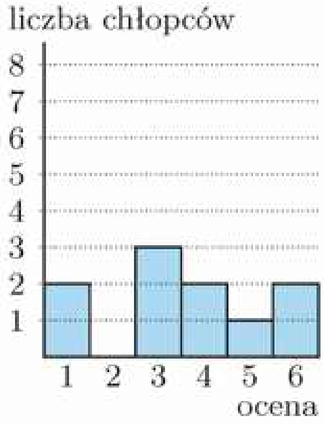
Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych A, B i C. Sformułuj wniosek.

$$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}, \quad B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}, \quad C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).





Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:

$$\overline{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4{,}2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\overline{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

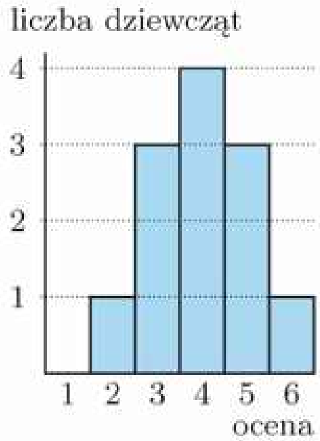
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

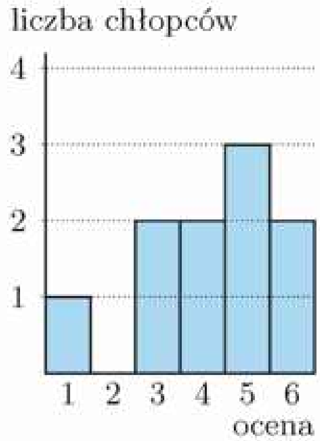
$$\overline{x}_k = \frac{20 \cdot \overline{x}_d + 10 \cdot \overline{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę na to, że $\overline{x}_k$ nie jest równe $\frac{\overline{x}_d + \overline{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.





Ćwiczenie 5

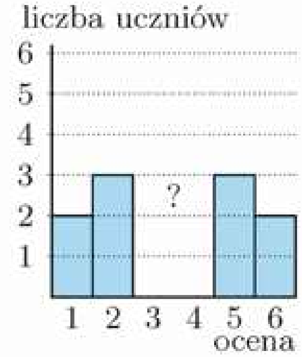
a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \ldots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1.

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7.

Zadania

1. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?

2. Na diagramie przedstawiającym zestawienie ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie nie zaznaczono liczby ocen dobrych i dostatecznych. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, jeśli wiadomo, że średnia ocen z geografii w tej klasie wynosi:
a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65.



3. W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł. Jakie będzie średnie miesięczne wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni:

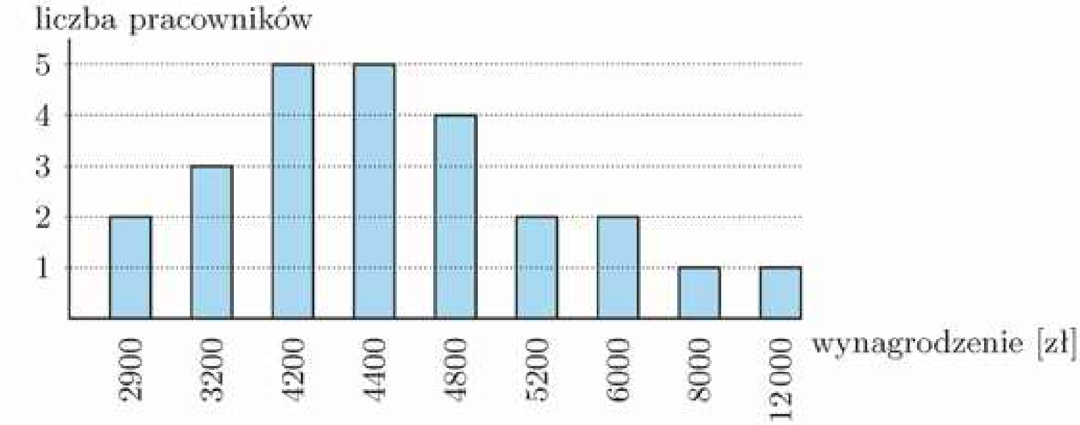
a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł,

b) trzech stażystów, każdego z wynagrodzeniem miesięcznym 2300 zł?

4. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:

a) o 2% wyższe niż poprzednio, b) o 1% niższe niż poprzednio?

5. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników banku (12 000 zł zarabia dyrektor).



a) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym banku?

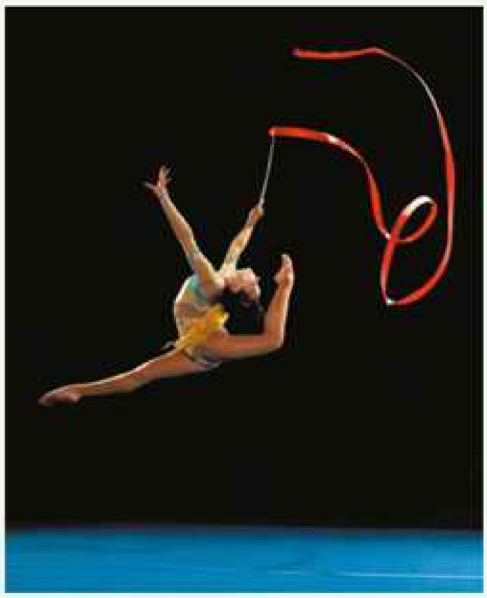
b) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najlepiej zarabiających pracowników, a ile – 10 zarabiających najgorzej?

c) Jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 400 zł podwyżki, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%?

Czy wiesz, że...

Średnia arytmetyczna jest „wrażliwa” na dane bardzo odbiegające od pozostałych, dlatego czasem obliczamy ją po odrzuceniu z zestawu pewnej liczby danych największych i najmniejszych. Tak obliczona średnia nosi nazwę **średniej obciętej**.

Średnia obcięta ma swoje zastosowania np. w sporcie. Obliczenie ostatecznej oceny w jeździe figurowej na lodzie czy gimnastyce sportowej polega na odrzuceniu dwóch skrajnych ocen i obliczeniu średniej obciętej pozostałych.



6. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).

a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127 b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82

7. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \ldots, 2^{12}$ oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.

8. Czy w zamieszczonym obok kwadracie można skreślić jeszcze jedną liczbę tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb:

a) wzrosła o 1, b) zmalała o 1, c) wzrosła o $33\frac{1}{3}\%$?

~~1~~	2	3	4
5	~~6~~	7	~~8~~
~~9~~	10	11	12
13	14	15	16

9. a) Wśród liczb naturalnych od 1 do 12 skreślono cztery (patrz rysunek).

Na ile sposobów można skreślić jeszcze dwie liczby tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb nie uległa zmianie?

b) Wśród liczb naturalnych od 1 do 12 skreślono trzy (patrz rysunek).

Na ile sposobów można skreślić jeszcze trzy liczby tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb nie uległa zmianie?

5.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Poza średnią arytmetyczną rozpatrujemy też inne wielkości służące do analizy danych. Jedną z nich jest wartość środkowa – **mediana**. Aby ją wyznaczyć, porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, $\boxed{2}$, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

-3, -3, 0, 0, 2, $\boxed{7}$, 9, 11, 13, 17, 18 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, $\boxed{3}$, $\boxed{8}$, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5{,}5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub jej równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę podanych liczb.

a) 1, 2, 3, 10, 20 b) 6, 10, 11, 11, 20, 7 c) 18, 6, 4, 10, 5, 4

Ćwiczenie 2

W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

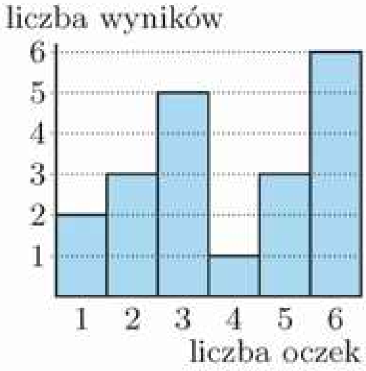
– ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;

– klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi: a) ogierów, b) klaczy, c) wszystkich koni w stadninie.

Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek. Wyznacz medianę uzyskanych wyników.



Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

a) większa od ich średniej arytmetycznej,

b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 8, 6, 3, x, 8, $x+4$, 4, 6, 7, 8 jest równa 7. Ile wynosi mediana tego zestawu liczb?

Aby wskazać położenie wybranej danej względem innych danych, używa się **skali centylowej**. Podając centyl, któremu odpowiada liczba x (mówimy też: w którym mieści się liczba x), określamy, jaki jest procent liczb mniejszych lub równych tej liczbie.

Przykład 1

W poniższej tabeli podano, jakie wartości centyli odpowiadają poszczególnym wynikom procentowym uzyskanym na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym przeprowadzonym w maju 2019 roku.

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	3	34	51	68	81
2	8	36	53	70	83
4	12	38	55	72	84
6	17	40	57	74	86
8	21	42	59	76	87
10	24	44	61	78	89
12	27	46	62	80	90
14	30	48	64	82	91
16	33	50	66	84	93
18	35	52	68	86	94
20	37	54	69	88	95
22	40	56	71	90	96
24	42	58	73	92	97
26	44	60	74	94	98
28	46	62	76	96	99
30	48	64	78	98	100
32	50	66	79	100	100

Źródło: https://cke.gov.pl

Z tabeli można odczytać, że:

- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 30% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 48. centylowi, co oznacza, że 48% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 52% maturzystów uzyskało wynik wyższy.
- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 98% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 100. centylowi, co oznacza, że w przybliżeniu 100% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast mniej niż 1% maturzystów uzyskało wynik wyższy.

Ćwiczenie 6

a) Ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 50% punktów?

b) Jaki procentowy wynik z egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej w maju 2019 roku odpowiada 40. centylowi, a jaki – 90. centylowi wyników egzaminu?

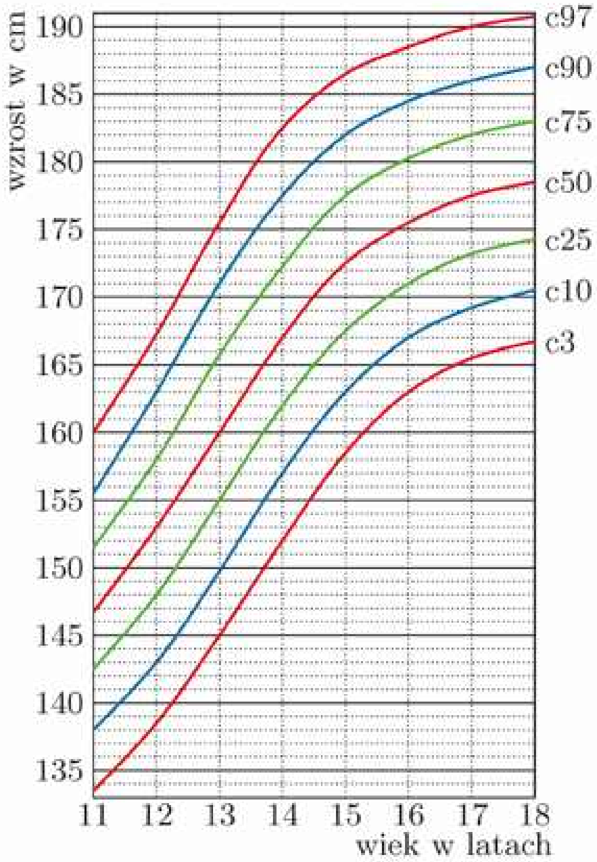
Przykład 2

Przedstawiona obok siatka jest siatką centylową wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat.

Zaznaczone linie opisują centyle: 3, 10, 25, 50, 75, 90 i 97.

• W wieku 13 lat chłopiec o wzroście 160 cm mieści się w 50. centylu.

• W wieku 16 lat chłopiec o wzroście większym (lub równym) od 75% swoich rówieśników mierzy ponad 180 cm.



Siatka centylowa wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat
Źródło: http://www.czd.pl

Ćwiczenie 7

a) Czternastoletni chłopiec ma 167 cm wzrostu. W którym centylu mieści się jego wzrost?

b) Siedemnastolatek ma 186 cm wzrostu. Ile procent jego równieśników jest od niego wyższych?

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana **wartością modalną** lub **modą**).
Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.
Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 8

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów był kupowany najczęściej?

Ćwiczenie 9

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoosobowej klasie (tabela obok). Po kolejnym sprawdzianie dopisał do niego nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu, jeśli wiadomo, że z tego sprawdzianu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

a) wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,

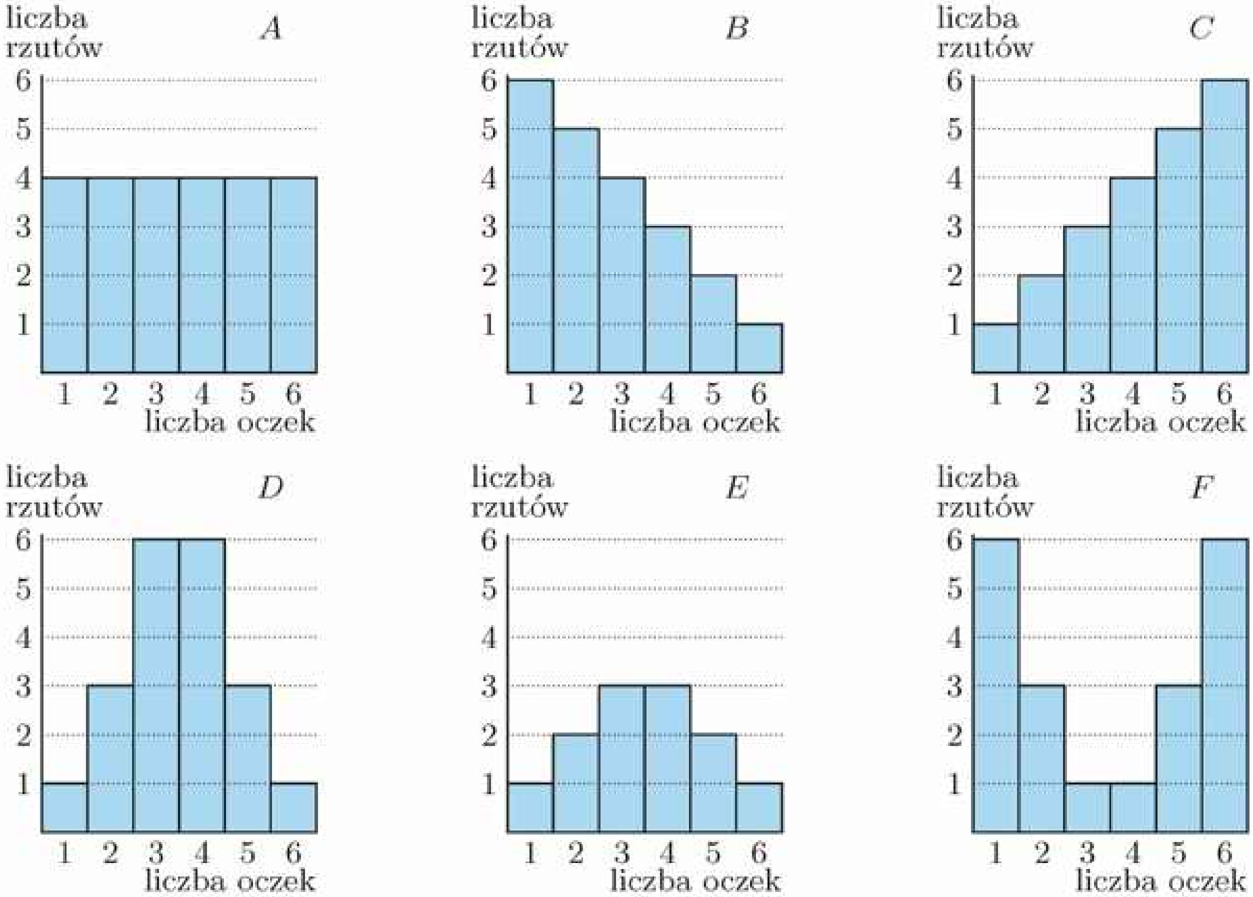
b) połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną.

Zadania

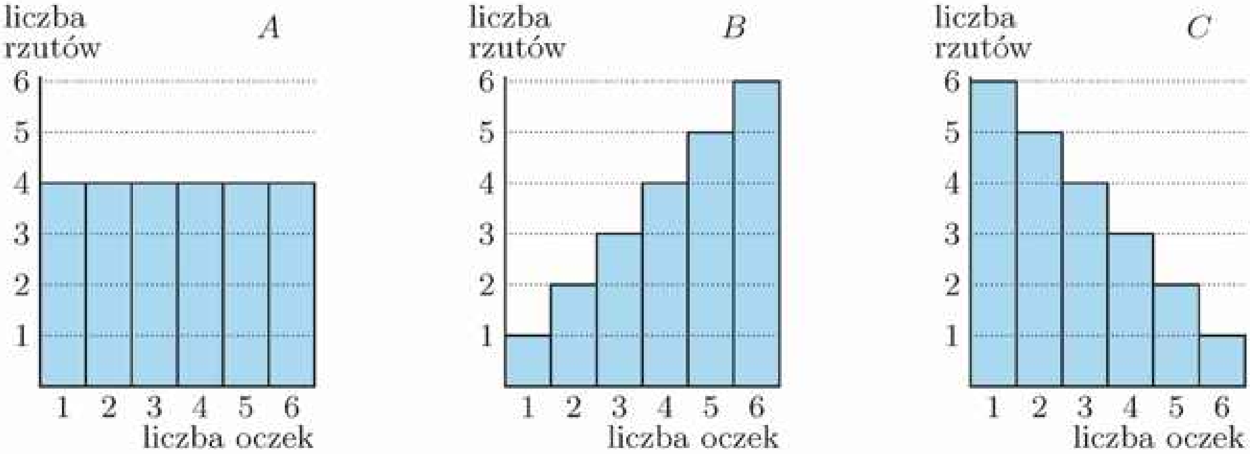
1. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c, 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c, jeśli:

a) $\overline{x} = D$, b) $\overline{x} = M$.

2. Każda z osób A, B, C, D, E, F wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych w każdej serii.



3. Każda z osób A, B, C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych łącznie przez osoby: a) A i B, b) A i C, c) B i C.



Czy wiesz, że...

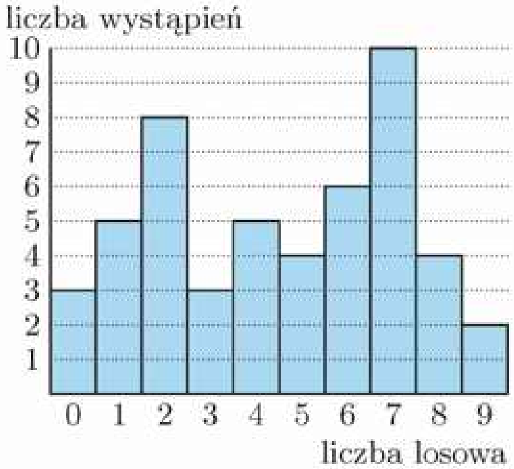
W niektórych zagadnieniach (np. w kryptografii) wykorzystuje się liczby losowe. Liczby te można wygenerować za pomocą programu komputerowego lub można skorzystać z odpowiednich tablic. Poniżej podano osiem wierszy tablicy liczb losowych, w której występują liczby od 0 do 9 odpowiednio pogrupowane.

1.	46016	24742	21311	88342	67778	20741	26755	55382	96777	06729
2.	89311	86439	32128	17700	90725	01936	23678	54622	27342	96439
3.	09006	57476	64080	47646	68020	32924	68500	81779	17120	57784
4.	84642	87958	96983	80086	19451	53725	82606	54516	62617	67000
5.	88645	63989	45783	33657	54733	68580	97232	98073	27454	36174
6.	75815	34604	83791	91421	09176	49317	17045	79972	65081	32075
7.	37019	94048	44462	48948	29999	19107	51184	89352	00122	07222
8.	01324	69795	95403	20891	89075	82476	02147	19961	84203	02724

4. Wykonano diagram dla liczb z pierwszego wiersza powyższej tablicy liczb losowych.

a) Oblicz ich średnią arytmetyczną oraz medianę. Któremu centylowi odpowiada liczba 2, a któremu liczba 7?

b) Wykonaj analogiczny diagram dla liczb z drugiego wiersza tablicy. Wyznacz ich średnią arytmetyczną, medianę i dominantę. Któremu centylowi odpowiada liczba 3?



5. Poniżej przedstawiono tabelę zawierającą skalę centylową wyników egzaminu maturalnego z fizyki (poziom rozszerzony, maj 2019 roku).

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	33	46	67	81
2	1	35	48	68	82
3	1	37	50	70	83
5	2	38	52	72	85
7	4	40	54	73	86
8	6	42	56	75	87
10	8	43	58	77	89
12	11	45	60	78	90
13	14	47	61	80	91
15	16	48	63	82	92
17	19	50	65	83	93
18	22	52	66	85	94
20	25	53	68	87	95
22	28	55	70	88	96
23	31	57	71	90	97
25	33	58	73	92	98
27	36	60	75	93	99
28	39	62	76	95	99
30	41	63	78	97	100
32	43	65	79	98	100
				100	100

Źródło: https://cke.gov.pl

a) Jaki wynik procentowy gwarantował znalezienie się w gronie 15% maturzystów, którzy uzyskali najlepsze wyniki na tym egzaminie?

b) Wynik procentowy pewnego maturzysty równy jest medianie wyników egzaminu, a wynik jego kolegi odpowiada 60. centylowi. O ile punktów procentowych różnią się ich wyniki z tego egzaminu?

6. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych. Podaj przykład pięciu liczb, które spełniają warunek:

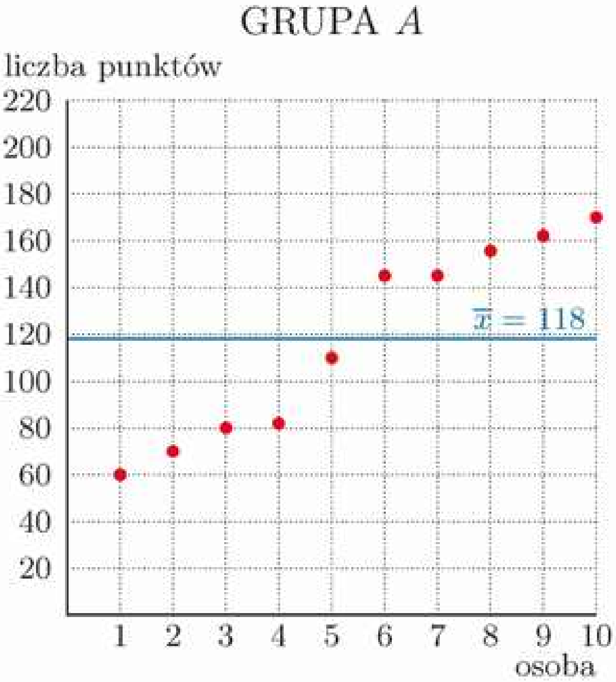
a) $\overline{x} < M < D$, b) $D < \overline{x} < M$, c) $M < \overline{x} < D$, d) $D < M < \overline{x}$.

7. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych. Podaj przykład siedmiu liczb, które spełniają warunek: a) $\overline{x} < D < M$, b) $M < D < \overline{x}$.

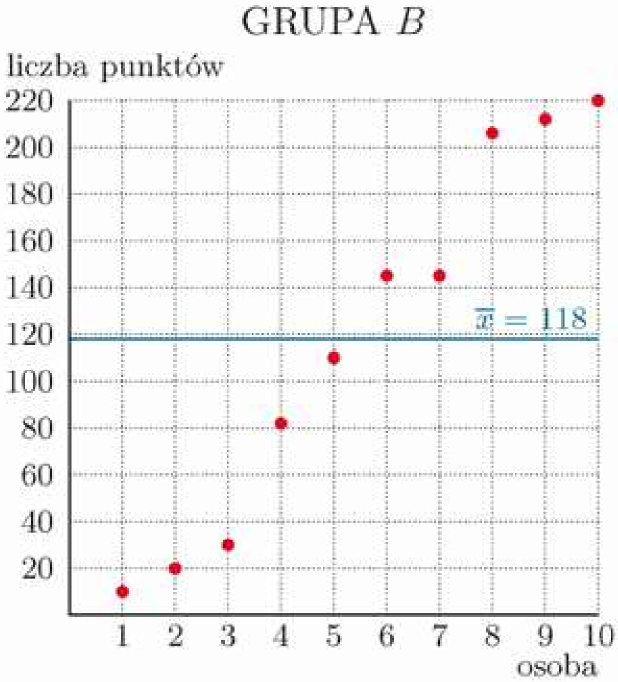
5.3. Odchylenie standardowe

Przykład 1

W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Obydwa zestawy danych mają średnią arytmetyczną równą 118, medianę – 127,5 oraz dominantę – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Definicja

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

$$\overline{x} = \frac{4+9+11+13+13}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(13-10)^2+(13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11{,}2$$

Zatem odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11{,}2} \approx 3{,}35$.

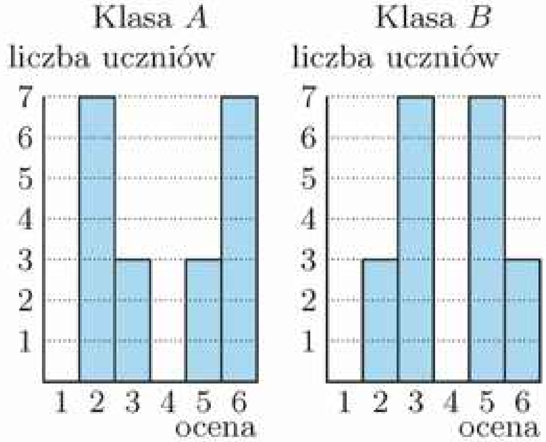
Ćwiczenie 1

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 4, 5, 6, 7, 8; b) 3, 6, 6, 6, 9; c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.



Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\sigma_A^2 = \frac{7\cdot(2-4)^2+3\cdot(3-4)^2+3\cdot(5-4)^2+7\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3{,}1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76$.

Analogicznie obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3\cdot(2-4)^2+7\cdot(3-4)^2+7\cdot(5-4)^2+3\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1{,}9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1{,}9} \approx 1{,}38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B, odchylenie standardowe jest większe.

A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5 B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Ćwiczenie 3

Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B. Sformułuj wniosek.

A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14

Ćwiczenie 4

Dane są zbiory: $X = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ i $Y = \{10, -10, 20, -20, 30, -30\}$. Ile razy odchylenie standardowe liczb ze zbioru Y jest większe od odchylenia standardowego liczb ze zbioru X?

Ćwiczenie 5

W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y.

	Firma X			Firma Y		
Liczba pracowników	2	16	2	16	2	2
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	3000	5000	6000

Uwaga. Odchylenie standardowe jest wyrażane w tej samej jednostce co analizowane dane, a wariancja – w tej jednostce podniesionej do kwadratu.

Wariancję liczb można również obliczyć, korzystając z podanego niżej wzoru.

Wariancja liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\overline{x}$, wyraża się za pomocą wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Dowód

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 - 2x_1\overline{x} + (\overline{x})^2 + x_2^2 - 2x_2\overline{x} + (\overline{x})^2 + \ldots + x_n^2 - 2x_n\overline{x} + (\overline{x})^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} + \frac{n(\overline{x})^2 - 2\overline{x}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{n(\overline{x})^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2\end{aligned}$$

Zauważ, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\overline{x}$.

Ćwiczenie 6

W pewnej firmie analizowano staż pracy pracowników – dane zestawiono w tabeli. Oblicz średni staż pracy pracowników tej firmy oraz wariancję i odchylenie standardowe.

Staż pracy w latach	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba pracowników	6	5	3	2	4	2	3	2	0	1

Zadania

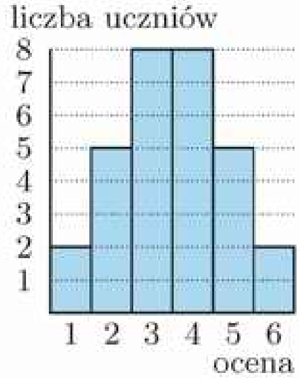
1. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 5, 5, 5, 5, 5, 5; c) 3, 3, 3, 7, 7, 7; e) 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9;

b) 4, 4, 4, 6, 6, 6; d) 3, 4, 5, 5, 6, 7; f) 4, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 10.

2. Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych danych.

3. Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.

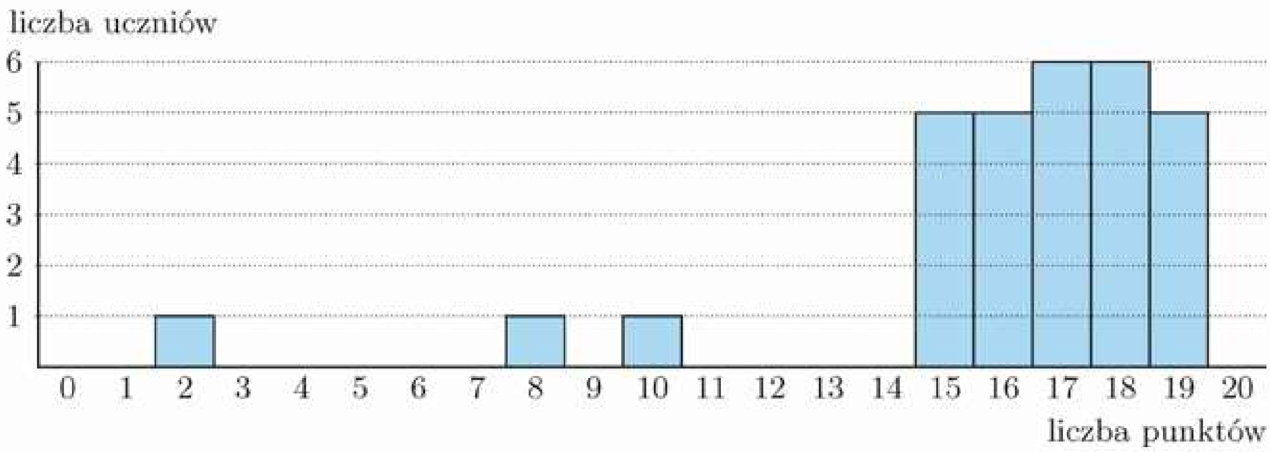


a) Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.

b) Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?

c) Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma)$?

4. Sprawdzian ze statystyki przeprowadzony w klasie IIIa był punktowany w skali od 0 do 20 punktów. Jego wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.



a) Ilu uczniów otrzymało wynik spoza przedziału $(\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma)$?

b) Czy któryś uczeń otrzymał wynik spoza przedziału $(\overline{x} - 3\sigma; \overline{x} + 3\sigma)$?

5. Grupę dziesięciorga uczniów zapytano o to, ile minut każdy z nich jedzie do szkoły. Dziewczęta podały odpowiedzi: 60, 30, 20, 10, natomiast chłopcy: 30, 35, 20, 35, 25, 35. Oblicz średni czas dojazdu oraz wariancję i odchylenie standardowe dla:

a) grupy dziewcząt,

b) grupy chłopców,

c) całej dziesięcioosobowej grupy.

Korelacja

O dodatniej korelacji między dwiema zmiennymi w statystyce mówimy, gdy wzrost jednej z nich powiązany jest ze wzrostem drugiej.

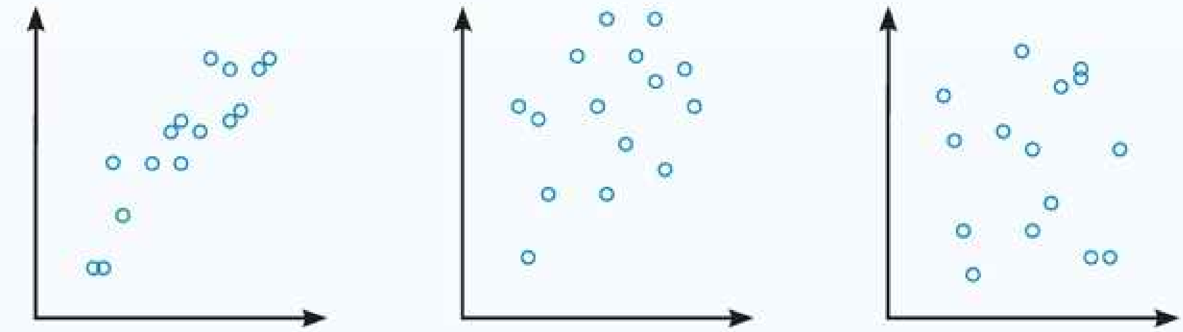
Na przykład zbierając dane dotyczące czasu spędzonego na bieganiu i liczby spalonych kalorii, możemy oczekiwać dodatniej korelacji tych danych.

Aby zmierzyć korelację między zmiennymi x i y na podstawie par danych: (x_1, y_1), (x_2, y_2), … , (x_n, y_n), których średnie arytmetyczne wynoszą odpowiednio $\overline{x}$ i $\overline{y}$, oblicza się **współczynnik korelacji *r* Pearsona** [czyt. pirsona]:

$$r = \frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y}) + (x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y}) + \ldots + (x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1-\overline{y})^2 + (y_2-\overline{y})^2 + \ldots + (y_n-\overline{y})^2}}$$

Wartość tego współczynnika dla korelacji dodatnich jest liczbą z przedziału $(0; 1)$.

Poniższe wykresy przedstawiają zestawy danych o silnej, słabej i zerowej korelacji.



silna korelacja dodatnia, $r = 0{,}9$

słaba korelacja dodatnia, $r = 0{,}4$

korelacja zerowa, $r = 0$

1 W tabeli zestawiono informacje o wzroście (x, w cm) i masie ciała (y, w kg) 10 osób. Oblicz współczynnik korelacji dla tych danych.

x	167	169	172	174	175	176	177	178	180	184
y	69	67	74	70	70	74	78	76	82	80

Warto wiedzieć

Inne miary rozrzutu danych

Miarą rozrzutu danych jest również **rozstęp**, czyli różnica między największą i najmniejszą z danych liczb.

1. W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów temperatury powietrza (w °C) przeprowadzonych w ciągu czterech kolejnych dni listopada.

Dzień \ Godzina	6	8	10	12	14	16	18	20
13 listopada	−4	−2	−1	0	3	5	4	3
14 listopada	−1	0	1	3	5	5	2	1
15 listopada	2	3	6	9	11	10	9	6
16 listopada	4	6	8	10	10	8	6	4

Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe:

a) wyników uzyskanych każdego dnia,

b) wszystkich wyników uzyskanych w ciągu czterech dni.

2. Zbierz dane dotyczące wzrostu uczniów w twojej klasie. Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe tych danych.

Jako miary rozrzutu danych używa się też odchylenia przeciętnego.

Odchyleniem przeciętnym (bezwzględnym) liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{x}$ nazywamy liczbę określoną za pomocą wzoru:

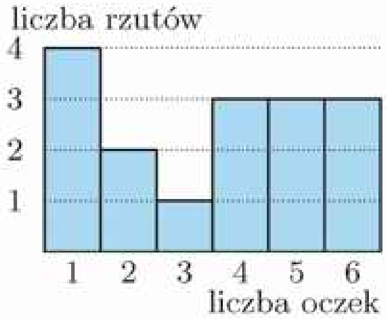
$$d = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Odchylenia przeciętnego używał Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827).

3. Sprawdź, czy odchylenie przeciętne dla podanych liczb jest mniejsze, równe czy większe od odchylenia standardowego.

a) 5, 10 b) 2, 4, 6, 12 c) 2, 4, 6, 8, 15

4. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek podczas serii rzutów kostką. Oblicz średnią arytmetyczną, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne tych danych.



5.4. Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3+1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Agata, Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1+x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Agata	5	3	$\frac{3\cdot5+3}{4} = \frac{18}{4}$	4,5
Marek	6	2	$\frac{3\cdot6+2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3\cdot3+5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Definicja

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \ldots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\overline{x}_w = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

a) $n_1 = 3$, $n_2 = 1$ b) $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ c) $n_1 = 0{,}5$, $n_2 = 0{,}5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12	8
Waga	2	1	3	4

b)

Liczba	7	3	4	5
Waga	0,2	0,3	0,5	0,4

Ćwiczenie 3

Uczestnikom kursu języka angielskiego wystawiono oceny za cztery umiejętności: x_1 – za rozumienie ze słuchu, x_2 – za rozumienie tekstu pisanego, x_3 – za wypowiedzi pisemne, x_4 – za wypowiedzi ustne. Aby wystawić ocenę końcową, postanowiono obliczyć średnią ważoną z następującymi wagami: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Ocena końcowa
Asia	4	5	3	4	3,8
Basia	6	5	2	4	?
Kasia	2	6	5	4	?

a) Oblicz końcowe oceny Basi i Kasi.

b) Czy gdyby przyjęto $n_1 = 4$, a pozostałe wagi zostawiono bez zmian, to Basia miałaby wyższą ocenę końcową od swoich koleżanek?

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

$$2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9$$

Sprawdzamy, ile razy wystąpiła każda z liczb 2, 7, 9, a następnie obliczamy średnią arytmetyczną:

Liczba x_i	2	7	9
Liczba wystąpień n_i	12	5	3

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4{,}3$$

Zauważ, że średnia arytmetyczna podanego zestawu danych jest średnią ważoną liczb 2, 7, 9 z wagami równymi liczbie wystąpień tych liczb.

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie studentów zebrano dane dotyczące wysokości otrzymywanego stypendium i przedstawiono je w tabeli.

x_i – wysokość stypendium [zł]	0	300	600	800
n_i – liczba studentów	20	10	15	5

a) Oblicz średnią wysokość stypendium przypadającą na jednego studenta.

b) Studentom, którzy do tej pory nie otrzymywali stypendium, postanowiono wypłacać je w wysokości 250 zł. Ile obecnie wyniesie średnia wysokość stypendium?

Zadania

1. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

2. Konkurs składa się z czterech etapów ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczby punktów, które zdobyli finaliści. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał konkurs?

Etap	I	II	III	IV
Waga	0,2	0,8	0,4	0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8

3. Dane są liczby x_1, x_2, x_3 i x_4. Sprawdź, czy w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

A:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

4. Oblicz t, jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 6,5.

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

5. Oblicz w, jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 5.

a)

Liczba	3	9	w
Waga	0,7	0,3	0,1

b)

Liczba	10	8	6	2
Waga	w	3	5	8

6. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:
– prace domowe: 1, 1, 1,
– kartkówki: 3, 1, 2,
– klasówki: 3, 6, 6.

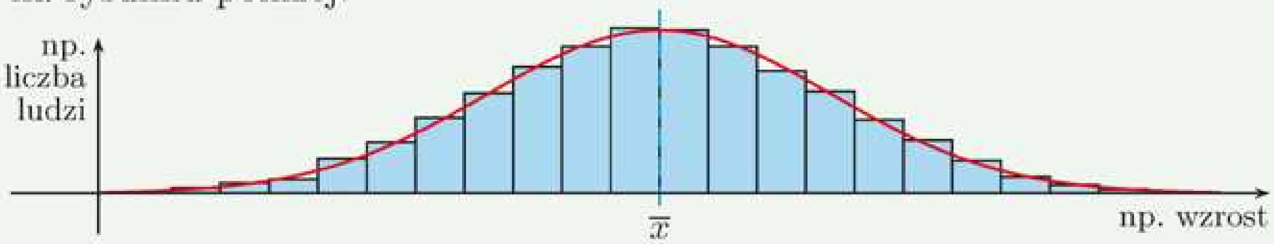
Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa:
a) 3, b) 4?

Kategoria	Waga
praca domowa	1
kartkówka	2
klasówka	n

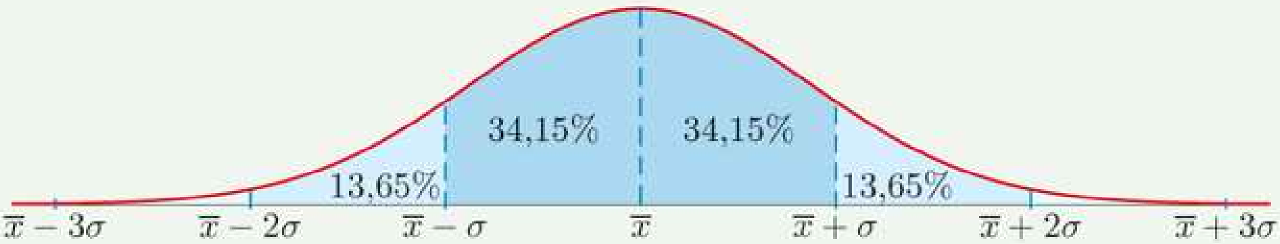
5.5. Zagadnienia uzupełniające

Rozkład normalny

Przy analizie wielu zjawisk, gdy mamy do dyspozycji dużą liczbę danych, diagram, za pomocą którego je porządkujemy, często ma taki kształt jak na rysunku poniżej:



Zdarza się to m.in. wówczas, gdy porządkujemy takie dane, jak wzrost i waga ludzi czy długość liści określonego drzewa. Taki rozkład danych nosi nazwę **rozkładu normalnego**. Krzywa (zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym) jest nazywana **krzywą Gaussa**. Jest ona symetryczna względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych. Jeśli rozkład danych jest rozkładem normalnym, to około 68,3% danych różni się od średniej o mniej niż odchylenie standardowe σ, a około 95,6% danych różni się od średniej o mniej niż 2σ. **Reguła trzech sigm** mówi, że do przedziału $(\overline{x} - 3\sigma; \overline{x} + 3\sigma)$ należy około 99,7% danych.



1. Przyjmijmy, że wyniki testu IQ przeprowadzonego w grupie 500 osób mają rozkład normalny ze średnią $\overline{x} = 100$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 15$. Oszacuj, ile osób z tej grupy uzyskało wynik testu:
a) między 85 a 115, b) większy od 115, c) większy od 130.

2. Zebrano dane dotyczące wzrostu 200 uczniów liceum sportowego. Mają one rozkład normalny o średniej $\overline{x} = 177$ cm i odchyleniu standardowym $\sigma = 6$ cm. Oszacuj, ilu uczniów ma wzrost powyżej 171 cm.

3. Żarówki produkowane przez pewną firmę przepalają się średnio po 2000 godzin. Przyjmując, że zebrane dane mają rozkład normalny, oszacuj, ile żarówek z partii liczącej 20 000 sztuk przepali się przed upływem 1400 godzin, a ile przed upływem 1100 godzin, jeżeli odchylenie standardowe $\sigma = 300$ godzin.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

a) 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 4

b) 9, 12, 9, 12, 7, 9, 94, 8, 20

c) 8, 8, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 8

d) 4, 16, 13, 5, 7, 16, 15, 4

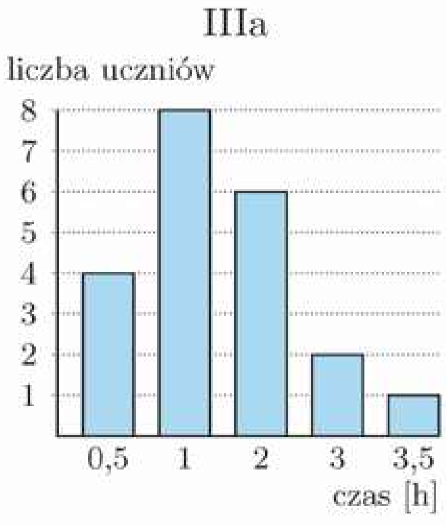
2. Studenci matematyki zdawali egzamin w dwóch grupach. W tabeli podano liczby poszczególnych ocen, jakie otrzymali. Oblicz średnią ocen z egzaminu dla każdej grupy.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Grupa I	3	6	5	3	3	2
Grupa II	0	3	4	6	4	3

3. W ciągu kolejnych siedmiu dni szkolnego rajdu rowerowego przebyto trasy długości: 26 km, 34 km, 40 km, 44 km, 45 km, 37 km, 26 km. Oblicz średnią długość trasy przebytej jednego dnia oraz odchylenie standardowe.

4. Wagi urodzeniowe sześciu noworodków urodzonych jednego dnia na oddziale pewnego szpitala były równe (w gramach): 3500, 3100, 2850, 3300, 3550, 4700. Oblicz średnią wagę noworodków oraz odchylenie standardowe.

5. W klasach IIIa oraz IIIb pewnej szkoły przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiedział na pytanie: „Ile godzin dziennie oglądasz telewizję?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy oraz dla obu klas razem.



6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	2	9	6	8
Waga	5	1	2	3

b)

Liczba	5	10	12	20
Waga	0,1	1,1	0,3	0,5

7. Ocena roczna jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ocen: za pierwszy semestr z wagą 0,4 i za drugi semestr z wagą 0,6. Jakie oceny roczne otrzymali uczniowie, których oceny semestralne podano w tabeli?

Uczeń	A	B	C	D	E
I semestr	5	6	3	2	5
II semestr	6	5	5	5	2

Zestaw II

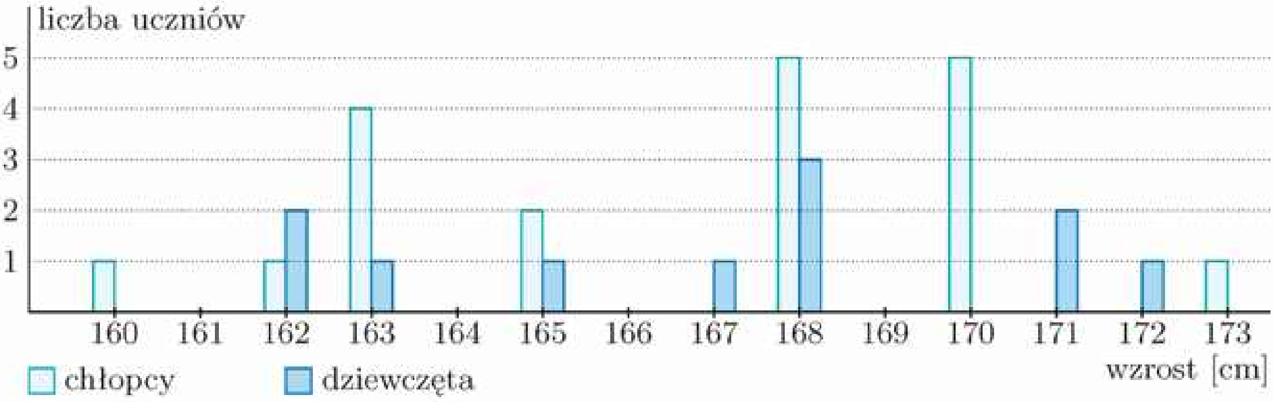
1. Średnia arytmetyczna liczb: a, b, c, d jest równa 8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

A. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 0$ jest równa 8.

B. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 13$ jest równa 9.

C. Średnia arytmetyczna liczb: a, a, b, b, c, c, d, d jest równa 16.

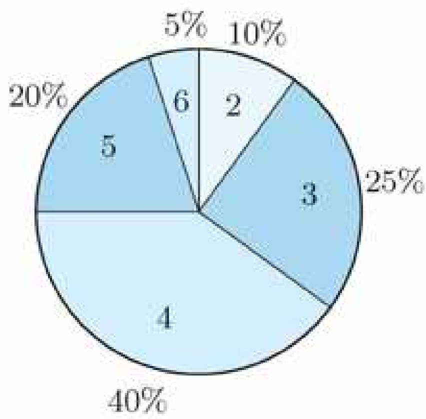
2. Na poniższym diagramie przedstawiono dane dotyczące wzrostu dziewcząt i chłopców w pewnej klasie liceum.



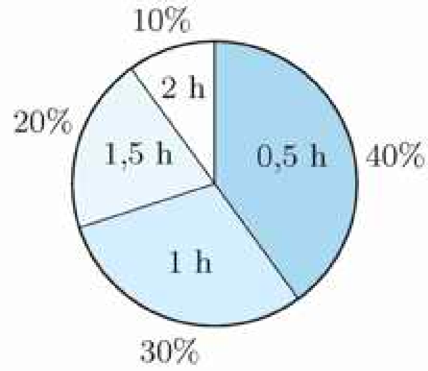
a) Ile dziewcząt ma wzrost większy niż średni wzrost w grupie dziewcząt?

b) Ilu chłopców ma wzrost większy niż średni wzrost wszystkich uczniów w klasie?

3. Na diagramie kołowym podano procentowy rozkład ocen semestralnych z matematyki w pewnej szkole. Oblicz średnią ocen z matematyki w tej szkole. Ile wynosi odchylenie standardowe przedstawionych danych?



4. Grupie uczniów zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz na czytanie książek?”. Wyniki ankiety przedstawiono na zamieszczonym obok diagramie. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tych wyników.



5. a) Średnia arytmetyczna liczb: 2, 1, 5, a, 4, 1 jest równa ich wariancji. Oblicz a.

b) Średnia arytmetyczna liczb: 7, 3, x, y, 8, 5, 6 jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Oblicz x i y, jeśli $x < y$.

6. Uczniów klasy IIIa podzielono na grupy według pierwszych liter nazwisk: grupa I – od A do K, grupa II – od L do P, grupa III – od R do Ż. Średnią ocen semestralnych z języka polskiego w każdej z grup przedstawiono w tabeli.

	Grupa I	Grupa II	Grupa III
Liczba uczniów	12	8	10
Średnia ocen w grupie	3,5	3,25	4,3

Troje uczniów w grupie I otrzymało na koniec semestru ocenę niedostateczną. O ile byłaby wyższa średnia ocen w tej grupie, a o ile w całej klasie, gdyby uczniowie ci na koniec semestru otrzymali ocenę dopuszczającą, a oceny reszty uczniów pozostały bez zmian?

7. W pewnej kuracji stosuje się lek X lub lek Y. Lek X podano jednej grupie pacjentów, a lek Y – drugiej. Poniżej przedstawiono dane dotyczące skuteczności każdego z nich (z podziałem na płeć pacjentów). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Który lek jest skuteczniejszy?

Lek X		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		200	300	500
Lek skuteczny	liczba osób	30	?	?
	procent osób	15%	40%	?

Lek Y		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		400	?	?
Lek skuteczny	liczba osób	80	45	?
	procent osób	?	?	25%

W przykładzie będziemy korzystać z poniższego wzoru na wariancję liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\overline{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Przykład

Grupę siedmiorga uczniów zapytano o to, ile czasu każdemu z nich zajmuje powrót ze szkoły do domu. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli. Oblicz odchylenie standardowe czasu powrotu dla całej siedmioosobowej grupy.

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba pytanych	4	3
Średni czas [min]	40	35
Odchylenie standardowe [min]	4	2

Niech x_1, x_2, x_3 i x_4 będą czasami powrotu dziewcząt ze szkoły do domu, a y_1, y_2 i y_3 – czasami powrotu chłopców. Oznaczmy średnie czasy dziewcząt i chłopców odpowiednio przez $\overline{x}_d$ i $\overline{y}_c$. Wówczas $\overline{x}_d = 40$ i $\overline{y}_c = 35$.

Obliczamy średni czas $\overline{x}$ powrotu ze szkoły do domu dla całej grupy uczniów (jest on średnią ważoną liczb $\overline{x}_d$ i $\overline{y}_c$):

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot \overline{x}_d + 3 \cdot \overline{y}_c}{4+3} = \frac{4 \cdot 40 + 3 \cdot 35}{7} = \frac{265}{7} \approx 37{,}86$$

Wariancja dla czworga dziewcząt dana jest wzorem:

$$\sigma_d^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} - (\overline{x}_d)^2$$

Zatem:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4(\sigma_d^2 + (\overline{x}_d)^2) = 4(4^2 + 40^2) = 6464$$

Wariancja dla trzech chłopców dana jest wzorem:

$$\sigma_c^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} - (\overline{y}_c)^2$$

Zatem:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3(\sigma_c^2 + (\overline{y}_c)^2) = 3(2^2 + 35^2) = 3687$$

Obliczamy wariancję dla całej siedmioosobowej grupy:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{7} - (\overline{x})^2 \approx \frac{6464 + 3687}{7} - (37{,}86)^2 \approx 16{,}76$$

Zatem odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 4{,}09$ min

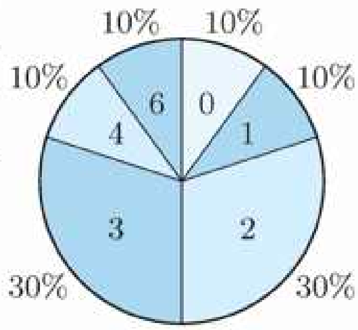
Odpowiedź: Odchylenie standardowe dla całej grupy wynosi 4,09 min.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. W pewnej firmie jest zatrudnionych 10 osób. Ich miesięczne wynagrodzenia wynoszą: 2900 zł, 3100 zł, 3100 zł, 3240 zł, 3290 zł, 3300 zł, 3320 zł, 3750 zł, 5800 zł, 8000 zł. Ilu pracowników tej firmy ma wynagrodzenie wyższe od wynagrodzenia średniego?

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

2. Grupie 50 losowo wybranych osób w pewnym mieście zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?". Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. O ile mediana otrzymanych danych jest niższa od ich średniej arytmetycznej?

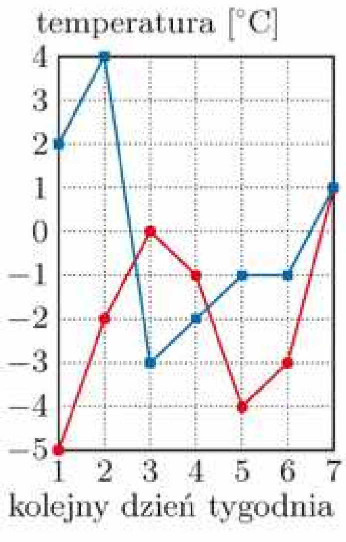


A. 0,1 **C.** 0,3
B. 0,2 **D.** 0,4

3. Liczby a, b, c, d ustawiono w kolejności rosnącej, a ich mediana jest równa 7. Jeśli $bc = 24$, to:

A. $(b-c)^2 = 0$, **C.** $(b-c)^2 = 100$,
B. $(b-c)^2 = 25$, **D.** $(b-c)^2 = 144$.

4. Rafał przez dwa tygodnie ferii, codziennie o godzinie 12, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawił na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczył wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym – z drugiego).
Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią temperaturę w pierwszym tygodniu, $\overline{x}_2$ – w drugim, a $\overline{x}_3$ – w obu tygodniach. Wówczas:



A. $\overline{x}_2 < \overline{x}_1 < \overline{x}_3$, **C.** $\overline{x}_1 < \overline{x}_3 < \overline{x}_2$,
B. $\overline{x}_3 < \overline{x}_1 < \overline{x}_2$, **D.** $\overline{x}_2 < \overline{x}_3 < \overline{x}_1$.

5. W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag. Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią tych liczb z wagami X, a $\overline{x}_2$ – ich średnią z wagami Y. Wówczas $\overline{x}_2 - \overline{x}_1$ jest równe:

Liczba	10	15	20
Waga X	0,5	0,4	0,1
Waga Y	0,3	1,2	1,5

A. 6, **B.** 4, **C.** 2, **D.** 0.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Karolina ma z chemii następujące oceny: 5, 2, 3, x, 5, $x+1$, 5, 3, 2. Oblicz x, jeśli wiadomo, że średnia ocen wynosi 4. Wyznacz ich medianę i dominantę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wynik egzaminu jest średnią ważoną punktów uzyskanych z testów: z matematyki z wagą 0,5, z geografii z wagą 0,2 oraz z języka obcego z wagą 0,3. Ile może wynosić wynik z matematyki kandydata X, jeśli zdał on egzamin lepiej od kandydata Y, ale gorzej od kandydata Z?

Kandydat	X	Y	Z
Matematyka	x	40	60
Geografia	40	50	40
Język obcy	60	60	50

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 3 (4 pkt)

Uczniowie pisali sprawdzian w trzech grupach A, B i C, liczących odpowiednio 8, 10 i 6 osób. Średnia ocen w grupach A i B łącznie wyniosła 4, a w grupach B i C łącznie wyniosła 3. Oblicz średnią ocen dla każdej z grup, jeśli średnia całej klasy była równa 3,5.

Zadanie 4 (4 pkt)

Pewna firma ma trzy zakłady produkcyjne. W tabeli podano informacje o średnich zarobkach w tych zakładach.

	Zakład I	Zakład II	Zakład III
Liczba pracowników	20	15	15
Średnie wynagrodzenie	4000 zł	3600 zł	4400 zł
Odchylenie standardowe	400 zł	500 zł	σ_3

Oblicz odchylenie standardowe zarobków w zakładzie III, jeśli odchylenie standardowe zarobków wszystkich pracowników tych zakładów jest równe 600 zł.

Zadanie 5 (4 pkt)

W fokarium zważono wszystkie foki: osiem samców i cztery samice. Średnia waga samców była równa 250 kg z odchyleniem standardowym 50 kg. Średnia waga samic była równa 150 kg z odchyleniem standardowym 30 kg. Do fokarium przybyły dwie samice ważące po 170 kg. Oblicz średnią wagę oraz odchylenie standardowe wag wszystkich fok przebywających teraz w fokarium.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

1. **a)**, **b)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$
c) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$

2. **a)** 6, 8 **b)** 7, 24

3. **a)** $Ob = 25$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$
b) $Ob = 2(4 + \sqrt{10})$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Ć **1.** **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$
c), **d)** $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$

3. **a)** $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -1$
b) $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$, $\operatorname{ctg} 225^\circ = 1$
c) $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z **1.** **a)** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$
b) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$
c) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$
d) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

3. **a)** $\alpha_0 = 0^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\alpha_3 = 135^\circ$, $\alpha_4 = 180^\circ$, $\alpha_5 = 225^\circ$, $\alpha_6 = 270^\circ$, $\alpha_7 = 315^\circ$

4. **a)** 1 **b)** -2 **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. **a)** $P_4(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_5(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $P_6(-1, 0)$, $P_7(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_8(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_9(0, -1)$, $P_{10}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_{11}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

6. **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** -3 **c)** $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

7. **a)** II **b)** IV **c)**, **d)** III

8. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

9. **a)** $2(\sqrt{2} - 1)$
b) $\alpha = \measuredangle POA = 22{,}5^\circ$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$, $\beta = \measuredangle POC = 112{,}5^\circ$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{2} - 1$, $\operatorname{ctg}\beta = -\sqrt{2} + 1$

1.2. Kąt obrotu

Ć **1.** 390°, 750°, 1470°, -330°, -690°, -1050°

2. **a)** -280°, 440°, 800°
b) -160°, 200°, 920°
c) -410°, 310°, 670°
d) -680°, 40°, 400°

3. a) $2 \cdot 360^\circ + 130^\circ$
b) $3 \cdot 360^\circ + 333^\circ$
c) $-2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$
d) $-10 \cdot 360^\circ + 10^\circ$
e) $3 \cdot 360^\circ + 359^\circ 30'$
f) $-3 \cdot 360^\circ + 35'$
g) $-2 \cdot 360^\circ + 9^\circ 45'$
h) $1 \cdot 360^\circ + 270^\circ 20'$

4. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1
e) $\sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Z **2.** $315^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

3. a) 225° b) 585°
c) 1305° d) -855°

4. a) 60° b) 1140° c) -300°

5. a), b), c), d), e) tak f) nie

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3}$
g) 1 h) -1 i) 0
j) 1 k) -1 l) 0
m) -1 n) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
o) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ p) $\sqrt{3}$

7. a) 390° b) 1110° c) 780°
d) 495° e) 870° f) -300°

8. a) $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$

9. a) 945° b) 720°

10. tak

11. a) 20π cm $\approx 62{,}8$ cm
b) $\frac{250\pi}{3}$ cm $\approx 261{,}8$ cm
c) 480π cm ≈ 15 m 8 cm
d) $175\,200\pi$ cm $\approx 5{,}504$ km lub $175\,680\pi$ cm $\approx 5{,}519$ km (w roku przestępnym)

12. 2,25 cm

1.3. Miara łukowa kąta

Ć **1.** a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{5}$ d) $\frac{3}{2}\pi$

2. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2}{5}\pi$ d) $\frac{13}{3}\pi$ e) $\frac{\pi}{16}$

3. a) 15° b) 150° c) 144°
d) 342° e) 336°

4.

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 0 f) 0
g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Z **3.** a) $\frac{1}{9}\pi$ b) $\frac{7}{4}\pi$ c) $\frac{17}{4}\pi$
d) $-\frac{7}{3}\pi$ e) $-\frac{55}{9}\pi$

4. a) 135° b) 105° c) 320°
d) -405° e) -780°

5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

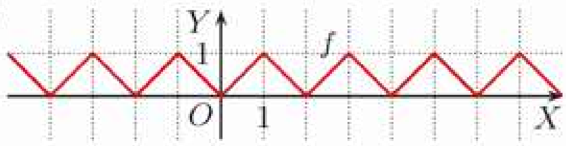
1.4. Funkcje okresowe

Ć **1.** $T = 2$, $f(100) = 2$, $f(100\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

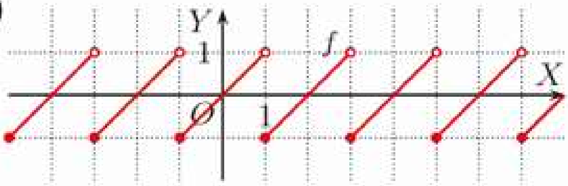
2. a) $T = 2$, $f(-11) = 1$, $f(80\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(103) = 1$
b) $T = 4$, $f(-11) = 1$, $f(80\frac{1}{2}) = 1$, $f(103) = -1$

Z **1.** a) $f(33) = 1$, $f(42) = 3$, $f(-48) = -1$
b) $f(33) = 3$, $f(42) = 1$, $f(-48) = 1$

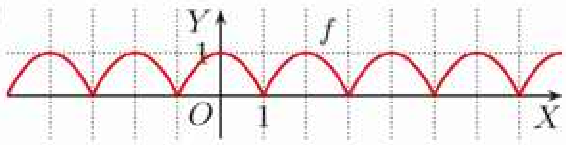
4. a)



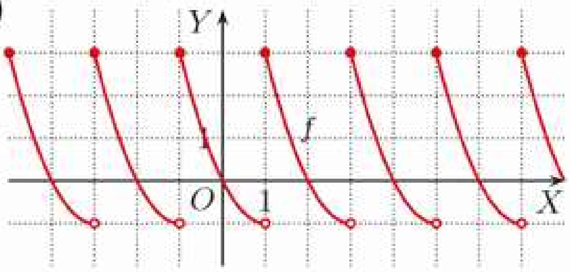
b)



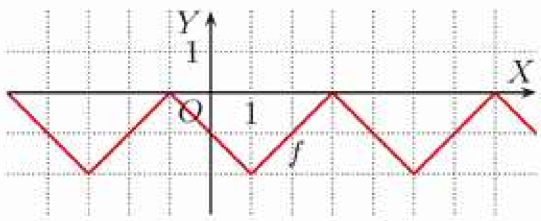
c)



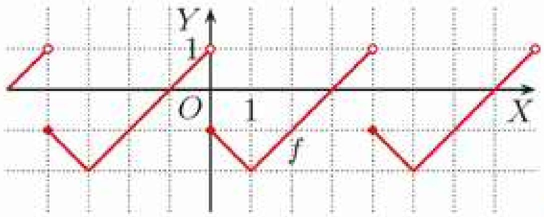
d)



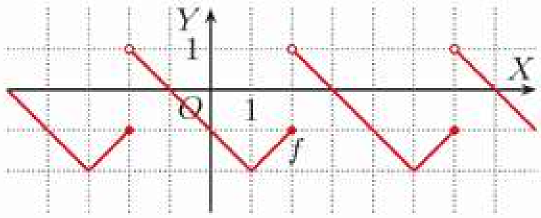
5. a)



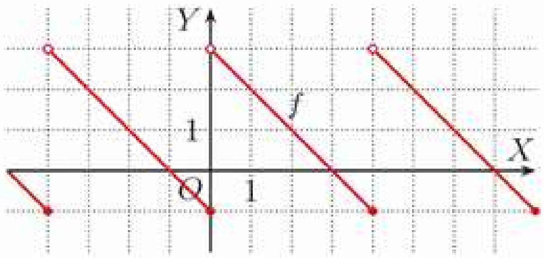
b)



c)

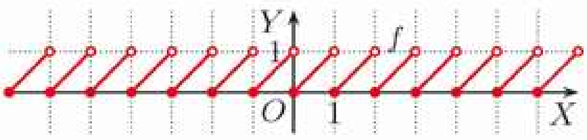


d)

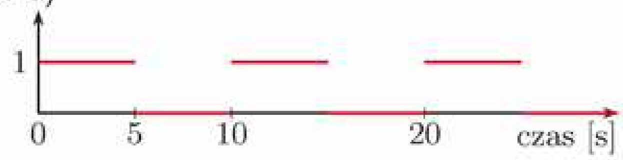


6. a) 100 **b)** 20 200

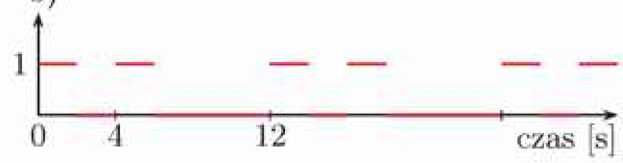
7. $T = 1$



8. a)



b)



1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Ć **1. a)** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. a) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$
b) $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$
c) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$
d) $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$

4. a) $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

5. osie symetrii: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
środki symetrii: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

6. a) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$
b) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$
c) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
d) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$

Z **1. a)** 3 **b)** 5 **c)** 5 **d)** 10

2. a) $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$
b) $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$
c) $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$
d) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

3. a) $(-2\pi; -\pi)$, $(0; \pi)$
b) $\left\langle -2\pi; -\frac{3\pi}{2} \right\rangle$, $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $\left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$
c) $\left\langle -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

4. a) $\left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right)$, $\left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right\rangle$
b) $\langle -\pi; 0 \rangle$, $\langle \pi; 2\pi \rangle$
c) $\langle 0; \pi \rangle$, $\langle 2\pi; 3\pi \rangle$

5. a) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,
5 dla $m = 0$
b) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
3 dla $m = 0$,
4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
c) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
2 dla $m = -1$,
3 dla $m = 1$,
4 dla $m \in (-1; 1)$
d) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
1 dla $m = -1$,
2 dla $m = 1$,
4 dla $m \in (-1; 1)$

6. a) 15π **b)** 0

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

1. a), b), f), g), i) nieparzysta
c), d), e), h), k) parzysta
j), l) ani parzysta, ani nieparzysta

1.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens

Ć **2.** $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

3. a) -3 b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{5}{8}$

4. a) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

5. $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, $f(D) = \mathbf{R}$,
miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
maleje w każdym z przedziałów
$(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$,
asymptoty: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

6. $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

7. a) $-\sqrt{3}$ b) -1 c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Z **1.** a) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; π
b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{5}{4}\pi$
c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{7}{4}\pi$
d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{11}{6}\pi$
e) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{7}{6}\pi$
f) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{7}{4}\pi$

2. a) $x = \frac{7}{3}\pi$ b) $x = -\frac{8}{3}\pi$
c) $x = \frac{19}{4}\pi$ d) $x = \frac{10}{3}\pi$
e) $x = -\frac{13}{4}\pi$ f) $x = \frac{19}{4}\pi$

3. a) 10π b) 7π c) $\frac{28}{3}\pi$
d) 9π e) $\frac{26}{3}\pi$ f) 8π
g) 7π h) $\frac{22}{3}\pi$

4. a) $x \approx \frac{21}{10}\pi$
b) $x \approx \frac{27}{10}\pi$

5. a) $x = -\frac{11}{12}\pi$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{13}{12}\pi$
b) $x = -\frac{7}{8}\pi$, $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{9}{8}\pi$
c) $x = -\frac{7}{12}\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi$, $x = \frac{17}{12}\pi$

6. a), c) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

1.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

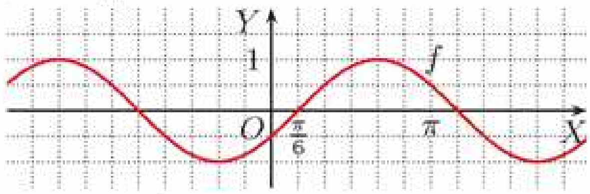
Ć **1.** a), b) $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$, $T = 2\pi$
c) $f(D) = \langle -2; 0 \rangle$, $T = 2\pi$
d) $f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$, $T = 2\pi$
e) $f(D) = \langle -2; 0 \rangle$, $T = 2\pi$
f) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$, $T = 2\pi$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$
b), f) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$
d), e) $D = \mathbf{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbf{Z} \}$

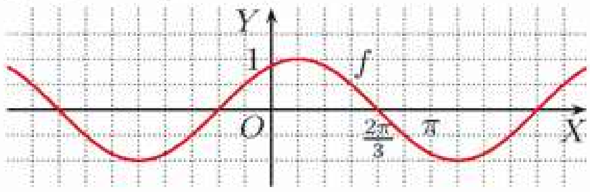
3. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$,
$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$,
$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$,
$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

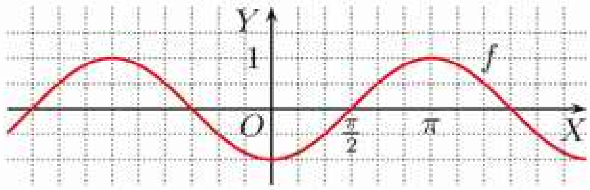
Z **1.** a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$



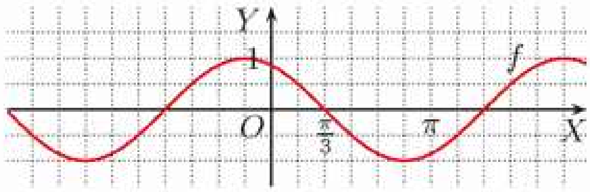
b), c) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$



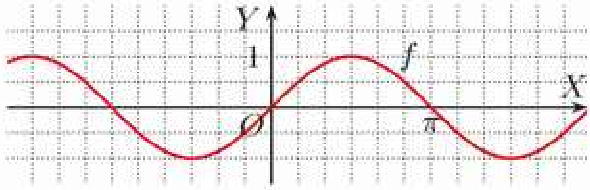
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$



e) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

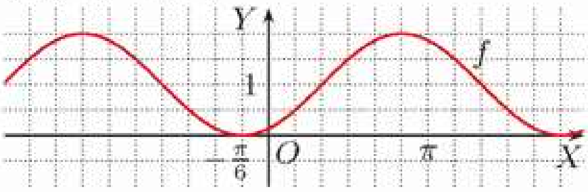


f) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

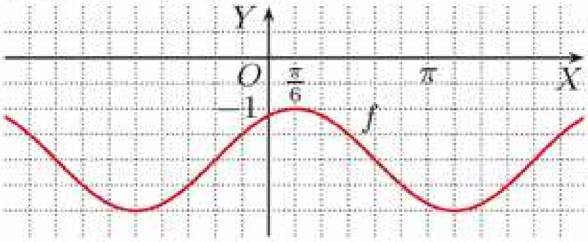


2. **a)** $f(D) = \langle 2; 4\rangle$ **b)** $f(D) = \langle 1; 3\rangle$
c) $f(D) = \langle -3; -1\rangle$ **d)** $f(D) = \langle 0; 2\rangle$
e) $f(D) = \langle 1; 3\rangle$ **f)** $f(D) = \langle -4; -2\rangle$

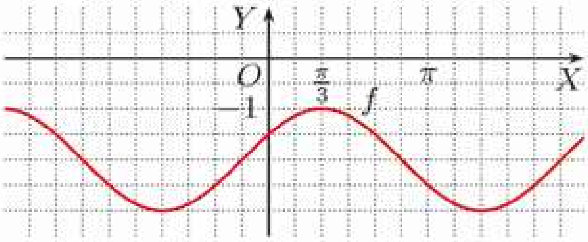
3. **a)** $f(D) = \langle 0; 2\rangle$



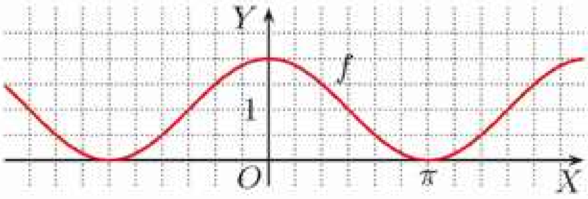
b) $f(D) = \langle -3; -1\rangle$



c) $f(D) = \langle -3; -1\rangle$

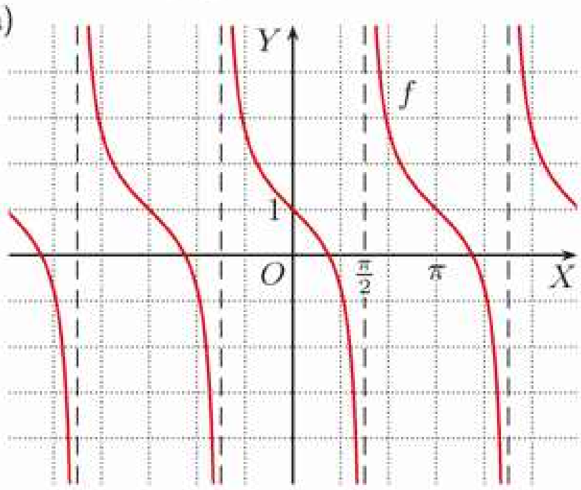


d) $f(D) = \langle 0; 2\rangle$

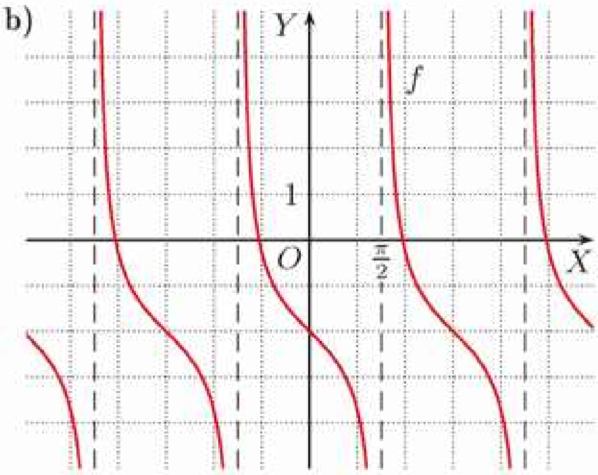


4. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{5}{6}\pi + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$

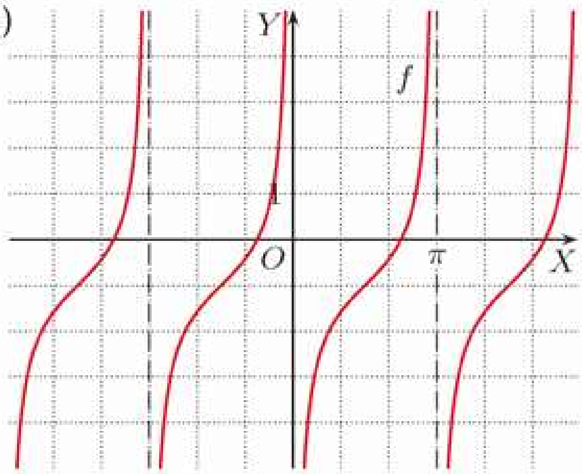
5. **a)**



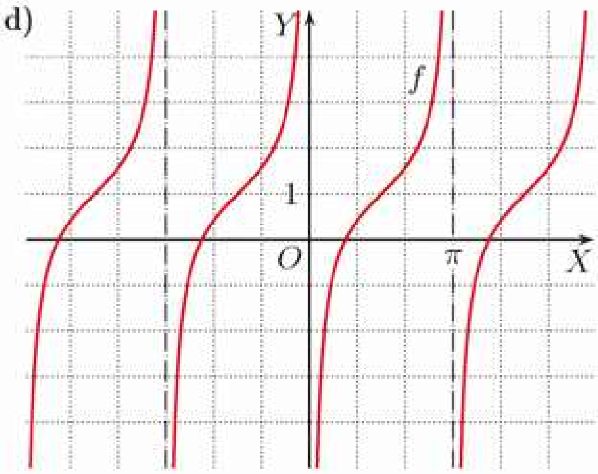
b)



c)



d)



6. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

7. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

8. **a)** $x = -\frac{3}{2}\pi,\ x = -\frac{5}{6}\pi,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{7}{6}\pi$
b) $x = -\frac{3}{4}\pi,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{5}{4}\pi,\ x = \frac{7}{4}\pi$
c) $x = -\frac{11}{6}\pi,\ x = -\frac{3}{2}\pi,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{2}$
d) $x = -\frac{4}{3}\pi,\ x = -\pi,\ x = \frac{2}{3}\pi,\ x = \pi$

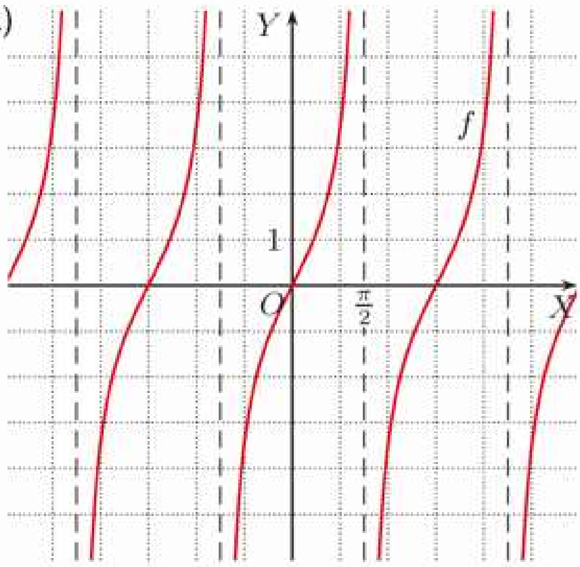
9. **a)** $\langle 3; 5\rangle$ **b)** $\langle -4; -2\rangle$
c) $\left\langle -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right\rangle$ **d)** $\langle -1; 1\rangle$
e) $\langle 2; 4\rangle$ **f)** $\langle -2; 0\rangle$
g) $\langle 1; 2\rangle$ **h)** $\langle 0; 1\rangle$ **i)** $\langle 2; 3\rangle$

1.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

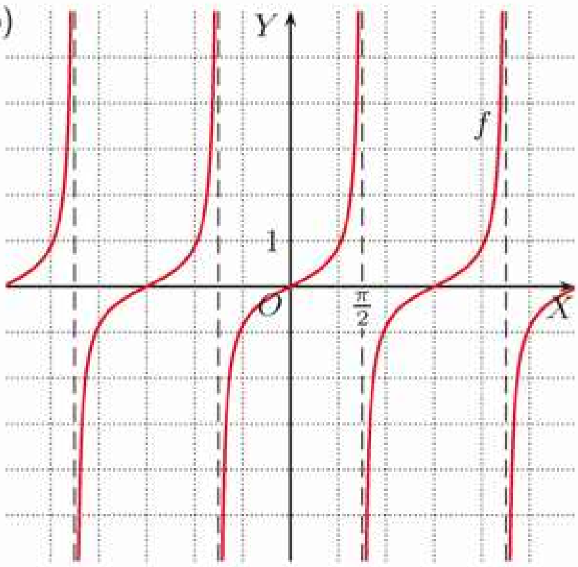
Ć **1.** **a)** niebieski: f, $f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$;
zielony: g, $g(D) = \langle -1; 1\rangle$;
czerwony: h, $h(D) = \langle -2; 2\rangle$
b) czerwony: f, $f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$;
zielony: g, $g(D) = \langle -1; 1\rangle$;
niebieski: h, $h(D) = \langle -2; 2\rangle$

2. **a)** $f(D) = \langle -3; 3\rangle$, amplituda: 3
b) $f(D) = \langle -4; 4\rangle$, amplituda: 4
c) $f(D) = \left\langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\rangle$, amplituda: $\frac{3}{2}$
d) $f(D) = \langle -2; 2\rangle$, amplituda: 2
e) $f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$, amplituda: $\frac{1}{2}$
f) $f(D) = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\rangle$, amplituda: $\frac{5}{2}$

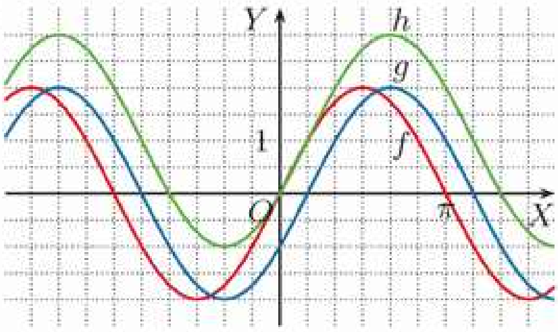
3. **a)**



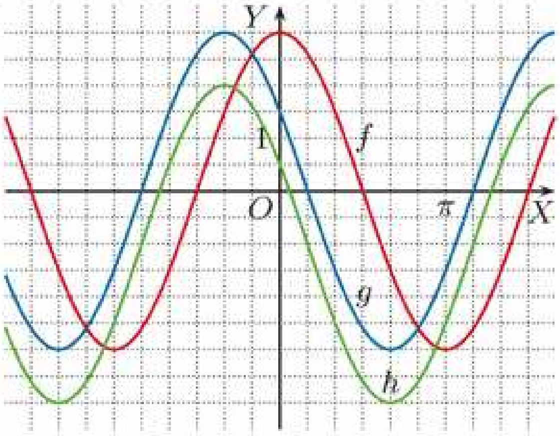
b)



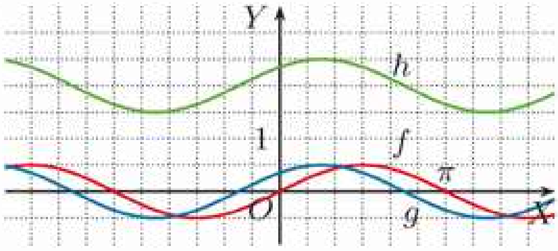
Z **1.** **a)**



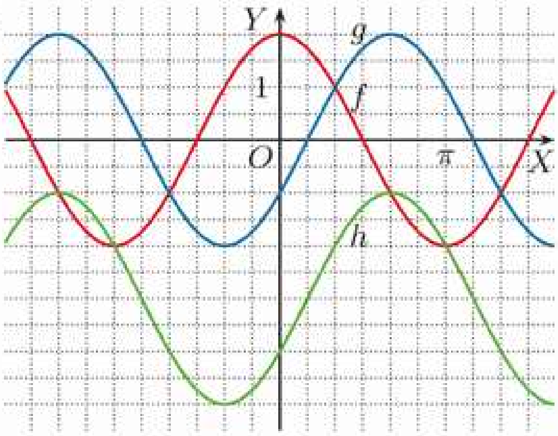
b)



c)



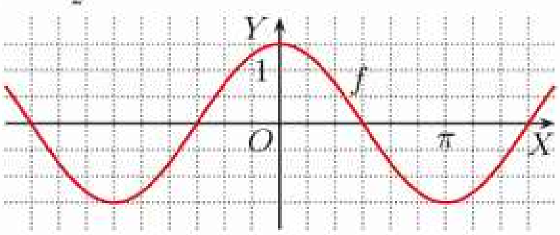
d)



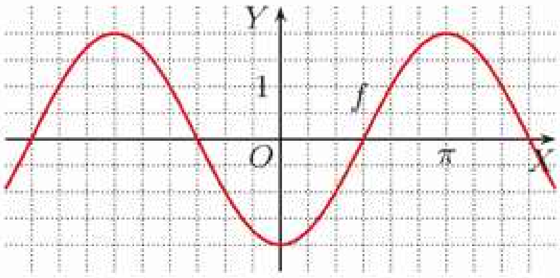
2. **a)** $f(D) = \langle -2; 2\rangle$ **b)** $f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$
c) $f(D) = \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\rangle$ **d)** $f(D) = \langle -3; 1\rangle$

4. $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -2$;
amplitudy – f_1: 4, f_2: $\frac{3}{2}$, f_3: 2

5. **a)** $a = \frac{3}{2}$

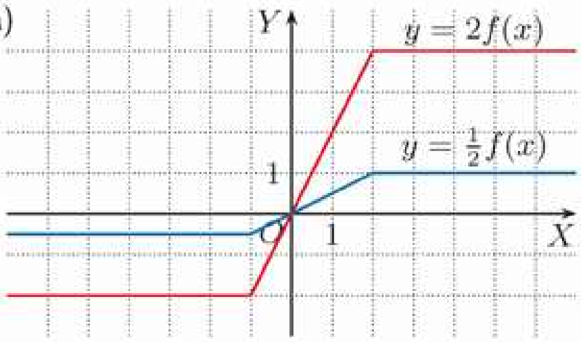


5. **b)** $a = -2$

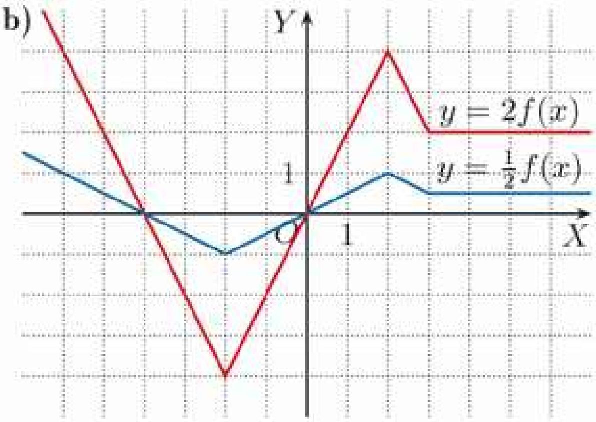


6. **a)** $a = 6$ **b)** $a = \sqrt{2}$
c) $a = -\sqrt{3}$ **d)** $a = -6\sqrt{3}$

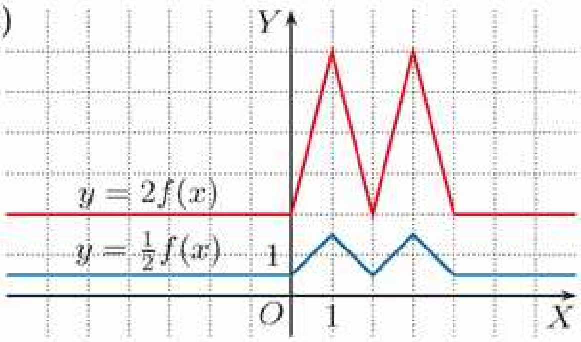
7. **a)**



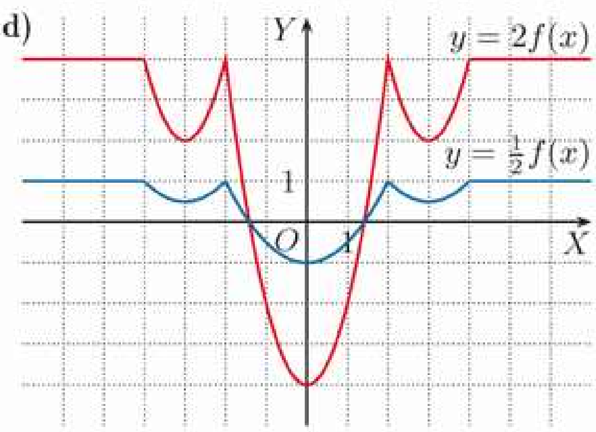
b)



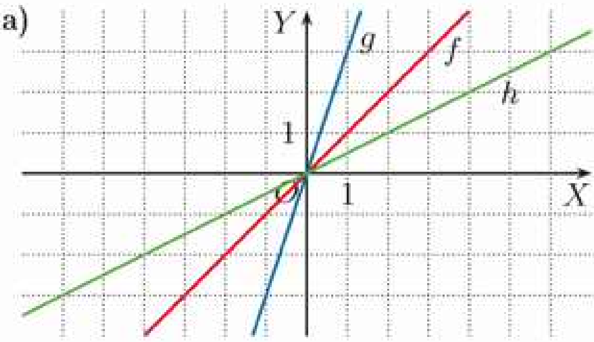
c)



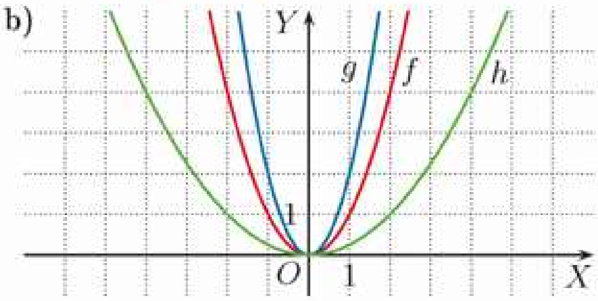
d)



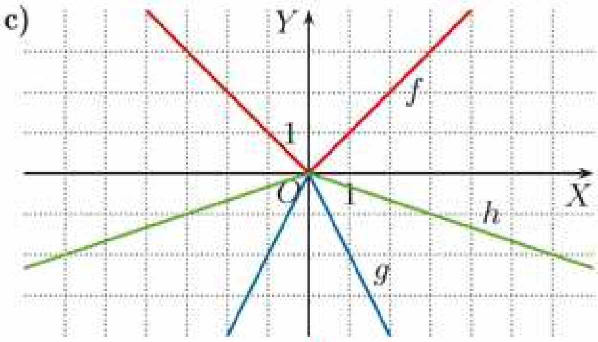
8. **a)**



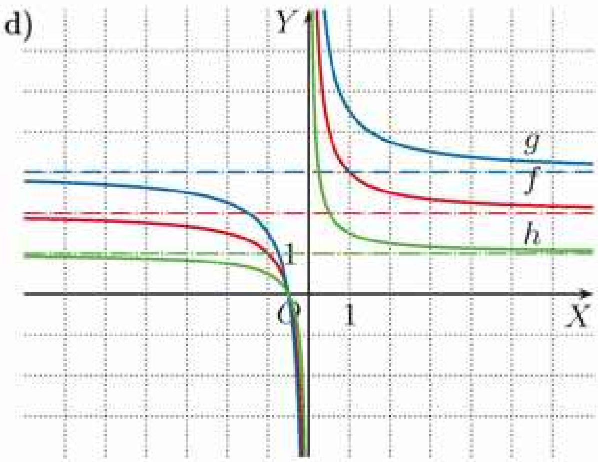
b)



c)



d)



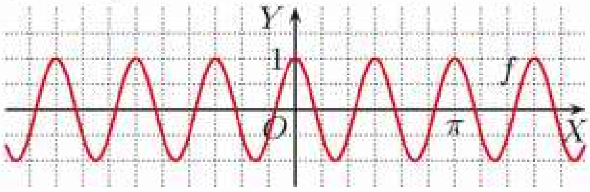
9. Tylko wtedy, gdy funkcja f ma miejsca zerowe.

1.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

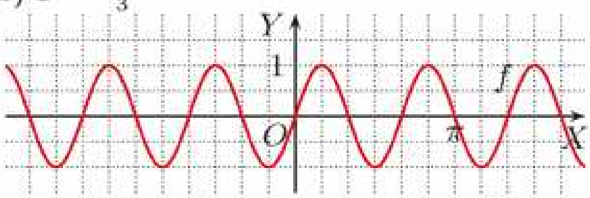
Ć **1.** $T = \frac{\pi}{2}$, miejsca zerowe: $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$

2. niebieski: f, $T = 2\pi$,
miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
czerwony: g, $T = \pi$,
miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;
zielony: h, $T = 4\pi$,
miejsca zerowe: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

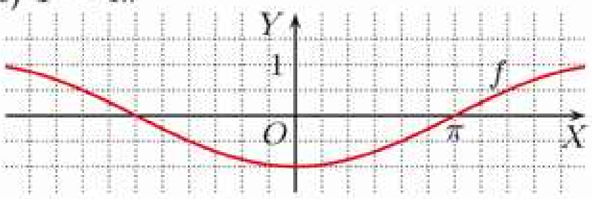
3. **a)** $T = \frac{\pi}{2}$



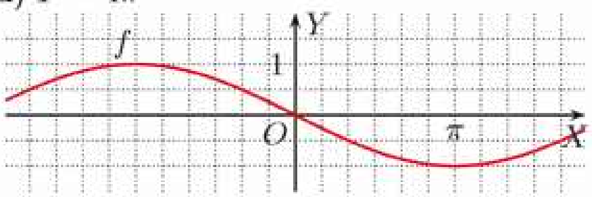
b) $T = \frac{2\pi}{3}$



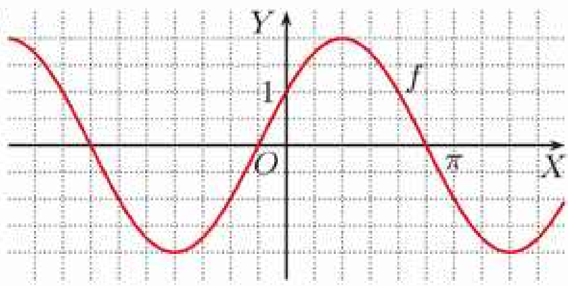
c) $T = 4\pi$



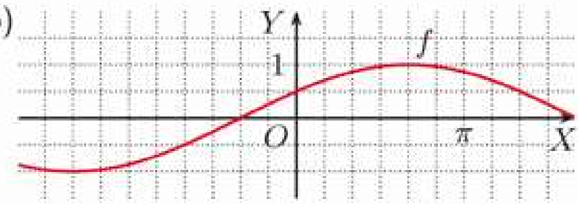
d) $T = 4\pi$



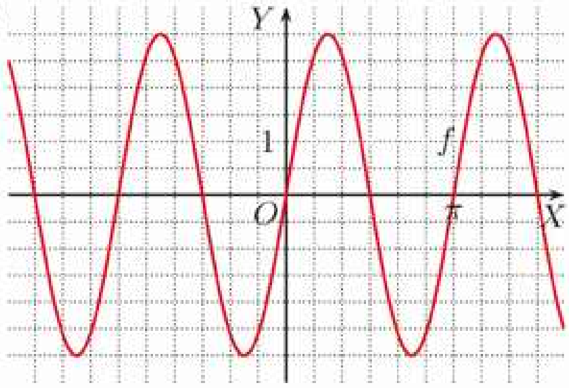
4. **a)**



b)



c)

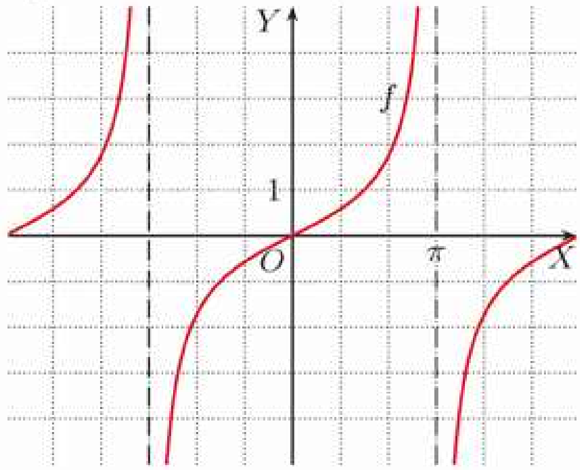


5. **a)** $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$

b) 0 **c)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}$

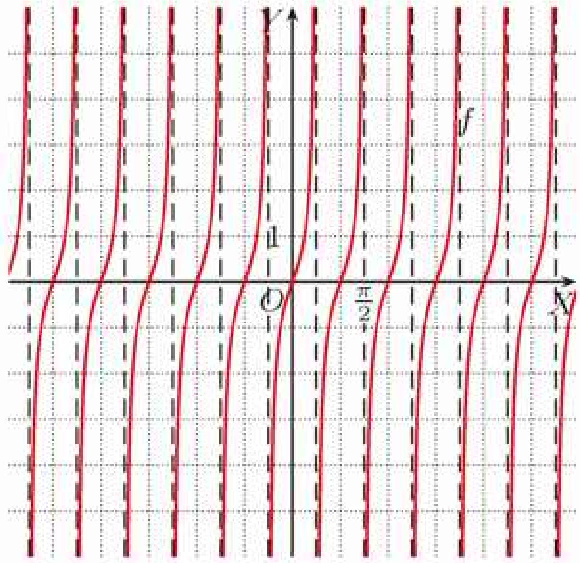
6. **a)** $T = 2\pi$,

miejsca zerowe: $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$



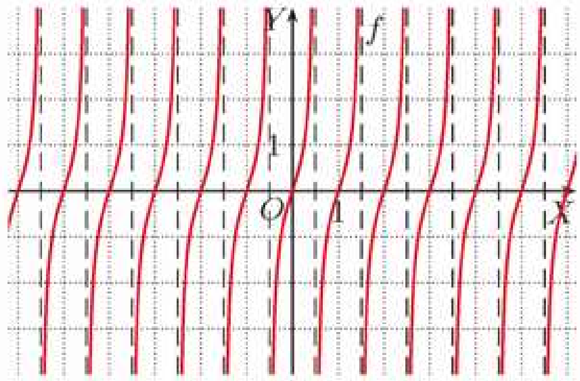
b) $T = \frac{\pi}{3}$,

miejsca zerowe: $x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$



c) $T = 1$,

miejsca zerowe: $x = k,\ k \in \mathbf{Z}$



Z **1.** **a)** $T = \pi,\ f(D) = \langle -3; 3 \rangle$

b) $T = \pi,\ f(D) = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

c) $T = \frac{2}{3}\pi,\ f(D) = \langle -2; 2 \rangle$

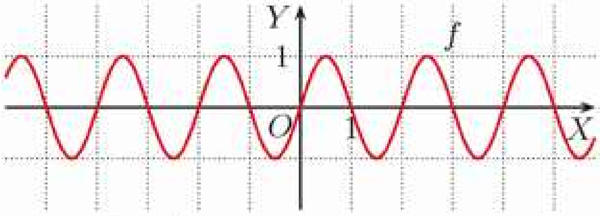
d) $T = 4\pi,\ f(D) = \langle -3; 3 \rangle$

e) $T = \frac{2}{3}\pi,\ f(D) = \langle -4; 4 \rangle$

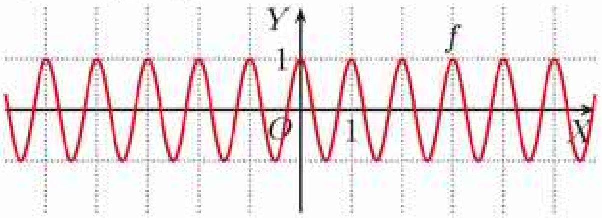
f) $T = 4\pi,\ f(D) = \langle -2; 2 \rangle$

2. **a**), **b**) $T = \pi$, $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$
c), **e**) $T = \pi$, $f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
d) $T = \frac{\pi}{2}$, $f(D) = \langle -3; 3 \rangle$
f) $T = \frac{2}{3}\pi$, $f(D) = \langle -1; 1 \rangle$

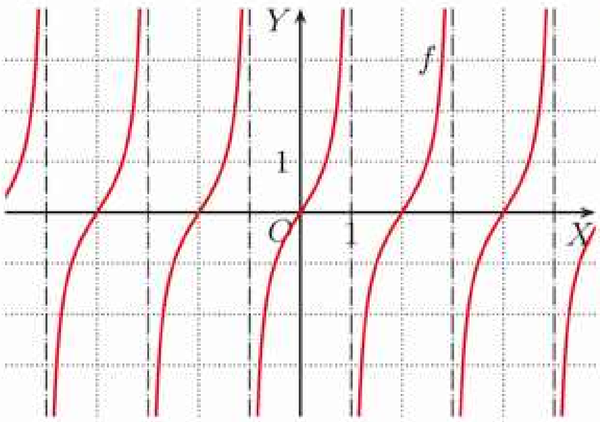
3. **a**) $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$



b) $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$



c) $x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$



4. **a**) wartość największa: 3,
wartość najmniejsza: -1
b) wartość największa: 1,
wartość najmniejsza: -5

5. **a**) $A = 2$, $B = 2$, $C = 1$
b) $A = -1$, $B = 3$, $C = -1$
c) $A = -1$, $B = 6$, $C = -\frac{1}{2}$

6. **a**) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi + 3k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_f = 3\pi$;
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{(3k+2)\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$,
$g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
$T_g = 3\pi$
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_f = \frac{\pi}{2}$;
$D_g = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$,
$g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,
$T_g = \frac{\pi}{2}$
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_f = 2\pi$;
$D_g = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$,
$g(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = 2\pi$
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\}$, $f(x) = 0$ dla
$x = \frac{3}{2}\pi + 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_f = 3\pi$;
$D_g = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + 3k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$, $g(x) = 0$
dla $x = \frac{11}{6}\pi + 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $T_g = 3\pi$

Ruch po okręgu

1. $v \approx 1072$ km/h

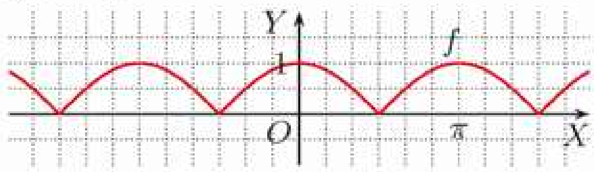
2. 4 razy

3. około 10,2 obrotu; $20{,}4\pi$ rad/s

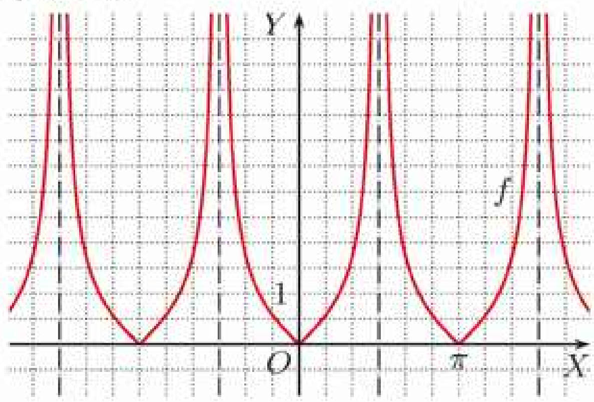
4. prędkość liniowa: około 6,28 km/h,
prędkość kątowa: $\frac{5}{9}\pi$ rad/s

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

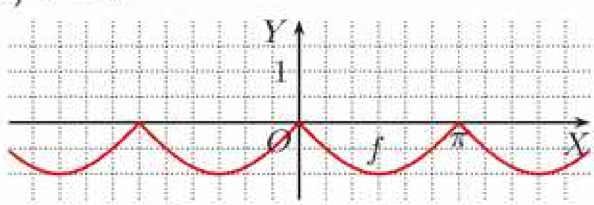
Ć **1.** **a**) $T = \pi$



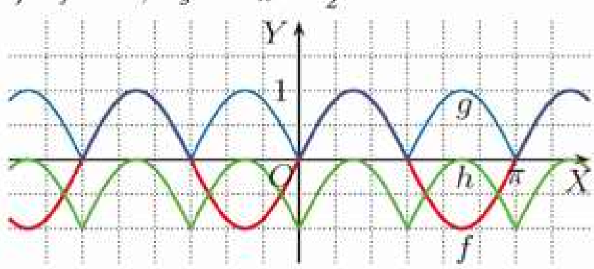
b) $T = \pi$



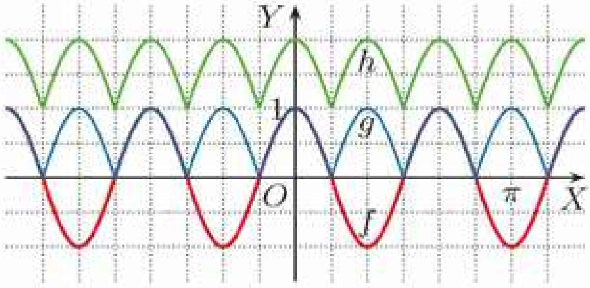
c) $T = \pi$



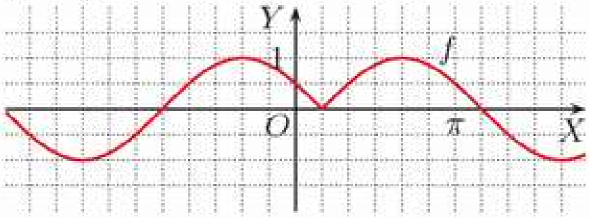
2. **a**) $T_f = \pi$, $T_g = T_h = \frac{\pi}{2}$



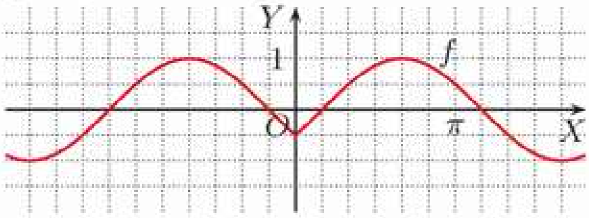
2. b) $T_f = \frac{2\pi}{3}$, $T_g = T_h = \frac{\pi}{3}$



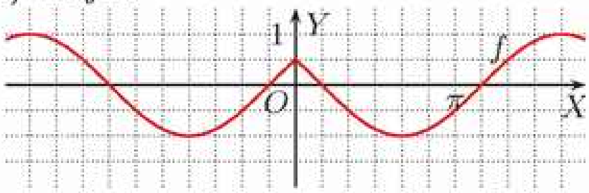
3. a) nie jest



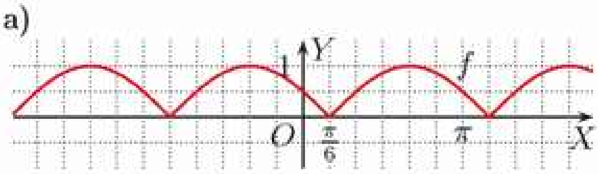
b) nie jest



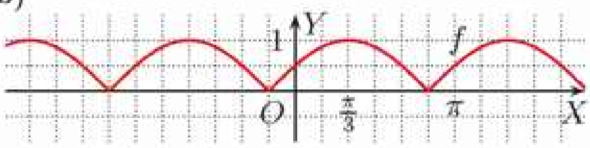
c) nie jest



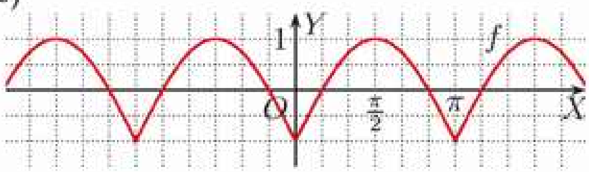
Z 1. a)



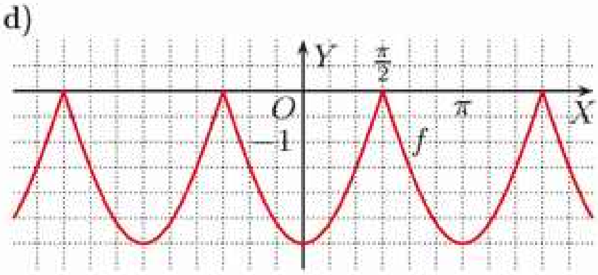
b)



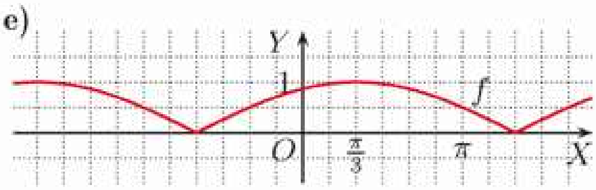
c)



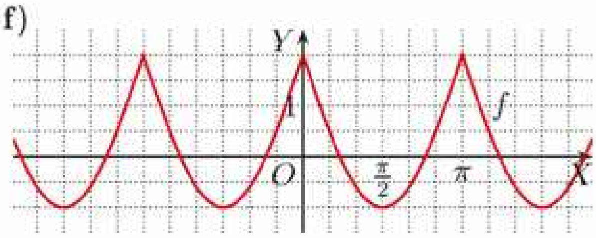
d)



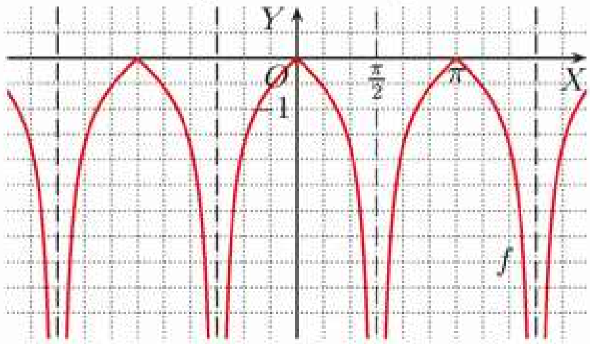
e)



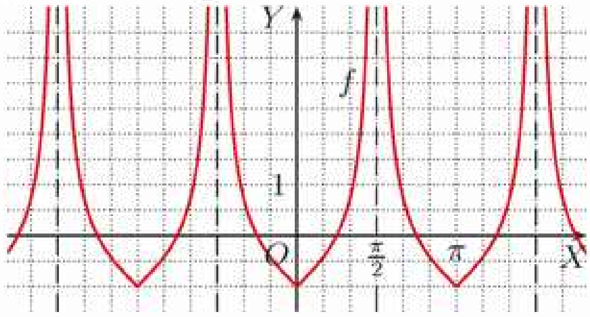
f)



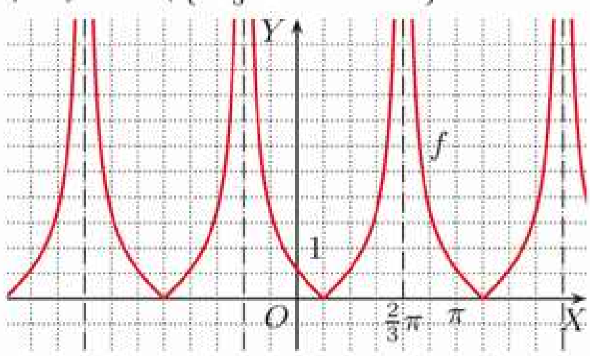
2. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$



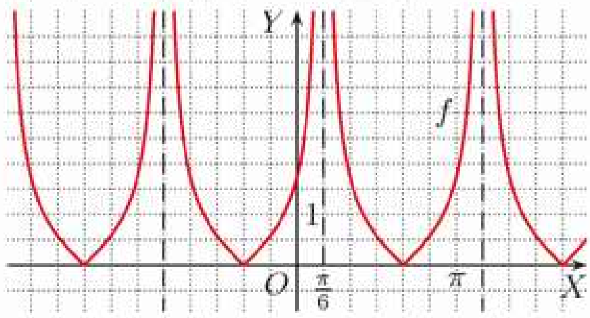
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$



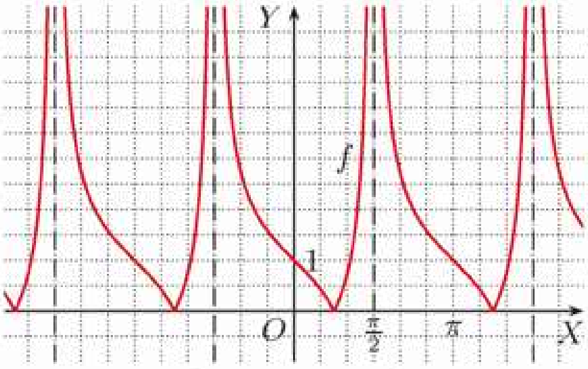
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$



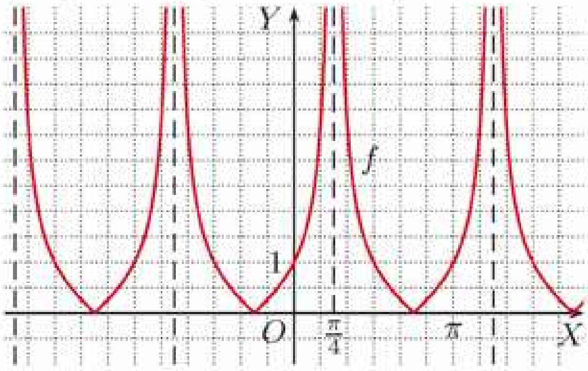
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$



2. e) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$



f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbf{Z}\right\}$

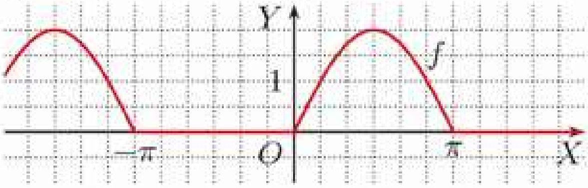


3. a) $T = \frac{\pi}{2}$, $f(D) = \langle 0; 1\rangle$
b) $T = 2\pi$, $f(D) = \langle 0; 1\rangle$
c) $T = \frac{\pi}{3}$, $f(D) = \langle 0; 2\rangle$
d) $T = \frac{\pi}{3}$, $f(D) = \langle 0; 4\rangle$
e) $T = \frac{\pi}{2}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
f) $T = 2\pi$, $f(D) = \langle 0; \infty)$

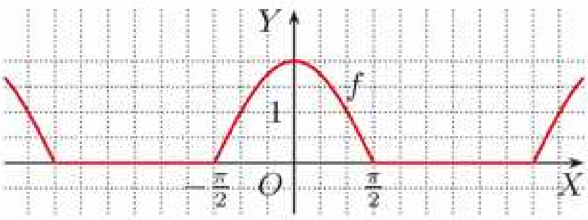
4. a) $a \in \langle 2; 3\rangle$ **b)** $a \in \langle -1; 0\rangle$
c) $a \in \langle -1; 0\rangle$

5. a), b) $f(D) = \langle -1; 1\rangle$
c) $f(D) = \langle 1; 3\rangle$
d) $f(D) = \langle 0; 2\rangle$
e) $f(D) = \langle -3; 1\rangle$
f) $f(D) = \langle -2; 4\rangle$

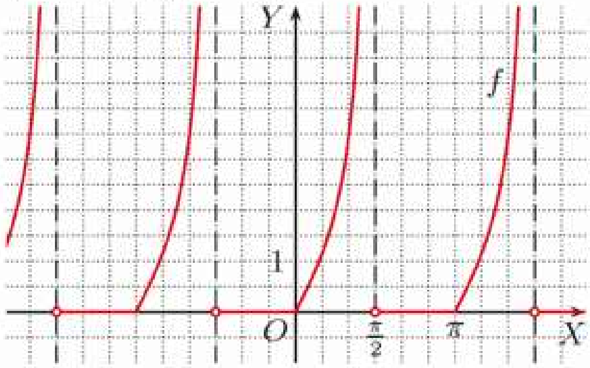
6. a) $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$



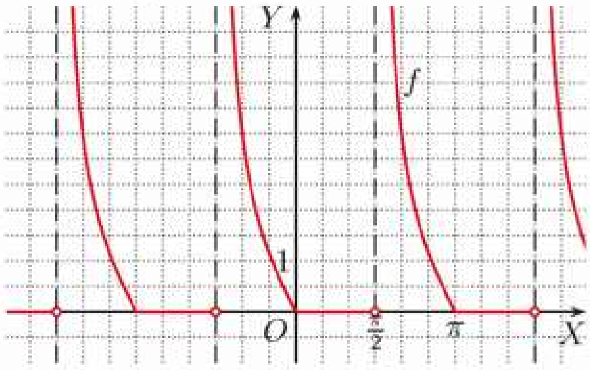
b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$



c) $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$



d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$



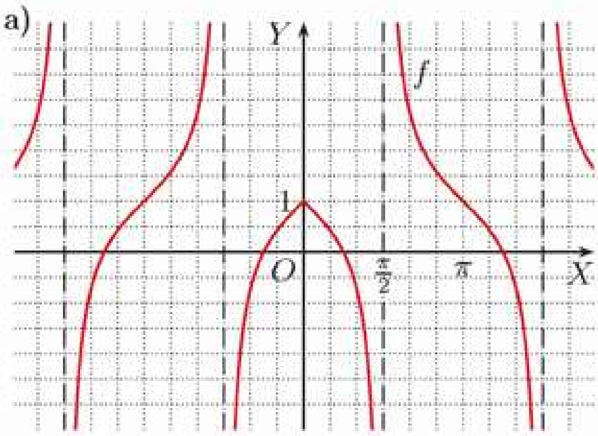
7. 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
4 dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$,
7 dla $m = 1$,
8 dla $m \in (0; 1)$

8. a) $f(D) = \langle -3; 3\rangle$, $g(D) = \langle 0; 3\rangle$
b) $f(D) = \langle 0; 2\rangle$, $g(D) = \langle 0; 2\rangle$
c) $f(D) = \langle -5; -1\rangle$, $g(D) = \langle 1; 5\rangle$
d) $f(D) = \langle 1; \infty)$, $g(D) = \langle 1; \infty)$
e) $f(D) = \left\langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle$, $g(D) = \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\rangle$
f) $f(D) = (0; 1\rangle$, $g(D) = (0; 1\rangle$

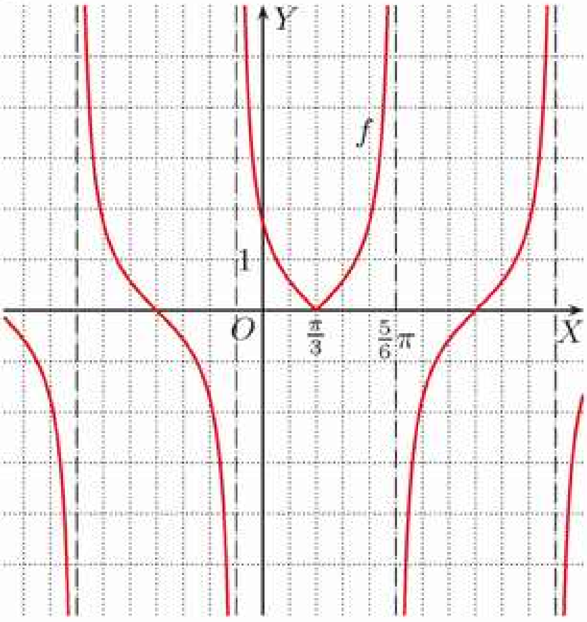
9. a) $a \in \langle 0; 3\rangle$ **b)** $a \in \langle 1; 2\rangle$ **c)** $a \in \langle 2; \infty)$
d) $a \in \langle 0; \infty)$ **e)** $a \in \left\langle \frac{1}{3}; 1\right\rangle$ **f)** $a \in \left\langle \frac{1}{2}; 1\right\rangle$

10. $|\operatorname{tg} x| = 1$ dla $x \in \{-\frac{7}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$,
$\operatorname{tg}|x| = 1$ dla $x \in \{-\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$

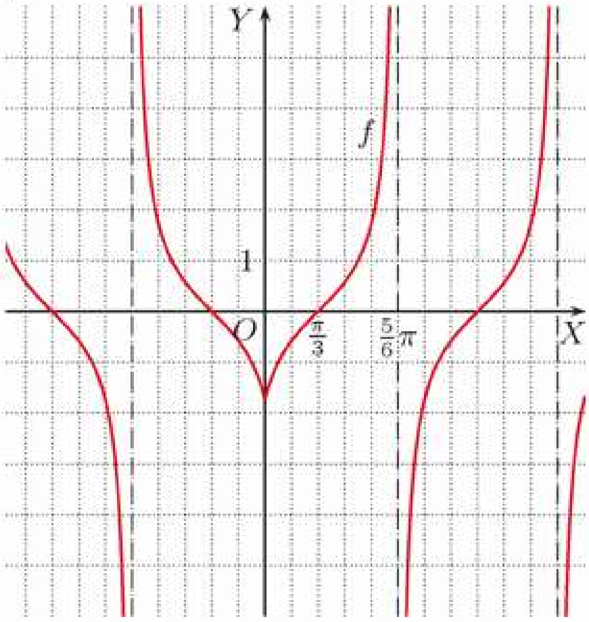
11. a)



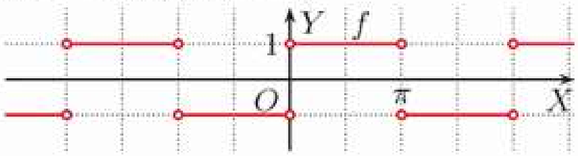
11. b)



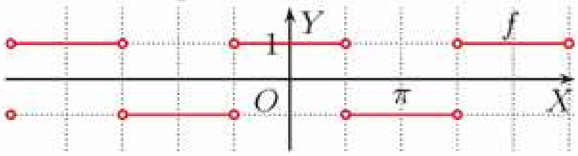
c)



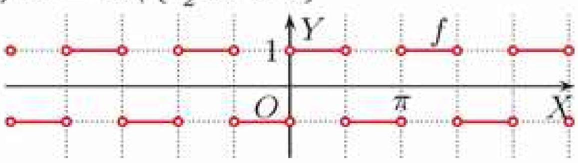
12. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$



b) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$



c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$



1.11. Tożsamości trygonometryczne

Ć **6.** **a)** $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}$

b) $\sin x = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{2}$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{23}}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{46}}{23}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{46}}{2}$

8. **a)** $\sin x = -\frac{5}{13}$, $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = 2$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg} x = -3$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}$

Z **4.** **a)** $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{15}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{15}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{15}}{15}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -3$

5. **a)** $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{2}$ lub $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} x = -2\sqrt{2}$

b) $\cos x = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$ lub $\cos x = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{5}{12}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} x = 2$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} x = -2$

e) $\cos x = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{24}{7}$ lub $\cos x = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{24}{7}$

f) $\sin x = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{7}{24}$ lub $\sin x = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}$

g) $\cos x = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{15}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ lub $\cos x = -\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{15}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{15}}{15}$

h) $\sin x = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{21}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = -2$
b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = -2$
c) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\sin x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$

7. a) $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$
lub $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$
b) $\sin x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$ lub $\sin x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\cos x = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$
c) $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\cos x = \frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$
lub $\sin x = \frac{12}{13}$, $\cos x = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$
d) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = 2$
lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} x = 2$

8. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 7$, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 18$

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych

2. tak

3.

α	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\alpha$	0,309	0,434	0,707
$\cos\alpha$	0,951	0,901	0,707

1.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Ć **1. a)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **b), c)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** -1 **d)** 0

5. a) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$
b) $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$

6. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{50+20\sqrt{5}}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{50-20\sqrt{5}}}{10}$

8. a) $2-\sqrt{3}$ **b)** $2+\sqrt{3}$ **c)** $-2-\sqrt{3}$ **d)** $-\sqrt{3}$

Z **1. a)** $\sin(30^\circ+\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$,
$\sin(60^\circ-\beta) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$
b) $\sin(30^\circ+\beta) = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$,
$\sin(60^\circ-\beta) = -\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
c) $\sin(30^\circ+\beta) = \frac{5-12\sqrt{3}}{26}$,
$\sin(60^\circ-\beta) = \frac{5\sqrt{3}+12}{26}$
d) $\sin(30^\circ+\beta) = -\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$,
$\sin(60^\circ-\beta) = \frac{7-24\sqrt{3}}{50}$

2. a) $\cos(45^\circ+\beta) = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$,
$\cos(60^\circ-\beta) = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$
b) $\cos(45^\circ+\beta) = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$,
$\cos(60^\circ-\beta) = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

3. a) $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{44}{125}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{117}{125}$
b) $\sin(\alpha-\beta) = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$,
$\cos(\alpha-\beta) = \frac{4\sqrt{7}-9}{20}$
c) $\sin(\alpha-\beta) = 0$, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{7}{9}$

6. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

7. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$
b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$
d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$

8. b) $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

9. a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. a) $f(D) = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$
b), c), d) $f(D) = \langle -2; 2\rangle$

11. a) $\frac{4}{3}$ **b)** 1 **c)** -1 **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$

1.13. Wzory redukcyjne

Ć **2. a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
g) $\frac{1}{2}$ **h)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **i)** 1 **j)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **k)** $-\frac{1}{2}$ **l)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z **2. a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-\frac{1}{2}$ **e)** $-\frac{1}{2}$
f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **h)** $-\sqrt{3}$ **i)** $-\sqrt{3}$ **j)** -1
k) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **l)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $-\frac{1}{2}$
f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **g)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **h)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **i)** -1 **j)** $-\frac{1}{2}$
k) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **l)** $-\sqrt{3}$

4. a) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ **b)** $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ **c)** $-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ **e)** $-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ **f)** $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

5. a) $-\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ **c)** $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

6. a) $\sqrt{3}+2$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **d)** -2 **e)** -3
f) $\sqrt{3}$ **g)** 1 **h)** 1 **i)** 2

7. a) 1 **b)** $-3\sqrt{3}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** 0 **e)** $\frac{3}{4}$ **f)** $\frac{1}{2}$

9. około: **a)** 0,7986 **b)** 0,6561 **c)** 1,5399
d) −0,7547 **e)** −0,7660 **f)** 1,3764

1.14. Równania trygonometryczne (1)

Ć **1.** **a)** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
g) $x = \frac{2}{3} + 8k$, $x = \frac{10}{3} + 8k$, $k \in \mathbf{Z}$
h) $x = \frac{1}{3} + 2k$, $x = \frac{2}{3} + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$
i) $x = \frac{3}{8} + k$, $x = \frac{5}{8} + k$, $k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** 55π **b)**, **c)** 25π

3. **a)** 12 **b)** 16 **c)** 8
d), **e)**, **f)** 9

4. **a)** $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$

5. **a)** 2π **b)** 4π **c)** $\frac{\pi}{2}$

Z **1.** **a)** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{1}{12}\pi + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \pi + 4k\pi$, $x = 2\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

3. **a)** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

4. **a)** $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{1}{6} + k$, $x = \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

5. **a)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,
$x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

6. **a)** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

7. **a)** $-\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi$
b) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$
c) $-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$
d) $-\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$
e) $-\pi, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$
f) $-\pi, -\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, 0,$
$\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{3}{2}\pi,$
$\frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi, 2\pi$

8. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$,
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

1.15. Równania trygonometryczne (2)

Ć **1.** **a)** $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
$x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
b), **c)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

3. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$,
$x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$,
$x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$,
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4. **a)** $0,\ \pi,\ 2\pi$
b) $\frac{\pi}{24},\ \frac{11}{24}\pi,\ \frac{13}{24}\pi,\ \frac{23}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{35}{24}\pi,\ \frac{37}{24}\pi,\ \frac{47}{24}\pi$
c) $\frac{3}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$
d) $\frac{\pi}{8},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi$

$\boxed{\text{Z}}$ **1.** **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
e) $x = (2k+1)\pi,\ x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$
$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$
$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
e) $x = k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi,\ x = \frac{3}{8}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

3. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$
$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

4. **a)** $0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$ **b)** $\frac{\pi}{2},\ \pi$ **c)** $\frac{1}{6}\pi$
d) $\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$
e) $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$
f) $\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

5. **a)** $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$
$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = k\pi,\ x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$
$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

6. **a)** $-\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{2}{3}\pi$
c) $-\frac{3}{4}\pi$ **d)** $-\frac{3}{8}\pi$

7. **a)** $x = 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{2}{7}k\pi,\ x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi,\ x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów

1. **a)** $x = k\pi,\ x = \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{5}{12}\pi + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,$
$x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$
$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4},\ x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)**, **d)** $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

1.16. Nierówności trygonometryczne

$\boxed{\text{Ć}}$ **1.** **a)** $x \in \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$

2. **a)** $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$

3. **a)** $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right)$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \right\rangle$
c) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$

4. **a)** $x \in \left\langle \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right),\ k \in \mathbf{Z}$

5. **a)** $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
d) $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbf{Z}$

6. **a)** $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right),\ k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right),\ k \in \mathbf{Z}$

7. **a)** $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5}{8}\pi \right\rangle \cup \left(\frac{3}{4}\pi; \pi \right\rangle$
b) $x \in \left(\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8} \right) \cup \left(\frac{5}{16}\pi; \frac{3}{8}\pi \right) \cup \left(\frac{9}{16}\pi; \frac{5}{8}\pi \right) \cup$
$\cup \left(\frac{13}{16}\pi; \frac{7}{8}\pi \right)$

Z **1. a)** $x \in \left(-\frac{5}{4}\pi + 2k\pi; \frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\langle -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

2. a) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(-\frac{8}{3}\pi + 4k\pi; \frac{2}{3}\pi + 4k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x \in \left\langle -\frac{5}{3}\pi + 4k\pi; \frac{5}{3}\pi + 4k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x \in \left\langle \frac{2}{3}\pi + k\pi; \pi + k\pi \right)$, $k \in \mathbf{Z}$

3. a) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
d) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$
f) $x \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$

4. a) $x \in \left\langle -\pi; -\frac{2}{3}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right\rangle$
b) $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right)$
c) $x \in \left\langle -\pi; -\frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \pi \right\rangle$
d) $x \in \left\langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{6}\pi; \pi \right\rangle$
e) $x \in \left(-\frac{11}{12}\pi; -\frac{7}{12}\pi\right) \cup \left(-\frac{5}{12}\pi; -\frac{\pi}{12}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{12}; \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi; \frac{11}{12}\pi\right)$
f) $x \in \left(-\frac{7}{8}\pi; -\frac{5}{8}\pi\right) \cup \left(-\frac{3}{8}\pi; -\frac{\pi}{8}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{8}; \frac{3}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{8}\pi; \frac{7}{8}\pi\right)$

5. a) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{4}\pi\right)$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left\langle \frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$
c) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$
d) $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi\right) \cup$
$\cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi\right)$
e) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}\pi; \frac{7}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{12}\pi; \frac{13}{12}\pi\right) \cup$
$\cup \left(\frac{17}{12}\pi; \frac{19}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{23}{12}\pi; 2\pi\right\rangle$
f) $x \in \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{4}{3}\pi\right)$

6. a) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(\frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

7. a) $x \in \left\langle -\pi; -\frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{4}\pi; 3\pi \right\rangle$
b) $x \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{4}\pi; 3\pi\right\rangle$

8. a) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{6}\pi; \pi \right)$
c) $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi; \pi\right)$

9. a) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$

10. a) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x \in \left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; (2k+1)\pi\right) \cup$
$\cup \left((2k+1)\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x \in \mathbf{R}$

11. a) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\rangle \cup$
$\cup \left\langle k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

1.17. Zagadnienia uzupełniające

2. a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $-\frac{\pi}{6}$ **c)** $-\frac{\pi}{2}$
3. a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $\frac{3}{4}\pi$ **c)** π
4. a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{6}$ **c)** $-\frac{\pi}{4}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $\frac{2}{9}\pi$ **b)** $\frac{3}{5}\pi$ **c)** $\frac{11}{18}\pi$ **d)** $\frac{4}{5}\pi$
2. a) 108° **b)** $157{,}5^\circ$ **c)** 100° **d)** 165°
3. a) 0 **b)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **c)** $-\frac{1}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** 8 **f)** $-\frac{1}{2}$
4. a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **b)** -4 **c)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$
d) -1 **e)** -3 **f)** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
5. a) $\alpha \in \{-345^\circ, -195^\circ, 15^\circ, 165^\circ\}$
b) $\alpha \in \{-165^\circ, -15^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$
c) $\alpha \in \{-305^\circ, -55^\circ, 55^\circ, 305^\circ\}$
d) $\alpha \in \{-235^\circ, -125^\circ, 125^\circ, 235^\circ\}$
e) $\alpha \in \{-275^\circ, -95^\circ, 85^\circ, 265^\circ\}$
f) $\alpha \in \{-265^\circ, -85^\circ, 95^\circ, 275^\circ\}$
6. a) $\alpha = 225^\circ$ **b)** $\alpha = 315^\circ$ **c)** $\alpha = 135^\circ$
d) $\alpha = 315^\circ$ **e)** $\alpha = 150^\circ$ **f)** $\alpha = 240^\circ$
7. a) $x = \frac{2}{3}\pi$
b) $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$
c) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$
d) $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = -\frac{\pi}{6}$
e) $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$
f) $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$
g) $x = 3\pi$
h) $x = -\frac{4}{3}\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi$
8. a), c), d) 28π **b)** 32π
9. a) $x = \frac{5}{4}\pi$ **b)** $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$
c) $x = \frac{13}{6}\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi$
d) $x = -\frac{2}{3}\pi$, $x = -\frac{\pi}{3}$

10. 8

11. **a)** $f(D) = \langle 1;3\rangle$, brak miejsc zerowych
b) $f(D) = \langle -2;0\rangle$, $x = \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $f(D) = \mathbf{R}$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $f(D) = \mathbf{R}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

12. **a)** $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$
b) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
c) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$
d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

13. **a)** $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3$
b) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{2}$
c) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

14. **a)**, **b)**, **c)**, **d)** tak

17. **a)** 0 dla $m \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$,
1 dla $m = 0$,
2 dla $m \in (0;2\rangle$
b) 0 dla $m \in (-\infty;-3) \cup (1;\infty)$,
1 dla $m \in \{-3,1\}$,
2 dla $m \in (-3;-1) \cup (-1;1)$,
3 dla $m = -1$
c) 0 dla $m \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right)$,
2 dla $m = \frac{3}{2}$,
3 dla $m = \frac{1}{2}$,
4 dla $m \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

18. **a)** $m \in \langle -2;4\rangle$
b) $m \in \langle -4;\infty)$
c) $m \in \left\langle \frac{1}{2};1\right\rangle$

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. **a)**, **b)** tak **c)**, **d)** nie

4. **a)** $\cos\frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$, $\sin x = -\frac{24}{25}$, $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$
b) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos x = -\frac{1}{9}$, $\operatorname{tg} x = 4\sqrt{5}$

5. **a)**, **b)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **c)** 0

6. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$

7. **a)** $-\frac{24}{25}$ **b)** $-\frac{7}{5}$ **c)** $\frac{24}{7}$

8. **a)** $\sin 3x = \frac{11\sqrt{5}}{25}$, $\cos 3x = \frac{2\sqrt{5}}{25}$
b) $\sin 3x = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$, $\cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{9}$

10. **a)** 0 dla $m \in (-\infty;-2) \cup (0;\infty)$,
2 dla $m \in \{-2,0\}$,
4 dla $m \in (-2;-1) \cup (-1;0)$,
5 dla $m = -1$
b) 0 dla $m \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$,
2 dla $m \in \{0,2\}$,
4 dla $m \in (0;1) \cup (1;2)$,
5 dla $m = 1$
c) 0 dla $m \in (-\infty;0) \cup (3;\infty)$,
4 dla $m = 3$,
5 dla $m = 0$,
8 dla $m \in (0;3)$
d) 0 dla $m \in (-\infty;-1) \cup (2;\infty)$,
1 dla $m = -1$,
2 dla $m \in (-1;2\rangle$
e) 0 dla $m \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$,
2 dla $m \in \{-2,2\}$,
4 dla $m \in (-2;0) \cup (0;2)$,
5 dla $m = 0$
f) 0 dla $m \in (-\infty;1) \cup (2;\infty)$,
4 dla $m \in \{1,2\}$,
8 dla $m \in (1;1+\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (1+\frac{\sqrt{3}}{2};2)$,
9 dla $m = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$
g) 2 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
3 dla $m = -1$
h) 2 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
3 dla $m = 2$
i) 0 dla $m \in (-1;\infty)$,
2 dla $m \in (-\infty;-1\rangle$

11. **a)** 1 **b)** 3 **c)** 1 **d)** 2

12. **a)**, **b)** $f(x) = \cos 2x$
c) $f(x) = 0$

13. **a)** $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = -\frac{5}{12}\pi + \frac{k\pi}{2}$,
$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

14. **a)** $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
b) $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
c) $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
d) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$
e) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
f) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

15. **a)** $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$
b) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$
c) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
d) $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$
e) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$
f) $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

16. **a)** $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$ **b)** $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

17. **a)**, **b)**, **d)** $-2, 2$ **c)** $-1, 1$

18. $f(D)=\langle\frac{1}{2};\frac{3}{2}\rangle$,
$x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi;2\pi\right)$

19. **a)** $x\in\langle 0;\frac{\pi}{3})\cup(\pi;2\pi\rangle$
b) $x\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle\cup\langle\frac{11}{6}\pi;2\pi\rangle$ **c)** $x\in\langle\frac{7}{6}\pi;\frac{3}{2}\pi\rangle$

20. **a)** $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$
b) $\langle-\pi;-\frac{5}{6}\pi\rangle\cup\langle\frac{\pi}{3};\frac{7}{6}\pi\rangle$
c) $(-\pi;0)\cup(0;\pi)\cup(\pi;2\pi)$

Zadania testowe

1. D **2.** C **3.** A **4.** A **5.** B **6.** B **7.** A
8. C **9.** C **10.** D **11.** C

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 131 $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{3}{4}\right)$

2. 069 $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}+1}\right)$

3. 554 $\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

4. 083 $\left(a=\frac{1}{12}\right)$

5. 0 dla $m\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$,
2 dla $m\in\{-1,1\}$,
4 dla $m\in(-1;0)\cup(0;1)$,
5 dla $m=0$

6. $-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$

7. 8π

8. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

9. $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi\right)$

10. $x\in\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Ć **1.** **a)** 2 **b)** 13 **c)** $\frac{\sqrt{5}}{6}$ **d)** 5

2. $Ob_{\triangle ABC}=15+3\sqrt{5}$,
$Ob_{\triangle DEF}=\sqrt{26}+5\sqrt{2}$

3. **a)**, **d)** nie jest **b)**, **c)** jest

4. **a)** równoramienny i prostokątny
b) równoramienny
c) nie jest równoramienny i nie jest prostokątny
d) prostokątny

Z **1.** $PQRS$

2. **a)**, **b)** CD
c) $|AB|=|CD|$

3. **a)** jest **b)** nie jest

4. **a)** przystające **b)**, **c)** podobne

5. **a)** $Ob=2\sqrt{5}+4\sqrt{2}+6$,
wysokości: $4, 3\sqrt{2}, \frac{12\sqrt{5}}{5}$
b) $Ob=2\sqrt{10}+6\sqrt{2}+4$,
wysokości: $6, 2\sqrt{2}, \frac{6\sqrt{10}}{5}$

6. **a)** $Ob=4\sqrt{10}$, $|AC|=4\sqrt{2}$, $|BD|=2\sqrt{2}$, $h=\frac{4\sqrt{10}}{5}$
b) $Ob=20\sqrt{2}$, $|AC|=6\sqrt{5}$, $|BD|=2\sqrt{5}$, $h=3\sqrt{2}$

7. **a)** $(2,2)$, $(4,6)$ **b)** $(1,5)$, $(6,0)$

8. $B(4,0)$, $D(-1,5)$

9. $D(-6,8)$ lub $D\left(\frac{6}{5},\frac{28}{5}\right)$

10. **a)** $y=-\frac{1}{8}x^2-2$
b) $y=\frac{1}{12}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

11. **a)** $y=\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$
b) $y=-\frac{1}{12}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

12. **a)** $x=\frac{1}{4}y^2+1$
b) $x=-\frac{1}{4}y^2-2y-1$

2.2. Środek odcinka

Ć **1.** **a)** $S(2,1)$ **b)** $S\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$ **c)** $S\left(\frac{7}{4},-\frac{5}{6}\right)$

2. **a)** $B(-7,-14)$ **b)** $2\sqrt{34}$ **c)** $2\sqrt{10}$

3. $A(-1,6)$, $B(-5,-2)$, $C(3,2)$,
$AQ\colon x=-1$, $BR\colon y=x+3$, $CP\colon y=2$

4. **a)** $y=\frac{5}{4}x+\frac{13}{8}$ **b)** $y=2x-5$
c) $y=-3x+1$

Z 1. a) 5 b) $2\sqrt{5}$ c) 2,5

2. a) $B(-8,1)$ b) $B(8,9)$
c) $B(-10,-3)$

3. a) $2\sqrt{10}$ b) $6\sqrt{2}$

4. $|BO| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 2\sqrt{2}$, $P = 6$

5. a) $16\sqrt{5}$ b) $20\sqrt{2}$

6. a) $S_{AC}(8,2)$, $S_{BD}(8,2)$, jest
b) $S_{AC}(4\frac{1}{2},2)$, $S_{BD}(4\frac{1}{2},1\frac{1}{2})$, nie jest

7. $S(3,2)$, $D(7,5)$

8. a) $y = -\frac{3}{2}x + 5$, $y = 6x - 5$, $y = 3$
b) $y = \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$,
$y = -7x - 2$

9. 24

11. a) $P = 20$, $Ob = 8\sqrt{5}$
b) $(-4,-8)$ lub $(3,-1)$

12. a) $A(5,5)$, $B(1,1)$ lub $A(1,1)$, $B(5,5)$
b) $A(16,14)$, $B(8,8)$ lub $A(8,8)$, $B(16,14)$

13. a) $B(-1,-1)$, $D(3,7)$
b) $B(13,-7)$, $D(-3,9)$

14. a) $B(2,0)$, $D(-2,4)$
b) $B(-5,-6)$, $D(11,10)$

15. a) $y = -3x + 3$
b) $y = \frac{3}{2}x - 2$

16. a) $B(\frac{27}{5},\frac{9}{5})$
b) $A(2-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $B(2+\sqrt{2},-\sqrt{2})$

17. $C(4,15)$, $AB\colon y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$,
$BC\colon y = 8x - 17$

18. $A(-2,1)$, $B(6,-3)$, $C(2,5)$

19. $B(6,-2)$, $D(0,4)$, $P = 12$

2.3. Odległość punktu od prostej

Ć 1. a) $2\sqrt{2}$ b) 5

2. a) $d_A = \sqrt{2}$, $d_B = 0$, $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $d_A = \sqrt{10}$, $d_B = \sqrt{10}$,
$d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$
c) $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $d_C = 0$

3. a) $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$, $P = 16$
b) $d = \sqrt{13}$, $P = 13$

4. 94

5. a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

Z 1. a) $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$, $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$, nie jest
b) $d_A = d_B = 5$, jest
c) $d_A = 5$, $d_B = \frac{54}{13}$, nie jest

2. $d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $d_{AD} = 3$,
$d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $d_{CD} = \frac{9}{4}$

3. $d = 2\sqrt{10}$, $P = 60$

4. a) $8\frac{1}{2}$ b) 15

5. a) 5π b) 25π

6. a) $AB \parallel CD$, $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $P = 38{,}5$
b) $AB \parallel CD$, $d = 3\sqrt{10}$, $P = 75$

7. a) $y = x + 10\sqrt{2}$ lub $y = x - 10\sqrt{2}$
b) $y = x + 3 - 10\sqrt{2}$
lub $y = x + 3 + 10\sqrt{2}$

8. a) 6 b) 60

9. a) $y = \sqrt{3}x + 4$ b) $y = -0{,}7x - 1{,}5$

10. a) $2\sqrt{5}$ b) 1

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

1. a) 14 b) 26

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Ć 1. a) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów
b) $x^2 + y^2 = 4$, 4 punkty
c) $x^2 + y^2 = 2$, 4 punkty
d) $x^2 + y^2 = 5$, 8 punktów

2. a) $x^2 + y^2 = 36$
b) $x^2 + y^2 = 64$

3. a) $r = 13$, $x^2 + y^2 = 169$
b) $r = 3\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 18$
c) $r = \sqrt{41}$, $x^2 + y^2 = 41$
d) $r = 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 8$

4. a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$
b) $(x+7)^2 + (y-6)^2 = 4$
c) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 2$

5. a) $S(2,5)$, $r = 4$
b) $S(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $r = \frac{5}{3}$
c) $S(0,-\frac{9}{4})$, $r = \sqrt{10}$
d) $S(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $r = 2\sqrt{2}$
e) $S(-5,-9)$, $r = 15$
f) $S(1\frac{1}{6},0)$, $r = 3\sqrt{5}$

6. a) $x^2 + (y+1)^2 = 5$
b) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 20$
c) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

7. **a)** $(x-1)^2+(y+2)^2=4$, tak
b) $(x+1)^2+(y+3)^2=-2$, nie
c) $(x+1)^2+(y+3)^2=10$, tak
d) $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=0$, nie
e) $x^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{1}{4}$, tak
f) $(x-5)^2+(y-1)^2=25$, tak

Z **1.** **a)** $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
b) $(x+6)^2+(y-2)^2=\frac{9}{16}$
c) $(x+5)^2+(y+1)^2=20$

2. **a)** $(x-2)^2+y^2=10$
b) $(x-2)^2+(y+3)^2=8$
c) $(x+5)^2+(y-2)^2=25$

3. **a)** K_1: $(x-4)^2+y^2=1$,
K_2: $(x-4)^2+y^2=4$,
K_3: $(x-4)^2+y^2=9$,
K_4: $(x-4)^2+y^2=16$
b) $A\in K_3$, $B\in K_4$, $C\in K_1$
c) 62,5%

4. **a)** $(x-4)^2+(y-2)^2=9$
b) $(x-1)^2+(y-2)^2=20$
c) $(x-1)^2+(y+1)^2=25$

5. **a)** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{65}{4}$
b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{125}{4}$

6. **a)** $S(3,-2)$, $r=5$
b) $S(4,3)$, $r=6$
c) $S(-5,-2)$, $r=6$
d) $S(6,-2)$, $r=6$
e) $S(\frac{3}{2},2)$, $r=\frac{5}{2}$
f) $S(-4,1)$, $r=4$

7. **a), b), d), f)** jest
c), e) nie jest

8. **a)** $m\in(-2;2)$
b) $m\in(-\infty;5)$
c) $m\in\mathbf{R}$
d) $m\in(-1;1)$
e) $m\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$
f) $m\in(-\infty;-3)\cup(5;\infty)$

9. **a)** $m=-5$, $m=3$
b) $m=-2$, $m=4$
c) $m=0$, $m=\frac{1}{3}$

10. **a)** $(x-8)^2+(y+2)^2=45$
lub $(x+4)^2+(y+2)^2=45$
b) $(x-1)^2+(y+1)^2=20$
lub $(x+1)^2+(y-1)^2=20$
c) $(x+2)^2+y^2=25$
lub $(x-6)^2+(y-4)^2=25$
d) $(x+4)^2+(y-6)^2=26$
lub $(x-2)^2+y^2=26$

11. **a)** $(x-1)^2+(y-2)^2=20$
b) $(x+4)^2+(y+2)^2=45$

12. **a)** $(x-3)^2+(y-4)^2=40$
b) $(x-2)^2+(y-4)^2=50$

13. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

14. $S(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2})$, $r=\frac{|m-n|}{2}$

Okrąg wpisany w trójkąt

1. **a)** $(3,-1)$ **b)** $(-2,-1)$

2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Ć **1.** **a)** $|S_1S_2|=2$, brak punktów wspólnych
b) $|S_1S_2|=5$, 1 punkt wspólny
c) $|S_1S_2|=4$, 1 punkt wspólny
d) $|S_1S_2|=2\sqrt{2}$, 2 punkty wspólne

2. **a)** 0 punktów dla $r\in(0;2)\cup(12;\infty)$,
1 punkt dla $r=2$ lub $r=12$,
2 punkty dla $r\in(2;12)$
b) 0 punktów dla $r\in(0;3)\cup(5;\infty)$,
1 punkt dla $r=3$ lub $r=5$,
2 punkty dla $r\in(3;5)$
c) 0 punktów dla $r\in(0;3-\sqrt{3})\cup$
$\cup(3+\sqrt{3};\infty)$,
1 punkt dla $r=3-\sqrt{3}$ lub $r=3+\sqrt{3}$,
2 punkty dla $r\in(3-\sqrt{3};3+\sqrt{3})$
d) 0 punktów dla $r\in(0;2\frac{5}{6})\cup(4\frac{5}{6};\infty)$,
1 punkt dla $r=2\frac{5}{6}$ lub $r=4\frac{5}{6}$,
2 punkty dla $r\in(2\frac{5}{6};4\frac{5}{6})$

3. **a), b)** rozłączne zewnętrznie
c) przecinają się

Z **1.** $r_O=3$, $r_A=8$, $r_B=11$, $P=48\pi$

2. $P_1=16\pi$, $P_2=8\pi$, $P=8\pi-8$

3. **a)** 0 punktów dla $r\in(0;3)\cup(7;\infty)$,
1 punkt dla $r\in\{3,7\}$,
2 punkty dla $r\in(3;7)$
b) 0 punktów dla $r\in(20;\infty)$,
1 punkt dla $r=20$,
2 punkty dla $r\in(0;20)$

3. c) 0 punktów dla $r \in (0; 3\sqrt{5}-5) \cup$
$\cup (3\sqrt{5}+5; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{3\sqrt{5}-5, 3\sqrt{5}+5\}$,
2 punkty dla $r \in (3\sqrt{5}-5; 3\sqrt{5}+5)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2}) \cup (7\sqrt{2}; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; 7\sqrt{2})$

4. a) styczne zewnętrznie
b), c) styczne wewnętrznie
d) przecinają się
e) rozłączne wewnętrznie
f) rozłączne zewnętrznie

5. a) $d = 10$, $m = -252$ lub $m = 28$
b) $d = 13$, $m = -35$ lub $m = 381$
c) $d = 5$, $m = -15$ lub $m = \frac{65}{9}$
d) $d = \sqrt{41}$, $m = 57 - 8\sqrt{41}$ lub
$m = 57 + 8\sqrt{41}$

6. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$

7. a) $|AB| = 7$, $|AC| = 6$, $|BC| = 5$,
$r_A = 4$, $r_B = 3$, $r_C = 2$
b) $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $|BC| = 6$,
$r_A = 6$, $r_B = 4$, $r_C = 2$

8. $S\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

9. a) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
b) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
lub $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$

2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Ć 1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 2+\sqrt{3})$,
1 punkt dla $r = 2+\sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (2+\sqrt{3}; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2}-\sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2}-\sqrt{2}; \infty)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; \infty)$

2. a) $2\sqrt{21}$ b) 8 c) $\frac{22\sqrt{5}}{5}$

3. a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$
b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$

4. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1

5. a) 0 punktów dla $m \in (-1; 19)$,
1 punkt dla $m = 19$,
2 punkty dla $m \in (19; \infty)$
b) 0 punktów dla $m \in (-9; 16)$,
1 punkt dla $m = 16$,
2 punkty dla $m \in (16; \infty)$

6. a) $y = 1$, $y = -\frac{8}{15}x + \frac{47}{15}$, $d = 4$
b) $y = \frac{1}{3}x - 1$, $y = 3x + 7$, $d = 2\sqrt{10}$

Z 1. a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $2\sqrt{10}$

2. a) $d = \sqrt{5}$, 2 punkty
b) $d = 2\sqrt{5}$, 0 punktów
c) $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, 2 punkty
d) $d = 3$, 1 punkt

3. a) 0 punktów dla $r \in (0; 2)$,
1 punkt dla $r = 2$,
2 punkty dla $r \in (2; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{6})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{6}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{5})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{5}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{11}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{11}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{11}{2}; \infty)$

4. a) $x^2 + (y-1)^2 = 5$
b) $x^2 + (y-1)^2 = 10$

5. a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$
c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$
d) $x = -1$

6. $(3, -2)$ lub $(3, 2)$ lub $(7, -2)$ lub $(7, 2)$

7. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$

8. a) $y = -2x - 1$ b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

9. a) $y = 1$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
b) $y = 1$, $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x + 5$

10. a) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$
b) $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 25$

11. a) $m = 12{,}5$ b) $m = 1$

12. $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$

13. **a)** $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$
b) $y = -2x + 10$, $y = -2x + 20$

14. **a)** $y = -2$, $y = \frac{56}{33}x + \frac{34}{11}$
b) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$, $y = \frac{3}{4}x + 4$

16. **a)** $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$
lub $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$
b) $(-\frac{25}{9}, \frac{100}{9})$ lub $(-1, 4)$

17. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$,
$y = 2x + 5$, $y = -2x + 5$

2.7. Układy równań drugiego stopnia

Ć **1.** **a)** $x = -3$, $y = -4$ lub $x = 3$, $y = 4$
b) $x = 2$, $y = -2$ **c)** sprzeczne

2. **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{10}$

3. $A(-1,-3)$, $B(3,-1)$, $C(1,3)$, $D(-3,1)$

4. $(5,4)$, $(-2,3)$, $(-1,-4)$, $(6,-3)$

5. **a)** $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$ lub $x = 1$, $y = \sqrt{3}$
b) $x = 0$, $y = 1$ **c)** $x = 0$, $y = 0$

6. **a)** 0 dla $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$,
2 dla $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$
b) 0 dla $m \in (-\infty; -9) \cup (1; \infty)$,
1 dla $m \in \{-9, 1\}$,
2 dla $m \in (-9; 1)$
c) 0 dla $m \in (-\infty; \frac{1}{5})$,
1 dla $m = \frac{1}{5}$,
2 dla $m \in (\frac{1}{5}; \infty)$
d) 2 dla $m \in \mathbf{R}$

Z **1.** **a)** $x = 1$, $y = 3$ lub $x = -3$, $y = -1$
b) $x = 0$, $y = 8$ lub $x = 4$, $y = 4$
c) $x = 0$, $y = -2$ lub $x = 5$, $y = 3$
d) $x = 1$, $y = -1$ lub $x = 5$, $y = 1$
e) $x = -1$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 1$
f) $x = -3$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 3$

2. **a)** $(4,-2)$, $(-4,2)$
b) $A(-6,0)$, $B(2,4)$, $C(0,-2)$
lub $C(-4,6)$

3. **a)** $(-3,1)$, $(1,5)$, $(5,-7)$, $(9,-3)$
b) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 10$,
$(0,4)$, $(4,2)$, $(6,6)$, $(2,8)$

4. $(-1,-1)$, $(0,4)$, $(5,3)$, $(4,-2)$, $P = 26$

5. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** $5\sqrt{2}$

6. **a)** $x = 0$, $y = -3$
b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$
lub $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$
c) $x = 4$, $y = 0$
d) $x = 0$, $y = 0$ lub $x = \frac{96}{25}$, $y = \frac{72}{25}$
e) $x = -3$, $y = -4$ lub $x = 3$, $y = -4$
f) $x = -1$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 1$

7. **a)** 6 **b)** $2\sqrt{2}$

8. **a)** 8 **b)** 15

9. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$
lub $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 25$

10. **a)** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
lub $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$
b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$
lub $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 = 9$
lub $(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 = 9$
d) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13$
lub $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$

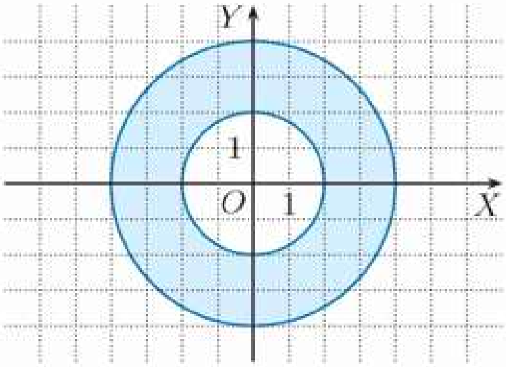
11. **a)** 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2, 2\}$,
2 dla $m \in (-2; 2)$
b) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,
1 dla $m \in \{-1, 3\}$,
2 dla $m \in (-1; 3)$
c) 0 dla $m \in (-2; 2)$,
1 dla $m \in \{-2, 2\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
d) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$,
1 dla $m \in \{0, 4\}$,
2 dla $m \in (0; 4)$
e) 0 dla $m \in (-3; 3)$,
1 dla $m \in \{-3, 3\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
f) 0 dla $m \in (-\infty; 1)$,
1 dla $m = 1$,
2 dla $m \in (1; \infty)$

2.8. Koło w układzie współrzędnych

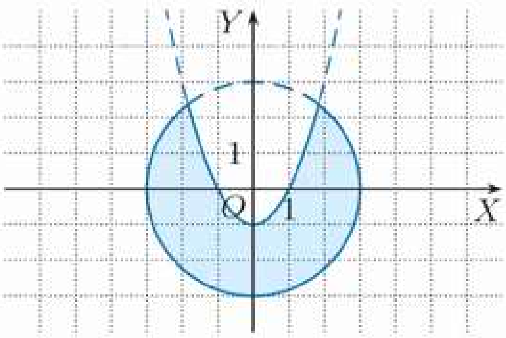
Ć **1.** **a)** $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 25$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 100$
c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 8$
d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 17$

2. **a)** 25π **b)** 17π

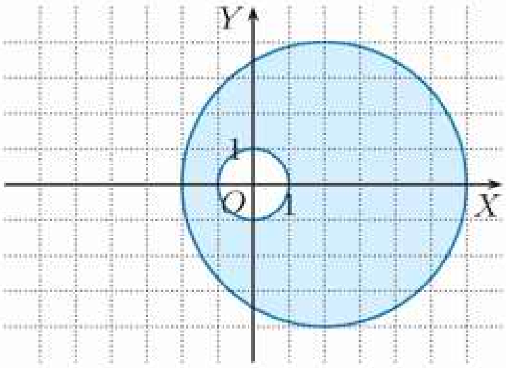
3. a)



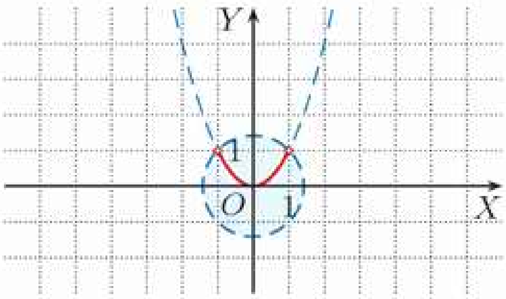
b)



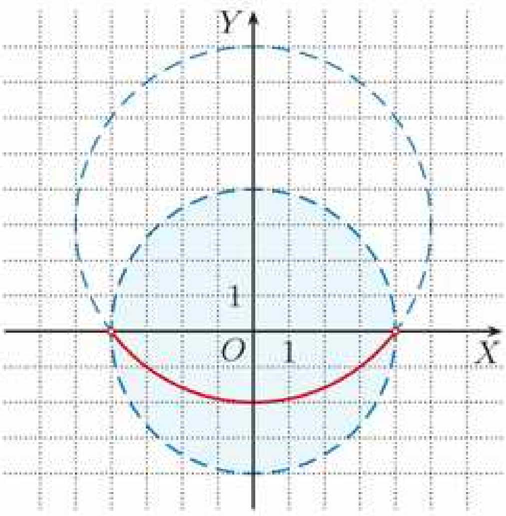
c)



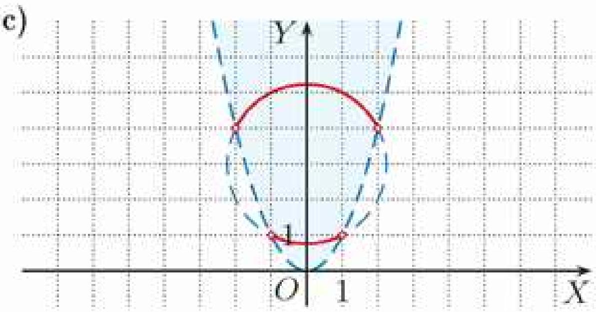
4. a)



b)

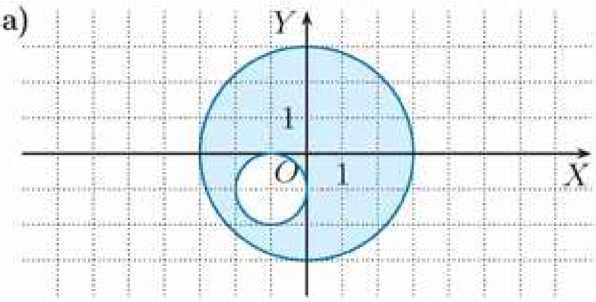


c)

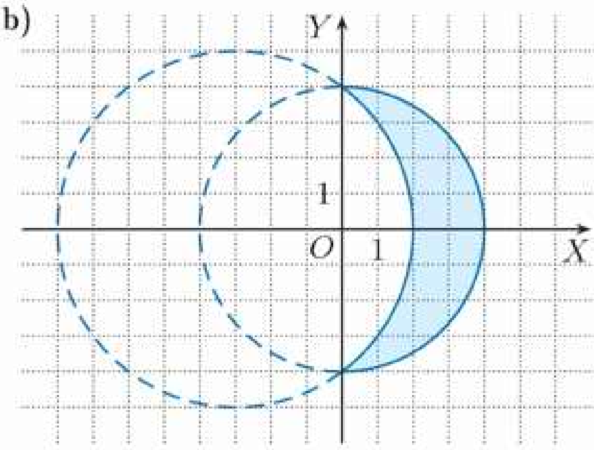


Z **1.** a) K_1 b) K_1, K_2 c) K_1, K_2, K_3 d) K_3

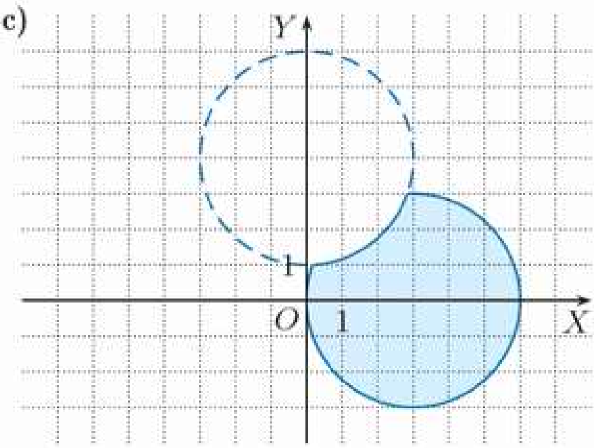
2. a)



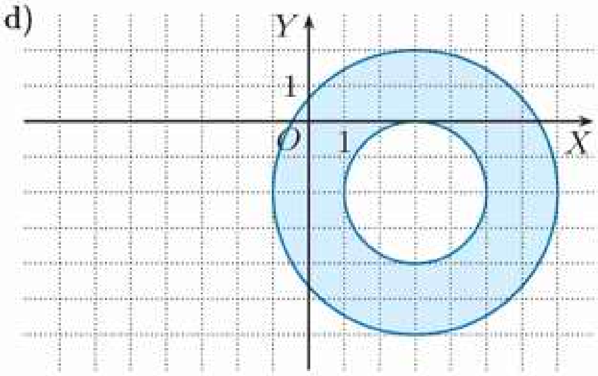
b)



c)



d)

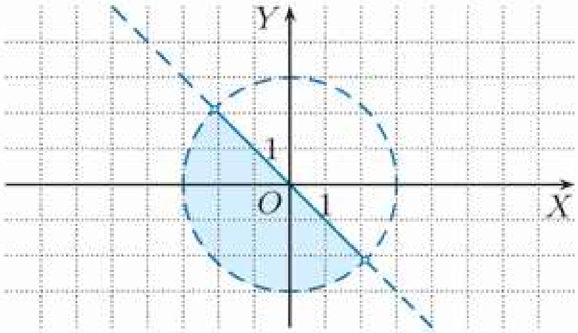


3. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ (x+2)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$

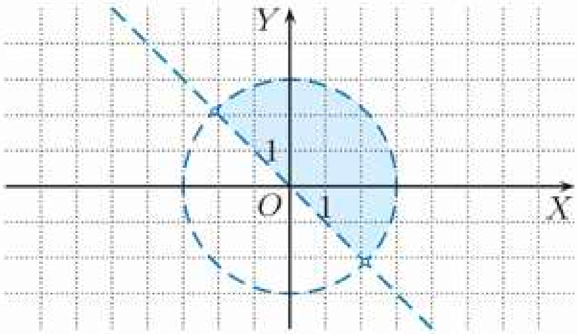
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 25 \\ (x-4)^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 < 16 \end{cases}$

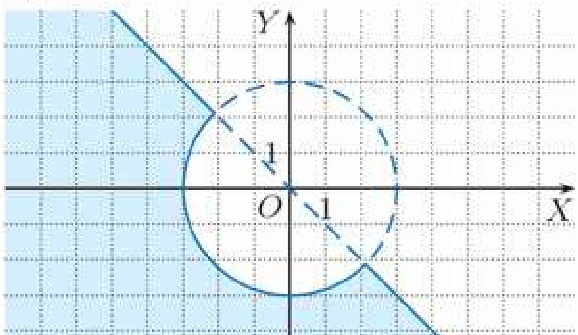
4. a) $A \cap B$



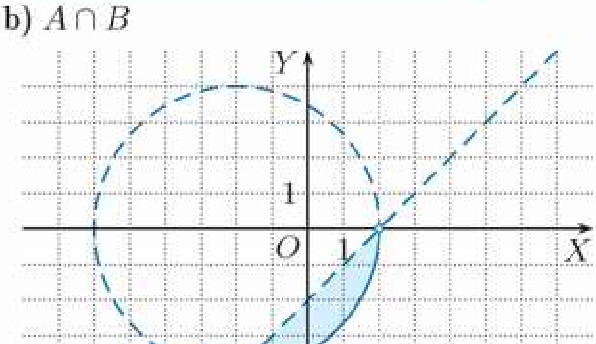
$A \setminus B$



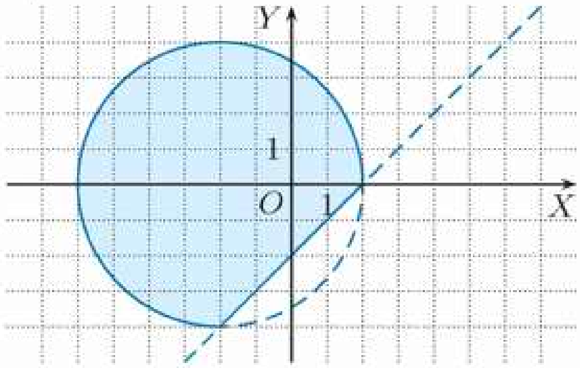
$B \setminus A$



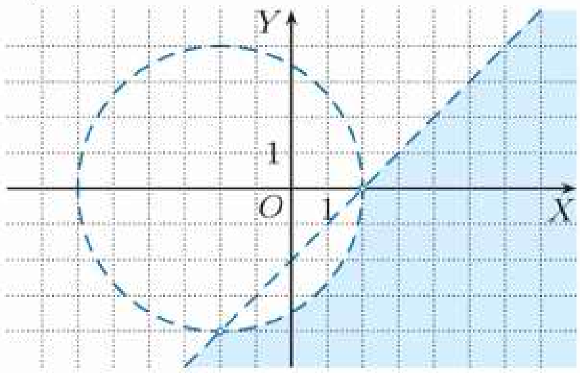
b) $A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$



5.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4 \\ x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y \geqslant x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y \leqslant x^2 \\ (x+2)^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leqslant x + 2 \\ x^2 + y^2 \geqslant 1 \\ y \geqslant x^2 - 4 \end{cases}$

2.9. Działania na wektorach

Ć **1. a)** $\overrightarrow{AB} = [5, -1]$, $\overrightarrow{BC} = [2, -4]$, $\overrightarrow{AC} = [7, -5]$
b) $\overrightarrow{AB} = [-2, -6]$, $\overrightarrow{BC} = [-5, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [-7, -3]$

2. a) $[5, 4]$ **b)** $[-7, -1]$

3. a) $[5, -2]$ **b)** $[5, 6]$

4. a) $[-6, -5]$ **b)** $[0, 5]$

5. a) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = [1, -8]$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = [-1, 8]$
b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = [-3, -7]$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = [3, 7]$

6. a) $[-5, -8]$ **b)** $[9, -1]$ **c)** $[-14, 0]$
d) $[2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

7. **a)** $\alpha = 3$ **b)** $\alpha = -\frac{4}{3}$

8. Ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_4}$. Ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$, ale przeciwny zwrot: $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_5}$.

9. **a)** 5 **b)** 13 **c)** $3\sqrt{2}$

10. **a)** 7 **b)** $\sqrt{58}$ **c)** 9 **d)** 5

Z **1.** **a)** jest **b)** nie jest

2. **a)** $P(6,9)$ **b)** $P(0,-3)$ **c)** $P(4,5)$
d) $P(3,3)$ **e)** $P(6,9)$ **f)** $P(-4,-11)$

3. **a)** $D(3,5)$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{34}$
b) $D(3,-3)$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{41}$
c) $D(5,-3)$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{82}$
d) $D(-1,8)$, $|\overrightarrow{AD}| = 11$

5. **a)** ten sam kierunek, przeciwne zwroty
b), **d)** ten sam kierunek i zwrot
c) różne kierunki

6. **a)** $m = 5$ **b)** $m \in \{-1,1\}$
c) $m \in \{-2,0,2\}$

8. **a)** $\overrightarrow{v} = [-12,16]$ **b)** $\overrightarrow{v} = [-4\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5}]$

9. **a)** $\overrightarrow{v} = \left[-6\sqrt{10}, 2\sqrt{10}\right]$
b) $\overrightarrow{v} = \left[-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right]$

11. **a)** $\left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$ lub $\left[\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right]$
b) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ lub $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. **a)** $\alpha = 2$, $\beta = -1$
b) $\alpha = -1\frac{2}{7}$, $\beta = 1\frac{3}{7}$
c) $\alpha = \frac{9}{14}$, $\beta = 1\frac{3}{14}$
d) $\alpha = -10$, $\beta = -3$

13. **a)** $m = 2$
b) nie ma takiego m

Iloczyn skalarny wektorów

2. **a)** $45°$ **b)** $90°$ **c)** $150°$ **d)** $90°$

2.10. Wektory – zastosowania

Ć **1.** **a)** 2 **b)** 1

2. **a)** 20 **b)** 5 **c)** $\frac{28}{5}$

3. $8(\pi - 2)$

5. **a)** tak **b)** tak

6. **a)** $A(7,-1)$, $C(-5,1)$, $D(-1,-3)$
b) $A(-2,-2)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$, $D(0,2)$
c) $A(-3,2)$, $B(2,-3)$, $C(4,1)$, $D(-1,6)$
d) $A(-4,-3)$, $B(4,-1)$, $C(10,5)$, $D(2,3)$

Z **2.** **a)** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [2,1]$, $P(-1,-1)$, $Q(1,0)$
b) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [6,-4]$, $P(-4,2)$, $Q(2,-2)$
c) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $P(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $Q(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

3. **a)** $A(-1,-2)$, $B(8,7)$
b) $A(5,-5)$, $B(1,7)$

4. **a)** $P(0,1)$ lub $P(2,-2)$
b) $A(12, -15\frac{1}{2})$ lub $A(19,-26)$

5. **a)** $C(6,3)$, $D(0,1)$
b) $A(4,-1)$, $B(2,3)$, $C(-6,3)$, $D(-4,-1)$

6. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $y = -x - 2$, $y = -4x - 11$

7. **a)** $A(-3,-2)$, $(3,1)$
b) $A(10,15)$, $B(14,11)$

8. $C(-1,2)$

9. **a)** $(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$
b) $B(7,5)$, $C(4,6)$, $D(2,5)$

10. **b)** $C(-4,1)$, $P = 9$

11. $(-3,6)$, $(5,2)$

2.11. Symetria osiowa

Ć **2.** kwadrat: 4, trójkąt równoboczny: 3, prostokąt: 2, koło: nieskończenie wiele

3. **a)** $A'(0,-3)$, $B'(3,0)$, $A''(0,3)$, $B''(-3,0)$
b) $A'(1,2)$, $B'(-4,-3)$, $A''(-1,-2)$, $B''(4,3)$
c) $A'(-5,-1)$, $B'(1,-4)$, $A''(5,1)$, $B''(-1,4)$

5. **a)** $A'(-2,-1)$, $B'(2,3)$, $C'(4,1)$, $D'(0,-3)$
b) $A''(2,1)$, $B''(-2,-3)$, $C''(-4,-1)$, $D''(0,3)$

6. $K'\colon (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$,
$K''\colon (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$

7. **a)** K': $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$,
K'': $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$
b) K': $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$,
K'': $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 13$
c) K': $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$,
K'': $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$
d) K': $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 12 = 0$,
K'': $x^2 + y^2 - 2x + 12y - 12 = 0$

$\boxed{Z}$ **1. a)** OX **b)** OY **c), d)** nie są

3. a) 8 **b)** 2

4. a) $(x-1)^2+(y+1)^2=25$, należy
b) $(x-2)^2+(y-2)^2=41$, nie należy
c) $(x+3)^2+y^2=4$, należy
d) $(x+1)^2+(y+4)^2=40$, należy

5. a) $x^2+y^2-6x-2y-3=0$, 12
b) $x^2+y^2+8x+4y-5=0$, 24

6. a) $(x-1)^2+(y-4)^2=2$
b) $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y+\frac{18}{5}\right)^2=16$
c) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

2.12. Symetria środkowa

$\boxed{Ć}$ **2.** równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek

3. a) $A'(-3,2)$, $B'(2,1)$, $C'(1,-4)$
b) $A'(-2,2)$, $B'(-1,-3)$, $C'(3,-1)$

4. a) 24 **b)** 6

5. $(x-5)^2+(y+3)^2=16$

6. a) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$
b) $x^2+y^2+2x-4y-11=0$
c) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$
d) $x^2+y^2+4x+6y-12=0$

$\boxed{Z}$ **1. a)** 10 **b)** $2\sqrt{17}$ **c)** 20 **d)** $2\sqrt{2}|a|$

3. 22,4

5. a) $(-1,-1)$, $(1,1)$ **b)** $(-1,-4)$, $(1,4)$
c) $(-1,2)$, $(1,-2)$ **d)** $(-3,-2)$, $(3,2)$

6. a) $8(\pi-2)$ **b)** $8(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3})$
c) $6(2\pi-3\sqrt{3})$ **d)** $12(2\pi-3\sqrt{3})$

7. $y=\frac{1}{2}x$, $y=-2x-10$, $y=-2x+10$

2.13. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $x=-\frac{7}{4}$, $y=\frac{3}{2}$
b) $y=x+2$, $y=-x+4$
c) $y=-\sqrt{3}x$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$
d) $y=-1$

2. a) $(x-8)^2+y^2=16$
b) $(x-6)^2+y^2=16$
c) $x^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

3. a) $y=\frac{1}{8}x^2+2$
b) $x=\frac{1}{12}y^2+3$

4. $x=-\frac{1}{4}y^2+1$, gdzie $y\in(-2;2)$

5. a) $\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $6\sqrt{5}$

6. a) 24 **b)** 6 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** 54

8. a) $(x-4)^2+(y-2)^2=16$
b) $(x+2)^2+(y+1)^2=36$
c) $(x-2)^2+(y+\frac{13}{2})^2=1$

9. $(0,0)$, $k=-2$ lub $(-4,-4)$, $k=2$

10. $(x-3)^2+y^2=1$
lub $(x-3)^2+(y+2)^2=1$

11. a) $(x+6)^2+(y-3)^2=9$
lub $(x-6)^2+(y+3)^2=9$
b) $(x+3)^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$
lub $(x-3)^2+(y+\frac{3}{2})^2=9$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $|AB|=5$, $|BC|=10$, $|AC|=15$; współliniowe
b) $|AB|=8\sqrt{5}$, $|BC|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{5}$; współliniowe
c) $|AB|=10$, $|BC|=10$, $|AC|=14\sqrt{2}$; niewspółliniowe
d) $|AB|=6\sqrt{2}$, $|BC|=3\sqrt{2}$, $|AC|=9\sqrt{2}$; współliniowe

2. a) równoramienny i prostokątny
b) prostokątny

3. a) $S(4,4)$ **b)** $S(-4,4)$

4. $(-1,0)$, $(-5,-2)$, $(-3,-6)$

5. $|AD|=5$, $|AE|=\sqrt{5}$

6. a) $\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5},-3-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5},-3+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
b) $y=\frac{1}{2}x-2$, $y=-\frac{9}{2}x+8$

7. a) $(x+4)^2+y^2=25$, $(1,0)$, $(-9,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$
b) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, $(-2,0)$, $(6,0)$, $(0,3-\sqrt{21})$, $(0,3+\sqrt{21})$
c) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$, $(-2\sqrt{3}-1,0)$, $(2\sqrt{3}-1,0)$, $(0,2-\sqrt{15})$, $(0,2+\sqrt{15})$
d) $(x+3)^2+(y+4)^2=1$, nie ma punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych

8. a) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
b) $(0,2-\sqrt{3})$, $(0,2+\sqrt{3})$
c) $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

9. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|K_1K_2| = 2$, przecinają się
b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|K_1K_2| = 1$, styczne wewnętrznie

10. a) $m \in \langle -2; 2\rangle$ b) $m \in \left\langle -\frac{3}{2}; 1\right\rangle$

11. a) $m = -\frac{5}{3}$, $m = \frac{5}{3}$
b) $m = -\frac{5}{2}$, $m = \frac{3}{2}$

12. a) $m = 9$, $m = 49$
b) $m = 64$, $m = 144$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $(6, 2)$, $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 40$
b) $(2, 1)$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

2. a) $P(4, 6)$ lub $P(-4, -2)$
b) $P(0, -6)$ lub $P(6, 4)$

3. a) $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x - 3$, $y = 3x + 17$
b) $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{3}x + 6$, $y = \frac{4}{3}x - 12$

4. $d = 4$, $l_1\colon y = -x + 2\sqrt{2}$, $l_2\colon y = -x + 6\sqrt{2}$

5. a) $m = -6$ lub $m = 6$
b) $m = 2$ lub $m = 6$

6. a) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$
b) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$

7. a) $(2, -5)$, $(8, 1)$, $(-4, 7)$ lub $(2, -5)$, $(8, 1)$, $(6, -3)$
b) $(-6, 1)$, $\left(\frac{36}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, $(6, 7)$ lub $(-6, 1)$, $(0, -5)$, $(6, 7)$

8. $A(3, -1)$, $B(2, 0)$, $C(-2, -4)$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$

9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. $(-2, 1)$

11. a) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$
b) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$
c) $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 16$
d) $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$

12. a) $y = -\frac{1}{3}x + 5$, $y = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{3}$
b) 4

13. $m = 4$

14. a) 2,25 b) $\frac{13}{12}\sqrt{3} - 1$

15. a) $y = x + 5$ b) $y = 3x + 10$

Zadania testowe

1. C 2. C 3. B 4. A 5. D 6. B 7. D

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 13
2. 5
3. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
4. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, $d = 6$
5. $P = 32$, $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
6. $y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{8}$
8. $A(6, -2)$, $B(-2, 4)$
9. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17\frac{7}{9}$, $(-1, \frac{1}{3})$, $(7, -\frac{7}{3})$

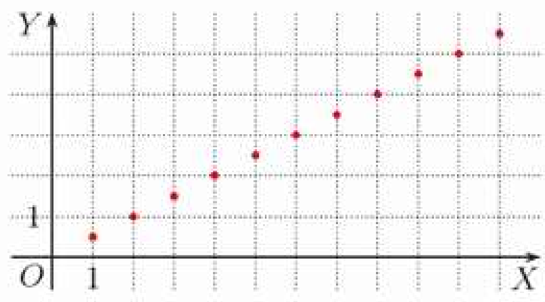
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

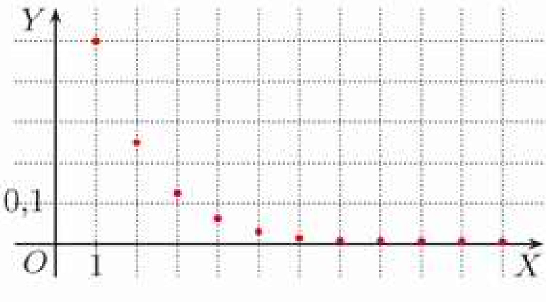
1. 244 $(10\sqrt{6})$
2. 316 $(\sqrt{10})$
3. 392 $(6\sqrt{3})$
4. $4\sqrt{2}$
5. $\frac{13}{24}\sqrt{2}$
6. $m \in (-8; 9)$
7. $(-1, -2)$, $(5, 4)$, $(-1, 6)$, $(-3, 4)$
8. $A(-2, -1)$, $C(5, 7)$, $[8, 4]$
9. $m = 1$

3.1. Pojęcie ciągu

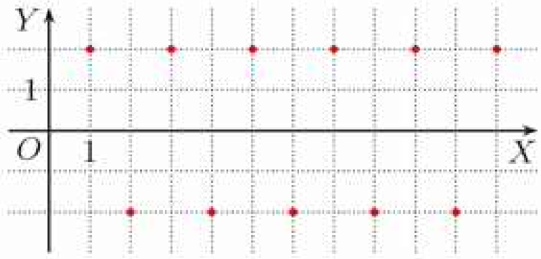
Ć 1. a) $a_n = 2^n$, $a_9 = 512$, $a_{10} = 1024$
b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_9 = \frac{1}{512}$, $a_{10} = \frac{1}{1024}$
c) $a_n = (-1)^n$, $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$
d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$

2. A: $a_{17} = 34$, $a_{100} = 200$
B: $a_{17} = 3$, $a_{100} = 3$

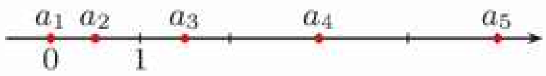
3. a)


b)


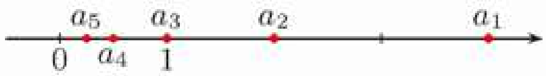
3. **c)**



4. **a)**



b)



c)

Z **1.** **a)** $a_7 = 13$, $a_8 = 15$, $a_9 = 17$, $a_{10} = 19$
b) $a_7 = \frac{1}{14}$, $a_8 = \frac{1}{16}$, $a_9 = \frac{1}{18}$, $a_{10} = \frac{1}{20}$
c) $a_7 = 17$, $a_8 = 19$, $a_9 = 23$, $a_{10} = 29$

3. **a)** $a_1 = 1{,}4$, $a_2 = 1{,}41$, $a_3 = 1{,}414$, $a_4 = 1{,}4142$, $a_5 = 1{,}41421$, $a_6 = 1{,}414214$
b) $a_1 = 1{,}7$, $a_2 = 1{,}73$, $a_3 = 1{,}732$, $a_4 = 1{,}7321$, $a_5 = 1{,}73205$, $a_6 = 1{,}732051$
c) $a_1 = 3{,}1$, $a_2 = 3{,}14$, $a_3 = 3{,}142$, $a_4 = 3{,}1416$, $a_5 = 3{,}14159$, $a_6 = 3{,}141593$

4. **a)** 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 22

3.2. Sposoby określania ciągu

Č **1.** **a)** 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10
b) 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

2. **a)** $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = \frac{16}{5}$, $a_{10} = \frac{100}{11}$
b) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{15}{17}$, $a_{10} = \frac{99}{101}$
c) $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{3}{8}$, $a_3 = -\frac{1}{5}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_{10} = -\frac{1}{40}$
d) $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = 18$, $a_4 = 48$, $a_{10} = 900$

3. **a)** $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $a_{10} = -1$
b) $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$, $a_4 = -16$, $a_{10} = -1024$
c) $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$, $a_4 = 4$, $a_{10} = 10$
d) $a_1 = -4$, $a_2 = 8$, $a_3 = -16$, $a_4 = 32$, $a_{10} = 2048$
e) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_{10} = \frac{9}{11}$
f) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{5}{7}$, $a_4 = -\frac{7}{9}$, $a_{10} = -\frac{19}{21}$

4. **a)** $a_n = 3^{n-1}$ **b)** $a_n = n^2 - 1$
c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$
d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^n$
e) $a_n = \sqrt{n}$
f) $a_n = \frac{3}{n^2+1}$
g) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
h) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$

5. **a)** $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$
b) $a_4 = 8$, $a_5 = 27$, $a_6 = 64$
c) $a_4 = 0$, $a_5 = -1$, $a_6 = 0$

6. **a)** $a_4 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$
b) brak wyrazów równych zeru; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
c) $a_2 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \geqslant 3$ i $n \in \mathbf{N}$
d) brak wyrazów równych zeru; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Z **1.** **a)** 2, 6, 10, 14, 18
b) 2, 2, 0, -4, -10
c) 1, 2, 5, 12, 27
d) -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$
e) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{5}$
f) 2, 1, 4, 3, 6
g) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$
h) 0, 2, 0, 4, 0
i) 2, 2, 18, -48, 650

2. **a)** 1, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{1}{6}$
b) 0, 4, 0, 16, 0, 64
c) 2, 2, 6, $\frac{4}{3}$, 10, $\frac{6}{5}$
d) $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 16, $\frac{1}{7}$, 36

3. **a)** $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$
b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}$
d) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$
e) $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$
f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2 \cdot 3^n}$

4. **a)** a_3 **b)** a_1, a_3 **c)** a_2
d) brak wyrazów równych zeru
e) a_2, a_3 **f)** a_4, a_8

5. **a)** $a_1, a_2, \ldots, a_6$
b) $a_2, a_3, \ldots, a_9$
c) brak wyrazów ujemnych

6. **a)** a_5 **b)** a_3, a_4
c) a_{4k+1}, $k \in \mathbf{Z}$

7. **a)** $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$
b) $n \in \mathbf{N}_+ \setminus \{3, 4, 5\}$

8. **a)** a_1, a_2, a_4
b) a_1, a_2, a_5
c) a_1, a_2, a_3, a_6

10. **a)** $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$
b) $a_n = -\frac{2}{3}n + 1$
c) $a_n = -\frac{1}{3}n + 9$

11. **a)** $a_n = n^2 - 6n + 5$
b) $a_1, a_2, \ldots, a_7$

12. $a_n = -2n^2 + 8n$

13. $a_n = \frac{1}{4}n^2$, $a_6 = 9$, $a_{10} = 25$, $a_{20} = 100$

14. **a)** $a_n = -n^2 + 6n$, $a_8 = -16$
b) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n - 4$, $a_8 = 20$
c) $a_n = n^2 + 2n - 4$, $a_8 = 76$

3.3. Ciągi monotoniczne (1)

Ć **1.** **a)** np. $a_n = 10 + \frac{1}{n}$
b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$

3. **a)** $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 4$; nie jest
b) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$, $a_5 = -5$; nie jest
c) $a_1 = -1$, $a_2 = -5$, $a_3 = -7$, $a_4 = -7$, $a_5 = -5$; nie jest

4. **a)** $\frac{n+1}{2n+3}$ **b)** $\frac{-2n-2}{3n+1}$
c) $\frac{n-2}{n^2+2n+2}$ **d)** $\frac{n^2+2n}{2n-3}$

7. **a)** $a_5 = a_6 = 4$
b) $a_3 \in \left\langle \frac{3}{2}; 2 \right\rangle$, $a_5 \in \langle 2; 3 \rangle$, $a_6 \in \langle 2; 3 \rangle$ i $a_5 \leqslant a_6$

8. **a)** np. 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
b) np. 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2

Z **1.** **a)** $n^2 + 2n$ **b)** $-n^2 + 1$ **c)** $\frac{n+4}{n+1}$
d) $\frac{2n+2}{n+6}$ **e)** $\frac{3n-1}{2n+3}$ **f)** $\frac{-3n-1}{4n-1}$
g) $\frac{2n^2+4n+5}{2n+8}$ **h)** $\frac{-2n^2-4n+2}{2n^2+4n+1}$

4. **a)** 1, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$
b) 5, $\frac{7}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{21}{5}$
c) 3, 2, 1, 0, 1
d) 3, 0, 5, 12, 21
e) 0, -1, 0, 3, 8
f) 7, 12, 15, 16, 15

5. **a)** malejący **b)** stały **c)** rosnący

6. **a)** $k < 1$ **b)** $k > 1$ **c)** $k = 1$

7. **a)** $k \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
b) $k \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
c) $k \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

8. **a)** nierosnący dla $t \geqslant 9$, niemalejący dla $t \leqslant 9$
b) nierosnący dla $t \in \langle -3; 3 \rangle$, niemalejący dla $t \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)$
c) nierosnący dla $t \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$, niemalejący dla $t \in \langle 0; 2 \rangle$

9. **a)** $k \in (-\infty; 0)$ **b)** $k \in (0; 1)$
c) $k \in (-1; 0)$

10. **a)** $p < 3$ **b)** $p > 0$ **c)** $p < 2$

11. **a)** np. $a_n = -n$ **b)** np. $a_n = -\frac{1}{n}$

12. **a)** np. $a_n = -n$
b) np. $a_n = n - 5$

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ć **1.** **a)** $a_4 = 0$, $a_5 = -1$, $a_6 = 0$
b) $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, $a_6 = 63$
c) $a_4 = 13$, $a_5 = 27$, $a_6 = 53$

2. **a)** $a_2 = -1$, $a_3 = -4$, $a_4 = -7$, $a_5 = -10$, $a_6 = -13$
b) $a_2 = -6$, $a_3 = -12$, $a_4 = -24$, $a_5 = -48$, $a_6 = -96$
c) $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = -9$, $a_5 = -35$, $a_6 = -115$
d) $a_2 = \frac{1}{32}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = 1$, $a_5 = 16$, $a_6 = 512$
e) $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 46$, $a_5 = 2112$, $a_6 = 4\,460\,539$
f) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$

3. **a)** $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $a_5 = 6$, $a_6 = 10$
b) $a_3 = 4$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, $a_6 = 18$
c) $a_3 = 0$, $a_4 = -1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$
d) $a_3 = 0$, $a_4 = -3$, $a_5 = -4$, $a_6 = 7$

5. **a)** $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$,
$a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+1} a_n$ dla $n \geqslant 1$
b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$,
$a_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} a_n$ dla $n \geqslant 1$
c) $a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^n$,
$a_{n+1} = 3a_n$ dla $n \geqslant 1$
d) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$,
$a_{n+1} = -a_n$ dla $n \geqslant 1$
e) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$,
$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$ dla $n \geqslant 1$
f) $a_1 = \sqrt{2}$,
$a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$,
$a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\, a_n$ dla $n \geqslant 1$

Z **1.** **a)** $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $a_4 = -8$, $a_5 = -24$, 2 liczby dodatnie
b) $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = -5$, $a_5 = 11$, 5 liczb dodatnich
c) $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = -7$, $a_5 = -22$, 3 liczby dodatnie
d) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 14$, 8 liczb dodatnich
e) $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{9}{16}$, $a_5 = \frac{289}{256}$, 8 liczb dodatnich
f) $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = -4$, $a_5 = 0$, 6 liczb dodatnich

2. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 2

3. **a)** -4 **b)** 52 **c)** -1 **d)** 5

4. **a)** $x = 20$; malejący
b) $x = \frac{1}{6}$; rosnący

5. **a)** -1 lub 0 **b)** -2 lub 1

7. **a)** 0 **b)** 2 **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** 2

3.5. Ciągi monotoniczne (2)

Ć **1.** **a)** $c_n = 2n$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 6$, $c_4 = 8$
b) $c_n = -2$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -2$
c) $c_n = n^2 - 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 8$, $c_4 = 15$
d) $c_n = \frac{n-1}{n+1}$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{3}{5}$

2. **a)** $c_1 = 13$, $c_2 = 10$, $c_3 = 13$, $c_4 = 19$; nie jest monotoniczny
b) $c_1 = -11$, $c_2 = -2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 13$; rosnący
c) $c_1 = 12$, $c_2 = 24$, $c_3 = 36$, $c_4 = 48$; rosnący
d) $c_1 = \frac{1}{12}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = \frac{9}{4}$, $c_4 = \frac{16}{3}$; rosnący

4. **a)** np. $a_n = n$, $b_n = -\frac{1}{n}$
b) np. $a_n = b_n = -\frac{1}{n}$
c) np. $a_n = n - 2$, $b_n = n - 3$

5. **a)** np. $a_n = n^2$, $b_n = n$
b) np. $a_n = -\frac{1}{n^2}$, $b_n = -\frac{1}{n}$

Z **1.** **a)**, **c)**, **d)** rosnący **b)** stały

6. **a)** $\alpha \in (0; \pi)$ **b)** $\alpha \in (\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi)$

7. **a)**, **b)** nie jest monotoniczny
c) niemalejący **d)** rosnący

8. **a)** $k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
b) $k \in \langle 0; \infty)$

9. **a)**, **c)** niemalejący **b)** nierosnący

3.6. Ciąg arytmetyczny (1)

Ć **1.** **a)** $r = 9$, kolejne wyrazy: 30, 39
b) $r = \frac{2}{3}$, kolejne wyrazy: $\frac{11}{3}$, $\frac{13}{3}$
c) $r = -4$, kolejne wyrazy: -5, -9

2. **a)** $a_n = 2n$, $a_{20} = 40$
b) $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$, $a_{20} = \frac{27}{2}$
c) $a_n = -n + 4$, $a_{20} = -16$

3. **a)** $a_n = 2n + 2$ **b)** $a_n = 5n - 10$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{21}{4}$

4. **a)** $r = -6$, malejący, $a_n = -6n + 15$
b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$
c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$

5. **a)** $k = 5$ **b)** $k = -1$ lub $k = 3$

6. **a)** $a_4 = 3m + 10$, $a_5 = 4m + 12$;
rosnący dla $m > -2$,
malejący dla $m < -2$,
stały dla $m = -2$
b) $a_4 = 2m - 9$, $a_5 = \frac{5}{2}m - 12$;
rosnący dla $m > 6$,
malejący dla $m < 6$,
stały dla $m = 6$
c) $a_4 = 3m^2 - 2$, $a_5 = 4m^2 - 3$;
rosnący dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
malejący dla $m \in (-1; 1)$,
stały dla $m \in \{-1, 1\}$

6. **d)** $a_4 = 3m - 2m^2$, $a_5 = 4m - 3m^2$;
rosnący dla $m \in (0;1)$,
malejący dla $m \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$,
stały dla $m \in \{0,1\}$

7. **a)** $x = 23$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = \frac{5}{12}$

Z **1.** **a)** $a_{14} = 34$, rosnący
b) $a_{11} = -36$, malejący
c) $a_{20} = 10{,}5$, rosnący
d) $a_{35} = 1{,}4$, rosnący

2. **a)** $a_n = 7n - 1$ **b)** $a_n = 3n - 7$
c) $a_n = \frac{19}{2} - \frac{1}{2}n$

3. **a)** $a_n = 2n - 1$ **b)** $a_n = -3n + 15$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{15}{2}$

4. **a)** $a = 4$, $b = 7$
b) $a = 26\frac{1}{2}$, $b = 51$, $c = 75\frac{1}{2}$

5. **a)** 5, 9, 13, 17, 21
b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22

6. 4 lata – 104,5 cm, 5 lat – 111 cm, 7 lat – 124 cm, 8 lat – 130,5 cm, 9 lat – 137 cm, 10 lat – 143,5 cm

7. **a)** $a_n = 44 - 4n$, $a_{12} = -4$
b) $a_n = -\frac{21}{2} + \frac{1}{2}n$, $a_{12} = -\frac{9}{2}$
c) $a_n = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}n$, $a_{12} = \frac{23}{4}$

8. **a)** $a_1 = 21$, $r = -5$ **b)** $a_1 = -2$, $r = 5$
c) $a_1 = -2$, $r = 2$ **d)** $a_1 = \frac{7}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$
e) $a_1 = -1$, $r = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 1$, $r = -\frac{1}{2}$
f) $a_1 = -1$, $r = 2$ lub $a_1 = \frac{5}{2}$, $r = -\frac{3}{2}$

9. **a)** $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$ **b)** $x = 10$

10. a_{16}

11. $-6, -5, -4, -3$

12. $a_1 = -2$, liczba wyrazów: 15

13. **a)** $6, -2, -10, -18$
b) $-1, 1, 3, 5$ lub $-5, -3, -1, 1$
lub $-3 - \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}$
lub $-3 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}$

3.7. Ciąg arytmetyczny (2)

Ć **3.** **a)** $a_n = -2n + 8$, $y = -2x + 8$
b) $a_n = 3n - 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$

Z **1.** **a)** $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$

2. **a)**, **b)**, **d)**, **e)** jest **c)**, **f)** nie jest

5. **a)** $a_n = 5n - 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 11$, $a_4 = 16$
b) $a_n = -3n + 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -5$, $a_3 = -8$, $a_4 = -11$
c) $a_n = n\sqrt{3} - 2$, $a_1 = \sqrt{3} - 2$, $a_2 = 2\sqrt{3} - 2$, $a_3 = 3\sqrt{3} - 2$, $a_4 = 4\sqrt{3} - 2$

6. **a)** $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$; $a_n > 0$ dla $n \geqslant 4$
b) $a_n = -2n + 9$; $a_n > 0$ dla $n \leqslant 4$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{5}{2}$; $a_n > 0$ dla $n \leqslant 9$

7. **a)** $a_n = 3n - 8$, $a_{10} = 22$
b) $a_n = (n+2)\sqrt{2}$, $a_{10} = 12\sqrt{2}$

9. **a)** 36 **b)** 6, 8

10. **b)** 13,5

11. **a)** $k \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$ **b)** $k = -1$

12. **a)** $k \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2m\pi; \frac{7}{6}\pi + 2m\pi\right)$, $m \in \mathbf{Z}$
b) $k \in \left(\frac{\pi}{3} + m\pi; \frac{2}{3}\pi + m\pi\right)$, $m \in \mathbf{Z}$

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Ć **1.** **a)** $S_{50} = 1275$ **b)** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. **a)** $a_6 = 16$, $S_6 = 51$
b) $a_{20} = 10$, $S_{20} = 105$

3. **a)** $S_{31} = 1953$ **b)** $S_{13} = -299$

5. **a)** 348 **b)** 10 050 **c)** -252 **d)** 0

6. **a)** 1010 **b)** 1030 **c)** 2040

Z **1.** **a)** 115 **b)** -185 **c)** 10,5

2. **a)** $a_1 = 0$, $a_{10} = 18$, $S_{10} = 90$
b) $a_1 = -4$, $a_{10} = 5$, $S_{10} = 5$
c) $a_1 = 18$, $a_{10} = -36$, $S_{10} = -90$

3. **a)** 11 wyrazów, suma: 209
b) 15 wyrazów, suma: 75
c) 20 wyrazów, suma: -440

4. **a)** 1 021 000 **b)** 2475

5. **a)** 970 **b)** 810 **c)** 1584

6. **a)** 334 167 **b)** 234 168 **c)** 145 059

7. **a)** 3240 **b)** 329 400 **c)** 83 167

8. $a_1 = 1$, $r = \frac{2}{3}$ lub $a_1 = 7$, $r = -\frac{2}{3}$, $S_{10} = 40$

10. **a)** 21 **b)** 14 **c)** 39

11. **a)** $x = 37$ **b)** $x = -3$
c) $x = -0{,}4$ **d)** $x = -4$

12. **a)**, **b)**, **d)** rosnący **c)** malejący

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ć 1. $P_2 = 0{,}8\ \text{cm}^2$, $P_3 = 3{,}2\ \text{cm}^2$, $P_4 = 12{,}8\ \text{cm}^2$

2. a) $q = 2$, $a_4 = 24$, $a_5 = 48$
b) $q = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$
c) $q = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{4}$
d) $q = \frac{1}{4}$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{1}{4}$
e) $q = -2$, $a_4 = -8$, $a_5 = 16$
f) $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{3}$

3. a) $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$, $a_5 = 81$
b) $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$
c) $a_2 = -5$, $a_3 = 5$, $a_4 = -5$, $a_5 = 5$
d) $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -2$, $a_5 = 4$
e) $a_2 = 1$, $a_3 = \sqrt{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2\sqrt{2}$
f) $a_2 = 2\sqrt{3}$, $a_3 = 6\sqrt{2}$, $a_4 = 12\sqrt{3}$, $a_5 = 36\sqrt{2}$

4. a) $q = 9$ b) $q = \frac{3}{2}$ c) $q = \frac{1}{6}$ d) $q = -\frac{3}{4}$
e) $q = -2\sqrt{2}$ f) $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$

6. a) $a_6 = 4$ b) $a_7 = \frac{1}{625}$ c) $a_4 = \frac{64}{27}$
d) $a_6 = \frac{625}{64}$ e) $a_5 = -162$ f) $a_{15} = -7$
g) $a_9 = 80$ h) $a_8 = -\frac{1}{27}$

7. a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = \frac{1}{27}$

Z 1. a) $q = \frac{1}{2}$, $a_n = 2^{8-n}$, $a_7 = 2$
b) $q = 4$, $a_n = 4^{n-3}$, $a_7 = 256$
c) $q = -3$, $a_n = (-1)^{n+1}3^{n-6}$, $a_7 = 3$
d) $q = \frac{4}{5}$, $a_n = (\frac{4}{5})^{n-5}$, $a_7 = \frac{16}{25}$
e) $q = -\sqrt{2}$, $a_n = -(-\sqrt{2})^n$, $a_7 = 8\sqrt{2}$
f) $q = \frac{3}{2}$, $a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}$, $a_7 = \frac{81}{32}$

2. a) $a_4 = 4 + 2\sqrt{2}$, $a_5 = 4\sqrt{2} + 4$
b) $a_4 = 2\sqrt{2} + 3$, $a_5 = 5\sqrt{2} + 7$

3. a) $a_n = \frac{125}{96} \cdot \left(\frac{8}{25}\right)^{n-1}$ b) $a_n = \frac{54}{25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$
c) $a_n = -\frac{7}{2} \cdot (-2)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$
d) $a_n = -\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$
e) $a_n = -1024 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ lub $a_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
f) $a_n = -\frac{1}{243} \cdot (-3)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{243} \cdot 3^{n-1}$

4. a) -243, -81, -3
b) $\frac{3}{16}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{2}$
c) 3, 12, 24, 96
d) $\frac{1}{3}$, -1, -9, 27
e) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{3}$, 5, 15, 45

5. a) $-4, -8, -16$ lub $4, -8, 16$
b) $12, 48, 192$ lub $-12, 48, -192$
c) $7, 7, 7$ lub $-7, 7, -7$

6. a) $a_n = 5^{n-2}$ b) $a_n = (-2)^{n-1}$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Ć 2. a) $a_n = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ b) $a_n = -2^{4-n}$
c) $a_n = -2^n$

3. a), c) malejący d), e), f) rosnący
b) nie jest monotoniczny

5. a) $x = -\frac{1}{5}$ b) $x = 0$ lub $x = 2$
c) $x = 0$ lub $x = 2$

Z 1. a), d) malejący b) nie jest monotoniczny
c) rosnący

3. a) $a_n = -4^{7-n}$
b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$ lub $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$
c) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$
d) $a_n = 5^{n-1}$
e) $a_n = (\frac{1}{2})^{n-3}$ lub $a_n = -(\frac{1}{2})^{n-3}$
f) $a_n = -\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ lub $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$

4. $a = 32$, $b = 16$, $c = 8$, $d = 4$

5. $x = 11$, $y = 22$, $z = 44$

6. b) dla $x = y$

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ć 1. a) 364 b) -21 c) $\frac{63}{32}$

2. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{341}{32}$ c) $\frac{5}{32}$

3. a) -63 b) -484

4. a) 7 b) 4

5. 5

6. a) 1023 b) -2046

Z 1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$ c) -1275 d) -56

2. a) -255 b) $\frac{211}{72}$ c) $93(1-\sqrt{2})$ d) 100

4. a) $\frac{1023}{512}\ \text{cm}^2$ b) $\frac{31}{8}(2+\sqrt{2})$ cm

5. a) 4 b) 1091,2 c) 2
d) 48 e) $1+\sqrt{2}$ f) 9

6. a) 6 b) 9 c) 10

7. a) 7 b) 6

8. $0{,}9\ \text{cm}^2$

9. a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
b) $a_n = (-1)^n \cdot 3^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$

10. -1023

11. **a)** 0 **b)** x

12. 381 lub $\frac{2186}{3}$

13. $9(\sqrt{3}-1)$

14. 8

15. $a_n = 2^{n-1}$

16. $\frac{189}{8}$

17. siódmy

18. $a_1 = 3$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{93}{11}$, $q = -2$

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Ć **1.** **a)** nie jest **b)**, **c)**, **d)** jest

2. **a)** 2, 7, 12 lub 18, 7, -4
b) 2, 4, 6 lub 11, 4, -3

Z **1.** **a)** 0 **b)** 220

2. $a_n = 2(n-2)$

3. 5, -10, 20 lub 20, -10, 5

4. 9

5. $q = 3$, $a_1 = \frac{1}{11}$, $a_6 = 22\frac{1}{11}$

6. 4, 8, 16 lub $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$

7. **a)** 108 lub 36 **b)** -36

8. **a)** 2, 5, 8 lub 11, 5, -1
b) -6, 6, 18 lub 10, 6, 2

9. **a)** 9, 3, 1 **b)** 4, 12, 36

10. **a)** 10, 20 lub $-\frac{15}{2}$, $\frac{45}{4}$ **b)** 2, 8

11. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 lub $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{15}{16}$

12. **a)** $q = \frac{1}{2}$
b) suma obwodów: $\frac{93}{4}$, suma pól: $\frac{341}{64}\sqrt{3}$

3.13. Procent składany

Ć **1.** **a)** około 6230,91 zł **b)** około 7673,43 zł
c) około 6719,58 zł

2. odsetki: około 3144,47 zł,
różnica kapitału: około 743,25 zł

3. **a)** około 995,43 zł **b)** około 995,43 zł
c) około 980,34 zł

4. B

5. **a)** około 12 166,53 zł
b) około 12 189,94 zł
c) około 12 201,90 zł
d) około 12 209,97 zł

6. około 2641,36 zł

7. **a)** po 8 latach około 4791,40 zł,
po 20 latach około 15 484,60 zł
b) około 10 001,43 zł

8. **a)** około 143 183,39 zł
b) około 200 144,82 zł
c) około 228 151,10 zł

Z **1.** **a)** 2205 zł **b)** około 2552,56 zł
c) około 2687,83 zł

2. **a)** 4326,40 zł **b)** około 4637,10 zł
c) około 5920,98 zł

3. **a)**, **b)** około 754,76 zł

4. $r \approx 7{,}5\%$

5. po 5 latach około 1000 zł, po 3 latach około 1082 zł

6. w ciągu 5 lat około 3097,20 zł,
w ciągu 10 lat około 8097,65 zł

7. **a)** około 3582,16 zł **b)** około 3586,85 zł
c) około 3590,04 zł **d)** około 3591,60 zł

8. bank C

9. 3 lata

10. $k = 5000$,
po 18 latach około 12 033,10 zł

11. 25 000 zł

12. **a)** po 12 latach **b)** po 24 latach

13. **a)** 180 840,96 zł **b)** 9 lat

3.14. Granica ciągu

Ć **1.** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

2. $n \geqslant 22$

3. **a)** $n > 100$ **b)** $n > 2500$
c) $n > 10\,000$ **d)** $n > 10^{12}$

4. **a)** nie ma **b)** ma

Z **1.** **a)**, **b)**, **e)** ma **c)**, **d)**, **f)** nie ma

2. **a)** $n > 40$ **b)** $n > 200$
c) $n > 400$ **d)** $n > 4 \cdot 10^6$

3. **a)** $n > 50$ **b)** $n > 100$

3.15. Ciągi rozbieżne

1. **a)** $n > 110$, tak **b)** $n > 250$, tak
c) $n > 1600$, tak **d)** $n > 9$, tak

2. **a)** $n > 100$ **b)** $n > 250\,000$
c) $n > 1\,000\,000$ **d)** $n > 10^8$

3. **a)** tak **b)** nie

Z **1.** **a), g)** $-\infty$ **c), h)** ∞ **b), d), e), f)** nie jest

2. **a)** $n > 20$ **b)** $n > 200$ **c)** $n > 499$
d) $n > 4999$

3. **a)** $a_n > 10$ dla $n > 10^6$,
$a_n > 100$ dla $n > 10^{12}$
b) $n > 5$

3.16. Obliczanie granic ciągów (1)

Ć **1.** **a)** -2 **b)** 3 **c)** 1

2. **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** -2 **c)** $\frac{8}{3}$

3. **a)** -4 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $-\frac{7}{2}$

4. **a)** 3 **b)** $-\frac{10}{9}$ **c)** 8 **d)** 1 **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** $-\frac{1}{4}$

5. **a)** $-\frac{1}{4}$ **b)** 1 **c)** 2

6. **a)** 1 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 1 **d)** -1 **e)** $-\frac{1}{3}$ **f)** $-\frac{1}{5}$

7. **a)** 8 **b)** 4 **c)** 7 **d)** 4 **e)** 1 **f)** 4

Z **1.** **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** -2 **d)** 0 **e)** 0 **f)** 0

2. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** 8 **c)** -4 **d)** 3 **e)** 2 **f)** 4

3. **a)** 1 **b)** -6 **c)** $\frac{1}{12}$

4. **a)** 2 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 0 **e)** 0 **f)** -1

5. **a)** 1 **b)** 1

6. **a)** 5 **b)** 9 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 0 **f)** 0

7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{3}$

3.17. Obliczanie granic ciągów (2)

Ć **1.** **a)** $-\infty$ **b)** ∞

2. **a)** ∞ **c), b)** $-\infty$

3. **a), c)** ∞ **b)** $-\infty$

4. **a), b), c)** 0

5. **a)** 0 **b)** ∞ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** ∞ **f)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Z **1.** **a), c), e), f)** ∞ **b), d)** $-\infty$

2. **a), c), d), f), i)** ∞ **b), e), g), h)** $-\infty$

3. **a), c), d), e)** ∞ **b), f)** $-\infty$

4. **a)** ∞ **b), c)** $-\infty$

5. **a), b)** $-\infty$ **c)** ∞ **d)** 2

6. **a), b)** ∞ **c), d)** $-\infty$

7. **a)** 0 **b)** ∞ **c)** 1 **d)** $-\infty$ **e)** ∞ **f)** $-\sqrt{2}$

8. ∞

9. **a)** $k = 2$ **b)** $k \in (-1;0) \cup (1;\infty)$

10. **a)** $-\infty$ dla $p = -2$,
$\frac{1}{2-p}$ dla $p \in (-2;2)$,
$\frac{1}{p-2}$ dla $p \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$,
∞ dla $p = 2$
b) $-\infty$ dla $p \in \left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$,
$\frac{1}{4}$ dla $p = -\frac{3}{2}$,
∞ dla $p \in \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right)$

3.18. Szereg geometryczny

Ć **1.** **a)** $S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $S = \frac{3}{2}$
b) $S_n = \frac{4}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$, $S = \frac{4}{5}$

2. 1

3. **a)** 1000 **b)** 18 **c)** 2

4. **a)** $\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{34}{99}$ **c)** $\frac{37}{330}$ **d)** $\frac{41}{3330}$

5. **a)** $x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **b)** $x \in (-1;1)$
c) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\infty\right)$ **d)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

6. **a)** $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $x = 1$

Z **1.** **a)** 100 **b)** $-156\frac{1}{4}$ **c)** rozbieżny
d) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$ **e)** rozbieżny **f)** $-1\frac{3}{7}$

2. **a)** rozbieżny **b)** $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$

3. **a)** $S = 1$ **b)** $q = \frac{1}{2}$ **c)** $a_1 = 99$ **d)** $q = \frac{1}{3}$

4. **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{45}$ **d)** $\frac{41}{30}$ **e)** $\frac{20}{33}$ **f)** $\frac{207}{110}$
g) $-\frac{60}{11}$ **h)** $-\frac{1000}{909}$

5. $a_1 = 32$, $a_2 = 16$, $a_3 = 8$, $a_4 = 4$

6. $a_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$

7. **a)** $a_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$ **b)** $a_1 = 9$, $q = -\frac{1}{2}$

8. **a)** $a_1 = 1$ **b)** $a_1 = 15$, $q = \frac{1}{4}$

9. **a)** $x \in (1;2)$ **b)** $x \in (-\infty;-2) \cup (0;\infty)$

10. **a)** $x = -\frac{1}{2}$ **b)** $x = -1$

11. **a)** $D = (-1;1)$, $f(x) = \frac{-1}{x-1} - 1$
b) $D = (-1;1)$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$
c) $D = (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$,
$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$
d) $D = (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$,
$f(x) = \frac{3}{x+3} - 1$

12. **a)** $D = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$, $f(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$
b) $D = \left(\frac{7}{2};\infty\right)$, $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{x-\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}$

13. **a)** 4π **b)** $P\left(\frac{8}{3},0\right)$

14. 10

3.19. Zagadnienia uzupełniające

3. **a)** ograniczony z dołu i nieograniczony z góry
b) ograniczony z dołu i z góry
c) nieograniczony z góry i z dołu

6. **a)** około 2,6915880, około 2,7048138, około 2,7169239 **b)** około 2,71806

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** 3 **b)** 10

2. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 20$, $a_8 = 240$

3. **a)**, **c)** arytmetyczny
b) nie jest arytmetyczny
a), **b)**, **c)** malejący

4. **a)** $a_n = 2n - 2$ **b)** $a_n = 3n - 6$
c) $a_n = -2n + 10$

5. **a)** $a_n = 3n - 1$ lub $a_n = -3n + 8$
b) $a_n = 2n - 12$ lub $a_n = 2n$
c) $a_n = n + 1$ lub $a_n = 5n - 11$

6. **a)** -70 **b)** 5 **c)** 15

7. **a)** 222 **b)** 168 **c)** 168 **d)** 66 **e)** 60 **f)** -6

8. **a)** 50 **b)** -550 **c)** 4000 **d)** 4850

9. **a)** $x = 13$ **b)** $x = -30$ **c)** $x = 37$
d) $x = 29$

10. **a)** 3960 **b)** 396 000

11. **a)**, **b)**, **c)** ciąg geometryczny
a) ciąg malejący **b)**, **c)** ciąg rosnący

12. **a)** 24, 48, 96, 192, 384
b) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
c) $-1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}$

13. **a)** $a_3 = \frac{1}{10}$, $a_5 = 10$ **b)** $a_3 = 8$, $a_5 = 32$
c) $a_3 = 3$, $a_5 = \frac{1}{3}$
d) $a_3 = 2$, $a_5 = \frac{1}{2}$ lub $a_3 = a_5 = 0$

14. **a)** $\frac{93}{16}$ **b)** $-\frac{55}{8}$ **c)** 341 lub 521
d) -44 lub -20

15. **a)** arytmetyczny dla $x = 1$, geometryczny dla $x = 0$ i dla $x = 10$
b) arytmetyczny dla $x = 0$ i dla $x = 12$, geometryczny dla $x = 0$ i dla $x = -\frac{3}{2}$

16. **a)** 1024 **b)** $60\frac{1}{7}$

17. **a)** np. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2(n-1)$ dla $n \geqslant 1$
b) np. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geqslant 1$
c) np. $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ dla $n \geqslant 1$
d) np. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dla $n \geqslant 1$

18. **a)** około 2251,02 zł **b)** około 2252,99 zł
c) około 2254,32 zł

19. **a)**, **b)** około 836,74 zł

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)**, **c)**, **d)** malejący **b)** rosnący

2. **a)**, **d)** rosnący **b)** malejący
c) nie jest monotoniczny

4. **a)** jest **b)** nie jest

6. **a)** 1, 2, 3 lub 4, 2, 0
b) 1, 2, 4 lub 4, 2, 1

7. $b_1 = 2$, $b_2 = -4$, $b_3 = 8$ lub $b_1 = 8$, $b_2 = -4$, $b_3 = 2$

8. **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** 3

9. $4\frac{364}{729}\pi$ cm^2

10. 24

11. **a)** $-\infty$ **b)** 0 **c)** $-\infty$ **d)** -1
e) ∞ **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** -1 **h)** ∞

12. **a)** 0 **b)** ∞

13. **a)** $b = -2$ **b)** $b = -2$ lub $b = 4$

14. **a)** $2 + \sqrt{2}$ **b)** $3 + 2\sqrt{3}$

15. **a)** $\frac{4}{33}$ **b)** $\frac{38}{111}$ **c)** $\frac{2399}{990}$ **d)** 4

16. **a)** $D = (-\frac{1}{2}; \infty)$, $f(x) = x + 1$
b) $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$, $f(x) = -x + 3$

17. **a)** $x = \frac{4}{9}$
b) $x = -1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x = -1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x = 2$
c) $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ **d)** $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Zadania testowe

1. D **2.** B **3.** C **4.** B **5.** A **6.** A **7.** C
8. C **9.** C **10.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. rosnący

3. 4

4. 6, 8, 10

5. 2, 4, 6 lub 6, 4, 2

6. 112 cm^2

7. 8

8. 27

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 177 $(a_1 = \frac{16}{9})$

2. 485 $(6\sqrt{2} - 8)$

3. 144 $(\frac{5\sqrt{3}}{6})$

4. 746 $(2(\sqrt{3} + 2))$

5. $a_n = 3n + 1$

6. 1, 2, 4 lub 4, 2, 1

7. $\frac{128}{3}$

8. $x \in \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\rangle \cup \langle \frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi) \cup$
$\cup (\frac{3}{2}\pi; \frac{11}{6}\pi\rangle$

4.2. Obliczanie granic funkcji

Č **1.** **a)** 16 **b)** 8 **c)** 1024

2. **a)** -5 **b)** -3 **c)** 7 **d)** $\frac{131}{11}$

3. **a)** -8 **b)** 0 **c)** $\frac{7}{8}$ **d)** $\frac{5}{3}$

4. **a)** 4 **b)** 4 **c)** 0,2

5. **a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{73}}{3}$ **c)** $\frac{5}{2}$

6. **a)** 2 **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Z **1.** **a)** 5 **b)** -4 **c)** $\frac{1}{2}$

2. **a)** -18 **b)** 2 **c)** -5 **d)** $-\frac{1}{7}$ **e)** 1
f) $\frac{2}{5}$ **g)** -5 **h)** $10\frac{1}{2}$ **i)** 3

3. **a)** -2 **b)** 4 **c)** $-\frac{3}{2}$

4. **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{4}$ **e)** 6 **f)** $-\frac{5}{2}$

5. **a)** 1 **b)** 7 **c)** $-2\frac{2}{3}$

4.3. Granice jednostronne

Č **2.** **a)**, **b)** $\frac{1}{2}$ **c)**, **d)** 0

Z **1.** **a)** 2 **b)** $-\frac{1}{8}$ **c)** 1 **d)** -1
e) 2 **f)** $\frac{1}{5}$ **g)** 0 **h)** 1

2. **a)**, **d)** 3, tak **b)** -2, 0, nie **c)** -1, -2, nie

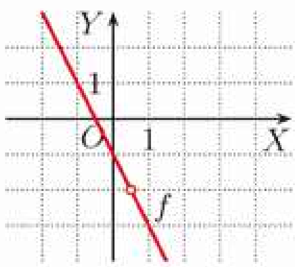
4.4. Granice niewłaściwe

Č **2.** **a)** $x_0 = 1$ **b)** $x_0 = -2$

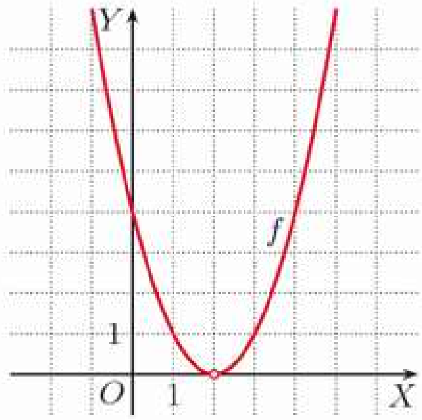
3. **a)** ∞ **b)** $-\infty$ **c)** $-\infty$ **d)** ∞

4. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x = -2$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $x = -3$, $x = 3$

5. **a)**



b)



6. **a)** ∞ **b)** ∞

Z **1.** **a)**, **d)**, **e)**, **h)** ∞
b), **c)**, **f)**, **g)**, **i)** $-\infty$

2. Wszystkie asymptoty obustronne.
a) $x = -2$
b) $x = -2$, $x = 2$
c) $x = -3$
d) $x = \frac{1}{3}$
e) $x = -1$
f) $x = 4$

3. **a)** $x = 1$ **b)** nie ma asymptoty **c)** $x = 2$

4.5. Granica funkcji w nieskończoności

Č **2.** **a)** asymptota pozioma w $\pm\infty$: $y = -2$
b) asymptota pozioma w $\pm\infty$: $y = 3$
c) asymptota pozioma w ∞: $y = 2$
asymptota pozioma w $-\infty$: $y = -2$

4. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

5. **a)** $-\infty$ **b)**, **c)**, **d)** ∞

6. **a)** $-\infty$ **b)** ∞ **c)** $-\infty$

7. **a)** 3 **b)** $-\infty$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** 4 **f)** 0

Z **1.** **a)** $-\infty$ **b)**, **c)** ∞

2. **a)** 4 **b)** -3 **c)** -2 **d)** -5 **e)** 2 **f)** -2
g), **h)**, **i)** 0 **j)** $-\infty$ **k)**, **l)** ∞

3. **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** 6 **c)** -1

4. **a)** 0 **b)** ∞ **c)** 0

5. **a)** ∞ **b)** ∞ **c)** ∞

6. **a)** $y = 0$ w $\pm\infty$ **b)** $y = 2$ w $\pm\infty$
c) $y = -3$ w $\pm\infty$ **d)** $y = 5$ w $\pm\infty$
e) $y = 1$ w ∞ **f)** $y = 1$ w $-\infty$

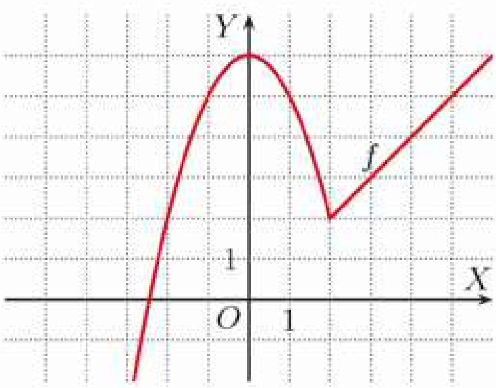
7. **a)** $x = 1$ – pionowa obustronna,
$y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x = 4$ – pionowa obustronna,
$y = -2$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x = \frac{2}{3}$ – pionowa obustronna,
$y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x = -2$, $x = 2$ – pionowe obustronne,
$y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
e) $x = -3$, $x = 3$ – pionowe obustronne,
$y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
f) $x = -5$ – pionowa obustronna,
$y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
g) $x = -1$, $x = 2$ – pionowe obustronne,
$y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
h) $x = -1$, $x = 5$ – pionowe obustronne,
$y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
i) $y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$

8. **a)** $y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$,
$x = 1$ – pionowa prawostronna
b) $y = 3$ – pozioma w $\pm\infty$,
$x = 1$ – pionowa prawostronna
c) $y = 4$ – pozioma w $\pm\infty$,
$x = 2$ – pionowa prawostronna,
$x = -2$ – pionowa lewostronna

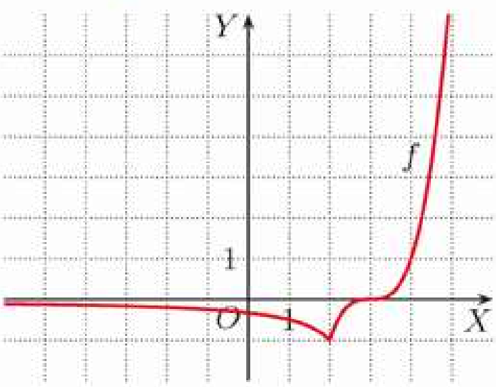
9. **a)** 2 **b)** -2 **c)** $\frac{1}{2}$

4.6. Ciągłość funkcji

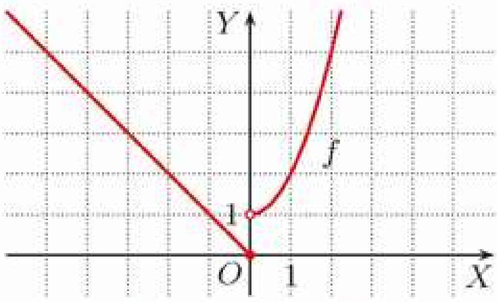
Ć **1.** **a)**



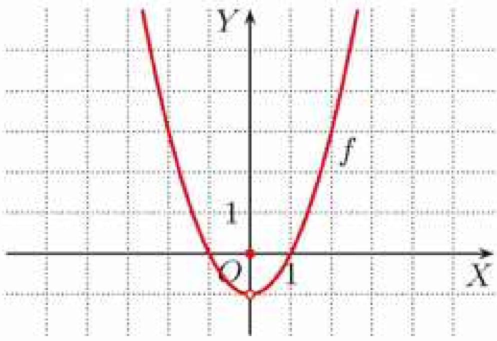
b)



2. **a)**



b)



3. **a)** $a = 0$
b) $a = -\sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{2}$

Z **2.** **a)**, **b)**, **c)**, **e)**, **f)** nieciągła
d) ciągła

3. **a)** $a = 2$ **b)** $a = 4$ **c)** $a = -3$ lub $a = 1$
d) $a = -3$ lub $a = 1$

4. nieciągła dla $x \in \mathbf{Z}$

5. **a)** $a = 2$ i $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $(a = -\frac{1}{3}$ lub $a = \frac{1}{2})$
i $(b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $b = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z})$

6. **a)** $a = 3$, $b = \frac{4}{5}$, $c = -\frac{1}{10}$
b) $a = -1$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2$

4.7. Własności funkcji ciągłych

Ć **4.** **a)** wartość najmniejsza: 1,
wartość największa: 4
b) wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 4
c) wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 9

Z **3.** **a)** np. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **b)** np. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ **c)** np. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

5. **a)** $f(4) = 4$ **b)** $f(3) = 1$
c) $f(4) = 0$

6. **a)** przyjmuje, $f(-1) = f(1) = 3$
b) nie przyjmuje

7. **a)** $m = -3$, $M = 9$
b) $m = 0$, $M = 8$
c) $m = 0$, $M = 5$

4.8. Pochodna funkcji w punkcie

Ć **1.** **a)** $a = 1$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = 3$

2. $a = -1$

3. **a)** 2 **b)** 16
c) -2 **d)** 9

4. **a)** $a = 2$, $\alpha \approx 63^\circ$
b) $a = 3$, $\alpha \approx 72^\circ$
c) $a = -\frac{1}{4}$, $\alpha \approx 166^\circ$

Z **1.** **a)** $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$
b) $f'(x_0) = f'(x_1) = 3$
c) $f'(x_0) = 2$, $f'(x_1) = -2$
d) $f'(x_0) = -1$, $f'(x_1) = -{}^{1}4$
e) $f'(x_0) = 12$, $f'(x_1) = -\frac{1}{4}$
f) $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, $f'(x_1) = \frac{1}{4}$

2. **a)** PA: $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$,
PB: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
b) 1

3. **a)** 135° **b)** 135° **c)** 45°

4.9. Funkcja pochodna

Ć **2.** **a)** 75 **b)** -2 **c)** $\frac{2}{5}$

3. **a)** $x = 1$
b) $x = \frac{1}{16}$
c) równanie sprzeczne

4. **a)** $y = 6x - 9$
b) $y = -4x - 4$
c) $y = 3x - 2$

Z **2.** **a)** $y = -8x - 16$
b) $y = 27x + 54$
c) $y = -4x + 4$

3. **a)** $y = x - \frac{1}{4}$
b) $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$
c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$

4. **a)** $(3, 9)$
b) $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
c) $(\frac{1}{144}, \frac{1}{12})$

5. **a)** $(\frac{1}{6}, \frac{1}{36})$
b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27})$
c) $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$

6. **a)** tak, $y = 3x - 2$, $y = 3x + 2$
b) tak, $y = -4x + 4$, $y = -4x - 4$
c) nie

4.10. Działania na pochodnych

Ć **1.** **a)** $f'(x) = 36x^2$ **b)** $f'(x) = 3x^5$
c) $f'(x) = 28x^6$
d) $f'(x) = -6x^{-2}$, $x \neq 0$
e) $f'(x) = -12x^{-7}$, $x \neq 0$
f) $f'(x) = \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{4}}$, $x > 0$

2. **a)** $f'(x) = 8x^3 - 6x$
b) $f'(x) = x^4 + 12x^3 - 14x$
c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 12x^2$, $x > 0$
d) $f'(x) = 3x^5 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

3. **a)** $f'(x) = 3\sqrt{x} - 12x^2$, $x > 0$
b) $f'(x) = -26x^5\sqrt{x} + 12x$, $x > 0$
c) $f'(x) = 14x^6 - 8x^3 - 4$
d) $f'(x) = 28x^6 + 24x^5 - 5x^4 - 68x^3 + 8x$
e) $f'(x) = 16{,}5x^4\sqrt{x} - 2{,}5x\sqrt{x}$, $x > 0$
f) $f'(x) = 4{,}5x^3\sqrt{x} + 4$, $x > 0$

4. **a)** $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$
b) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$
c) $f'(x) = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}$, $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

6. **a)** $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$, $x \neq 0$
b) $f'(x) = -\frac{8x}{(4x^2+3)^2}$
c) $f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2}$,
$x \in (0; 4) \cup (4; \infty)$

Z **1.** **a)** $f'(x) = -6x + 1$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = -5$
b) $f'(x) = 8x - 5$, $f'(0) = -5$, $f'(1) = 3$
c) $f'(x) = 6x^2 + 4$, $f'(0) = 4$, $f'(1) = 10$
d) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6$, $f'(0) = 6$,
$f'(1) = 11$
e) $f'(x) = -x^3 + x^2 - x$, $f'(0) = 0$,
$f'(1) = -1$
f) $f'(x) = -x^4 + 2x^3 - 3$, $f'(0) = -3$,
$f'(1) = -2$

2. **a)** $f'(x) = 4x + 5$
b) $f'(x) = 4x^3 + 2x$
c) $f'(x) = -12x^3 - 9x^2 + 2x + 1$
d) $f'(x) = 10x^4 - 15x^2 - 4x$
e) $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x - 1$
f) $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x - 4$

3. **a)** $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
b) $f'(x) = \frac{-2x^2+2x}{(1-2x)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
c) $f'(x) = \frac{-5x+2}{x^3}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

3. **d)** $f'(x) = \frac{3x^2-2x-3}{(3x-1)^2}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$
e) $f'(x) = \frac{6x^2+4x+6}{(1-x^2)^2}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
f) $f'(x) = \frac{5x^2+2x-3}{(3x-x^2)^2}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$
g) $f'(x) = \frac{x^4-3x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
h) $f'(x) = 2x$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
i) $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
j) $f'(x) = -\frac{5}{(5x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{5}\}$
k) $f'(x) = \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} + \frac{6}{x^4}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
l) $f'(x) = -\frac{9x^2}{(x^3-2)^2} + \frac{1}{x^5}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0, \sqrt[3]{2}\}$

4. **a)** $f'(x) = \frac{1-10x^2}{2\sqrt{x}}$, $D_f = \langle 0; \infty)$,
$D_{f'} = \mathbf{R}_+$, $f'(1) = -\frac{9}{2}$, $f'(4) = -\frac{159}{4}$
b) $f'(x) = \frac{3x+2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}}$, $D_f = \langle 0; \infty)$,
$D_{f'} = \mathbf{R}_+$, $f'(1) = 0$, $f'(4) = \frac{11}{4}$
c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $D_f = \langle 0; \infty)$,
$D_{f'} = \mathbf{R}_+$, $f'(1) = \frac{1}{8}$, $f'(4) = \frac{1}{36}$
d) $f'(x) = \frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}_+$,
$f'(1) = \frac{7}{2}$, $f'(4) = \frac{13}{4}$
e) $f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{4}}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}_+$,
$f'(1) = -2$, $f'(4) = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}$
f) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, $D_f = \langle 0; \infty)$,
$D_{f'} = \mathbf{R}_+$, $f'(1) = \frac{9}{4}$, $f'(4) = 3 + \frac{3}{8}\sqrt{2}$

7. **a)** 2 **b)** 2 **c)** $\frac{8}{9}$ **d)** $-\frac{5}{7}$

8. **a)** $y = x - 3$
b) $y = -6x + 3$
c) $y = -6x + 9$
d) $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
e) $y = 3x$
f) $y = -4x - 22$
g) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$
h) $y = \frac{1}{2}$

9. **a)**, **b)**, **c)**, **d)** tak

10. **a)** $y = -2x - 5$, $y = -2x + 3$
b) $y = -2x - 4$, $y = -2x + 4$

11. **a)** $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $f'(\frac{\pi}{3}) = 4$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$
d) $f'(\frac{\pi}{3}) = -1\frac{1}{3}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = -2$

12. **a)** $2\cos^2 x - 1$
b) $2\sin x + (2x+1)\cos x$
c) $2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2+3}{\cos^2 x}$ **d)** $2\sin x \cos x$
e) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$ **f)** $\frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$
g) $-2\sin x \cos x$ **h)** $\frac{1}{1+\cos x}$ **i)** $\frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$

4.11. Pochodna funkcji złożonej

Ć **1.** **a)** $h(x) = \sqrt{x^2+4}$, $D_h = \mathbf{R}$
b) $h(x) = \sqrt{x^2-1}$,
$D_h = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$
c) $h(x) = 2\sqrt{x} - 4$, $D_h = \langle 0; \infty)$
d) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_h = \mathbf{R}_+$

2. **a)** $h'(x) = 12x(2x^2-1)^2$
b) $h'(x) = 4(2x-3)(x^2-3x)^3$
c) $h'(x) = 5(6x+1)(3x^2+x)^4$
d) $h'(x) = 24(4x+6)^5$

3. **a)** $h'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$, $D_h = D_{h'} = \mathbf{R}$
b) $h'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$,
$D_h = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 0; \infty)$,
$D_{h'} = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; \infty)$
c) $h'(x) = -\frac{1}{2|x|\sqrt{x^2+x}}$,
$D_h = (-\infty; -1\rangle \cup (0; \infty)$,
$D_{h'} = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
d) $h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{4x+x\sqrt{x}}}$,
$D_h = \langle 0; \infty)$, $D_{h'} = (0; \infty)$

Z **1.** **a)** $f'(x) = 3(x+1)^2$,
$f'(0) = 3$, $f'(1) = 12$
b) $f'(x) = 8x(x^2+1)^3$,
$f'(0) = 0$, $f'(1) = 64$
c) $f'(x) = -5(x-1)^4$,
$f'(0) = -5$, $f'(1) = 0$
d) $f'(x) = 24x(4x^2+2)^2$,
$f'(0) = 0$, $f'(1) = 864$
e) $f'(x) = 15(3x+2)^4$,
$f'(0) = 240$, $f'(1) = 9375$
f) $f'(x) = 12(10x^3-3)(5x^4-6x+2)^5$,
$f'(0) = -1152$, $f'(1) = 84$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$, $D_f = \langle 2; \infty)$, $D_{f'} = (2; \infty)$

b) $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{6x^2+1}}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$

c) $f'(x) = \frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$, $D_f = \langle 0; \infty)$, $D_{f'} = (0; \infty)$

d) $f'(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x}}$, $D_f = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$, $D_{f'} = (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

e) $f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}$, $D_f = (-\infty; -\frac{1}{4}\rangle \cup \langle 0; \infty)$, $D_{f'} = (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; \infty)$

f) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $D_f = \langle -2; 2\rangle$, $D_{f'} = (-2; 2)$

3. a) $f'(x) = (70x+17)(2x+1)(7x-1)^2$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(0) = 17$

b) $f'(x) = 2(x^2-1)(3-x)(-3x^2+6x+1)$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(0) = -6$

c) $f'(x) = \frac{10x^2+2x}{\sqrt{4x+1}}$, $D_f = \langle -\frac{1}{4}; \infty)$, $D_{f'} = (-\frac{1}{4}; \infty)$, $f'(0) = 0$

d) $f'(x) = \frac{3x^2-14x^3}{\sqrt{1-4x}}$, $D_f = (-\infty; \frac{1}{4}\rangle$, $D_{f'} = (-\infty; \frac{1}{4})$, $f'(0) = 0$

4. a) $f'(x) = \frac{-6x-7}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}$, $D_f = D_{f'} = (-\frac{1}{3}; \infty)$, $f'(1) = -\frac{13}{16}$

b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. a) $h'(1) = -3$ b) $h'(1) = -\frac{1}{3}$

6. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ b) $y = x + 2$

7. $x = -1$

8. a) $f'(x) = 4\cos 4x$

b) $f'(x) = -5\sin 5x$

c) $f'(x) = \frac{6}{\cos^2(6x-1)}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} : k \in \mathbf{Z}\}$

d) $f'(x) = 2x\cos x^2$

e) $f'(x) = -2x\sin x^2$

f) $f'(x) = 3x^2\cos(x^3-1)$

g) $f'(x) = -2x\sin(x^2-1)$

h) $f'(x) = 2\sin x\cos x$

i) $f'(x) = -2\sin x\cos x$

j) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x$

k) $f'(x) = \frac{-3x^2}{\cos^2(1-x^3)}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt[3]{1 + \frac{\pi}{2} + k\pi} : k \in \mathbf{Z}\}$

l) $f'(x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$

4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej

Ć 1. $v_{\text{śr}} = 4$, $v(t_1) = 2$, $v(t_2) = 4$, $v(t_3) = 6$

2. a) $h'(t) = v(t)$

Z 1. $v(1) = 9{,}8$ m/s $= 35{,}28$ km/h, $v(3) = 29{,}4$ m/s $= 105{,}84$ km/h

2. $V_Z = 141{,}12$ km/h, $V_M = 53{,}28$ km/h

3. 0 m/s

4. a) $a(1) = a(4) = 4$

b) $a(1) = 1$, $a(4) = 7$

c) $a(1) = -4$, $a(4) = 17$

5. $v(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$, $a(t) = -9{,}8$

4.13. Monotoniczność funkcji

Ć 1. f rosnąca w $(-\infty; 2\rangle$, $f'(x) \geqslant 0$; f malejąca w $\langle 2; \infty)$, $f'(x) \leqslant 0$

3. a) maleje w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $\langle 0; 2\rangle$

b) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -1; 1\rangle$

4. a) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -1; 1\rangle$

b) rośnie w $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle$ i w $\langle \sqrt{2}; \infty)$, maleje w $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$

c) maleje w $(-\infty; -\frac{\sqrt{10}}{2}\rangle$ i w $\langle 0; \frac{\sqrt{10}}{2}\rangle$, rośnie w $\langle -\frac{\sqrt{10}}{2}; 0\rangle$ i w $\langle \frac{\sqrt{10}}{2}; \infty)$

d) rośnie w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle -\frac{1}{3}; \infty)$, maleje w $\langle -3; -\frac{1}{3}\rangle$

e) rośnie w $\mathbf{R}$

f) rośnie w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle \frac{8}{3}; \infty)$, maleje w $\langle 0; \frac{8}{3}\rangle$

5. a) maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$

b) rośnie w $(-\infty; -8)$ i w $(-8; \infty)$

c) rośnie w $(-\infty; 1\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, maleje w $\langle 1; 4)$ i w $(4; 7\rangle$

Z 3. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle -2; 2\rangle$

b) rośnie w $(-\infty; 1\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle 1; 2\rangle$

3. c) rośnie w $(-\infty; -7\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -7; 1\rangle$
d) maleje w $(-\infty; 2\rangle$ i w $\langle 6; \infty)$, rośnie w $\langle 2; 6\rangle$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
f) maleje w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 1; 2\rangle$, rośnie w $\langle -2; 1\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$
g) maleje w $(-\infty; -2\rangle$, rośnie w $\langle -2; \infty)$
h) rośnie w $(-\infty; -6\rangle$ i w $\langle -2; 2\rangle$, maleje w $\langle -6; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$

4. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle -2; 0)$ i w $(0; 2\rangle$
b) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \frac{1}{2}\rangle$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
d) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $(0, 1\rangle$, rośnie w $\langle -1; 0)$ i w $\langle 1; \infty)$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, rośnie w $\langle -1; 1\rangle$
f) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, maleje w $\langle -1; 3)$ i w $(3; 7\rangle$
g) maleje w $(-\infty; 3\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, rośnie w $\langle 3; 5)$ i w $(5; 7\rangle$
h) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $(-1; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; 1)$ i w $(1; \infty)$
i) maleje w $(-\infty; 1-\sqrt{2}\rangle$ i w $\langle 1+\sqrt{2}; \infty)$, rośnie w $\langle 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\rangle$
j) maleje w $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{2}\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; 1)$ i w $(1; 2\rangle$
k) maleje w $(-\infty; -4\rangle$, $\langle -1; 2)$ i w $(2; \infty)$, rośnie w $\langle -4; -2)$ i w $(-2; -1\rangle$
l) rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $\langle 0; \infty\rangle$, maleje w $(-3; 0\rangle$

5. a) maleje w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 0; 3\rangle$, rośnie w $\langle -2; 0\rangle$ i w $\langle 3; \infty)$
b) rośnie w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle -1; \infty)$, maleje w $\langle -3; -1\rangle$
c) rośnie w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle 0; 2\rangle$

6. a) $k \in \left\langle \frac{9}{4}; \infty\right)$ b) $k \in \left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$
c) $k \in \langle -2; \infty)$ d) $k \in \langle -3; 3\rangle$

7. a) $k \in (-\infty; -\frac{1}{3}\rangle$ b) $k \in (-\infty; 0\rangle$

4.14. Ekstrema funkcji

Ć 1. a) minimum $f(-1) = 0$, maksimum $f(1) = 4$
b) minimum $f(2) = -20$, maksimum $f(-1) = 7$
c) minimum $f(4) = -\frac{112}{3}$, maksimum $f(-1) = \frac{13}{3}$
d) minimum $f(2) = -12$
e) minima $f(0) = f(2) = 0$, maksimum $f(1) = 1$
f) minimum $f(\sqrt{3}) = -\frac{24}{5}\sqrt{3} + 6$, maksimum $f(-\sqrt{3}) = \frac{24}{5}\sqrt{3} + 6$
g) minimum $f(1) = 2$, maksimum $f(-1) = -2$
h) maksimum $f(0) = 0$
i) minimum $f(-1-\sqrt{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{8}$, maksimum $f(-1+\sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{8}$,

3. a) maksimum $f(0) = 0$; Nie istnieją ani pochodna funkcji w tym punkcie, ani styczna do wykresu w tym punkcie.
b) minima $f(-2) = f(2) = 0$, maksimum $f(0) = 4$
Pochodna funkcji oraz styczna do wykresu istnieją dla maksimum, ale nie istnieją dla minimów tej funkcji.
c) minimum $f(1) = 0$; Nie istnieją ani pochodna funkcji w tym punkcie, ani styczna do wykresu w tym punkcie.

Z 1. a) minimum $f(-1) = -5$, maksimum $f(3) = 27$
b) minimum $f(2) = -19$, maksimum $f(-2) = 13$
c) minimum $f(2) = -11\frac{1}{3}$, maksimum $f(-5) = 45\frac{5}{6}$
d) minima $f(-2) = f(2) = -10$, maksimum $f(0) = 6$
e) minimum $f(0) = -3$
f) minimum $f(3) = -161$, maksimum $f(-3) = 163$
g) minimum $f(2) = 4$, maksimum $f(-2) = -4$
h) minimum $f(1) = \frac{3}{2}$
i) minimum $f(1) = 4$, maksimum $f(-1) = -4$

2. a) rośnie w $(-\infty;0)$ i w $(0;1\rangle$, maleje w $\langle 1;2)$ i w $(2;\infty)$, maksimum $f(1)=-4$

b) rośnie w $(-\infty;-3)$ i w $(-3;0\rangle$, maleje w $\langle 0;3)$ i w $(3;\infty)$, maksimum $f(0)=0$

c) rośnie w $\langle -9;-5)$ i w $(-5;-1\rangle$, maleje w $(-\infty;-9\rangle$ i w $\langle -1;\infty)$, minimum $f(-9)=18$, maksimum $f(-1)=2$

d) maleje w $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right\rangle$ i w $\left\langle\frac{\sqrt{13}-2}{3};\infty\right)$, rośnie w $\left\langle-\frac{\sqrt{13}+2}{3};\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right\rangle$, minimum $f(-\frac{\sqrt{13}+2}{3})=\frac{2-\sqrt{13}}{2}$ maksimum $f(\frac{\sqrt{13}-2}{3})=\frac{\sqrt{13}+2}{2}$,

e) rośnie w $(-\infty;-3\rangle$ i w $\langle 3;\infty)$, maleje w $\langle -3;-\sqrt{3})$, w $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$ i w $(\sqrt{3};3\rangle$, minimum $f(3)=\frac{9}{2}$, maksimum $f(-3)=-\frac{9}{2}$

f) rośnie w $(-\infty;4-\sqrt{6}\rangle$ i w $\langle 4+\sqrt{6};\infty)$, maleje w $\langle 4-\sqrt{6};4)$ i w $(4;4+\sqrt{6}\rangle$, minimum $f(4+\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$, maksimum $f(4-\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$

4. a) $m=-1$ **b)** $m=\frac{9}{2}$

5. a) minimum dla $m=-1$ **b)** maksimum dla $m=3$

6. a) $a\in(-\infty;0\rangle$ **b)** $a\in\langle\frac{1}{3};\infty)$ **c)** $a\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle 3;\infty)$

7. a) $a=5$, $b=4$, maksimum, funkcja ma minimum $f(7)=9$ **b)** maksimum

4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

Ć **1. a)** najmniejsza: $f(1)=0$, największa: $f(-1)=4$ **b)** najmniejsza: $f(2)=1$, największa: $f(4)=9$

2. a) najmniejsza: $f(2)=-4$, największa: $f(4)=4$ **b)** najmniejsza: $f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{4}$, największa: $f(2)=32$

3. a) najmniejsza: $f(1)=-3$, największa: $f(2)=8$ **b)** najmniejsza: $f(3)=\frac{1}{10}$, największa: $f(1)=\frac{1}{2}$ **c)** najmniejsza: $f(0)=f(2)=0$, największa: $f(-2)=16$ **d)** najmniejsza: $f(0)=0$, największa $f(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-4$

Z **1. a)** najmniejsza: $f(-1)=f(2)=-2$, największa: $f(3)=f(0)=2$ **b)** najmniejsza: $f(2)=-2$, największa: $f(3)=2$ **c)** najmniejsza: $f(-1)=-2$, największa: $f(0)=2$ **d)** najmniejsza: $f(-2)=-18$, największa: $f(4)=18$

2. a) najmniejsza: $f(0)=1$, największa: $f(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}+1$ **b)** najmniejsza: $f(-2)=-10$, największa: $f(1)=11$ **c)** najmniejsza: $f(3)=-25$, największa: $f(-1)=7$ **d)** najmniejsza: $f(-2)=f(2)=-2$, największa: $f(-1)=f(1)=7$

3. a) najmniejsza: $f(0)=\frac{2}{3}$, największa: $f(-1)=f(1)=\frac{3}{4}$, $f(D)=\langle\frac{2}{3};\frac{3}{4}\rangle$ **b)** najmniejsza: $f(6)=12$, największa: $f(4)=16$, $f(D)=\langle 12;16\rangle$ **c)** najmniejsza: $f(\frac{4}{3})=-\frac{1}{8}$, największa: $f(1)=f(2)=0$, $f(D)=\langle-\frac{1}{8};0\rangle$ **d)** najmniejsza: $f(-1)=-2$, największa: $f(1)=2$, $f(D)=\langle -2;2\rangle$ **e)** najmniejsza: $f(3)=\frac{1}{100}$, największa: $f(0)=1$, $f(D)=\langle\frac{1}{100};1\rangle$ **f)** najmniejsza: $f(0)=\frac{1}{2}$, największa: $f(-1)=1$, $f(D)=\langle\frac{1}{2};1\rangle$

4. $p = 7$

5. **a)** $m \in \langle -15; 9 \rangle$

b) $m \in \langle 0; 26 \rangle$

6. **a)** $m \in \langle -\sqrt[6]{32}; \sqrt[3]{9} \rangle$

b) $m \in \langle -1; \sqrt[3]{63} \rangle$

7. **a)** $m \in \langle -1; 1 \rangle$

b) $m \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

4.16. Zagadnienia optymalizacyjne

Ć **1.** **a)** kwadrat o boku 15 cm **b)** 24 cm^2

2. **a)** $\frac{64}{27}$

b) wszystkie krawędzie równe $\frac{16}{3}$

c) krawędź podstawy 4, wysokość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. **a)** $2\sqrt{3}$ cm $\times$ $2\sqrt{3}$ cm $\times$ $2\sqrt{3}$ cm

b) 3 cm $\times$ 3 cm $\times$ 3 cm

Z **1.** kwadrat o boku $5\sqrt{2}$ cm

2. 15 cm $\times$ 20 cm

3. $x = 4\sqrt{3}$ cm, $y = 4\sqrt{6}$ cm

4. 20 m $\times$ 8 m, ściana z cegły – 8 m

5. krawędź podstawy: 4 dm, wysokość: 6 dm, koszt: 144 zł

6. $(10 - 2\sqrt{7})$ cm

7. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

8. $|OA| = 2$, $|OC| = 16$

9. $\frac{256}{27}$

10. **a)** $\left(-\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2}\right)$

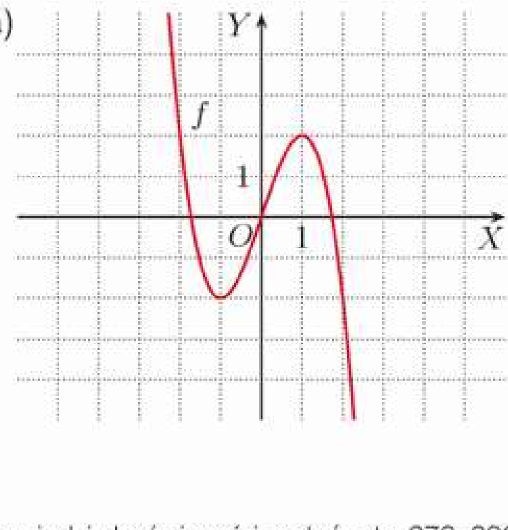
b) $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2}\right)$

c) $(-\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$

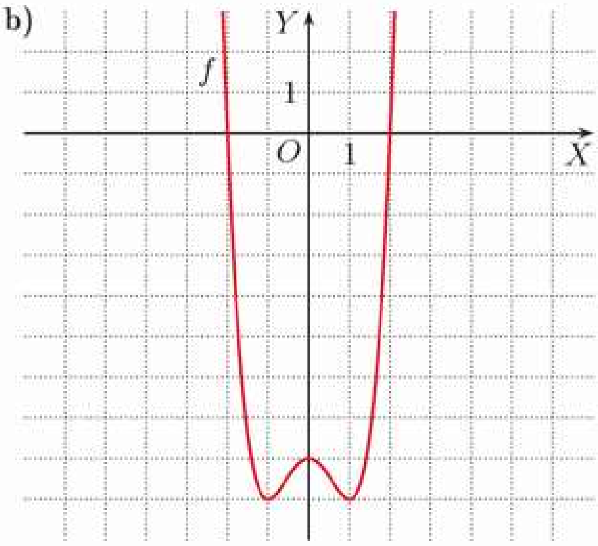
11. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$ lub $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$

4.17. Szkicowanie wykresu funkcji

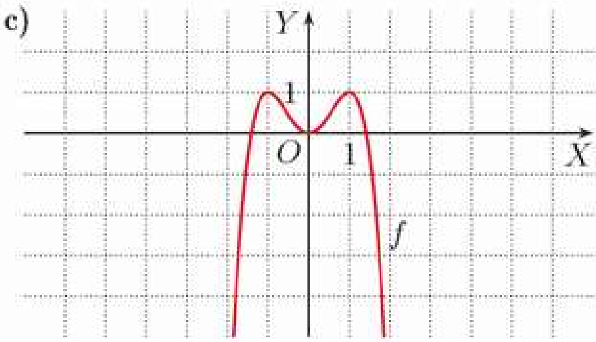
Ć **1.** **a)**



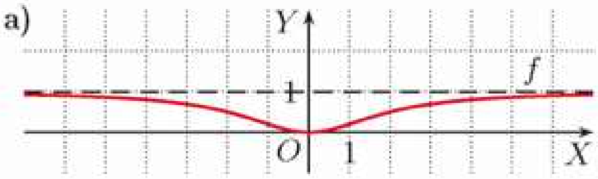
b)



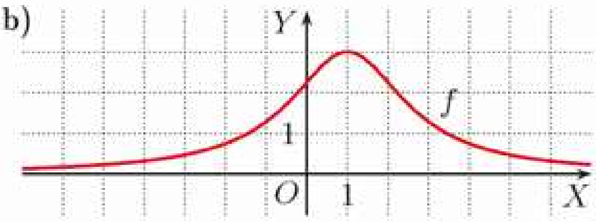
c)



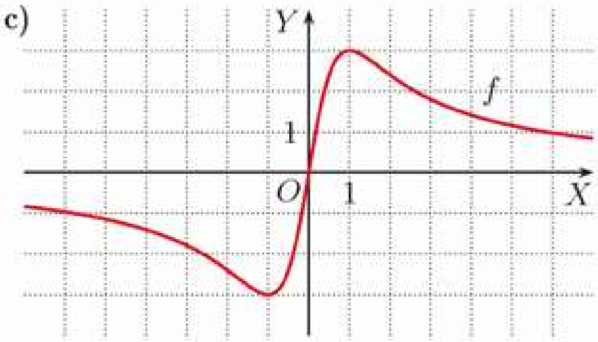
2. **a)**



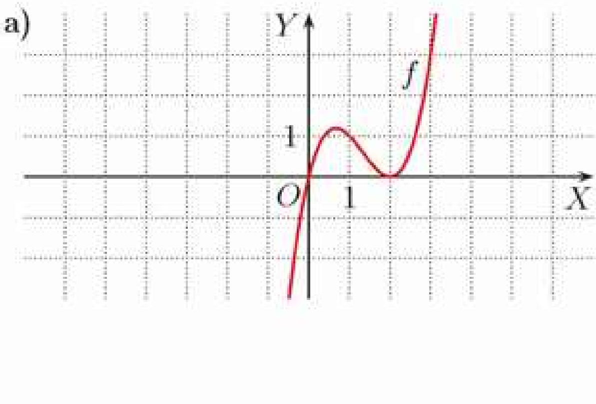
b)



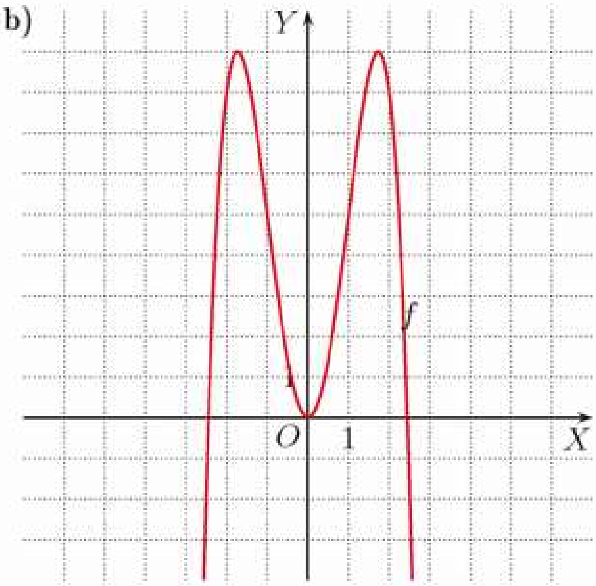
c)



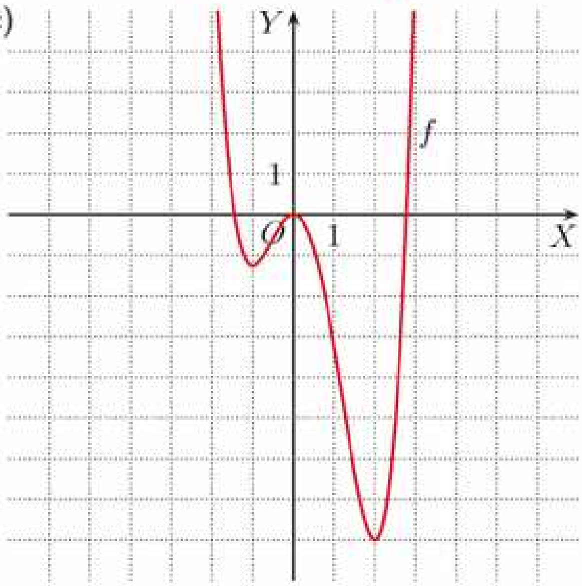
Z **1.** **a)**



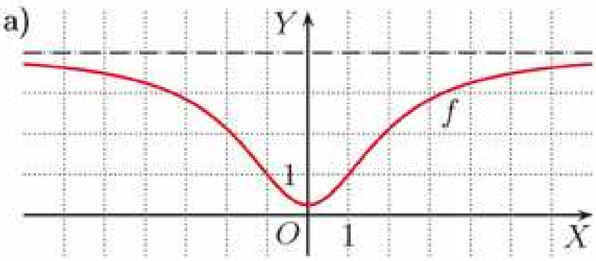
1. b)



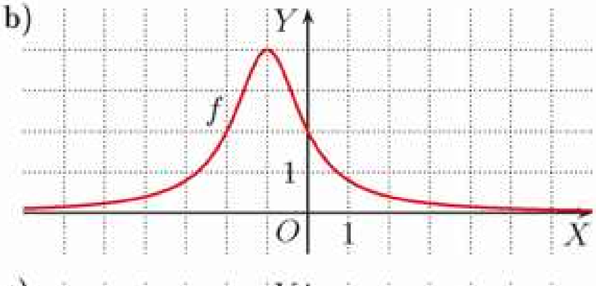
c)



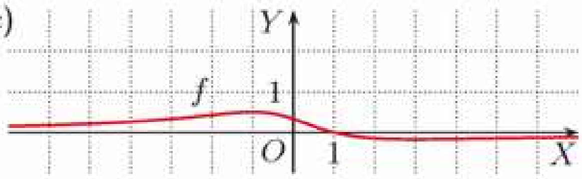
2. a)



b)



c)

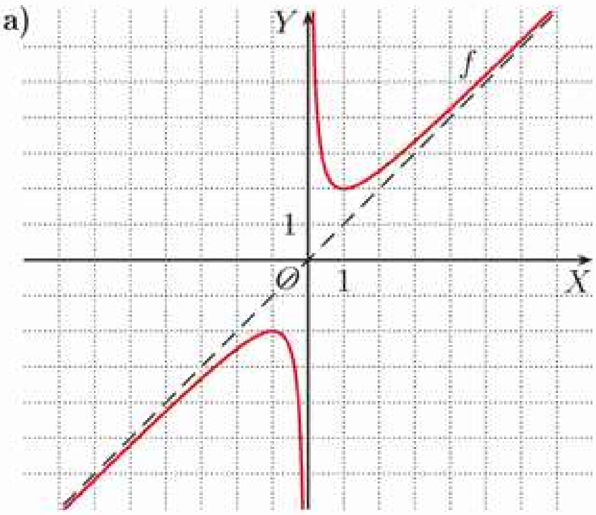


3. f – C, g – A, h – B

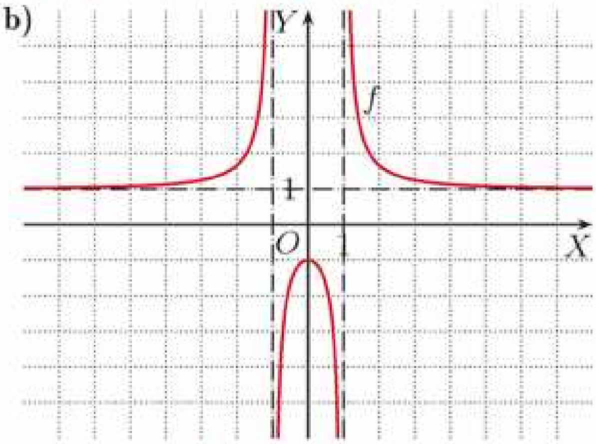
4.18. Zagadnienia uzupełniające

1. $\mathrm{st}\,(u) = \mathrm{st}\,(v) + 1$

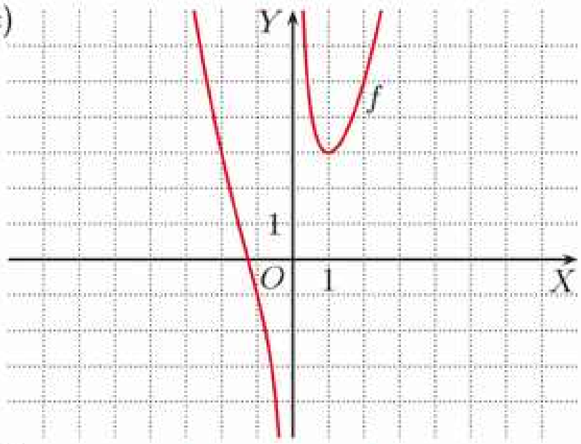
2. a)



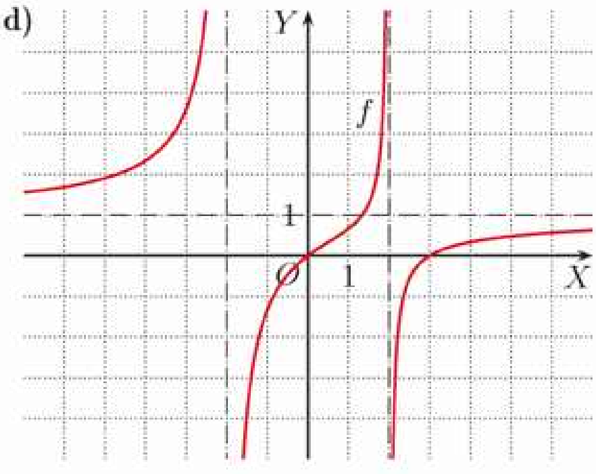
b)



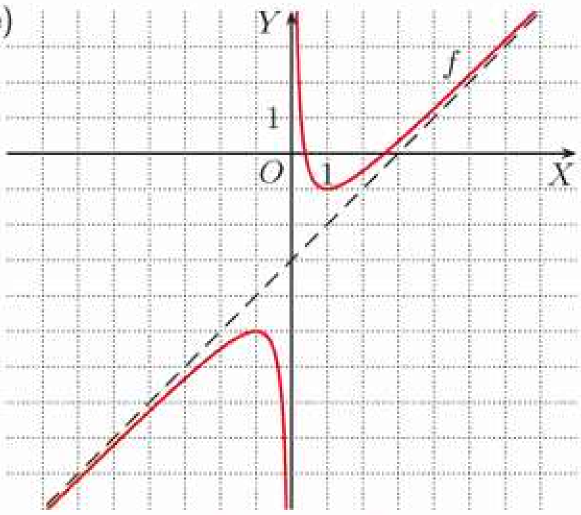
c)



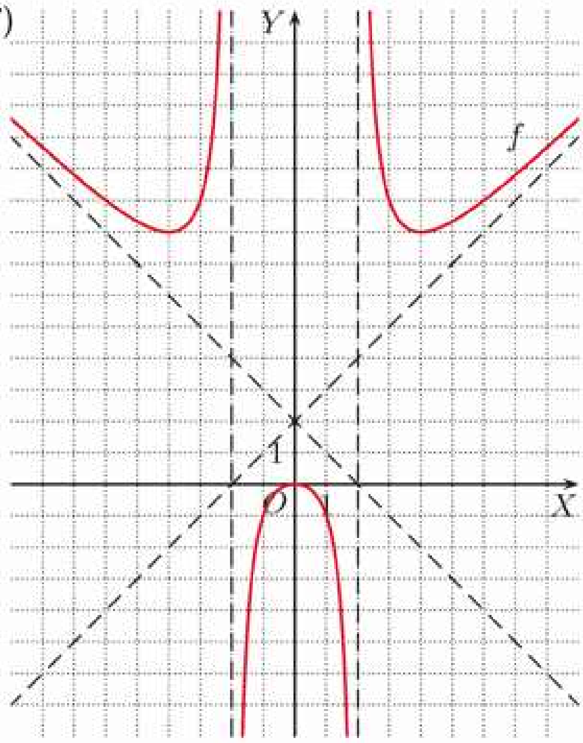
d)



2. e)



f)



Zestaw powtórzeniowy I

1. a) 0 **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** 2 **d)** $\frac{8}{7}$ **e)** 4 **f)** $\frac{2}{3}$

2. a) 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 2

3. a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ **b)** Granica nie istnieje.

4. a), b), f) $-\infty$ **c), d), e)** ∞

5. a), b) nie istnieje **c)** ∞

6. a) ∞ **b)** ∞ **c)** $-\infty$ **d)** 2 **e)** 3 **f)** -2
g) 0 **h)** $-\infty$ **i)** ∞

7. a) $x = 0$ – pionowa obustronna,
$y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x = -4$, $x = 4$ – pionowe obustronne,
$y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x = 2$, $x = 3$ – pionowe obustronne,
$y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x = -1$ – pionowa obustronna
e) $x = 0$ – pionowa prawostronna,
$x = 1$ – pionowa obustronna,
$y = 0$ – pozioma w ∞
f) $y = 0$ – pozioma w $-\infty$

9. a) ciągła **b)** nieciągła w $x_0 = 2$

10. a) tak, $a = -5$ **b)** nie

11. a) -18 **b)** 0 **c)** $-5\frac{1}{2}$ **d)** 3 **e)** 2 **f)** $\frac{15}{2}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $a = 2$ **b)** $a = 1$ **c)** $a = 0$

2. a) ∞ **b)** 0 **c)** -1 **d)** 0 **e)** ∞ **f)** $\frac{1}{2}$

3. a) $y = 1$
b) $y = 2x + \frac{2}{3}$
c) $y = -\frac{1}{4}x$
d) $y = 3x - 10$
e) $y = 3x - 5$
f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4. a) $y = 7x + 19$, $y = 7x - 17$
b) $y = 2x - \frac{13}{3}$, $y = 2x + \frac{19}{3}$
c) $y = -x + \frac{1}{3}$, $y = -x + \frac{5}{3}$

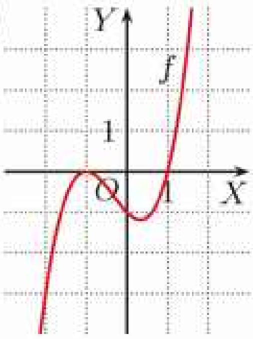
5. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$,
maleje w $\langle -2; 1\rangle$
b) rośnie w $\mathbf{R}$
c) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 0; \infty)$,
maleje w $\langle -2; -1)$ i w $(-1; 0\rangle$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$,
rośnie w $\langle -1; 0)$ i w $(0; \infty)$
f) rośnie w $(-\infty; -\frac{1}{2}\rangle$ i w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$,
maleje w $\langle -\frac{1}{2}; 0)$ i w $(0; \frac{1}{2}\rangle$

6. a) minimum $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{14}{27}$,
maksimum $f(-1) = -\frac{1}{2}$
b) minimum $f(-2) = -24$
c) minimum $f(-2) = -\frac{1}{2}$,
maksimum $f(2) = \frac{1}{2}$
d) minimum $f(0) = -1$
e) minimum $f(2) = 3$
f) maksimum $f(2) = \frac{3}{8}$
g) minimum $f(0) = \sqrt{2}$
h) minimum $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{14}}{4}$
maksimum $f(0) = 1$
i) maksimum $f(0) = \sqrt{2}$

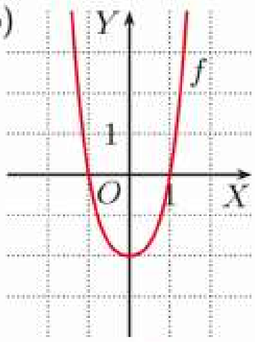
7. **a)** najmniejsza: $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$,
największa: $f(3) = 9$
b) najmniejsza: $f(0) = -4$,
największa: $f(8) = 0$
c) najmniejsza: $f(-2) = -\frac{1}{4}$,
największa: $f(2) = \frac{1}{4}$
d) najmniejsza: $f(1) = 4$,
największa: $f(3) = 6$

8. **a)** $P(x) = 24x - 12x^2$, $x \in (0; 2)$,
$x = 1$, 2×6
b) $P(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (0; 1)$,
$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $P(x) = 4x\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (0; 1)$,
$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

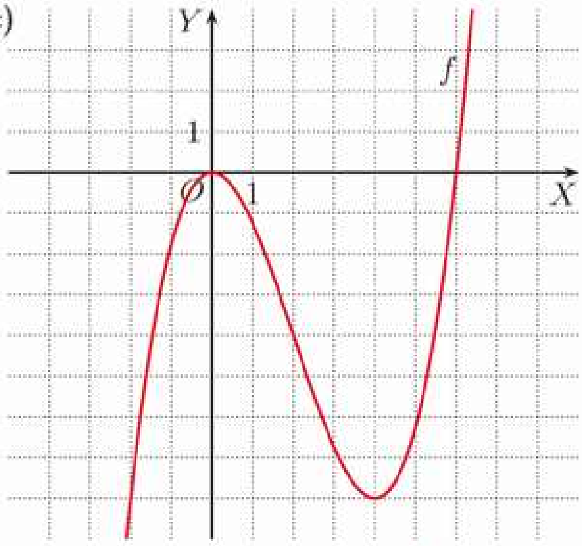
9. **a)**



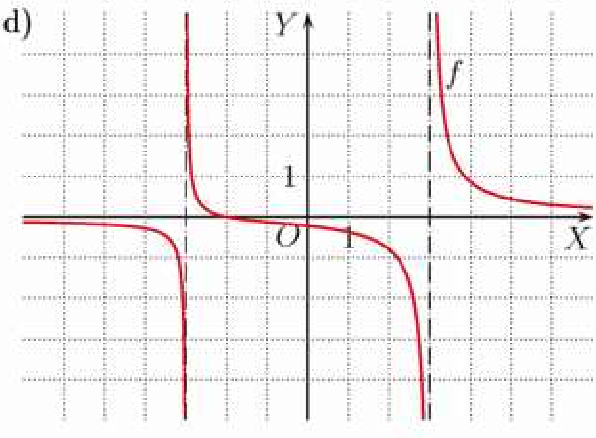
b)



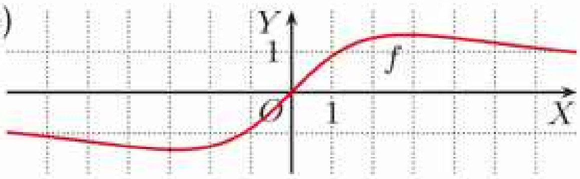
c)



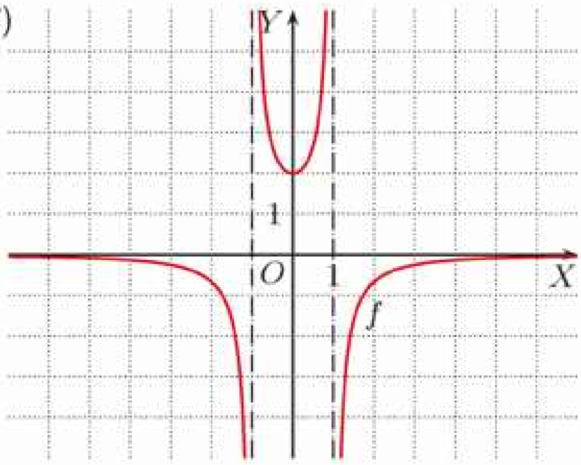
d)



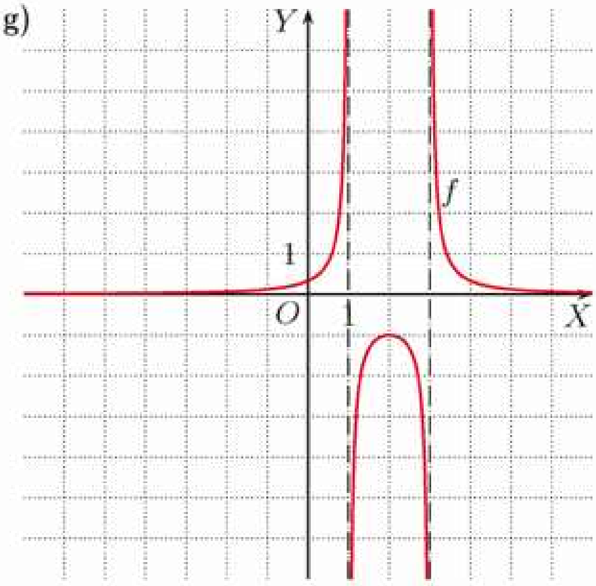
e)



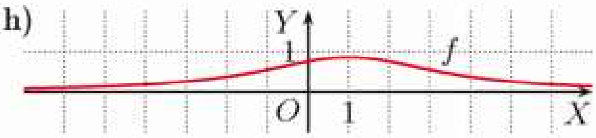
f)



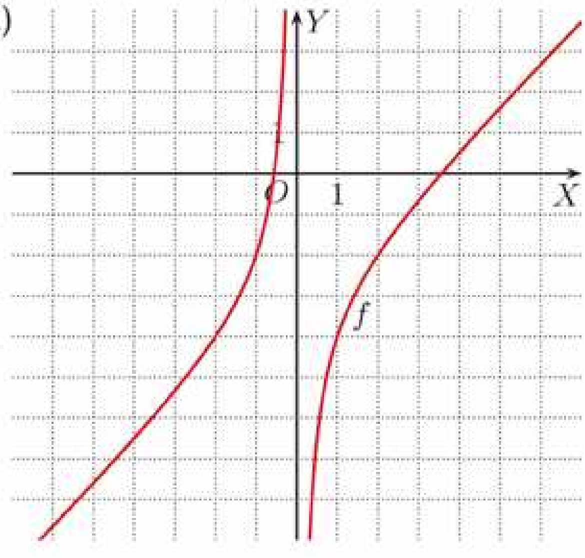
g)



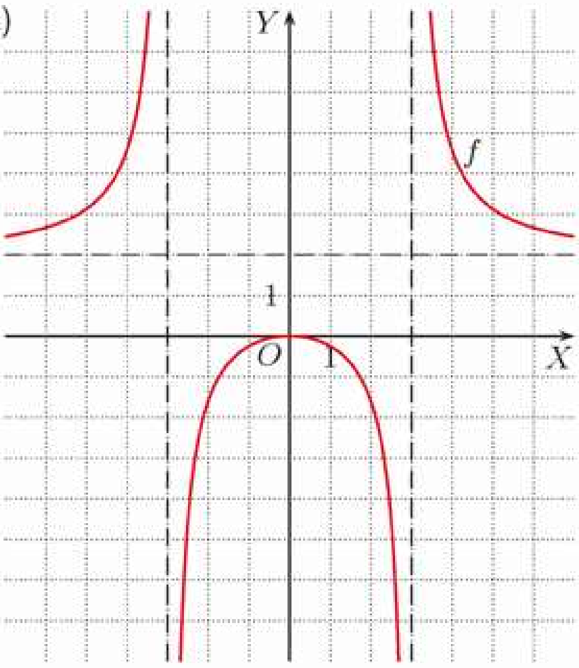
h)



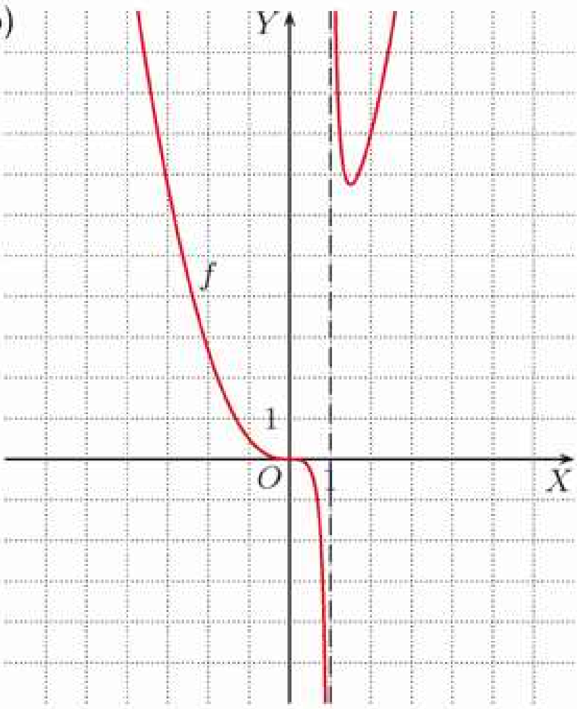
i)



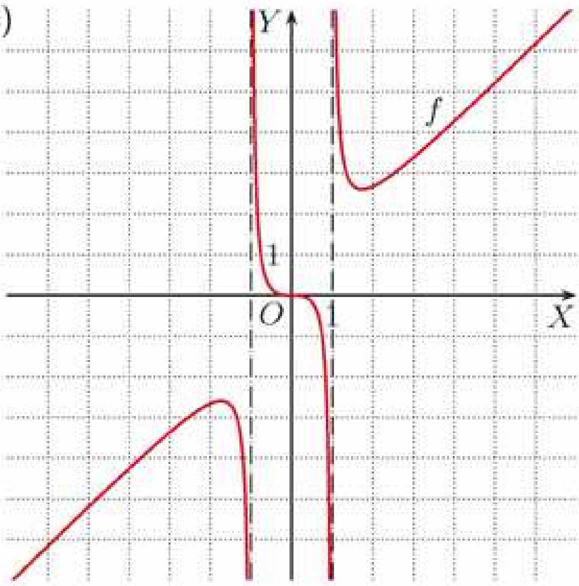
10. a)



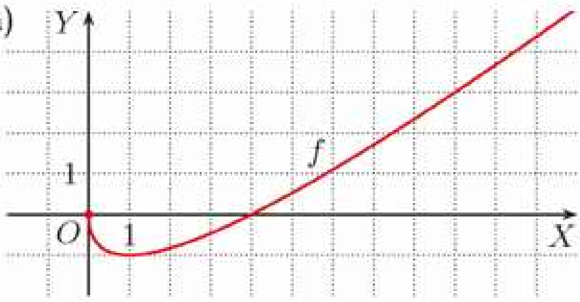
b)



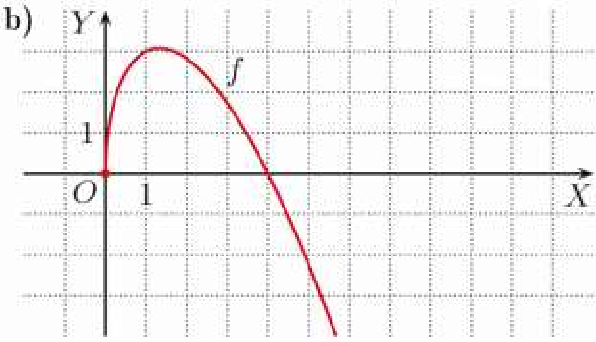
c)



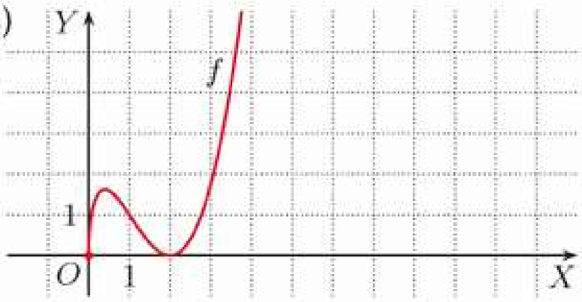
11. a)



b)



c)



Zadania testowe

1. A **2.** B **3.** C **4.** B **5.** D **6.** D **7.** B **8.** A **9.** A

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 027 $\left(\frac{1}{36}\right)$

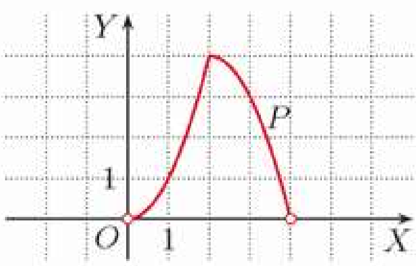
2. 353 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

3. 188 $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

4. $m \in \left\langle -\frac{5}{2}; 0 \right\rangle$

5. $P(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0;2\rangle \\ 4x - x^2 & \text{dla } x \in (2;4) \end{cases}$

funkcja ciągła, $D = (0;4)$



6. najmniejsza: $f(2) = -\frac{3}{4}$,
największa: $f(-2) = \frac{3}{4}$

7. $2\sqrt{2\sqrt{3}}$

5.1. Średnia arytmetyczna

Ć 1. Basia – 2,9, Tomek – 4,0

2. siedmiu

3. $\overline{x}_A = 6$, $\overline{x}_B = 16$, $\overline{x}_C = 26$
Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to ich średnia arytmetyczna również zwiększy się o tę wartość.

4. $\overline{x}_d = 4$, $\overline{x}_c = 4{,}2$, $\overline{x}_k \approx 4{,}09$

5. **a)** $x_1 = 9$ **b)** 135

Z 1. 47

2. **a)** dst – 5 osób, db – 5 osób
b) dst – 10 osób
c) dst – 2 osoby, db – 8 osób

3. **a)** 3700 zł **b)** 3550 zł

4. **a)** 4544 zł **b)** 2528 zł

5. **a)** 4800 zł **b)** 6160 zł, 3640 zł
c) 2400 zł

6. **a)** średnia: 20, średnia obcięta: 5,5
b) średnia: $23\frac{1}{7}$, średnia obcięta: $13\frac{4}{5}$

7. średnia: 682,5, średnia obcięta: 255

8. **a)** tak, 11 **b)** nie **c)** tak, 16

9. **a)** na 2 sposoby: $\{3, 11\}$, $\{6, 8\}$
b) na 4 sposoby: $\{4, 8, 11\}$, $\{5, 7, 11\}$, $\{5, 8, 10\}$, $\{6, 7, 10\}$

5.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Ć 1. **a)** 3 **b)** 10,5 **c)** 5,5

2. **a)** 555 kg **b)** 502,5 kg **c)** 540 kg

3. 3,5

4. Przykładowa odpowiedź:
a) 1, 1, 5, 6, 7, mediana: 5, średnia: 4
b) 1, 2, 3, 6, 8, mediana: 3, średnia: 4

5. 7,5

6. **a)** 34%
b) 40. centyl: 22%, 90. centyl: 80%

7. **a)** 50. **b)** 10%

8. mediana: 43, dominanta: 42
Najczęściej był kupowany rozmiar 42.

9. **a)** mediana: 4, dominanta: 3
b) mediana: 3, dominanta: 5

Z 1. **a)** $c = 13$ **b)** $c = 3$ lub $c = 8$

2. A: $M = 3{,}5$, nie ma dominanty, $\overline{x} = 3{,}5$
B: $M = 2$, $D = 1$, $\overline{x} = 2\frac{2}{3}$
C: $M = 5$, $D = 6$, $\overline{x} = 4\frac{1}{3}$
D: $M = 3{,}5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\overline{x} = 3{,}5$
E: $M = 3{,}5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\overline{x} = 3{,}5$
F: $M = 3{,}5$, $D_1 = 1$, $D_2 = 6$, $\overline{x} = 3{,}5$

3. **a)** $M = 4$, $D = 6$, $\overline{x} = 3\frac{8}{9}$
b) $M = 3$, $D = 1$, $\overline{x} = 3\frac{1}{9}$
c) $M = 3{,}5$, nie ma dominanty, $\overline{x} = 3{,}5$

4. **a)** $\overline{x} = 4{,}52$, $M = 5$,
liczba 2: 32. centyl, liczba 7: 88. centyl
b) $\overline{x} = 4{,}38$, $M = 4$, $D = 2$,
liczba 3: 48. centyl

5. **a)** 73% **b)** 8

5.3. Odchylenie standardowe

Ć 1. **a)** $\sigma^2 = 2$, $\sigma \approx 1{,}41$ **b)** $\sigma^2 = 3{,}6$, $\sigma \approx 1{,}9$
c) $\sigma^2 = 4{,}4$, $\sigma \approx 2{,}1$

2. $\sigma_A > \sigma_B$

3. A: $\sigma = 1$; B: $\sigma = 1$
Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to odchylenie standardowe się nie zmieni.

4. dziesięć razy

5. X: $\sigma^2 = 50\,000$ zł^2, $\sigma \approx 223{,}61$ zł
Y: $\sigma^2 = 1\,050\,000$ zł^2, $\sigma \approx 1024{,}7$ zł

6. $\overline{x} = 4$, $\sigma^2 = 6\frac{4}{7}$, $\sigma \approx 2{,}56$

Z 1. **a)** $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$
b) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma = 1$
c) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 4$, $\sigma = 2$
d) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = \frac{5}{3}$, $\sigma \approx 1{,}29$
e) $\overline{x} = 6$, $\sigma^2 = \frac{16}{3}$, $\sigma \approx 2{,}31$
f) $\overline{x} = 8$, $\sigma^2 = 4{,}25$, $\sigma \approx 2{,}06$

2. $\sigma^2 \approx 166{,}7$ kg^2, $\sigma \approx 12{,}9$ kg

3. **a)** $\sigma \approx 1{,}3$ **b)** 16 **c)** 30

4. **a)** 3 **b)** tak, jeden uczeń

5. **a)** $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 350$ min^2, $\sigma \approx 18{,}71$ min **b)** $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 33\frac{1}{3}$ min^2, $\sigma \approx 5{,}77$ min
c) $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 160$ min^2, $\sigma \approx 12{,}65$ min

Korelacja

1. około 0,85

Inne miary rozrzutu danych

1. a) 13: rozstęp 9°C, $\sigma = 3$°C
14: rozstęp 6°C, $\sigma \approx 2{,}06$°C
15: rozstęp 9°C, $\sigma \approx 3{,}08$°C
16: rozstęp 6°C, $\sigma \approx 2{,}24$°C
b) rozstęp: 15°C, $\sigma \approx 3{,}82$°C

3. a) równe
b), **c)** mniejsze

4. $\overline{x} = 3{,}5$, $\sigma \approx 1{,}87$, $d = 1{,}6875$

5.4. Średnia ważona

Ć **1. a)** 4,5 **b)** 5 **c)** 5

2. a) 8,9 **b)** 4,5

3. a) Basia – 3,6, Kasia – 4,6
b) Asia: $\overline{x}_w \approx 3{,}8$,
Basia: $\overline{x}_w \approx 4{,}2$,
Kasia: $\overline{x}_w = 4$

4. a) 320 zł **b)** 420 zł

Z **1. a)** 12,5 **b)** 5,875

2. Marek

3. taka sama

4. a) $t = 4{,}5$ **b)** $t = 7$

5. a) $w = 7$ **b)** $w = 2$

6. a) $n = 2$ **b)** $n = 7$

5.5. Zagadnienia uzupełniające

1. a) 342 **b)** 79 **c)** 11

2. 168

3. 440 przed upływem 1400 godzin,
30 przed upływem 1100 godzin

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $\overline{x} = 3{,}75$, $M = 4$, $D = 4$
b) $\overline{x} = 20$, $M = 9$, $D = 9$
c) $\overline{x} = 5$, $M = 6$, $D = 8$
d) $\overline{x} = 10$, $M = 10$, $D_1 = 4$, $D_2 = 16$

2. grupa I: 3,5, grupa II: 4

3. $\overline{x} = 36$ km, $\sigma \approx 7{,}23$ km

4. $\overline{x} = 3500$ g, $\sigma \approx 586{,}66$ g

5. IIIa: $\overline{x} = 1{,}5$ h, $M = 1$ h, $D = 1$ h,
IIIb: $\overline{x} = 1{,}475$ h, $M = 1{,}5$ h, $D = 1{,}5$ h,
dla obu klas: $\overline{x} \approx 1{,}49$ h, $M = 1{,}5$ h,
$D = 1$ h

6. a) 5 **b)** 12,55

7. A: 5,6 ≈ 6, B: 5,4 ≈ 5, C: 4,2 ≈ 4,
D: 3,8 ≈ 4, E: 3,2 ≈ 3

Zestaw powtórzeniowy II

1. B

2. a) 6 **b)** 11

3. $\overline{x} = 3{,}85$, $\sigma \approx 1{,}01$

4. $\sigma^2 = 0{,}25$ h^2, $\sigma = 0{,}5$ h

5. a) $a = 1{,}4$ lub $a = 5$
b) $x = 2$, $y = 4$

6. w grupie o 0,25, w klasie o 0,1

7. Nie można rozstrzygnąć, który lek jest skuteczniejszy.

Lek X

Kobiety	Mężczyźni	Razem
200	300	500
30	120	150
15%	40%	30%

Lek Y

Kobiety	Mężczyźni	Razem
400	100	500
80	45	125
20%	45%	25%

Zadania testowe

1. D **2.** A **3.** C **4.** D **5.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = 5$, $M = 5$, $D = 5$

2. $45 \leqslant x \leqslant 53$

3. $\overline{x}_A = 4{,}5$, $\overline{x}_B = 3{,}6$, $\overline{x}_C = 2$

4. $\sigma_{\mathrm{III}} \approx 645{,}5$ zł

5. $\overline{x} = 210$ kg, $\sigma \approx 62{,}11$ kg

Indeks

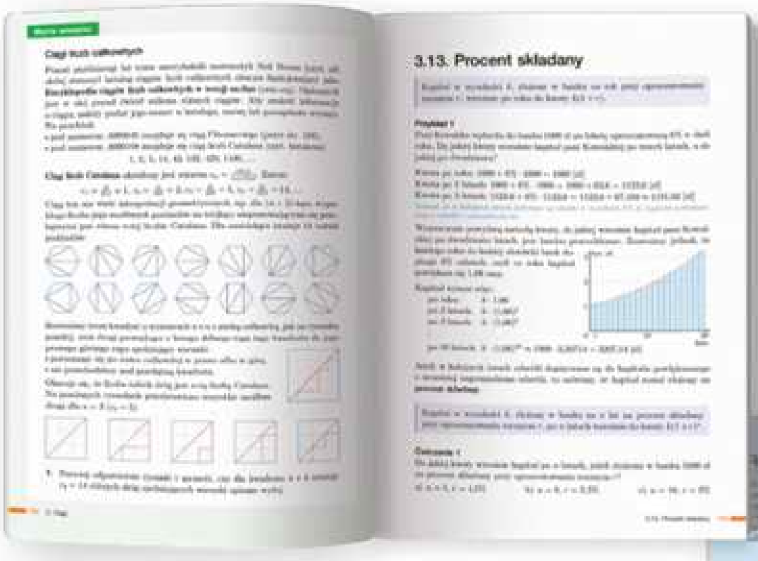
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	–	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175

nowa era Twoje mocne strony

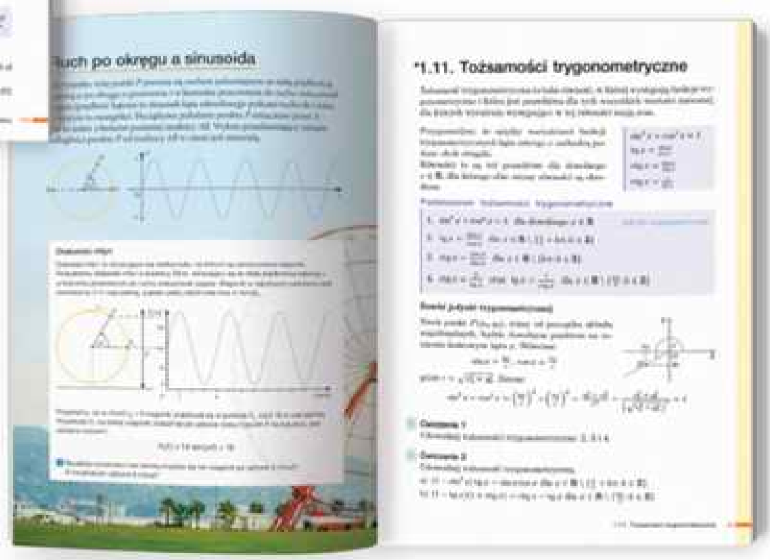
MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 3* do zakresu podstawowego i rozszerzonego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Dzięki niemu lekcje w szkole są ciekawe, a jednocześnie pozwala on na efektywną samodzielną naukę w domu.



Czytelny układ

Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu. Ułatwia to pracę na lekcjach i w domu.



Pomocne sekcje

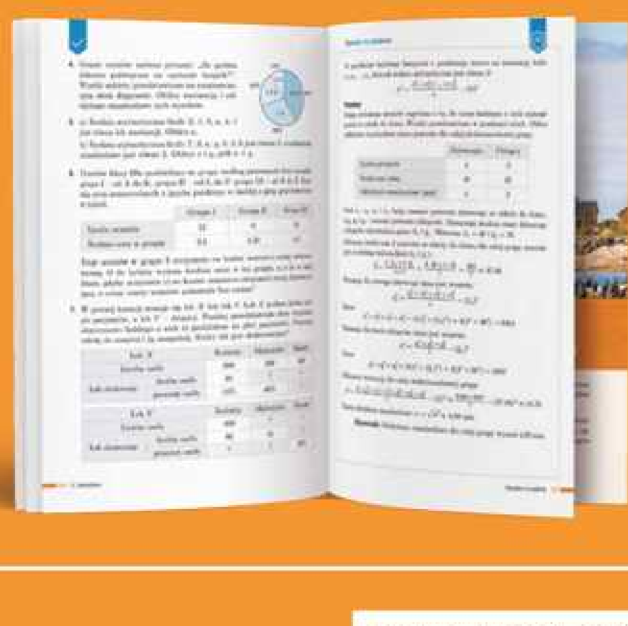
Sekcje *Warto powtórzyć* pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. Sekcje *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnych poszukiwań.

WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika *MATeMAtyka 3* kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania*, pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.



Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-4202-6