DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 2

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.

- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.

- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!

- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Fotografia na okładce: Shutterstock/Omelchenko.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – Historic Images s. 92 (Abel), Nerthuz s. 318, Science History Images s. 92 (Cardano); Getty Images: E+/4x6 s. 313 (gitarzysta), iStock/Getty Images Plus – Antonio_Diaz s. 313 (kobieta), Davel5957 s. 41 (Gateway Arch), Meinzahn s. 119, MediaNews Group/Bay Area News via Getty Images s. 9, Moment/shunli zhao s. 41 (wiszące łańcuchy), ullstein bild s. 28; Shutterstock: Baloncici s. 179, Daniel Prudek s. 136, Direk Yiamsaensuk s. 198, ID1974 s. 256, Jag_cz s. 63, Lynsey Allan s. 143, Nicku s. 70, remik44992 s. 167; Lech Chańko s. 51, 283; M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2020 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 223.

Spis treści

5. Planimetria

6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Odpowiedzi do pytań i poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

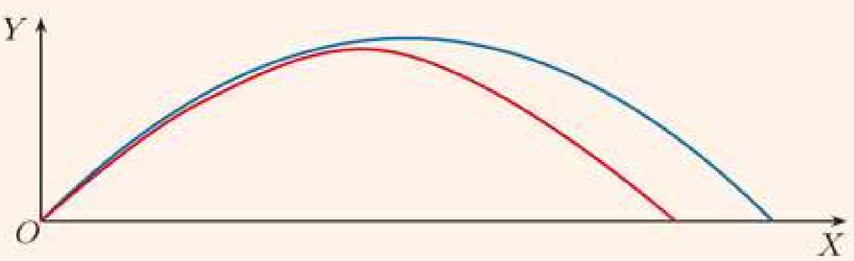
7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Zastosowania funkcji kwadratowej

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub wystrzelonego pod takim kątem pocisku jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak ze względu na opór powietrza tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym).



1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Równanie kwadratowe może mieć dwa pierwiastki, jeden pierwiastek lub może nie mieć pierwiastków.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek podwójny:
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+3}{4} = 3$$

b) Rozwiąż równanie $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}$$

c) Rozwiąż równanie $\frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 4 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny:
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{3}$$

d) Rozwiąż równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 3x - 18 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
e) $x^2 + 3x - 2 = 0$
f) $2x^2 + 4x - 1 = 0$
g) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
h) $3x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
i) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

Aby rozwiązać równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, jego lewą stronę rozkładamy na czynniki.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $-3x^2 + 48x = 0$.

$$-3x(x - 16) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 16 = 0$$

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero.

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 16.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 6x = 0$
b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{12}x = 0$
c) $3x + 4x^2 = 0$
d) $-\frac{2}{3}x - 6x^2 = 0$
e) $5x = 10x^2$
f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}x^2$

Niektóre równania kwadratowe możemy rozwiązać, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $16x^2 - 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$(4x - 1)(4x + 1) = 0$$
$$4x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 4x + 1 = 0$$
$$4x = 1 \quad \text{lub} \quad 4x = -1$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki: $-\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

b) Rozwiąż równanie $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$(2x + 1)^2 = 0$$
$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $4x^2 - 25 = 0$
b) $1 - \frac{9}{4}x^2 = 0$
c) $x^2 + 14x + 49 = 0$
d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
e) $25 + x^2 = 10x$
f) $4x^2 + 15 = 20x - 10$

Przypomnijmy, że postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.
Wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ nazywamy **czynnikami liniowymi**.

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej (nie można go rozłożyć na czynniki liniowe).

Przykład 4

Przedstaw trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - x - 3$ w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$, więc trójmian ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$$

Postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego i przedstaw go (jeśli to możliwe) w postaci iloczynowej.

a) $y = 6x^2 + x - 1$
b) $y = 2x^2 - 5x + 2$
c) $y = -x^2 + \frac{10}{3}x - 1$
d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$
e) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$
f) $y = -3x^2 + 2x + 2$
g) $y = -9x^2 + 1$
h) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x$
i) $y = 4x^2 - 4x + 2$

Zadania

1. Oblicz wyróżnik równania kwadratowego i określ liczbę jego pierwiastków.

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ g) $8x^2 + 3x = 0$

b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $6x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ h) $5x^2 - 9 = 0$

c) $-3x^2 + 2x + 9 = 0$ f) $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ g) $25x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ f) $-6x^2 + x + 1 = 0$ i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 1 = 5 - 2x^2$ d) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 2$ g) $(1 - x)^2 = \frac{1}{4}$

b) $3(x^2 + 1) = 5$ e) $(x + 1)^2 = (1 - 2x)^2$ h) $(3x + 1)^2 = 9$

c) $(x - 1)^2 = -2x$ f) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)^2$ i) $(2x - 1)^2 = 4$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2-1}{3}$ c) $\frac{(x+2)^2}{2} - 2 = \frac{(x+3)^2}{3}$ e) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{7} - 1$

b) $\frac{x-2}{2} - \frac{x(x-2)}{6} = 0$ d) $\frac{(x+3)^2}{3} = x^2 + \frac{(x+4)^2}{3}$ f) $\frac{(1-3x)^2}{12} - \frac{x^2}{3} = \frac{3-x}{4}$

5. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f. Oblicz $|x_1 - x_2|$.

a) $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ c) $f(x) = \left(x + 2 - \sqrt{5}\right)\left(x + 2 + \sqrt{5}\right)$

b) $f(x) = 4x(x - \sqrt{2})$ d) $f(x) = \left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

6. Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą p.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 13,\ p = 8$ c) $f(x) = -4x^2 + 24x,\ p = 9$

b) $f(x) = 3x^2 + 11x - 6,\ p = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x,\ p = -3$

7. Wyznacz argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują równe wartości.

a) $f(x) = x^2 + 12,\ g(x) = -x^2 + 11x$ c) $f(x) = (2x - 1)^2,\ g(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x,\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ d) $f(x) = (3x+2)^2,\ g(x) = (x-4)^2$

8. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 + 2x - 24$ d) $y = -x^2 + 14x - 49$ g) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

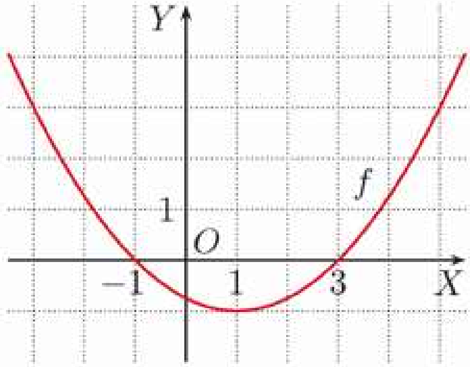
b) $y = 2x^2 - 11x + 15$ e) $y = -4x^2 - 12x - 9$ h) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ f) $y = -3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ i) $y = 3x^2 - 5x + 4$

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3.



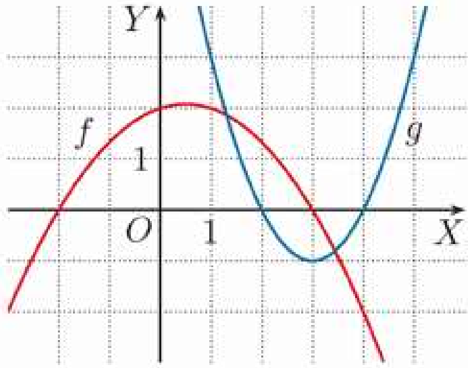
Z wykresu możemy odczytać rozwiązania odpowiednich nierówności, np.:

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$,

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \leqslant 0$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle$.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$. Korzystając z tych wykresów, podaj rozwiązanie nierówności.



a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geqslant 0$

b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leqslant 0$

c) $x^2 - 6x + 8 > 0$

d) $x^2 - 6x + 8 < 0$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 4x - 15 < 0$.

Zaczynamy od rozwiązania równania $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

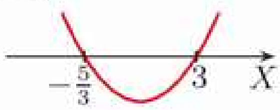
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-14}{6} = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+14}{6} = 3$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez punkty $-\frac{5}{3}$ i 3 na osi OX.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:



$$3x^2 - 4x - 15 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{5}{3}; 3\right)$$

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 7x - 4 < 0$.

Rozwiązujemy równanie $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49 - 32 = 17, \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

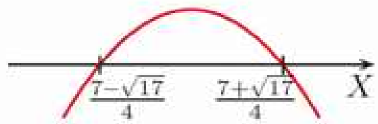
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-\sqrt{17}}{-4} = \frac{7+\sqrt{17}}{4}, \ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+\sqrt{17}}{-4} = \frac{7-\sqrt{17}}{4}$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez punkty $\frac{7-\sqrt{17}}{4}$ i $\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ na osi OX.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$-2x^2 + 7x - 4 < 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$



Zauważ, że zamiast nierówności $-2x^2 + 7x - 4 < 0$ możemy rozwiązać równoważną nierówność $2x^2 - 7x + 4 > 0$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 5x < 0$

b) $-4x^2 + x \leqslant 0$

c) $2x^2 + 7x - 4 > 0$

d) $-3x^2 + 11x - 6 \geqslant 0$

e) $5x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 < 0$

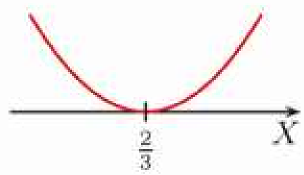
Przykład 4

Rozwiąż nierówność $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

Rozwiązujemy równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.



Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry.
Jedyny punkt wspólny paraboli z osią OX to $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$9x^2 - 12x + 4 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $9x^2 - 12x + 4 \geqslant 0$

b) $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

Ćwiczenie 4

Czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna?

a) $4x^2 + 1 \geqslant 0$

b) $-x^2 - 2 < 0$

c) $9x^2 + 4 \leqslant 0$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$ g) $x^2 + 5x - 5 < 0$

b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ e) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$ h) $-x^2 + 2x + 7 \leqslant 0$

c) $-4x^2 + 5x - 1 < 0$ f) $5x^2 - 3x - 1 > 0$ i) $2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} < 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 > 0$ e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \geqslant 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leqslant 0$ f) $-\sqrt{2}x^2 + 3x - 3\sqrt{2} \geqslant 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 2x \geqslant x + 1$ c) $3x^2 - 2x + 1 < x$ e) $3x - x^2 \leqslant 3 - 3x^2$

b) $5x^2 + 4 \leqslant 10x - 20x^2$ d) $-2x^2 + 5x > 1$ f) $-x(2 - x) > 1 - x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x + 1)^2 + (x - 3)^2 < 10$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

b) $3x - (1 - x)^2 \geqslant (x - 2)(x + 2)$ e) $2 - x^2 \leqslant (2 - x)^2$

c) $(x - 3)^2 - 7 \leqslant (2x - 1)^2$ f) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \geqslant 3x$

5. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x + 1 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 3x - x^2 \geqslant 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 5x + 4 < 0\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 + x + 12 \geqslant 0\}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)} + \sqrt{x}$.
>
> Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jej wzór ma sens. Wyrażenia pod pierwiastkami muszą być nieujemne, czyli muszą jednocześnie zachodzić nierówności:
>
> $$x(x-4) \geqslant 0 \quad \text{i} \quad x \geqslant 0$$
>
> Pierwsza nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$.
> Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0\} \cup \langle 4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{16 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{1 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 6} - \sqrt{4x - x^2}$

1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2$ (gdzie $t \geqslant 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \geqslant 0, \ t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geqslant 0$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$x^2 = 1 \ \text{ lub } \ x^2 = 9$$

$$x = -1 \ \text{ lub } \ x = 1 \ \text{ lub } \ x = -3 \ \text{ lub } \ x = 3$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 < 0, \ t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.
Wracamy do niewiadomej x: $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$
d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$
e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
f) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x^4 - 9x^2 = 0$
b) $x^4 + 9x^2 = 0$
c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$
d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

W poniższych przykładach przedstawiono inne równania, które przy odpowiednim podstawieniu można sprowadzić do równań kwadratowych.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

Zakładamy, że $x \geqslant 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \text{ zatem } t_1 = \tfrac{3-1}{2} = 1 \geqslant 0,\ t_2 = \tfrac{3+1}{2} = 2 \geqslant 0$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$\sqrt{x} = 1 \text{ lub } \sqrt{x} = 2$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiązanie zgodne z założeniem, że $x \geqslant 0$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $3x + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$.

Zakładamy, że $x - 2 \geqslant 0$, czyli $x \geqslant 2$. Równanie zapisujemy w postaci:

$$3(x-2) + 6 + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$$

$$3(x-2) + 8\sqrt{x-2} - 3 = 0$$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-2}$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 + 36 = 100,\ \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \tfrac{-8-10}{6} = -3 < 0,\ t_2 = \tfrac{-8+10}{6} = \tfrac{1}{3} \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy, gdyż t z założenia nie może być ujemne.
Wracamy do niewiadomej x:

$$\sqrt{x-2} = \frac{1}{3}$$

$$x - 2 = \frac{1}{9}$$

$$x = 2\frac{1}{9}$$

Rozwiązanie zgodne z założeniem, że $x \geqslant 2$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x - 2\sqrt{x-3} = 3$ b) $x - 3\sqrt{x-1} = 1$ c) $\sqrt{x+1} + 26 = 2x$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$
c) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$
d) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
e) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$
f) $x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 = 0$
g) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
h) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$
i) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbf{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:
>
> $$t^2 - 3t + 2 = 0$$
> $$\Delta = 9 - 8 = 1,\ \ t_1 = \tfrac{3-1}{2} = 1,\ \ t_2 = \tfrac{3+1}{2} = 2$$
>
> Wracamy do niewiadomej x:
>
> $$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
b) $x^6 - x^3 - 2 = 0$
c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
d) $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$
e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
f) $x^8 - 4x^4 - 24 = 0$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Równanie $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = |x|$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:
>
> $$t^2 - 2t - 8 = 0$$
>
> $x^2 = |x|^2 = t^2$
>
> $$\Delta = 4 + 32 = 36,\ \ \sqrt{\Delta} = 6$$
> $$t_1 = \tfrac{2-6}{2} = -2 < 0,\ \ t_2 = \tfrac{2+6}{2} = 4 \geqslant 0$$
>
> Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.
> Wracamy do niewiadomej x:
>
> $$|x| = 4, \text{ czyli } x = -4 \ \text{ lub } \ x = 4$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$
b) $x^2 - 7|x| + 10 = 0$
c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$
b) $2x - 5\sqrt{x-2} = 2$
c) $6x + \sqrt{x+1} = -5$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} = 0$
b) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} = 3$
c) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 = 0$

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

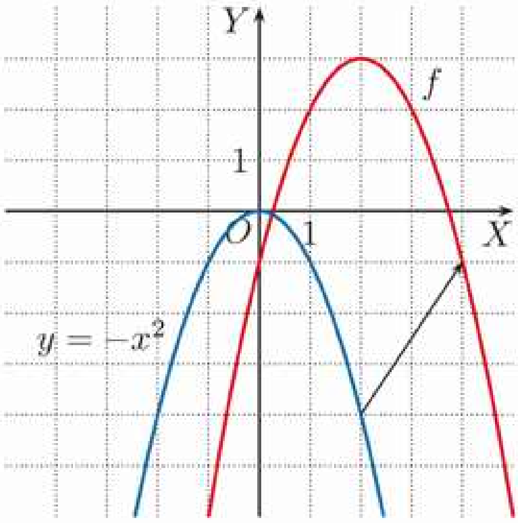
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$y_w = f(x_w) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 3$$

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $y = a(x - x_w)^2 + y_w$, gdzie $a \neq 0$, i otrzymujemy wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

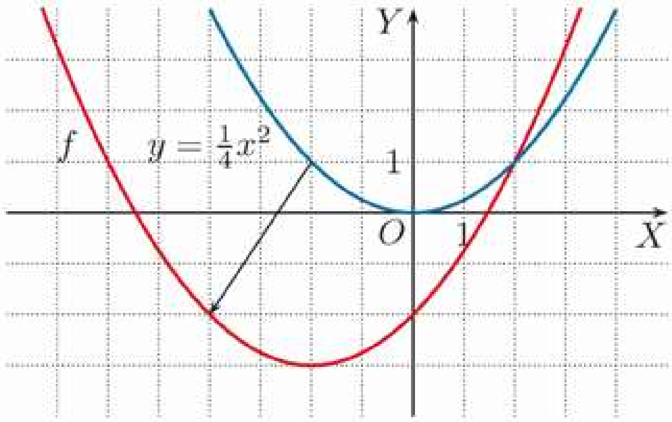
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y_w = f(x_w) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 2 = -3$$

Funkcja f ma postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[-2, -3]$.



1. Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji f, a następnie naszkicuj jej wykres.

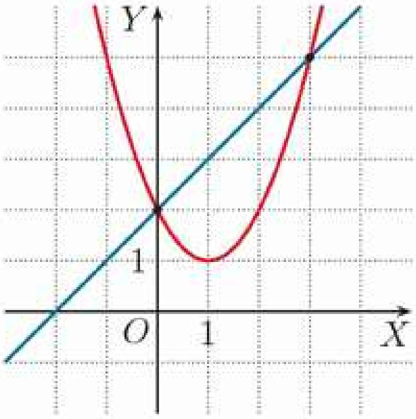
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$

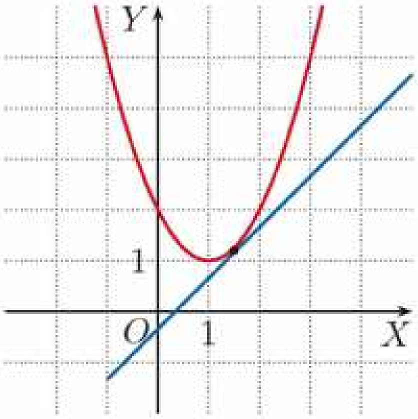
2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g?

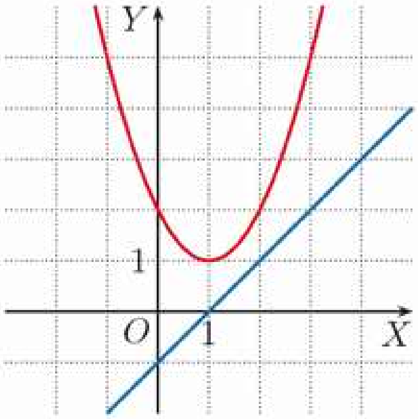
a) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$
b) $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 4x^2 + 24x$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

1.4. Układy równań (1)

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.







Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli:

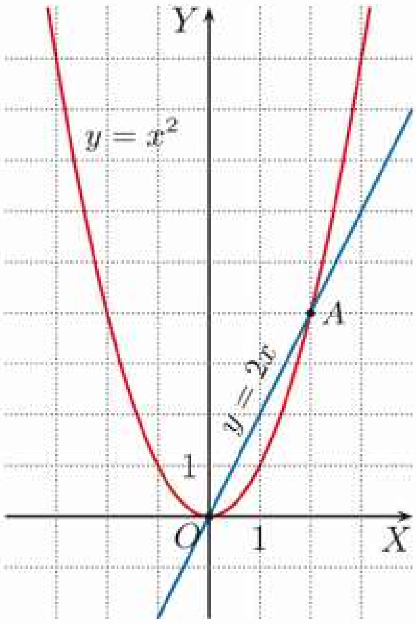
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0,0)$ i $A(2,4)$.

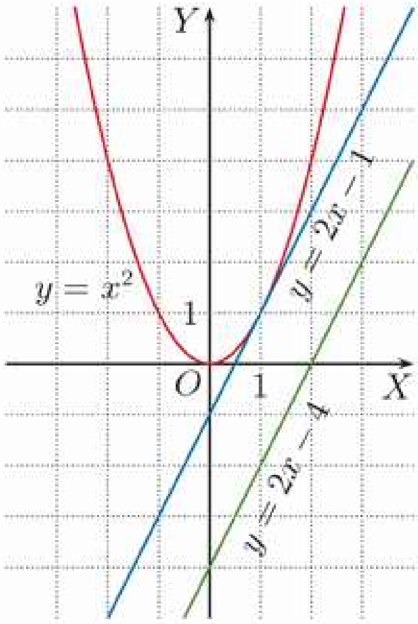
Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

D **Przykład 2**

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.



Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 1 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Prosta $y = 2x - 1$ i parabola $y = x^2$ mają jeden punkt wspólny.

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 4 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = 2x - 4$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 2x - 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Zadania

1. Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?

a) $f(x) = -x + 2,\ \ g(x) = x^2 - 2x$

b) $f(x) = x - 6,\ \ g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = 2x - 4,\ \ g(x) = -2x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x - 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

3. Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

a) $f(x) = x + 1,\ \ g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x + 1,\ \ g(x) = -2x^2 + 3$

c) $f(x) = -2x + 3,\ \ g(x) = x^2$

d) $f(x) = -x - 2,\ \ g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$

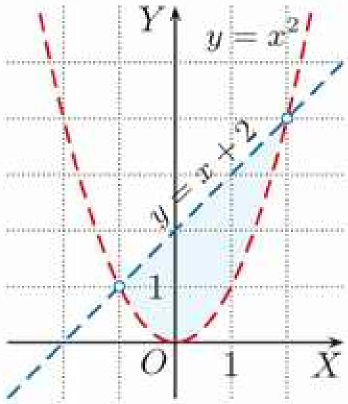
c) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = |x - 2| \end{cases}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej prostej $y = x + 2$.



Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

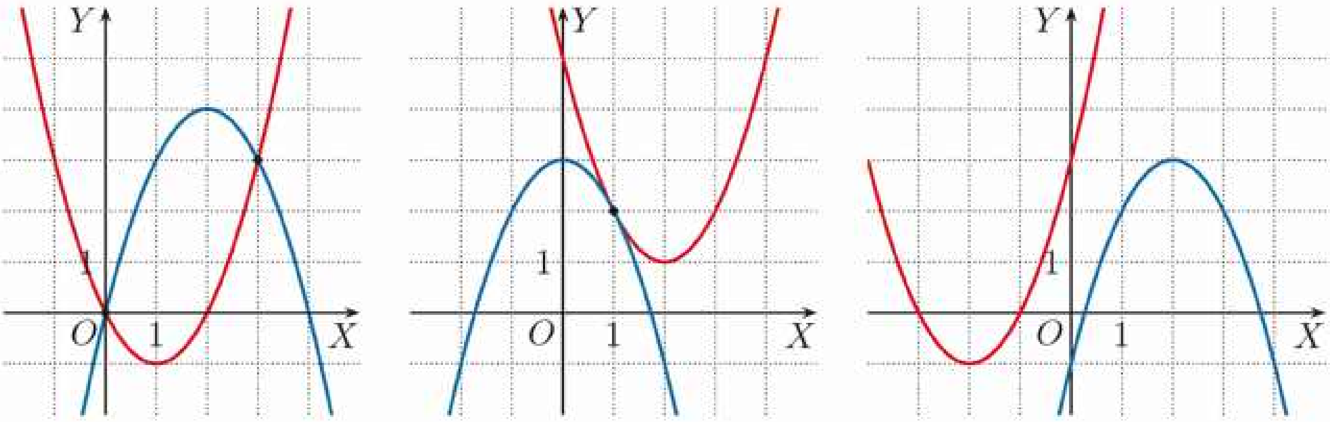
a) $\begin{cases} y > x^2 - 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > x - 1 \\ y \leqslant -x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y \geqslant 0{,}5x^2 - 2 \end{cases}$

*1.5. Układy równań (2)

Dwie różne parabole mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub mogą nie mieć punktów wspólnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj parabole będące wykresami funkcji f i g. Ile punktów wspólnych mają te wykresy?

a) $f(x) = x^2, \ \ g(x) = -x^2$ b) $f(x) = x^2, \ \ g(x) = x^2 + 1$

Przykład 1

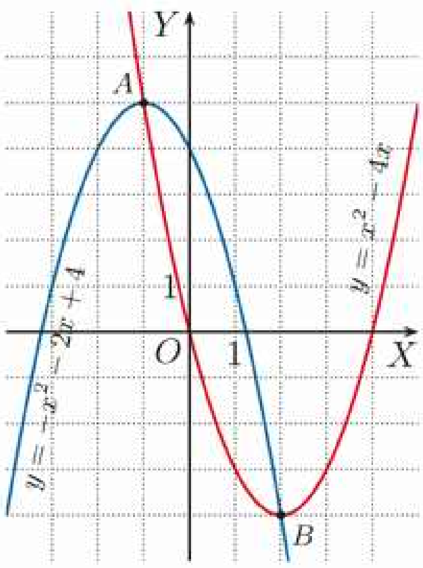
Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 4$, czyli $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $(x+1)(x-2) = 0$, zatem: $x = -1$ lub $x = 2$.

Dla $x = -1$ mamy $y = 5$. Dla $x = 2$ mamy $y = -4$. Układ równań spełniają więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Parabole $y = -x^2 - 2x + 4$ i $y = x^2 - 4x$ przecinają się w punktach $A(-1, 5)$ oraz $B(2, -4)$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

a) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = 2x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ \ g(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - 1,\ \ g(x) = -2x^2 + 2$

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 + 4x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -3x^2 - 12x - 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 \end{cases}$

3. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g?

a) $f(x) = 4x^2 - 6x - 5,\ \ g(x) = 2x^2 - 6x + 3$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2,\ \ g(x) = 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4,\ \ g(x) = 3x^2 + 4x - 3$

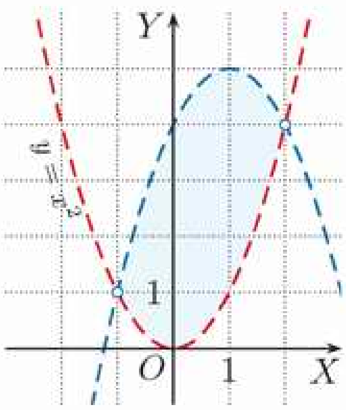
d) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1,\ \ g(x) = 3x^2 - 2x + 2$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < -(x-1)^2 + 5 \end{cases}$$

Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej paraboli $y = -(x-1)^2 + 5$.



Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego obszaru?

a) $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 1 \\ y \leqslant -x^2 + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4 \\ y < \frac{1}{2}x^2 - 2 \end{cases}$

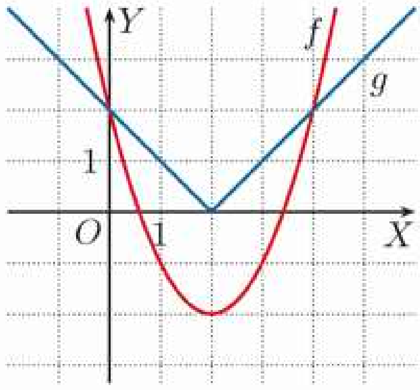
c) $\begin{cases} y > x^2 + 2x - 2 \\ y \leqslant -x^2 - 4x - 2 \end{cases}$

Warto wiedzieć

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Równanie $x^2 - 4x + 2 = |x - 2|$ możemy rozwiązać graficznie, rysując wykresy funkcji:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \text{ i } g(x) = |x - 2|$$



Z rysunku odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 4$$

Równanie to możemy też rozwiązać algebraicznie. Rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli $x - 2 \geqslant 0$, czyli $x \in \langle 2; \infty)$, to otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$\Delta = 9$, zatem $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$ – sprzeczność, gdyż $x_1 \notin \langle 2; \infty)$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$$

2° Jeśli $x - 2 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 2)$, to otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 2 = -x + 2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

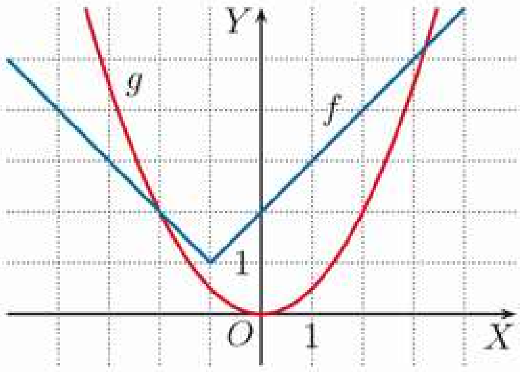
Zatem $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, ale $x_4 \notin (-\infty; 2)$, więc to rozwiązanie odrzucamy.

Po rozpatrzeniu obu przypadków stwierdzamy, że równanie $x^2-4x+2 = |x-2|$ jest spełnione dla $x = 0$ oraz dla $x = 4$.

1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = |x + 1| + 1$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Dla jakich argumentów funkcje:

a) f i g przyjmują te same wartości,

b) f i $h(x) = \frac{1}{4}x^2$ przyjmują te same wartości?



2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2 = |x|$

b) $x^2 - 3|x - 1| = 1$

c) $3 - \frac{1}{8}x^2 = |x - 3|$

d) $x^2 - 4x + 2 = |x + 2|$

e) $-x^2+4x-1 = |2x-4|$

f) $-\frac{1}{2}x^2+4x-4 = |x-4|$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - |x + 2| \geqslant 0$

b) $x^2 - 2|x - 4| < 0$

c) $2x^2-5|x-1| \geqslant 4x-1$

*1.6. Wzory Viète'a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Twierdzenie (wzory Viète'a)

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geqslant 0$.

D Ćwiczenie 1

Przeczytaj dowód wzoru na iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

a) Udowodnij wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego.

b) Udowodnij, że jeśli $\Delta = 0$, czyli trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny x_0, to wzory Viète'a mają postać: $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.

$\Delta = 400 - 120 = 280 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki: x_1, x_2.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $x^2 - 9x - 7 = 0$
b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$
c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$
d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$
e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$
f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Przykład 2

Określ znaki pierwiastków równania $7x^2 - 9x + 1 = 0$.

$\Delta = 81 - 28 = 53 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2.

Ze wzoru Viète'a obliczamy iloczyn pierwiastków:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{7}$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, liczby x_1, x_2 mają ten sam znak (obie są ujemne lub obie są dodatnie). Ze wzoru Viète'a obliczamy sumę pierwiastków:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{7}$$

Oba pierwiastki mają ten sam znak oraz $x_1 + x_2 > 0$, zatem x_1, x_2 są liczbami dodatnimi.

Zwróć uwagę, że aby określić znaki pierwiastków równania kwadratowego, nie musimy ich wyznaczać. Możemy skorzystać z podanych obok warunków.

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Ćwiczenie 3

Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 25 = 0$
b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$
c) $12x^2 - 20x + 5 = 0$
d) $3x^2 + 5x + 4 = 0$
e) $-2x^2 - 15x - 3 = 0$
f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = 0$

Czy wiesz, że...

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III i Henryka IV. Dla tego drugiego w roku 1590 złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.

D

Przykład 3

Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to suma ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków.

Przykład 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $6x^2 - 9x + 2 = 0$.

Ponieważ $\Delta = 81 - 48 = 33 > 0$, równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 1 = 0$ b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$ c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Zadania

1. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 + x - 1 = 0$ c) $13x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $15x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $13x^2 + 13x + 4 = 0$ f) $-x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

D **2.** Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki, to suma ich odwrotności jest równa $-\frac{b}{c}$.

3. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 3 = 0$ c) $4x^2 + 20x - 6 = 0$

4. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 + 9x + 6 = 0$ b) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

5. Oblicz kwadrat różnicy pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 2 = 0$

D **6.** Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to suma odwrotności ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Wskazówka. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

7. Oblicz sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania.

a) $-x^2 + 10x + 10 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$ c) $-x^2 + 3x + 7 = 0$

8. Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma i iloczyn jego pierwiastków były odpowienio równe: a) 7 i 3, b) 3 i 7?

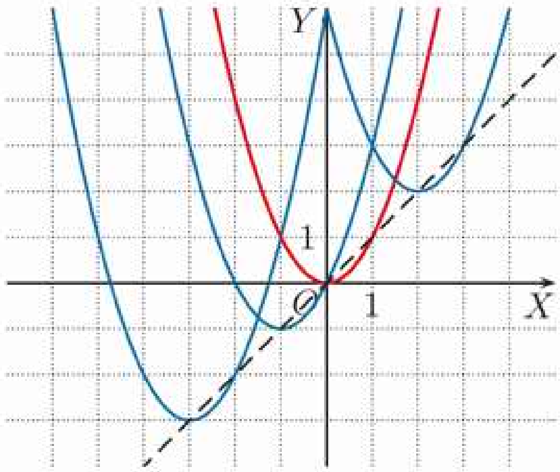
9. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby dwa razy większe od pierwiastków równania:

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$, b) $-x^2 + 6x - 2 = 0$, c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

*1.7. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Przykład 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x-m)^2+m$ ma dwa miejsca zerowe?



Wykresem funkcji $y = (x-m)^2+m$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne (m, m), czyli leży na prostej $y = x$. Z rysunku odczytujemy, że funkcja:

$$y = (x-m)^2+m$$

ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 0)$.

Ćwiczenie 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x-m)^2+m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi?

Przykład 2

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ w zależności od parametru m. Wyznacz te pierwiastki.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

• Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta = m^2 - 16 > 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$.

$$x_1 = \frac{m-\sqrt{m^2-16}}{4} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m+\sqrt{m^2-16}}{4}$$

• Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta = m^2 - 16 = 0$, czyli dla $m = -4$ $(x_0 = -1)$ i dla $m = 4$ $(x_0 = 1)$.

• Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta = m^2 - 16 < 0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki? Wyznacz te pierwiastki.

a) $-3x^2 + 2x - m = 0$ b) $x^2 + (2m+1)x + 5 = 0$ c) $x^2 + mx - m = 0$

Ćwiczenie 3

Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^2 + (m-1)x + 2m - 5 = 0$ b) $-2x^2 + 2mx + 2x + m - \frac{1}{2} = 0$

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach?

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$; pierwiastki te mają jednakowe znaki, gdy iloczyn tych liczb jest dodatni: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

$$\Delta = k^2 - 4(k-1) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2, \quad \frac{c}{a} = k - 1$$

Otrzymujemy zatem układ nierówności:

$$(k-2)^2 > 0 \ \text{ i } \ k - 1 > 0$$

$$k \neq 2 \ \text{ i } \ k > 1$$

Równanie ma zatem dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru k równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 - (k+2)x + k - 2 = 0$ b) $x^2 + (k-1)x - k = 0$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2 - 4(m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2.

1° Dla $2m + 1 = 0$, czyli dla $m = -\frac{1}{2}$, równanie jest liniowe – ma tylko jeden pierwiastek. Nie są więc spełnione warunki zadania.

2° Dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ równanie jest kwadratowe – ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-4(m-1))^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2m+1) = 16m^2 - 64m$$

$$\Delta > 0, \ \text{gdy} \ 16m^2 - 64m > 0$$

$$16m(m-4) > 0$$

(I) $$m \in (-\infty; -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}; 0) \cup (4; \infty) \qquad m \neq -\tfrac{1}{2}$$

Sumę odwrotności pierwiastków wyznaczamy, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{4(m-1)}{4} = m - 1$$

Warunek $m - 1 < 0$ jest spełniony dla:

(II) $$m \in (-\infty; -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}; 1) \qquad m \neq -\tfrac{1}{2}$$

Równanie ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest ujemna, gdy warunki (I) i (II) są jednocześnie spełnione, czyli dla:

$$m \in (-\infty; -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}; 0)$$

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest większa od -6?

a) $(m+3)x^2+(m+2)x+1=0$ b) $mx^2+(m-1)x+1=0$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 17?

a) $x^2+(k-1)x+4=0$ b) $x^2-(k-2)x+\frac{1}{2}k^2+1=0$

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m+2)x^2-2mx+m \geqslant 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2.

1° Dla $m=-2$ otrzymujemy nierówność liniową $4x-2 \geqslant 0$. Nie spełnia ona warunków zadania.

2° Dla $m \neq -2$ otrzymujemy nierówność kwadratową.
Jest ona spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy jednocześnie zachodzą dwa warunki:

$$\begin{cases} m+2>0 & \text{(I)} \\ \Delta \leqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Warunek (I): $m \in (-2; \infty)$

Warunek (II): $\Delta = (-2m)^2 - 4m(m+2) = 4m^2 - 4m^2 - 8m = -8m$

$\Delta \leqslant 0$, gdy $m \in \langle 0; \infty)$

Zatem nierówność $(m+2)x^2-2mx+m \geqslant 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in \langle 0; \infty)$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2-(k-3)x+4k \geqslant 0$ b) $(k-1)x^2-2kx+k-1 \leqslant 0$

Zadania

D **1.** Wykaż, że równanie $2x^2+mx-3=0$ ma rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$.

D **2.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m, dla której równanie $x^2+(m+1)x+m^2+1=0$ ma rozwiązanie.

3. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek?

a) $x^2 - 6x + 2m = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 - (m-2)x + m - 2 = 0$

c) $mx^2 - 4x + 1 = 0$

d) $(1-m)x^2 - (4m-4)x - 3m + 5 = 0$

4. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 - 2x + k + 3 = 0$

b) $x^2 - (k-4)x - k + 5 = 0$

c) $x^2 + (2k+1)x - 2k + 2 = 0$

d) $x^2 + (1-2k)x + 4 - 4k = 0$

5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami dodatnimi?

a) $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$

b) $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$

c) $x^2 + (2m-5)x + 2m - 6 = 0$

d) $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - m - 6 = 0$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami ujemnymi?

a) $\frac{1}{4}x^2 + x + m^2 - 4m = 0$

b) $-x^2 + \frac{m}{2}x - m + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2 + 3x + k > 0$

b) $x^2 + kx + 9 \geqslant 0$

c) $x^2 - kx + k + 3 > 0$

d) $x^2 - kx + k + 1 \geqslant 0$

e) $(k+1)x^2 - 2x - 1 \leqslant 0$

f) $kx^2 + 2(k-1)x + k - 1 > 0$

8. Dla jakich wartości parametru k funkcja f określona jest dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + (k+2)x + 2k + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{(5-k)x^2 + (k-2)x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{(2-k)x^2 - 2x + 2 - k}$

d) $f(x) = \sqrt{(k-4)x^2 + 2kx + 2k}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{kx^2+2kx+2}}$

f) $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{\sqrt{kx^2+(2k-1)x+2k-1}}$

9. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające podany warunek?

a) $x^2 - (a-4)x - 2a = 0,\ \ x_1 + x_2 > 2$

b) $x^2 + (a+1)x + 4 = 0,\ \ x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)$

c) $x^2 + ax + 2a - 3 = 0,\ \ x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 0$

d) $-x^2 + (2a-1)x + a = 0,\ \ (x_1 - x_2)^2 = 5$

10. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 6?

a) $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6(a-3)x + a - 3 = 0$

11. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 16?

a) $x^2 - 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 + (4-2a)x + a^2 + 1 = 0$

12. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + ax + 1 = 0$ jest równa 7?

13. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $-x^2-2x+a^2+a+1 = 0$ przyjmuje największą wartość?

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

a) $x(x^2 - (2m-4)x + m - 2) = 0$ b) $(x+3)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0$

15. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbf{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania.

a) $(m-1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ b) $(m^2 + 2m)x^2 + 2mx + 3 = 0$

16. Niech $y = f(m)$ będzie funkcją określającą wartość iloczynu dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x + m^2 + 4m + 1 = 0$ w zależności od parametru m. Podaj dziedzinę funkcji f oraz wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich iloczyn był najmniejszy.

17. Funkcja $y = f(m)$ opisuje sumę dwóch różnych pierwiastków równania:

$$\tfrac{1}{m}x^2 + (m+1)x + \tfrac{m}{64} = 0$$

Wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich suma była największa.

18. Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki?

a) $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ c) $x^4 + mx^2 - m - 6 = 0$

b) $x^4 - x^2 + m = 0$ d) $x^4 + (m-2)x^2 + 4 - m = 0$

19. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^4 + mx^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + m = 0$ *c) $|x^2 + 2x - 8| = m$

20. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające nierówność $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$?

1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$p + q = 12$, zatem $q = 12 - p$.

Iloczyn tych liczb: $p \cdot q = p(12 - p) = -p^2 + 12p$.

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p$$

Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest zatem równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

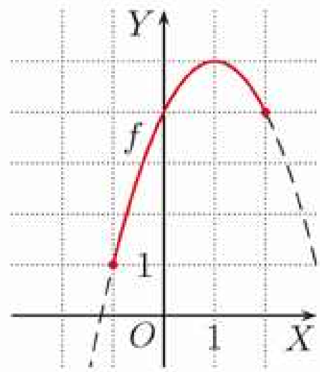
a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q.

Przykład 2

Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2+2x+4$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.



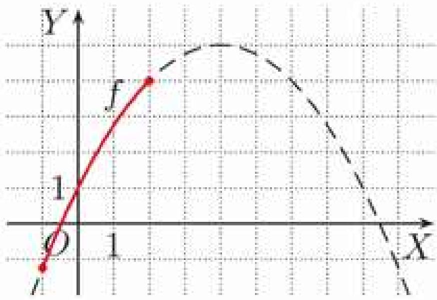
Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli: $x_w = 1$. Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2\rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale to: $y_w = f(1) = 5$. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.

Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2\rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $\langle p_1; p_2\rangle$, to wyznaczamy również y_w, obliczając $f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych trzech wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.



- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2 \rangle$

Zatem wartości najmniejsza i największa funkcji f są przyjmowane na końcach przedziału $\langle -1; 2 \rangle$.

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1 \rangle$

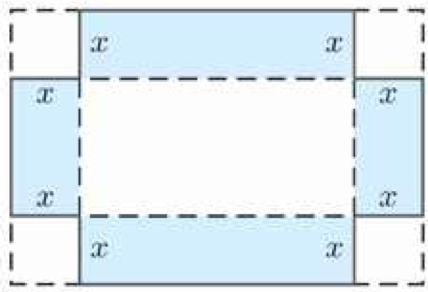
b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 4 \rangle$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3 \rangle$

d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $\langle -2; 1 \rangle$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$. $x > 0$, $2x < 40$, $2x < 60$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12{,}5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w.

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2.

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Zadania

1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale:

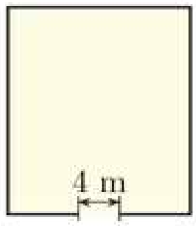
a) $\langle 0; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 0 \rangle$, c) $\langle -4; 6 \rangle$.

2. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.

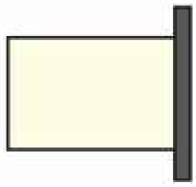
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.

b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.

3. Mamy 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ten ogródek, jeśli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 4 m?



4. Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była jak największa?

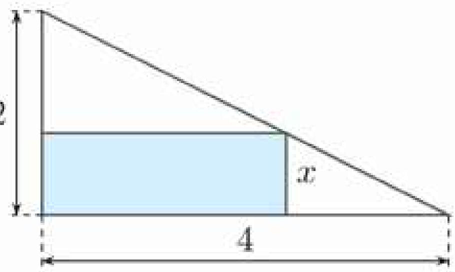


5. Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?

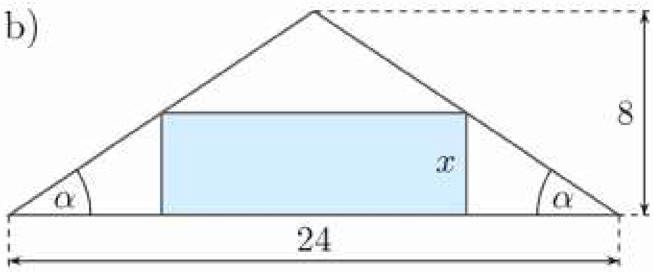
6. Szkielet prostopadłościanu wykonano z 56 cm drutu. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie powinny być długości krawędzi tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?

7. Wyraź pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x. Podaj wymiary prostokąta o największym polu.

a)



b)



8. Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+8}$, $\langle 1; 4 \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$, $\langle 0; 4 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2-10x+4}}$, $\langle -2; 0 \rangle$

d) $f(x) = (x^2 - 6x + 3)^2$, $\langle 1; 5 \rangle$

1.9. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ćwiczenie 1

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny x zł za sztukę (tabela poniżej).

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Dane z tabeli spełniają równanie $s = -40x + 3600$.

D a) Uzasadnij, że jeśli koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł, to zysk firmy ze sprzedaży lalek w cenie x zł za sztukę wyraża się wzorem:

$$z(x) = -40x^2 + 4400x - 72\,000$$

b) Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 2

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Przy cenie 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny x zł za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że obniżenie ceny o każde 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy?

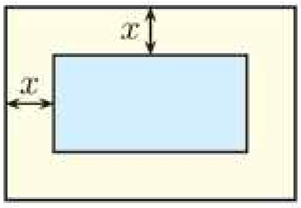
Ćwiczenie 4

Właściciel kina zauważył, że przy cenie biletu wynoszącej 16 zł na seans przychodzi średnio 100 osób, a każdorazowe podniesienie ceny biletu o złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?

Ćwiczenie 5

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2. Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Ćwiczenie 6



Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafelkami pas o szerokości x (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli ma on powierzchnię 45 m^2?

Zadania

1. Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o x m, a długość o $2x$ m. Oblicz x, jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144 m^2.

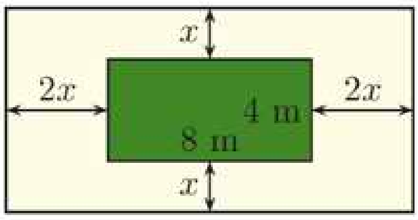
2. Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy.

a) $P = 2400 \text{ cm}^2$, $x = 80$ cm, $y = 60$ cm

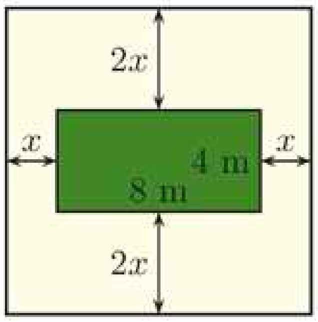
b) $P = 2700 \text{ cm}^2$, $x = 75$ cm, $y = 55$ cm

3. Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ ma zostać wyłożona kostka. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji wyznacz x.

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



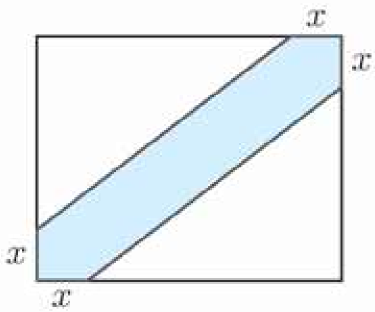
Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2



4. Dany jest prostokąt o wymiarach $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o x cm. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm?

5. Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest nie mniejsza niż 6 m i nie większa niż 10 m?

6. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC. Oblicz obwód tego trójkąta.

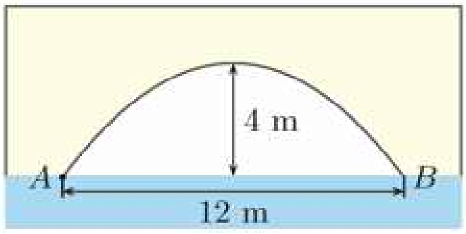


7. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

D **8.** Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

a) naturalnym, b) parzystym.

9. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:

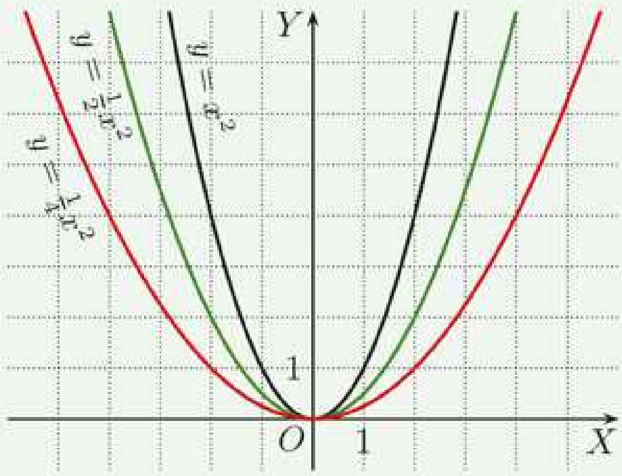


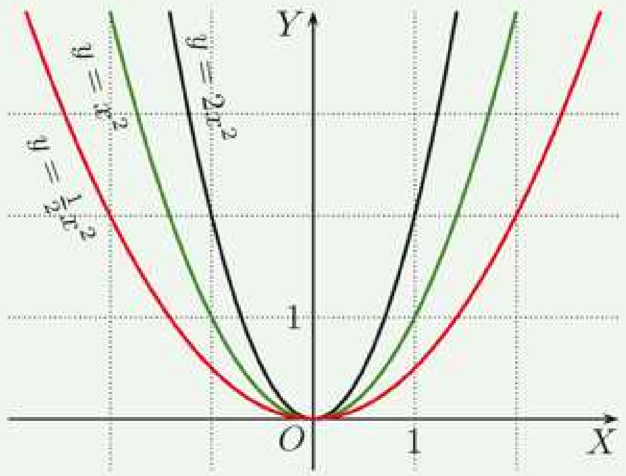
a) w punkcie A, b) w środku odcinka AB.

10. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 9. przepłynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Czy wiesz, że…

Wszystkie parabole są podobne. Aby się o tym przekonać, warto przyjrzeć się poniższym rysunkom (zauważ, że jednostki na osiach na rysunku po prawej są dwukrotnie większe niż na rysunku po lewej). Na przykład parabole narysowane kolorem zielonym (na rysunku po prawej parabola dana wzorem $y = x^2$, a na rysunku po lewej parabola $y = \frac{1}{2}x^2$) są identyczne.

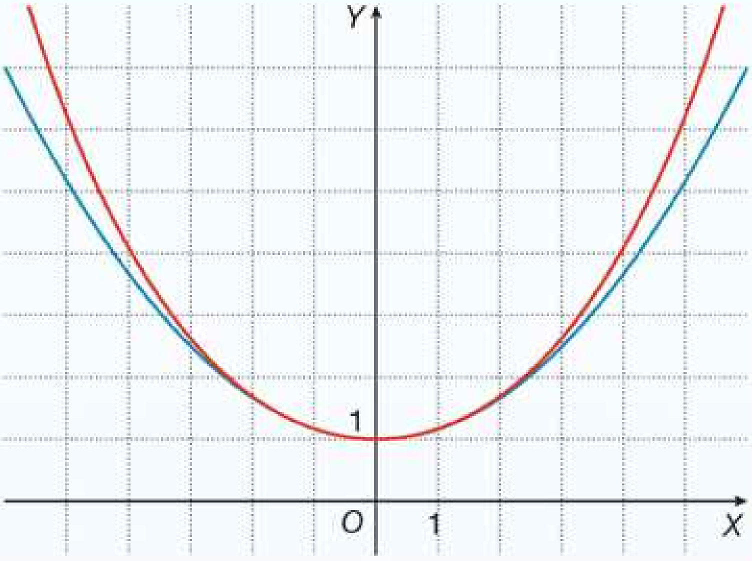




Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* (od łacińskiego słowa *catena* oznaczającego łańcuch).

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.

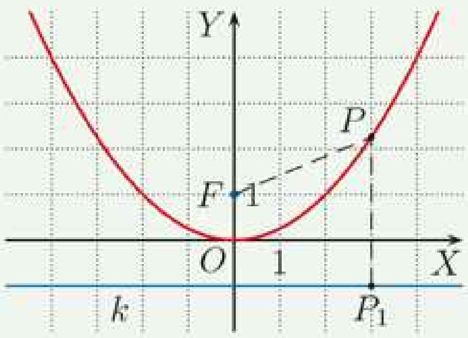
Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych to monument, którego kształt jest inspirowany krzywą łańcuchową.

1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

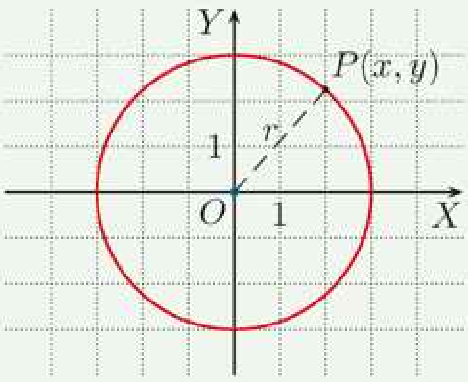
1.10. Zagadnienia uzupełniające

Równania i układy równań drugiego stopnia

Na rysunkach poniżej przedstawiono przykłady krzywych opisanych za pomocą równań drugiego stopnia.

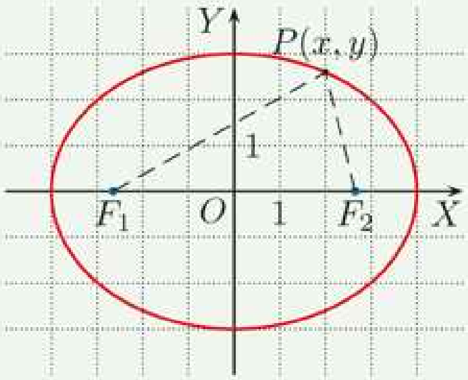


Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (kierownicy paraboli) i ustalonego punktu F (ogniska paraboli). Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$. Jej kierownicą jest prosta $y = -1$, a ogniskiem – punkt $F(0,1)$. Zachodzi równość $|FP| = |PP_1|$.



Okrąg jest zbiorem punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu O (środka okręgu) jest równa promieniowi okręgu. Do okręgu o promieniu r, którego środkiem jest początek układu współrzędnych, należą punkty, których współrzędne (x, y) spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Na rysunku powyżej przedstawiono okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 9$ – jego środkiem jest punkt $O(0,0)$, a promień jest równy 3. Dla dowolnego punktu P należącego do tego okręgu zachodzi równość $|OP| = 3$.

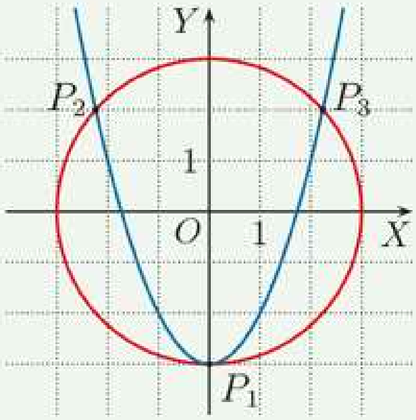


Elipsa jest zbiorem punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 (ognisk elipsy) jest stała. Jeśli osie symetrii elipsy przecinają się w początku układu współrzędnych, to jest ona dana równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$. W przypadku gdy $a = b$, otrzymujemy okrąg ($F_1 = F_2 = O$).

Na rysunku powyżej przedstawiono elipsę daną równaniem $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Przecina ona oś OX w punktach $(-4, 0)$ i $(4, 0)$, zaś oś OY w punktach $(0, -3)$ i $(0, 3)$. Jej ogniskami są punkty $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ i $F_2(\sqrt{7}, 0)$. Dla dowolnego punktu P należącego do elipsy zachodzi równość $|F_1P| + |F_2P| = 8$.

Przykład 1

Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 9$ i paraboli $y = x^2 - 3$.



Aby wyznaczyć punkty wspólne okręgu i paraboli, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = -y^2 + 9 \\ y = -y^2 + 9 - 3 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x^2 i podstawiamy do drugiego równania.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 + y - 6 = 0$. Jego rozwiązaniami są liczby: $y_1 = -3$ i $y_2 = 2$.

Punkty wspólne okręgu i paraboli: $P_1(0, -3)$, $P_2(-\sqrt{5}, 2)$ i $P_3(\sqrt{5}, 2)$.

1. Narysuj okrąg, którego liczba punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$ jest równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 4.

2. Wyznacz punkty wspólne okręgu i paraboli.

a) $x^2 + y^2 = 4, \; y = -x^2$

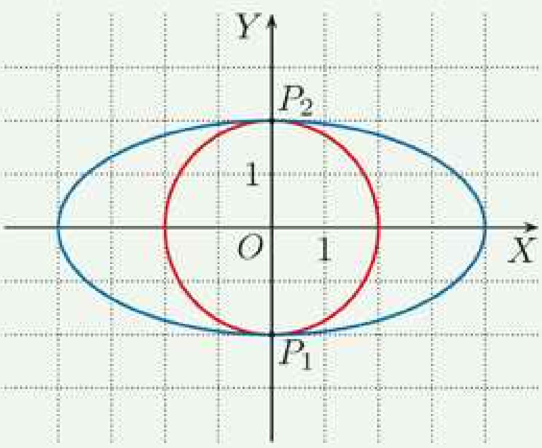
b) $x^2 + y^2 = 16, \; y = x^2 + 4$

c) $x^2 + y^2 = 10, \; y = x^2 - 4$

d) $x^2 + y^2 = 25, \; y = -x^2 + 5$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg $x^2 + y^2 = 4$ i elipsę $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Mają one dwa punkty wspólne. Współrzędne tych punktów możemy odczytać z rysunku. Można je też wyznaczyć, rozwiązując układ równań:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

Punkty wspólne okręgu i elipsy: $P_1(0, -2)$ i $P_2(0, 2)$.

3. Ile punktów wspólnych mogą mieć okrąg i elipsa (wykonaj odpowiednie rysunki)?

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - 5x = 0$
b) $x = \sqrt{2}x^2$
c) $25x^2 - 1 = 0$
d) $1 - \frac{81}{16}x^2 = 0$
e) $x(x+2) = -1$
f) $x(x-8) = 4(x-9)$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$
b) $2x^2 + 5x + 1 = 0$
c) $3x^2 - 14x - 5 = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$
e) $7x^2 + 2x = 1$
f) $-3x^2 + x + 1 = 0$
g) $x(x-5) = 2x(x-1)$
h) $2(1-5x) = (1-x)^2$
i) $\frac{1}{5}(x^2+4) = \frac{1}{2}(1-x)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + x - 1 \geqslant 0$
b) $4x^2 + 20x + 25 \leqslant 0$
c) $5x^2 - 5x + 2 < 0$
d) $-3x^2 + 6x > 2$
e) $4x - 3x^2 \leqslant 2 - x^2$
f) $-x(4-x) > 4 - x^2$

4. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x - 1 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \geqslant 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 4x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 6 < 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbf{R} : 3x + 18 > x^2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x \leqslant 3\}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2-4)(x^2+9) = 0$
b) $(9x^2-4)(x^2-3) = 0$
c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
d) $x^4 + 16x^2 = 0$
e) $x^4 - 16x^2 = 0$
f) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

6. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
c) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$
d) $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$
e) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$
f) $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$
g) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
h) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
i) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

7. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

8. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$

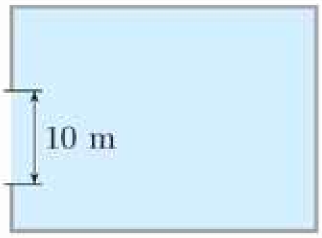
9. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $\langle -2; 1\rangle$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $\langle 0; 4\rangle$
c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $\langle 0; 2\rangle$
d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $\langle -2; 2\rangle$

10. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

11. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, jeżeli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 10 metrów?



12. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór tych punktów (x, y), których współrzędne spełniają poniższe warunki.

a) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ y^2 - 4 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leqslant 0 \\ y^2 - 2y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0 \\ 2y^2 + 3y - 2 > 0 \end{cases}$

Zestaw II

1. Dla jakich wartości parametru c funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

a) $f(x) = x^2 + 3x + c$
b) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - c$
c) $f(x) = -x^2 + x + c + 1$
d) $f(x) = x^2 + cx + c$

2. Dla jakich wartości parametru b funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

a) $f(x) = x^2 + bx + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2bx - 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = |x^2 + 2x|$ b) $f(x) = x^2 - 3|x|$ c) $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$

4. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

a) $(x^2-2x)^2+5(x^2-2x)+4=0$

b) $(x^2+4x)^2+7(x^2+4x)+12=0$

c) $(x^2-5x)(x^2-5x+2)=24$

d) $(x^2+2x)(x^2+2x-1)=2$

5. Rozwiąż równanie.

a) $x-9\sqrt{x-4}-40=0$

b) $x^2-9|x|+18=0$

6. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązania.

a) $\sqrt{7x-x^2-12}\cdot(x^2-1)=0$

b) $(x^2+2x-15)\cdot\sqrt{x^2-4x}=0$

D **7.** Uzasadnij, że podane równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2. Nie wyznaczając tych pierwiastków, oblicz wartość wyrażenia $x_1^2+x_2^2-8x_1x_2$.

a) $15x^2-12x-20=0$

b) $(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-1=0$

8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, jeśli:

a) do jej wykresu należy punkt $(0,-2)$, suma jej miejsc zerowych jest równa $\frac{8}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa 4,

b) iloczyn jej miejsc zerowych jest równy 24, a parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(5,2)$.

9. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2+(m-3)x+m=0$

b) $\frac{1}{4}x^2+(m+1)x+1=0$

c) $\frac{1}{4}mx^2+(m^2-1)x+m^3-4m=0$

d) $(3m-2)x^2+mx+1-\frac{3}{2}m=0$

10. Dla jakich wartości parametru m równanie:

a) $2x^2-mx+m+2=0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie,

b) $-x^2+(2m-2)x+m^2-2m=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

11. Dla jakich wartości parametru m nierówność spełniona jest przez dowolną liczbę rzeczywistą x?

a) $mx^2+4x+m-1\leqslant 0$

b) $(m-3)x^2+(3-m)x+m>0$

12. Wyznacz wartości parametru m, dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1;\infty)$.

a) $f(x)=x^2+(2m+2)x-m$

b) $f(x)=(m+1)x^2+(m+1)x+m+3$

13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k,m), dla których równanie $x^2+kx+m=0$:

a) ma jedno rozwiązanie x_0 spełniające warunek $|x_0|\leqslant 2$,

b) ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2+x_2^2=4$.

Przykład

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases}$$

Liczby $x_1 - 2$ i $x_2 - 2$ są ujemne, gdy ich iloczyn jest dodatni, a suma ujemna.

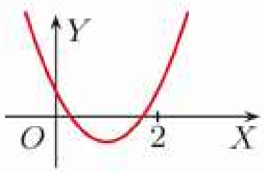
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m-1) = 4m^2 - 4m + 4$
  $\Delta = 4m^2 - 4m + 4 > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$ (sprawdź).
- $(x_1-2)(x_2-2) = x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 = \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 4 =$
  $= m - 1 - 4m + 4 = -3m + 3$
  Zatem $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -3m + 3 > 0$.
  Nierówność ta jest spełniona dla $m < 1$.
- $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{b}{a} - 4 = 2m - 4$
  Zatem $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0$.
  Nierówność ta jest spełniona dla $m < 2$.

Po uwzględnieniu powyższych warunków otrzymujemy, że $m \in (-\infty; 1)$.

II sposób

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$.
$a > 0$, więc warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



Dwa różne pierwiastki są mniejsze od 2, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w < 2$ oraz $f(2) > 0$ (dlaczego?).

- $\Delta > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$ (sprawdzone tak jak w sposobie wyżej)
- $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = m$
  Zatem $x_w < 2$ dla $m < 2$.
- $f(2) = 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = -3m + 3$
  Nierówność $-3m + 3 > 0$ jest spełniona dla $m < 1$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione dla $m \in (-\infty; 1)$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Liczba pierwiastków równania $8x^4 + 5x^2 - 12 = 0$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

2. Dla jakich liczb rzeczywistych x określone jest wyrażenie $\frac{16x^2-1}{16x^4-8x^2+1}$?

A. $x \in \mathbf{R}$

B. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

C. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

D. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

3. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 0; 2\rangle$ jest liczbą dodatnią, gdy:

A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

B. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$,

C. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$,

D. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$.

4. Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie:

A. $x^2 - 4x + 5 = 0$,

B. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$,

C. $x^2 - 5x + 6 = 0$,

D. $x^2 + 5x - 6 = 0$.

5. Punkt (x_0, y_0) jest punktem wspólnym parabol $y = -x^2 + 8x - 8$ i $y = x^2$. Wówczas $|x_0 - y_0|$ równa się:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

6. Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m > 1{,}125$, **B.** $m > -\frac{9}{2}$, **C.** $m < \frac{9}{8}$, **D.** $m < 2$.

7. Jeżeli równanie $(m - 1)x^2 + 2mx + (m + 2) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to liczba m należy do przedziału:

A. $(-\infty; -2)$, **B.** $\langle 2; \infty)$, **C.** $\langle -2; 0)$, **D.** $\langle 0; 2\rangle$.

8. Nierówność $mx^2 + 4x + 4 < 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m > 0$, **B.** $m < 0$, **C.** $m \geqslant 1$, **D.** $m \leqslant 1$.

9. Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2. Obwód tej działki jest równy:

A. 64 m, **B.** 68 m, **C.** 72 m, **D.** 76 m.

10. Boki prostokąta P_1 o wymiarach 4 cm i 8 cm wydłużono o x cm i otrzymano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2. Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą:

A. $3\sqrt{10}$ cm, **B.** $4\sqrt{10}$ cm, **C.** $3\sqrt{13}$ cm, **D.** $4\sqrt{13}$ cm.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

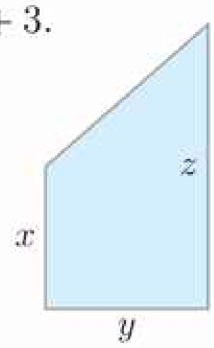
Zadanie 3 (2 pkt)
Suma liczby a i potrojonej liczby b wynosi 12. Oblicz największą wartość iloczynu liczb a i b.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (5 pkt)
Wskaż te rozwiązania równania $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$, które spełniają warunek $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

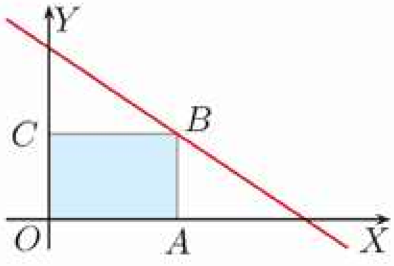
Zadanie 5 (4 pkt)
Dane są proste k: $y = 2x + 2$ oraz l: $y = -2x - 5$. Sprawdź, która z tych prostych ma więcej punktów wspólnych z parabolą $y = x^2 + 4x + 3$.

D **Zadanie 6 (5 pkt)**
Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.



Zadanie 7 (5 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 48 cm. Oblicz największe pole powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu.

Zadanie 8 (5 pkt)
Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz sumę dodatnich pierwiastków równania $36x^4 - 43x^2 + 12 = 0$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

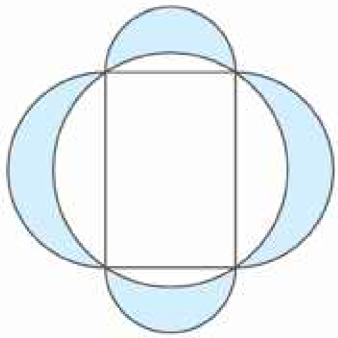
Zadanie 2 (2 pkt)

Punkt (x_1, y_1) leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i jest punktem wspólnym paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ i prostej $y = \frac{1}{2}x + 1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $x_1 \cdot y_1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Niech m_0 będzie największą całkowitą wartością parametru m, dla której równanie $(m-1)x^2 - 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt{3}m_0$.

D Zadanie 4 (5 pkt)



Każdy księżyc zbudowany na boku prostokąta jest ograniczony okręgiem opisanym na tym prostokącie oraz okręgiem, którego środkiem jest środek danego boku. Wykaż, że jeśli obwód prostokąta jest równy 8 cm, to pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2.

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ i $g(x) = 4 - 2|x - 1|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 = 0$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Zadanie 8 (5 pkt)

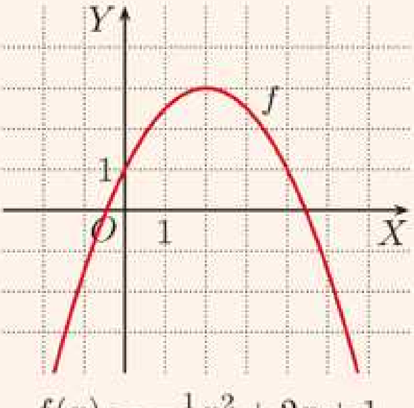
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - \left(3m - \frac{1}{2}\right)x + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 12$?

Zadanie 9 (4 pkt)

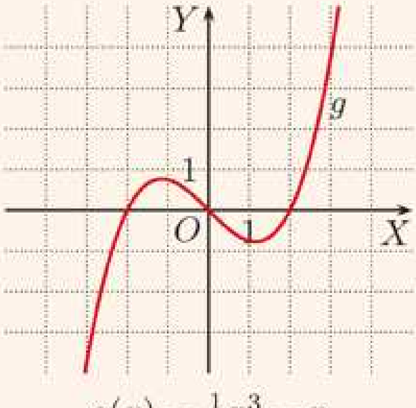
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m), dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + kx + \frac{1}{2}m = 0$ jest równa 2.

2 Wielomiany

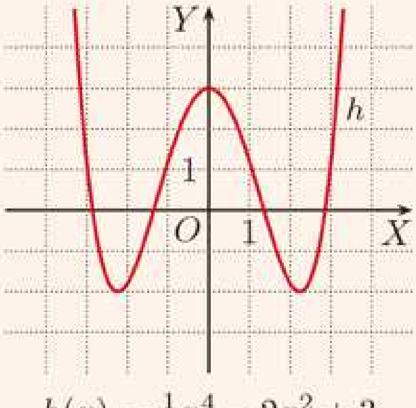
Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością można opisać za pomocą wielomianu. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$



$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$



$h(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 3$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}_+$.
Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.
Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$y = x^3 + 2x$ dwumian trzeciego stopnia
$y = 5x^4 + 1$ dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$y = x^2 + 2x + 1$ trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)
$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$ trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$ wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n.
Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.
Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.
Liczby: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.
Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\mathrm{st}\,(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$

b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$

c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$

d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

$a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\operatorname{st}(w) = 4$

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$

$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$

$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w.

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$

b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$

c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$

d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Zadania

1. Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0{,}1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:

a) stopnia trzeciego, uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0,

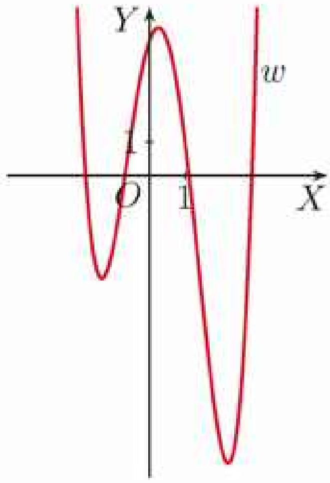
b) stopnia piątego, uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę (patrz zadanie 9.).

2. Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ i $x = -3$.

a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$ c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$

b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$ d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

3. Punkty: $P(1, a)$, $Q(-1, b)$, $R(2, c)$, $S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne: a, b, c i d.



4. Które z punktów: P, Q należą do wykresu wielomianu u?

a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$

b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

5. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$, c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$,

b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$, d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$.

6. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$,

b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$.

7. Określ stopień wielomianu w w zależności od parametru m.

a) $w(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^3 + x$

b) $w(x) = (m^2 + 4m)x^6 + mx^4 - x^2$

8. Podaj wielomian stopnia 4., którego współczynniki: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są takimi liczbami, że każda następna jest dwukrotnie większa od poprzedniej, a suma wszystkich jest równa 1.

D **9.** Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$. Oblicz sumę współczynników wielomianu w.

a) $w(x) = (x^3 - 27)(2x^2 + 11x)(x^2 - 1)$ b) $w(x) = (2x^3 - 5x + 2)^{101}$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{i} \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + 3x - \underline{5} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - x = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w. Podaj stopień wielomianu u, wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5,\ \ w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2,\ \ w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\operatorname{st}(u) = 4$, $\operatorname{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\operatorname{st}(u + w) = 4$,
b) $\operatorname{st}(u + w) = 3$,
c) $\operatorname{st}(u + w) = 2$,
d) $\operatorname{st}(u + w) = 1$,
e) $\operatorname{st}(u + w) = 0$.

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u, w oraz $u + w$ są niezerowe i $\operatorname{st}(u) \leqslant \operatorname{st}(w)$, to:

$$\operatorname{st}(u + w) \leqslant \operatorname{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w, jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w.

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów: u, w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0{,}75x^6 - 0{,}2x^4 + 0{,}125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \tfrac{3}{2}x) = \\ &= 9x^4 - 6x^3 - x^2 + 3 - 10x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2.

Ćwiczenie 5

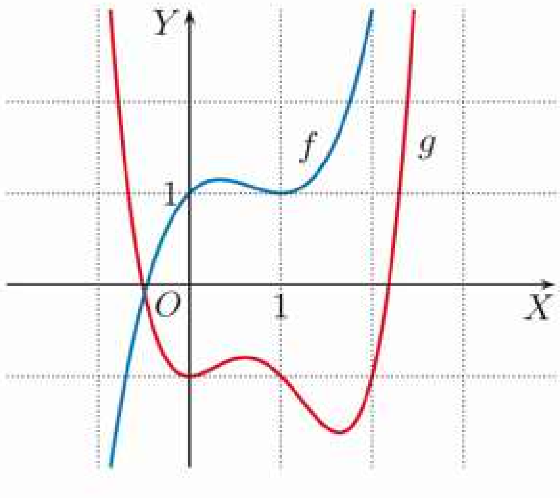
Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1{,}5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.



a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w?

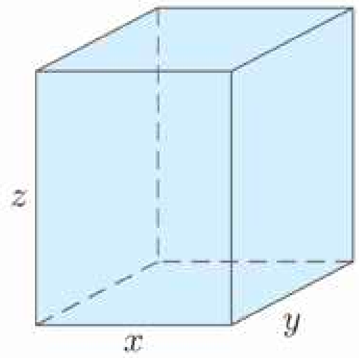
Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x,y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x,y,z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x, y, z (rysunek obok).



$P(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x,y,z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę wielomianów u i w.

$u(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \;\; w(x,y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$

$$\begin{aligned} u(x,y) + w(x,y) &= \underline{3x^2y} + 6xy^2 - \underline{\underline{4xy}} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{\underline{xy}} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę wielomianów u i w.

$u(x,y,z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \;\; w(x,y,z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$

$$\begin{aligned} u(x,y,z) - w(x,y,z) &= 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2, \;\; w(x,y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x,y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1, \;\; w(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y,z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3, \;\; w(x,y,z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

b) $u(x,y,z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2, \;\; w(x,y,z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

1. Wyznacz sumę $f+g$ oraz różnicę $f-g$ wielomianów f i g.

a) $f(x)=\frac{3}{4}x^6-2x^4+\frac{5}{4}x^2+4,\ \ g(x)=\frac{1}{4}x^6+2x^4+x^3-\frac{1}{4}x^2-2x+2$

b) $f(x)=-2x^2+4x-x^6+2,\ \ g(x)=-5x+3x^2+x^6-3x^5$

c) $f(x)=3x^4+2x^7-5+4x,\ \ g(x)=-3x+x^5-2x^7+2$

2. Wyznacz wielomiany $w(x)=2f(x)-3g(x)$ oraz $u(x)=\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.

a) $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^2+3,\ \ g(x)=-2x^4+\frac{x^2}{3}+2$

b) $f(x)=3x^5+6x^3-9x,\ \ g(x)=2x^5+4x^3-4x^2$

3. Wiadomo, że $f(x)=u(x)+2w(x)$, $g(x)=2u(x)-3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:

a) $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5)=7$ i $w(5)=-2$,

b) $f(-3)$ i $g(-3)$, gdy $u(-3)=-4$ i $w(-3)=-6$,

c) $u\left(-\frac{1}{2}\right)$ i $w\left(-\frac{1}{2}\right)$, gdy $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-9$ i $g\left(-\frac{1}{2}\right)=13$.

4. Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q, jeśli:

a) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=4$,

b) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=5$,

c) $\mathrm{st}\,(p)=m$, $\mathrm{st}\,(q)=n$?

5. Określ stopień wielomianu $u+w$ w zależności od parametru a.

a) $u(x)=2x^4-3x+6,\ \ w(x)=ax^6+5x^2+4$

b) $u(x)=3x^6-ax^5+2x^2-x,\ \ w(x)=-3x^6-6x^5-2x^2+9$

c) $u(x)=(a+1)x^3-x^2+4x,\ \ w(x)=(a^2-1)x^4+x^2+3$

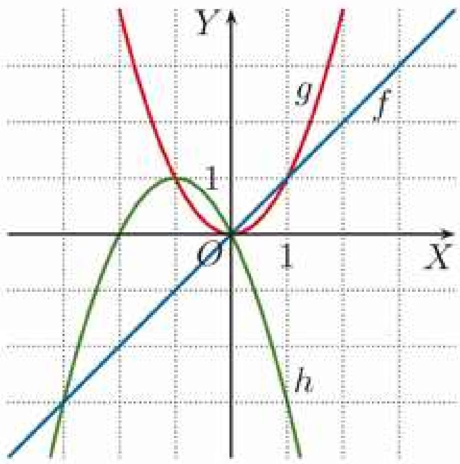
6. Określ stopień wielomianu $u+w$ w zależności od parametrów a i b.

a) $u(x)=ax^3+x^2-6,\ \ w(x)=bx^5+7x^3+x+2$

b) $u(x)=ax^7+3x^2+4,\ \ w(x)=3x^7-bx^2-5x+6$

c) $u(x)=(a+1)x^4-bx^3+2x^2+1,$
$w(x)=(-1-b)x^4-4x^3-2x^2+9x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ oraz $h(x)=p\cdot f(x)+q\cdot g(x)$.



a) Oblicz wartości p i q.

b) Naszkicuj wykres wielomianu:

$$k(x)=2h(x)+4g(x)$$

8. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y.

a) $w(x,y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y, \ \ x = -2, \ y = 3$

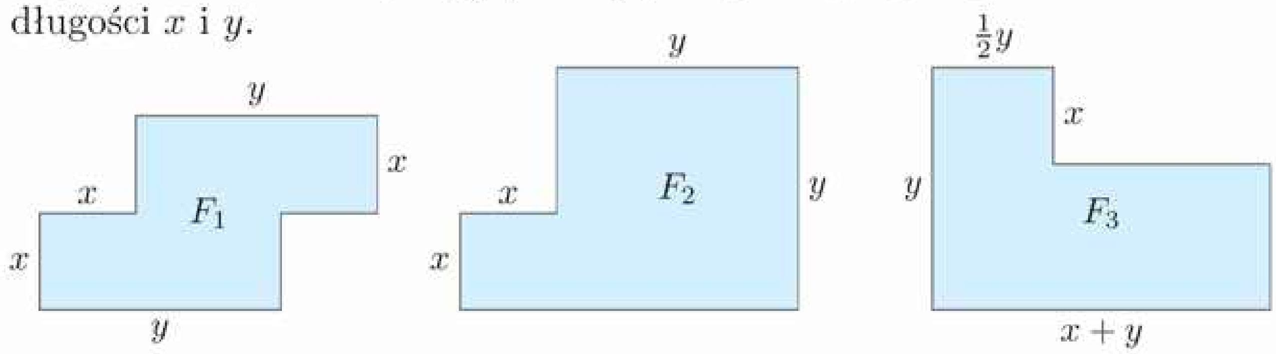
b) $w(x,y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4, \ \ x = 2, \ y = -4$

9. Wyznacz sumę $u+w$ oraz różnicę $u-w$ wielomianów u i w. Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $u(x,y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y, \ \ w(x,y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$

b) $u(x,y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y, \ \ w(x,y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

10. Zapisz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1, F_2 i F_3 w zależności od długości x i y.



11. Dla której trójki liczb, P czy Q, wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x,y,z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$

b) $w(x,y,z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$

c) $w(x,y,z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Stopień jednomianu wielu zmiennych jest sumą wykładników zmiennych w nim występujących. Na przykład jednomian x^2y^3 ma stopień równy 5, a jednomian xy^3z^4 ma stopień równy 8.

Stopień wielomianu wielu zmiennych jest równy największemu spośród stopni występujących w nim jednomianów.

Wielomian $u(x,y) = 6x^4y^2 - 8x^3y^2 + 12xy^4 + 3x^5$ jest stopnia 6.

Wielomian $w(x,y,z) = -3xy^3z^5 + 4x^4yz^3 - 2x^6y^2 + 7xz^5$ jest stopnia 9.

12. Wyznacz wielomian $v(x,y,z) = 2u(x,y,z) - 3w(x,y,z)$ oraz określ jego stopień.

a) $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2, \ \ w(x,y,z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$

b) $u(x,y,z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz, \ \ w(x,y,z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

13. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x, y, z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1$, $y+2$, $z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) &= 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{\underline{4x}} - \underline{3x^2} + \underline{\underline{6x}} - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\mathrm{st}\,(w \cdot v) = \mathrm{st}\,(w) + \mathrm{st}\,(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w. Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$

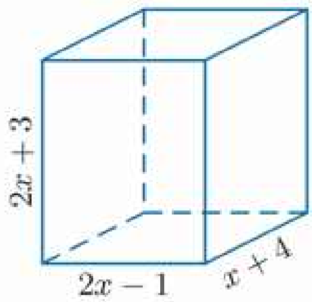
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$

c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$

d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.



Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \tfrac{1}{2}$$

Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$

b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$

c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$

d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x,y) \cdot w(x,y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - \underline{3x^2y} - \underline{4x^2y} - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$

b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$

c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$

b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$

c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu.

a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$

b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$

c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$

d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$

e) $\left(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right)$

f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny wielomianu w bez wykonywania mnożenia wielomianów.

a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$
d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
b) $w(x) = \sqrt{2}\,x^2 + x - 2\sqrt{2}$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

a) $u(x) = x^2 + 3x - 1,\ \ w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1,\ \ w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1,\ \ w(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x+1,\ b = x+2,\ c = 2x-4$
b) $a = x^2+4,\ b = x+2,\ c = x^2-1$

6. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają te same współczynniki przy odpowiednich potęgach?

a) $u(x) = (x^2-3x+1)(x^2+4x),\ \ w(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 4x$
b) $u(x) = (x^2-2x^4)(2x^2-x+1),\ \ w(x) = mx^6 + 2x^5 + nx^4 - x^3 + x^2$
c) $u(x) = (x^3+2x)(x^2-2x^4),\ \ w(x) = (m+1)x^7 + (2n-1)x^5 + 2x^3$

7. Wyznacz wielomian $v(x,y) = [u(x,y)]^2 - 2w(x,y)$.

a) $u(x,y) = 2x^2 - xy,\ \ w(x,y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x,y) = 3x^2y + 2xy^2,\ \ w(x,y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$

8. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^2y + 3xy^2)(x-y-4)$
b) $(x+y)(x-2y)(x-xy+y^2)$
c) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)$
d) $\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right)\left(2x^2 + \sqrt{6}\,xy + 3y^2\right)$

9. Wyznacz iloczyn.

a) $(x-2y)(y-2z)(z-2x)$
b) $(x+y+z)(x-y-z)$
c) $(2x-y)(3y+2z)(2x+y)(3y-2z)$
d) $(x+xy+xyz)(1+x-yz)$

10. Wyznacz wielomian zmiennych x, y, z opisujący różnicę objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x+1$, $y+2$, $z+3$ i objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x+1$, $y+1$, $z+1$.

Powierzchnie

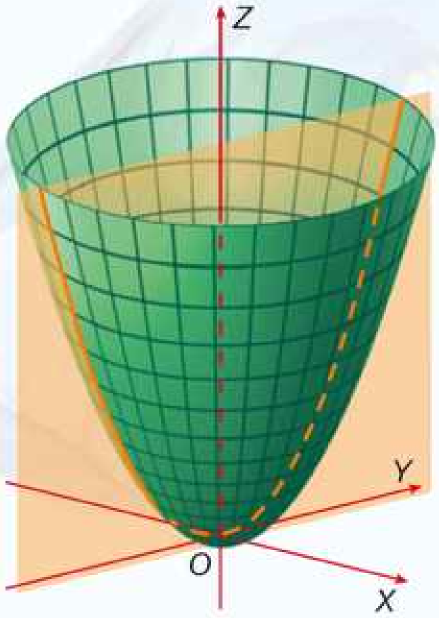
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y), a wartościami – liczby rzeczywiste z. Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

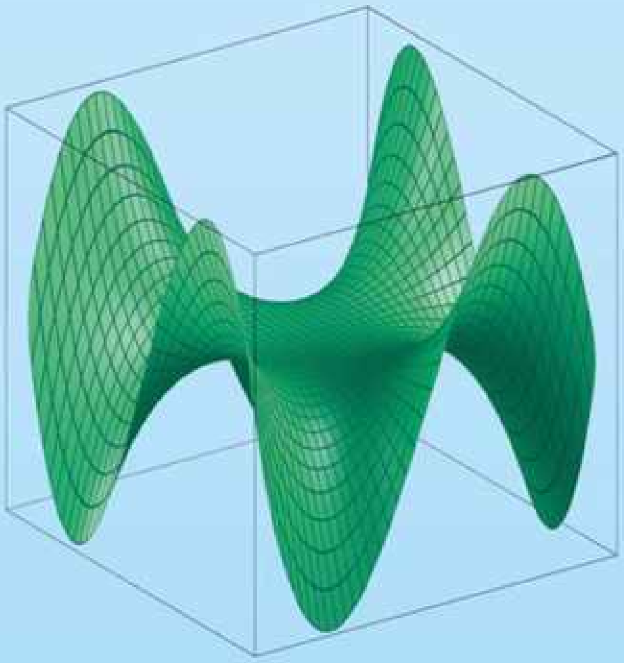
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej.** Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

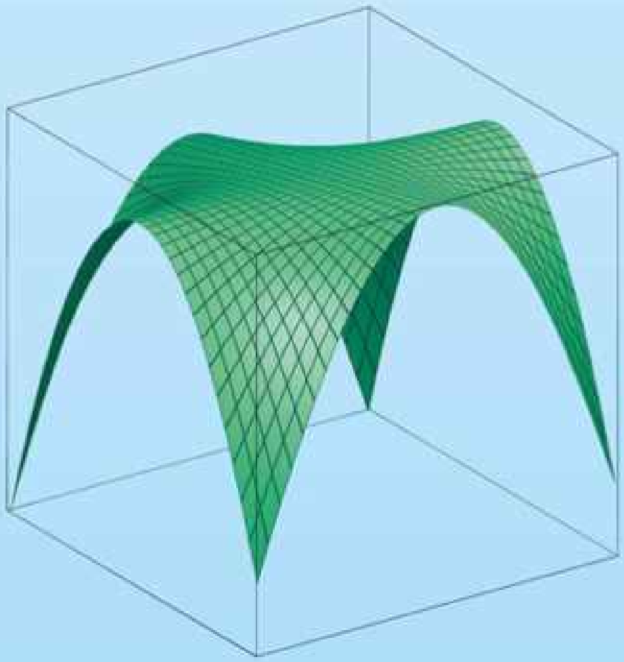


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{sześcian sumy}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{sześcian różnicy}$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

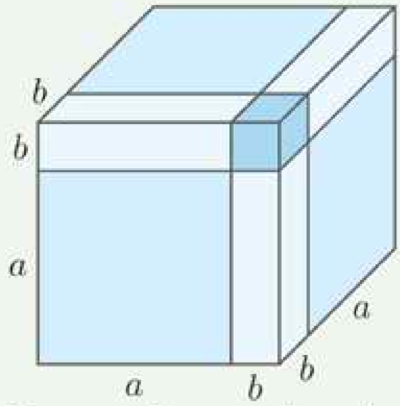
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

D **Ćwiczenie 1**

Wyprowadź wzór na sześcian różnicy, korzystając z tego, że:

a) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$,

b) $(a-b)^3 = (a+(-b))^3$.



Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru na sześcian sumy.

Przykład 1

Zapisz $(x+2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$(\boxed{x}+\boxed{2})^3 =$

$= \boxed{x}^3 + 3\cdot\boxed{x}^2\cdot\boxed{2} + 3\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{2}^2 + \boxed{2}^3 =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^3$ c) $(x+3)^3$ e) $(2x+3)^3$ g) $(3x+1)^3$

b) $(x-1)^3$ d) $(x-4)^3$ f) $(2x-1)^3$ h) $(1-3x)^3$

Przykład 2

Oblicz $(2-\sqrt{3})^3$.

$(2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3\cdot2^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot2\cdot(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $(2+\sqrt{2})^3$ c) $(3-\sqrt{3})^3$ e) $(1+2\sqrt{5})^3$ g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

b) $(\sqrt{5}-1)^3$ d) $(\sqrt{2}-4)^3$ f) $(2\sqrt{3}-3)^3$ h) $(\sqrt{3}-\sqrt{6})^3$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{suma sześcianów}$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{różnica sześcianów}$$

D Ćwiczenie 4

Wyprowadź wzory na sumę sześcianów i różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

c) $(x^2 - x + 1)(1 + x)$

d) $(x^2 - 6x + 36)(x + 6)$

e) $(x - 8)(x^2 + 8x + 64)$

f) $(2x^2 - 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16) =$
$= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.
$= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

b) $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$
$= (3x^2 - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.
$= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

b) $(3 + x)(3 - x)(x^4 + 9x^2 + 81)$

c) $((x + 2)^2 - 4x)(x^4 - 4x^2 + 16)$

d) $(2x + 5)^2(4x^2 - 20x + 25)$

D Ćwiczenie 7

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n = 5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbf{R}$ i $n \geqslant 2$:
$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a^2+a+1) = a^n-1$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$

c) $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1)$

d) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 1)(x - 1)$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geqslant 2$ różnica n-tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość podanego wyżej wzoru dla:

a) $n = 4$,
b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$
b) $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Zadania

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+4)^3$
b) $(x+5)^3$
c) $(x-2)^3$
d) $(x-3)^3$
e) $(2x+1)^3$
f) $(5x-1)^3$
g) $(x-\sqrt{2})^3$
h) $(x+\sqrt{3})^3$

2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a.

a) $a = \sqrt{2} - 1$
b) $a = 3 + \sqrt{2}$
c) $a = 2\sqrt{5} - 1$
d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

3. Oblicz.

a) $(1+\sqrt{2})^3 + (1-\sqrt{2})^3$
b) $(4+\sqrt{2})^3 - (4-\sqrt{2})^3$
c) $(2\sqrt{3}-1)^3 - (2\sqrt{3}+1)^3$
d) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^3 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})^3$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x+y)^3$
b) $(x-2y)^3$
c) $(3x+2y)^3$
d) $(2x-3y)^3$
e) $\left(x+\frac{1}{3}y\right)^3$
f) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$
g) $(\sqrt{3}x+y)^3$
h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-y\right)^3$

5. a) Oblicz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x+2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x+3y$.

b) Oblicz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x+y$ i sześcianu o krawędzi długości $x+3y$.

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+5)^2(x^2-5x+25)$

b) $(x^2+5x+25)(x-5)^2$

c) $(3x-1)^2(9x^2+3x+1)$

d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)$ dla $x=\sqrt[3]{9}$,

b) $(9x^2-6x+4)(3x+2)$ dla $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,

c) $(x-\sqrt{5})^3-2x(x+5)(x-5)+(x+\sqrt{5})^3$ dla $x=\frac{1}{40}$,

d) $(x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5}x+5)-(\sqrt{5}-x)(x^2+\sqrt{5}x+5)$ dla $x=\sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

a) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+x$

b) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3+8x$

c) $(4x^2+2x+1)(2x-1)=26$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2-x+4\right)\left(\frac{1}{2}x+2\right)=-9$

9. Skróć ułamek.

a) $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$

b) $\frac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}$, $a\neq 1$

D **10.** Uzasadnij prawdziwość wzoru.

a) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

b) $a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

11. Przedstaw wielomian jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

a) a^6-b^6

*b) a^6+b^6

D **12.** Uzasadnij, że dla dowolnego $n\in\mathbf{N}$ liczba:

a) 4^n-1 jest podzielna przez 3,

b) 7^n-1 jest podzielna przez 6.

13. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{9}\right)^2+2\sqrt[3]{9}+2^2}{\left(\sqrt[3]{9}\right)^2+2\sqrt[3]{9}+2^2}=$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

$$=\frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{\left(\sqrt[3]{9}\right)^3-2^3}=\frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{9-8}=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4$$

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

b) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{10}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

d) $\frac{11}{3-2\sqrt[3]{2}}$

Warto wiedzieć

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami **wzoru dwumianowego Newtona** (zwanego też **dwumianem Newtona**) pozwalającego wyznaczyć $(a+b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$. Będzie on szczegółowo omówiony w dalszym toku nauki.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$$\begin{array}{lc}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 \quad 1 \\
n=2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n=5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n=6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
n=7 & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
n=8 & 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. na $n = 8$ mamy: $8 = 1+7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$, $70 = 35 + 35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

1. Podaj wzory na:

a) $(a+b)^7$, b) $(a-b)^7$, c) $(a+b)^8$, d) $(a-b)^8$.

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj wzory na $(a+b)^9$ i $(a+b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(\sqrt{2}+1)^4$, b) $(\sqrt{3}-1)^4$, c) $(\sqrt{2}+1)^6$, d) $(\sqrt{3}-1)^6$.

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2)$ — Wyłączamy $4x^4$ przed nawias.

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) =$ — Wyłączamy x^4 przed nawias.
$= x^4(x - 3)^2$ — Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

b) $w(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) =$ — Wyłączamy x przed nawias.
$= x(x^2 - 4)(x^2 + 4) =$
$= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ — Dwukrotnie korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

c) $w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1)$ — Wyłączamy x^3 przed nawias.

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

> Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 7x^3$
b) $w(x) = 18x^3 + 30x^2$
c) $w(x) = -2x^5 - 8x^4$
d) $w(x) = -54x^3 + 36x^2$
e) $w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x$
f) $w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$
g) $w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4$
h) $w(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 + x$

D **Ćwiczenie 2**

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

a) $w(x) = 3x^3 + 12x$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$
c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$
d) $w(x) = -\sqrt{2}\,x^7 - \sqrt{6}\,x^5$
e) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$
f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$
g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$
h) $w(x) = 3\sqrt{2}\,x^5 - 2\sqrt{3}\,x^4 + \sqrt{6}\,x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1)$$ Wyłączamy x^3 przed nawias.

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójmian ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x+1)(x - \tfrac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x+1)(x - \tfrac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$
b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$
c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$
d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$
e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$
f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$
g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$
h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że…

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karl fridriś gałs] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum" [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student, Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrkla i linijki) siedemnastokąta foremnego. Życzył sobie, by został on wyryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wyłącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy otrzymany w nawiasie trójmian kwadratowy można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3,\ \ x^3$

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2,\ \ x^2$

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4,\ \ 2x^4$

d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2,\ \ 6x^2$

e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x,\ \ 6x$

f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3,\ \ \frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$

e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$

f) $w(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{8}{3}x^4 + 3x^3$

g) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

h) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

i) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

j) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

k) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

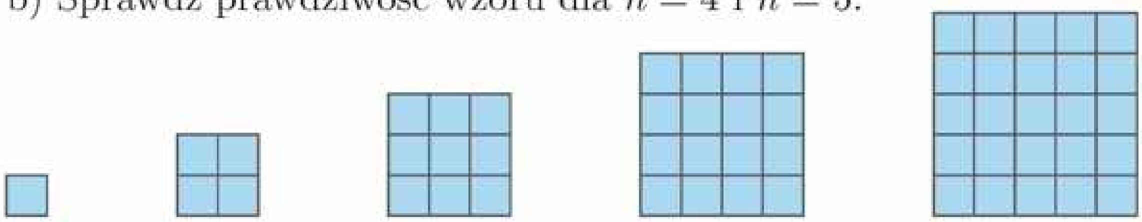
l) $w(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 + 4x + 1)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.

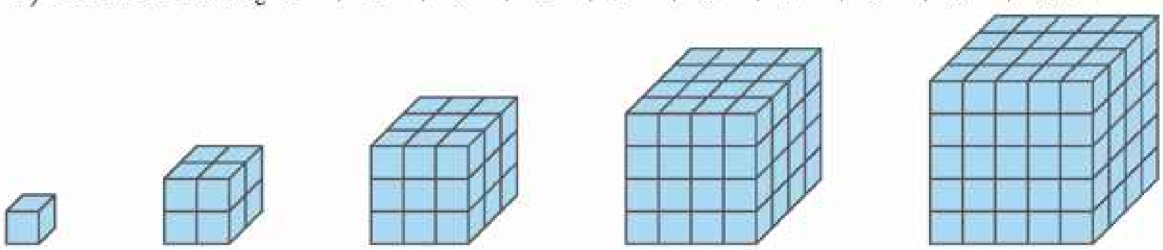


5. Sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ na czynniki.

b) Oblicz sumę $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$.



2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) =$$
$$= x^4(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny na czynniki liniowe, gdyż $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$
b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$
c) $w(x) = 8x^4 - x$
d) $w(x) = x^2 - 0{,}001x^5$
e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$
f) $w(x) = 0{,}054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

$$u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8 =$$
$$= x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4)$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4 = x^2(7x + 2) - 2(7x + 2) = (x^2 - 2)(7x + 2) =$$
$$= \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(7x + 2)$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2 = 2x^4(2x - 1) - 8x^2(2x - 1) =$$
$$= (2x^4 - 8x^2)(2x - 1) = 2x^2(x^2 - 4)(2x - 1) = 2x^2(x - 2)(x + 2)(2x - 1)$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$
b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$
d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$
e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$
f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$
g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$
h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 + 27x$
b) $w(x) = x^5 - 8x^2$
c) $w(x) = -x^4 - 64x$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2$
e) $w(x) = 27x^6 + 8x^3$
f) $w(x) = 125x^8 - x^5$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$
b) $w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2$
c) $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$
d) $w(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$
e) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1$
f) $w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27$
g) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}\,x - 2$
h) $w(x) = \sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
c) $w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x)$
b) $w(x) = \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2\right)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28)$
c) $w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4)$
d) $w(x) = \left(3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2\right)(x^6 - 1)$

5. Przeczytaj podane w ramce przykłady, a następnie rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 + 1$
b) $w(x) = 4x^4 + 9$
c) $w(x) = 9x^4 + 16$
d) $w(x) = x^4 + 5x^2 + 9$
e) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 1$
f) $w(x) = 4x^4 + 8x^2 + 9$

> Rozłóż wielomian w na czynniki.
>
> a) $w(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 =$
> $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
> $= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$
>
> b) $w(x) = x^4 + 6x^2 + 25 =$
> $= (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + 6x^2 =$
> $= (x^2 + 5)^2 - 4x^2 =$
> $= (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 5)$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$
b) $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3$
c) $w(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$
d) $w(x) = 64x^3 + 12x^2 - 3x - 1$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym**.

Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, tj. takich argumentów x, dla których spełnione jest równanie $w(x) = 0$.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2(x-4) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

> $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$x(x-3)^2 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $6x^4 + 2x^3 = 0$
b) $-x^5 + 4x^3 = 0$
c) $x^6 + x = x + 2x^4$
d) $\frac{x^4 - 4x^3}{2} = \frac{x^5 - 6x^3}{3}$
e) $\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x = 0$
f) $-4x^4 + 4x^3 - x^2 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5 - 2x^4 - 15x^3 = 0$.

$$x^3(x^2 - 2x - 15) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x - 15 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$
$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3, 0 i 5.

Przykład 4
Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2
Rozwiąż równanie.

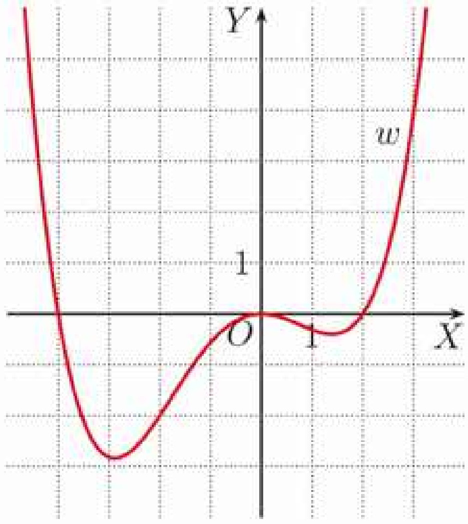
a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$
b) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$
c) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$
d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$
e) $2x^2 - 3x = x - x^3$
f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Przykład 5
Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX.

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$
$$\frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$$
$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.

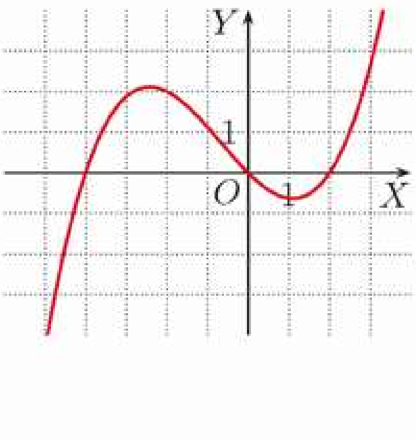


$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

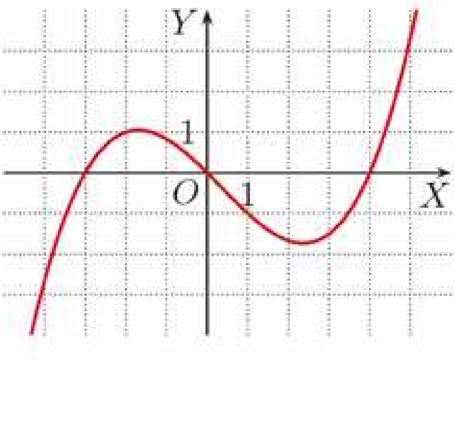
Pierwiastki równania $w(x) = 0$ to miejsca zerowe wielomianu w.

Ćwiczenie 3
Dane są wielomiany: $u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x$ oraz $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$. Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj jeden z poniższych wykresów.

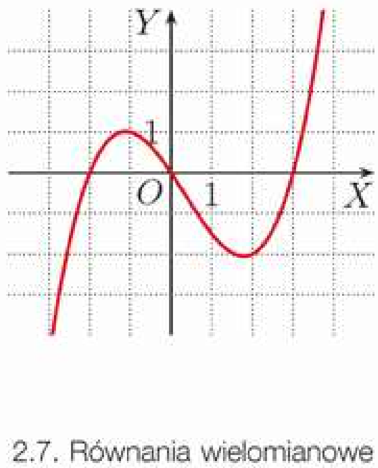
A.



B.



C.



Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x^2-9)(x-1) =$$
$$= (x-3)(x+3)(x-1)$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu, rozwiązujemy równanie:

$$(x-3)(x+3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ lub } x + 3 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3, 1 i 3.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$

d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$

e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$

f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 = 4x^2$

b) $x^5 = 9x^3$

c) $x^4 = -27x^3$

d) $x^5 = 8x^2$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^6 - 25x^2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$

b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$

d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$

e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$

f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$

g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$

h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$

i) $x^3 + 4x = -5x^2$

j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$

k) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$

l) $\frac{20x^7 + x^3}{8} = \frac{x^7 - 2x^5}{2}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$

b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$

c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$

d) $1 - x^3 = x^2 - x$

e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$

f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$

g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$

i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

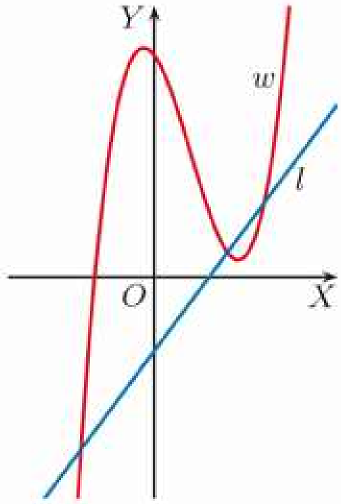
a) $x^3 - 5x - 4 = 0$

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą l: $y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w.



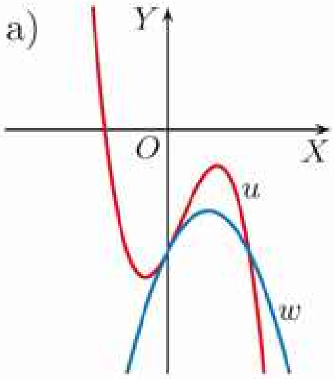
6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l.

a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, l: $y = 4x + 2$

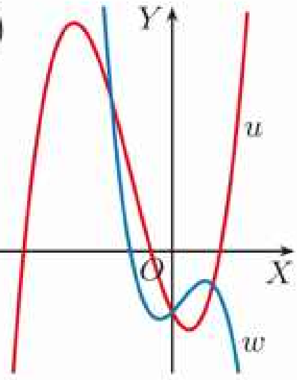
b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, l: $y = 3x + 1$

c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, l: $y = 4x - 3$

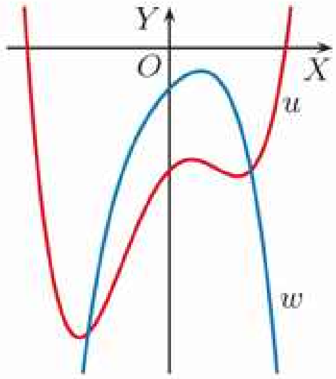
7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w.

a)


$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$
$w(x) = -x^2 + 2x - 3$

b)


$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

c)


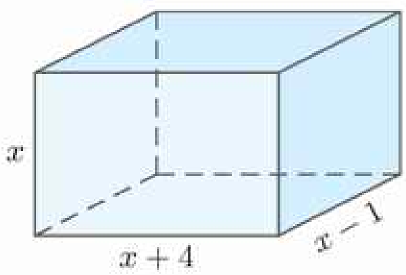
$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1, 2, 3.

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n, którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3, a wyraz wolny jest równy 1.

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 6$

10. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12?



D **11.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm^3. Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości 0,75 m^3. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że $n = k \cdot m$.
Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian niezerowy q ($q \not\equiv 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1
$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r l}
3171 : 7 = 453 & \\
-28 & \\
\hline
37 & \\
-35 & \\
\hline
21 & \\
-21 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Przykład 2
Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{-3x^2 - 3x} \\
 -4x - 4 \\
 \underline{4x + 4} \\
 0
\end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\
\underline{-3x^2 - 3x} \\
 -4x - 4
\end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x + 1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{-3x^2 - 3x} \\
 -4x - 4 \\
 \underline{4x + 4} \\
 0
\end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x + 1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1
Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$
b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$
c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q ($q \not\equiv 0$) nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$
\begin{array}{l}
(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\
\underline{-5x^2 - 10x \qquad\qquad} \\
\qquad\quad 3x + 11 \\
\qquad\ \ \underline{-3x - \ \ 6} \\
\qquad\qquad\quad\ \ 5
\end{array}
$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$
\begin{array}{r}
752 : 9 = 83 \\
\underline{-72} \\
32 \\
\underline{-27} \\
5
\end{array}
$$

$752 = 83 \cdot 9 + 5$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : \left(x - \frac{3}{2}\right) = 2x^2 + 2x + 1 \\
\underline{-2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad 2x^2 - 2x - 5 \\
\qquad\ \ \underline{-2x^2 + 3x \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\ x - 5 \\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{-x + \frac{3}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad\ \ -3\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$
\begin{aligned}
(2x^2 + 2x + 1) \cdot \left(x - \tfrac{3}{2}\right) - 3\tfrac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \tfrac{3}{2} - 3\tfrac{1}{2} = \\
&= 2x^3 - x^2 - 2x - 5
\end{aligned}
$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$

b) $(4x^2 + 6x + 7) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$

d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Zwróćmy uwagę, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r, która jest funkcją stałą.

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x, \ \ q(x) = x - 2$

b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4, \ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x, \ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1, \ \ q(x) = x + 2$

Wielomian w jest podzielny przez dwumian q, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12, \ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, \ \ q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6, \ \ q(x) = x - 3$

d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9, \ \ q(x) = x + 3$

e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4, \ \ q(x) = x - 1$

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, \ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 + 3x + 7, \ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = 3x^4 - x^2, \ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4, \ \ q(x) = x + 6$

e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2, \ \ q(x) = x + \frac{1}{2}$

f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3, \ \ q(x) = x - \frac{1}{4}$

3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.

a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$

b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$

c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$

d) $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x - \frac{1}{2}) \stackrel{?}{=} 2x^3 - 4x + 8$

4. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9, \ \ q(x) = 2x + 1$

b) $w(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 7, \ \ q(x) = 3x - 1$

c) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1, \ \ q(x) = 3x + 4$

d) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2, \ \ q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Dla dowolnych wielomianów w i q, gdzie q nie jest wielomianem zerowym, możemy wykonać dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Jako iloraz otrzymujemy pewien wielomian p oraz resztę r. Reszta r albo jest wielomianem zerowym, albo zachodzi zależność: $\operatorname{st}(r) < \operatorname{st}(q)$.
Mówi o tym poniższe twierdzenie.

> Dla danych wielomianów w i q, gdzie $q \not\equiv 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:
> $$w = p \cdot q + r$$
> oraz $r \equiv 0$ lub $\operatorname{st}(r) < \operatorname{st}(q)$.

Przykład

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\
\underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x \phantom{{}-1}} \\
 -2x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{2x^2 + 2x + 6} \\
\phantom{-2x^3 - 2x^2 +{}} 4x + 5
\end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę $r(x) = 4x + 5$, czyli zachodzi następująca równość:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

Zauważmy, że reszta jest wielomianem stopnia pierwszego.

5. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4, \ \ q(x) = x^2 - 4$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2, \ \ q(x) = x^2 + x$

c) $w(x) = x^3 + 6, \ \ q(x) = x^2 + x + 1$

d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3, \ \ q(x) = x^2 - 1$

e) $w(x) = x^4 + 6x^3 - 2, \ \ q(x) = 2x^2 + 1$

*2.9. Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są wielomianami zerowymi lub gdy mają ten sam stopień, równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej oraz równe wyrazy wolne.

Ćwiczenie 1

Czy istnieje taka wartość parametru a, że wielomian $w(x) = 3ax^2 - x + 2a^2$ jest równy wielomianowi u?

a) $u(x) = 6x^2 - x + 8$ b) $u(x) = 3x^2 - x + 1$ c) $u(x) = -9x^2 - x + 18$

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru m równość:

$$(3x^3 + 8x^2 - 5x - 6) : (x + m) = 3x^2 - x - 2$$

jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

Chcemy sprawdzić, dla jakiej wartości m zachodzi równość wielomianów:

$$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = (3x^2 - x - 2)(x + m)$$

Wykonujemy mnożenie:

$$\begin{aligned}(3x^2 - x - 2)(x + m) &= 3x^3 + 3mx^2 - x^2 - mx - 2x - 2m = \\ &= 3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m\end{aligned}$$

Aby wielomiany $3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ oraz $3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$ były równe, muszą być spełnione warunki:

$3m - 1 = 8$ Współczynniki przy x^2 muszą być równe.

$-m - 2 = -5$ Współczynniki przy x muszą być równe.

$-2m = -6$ Wyrazy wolne muszą być równe.

Wszystkie trzy równości są jednocześnie prawdziwe dla $m = 3$.

Przykład 2

Wyznacz wartość parametru a tak, aby iloczyn wielomianów $f(x) = ax - 4$ i $g(x) = ax - 1$ był równy wielomianowi $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$.

Wyznaczamy iloczyn $f \cdot g$:

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 4)(ax - 1) = a^2x^2 - ax - 4ax + 4 = a^2x^2 - 5ax + 4$$

Aby wielomiany $f(x) \cdot g(x) = a^2x^2 - 5ax + 4$ oraz $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$ były równe, muszą być równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej, czyli:

$$a^2 = 9, \text{ stąd } a = -3 \text{ lub } a = 3$$

$$-5a = 15, \text{ stąd } a = -3$$

Obie równości są jednocześnie prawdziwe dla $a = -3$.

Ćwiczenie 2

Dla jakiej wartości parametru m równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x - m) = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $(x^4 - 2x^2 - 5x + 2) : (x - m) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

c) $(x^3 - 2x^2 - 23x + 60) : (x - m) = x^2 + 2x - 15$

Zadania

1. Dla jakiej wartości parametru m iloczyn wielomianów f i g jest równy wielomianowi h?

a) $f(x) = x - m, \;\; g(x) = x + 7, \;\; h(x) = x^2 + 4x - 21$

b) $f(x) = \frac{1}{2}mx - 2, \;\; g(x) = x + 2m + 1, \;\; h(x) = x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = mx + 1, \;\; g(x) = x - 2m, \;\; h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2. Dla jakiej wartości parametru a równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^3 - x^2 - x - 15 = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$

b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = (x^2 + ax - 5)(x + 4)$

c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 = (2x^2 + ax + 9)(x + 2)$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $u \cdot v - w$ jest wielomianem zerowym?

a) $u(x) = -x + 4, \;\; v(x) = 2x^2 + ax + b, \;\; w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$

b) $u(x) = 2ax + b, \;\; v(x) = x^2 - x, \;\; w(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

4. Dla jakich wartości parametrów a i b równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x - 15 = (-x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 5)$

b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$

c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 6)(x + \frac{1}{2})$

5. Przedstaw wielomian w jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

b) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

*c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 2$

*d) $w(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$

*e) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

2.10. Twierdzenie Bézouta

Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x-a$ otrzymujemy iloraz p oraz resztę r: $w(x)=p(x)(x-a)+r(x)$. Reszta w tym przypadku jest wielomianem stopnia 0 (dalej będziemy pisać krótko: reszta r).
Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wówczas możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)=\frac{1}{8}x^3+x^2-3x-5$ przez dwumian $x-4$.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x)=p(x)(x-4)+r$. Dla $x=4$:

$$w(4)=p(4)(4-4)+r=0+r=r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x-4$:

$$r=w(4)=\frac{1}{8}\cdot 4^3+4^2-3\cdot 4-5=8+16-12-5=7$$

Twierdzenie o reszcie

> Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$, to $r=w(a)$.

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x)=p(x)(x-a)+r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)=2x^3+3x^2-x+5$ przez dwumian $x+2$, nie wykonując dzielenia.

$r=w(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-(-2)+5=-16+12+2+5=3$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x)=x^3-2x^2-2x-3,\ \ q(x)=x-3$

b) $w(x)=4x^3-4x^2-x+1,\ \ q(x)=x-\frac{1}{2}$

c) $w(x)=x^5+x^4+x^3+x+1,\ \ q(x)=x+1$

d) $w(x)=x^5+x^4-x^3-x+6,\ \ q(x)=x+2$

Rozważmy przypadek, gdy reszta r z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ jest równa zeru ($r \equiv 0$), czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie Bézouta

> Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy" w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:
Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.
Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Dowód
Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, czyli $w(a) = 0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r:

$$w(x) = p(x)(x - a) + r$$

Podstawiamy $x = a$:

$$w(a) = p(a)(a - a) + r = r$$

Ale $w(a) = 0$, więc $r = 0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x - a$.

Załóżmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, czyli istnieje taki wielomian p, że $w(x) = p(x)(x - a)$. Wówczas $w(a) = p(a)(a - a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

$w(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

$u(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14 \neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q.

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1,\ \ q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 9,\ \ q(x) = x + 1$

c) $w(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 11,\ \ q(x) = x - 3$

d) $w(x) = x^4 + 8x^2 + 2x + 16,\ \ q(x) = x + 2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w, więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Aby wyznaczyć wielomian p, wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\quad -2x^2 + x + 6 \\
\quad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad -3x + 6 \\
\qquad \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.
Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3.

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki i rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$

c) $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$

d) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w, to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:
1. Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
2. Otrzymujemy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (jeżeli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w. Wyznaczamy te pierwiastki.

Zadania

1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$

b) $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14,\ \ a = 1$

b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6,\ \ a = -2$

c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20,\ \ a = -5$

3. Sprawdź, która z liczb: -1, 1 czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

d) $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$

4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q?

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3,\ \ q(x) = x + 3$

b) $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6,\ \ q(x) = x - 2$

c) $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7,\ \ q(x) = x + 1$

5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u.

a) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3,\ \ u(x) = (x - 1)(x + 3)$

b) $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1,\ \ u(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12,\ \ u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

> Jeśli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem oraz $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q.

6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez:

a) $(x - 3)(x + 2)$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 3$ wynosi 7, a przez dwumian $x + 2$ wynosi -3,

b) $x^2 - 3x + 2$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi -1, a przez dwumian $x - 2$ wynosi 3.

7. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^7 - 33x + 11,\ \ u(x) = (x + 1)(x - 2)$

b) $w(x) = x^{99} - 1,\ \ u(x) = x^2 - 1$

*c) $w(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1,\ \ u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

2.11. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Dowód

Załóżmy, że $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1}x_1^{n-1} - \ldots - a_1 x_1 = x_1(-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1}x_1^{n-2} - \ldots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1}x_1^{n-2} - \ldots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0.

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: 1, -1, 3 i -3.

$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$ — Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0$ — Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0$ — Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0$ — Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu w.

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3.

Uwaga. Wielomian w z przykładu 1. ma jeszcze jeden pierwiastek, ale nie jest on całkowity – jest nim liczba $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

b) $w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: $1, -1, 2, -2$. Obliczamy wartości wielomianu $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dla tych liczb:

$$w(1) = -6 \neq 0,\ \ w(-1) = -6 \neq 0,\ \ w(2) = 0,\ \ w(-2) = -60 \neq 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.
Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5},\ \ x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

Zatem pierwiastkami równania są liczby: $\frac{-1-\sqrt{6}}{5}$, $\frac{-1+\sqrt{6}}{5}$ i 2.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. Zacznij od znalezienia pierwiastka całkowitego.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$

d) $4x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: $1, -1, 3, -3, 9, -9$. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 9 &= x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3) \end{aligned}$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

a zatem rozwiązaniami równania są liczby: -3, $-\sqrt{3}$, 1 i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$

c) $2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

d) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$

e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0$

Poniższe twierdzenie pozwala wyznaczyć pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ oraz p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Ćwiczenie 4

Współczynniki wielomianu w są liczbami całkowitymi. Które z podanych liczb nie mogą być pierwiastkami wielomianu w?

a) $-4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4;\quad w(x) = -4x^6 + \ldots - 1$

b) $-4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4;\quad w(x) = 4x^7 + \ldots - 2$

c) $-3,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3;\quad w(x) = 2x^5 + \ldots + 3$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

b) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + x - 3 = 0$

d) $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

b) $x^3 - 7x - 6 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$

d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$

e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$

f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$

g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$

h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$

c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$

f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + x^2 + x = 1$

b) $3x^3 - x = 1 - 7x^2$

c) $-4x + 4 = 3x^3 + x^2$

d) $2x^4 + 5x^3 = 8x^2 + 5x$

4. Rozwiąż równanie.

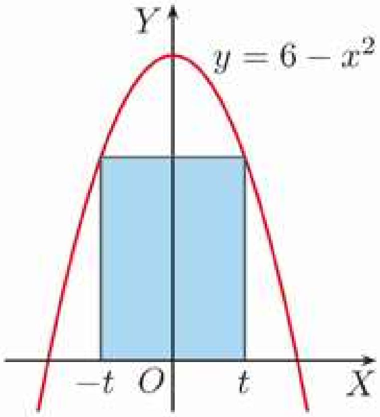
a) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

b) $\frac{x^3+x^2}{15} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = x + \frac{1}{2}$

d) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = (3x-9)(2x^2+x)$

5. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX, a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6 - x^2$ (rysunek obok).

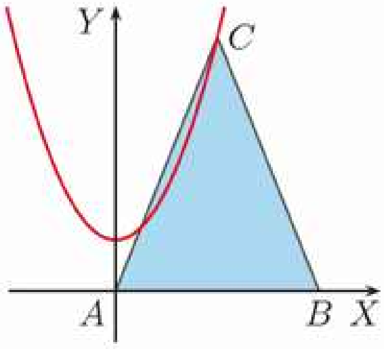


a) Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego prostokąta w zależności od t. Jaka jest dziedzina tej funkcji?

b) Dla jakiej wartości t pole tego prostokąta jest równe 8?

6. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX, a dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, jeżeli jego pole jest równe 39.

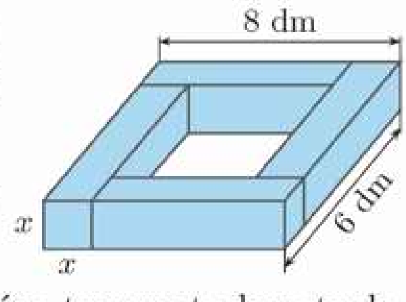
7. Na rysunku obok przedstawiono trójkąt równoramienny o podstawie AB i wierzchołkach $A(0,0)$, $B(x_0, 0)$, gdzie $x_0 > 0$, oraz wierzchołku C należącym do paraboli $y = x^2 + 1$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 10.



8. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o wierzchołkach $A(x_0, 0)$ i $B(-x_0, 0)$, gdzie $x_0 > 0$, które są końcami jednej z przyprostokątnych. Pole tego trójkąta jest równe 8, a wierzchołek C należy do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Oblicz obwód tego trójkąta.

9. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $(2x - 3)$ dm, a jego wysokość jest równa $(x - \frac{1}{2})$ dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli ma on objętość $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ dm^3.

10. Fragment drewnianej konstrukcji (rysunek obok) został wyprodukowany z belek, których przekrój jest kwadratem o boku x.



a) Wyznacz x, jeśli objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 24 dm^3.

b) Wyznacz pole powierzchni całkowitej bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jeśli wiadomo, że jej objętość jest równa 80 dm^3.

Warto wiedzieć

Równania wielomianowe. Wzór Cardano

Istnieją wzory pozwalające rozwiązywać dowolne równania wielomianowe stopnia trzeciego i czwartego. Odkryli je Włosi: Niccolò Fontana, zwany także Tartaglia [czyt. tartalja] (1499 lub 1500–1557), Girolamo Cardano [czyt. dżirolamo kardano] (1501–1576, rycina obok) i Lodovico Ferrari (1522–1565). W 1545 r. Cardano opublikował wzory pozwalające rozwiązać dowolne równanie postaci $x^3 + ax = b$.

1. Rozwiąż równanie $x^3 + x = 2$, korzystając:

a) z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych,

b) z podanego niżej **wzoru Cardano** dla równania $x^3 + ax = b$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

2. Rozwiąż równanie, korzystając ze wzoru Cardano.

a) $x^3 - 2x - 21 = 0$ b) $x^3 + 6x - 20 = 0$

***3.** Przeczytaj informację w ramce.

> Równanie postaci:
> $$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$
> można sprowadzić do postaci $y^3 + ay = b$, podstawiając $x = y - \frac{a_2}{3}$.

a) Wyznacz pierwiastek równania $x^3 - 6x^2 + 18x - 18 = 0$, korzystając z powyższej informacji i wzoru Cardano.

D b) Uzasadnij, że istnieją: pierwiastek x_1 równania $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$ oraz pierwiastek x_2 równania $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$ takie, że spełniony jest warunek $x_2 - x_1 = 2$.

Nie istnieje ogólna metoda znajdowania pierwiastków wielomianów stopnia $n \geqslant 5$. W 1803 r. ukazała się praca Włocha Paola Ruffiniego (1765–1822), w której dowodził on nieistnienia takiej metody dla wielomianów stopnia piątego. Dowód dla wielomianów stopnia $n \geqslant 5$ przedstawił w 1824 r. Norweg Niels Henrik Abel (1802–1829, rycina obok).

*2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$.

$$w(x) = x(x^2 - 8x + 16) = x(x-4)^2$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

W rozkładzie na czynniki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ czynnik $x - 4$ występuje dwa razy. Dlatego liczbę 4 nazywamy **pierwiastkiem dwukrotnym** (podwójnym) wielomianu w. Liczba 0 jest **pierwiastkiem jednokrotnym** (pojedynczym) tego wielomianu.

Definicja

Jeżeli w rozkładzie wielomianu w na czynniki występuje czynnik $(x-a)^k$ i nie występuje czynnik $(x-a)^{k+1}$, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, to liczbę a nazywamy **pierwiastkiem *k*-krotnym** wielomianu w.

Przykład 2

Podaj pierwiastki wielomianu w i określ krotność każdego z nich.

a)

$$w(x) = x^3(x+2)(x-3)^2$$

pierwiastki:	0	-2	3
krotność:	trzykrotny	jednokrotny	dwukrotny

b) $w(x) = x^2(x^2-9)(x+3)^3 =$

$$= x^2(x-3)(x+3)(x+3)^3 = x^2(x-3)(x+3)^4$$

pierwiastki:	0	3	-3
krotność:	dwukrotny	jednokrotny	czterokrotny

Ćwiczenie 1

Czy liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu w?

a) $w(x) = (x-2)(x^2-4)$

b) $w(x) = (x-2)^2(x^2-x-2)$

Ćwiczenie 2

Podaj pierwiastki wielomianu w oraz określ krotność każdego z nich.

a) $w(x) = x^4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(x-1)$

b) $w(x) = -3x(x^2+1)(x^2+2)$

c) $w(x) = (x-4)^3(x^2-16)$

d) $w(x) = 7x(x-2)(5x+3)(x^2-4)^2$

Możemy mówić również o pierwiastkach jednokrotnych lub wielokrotnych równania wielomianowego $w(x) = 0$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$. Podaj krotność każdego pierwiastka.

Pierwiastków całkowitych wielomianu $w(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ szukamy wśród dzielników jego wyrazu wolnego: $w(1) = 4 - 7 + 2 + 1 = 0$, czyli liczba 1 jest pierwiastkiem.
Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{l}
(4x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = 4x^2 - 3x - 1 \\
\underline{-4x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad\quad -3x^2 + 2x + 1 \\
\qquad\quad \underline{\ \ 3x^2 - 3x \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\ \ -x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{\ \ x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 - 3x - 1$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = \tfrac{3-5}{8} = -\tfrac{1}{4}, \quad x_2 = \tfrac{3+5}{8} = 1$$

Zatem pierwiastkami równania $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ są liczby $-\frac{1}{4}$ i 1. Równanie można zapisać w postaci $4(x-1)^2(x+\frac{1}{4}) = 0$, więc liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym, a liczba $-\frac{1}{4}$ – pierwiastkiem jednokrotnym.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$

Twierdzenie

> Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Powyższe twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia Bézouta.

Ćwiczenie 4

Poniżej podano wielomian w oraz wszystkie jego pierwiastki całkowite wraz z krotnością każdego z nich. Czy wielomian ten może mieć jeszcze inne pierwiastki?

a) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3$, pierwiastki jednokrotne: -3, 1, 2

b) $w(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, pierwiastek dwukrotny: 3

Zadania

1. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $(2x+1)(x^2+x-6)=0$

b) $(x+1)^2(2x-4)=0$

c) $(5-x)(x^2-7x+10)=0$

d) $(x^2+2x-3)(x-1)^3=0$

e) $(x^2-9)(x+3)^2=0$

f) $(x^2-x-6)(x^2+x-1)=0$

g) $(x^2-4)^2(x^4+3x^3-10x^2)=0$

h) $(x^3+x^2-12x)(x^4-5x^3+6x^2)=0$

D **2.** Uzasadnij, że równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych.

a) $x^3-5x^2-2x+24=0$

b) $3x^3+x^2-12x-4=0$

c) $2x^3+8x^2+9x+2=0$

d) $x^3+6x^2+8x+15=0$

3. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3-3x^2-4x=0$

b) $x^5-6x^4+9x^3=0$

c) $x^4-2x^2+1=0$

d) $x^4-4x^2+4=0$

e) $x^4+4x^3+5x^2=0$

f) $x^5+4x^4+4x^3=0$

g) $x^3+3x^2-4x=0$

h) $3x^4-2x^3+x^2=0$

i) $x^7-16x^3=0$

4. Liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $w(x)=3x^3-11x^2+8x+4,\ \ x_0=2$

b) $w(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x-3,\ \ x_0=-1$

c) $w(x)=-12x^3+16x^2-7x+1,\ \ x_0=\frac{1}{2}$

5. Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: -3, 2, 4 i którego stopień jest równy: a) 3, b) 4, c) 6.

6. Podaj przykład wielomianu o wyrazie wolnym $a_0=2$, który ma tylko jeden pierwiastek dwukrotny równy 3 i którego stopień jest równy:

a) 2, b) 4, c) 6.

7. Dla jakich wartości parametru a liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w?

a) $w(x)=(x+3)(x^2+ax+6),\ \ x_0=-3$

b) $w(x)=(2x^2-7x-4)(x^2-4a^2),\ \ x_0=4$

8. Czy istnieje taka wartość parametru a, dla której liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w?

a) $w(x)=6x^4+8x^3-8x^2+ax+a+10,\ \ x_0=-1$

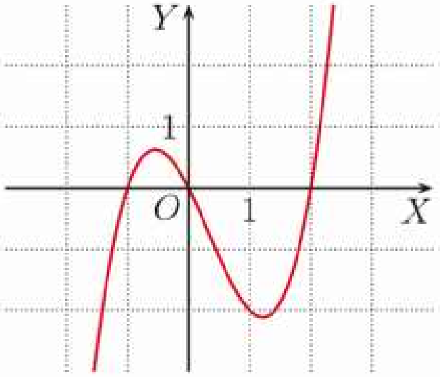
b) $w(x)=x^4-3x^3+ax^2+(a+5)x+4,\ \ x_0=2$

*2.13. Wykres wielomianu

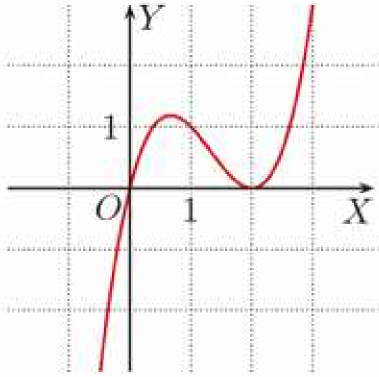
Wykresem wielomianu stopnia pierwszego, $w(x) = ax + b$, jest prosta, a wykresem wielomianu stopnia drugiego, $w(x) = ax^2 + bx + c$, jest parabola. Dokładne narysowanie wykresu wielomianu wyższego stopnia, bez korzystania z kalkulatora graficznego lub komputera, może okazać się bardzo pracochłonne. Można natomiast sprawnie naszkicować przybliżony kształt wykresu, gdy znamy pierwiastki wielomianu.

Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów trzeciego stopnia.

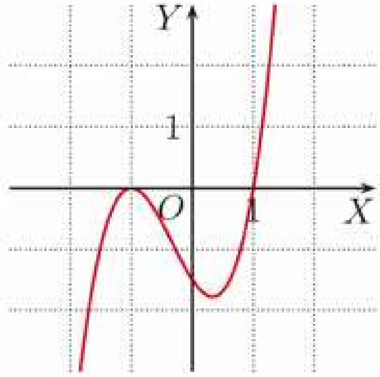
Wykresy wielomianów o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze.



$y = x(x+1)(x-2)$

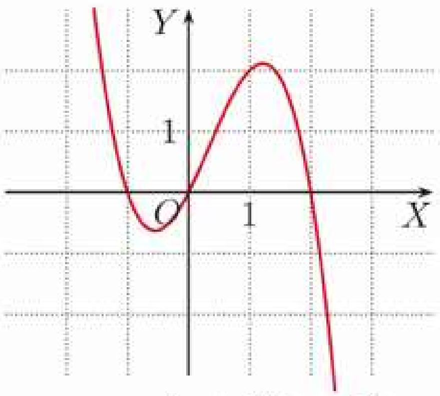


$y = x(x-2)^2$

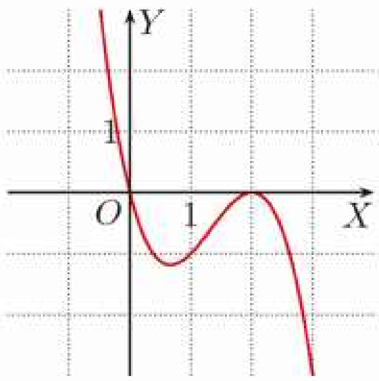


$y = \frac{3}{2}(x+1)^2(x-1)$

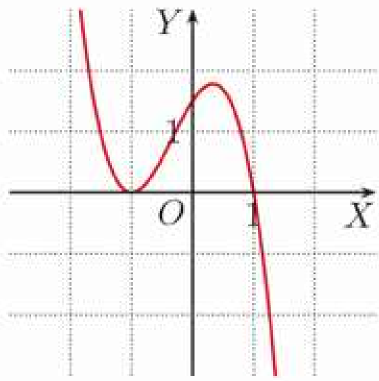
Wykresy wielomianów o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze.



$y = -x(x+1)(x-2)$



$y = -x(x-2)^2$



$y = -\frac{3}{2}(x+1)^2(x-1)$

Zauważ, że gdy wykres wielomianu przechodzi przez pierwiastek jednokrotny, wartości wielomianu zmieniają znak z dodatniego na ujemny lub odwrotnie. Mówimy wtedy, że wielomian **zmienia znak**. Natomiast w pierwiastkach dwukrotnych wielomian nie zmienia znaku.

Znak wielomianu w przedziale $(a; \infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, jest taki sam jak znak współczynnika przy najwyższej potędze. Wielomian zmienia znak tylko w pierwiastkach krotności nieparzystej.

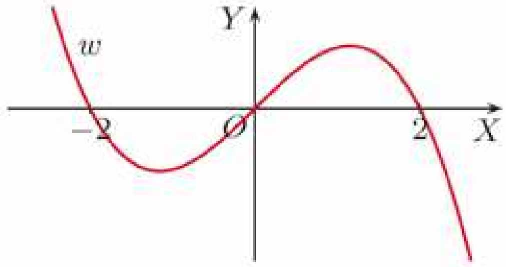
Przykład 1

Określ znak wielomianu w w przedziale $(a;\infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, i naszkicuj wykres tego wielomianu.

a) $w(x) = -x(x+2)(x-2)$

Wielomian w ma tylko pierwiastki jednokrotne: -2, 0 i 2, co oznacza, że zmienia on znak w każdym z tych pierwiastków.

Współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc wielomian w przedziale $(2;\infty)$ przyjmuje wartości ujemne.



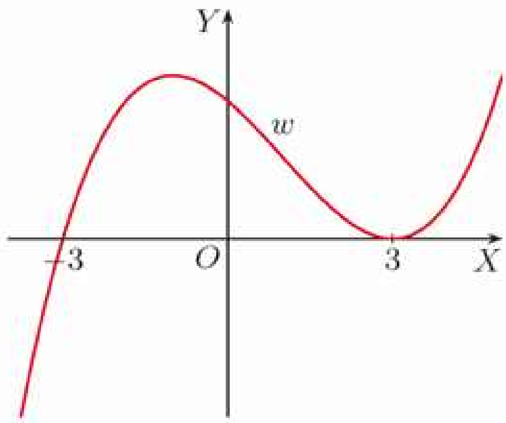
b) $w(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2(x+3)$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby:

-3 – pierwiastek jednokrotny – wielomian zmienia znak,

3 – pierwiastek dwukrotny – wielomian nie zmienia znaku.

Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian w przedziale $(3;\infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres wielomianu w.

a) $w(x) = (x-3)(x-1)(x+2)$

b) $w(x) = x(x+3)^2$

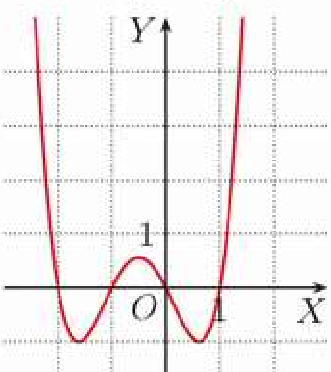
c) $w(x) = x^2(x-1)$

d) $w(x) = -x(x^2+2x+1)$

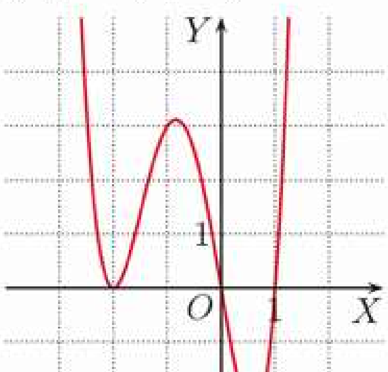
e) $w(x) = (1-x)(x^2+4x-5)$

f) $w(x) = (2-x)(x^2+6x+9)$

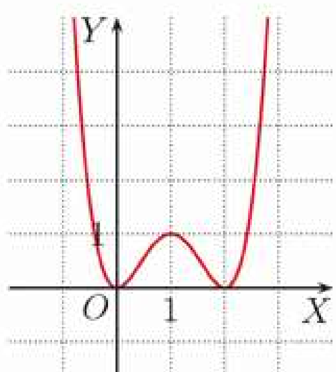
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze.



$y = x(x+2)(x+1)(x-1)$

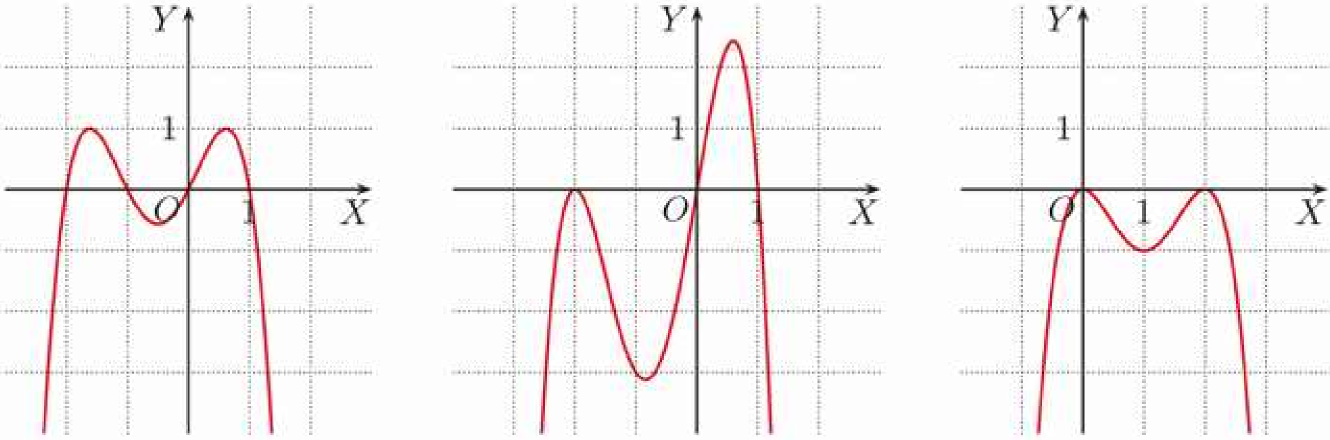


$y = \frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$



$y = x^2(x-2)^2$

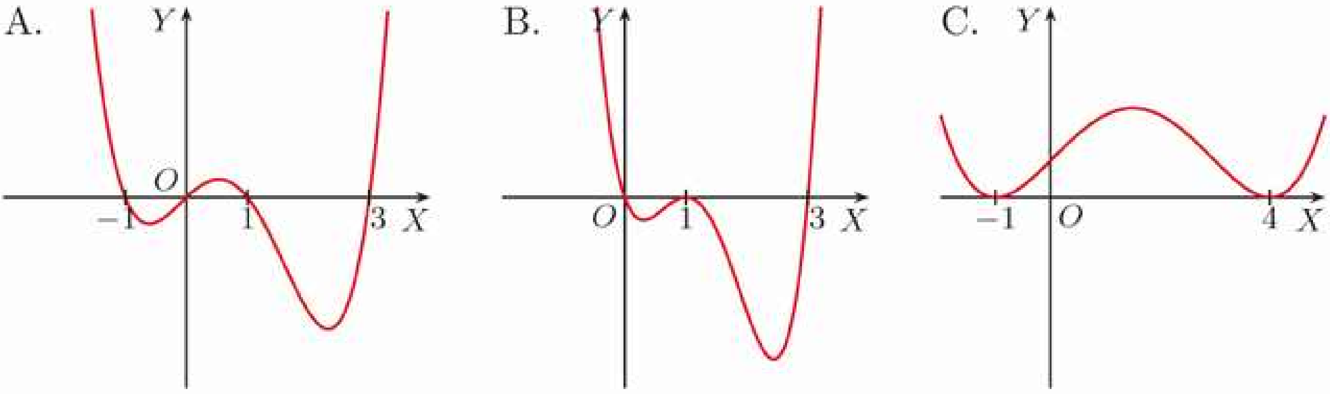
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze.



$y = -x(x+2)(x+1)(x-1)$ $\quad y = -\frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$ $\quad y = -x^2(x-2)^2$

Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono szkice wykresów wielomianów czwartego stopnia, dla których współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni ($a_4 > 0$).

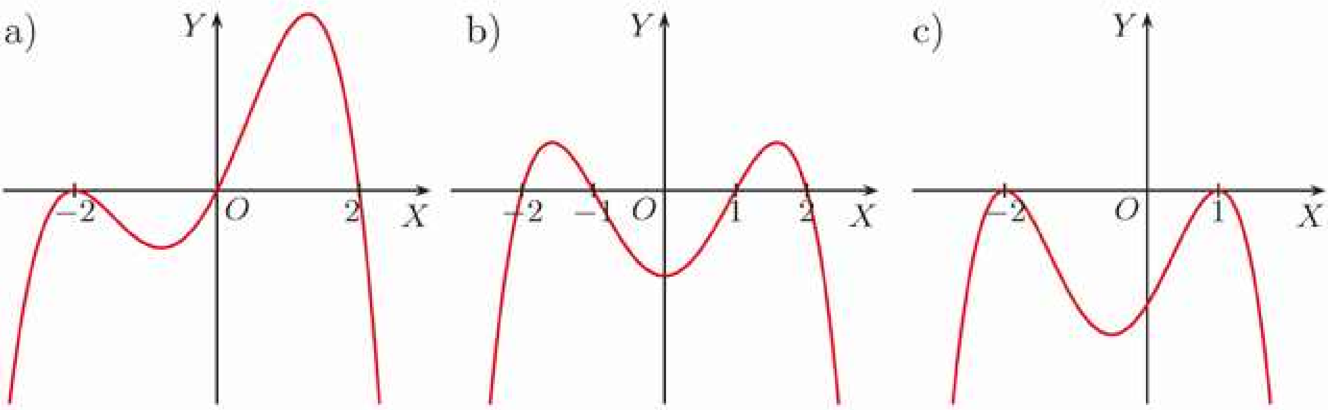


Dobierz szkic wykresu do każdego z podanych wielomianów:

$u(x) = x(x-1)^2(x-3)$, $v(x) = (x+1)^2(x-4)^2$, $w(x) = x(x+1)(x-1)(x-3)$.

Ćwiczenie 3

Podaj wzór wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = -1$, którego szkic wykresu przedstawiono poniżej.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres wielomianu w.

a) $w(x) = (x+3)(x+1)(x-2)^2$

b) $w(x) = 2x^2(x-3)^2$

c) $w(x) = -3x^2(x+4)(x-1)$

d) $w(x) = -(x+2)(x-1)(2x^2-8)$

Przykład 2

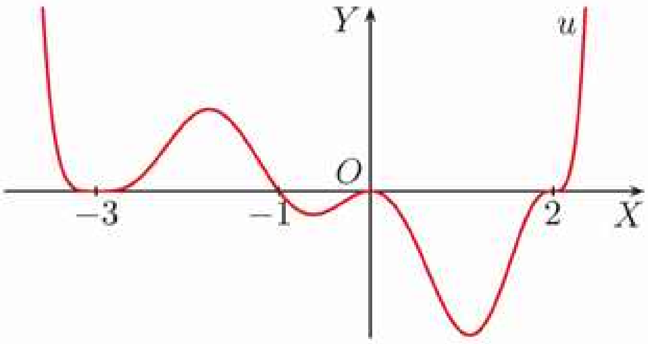
Naszkicuj wykres wielomianu $u(x) = 4x^2(x+3)^2(x+1)(x-2)^3$.

Stopień wielomianu: 8, jego pierwiastki: 0, -3, -1, 2.

Krotność pierwiastków wielomianu: -3, (dwukrotny) -1, (jednokrotny) 0, (dwukrotny) 2. (trzykrotny)

Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian u w przedziale $(2;\infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.

W pierwiastkach o parzystej krotności (czyli w -3 i 0) wielomian nie zmienia znaku.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres wielomianu w.

a) $w(x) = (x-3)(2x+1)^2(x+1)^3$

b) $w(x) = \frac{1}{4}(x-3)(x+4)^2(x^2-9)$

c) $w(x) = -3(x-5)(x+1)^2(x-2)^2$

d) $w(x) = -5(x-1)^2(x+3)^2(1-x^2)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres wielomianu w.

a) $w(x) = (x-1)(x+2)(x+4)$

b) $w(x) = -(x+3)(1+x)(2-x)$

c) $w(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(-x-2)^2$

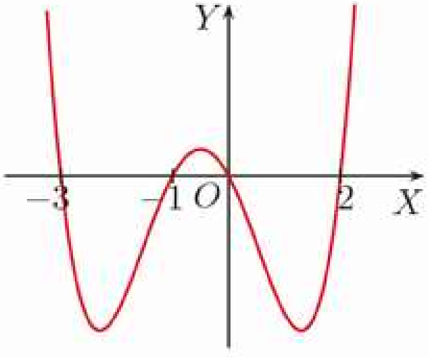
d) $w(x) = (3-x)^2(4-x^2)$

e) $w(x) = 3(x-4)(x+2)^2(x+3)$

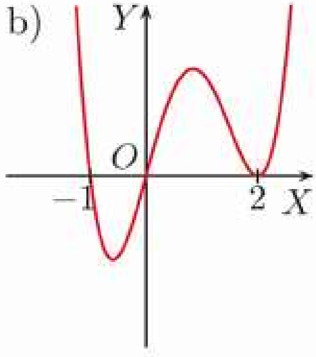
f) $w(x) = -2(x^2-2)(x^2-9)$

2. Podaj wzór wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = 1$, którego szkic wykresu przedstawiono poniżej.

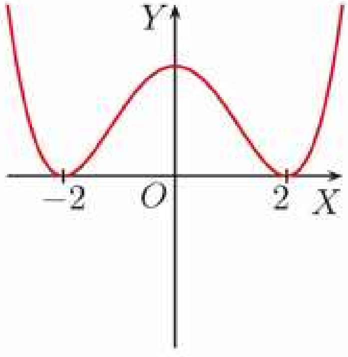
a)



b)

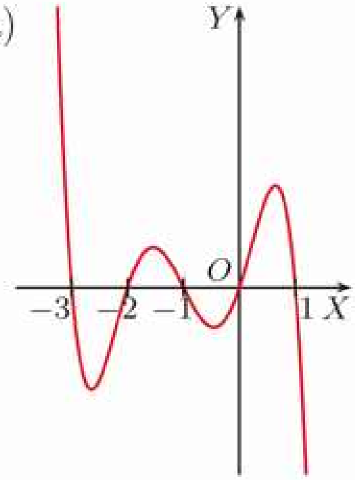


c)

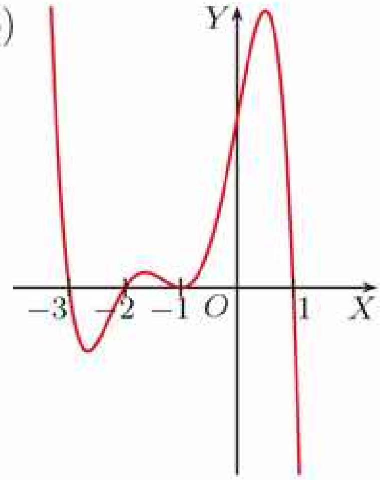


3. Podaj wzór wielomianu piątego stopnia o współczynniku $a_5 = -1$, którego szkic wykresu przedstawiono poniżej.

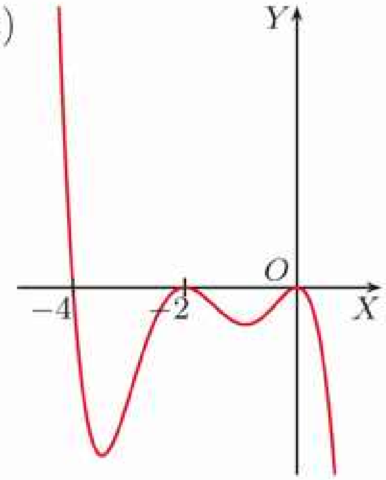
a)



b)



c)



4. Naszkicuj wykres wielomianu w. Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości ujemne?

a) $w(x) = (x-4)^2(x+3)$

b) $w(x) = (x^2-5)(x+2)$

c) $w(x) = (1-x^2)(x-3)$

d) $w(x) = 4x^2(x+1)(x-6)$

e) $w(x) = -3(x^2-4)(x-2)^2$

f) $w(x) = (x^2+6x+9)^2$

5. Naszkicuj wykres wielomianu w. Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne?

a) $w(x) = (x-2)(x-3)^3(x-4)^4$

b) $w(x) = -x^2(x+1)^2(x+2)^2$

c) $w(x) = 6x(x^2-6x)(x^2-x)$

d) $w(x) = 2x(x+2)(x^2-4)(3-x)^3$

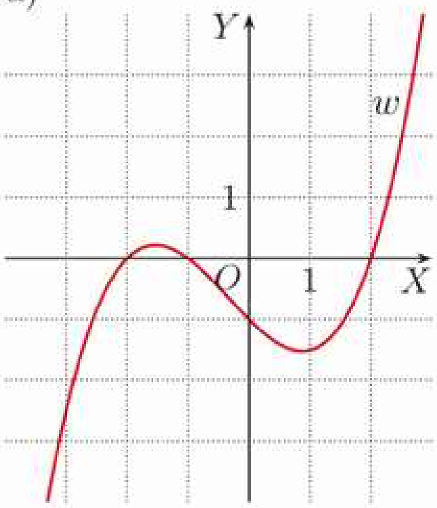
e) $w(x) = -7(x^2+3)(3-x^2)(3-x)^2$

f) $w(x) = (9x^2-1)(3x-1)^2(x-3)$

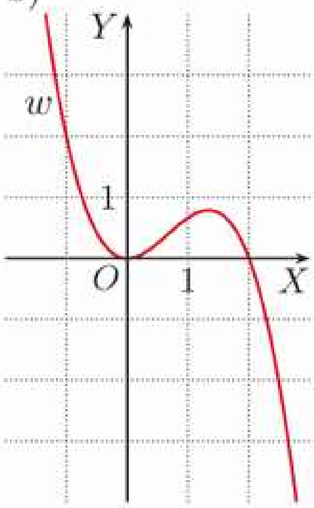
6. Dany jest wykres wielomianu w trzeciego stopnia. Naszkicuj wykres wielomianu $v(x) = w(-x)$ i zapisz jego wzór w postaci:

$$v(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

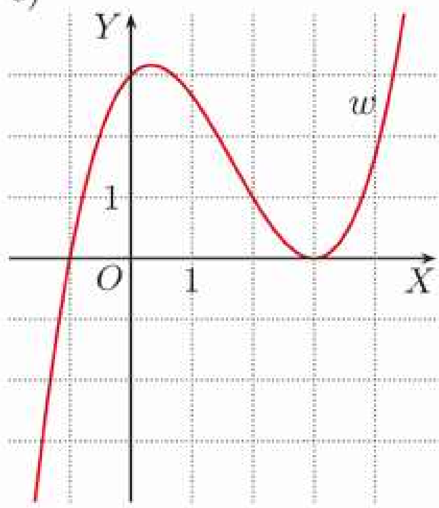
a)



b)



c)



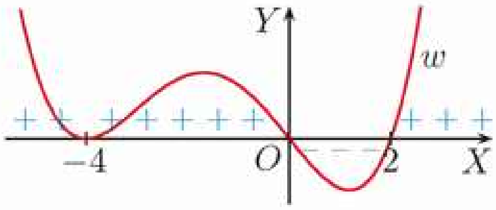
*2.14. Nierówności wielomianowe

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono szkic wykresu wielomianu:

$$w(x) = x(x+4)^2(x-2)$$

Rozwiąż nierówność $x(x+4)^2(x-2) > 0$.



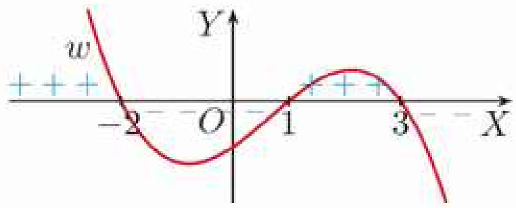
Z rysunku odczytujemy, że wielomian w przyjmuje wartości dodatnie dla:

$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (2; \infty)$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -\tfrac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3)$$



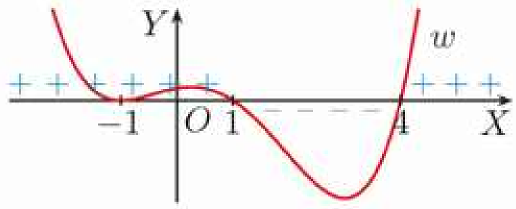
a) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) > 0$

b) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) \leqslant 0$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = (x+1)^2(x-1)(x-4)$$



a) $(x+1)^2(x-1)(x-4) > 0$

b) $(x+1)^2(x-1)(x-4) < 0$

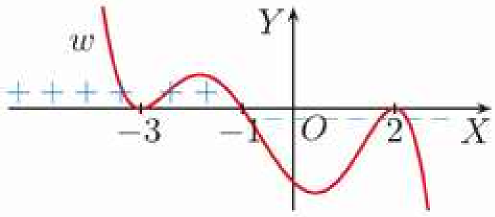
c) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \geqslant 0$

d) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \leqslant 0$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -(x+3)^2(x+1)(x-2)^2$$



a) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 > 0$

b) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \geqslant 0$

c) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 < 0$

d) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \leqslant 0$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres odpowiedniego wielomianu i rozwiąż nierówność.

a) $3(x-5)(x+2)(x+4) < 0$

b) $-2(x-5)(x+2)^2(x+4) < 0$

c) $\frac{4}{5}(x+3)^2(x-2) \geqslant 0$

d) $-\frac{1}{2}(x-5)^2(x+2)^2 \geqslant 0$

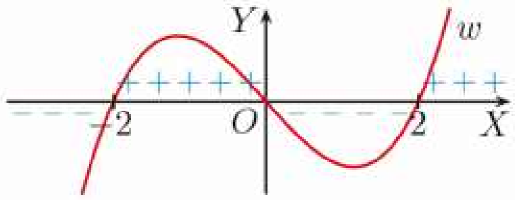
Przykład 2

Rozwiąż nierówność $x^3 - 4x > 0$.

Rozkładamy wielomian $w(x) = x^3 - 4x$ na czynniki:

$$w(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0, 2 oraz -2. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) > 0$: $x \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$.



Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^4 + x^3 + 6x^2 \leqslant 0$.

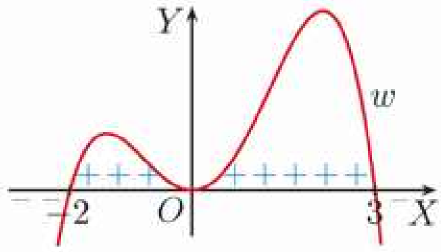
Rozkładamy wielomian $w(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2$ na czynniki:

$$\begin{aligned} w(x) &= -x^4 + x^3 + 6x^2 = \\ &= -x^2(x^2 - x - 6) = \\ &= -x^2(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

Pierwiastkami trójmianu $x^2 - x - 6$ są liczby -2 i 3.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0 (pierwiastek dwukrotny), -2, 3. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leqslant 0$:

$$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty)$$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^3 + 2x^2 - x < 0$
b) $-x^3 + x^2 + 6x \geqslant 0$
c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leqslant 0$
d) $-x^4 + 10x^3 + 11x^2 > 0$
e) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 > 0$
f) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \leqslant 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $x(x+2)(x^2 + x + 3) < 0$.

Trójmian $x^2 + x + 3$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Zatem możemy obie strony nierówności podzielić przez ten trójmian. Otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x(x+2) < 0$$

której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 0)$ – jest to zbiór rozwiązań wyjściowej nierówności.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x - 4) > 0$
b) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \leqslant 0$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \leqslant 0$.

Szukamy pierwiastków całkowitych wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 3$$

wśród dzielników jego wyrazu wolnego, czyli wśród liczb: $1, -1, 3, -3$.
$w(1) = 0$, więc 1 jest pierwiastkiem wielomianu w. Wykonujemy dzielenie:

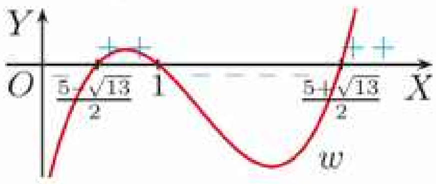
$$(x^3 - 6x^2 + 8x - 3) : (x - 1) = x^2 - 5x + 3$$

Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 3$:

$$\Delta = 25 - 12 = 13, \quad x_1 = \tfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \ x_2 = \tfrac{5+\sqrt{13}}{2}$$

Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leqslant 0$:

$$x \in \left(-\infty; \tfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right\rangle \cup \left\langle 1; \tfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\rangle$$



Ćwiczenie 7

Wyznacz pierwiastki wielomianu w, a następnie rozwiąż nierówność $w(x) \leqslant 0$.

a) $w(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$

b) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 4$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

d) $w(x) = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $9x^3 - 4x > 0$

b) $4x^3 + 3x^2 \geqslant 0$

c) $x^3 + 4x \leqslant 4x^2$

d) $x^4 < 8x$

e) $x^4 \leqslant 8x^2$

f) $x^3 > 8x^4$

g) $2x^3 + 5x^2 - 3x > 0$

h) $-x^3 + 2x^2 + 4x \leqslant 0$

i) $x^4 + 5x^3 - 2x^2 \geqslant 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} \leqslant 0$

b) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 > 0$

c) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 \leqslant 0$

d) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 6x - 2 < 0$

e) $x^4 - 5x^3 + x - 5 < 0$

f) $x^4 + 2x^3 - 6x - 12 \geqslant 0$

g) $6x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 > 0$

h) $\sqrt{3}x^5 - \sqrt{6}x^4 - \sqrt{6}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 \geqslant 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^4 - x^3 - 2x - 4 \leqslant 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 6x > -5$

c) $-x^3 + 2x^2 + 4x > 3$

d) $x^3 - 6x^2 + 12x \leqslant 8$

e) $(x^2 + 2x + 1)(3x^2 - x - 1) < 0$

f) $(x^2 + x - 2)(2x^2 - 3x + 1) > 0$

g) $3(x^4 - x^2 + 1) < 4 - x^4$

h) $x^4 - x^2 + 24 \geqslant 12(x^2 - 1)$

4. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 4x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - x^2 - 9x + 9 \leqslant 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^4 - 16x^2 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : 3x^3 - x^2 - 6x + 2 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x - x^2 > 2x^3\}$

5. Wyznacz zbiór tych argumentów x, dla których spełnione są jednocześnie nierówności $f(x) > g(x)$ i $g(x) \geqslant h(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 4x,\ \ g(x) = 4x^3 + 8x^2,\ \ h(x) = 4x^2 - x$

b) $f(x) = x^4 + x^3,\ \ g(x) = 3x - x^2,\ \ h(x) = x^3 + 2x^2 - 9$

c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x,\ \ g(x) = x^2,\ \ h(x) = 3x^3 - 3x + 1$

6. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g, a następnie odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

a) $f(x) = x^3,\ \ g(x) = x$

b) $f(x) = x^3,\ \ g(x) = x^2$

7. Dla jakiej wartości parametru m liczba a jest miejscem zerowym funkcji f? Rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant 0$ dla wyznaczonej wartości m.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + mx + 4,\ \ a = 1$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 4,\ \ a = -2$

c) $f(x) = (2 - 3m)x^3 - 2x^2 + x - 2,\ \ a = -1$

d) $f(x) = x^3 + (m^2 - 4)x^2 - 7x - 6,\ \ a = 3$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2} + \sqrt{25 - x^2}$

b) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3 - 4x}} - \sqrt{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$

d) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 - 16x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^3 - 7x^2 + 12x} + \frac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$

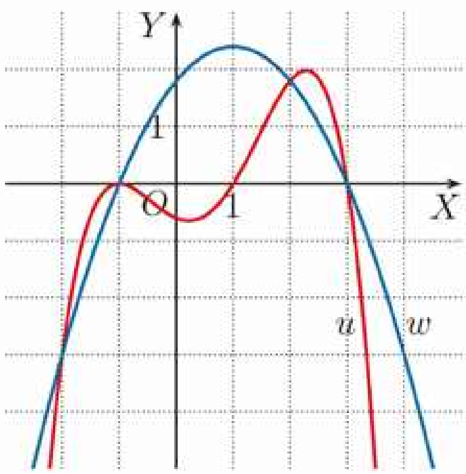
f) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{9x^4 - 12x^2 + 4}} - \frac{2x^3 - 4x}{\sqrt{-4x^4 + 17x^2 - 4}}$

9. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu u czwartego stopnia oraz wykres trójmianu kwadratowego w. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności.

a) $u(x) - w(x) < 0$

b) $u(x) \cdot w(x) > 0$

c) $u(x) \cdot w(x) \leqslant 0$



Czy wiesz, że…

Nierówności wielomianowe można również rozwiązywać, tworząc tak zwaną **siatkę znaków**. W tym celu należy doprowadzić nierówność do postaci, w której po jednej stronie znajdzie się wielomian rozłożony na czynniki, a po drugiej stronie – zero. Na przykład:

$$(x+4)(x-1)(x-3) < 0$$

Następnie należy określić znaki czynników w przedziałach wyznaczonych przez pierwiastki wielomianu.

	$x < -4$	-4	$-4 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
iloczyn	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Z ostatniego wiersza tabeli odczytujemy, że nierówność zachodzi dla:

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; 3)$$

10. Rozwiąż nierówność, korzystając z siatki znaków.

a) $x(2x+1)(x+6) < 0$

b) $(2-3x)(x^2-2) \geqslant 0$

c) $(x^2-4)(x-3)^2 > 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 \leqslant 0$

e) $x^3 + 3x^2 - 4 > 0$

f) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \leqslant 0$

g) $x^3 - 7x - 6 < 0$

h) $(x^2-4)(x^2+x-12) \geqslant 0$

11. Aby rozwiązać nierówność:

$$(x+2)(x+1)(x-3) \geqslant 0$$

uczeń sporządził siatkę znaków. Trzy znaki w tabeli wpisane są błędnie. Wskaż błędy i podaj poprawny zbiór rozwiązań nierówności.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
iloczyn	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

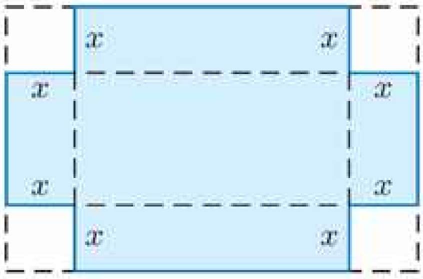
2.15. Wielomiany – zastosowania

Ćwiczenie 1

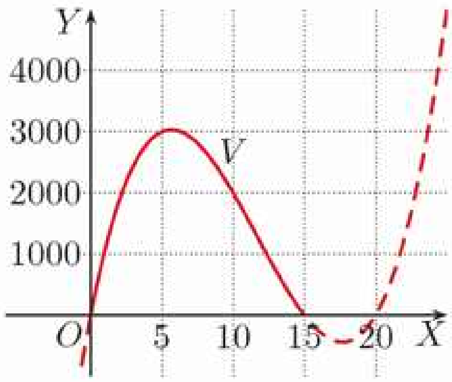
Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 5 cm, 6 cm i 8 cm. Każdą jego krawędź zwiększono o x cm. Wyznacz x, jeśli wiadomo, że objętość prostopadłościanu wzrosła o 320 cm^3.

Ćwiczenie 2

Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30 cm na 40 cm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko.



a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.



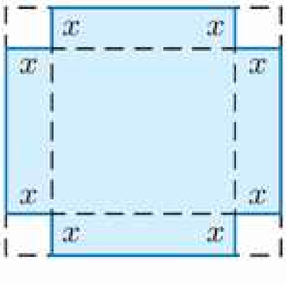
b) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V. Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.

c) Sprawdź, czy spełniona jest nierówność:

$$V(10) > V(2{,}5)$$

Ćwiczenie 3

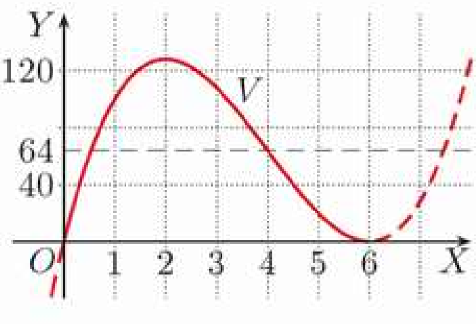
Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko.



a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	?	?	?	20



c) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V. Odczytaj z wykresu przybliżone rozwiązanie nierówności $V(x) \leqslant 64$ dla $x \in (0; 6)$.

d) Rozwiąż algebraicznie nierówność $V(x) \leqslant 64$ dla $x \in (0; 6)$.

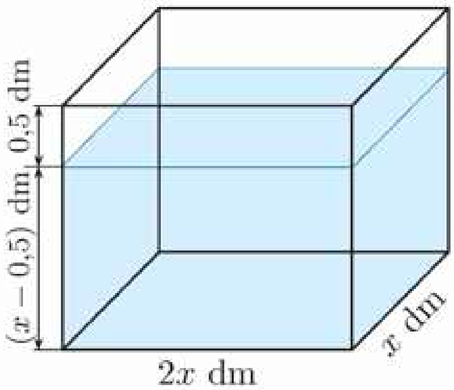
Zadania

1. W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat o boku x dm, suma długości wszystkich krawędzi jest równa 40 dm.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego prostopadłościanu. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakich wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 36 dm^3?

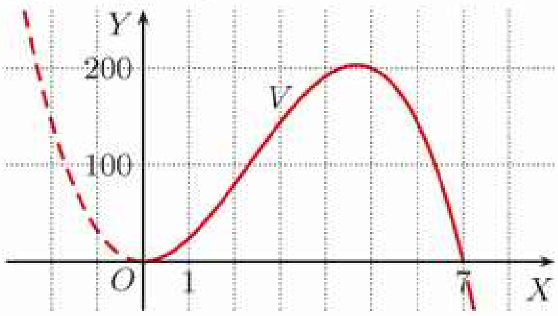
2. Do akwarium (rysunek obok) wlano wodę do wysokości $(x - 0{,}5)$ dm. Podaj wymiary akwarium (pomiń grubość szkła), jeśli wiadomo, że wlano do niego 112 l wody.



3. Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość prostopadłościennego klocka o wymiarach $2x$ cm $\times$ $2x$ cm $\times$ $(7 - x)$ cm. Określ dziedzinę tej funkcji.

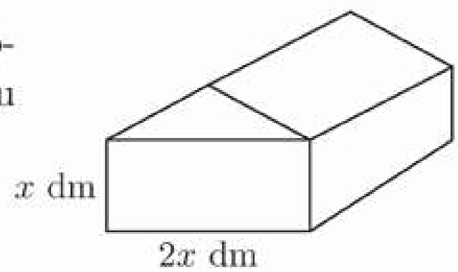
a) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$V(x)$	?	?	?	?	?



b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego klocka, jeśli wiadomo, że jego objętość jest równa 0,2 dm^3.

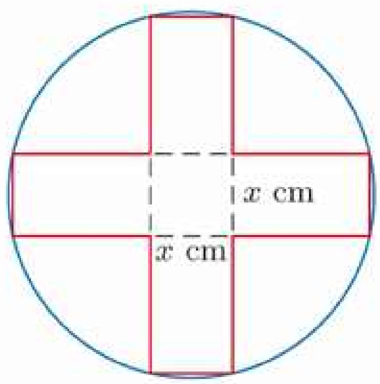
4. Podstawą domku dla lalek jest prostokąt o obwodzie 32 dm (rysunek obok). Wysokość domku w najwyższym punkcie wynosi 5 dm.



a) Wyraź objętość domku V jako funkcję zmiennej x. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakich wartości x objętość domku jest mniejsza od 240 dm^3?

5. Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku obok, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenne pudełko. Podstawa pudełka jest kwadratem o boku x cm, a wysokość pudełka jest równa $(2x-1)$ cm. Jakie wartości może przyjmować pole koła, jeśli objętość pudełka jest większa od 162 cm^3?



2.16. Zagadnienia uzupełniające

Metody przybliżone rozwiązywania równań wielomianowych

Dokładne rozwiązanie równania wielomianowego może być bardzo skomplikowane lub (w przypadku równań stopnia wyższego niż czwarty) niemożliwe. W praktyce często stosuje się metody przybliżone.

Twierdzenie

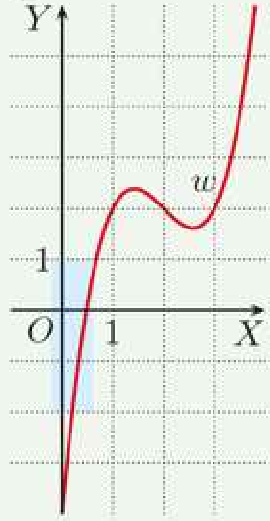
Jeśli dla wielomianu w oraz liczb $x_1 < x_2$ liczby $w(x_1)$ i $w(x_2)$ są różnych znaków, to wielomian ten ma pierwiastek $x_0 \in (x_1; x_2)$.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$$

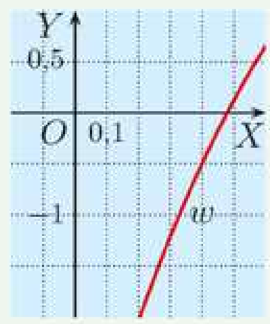
W tabeli podano wartości wielomianu w dla wybranych argumentów.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
$w(x)$	-4	$\frac{1}{8}$	2	$\frac{19}{8}$	2	$\frac{13}{8}$	2	$\frac{31}{8}$



Ponieważ $w(0) < 0$ oraz $w(\frac{1}{2}) > 0$, wielomian ten ma pierwiastek $x_0 \in (0; \frac{1}{2})$. Jako x_0 przyjmujemy środek tego przedziału i otrzymujemy $x_0 \approx \frac{1}{4}$ (z dokładnością do 0,25). Aby otrzymać wartość pierwiastka z dokładniejszym przybliżeniem, sporządzamy tabelę przybliżonych wartości wielomianu dla wybranych argumentów.

x	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$w(x)$	−1,609	−1,213	−0,842	−0,496	−0,174	0,125



Ponieważ $w(0{,}45) < 0$ oraz $w(0{,}5) > 0$, istnieje pierwiastek $x_0 \in (0{,}45; 0{,}5)$. Jako x_0 przyjmujemy środek tego przedziału i otrzymujemy $x_0 \approx 0{,}475$ (z dokładnością do 0,025).

1. Dany jest wielomian $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Oblicz wartości wielomianu w dla $x \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$, a następnie podaj jego pierwiastek z dokładnością do 0,25.

b) Oblicz wartości wielomianu w dla $x \in \{1{,}6; 1{,}7; 1{,}8\}$ i na tej podstawie podaj jego pierwiastek z dokładnością do 0,05.

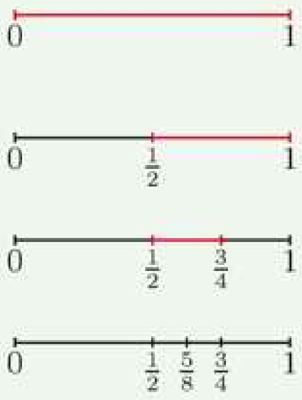
Rozpatrzmy wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

Dla $x = 0$ mamy $w(0) = 1 > 0$, a dla $x = 1$ mamy $w(1) = -1 < 0$. Oznacza to, że wielomian w ma pierwiastek $x_0 \in (0; 1)$.

Obliczamy $w(\frac{1}{2}) = 0{,}125$. Mamy $w(\frac{1}{2}) > 0$ i $w(1) < 0$, więc istnieje pierwiastek $x_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$.

Obliczamy $w(\frac{3}{4}) \approx -0{,}4531$. Mamy $w(\frac{1}{2}) > 0$ oraz $w(\frac{3}{4}) < 0$, więc istnieje pierwiastek $x_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Przyjmując jako x_0 środek przedziału $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, otrzymujemy $x_0 \approx \frac{5}{8}$ (z dokładnością do 0,125).



Powyższa metoda, zwana **metodą bisekcji** (czyli połowienia), pozwala wyznaczyć pierwiastek wielomianu z dowolną dokładnością.

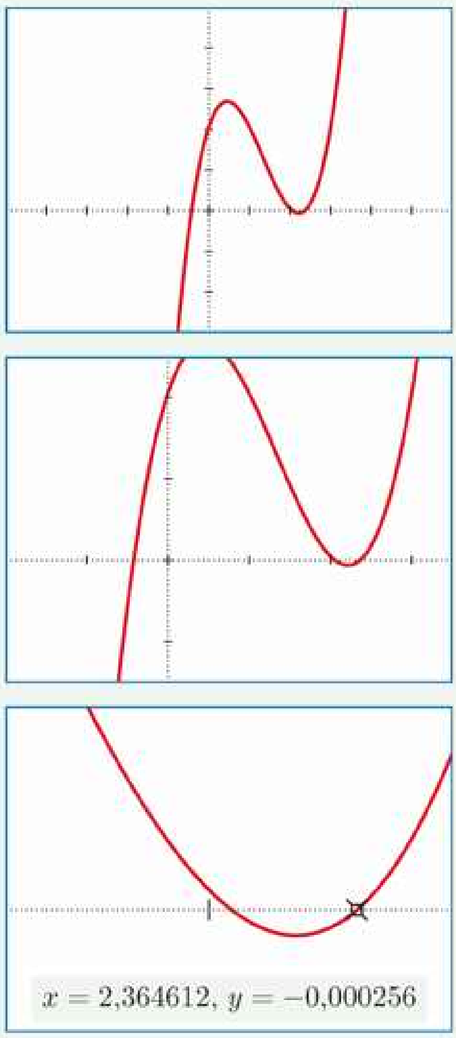
2. Dla wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ zachodzą nierówności $w(1) > 0$, $w(2) < 0$ (sprawdź). Zatem istnieje pierwiastek $x_0 \in (1; 2)$. Stosując metodę bisekcji, wyznacz x_0 z dokładnością do 0,05.

Aby wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania wielomianowego, można skorzystać z kalkulatora graficznego. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2{,}05$$

otrzymany na ekranie takiego kalkulatora. Pierwiastkiem tego wielomianu jest na pewno liczba $x_0 \in (-1; 0)$.

Aby sprawdzić, czy wielomian w ma jeszcze inne pierwiastki, można powiększyć fragment wykresu. Na rysunkach obok przedstawiono dwa kolejne powiększenia. Na ich podstawie możemy wnioskować, że wielomian w ma jeszcze dwa pierwiastki należące do przedziału $(2; 3)$. Wartość jednego z tych pierwiastków, w zaokrągleniu do trzech miejsc po przecinku, wynosi 2,365.



Schemat (algorytm) Hornera

Schemat Hornera (William Horner – angielski matematyk, żył w latach 1786–1837) pozwala na zmniejszenie liczby wykonywanych operacji mnożenia podczas obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu.

Rozpatrzmy wielomian:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= a_3 \cdot x \cdot x \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + a_1 \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Aby obliczyć wartość tego wielomianu dla danego argumentu, należy wykonać sześć działań mnożenia i trzy dodawania.
Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= (a_3x^2 + a_2x + a_1) \cdot x + a_0 = \\ &= ((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Korzystając z otrzymanej postaci wielomianu w, możemy obliczyć jego wartość dla argumentu $x = a$, wykonując trzy działania mnożenia i trzy dodawania.
Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$w(a) = ((a_3 \cdot a + a_2) \cdot a + a_1) \cdot a + a_0$$

$$b_3 = a_3$$
$$b_2 = ab_3 + a_2$$
$$b_1 = ab_2 + a_1$$
$$b_0 = ab_1 + a_0 = w(a)$$

to obliczenia możemy przedstawić w postaci schematu:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & + & + & + \\ a & & ab_3 & ab_2 & ab_1 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$

Przykład 1
Dany jest wielomian $w(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 20$. Korzystając ze schematu Hornera, oblicz $w(2)$.

$b_3 = 4$
$b_2 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$
$b_1 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$
$b_0 = 2 \cdot 13 - 20 = 6$
Zatem $w(2) = 6$.

Zapis w postaci schematu:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -5 & 7 & -20 \\ & & + & + & + \\ 2 & & 8 & 6 & 26 \\ \hline & 4 & 3 & 13 & 6 \end{array}$$

3. Oblicz wartość wielomianu w dla argumentu a. Skorzystaj ze schematu Hornera.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7, \;\; a = 3$

b) $w(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 1, \;\; a = 2$

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= b_3x^3 + (b_2 - ab_3)x^2 + (b_1 - ab_2)x + b_0 - ab_1 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)a + b_0 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - a) + b_0 \end{aligned}$$

Zatem $b_3x^2 + b_2x + b_1$ jest ilorazem, a b_0 resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

Przykład 2

Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu $w(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ przez dwumian $x - 2$. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x)(x-2) + r$.

Sporządzamy schemat:

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -7 & 3 & -3 \\ & & + & + & + \\ 2 & & 10 & 6 & 18 \\ \hline & 5 & 3 & 9 & 15 \end{array}$$

Ze schematu odczytujemy iloraz $p(x) = 5x^2 + 3x + 9$ i resztę $r = 15$. Zatem $w(x) = (5x^2 + 3x + 9)(x - 2) + 15$.

4. Wykonaj w sposób tradycyjny dzielenie $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4)$. Porównaj zapis tego dzielenia z podanym niżej zapisem dzielenia wykorzystującym schemat Hornera.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & -10 & 0 & -29 & 2 \\ 4 & & 12 & 8 & 32 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 8 & 3 & 14 \end{array}$$

Zwróć uwagę na współczynnik 0 przy x^2.

5. Wykonaj dzielenie wielomianów, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3)$

b) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 2)$

d) $(x^4 - 5x^2 - x - 2) : (x + 2)$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ oraz $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.

a) $u(x) = 2w(x) + (1 - x)p(x)$
b) $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 3x^4 - 3x^2$
b) $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$
c) $w(x) = x^6 + 7x^5 + 6x^4$
d) $w(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$
e) $w(x) = -3x^5 + 30x^3 - 75x$
f) $w(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$

3. Dany jest wielomian w, dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b.

a) $w(x) = x^3 + (a - b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$
b) $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$

4. Rozwiąż równanie.

a) $5x^2 + 2x^4 + x^3 = 0$
b) $-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
c) $x^5 - 7x^4 + 12x^3 = 0$
d) $20x^6 + x^5 = x^4$
e) $4x^5 + x^3 = 4x^4$
f) $x^4 = 2x^6 + x^5$

5. Rozłóż wielomian w na czynniki i podaj jego pierwiastki.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
b) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$
c) $w(x) = 5x^3 + x^2 - 15x - 3$
d) $w(x) = 125x^3 - 27$
e) $w(x) = 27x^4 + \frac{1}{8}x$
f) $w(x) = -14x^3 + 7x$

6. Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$?

a) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
b) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
c) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$
d) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$
e) $81x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$
f) $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$
g) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$
h) $4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru m liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w?

a) $w(x) = x^3 + (2m - 1)x^2 - 3x + 7, \quad a = 2$
b) $w(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 5, \quad a = 3$
c) $w(x) = x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x + 2, \quad a = -2$

8. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian p.

a) $w(x) = x^3 + x + 1,\ \ p(x) = x - 3$

b) $w(x) = x^4 + x^2 + 1,\ \ p(x) = x + \frac{1}{2}$

c) $w(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 6,\ \ p(x) = x - 1$

9. Dany jest wielomian w. Przedstaw go w postaci $w(x) = (x+2)p(x)+r(x)$.

a) $w(x) = x^3 + 2x + 5$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $w(x) = 4x^4 + 8x^3 - x^2 - 2x$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

10. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = 7x^4 - x^3 + 1,\ \ q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8,\ \ q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -x^5 + 3x^2 + 10x,\ \ q(x) = x - 2$

Zestaw II

1. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24,\ \ a = -2$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4,\ \ a = 4$

c) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ \ a = \frac{1}{2}$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1,\ \ a = 1$

e) $w(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12,\ \ a = 2$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$

e) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

f) $15x^3 + 8x^2 - 9x - 2 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

h) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$

d) $3x^3 - 5x^2 + 4x + 2 = 0$

4. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

a) $w(x) = (a + 1)x^3 - x + a^3,\ \ q(x) = x - 1$

b) $w(x) = x^3 - 6x - 3a,\ \ q(x) = x - a$

5. Wyznacz wartość parametru a, dla której reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + ax - 3$ przez dwumian:

a) $x - 1$ jest równa 4, b) $x + 2$ jest równa 5.

6. Dla jakiej wartości parametru a wielomiany u i w są równe?

a) $u(x) = (ax - 1)(ax + 2)$, $w(x) = 9x^2 - 3x - 2$

b) $u(x) = (x^2 - a)(ax + 1)$, $w(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$

c) $u(x) = -x^3 + (a^3 + a)x + 1$, $w(x) = ax^3 - 2x + a^2$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $(x + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$

b) $(x^2 - 1)^3(x^2 - 2x + 1) \leqslant 0$

c) $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 4x - 5) \geqslant 0$

d) $(x - 3)^2(x^2 - 6x + 8) \geqslant 0$

e) $(x^2 - 1)(7 - x)(1 - x) \leqslant 0$

f) $(6 - x)^2(x - 3)(x + 5) \leqslant 0$

8. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 + x^2 - 20x > 0$

b) $x^3 - 3x^2 + 2x < 0$

c) $-x^4 + 6x^3 - 9x^2 \leqslant 0$

d) $3x^4 + x^3 + x^2 < 0$

e) $x^3 + 4x^2 + x + 4 > 0$

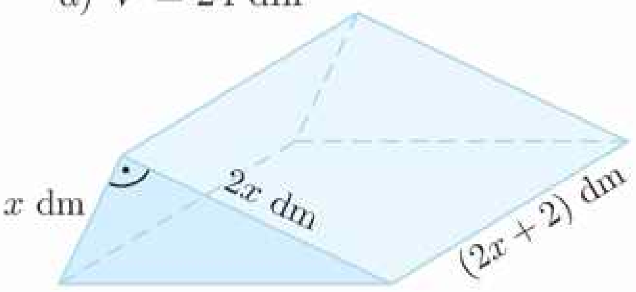
f) $-x^3 + 3x^2 + 2x - 6 \leqslant 0$

g) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 \geqslant 0$

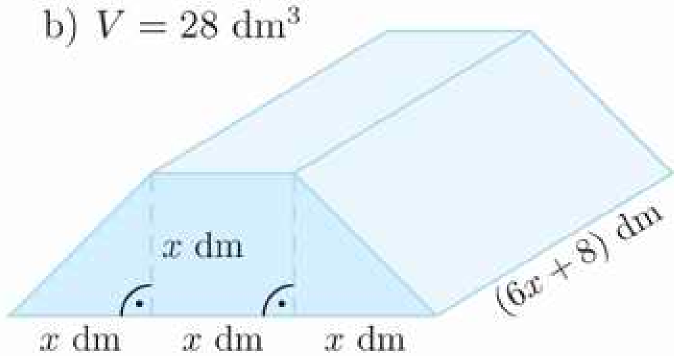
h) $-x^5 + 3x^3 - 8x^2 + 24 < 0$

9. Drewniany klocek ma kształt graniastosłupa (rysunek poniżej), którego objętość jest równa V. Oblicz długość najdłuższej krawędzi tego klocka.

a) $V = 24\ \text{dm}^3$



b) $V = 28\ \text{dm}^3$



D 10. Niech $w(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ liczba $w(n)$ jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych.

D 11. Wykaż, że jeśli wielomian trzeciego stopnia $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

to zachodzą związki:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

Są to wzory Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia.

Przykład

Dla jakich wartości parametrów a i b liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 9$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Jeśli liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu w, to reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x - 3$ jest równa 0.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + ax^2 + bx + 9) : (x - 3) = x^2 + (a + 3)x + 3a + b + 9 \\
\underline{-x^3 + 3x^2} \\
(a + 3)x^2 + bx + 9 \\
\underline{-(a + 3)x^2 + 3(a + 3)x} \\
\qquad (3a + b + 9)x + 9 \\
\qquad \underline{-(3a + b + 9)x + 3(3a + b + 9)} \\
\qquad\qquad 9a + 3b + 36
\end{array}$$

Otrzymujemy iloraz $u(x) = x^2 + (a+3)x + 3a + b + 9$ i resztę $r = 9a + 3b + 36$.

Przekształcamy równanie $9a + 3b + 36 = 0$ i otrzymujemy $b = -3a - 12$.

Zatem iloraz ma postać $u(x) = x^2 + (a + 3)x - 3$.

Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w, więc jest pierwiastkiem wielomianu u:

$$u(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + (a + 3) \cdot 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -5$$

Obliczamy b: $b = -3 \cdot (-5) - 12 = 3$.
Otrzymaliśmy zatem: $a = -5$ i $b = 3$.

II sposób

Liczba 3 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu w, więc istnieją liczby $c, d \in \mathbf{R}$ takie, że zachodzi równość:

$$w(x) = (x - 3)^2(cx + d)$$

Stąd:

$$x^3 + ax^2 + bx + 9 = (x^2 - 6x + 9)(cx + d) =$$
$$= cx^3 + (-6c + d)x^2 + (-6d + 9c)x + 9d$$

Porównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne i otrzymujemy $c = 1$ i $d = 1$.

Obliczamy a: $a = -6c + d = -6 + 1 = -5$.

Obliczamy b: $b = -6d + 9c = -6 + 9 = 3$.

Odpowiedź: $a = -5$ i $b = 3$

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Jeśli $w(x) = 2x^2 - 6$ i $u(x) = -x^3 + 4x + 2$, to $f(2) = 4$ dla:

A. $f(x) = w(x) + 2u(x)$,
B. $f(x) = 2w(x) - u(x)$,
C. $f(x) = w(x) \cdot u(x)$,
D. $f(x) = w(x) \cdot (u(x) + 2)$.

2. Która para punktów należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

A. $A_1(-1, 4)$, $A_2(1, 4)$
B. $B_1(2, 8)$, $B_2(-2, 6)$
C. $C_1\left(-\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8}\right)$, $C_2\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8}\right)$
D. $D_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$, $D_2\left(\frac{3}{2}, 7\frac{1}{8}\right)$

3. Dany jest wielomian $w(x) = (2-x)^3 \cdot \left(\sqrt{2}x - 1\right)^3$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy:

A. $-8\sqrt{2}$, **B.** $-2\sqrt{2}$, **C.** $2\sqrt{2}$, **D.** $8\sqrt{2}$.

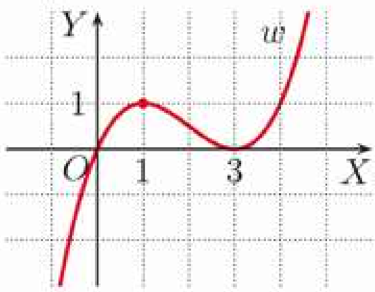
4. Pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - \left(4 + 2\sqrt{3}\right)x$ jest liczba:

A. $-\sqrt{3}$, **B.** $\sqrt{3}$, **C.** $1 - \sqrt{3}$, **D.** $1 + \sqrt{3}$.

5. Liczby -3, 1 są jedynymi pierwiastkami równania:

A. $x^3 + 2x^2 = 3x$,
B. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,
C. $(x-1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$,
D. $(x^2 - 1)(x + 3)^2 = 0$.

6. Na rysunku przedstawiono wykres wielomianu w trzeciego stopnia. Największa wartość tego wielomianu w przedziale $\langle -1; 6 \rangle$ wynosi:



A. 13,5,
B. 13,
C. 12,5,
D. 12.

7. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4 < 0$?

A. 0 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 10

8. Zbiór rozwiązań nierówności $(x^2 - 4)(4 - x)^2 \leqslant 0$ jest równy:

A. $\langle -2; 2 \rangle$,
B. $\langle -2; 4 \rangle$,
C. $\langle -2; 2 \rangle \cup \{4\}$,
D. $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$.

9. Liczby: x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $2x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Wynika stąd, że suma $x_1 + x_2 + x_3$ jest równa:

A. $2b$,
B. $-\frac{b}{2}$,
C. $2(b + c + d)$,
D. $-\frac{1}{2}(b + c + d)$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Oblicz wartość wielomianu $w(x) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$ dla $x = \sqrt[3]{9}$.

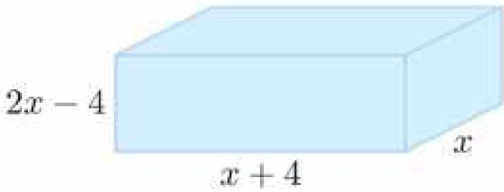
Zadanie 2 (2 pkt)
Objętość sześcianu jest równa $a\sqrt{6}+b\sqrt{3}$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{Z}$. Wyznacz a i b, jeśli długość krawędzi tego sześcianu jest równa $\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + 8x + 8 = 0$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Które z liczb całkowitych o wartości bezwzględnej mniejszej od 4 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$?

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)
Podaj wzór wielomianu opisującego objętość pudełka w zależności od x (rysunek obok). Jaka jest dziedzina tej funkcji? Dla jakiej wartości x objętość pudełka jest równa 32?

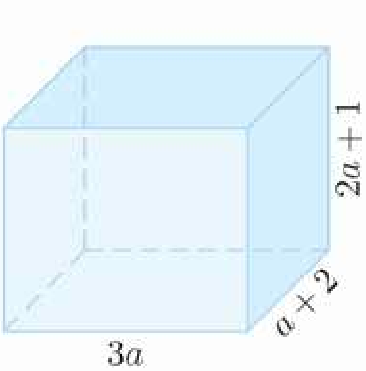


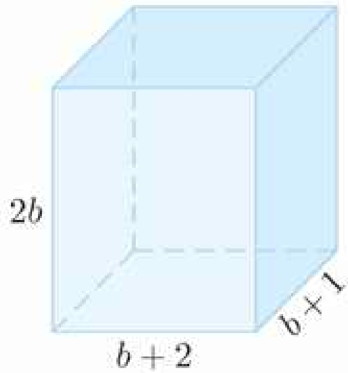
D **Zadanie 6 (3 pkt)**
Uzasadnij, że trójmian kwadratowy, który otrzymamy w wyniku podzielenia wielomianu $w(x) = 3x^3 - 3x^2 - 16x - 6$ przez dwumian $x - 3$, nie ma pierwiastków wymiernych.

Zadanie 7 (3 pkt)
Wyznacz wszystkie całkowite rozwiązania równania $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$.

Zadanie 8 (3 pkt)
Wyznacz punkty wspólne wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x$ i $g(x) = x$.

D **Zadanie 9 (5 pkt)**
Każdy z przedstawionych obok prostopadłościanów ma objętość równą 120. Uzasadnij, że prostopadłościany te mają równe pola powierzchni całkowitych.





W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Liczba S jest sumą wartości bezwzględnych miejsc zerowych wielomianu $w(x) = 4x^3 - 4\sqrt{2}x^2 - 3x + 3\sqrt{2}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku tej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz kwadrat sumy wszystkich liczb całkowitych spełniających nierówność:

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 8x + 12) \leqslant 0$$

Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 3 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby, która jest najmniejszym pierwiastkiem równania $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$.

Zadanie 4 (3 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^4 + 4x^3 - 4x - 1 \leqslant 0$.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru k wielomian $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + k^2x - 4k + 8$ jest podzielny przez dwumian $x - k$?

Zadanie 6 (3 pkt)

Wyznacz wartości parametrów m i n, dla których liczba -2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 8$.

D **Zadanie 7 (3 pkt)**

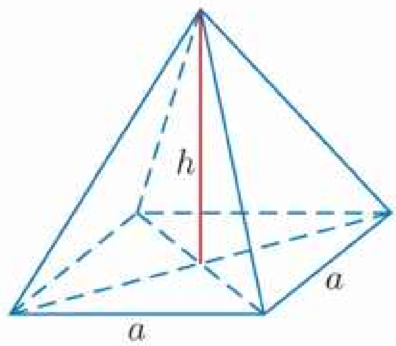
W pewnym wielomianie suma współczynników przy potęgach parzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach nieparzystych. Wykaż, że liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Zadanie 8 (4 pkt)

Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h, gdzie:

$$a = x + 3 \quad \text{i} \quad h = 3(x^2 - 6x + 9)$$

Podaj dziedzinę funkcji V. Dla jakich wartości x zachodzi nierówność $V(x) \leqslant 256$?

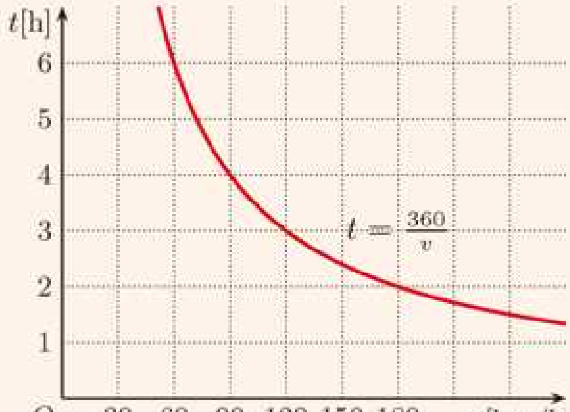


Zadanie 9 (5 pkt)

Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest ośmiokąt foremny o boku x dm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa $(x + 2)$ dm, a jego objętość jest równa $6(1 + \sqrt{2})$ dm^3. Wyznacz x.

3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym mniejszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

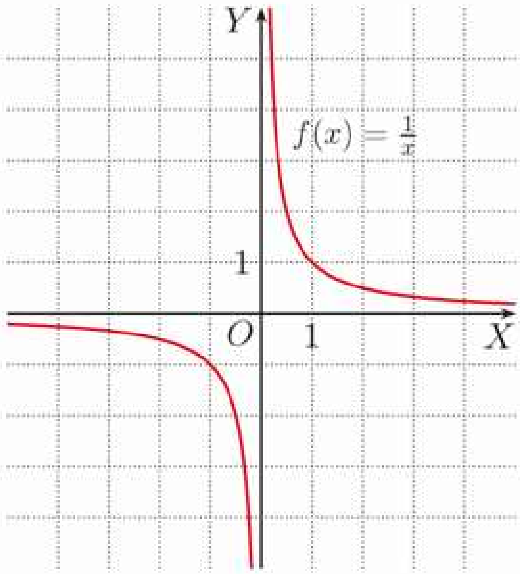
Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f, a następnie szkicujemy jej wykres.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie o pewien wektor nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:
- Dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

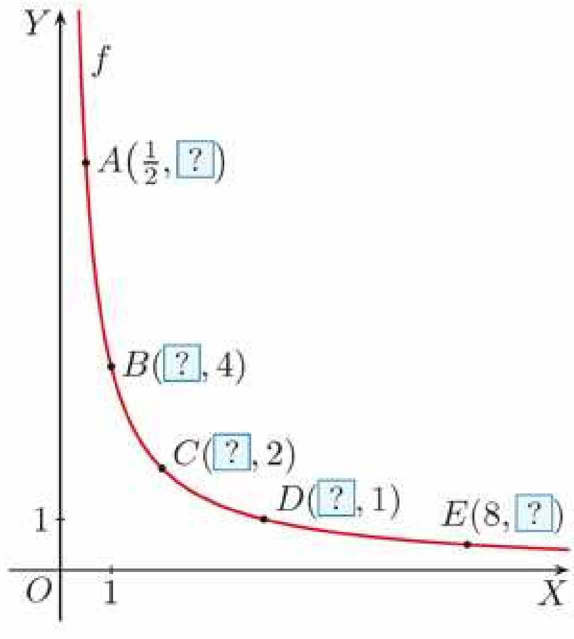
Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliża się” do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

a) Podaj brakujące współrzędne punktów: A, B, C, D i E.

b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.



Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$

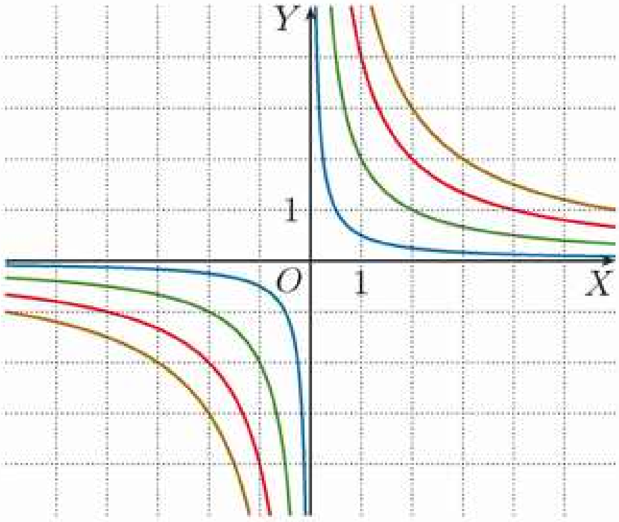
Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$ oraz $k(x) = \frac{6}{x}$.

a) Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla $x = -2$.

b) Dobierz wzór do każdego wykresu.

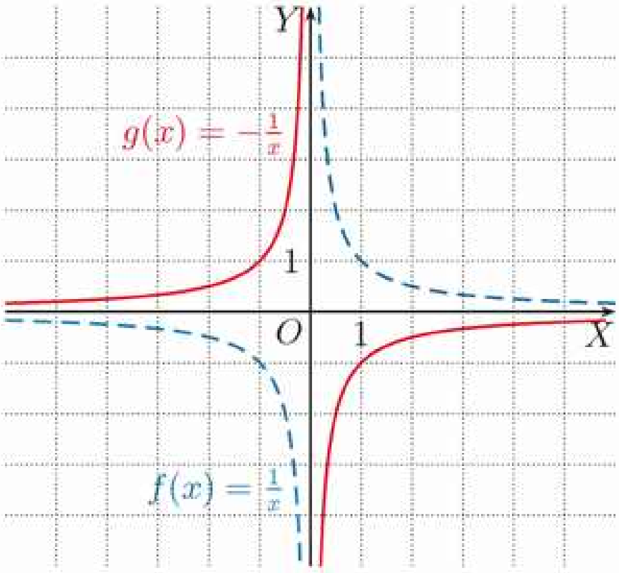
c) Do których hiperbol należą punkty: $A(2, 3)$, $B\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, $C\left(4, \frac{1}{8}\right)$, $D\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(-\frac{2}{3}, -6\right)$?



Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, można wykorzystać odpowiednią tabelę wartości funkcji lub odbić symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- Dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne.
- Funkcja g nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie.
- Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g.



Ćwiczenie 4

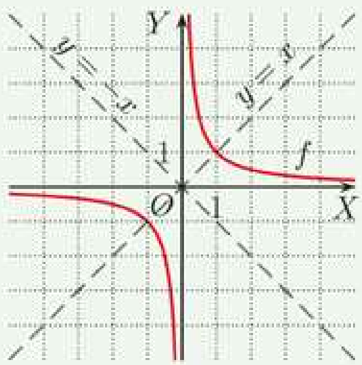
Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $f(x) = -\frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{0,5}{x}$

Czy wiesz, że…

- Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ ma dwie **osie symetrii** – są to proste $y = x$ oraz $y = -x$.
- Punkt $O(0, 0)$ jest **środkiem symetrii** wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ogólnie, proste $y = x$ i $y = -x$ są osiami symetrii, a punkt $O(0, 0)$ jest środkiem symetrii dowolnej hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$.



Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle 1; 2\rangle$.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$ d) $f(x) = -\frac{5}{x}$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

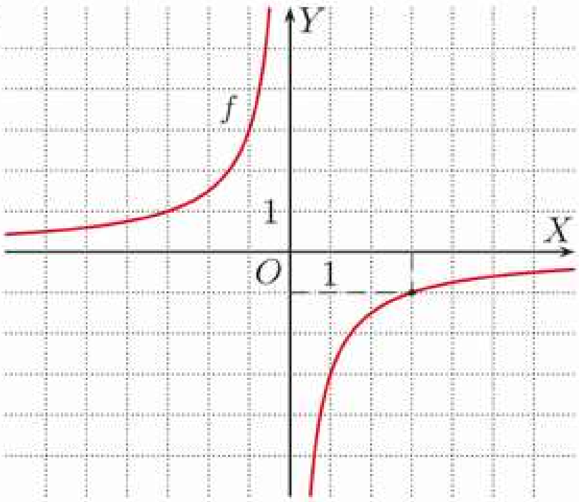
a) $D = \langle 2; 8\rangle$ b) $D = (-2; 0) \cup (0; 2)$ c) $D = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

3. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $x = -2\sqrt{2}$.

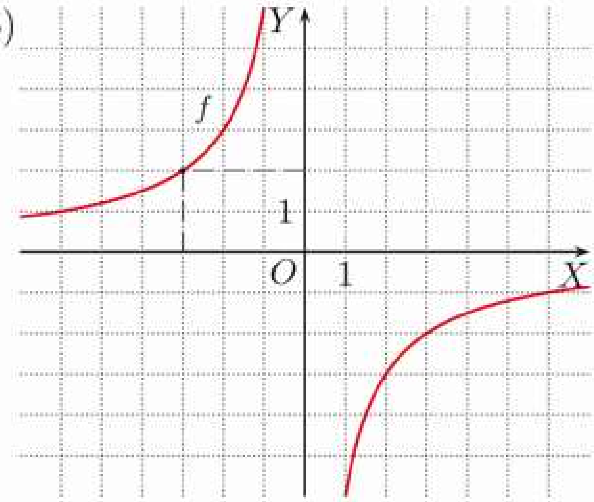
a) $P(-1, 8)$ b) $P\left(\frac{1}{2}, -32\right)$ c) $P\left(-4, 3\frac{1}{2}\right)$ d) $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a. Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y = -3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3.

a)



b)



5. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj wartość największą i wartość najmniejszą, jakie przyjmuje ona dla argumentów ze zbioru $\langle -4; -1\rangle \cup \langle 2; 6\rangle$.

a) $P\left(2\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} - 1\right)$ b) $P\left(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right)$ c) $P\left(\sqrt{6} - \sqrt{24}, \sqrt{6}\right)$

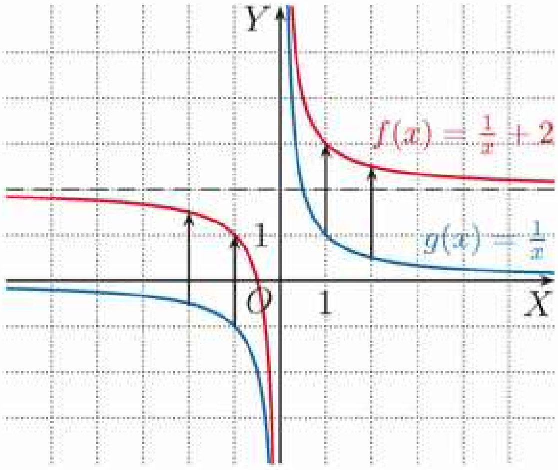
6. Oblicz odległość między punktami przecięcia prostej $y = 2x$ z hiperbolą $y = \frac{2}{x}$.

7. Oblicz a, jeśli wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przecina prostą $y = x$ w punktach P_1 i P_2, a odcinek P_1P_2 ma długość: a) $4\sqrt{2}$, b) 8.

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$.



Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.
Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową.

Ćwiczenie 1

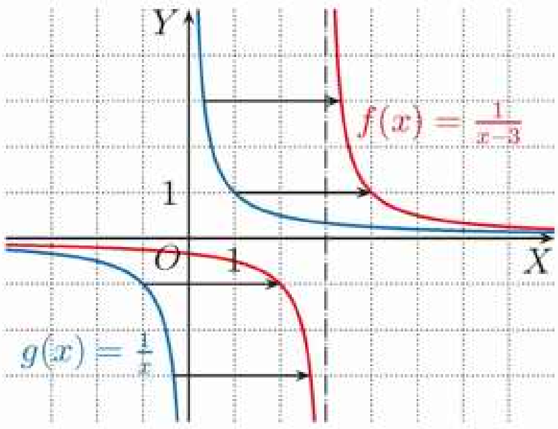
Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ c) $f(x) = \frac{4}{x} - 3$ e) $f(x) = -\frac{3}{x} + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2x} - 4$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.



Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.
Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f, a prosta $y = 0$ – asymptotą poziomą.

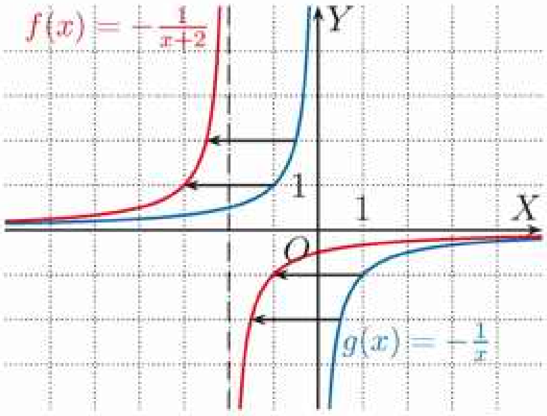
> Wykres funkcji $y = f(x - a)$, gdzie $a > 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w prawo, czyli o wektor $[a, 0]$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 3



Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.

> Wykres funkcji $y = f(x+a)$, gdzie $a > 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w lewo, czyli o wektor $[-a, 0]$.

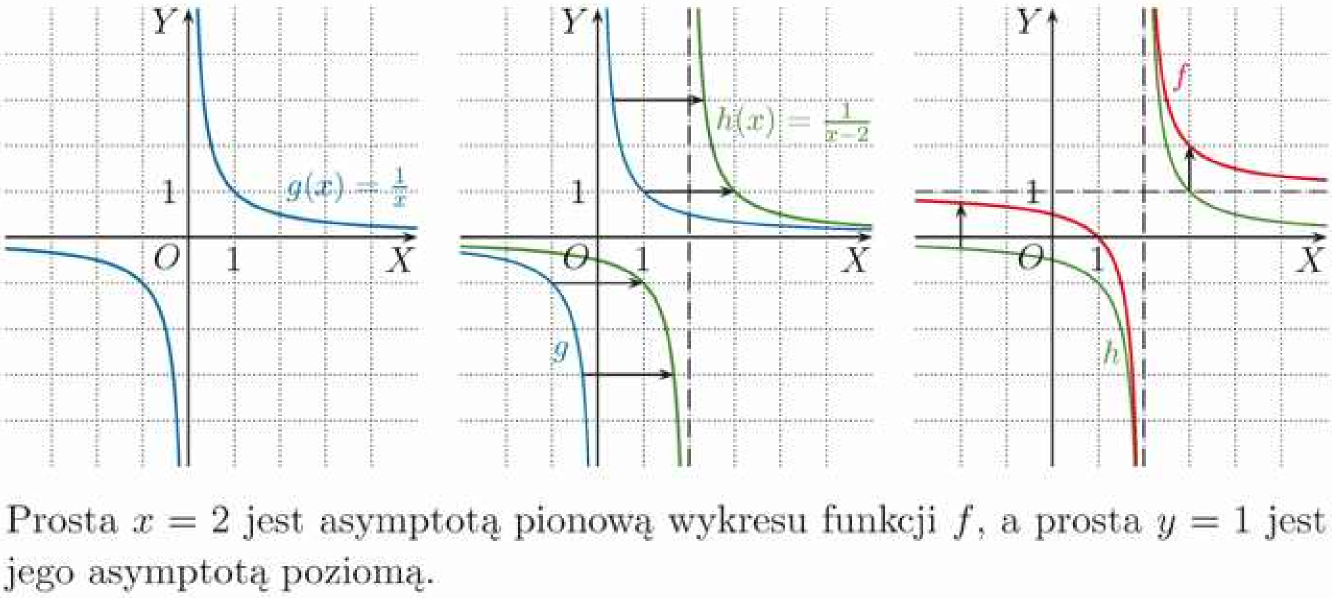
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu. Wyznacz punkt przecięcia wykresu z osią OY.

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4}$ d) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$

Przykład 4

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[2, 0]$, a następnie o wektor $[0, 1]$ (lub w odwrotnej kolejności). Można też od razu przesunąć wykres funkcji g o wektor $[2, 1]$.



Prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f, a prosta $y = 1$ jest jego asymptotą poziomą.

> Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ b) $f(x) = -\frac{1}{x-1} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$

Ćwiczenie 5

Podaj wektor, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x-4} - 6$

b) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $g(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = -3 + \frac{1}{2x-4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{3x}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{9-3x}$

Ćwiczenie 6

O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać hiperbolę, której asymptotami są podane proste?

a) $f(x) = \frac{4}{x} + 2$, $x = 3$, $y = -6$ b) $f(x) = -\frac{2}{x+3} - \frac{5}{3}$, $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 7

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj wzór i równania asymptot otrzymanej hiperboli.

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj wzór funkcji g, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot, jeśli wiadomo, że wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w dół,

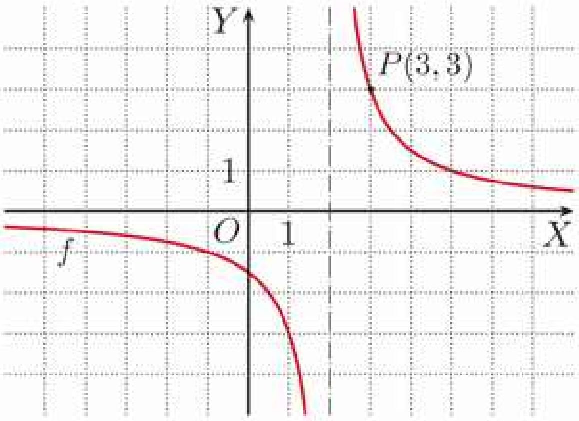
b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo,

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę,

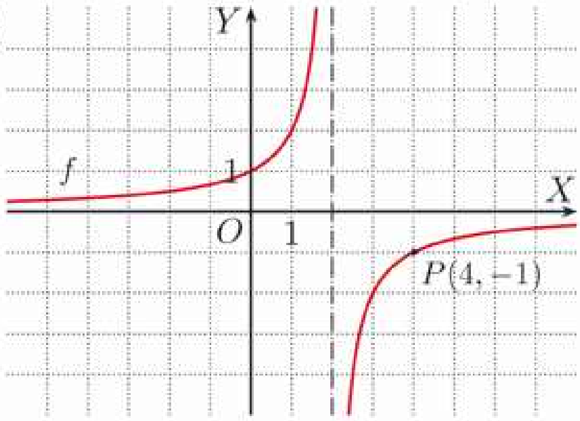
d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$ dla pewnego a. Wyznacz wzór funkcji f. Oblicz $f\left(1\frac{3}{4}\right)$ i $f(-4)$.

a)



b)



3. Przesuń wykres funkcji f o wektor $\overrightarrow{u}$. Podaj wzór otrzymanej funkcji, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\overrightarrow{u} = [1, 4]$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\overrightarrow{u} = [-2, -1]$

c) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\overrightarrow{u} = [-1, 3]$

d) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $\overrightarrow{u} = [2, -4]$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

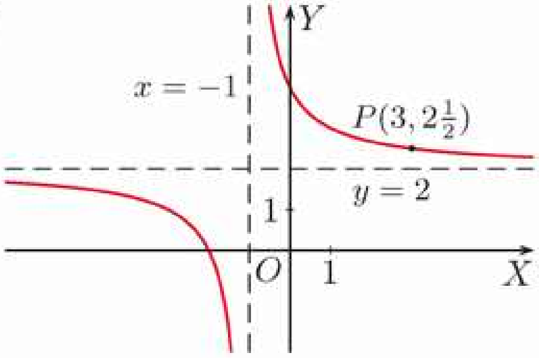
b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$

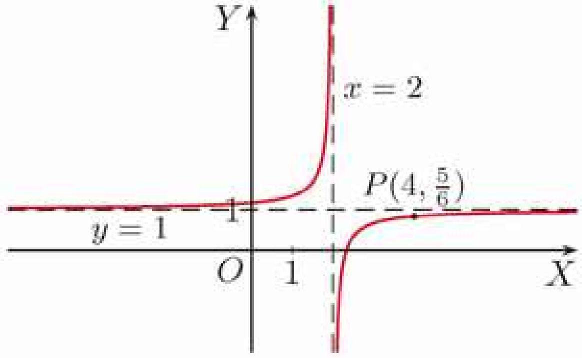
d) $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$

5. Wyznacz równanie przedstawionej hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku.

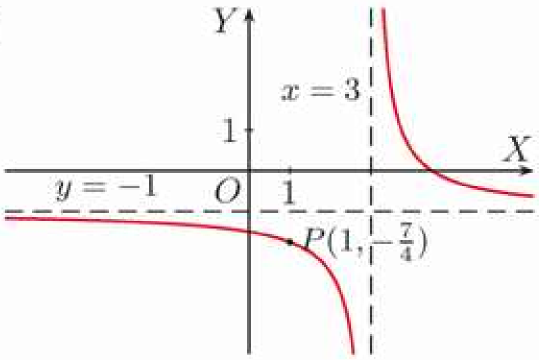
a)



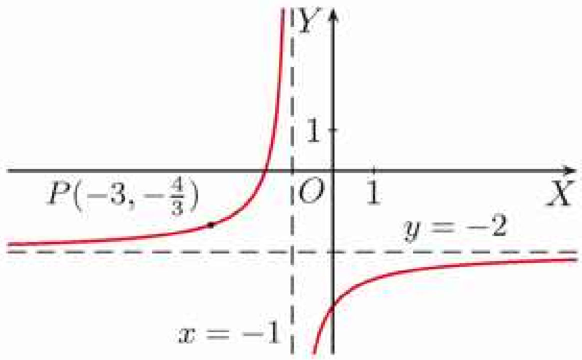
c)



b)



d)



6. Wykres funkcji g, do którego należy punkt P, otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $\overrightarrow{u}$. Wyznacz wzór funkcji g.

a) $\overrightarrow{u} = [2, -9]$, $P(6, -8)$

b) $\overrightarrow{u} = \left[\frac{1}{2}, 5\right]$, $P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

c) $\overrightarrow{u} = \left[3, -\frac{3}{4}\right]$, $P(-2, -1)$

d) $\overrightarrow{u} = [-\sqrt{2}, -6]$, $P(1, -3\sqrt{2})$

7. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii hiperboli o równaniu:

a) $y = \frac{3}{x} - 6$, b) $y = \frac{2}{x-4} + 1$, c) $y = \frac{5}{x+1} + 3$, d) $y = -\frac{1}{x-7} + 8$.

8. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii otrzymanej hiperboli.

*3.3. Funkcja homograficzna

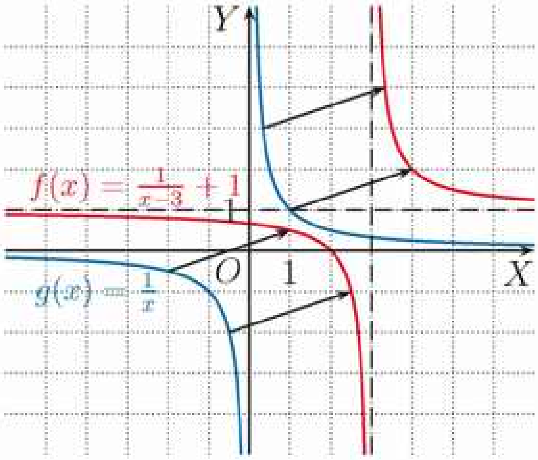
Funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Podaną w definicji postać wzoru funkcji homograficznej nazywamy **postacią ogólną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest **hiperbola** – możemy ją otrzymać przez przesunięcie o wektor hiperboli $y = \frac{r}{x}$, gdzie r jest pewną stałą.

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.



Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.
Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[3, 1]$.

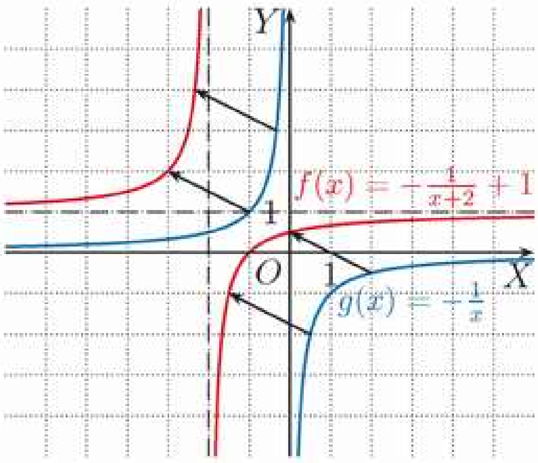
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{-x+1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.



Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$ o wektor $[-2, 1]$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

Postać $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

Przykład 3

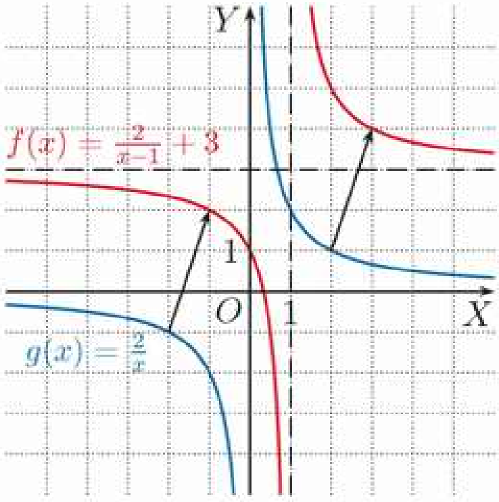
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$ o wektor $[1, 3]$.



Ćwiczenie 3

Wstaw w miejsce $\boxed{?}$ odpowiednią liczbę. Zapisz wyrażenie w postaci kanonicznej.

a) $\frac{3x+4}{x+1} = \frac{3(x+1)+\boxed{?}}{x+1}$ b) $\frac{-2x+5}{x-3} = \frac{-2(x-3)+\boxed{?}}{x-3}$ c) $\frac{4x}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+\boxed{?}}{2x-1}$

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $r \neq 0$, są proste $x = p$ i $y = q$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj równania asymptot.

a) $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+4}$

D

Przykład 4

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej: $f(x) = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1$.

Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$ oraz:

$$x_1 < x_2$$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$, takich że $x_1 < x_2$, zachodzi nierówność $f(x_1) < f(x_2)$, czyli $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Badamy znak różnicy:

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{-4}{x_2+3} + 1\right) - \left(\frac{-4}{x_1+3} + 1\right) = \frac{-4}{x_2+3} + \frac{4}{x_1+3} =$$

$$= \frac{-4(x_1+3)+4(x_2+3)}{(x_1+3)(x_2+3)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0$$

gdyż $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 + 3 < 0$, $x_2 + 3 < 0$.

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

D **Ćwiczenie 5**

Wykaż, że funkcja f jest monotoniczna w przedziale D.

a) $f(x)=\frac{x-5}{x+2},\ \ D=(-2;\infty)$

b) $f(x)=\frac{x+3}{x-4},\ \ D=(-\infty;4)$

c) $f(x)=\frac{2x+5}{x+1},\ \ D=(-\infty;-1)$

d) $f(x)=\frac{-3x-7}{x-5},\ \ D=(-\infty;5)$

Zadania

1. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{2x+8}{x+3}$

b) $f(x)=\frac{-3x+10}{x-3}$

c) $f(x)=\frac{4x+6}{x+2}$

d) $f(x)=\frac{-2x+3}{x-4}$

e) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}x+2}{x+3}$

f) $f(x)=\frac{4x}{2x+1}$

2. Naszkicuj wykres funkcji f, podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x)=\frac{x-3}{x-4}$

b) $f(x)=\frac{2x-3}{x-1}$

c) $f(x)=\frac{-4x-11}{x+2}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

a) $f(x)=\frac{x-4}{x-5}$

b) $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$

c) $f(x)=-\frac{2x}{x+1}$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x)=\frac{3x-11}{x-4}$

b) $f(x)=\frac{-4x-5}{x+1}$

c) $f(x)=\frac{-2x-5}{x+2}$

d) $f(x)=\frac{-4x+6}{x-2}$

e) $f(x)=\frac{-3x+8}{-x+2}$

f) $f(x)=\frac{-8x+6}{2x-1}$

5. Dla jakiej wartości parametru m punkt P należy do wykresu funkcji f? Wyznacz równania asymptot wykresu tej funkcji.

a) $f(x)=\frac{4x+m}{-3x-1},\ \ P(-3,2)$

b) $f(x)=\frac{mx-3}{2x+4},\ \ P(-4,1)$

6. Podaj przykład takiej funkcji homograficznej f, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}\setminus\{p\}$, a zbiorem wartości – zbiór $\mathbf{R}\setminus\{q\}$.

a) $p=0,\ q=1$

b) $p=0,\ q=-5$

c) $p=1,\ q=4$

d) $p=-7,\ q=0$

e) $p=7,\ q=-3$

f) $p=\sqrt{2},\ q=\sqrt{2}$

7. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{-6x+9}{3x+6}$

b) $f(x)=\frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$

> Wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ma asymptotę pionową $x=-\frac{d}{c}$ i asymptotę poziomą $y=\frac{a}{c}$.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{7x-4}{x-1}$.
>
> $$f(x) = \frac{7x-4}{x-1} = \frac{7(x-1)+7-4}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 7, \text{ gdzie } x \neq 1$$
>
> Ponieważ 7 jest liczbą całkowitą, $f(x) \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbf{Z}$. Zatem $x - 1$ musi być dzielnikiem całkowitym liczby 3. Oznacza to, że:
>
> $$x - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ czyli } x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$
>
> Istnieją cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f. Są to punkty: $(-2, 6)$, $(0, 4)$, $(2, 10)$, $(4, 8)$.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{2x+4}{x-4}$

9. Określ wartości c, dla których funkcja f jest odpowiednio: funkcją homograficzną, liniową (ale nie stałą), stałą.

a) $f(x) = \frac{4x-6}{cx+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x-c}$ c) $f(x) = \frac{6x}{cx-5}$

10. Czy funkcja f jest funkcją homograficzną? Naszkicuj wykres funkcji f (zwróć uwagę na jej dziedzinę).

a) $f(x) = \frac{3x-9}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-2x-8}{\frac{1}{2}x+2}$ c) $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$

11. Przeczytaj podaną w ramce informację.

> Funkcję homograficzną można przedstawić w postaci kanonicznej, wykonując dzielenie, np.:
>
> $$f(x) = \frac{3x-10}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$$
>
> bo $(3x - 10) : (x - 4) = 3$ reszta 2.

Wykonaj dzielenie i przedstaw funkcję f w postaci $f(x) = \frac{r}{x+3} + q$.

a) $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

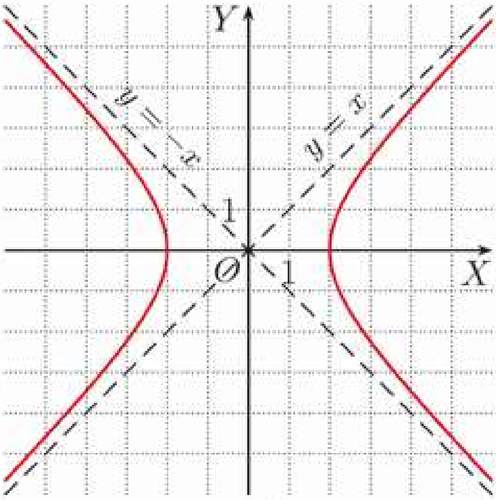
12. a) Suma dwóch liczb x i y jest równa ich iloczynowi. Podaj wzór funkcji opisującej zależność y od x i naszkicuj jej wykres.

b) Pole prostokąta o bokach długości x, y jest równe $2(x + y)$. Podaj wzór funkcji opisującej zależność długości y od x. Określ dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

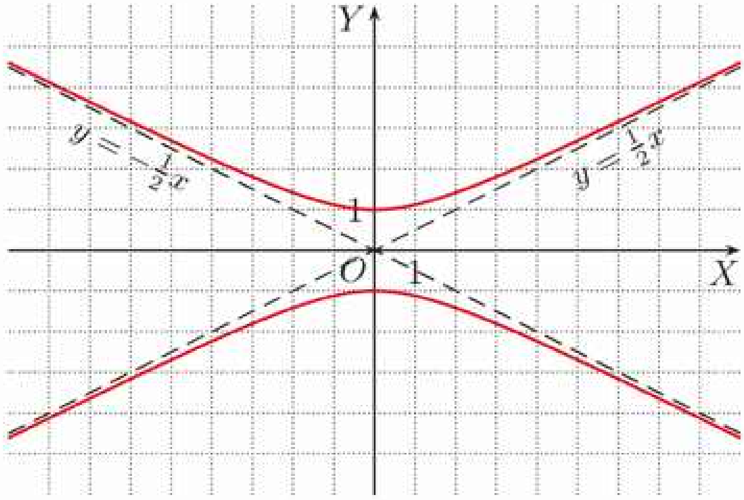
Warto wiedzieć

Hiperbola

Rozpatruje się też hiperbole określone równaniami $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lub $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$. Jeśli $a = b$, to asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe, a taką hiperbolę nazywamy **równoosiową** (rysunek po lewej).



Hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$



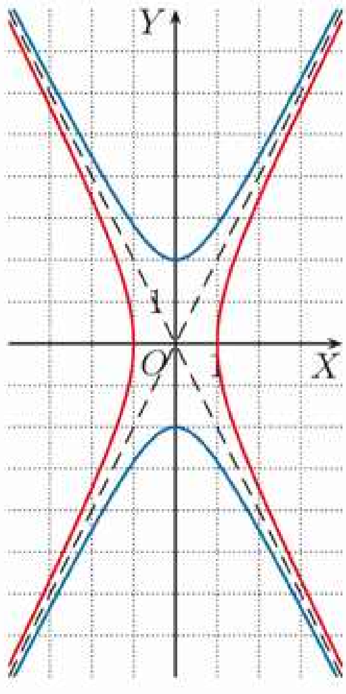
Hiperbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

W tabeli przedstawiono dane dotyczące punktów przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz jej asymptot.

Równanie hiperboli	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Punkty przecięcia z osią OX	$(a, 0)$ i $(-a, 0)$	brak
Punkty przecięcia z osią OY	brak	$(0, a)$ i $(0, -a)$
Równania asymptot	$y = \frac{b}{a} \cdot x$ i $y = -\frac{b}{a} \cdot x$	$y = \frac{a}{b} \cdot x$ i $y = -\frac{a}{b} \cdot x$

Na rysunku obok przedstawiono hiperbolę $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (kolor czerwony) oraz hiperbolę $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (kolor niebieski).
Mają one wspólne asymptoty: $y = -2x$ i $y = 2x$.

Hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ nazywamy **hiperbolami sprzężonymi**.



1. Wyznacz punkty przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot. Naszkicuj tę hiperbolę. Podaj równanie hiperboli sprzężonej.

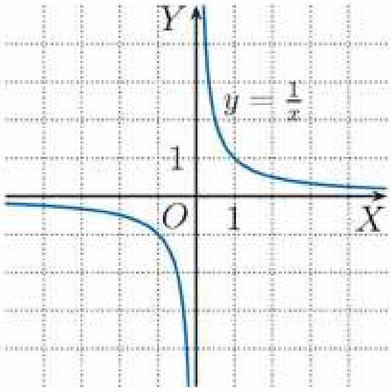
a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
c) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$
d) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$

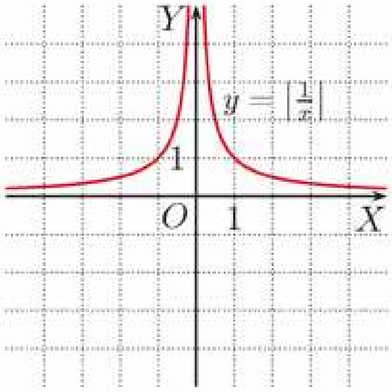
*3.4. Przekształcenia wykresu funkcji

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left|\frac{1}{x}\right|$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Szkicujemy najpierw wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, a następnie $y = \left|\frac{1}{x}\right|$.





Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji f, która znajduje się pod osią OX. Pozostałej części wykresu nie zmieniamy.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykresy funkcji: f, g i h. Określ ich dziedziny i zbiory wartości.

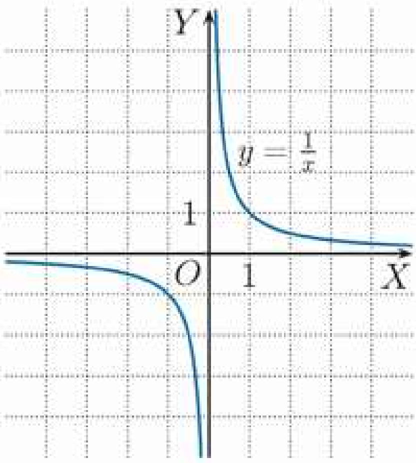
a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{|x|}$, $h(x) = \dfrac{2}{|x|} - 1$

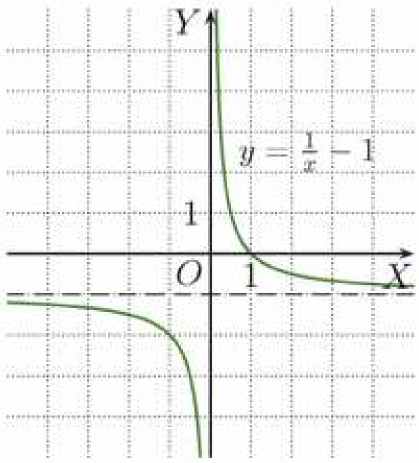
Zauważ, że $\frac{2}{|x|} = \left|\frac{2}{x}\right|$.

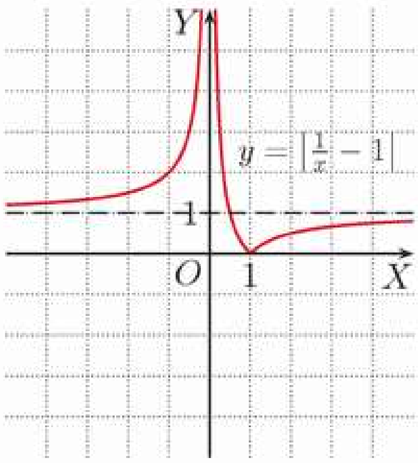
b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $g(x) = -\dfrac{1}{|x|}$, $h(x) = -\dfrac{1}{|x|} + 3$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = m$ w zależności od parametru m.







Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy powstawania wykresu funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$.

Z wykresu funkcji $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$ odczytujemy, że równanie $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = m$:

- nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
- ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{0, 1\}$,
- ma dwa rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup (1; \infty)$.

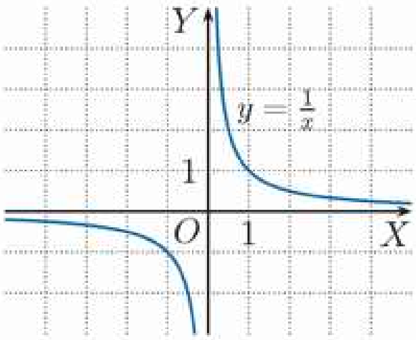
Ćwiczenie 2

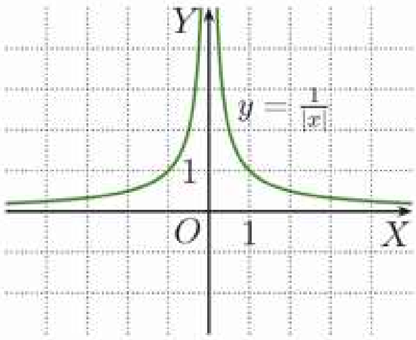
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

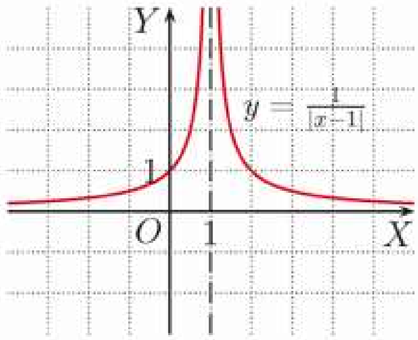
a) $f(x) = \left|\frac{1}{x} + 2\right|$ b) $f(x) = \left|-\frac{1}{x} + 2\right|$ c) $f(x) = -\left|\frac{1}{x} - 2\right|$

Przykład 3

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

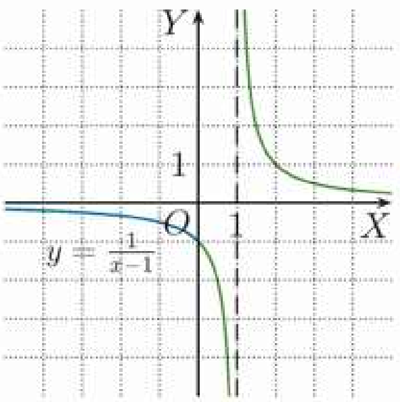


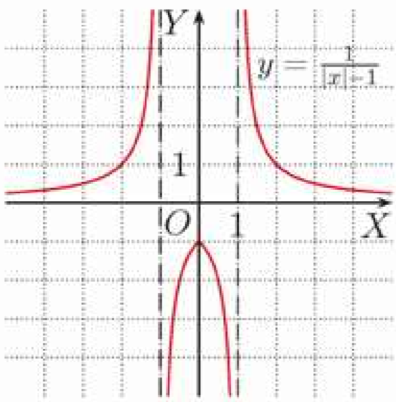




Zauważ, że wykres funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{|x|}$ o wektor $[1, 0]$. Dziedziną funkcji $y = \frac{1}{|x-1|}$ jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, a zbiorem wartości jest przedział $(0; \infty)$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{|x|-1}$. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.





Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy w następujący sposób: szkicujemy część wykresu funkcji f dla $x \geqslant 0$ (gdzie $x \in D_f$), a następnie tę część odbijamy symetrycznie względem osi OY.

Dziedziną funkcji $y = \frac{1}{|x|-1}$ jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, a jej zbiorem wartości zbiór $(-\infty; -1\rangle \cup (0; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ b) $f(x) = -\frac{1}{|x-3|} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{|x+2|} - 1$

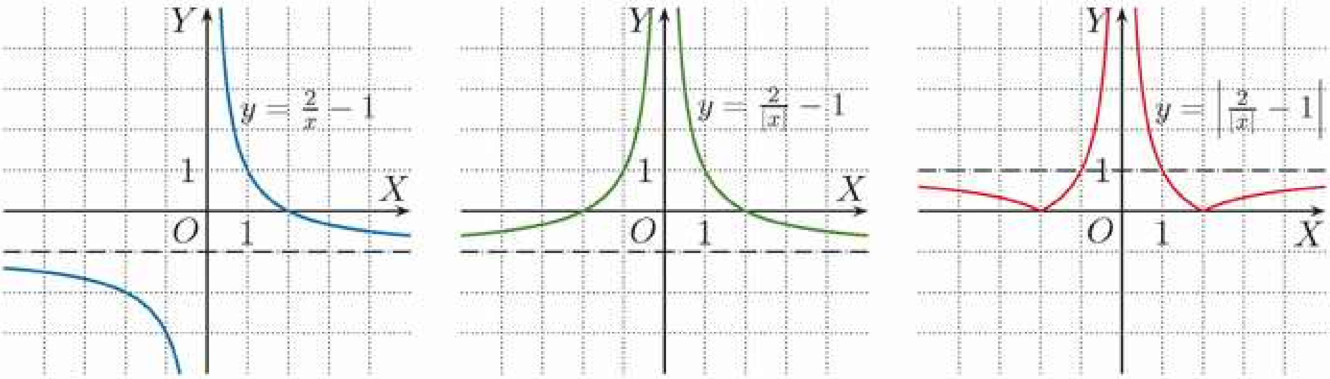
Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ b) $f(x) = -\frac{1}{|x|-3} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{|x|-2} - 1$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $y = \left|\frac{2}{|x|} - 1\right|$.



Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy powstawania wykresu funkcji $y = \left|\frac{2}{|x|} - 1\right|$.

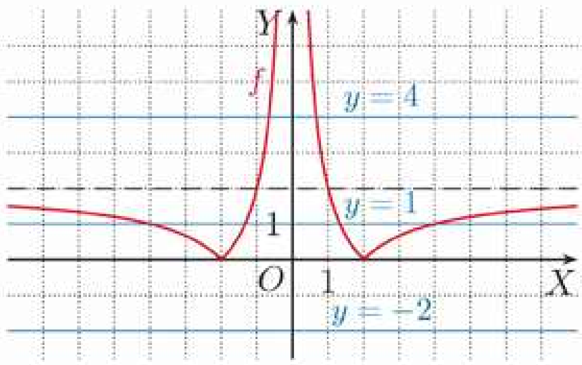
Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{|x|} - 4\right|$ b) $f(x) = \left|\frac{1}{|x+3|} - 2\right|$ c) $f(x) = \left|\frac{2}{|x-4|} + 1\right|$

Przykład 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m. Naszkicuj wykres funkcji g.

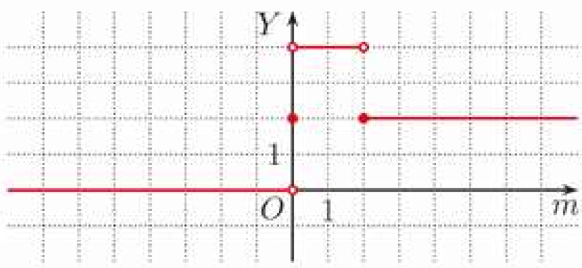


Z wykresu funkcji f odczytujemy, że równanie $f(x) = m$:

- nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
- ma dwa rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup \langle 2; \infty)$,
- ma cztery rozwiązania dla $m \in (0; 2)$.

Zapisujemy wzór funkcji g:

$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } m \in \{0\} \cup \langle 2; \infty) \\ 4 & \text{dla } m \in (0; 2) \end{cases}$$



Wykres funkcji $y = g(m)$

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{2}{|x-2|} - 1\right|$. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m. Naszkicuj wykres funkcji g.

Zadania

1. Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f. Określ jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$ c) $f(x) = \left|-\frac{2}{x} + 3\right|$ e) $f(x) = \frac{1}{|x|} - 3$

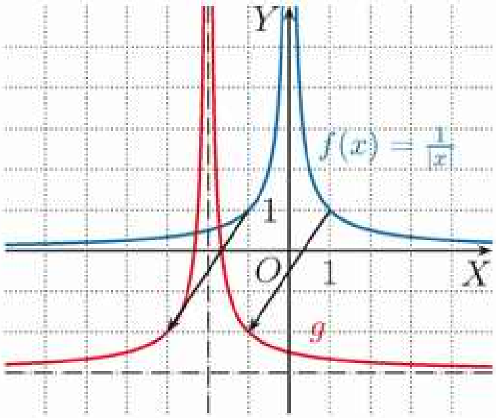
b) $f(x) = \left|\frac{2}{x} - 4\right|$ d) $f(x) = -\left|\frac{2}{x} + 4\right|$ f) $f(x) = \frac{-3}{|x|} + 2$

2. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{|x+2|} - 4$ c) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+3}\right|$ e) $f(x) = \frac{-2}{|x-1|} + 3$

b) $f(x) = \frac{-3}{|x-3|}$ d) $f(x) = \left|\frac{-1-x}{x-1}\right|$ f) $f(x) = \frac{1}{|3-x|} + 1$

3. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{|x|}$ (rysunek obok) przesunięto i otrzymano wykres funkcji g, którego asymptotami są: prosta pionowa $x = -2$ i prosta pozioma $y = -3$.



a) Podaj wzór funkcji g. Określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

b) Naszkicuj wykresy funkcji $h(x) = |g(x)|$ oraz $k(x) = g(|x|)$.

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania?

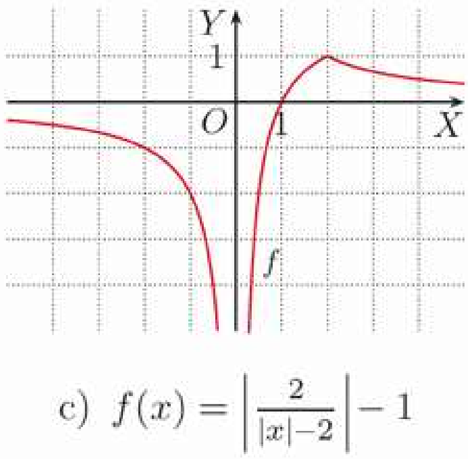
a) $f(x) = \frac{4}{|x|-4}$ b) $f(x) = \frac{4}{|x|+2}$ c) $f(x) = \frac{-2}{|x|-1}$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{|x|} - 2\right|$ b) $f(x) = \left|\frac{2}{x} - 1\right| - 2$ c) $f(x) = \left|\left|\frac{2}{x}\right| - 2\right|$

***6.** Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = -\left|\frac{2}{x} - 1\right| + 1$$



Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = |m|$ w zależności od parametru m.

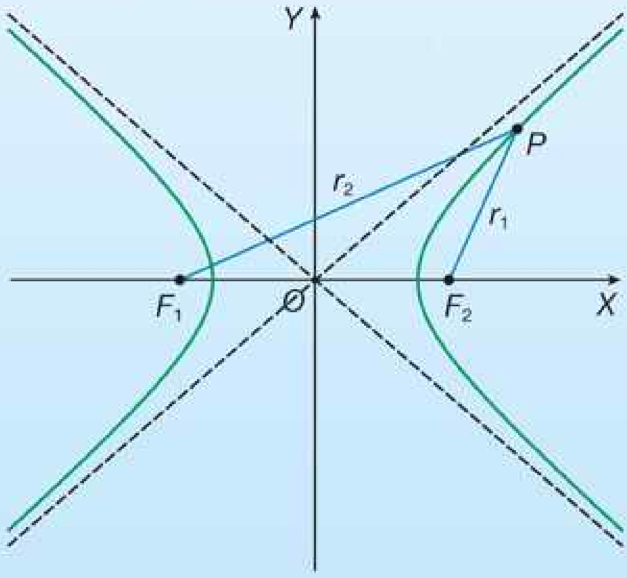
***7.** Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m^2$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = \frac{6}{|x|+3}$ b) $f(x) = \frac{3}{|3-|x||} + 3$ c) $f(x) = \left|\frac{2}{|x|-2}\right| - 1$

Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2, zwanych ogniskami, jest stała:

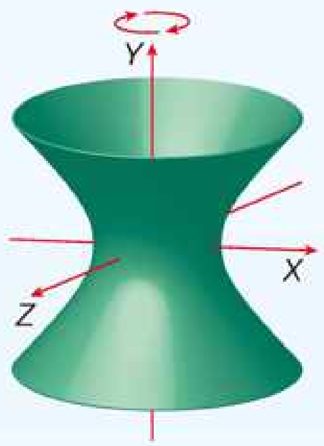
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



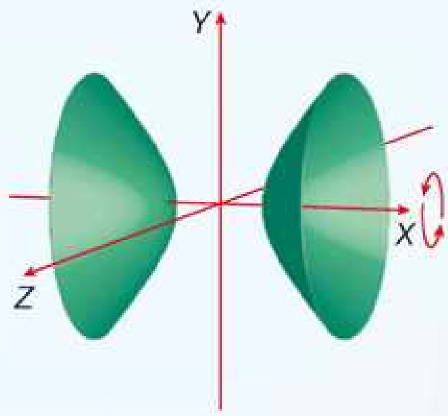
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obróceniu pokazanej wyżej hiperboli wokół osi OY powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obróceniu tej hiperboli wokół osi OX otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.

3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyrażenie wymierne to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych, w którym mogą występować tylko działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, np.: $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{3x^2-7x}$.

$3x^2-7x = 3x(x-\frac{7}{3}) = 0$ dla $x=0$ oraz dla $x=\frac{7}{3}$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{7}{3}\right\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla $x=-1$.

a) $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$ c) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ e) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ g) $\frac{14x^4+8x^2+4}{x^5+27x^2}$

b) $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$ d) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ f) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ h) $\frac{5x^2-10x}{x^3-5x^2+4x-20}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2\cancel{(x-2)}^1}{(x+2)\cancel{(x-2)}^1} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

Przykład 3

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2 - 9 \neq 0$ i $2x - 1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{{}^{1}\cancel{(2x-1)}(2x+1)\cancel{(x-3)}^{1}}{{}_{1}\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(2x-1)}_{1}} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$

b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$

c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0{,}5x+1}{9-3x}$

e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$

f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x + 4 \neq 0$ i $3x + 12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{x+4}_{1}} \cdot \frac{3\cancel{(x+4)}^{1}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$

b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$

c) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$

d) $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$

e) $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$

f) $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

Przykład 5

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ i $x^2 - x \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x\cancel{(x+2)}^{1}}{{}_{1}\cancel{(x-1)}(x+1)} \cdot \frac{x\cancel{(x-1)}^{1}}{\cancel{x+2}_{1}} = \frac{x^2}{x+1}$$

Ćwiczenie 5

Wykonaj dzielenie.

a) $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2}$

b) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1}$

c) $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1}$

e) $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

f) $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27}$

Zadania

1. Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{11x^2-5x-3}{x^2+4x+4}$ b) $\frac{17x^3-13x+2}{x^2-5x+6}$ c) $\frac{9x^4-2x^3+11x-6}{x^5-x^4-10x+4}$

2. Które spośród liczb: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 nie należą do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{16x^2+x+5}{x^3-9x^2}$ b) $\frac{x^2+6x+9}{x^4-4x^3+4x^2}$ c) $\frac{x^5-3x^4+x}{x^2-x-6}$ d) $\frac{2x^4-16x^3+9}{x^3-x^2-2x}$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $x=-1$, jeśli liczba -1 należy do jego dziedziny.

a) $\frac{x^6-7x^4}{x^3}$ c) $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ e) $\frac{x^4-3x^3}{x^4-9x^2}$ g) $\frac{-x^2+x^6}{x^4-2x^3+x^2}$

b) $\frac{2x^4+4x^3+2x^2}{x^3+x^2}$ d) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ f) $\frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$ h) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2+5x+6}$

4. Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=-1$ i $x=-2$.

a) $\frac{2x^2-6x-10}{x^2+3x}$ b) $\frac{x^3-3x+3}{\frac{1}{2}x^2-1}$ c) $\frac{4x^2+8x}{\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}}$ d) $\frac{4x^3+4x^2+x}{2x^2-7x-4}$

5. Zapisz dziedzinę wyrażenia jako sumę przedziałów. Oblicz wartości wyrażenia dla: $x=-3$, $x=1$ i $x=3$.

a) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ b) $\frac{x^2+21}{x^2-3}$ c) $\frac{x+0{,}5}{4x^2-1}$ d) $\frac{3x^2-6x}{4x^2-9}$

6. Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz wartość wyrażenia dla $x=-2$.

a) $\frac{4x+2}{x^2-x-2}$ c) $\frac{x^2+4x}{x^3+8x^2+16x}$ e) $\frac{x^3+x-2}{x^3-8}$

b) $\frac{2x^2+9x+4}{4x^2-1}$ d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$ f) $\frac{x^4-x}{x^3-2x^2+x}$

7. Dane są wyrażenia A i B. Wyznacz dziedzinę wyrażeń A, B oraz $A\cdot B$.

a) $A=\frac{x^2-2}{x^2-9x}$, $B=\frac{x^2+4x}{x^2+2x}$ c) $A=\frac{6x-5}{x^3-4x}$, $B=\frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$

b) $A=\frac{4x^2-1}{x^2-4}$, $B=\frac{9x-x^3}{4x-x^3}$ d) $A=\frac{5x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}$, $B=\frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$

8. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{x-2}{x^2}\cdot\frac{3x}{2x-4}$ d) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^4-1}$ g) $\frac{4x^2-16}{6-3x}\cdot\frac{x^2}{4x+8}$

b) $\frac{3x+4{,}5}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x+1{,}5}$ e) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1}\cdot\frac{(x+1)^2}{2x-1}$ h) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4}\cdot\frac{4-x^2}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2}{3-x}\cdot\frac{3x-9}{x^4}$ f) $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2}\cdot\frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$ i) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9}\cdot\frac{x^3-27}{x^2-9}$

9. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$ b) $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$ c) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

10. Wykonaj dzielenie.

a) $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$ c) $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$ e) $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$

b) $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$ d) $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$ f) $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

11. Uprość wyrażenie.

a) $\dfrac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$ b) $\dfrac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$ c) $\dfrac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \dfrac{\frac{-2}{x}}{\frac{1}{x}}$ c) $f(x) = \dfrac{\frac{3x-6}{x}}{\frac{x-2}{x}}$ e) $f(x) = \dfrac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$ d) $f(x) = \dfrac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}}$ f) $f(x) = \dfrac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}}$

13. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

14. Dany jest prostokąt o bokach a, b oraz polu P. Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij. Podaj odpowiednie założenia.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	?
?	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}$
$\frac{4}{x-3}$	?	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}$

15. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Uprość wyrażenie $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4}$.
>
> Zakładamy, że $x \neq y$ i $x \neq -y$.
>
> $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{x^2+y^2}}}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2\overset{1}{\cancel{(x^2-y^2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x^2+y^2)}}\underset{1}{\cancel{(x^2-y^2)}}} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Uprość wyrażenie.

a) $\frac{(x+y)^3(x-y)}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^3+xy^2}{x^4-y^4}$ b) $\frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{8x^2+4xy}{9x^2-y^2}$ c) $\frac{6x+3y}{8x^3+y^3} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną uwagę należy zwrócić na dziedziny dodawanych wyrażeń.

Przykład 1

Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} = \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} =$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(2x+1)x$.

$$= \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x}$$

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} =$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+3)(x-3)$.

$$= \frac{x+3-(1-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+2}{x^2-9}$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj dodawanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3}$
b) $\frac{x-5}{x} + \frac{x}{x+2}$
c) $\frac{x+3}{x+4} + \frac{x-4}{x-1}$
d) $\frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x-2}{x+3}$
e) $\frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-x}$
f) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x+1}$

Ćwiczenie 2

Wykonaj odejmowanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}$
b) $\frac{6}{x-2} - 3$
c) $\frac{x-1}{x+4} - \frac{x}{x+1}$
d) $\frac{-4x}{x-4} - \frac{2x}{x+2}$
e) $\frac{8}{x^2-16} - \frac{x+4}{x-4} + 1$
f) $\frac{3x}{x+1} - \frac{x+2}{x} - 2$

Ćwiczenie 3

Czy funkcja f jest funkcją homograficzną?

a) $f(x) = \frac{7x+7}{2x+4} + \frac{3x+5}{2x+4} - \frac{2x}{x+2}$
b) $f(x) = \frac{x}{6-3x} - \frac{3}{x-2} + \frac{4x}{3x-6}$

Przykład 3

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4}$.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

$$\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} =$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x(x+2)(x-2)$.

$$= \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{x(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{x-2-2x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-\cancel{(x+2)}^{1}}{x\cancel{(x+2)}_{1}(x-2)} = \frac{-1}{x(x-2)}$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj działania.

a) $\frac{3-x}{x^2+4x} - \frac{3+x}{x^2-4x}$

b) $\frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}$

c) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x}$

d) $\frac{x+1}{x^2-25} - \frac{x+1}{x^2-5x} + \frac{x-1}{x^2+5x}$

e) $\frac{2x-4}{x^2-2x+1} - \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x-1}$

f) $\frac{6x-1}{4x^2-1} + \frac{3-2x}{2x^2-x} - \frac{1}{2x+1}$

Zadania

1. Wykonaj działania.

a) $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3}$

b) $\frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-1}$

c) $\frac{3x-6}{x-1} + \frac{6x-1}{2x+2}$

d) $\frac{3x-1}{x} - \frac{x-7}{2x-4}$

e) $\frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1}$

f) $\frac{2x+1}{6-x} - \frac{3-2x}{x+6}$

2. Wykonaj działania.

a) $\frac{x-6}{x-1} + \frac{2x-6}{x^2-1}$

b) $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{4}{2+x}$

c) $\frac{3x}{x-1} + \frac{1-3x^2}{x^2-2x+1}$

d) $\frac{2-x}{x+2} - \frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4}$

e) $\frac{x+2}{x^2} - \frac{x+3}{x^2+x}$

f) $\frac{x-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x}$

3. Wykonaj działania.

a) $\frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2+4}{x^2-4}$

b) $\frac{4}{x^2+6x} - \frac{1-x}{2x} + \frac{x-1}{x+6}$

c) $\frac{x^2}{4x^2-9} + \frac{2-x}{2x-3} - \frac{6}{3-2x}$

d) $\frac{2x^2-7}{9x^2-6x+1} - \frac{2-3x^2}{3x-1} - x$

4. Uprość wyrażenie. Oblicz jego wartość dla $x = -3$.

a) $\frac{x^2+x-3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{2x-6} - 1$

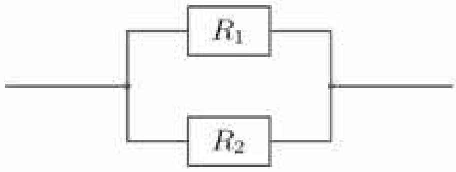
b) $\frac{-3x-3}{x^2-16} - \frac{x+1}{4-x} + \frac{5-x}{2x+8}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz R_1 ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R_c}{R_c \cdot R_2}$$

Zatem $R_1 = \frac{R_c \cdot R_2}{R_2 - R_c}$.



R_c jest oporem zastępczym układu dwóch oporów R_1 i R_2 połączonych równolegle.

Wyznacz R_2 oraz R_c ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

6. Wyznacz ze wzoru wskazaną zmienną.

a) $P = \pi r^2 + \pi r l,\ \ l$

b) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h,\ \ b$

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ \ h$

d) $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ \ r$

e) $F = mg - m\omega^2 R,\ \ R$

f) $F = mg - m\omega^2 R,\ \ m$

g) $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),\ \ m$

h) $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),\ \ r$

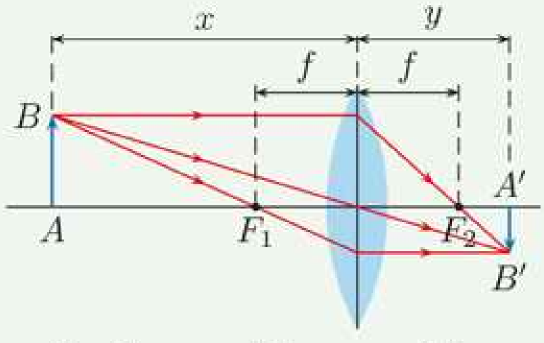
D **7.** Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach a i b. Wysokość tego prostopadłościanu jest równa h, jego pole powierzchni całkowitej wynosi P, a objętość – V. Uzasadnij, że:

$$\frac{P}{V} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h}\right)$$

Czy wiesz, że…

Jeśli x oznacza odległość przedmiotu AB od środka soczewki, y – odległość od środka soczewki do obrazu $A'B'$ tego przedmiotu, a f – ogniskową soczewki, to:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$



F_1, F_2 – ogniska soczewki

8. Chcemy sfotografować ropuchę oddaloną o 60 cm od soczewki aparatu, której ogniskowa jest równa 90 mm. Jak daleko musi być odsunięta soczewka obiektywu od powierzchni matrycy światłoczułej, jeśli chcemy otrzymać ostre zdjęcie?

3.7. Równania wymierne

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-2x}{x^2-4}=0$.

Zakładamy, że $x^2-4\neq 0$, czyli $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$.

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ lub } x=2)$

Przyrównujemy do zera licznik wyrażenia.

Odrzucamy $x=2$ jako sprzeczne z założeniem, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Rozwiązywanie równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)}=0$ składa się z etapów:
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu w i przyjęcie założeń,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu u,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-3)}{x(x+2)}=0$ c) $\frac{x^2+4x}{x(x-6)}=0$ e) $\frac{x^2-16}{2x^2+8x}=0$

b) $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+4)}{(x-3)(2x+1)}=0$ d) $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9}=0$ f) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=0$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1}=0$ c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=0$ e) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}=0$

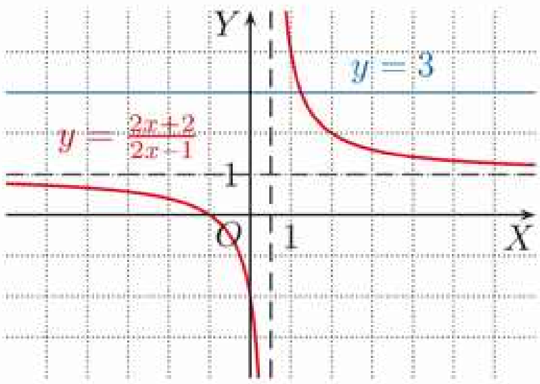
b) $\frac{9x^2+12x+4}{3x^2-x-2}=0$ d) $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}=0$ f) $\frac{6x^2+x-1}{3x^2+5x-2}=0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{2x+2}{2x-1}=3$.

Zakładamy, że $2x-1\neq 0$, czyli $x\neq\frac{1}{2}$.

$$\frac{2x+2}{2x-1}=3 \;/\cdot(2x-1)$$
$$2x+2=6x-3$$
$$-4x=-5 \;/:(-4)$$
$$x=\frac{5}{4}$$



Hiperbola $y=\frac{2x+2}{2x-1}$ i prosta $y=3$ przecinają się dla $x=\frac{5}{4}$.

Liczba $\frac{5}{4}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+2}{x} = 5$ b) $\frac{3}{-2x+7} = 1$ c) $\frac{7x+6}{1-3x} = -4$ d) $\frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2+1}{x^2} = 3$ b) $\frac{6x}{x^2+9} = -1$ c) $\frac{x^2+8}{x^2-4} = 2$ d) $\frac{-3x^2+2x}{x^2+4} = -3$

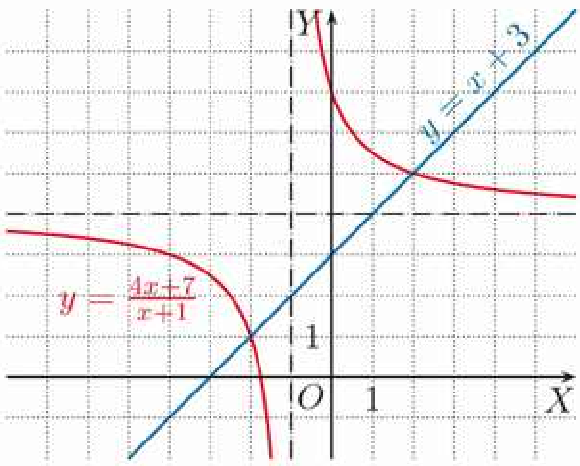
Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{4x+7}{x+1} = x+3$.

Zakładamy, że $x \neq -1$.

$$\frac{4x+7}{x+1} = x+3 \ / \cdot (x+1)$$
$$4x+7 = (x+3)(x+1)$$
$$4x+7 = x^2+4x+3$$
$$x^2 = 4$$
$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Liczby -2 i 2 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{4x+7}{x+1}$ i prosta $y = x+3$ przecinają się dla $x = -2$ oraz $x = 2$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $-\frac{1}{x} = x+2$ c) $\frac{6}{x} = x+5$ e) $\frac{2x+4}{2x-1} = x-1$ g) $\frac{2-3x}{x+2} = 2x+1$

b) $\frac{9}{6-x} = x$ d) $\frac{3}{x+2} = x$ f) $\frac{3x+3}{x+2} = 3-x$ h) $\frac{x}{2x+3} = \frac{1}{3}x+2$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x+1 \neq 0$ i $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2} \ / \cdot (x+1)(x-2)$$
$$2(x-2) = 3(x+1)$$
$$2x-4 = 3x+3$$
$$x = -7$$

Liczba -7 spełnia założenia, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$ b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ d) $\frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x}=\frac{3}{2+x}$ c) $\frac{x}{x-1}=\frac{x+2}{x}$ e) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{2x+1}$

b) $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}=0$ d) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+3}{x+2}$ f) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2}{x}=0$

2. Znajdź pierwiastki całkowite równania.

a) $\frac{x}{-3}=\frac{-5}{x+2}$ c) $x+1=\frac{2-2x}{x-1}$ e) $\frac{6x-4}{2-3x}=-2x$

b) $x=\frac{5x+3}{2x}$ d) $1-\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x+3}$ f) $6x+1=\frac{2}{x}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2}{5x+10}=\frac{-3}{x^2-4}$ c) $\frac{1}{1-x}+\frac{x}{x-1}=1$ e) $\frac{6}{x}-1=\frac{2}{x-1}$

b) $\frac{2x+5}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$ d) $\frac{2x}{2x+3}-1=\frac{2x}{2x-3}$ f) $\frac{2x+1}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}=0$

4. Które z podanych równań nie mają rozwiązania, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?

I. $\frac{3x-3}{x-1}=2$ II. $\frac{6x-2}{3x-1}=2$ III. $\frac{1-4x}{8x-2}=-0{,}5$ IV. $\frac{3x+9}{10x+30}=0{,}3$

5. Podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x+1=\frac{2-2x}{x-1}$ c) $\frac{6x-4}{2-3x}=-2$ e) $\frac{3-x}{2x-1}=\frac{2x-6}{2-4x}$

b) $\frac{2x-2}{x-2}=\frac{x}{x-1}$ d) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{3x+1}$ f) $x+\frac{3x}{x-1}=\frac{6x-3}{x-1}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(3x+1)(x+2)}=0$ d) $\frac{(2x+1)(x+3)}{x(4x^2-1)}=0$ g) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x}=0$

b) $\frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+4)}=0$ e) $\frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)(x+2)}=0$ h) $\frac{x^3-7x^2+12x}{2x^4-5x^3-3x^2}=0$

c) $\frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x+2)(4-x)}=0$ f) $\frac{x^3-9x}{x^2-6x+9}=0$ i) $\frac{2x^4+4x^3+x^2}{x^4-2x^2+1}=0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x}=2$ e) $\frac{2}{x+4}+\frac{3}{x-4}=\frac{14}{x^2-16}$

b) $\frac{3-x}{4x^2+4x+1}-\frac{5x}{2x+1}=0$ f) $\frac{3}{x+2}+\frac{12}{x^2-4}+\frac{1}{2x}=0$

c) $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1-x}{x^2+2x+1}$ g) $\frac{x+5}{x-4}+\frac{3}{x}=\frac{36}{x^2-4x}$

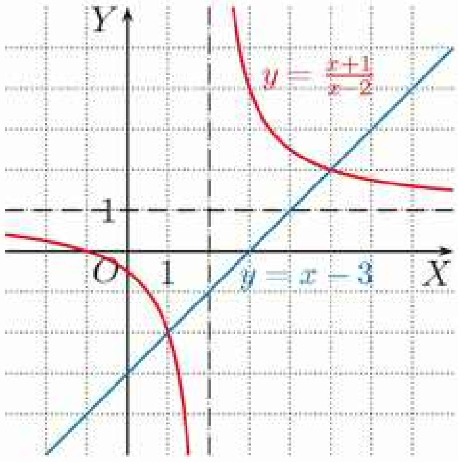
d) $\frac{2x+1}{x^2+6x+9}+\frac{x-1}{9-x^2}=0$ h) $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{4}{x^2-4}$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji $y = \frac{x+1}{x-2}$ i prostej $y = x - 3$.

Zakładamy, że $x - 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{x+1}{x-2} = x - 3$$
$$x + 1 = (x-2)(x-3)$$
$$x + 1 = x^2 - 5x + 6$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16$$
$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$



Obliczamy drugie współrzędne punktów wspólnych:

$$y_1 = 1 - 3 = -2, \quad y_2 = 5 - 3 = 2$$

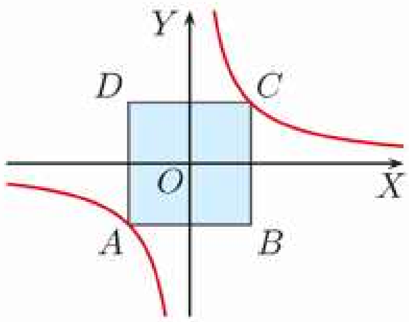
Zatem punktami wspólnymi hiperboli i prostej są $(1, -2)$ i $(5, 2)$.

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i prostej:

a) $y = x + 1$, b) $y = 2x + 2$, c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

9. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii kwadratu $ABCD$ (rysunek obok). Wierzchołki A i C należą do hiperboli $y = \frac{a}{x}$. Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu i oblicz jego pole dla:

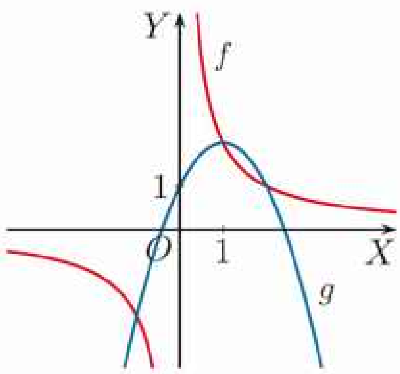
a) $a = 4$, b) $a = 3$.



10. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \frac{-4}{x-2} \\ y = -x - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{-x-1}{x+3} \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

11. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 1$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.



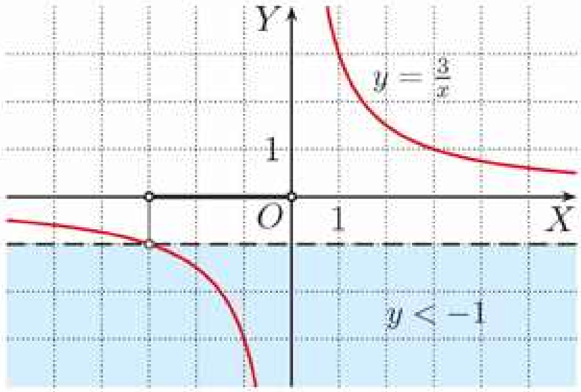
12. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{x}{x+2} \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4 - \frac{3}{|x|} \\ y = |x| \end{cases}$

*3.8. Nierówności wymierne

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $\frac{3}{x} < -1$.



Rozwiązanie nierówności $\frac{3}{x} < -1$ można również odczytać z wykresu.

Zakładamy, że $x \neq 0$.

$$\frac{3}{x} < -1$$

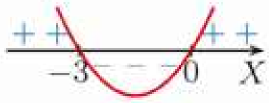
$$\frac{3}{x} + 1 < 0$$

$$\frac{3+x}{x} < 0$$

$$(3+x)x < 0$$

Iloraz dwóch liczb ma taki sam znak jak ich iloczyn.

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-3; 0)$.



Uwaga. Nierówność $\frac{3}{x} < -1$ można również rozwiązać, mnożąc obie strony przez kwadrat mianownika (kwadrat wyrażenia różnego od zera jest zawsze dodatni). Otrzymujemy wtedy nierówność $3x < -x^2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

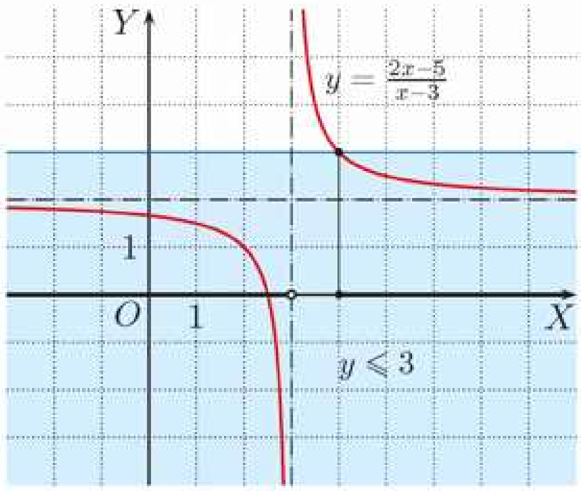
a) $\frac{4}{x} > 2$ c) $-\frac{3}{2x} \geqslant 2$

b) $\frac{2}{x} \leqslant -1$ d) $-\frac{3}{4x} < 2$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$, $b \neq 0$ znak ilorazu $\frac{a}{b}$ jest taki sam jak znak iloczynu $a \cdot b$.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{x-3} \leqslant 3$.



Rozwiązanie nierówności $\frac{2x-5}{x-3} \leqslant 3$ można również odczytać z wykresu.

Zakładamy, że $x \neq 3$.

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leqslant 0$$

$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leqslant 0$$

$$\frac{-x+4}{x-3} \leqslant 0$$

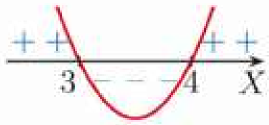
$$-(x-4)(x-3) \leqslant 0 \ / \cdot (-1)$$

$$(x-4)(x-3) \geqslant 0$$

Iloraz dwóch liczb ma taki sam znak jak ich iloczyn.

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:

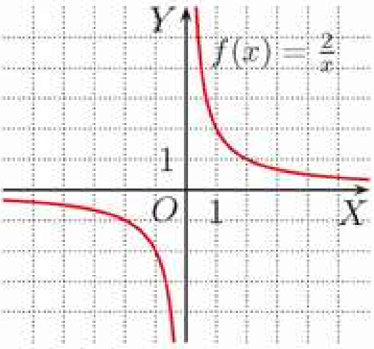
$$x \in (-\infty; 3) \cup \langle 4; \infty)$$



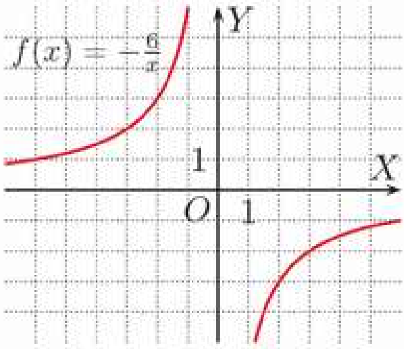
Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu funkcji f zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz $f(x) \geqslant -2$. Sprawdź odpowiedzi, rozwiązując odpowiednie nierówności.

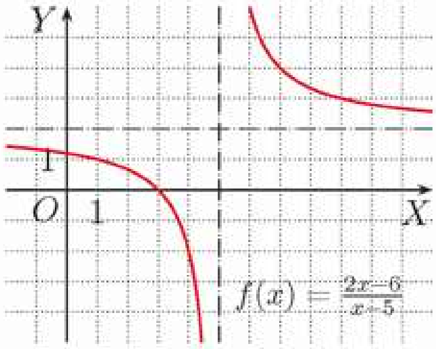
a)



b)



c)



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{x-2} \geqslant 1$ c) $\frac{2}{4-x} < 3$ e) $\frac{1-x}{x} \leqslant -4$ g) $\frac{2x+3}{x+3} < 5$

b) $\frac{2x+7}{x-4} > 3$ d) $\frac{4x-7}{x-2} \leqslant 5$ f) $\frac{2x-2}{x+1} > 2$ h) $\frac{-7x+2}{x+\frac{1}{2}} \leqslant -6$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} \geqslant 2$.

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 3$.

$$\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geqslant \frac{2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+2)(x-3)$.

$$\frac{x^2+2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{x^2-3x}{(x+2)(x-3)} - \frac{2x^2-6x+4x-12}{(x+2)(x-3)} \geqslant 0$$

$$\frac{x+12}{(x+2)(x-3)} \geqslant 0$$

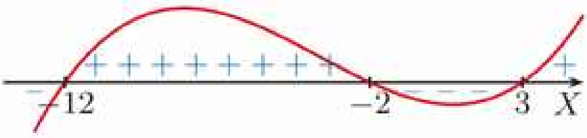
$$(x+12)(x+2)(x-3) \geqslant 0$$

Iloraz i iloczyn dwóch liczb mają ten sam znak.

Szkicujemy wykres wielomianu:

$w(x) = (x+12)(x+2)(x-3)$

Jego pierwiastkami są liczby: -12, -2 i 3.



Odczytujemy rozwiązanie nierówności (z uwzględnieniem założeń):

$$x \in \langle -12; -2) \cup (3; \infty)$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} \leqslant 1$ c) $\frac{x+3}{x-2} + 1 \leqslant \frac{7}{(x-2)^2}$ e) $\frac{3}{x+2} \geqslant \frac{6}{x} - \frac{7}{x+3}$

b) $\frac{x-1}{x+2} > 4 - \frac{3x}{x+4}$ d) $1 - \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x-2}{x-1}$ f) $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{-6x+1}{2x+2} < 4$ c) $\frac{x+5}{x+7} > -2$ e) $\frac{3x+2}{5x} \geqslant -1$ g) $\frac{-4x-5}{5-x} \leqslant 9$

b) $\frac{8x+6}{3-x} > -5$ d) $\frac{3x+1}{5-2x} \leqslant 2$ f) $\frac{3x+6}{1-2x} > -4$ h) $\frac{-x+7}{2x+5} \geqslant 4$

2. Rozwiąż układ nierówności.

a) $0 \leqslant \frac{2}{x+2} \leqslant 4$ c) $-1 < \frac{3x+1}{x+1} < 3$ e) $\frac{x+2}{x+1} \leqslant 1 \leqslant \frac{x+6}{x+3}$

b) $-2 \leqslant \frac{2}{2x+1} < 2$ d) $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ f) $\frac{x+4}{x-2} \leqslant 0 \leqslant \frac{3-x}{x-5}$

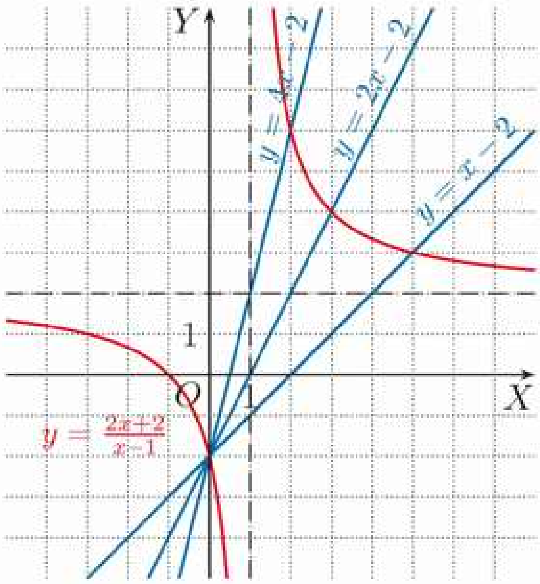
3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i proste: $y = x - 2$, $y = 2x - 2$, $y = 4x - 2$. Z rysunku możemy odczytać, że nierówność:

$$\frac{2x+2}{x-1} \geqslant x - 2$$

jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup (1; 5\rangle$.

Rozwiąż algebraicznie nierówność, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, korzystając z rysunku.

a) $\frac{2x+2}{x-1} \geqslant 2x - 2$ b) $\frac{2x+2}{x-1} \leqslant 4x - 2$

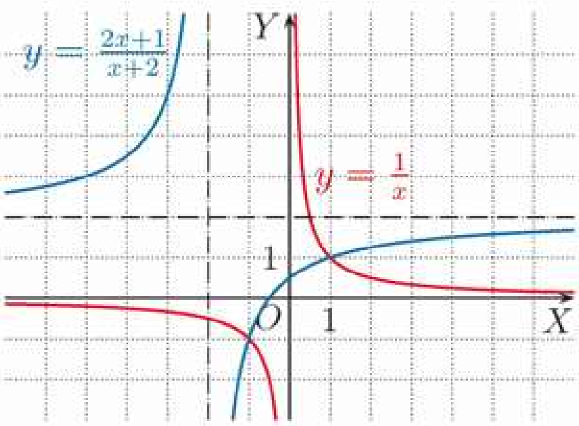


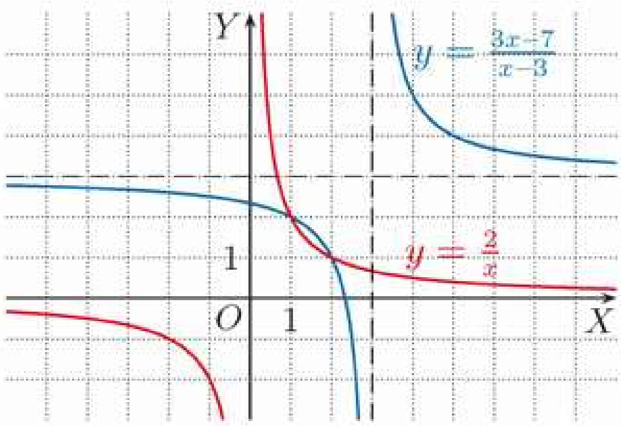
4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność.

a) $\frac{4}{x+2} \geqslant x + 5$ b) $\frac{x-1}{x+1} \leqslant x - 1$ c) $\frac{2x-5}{x-3} \geqslant x - 1$

5. Rozwiąż algebraicznie nierówność, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, korzystając z rysunku.

a) $\frac{2x+1}{x+2} \leqslant \frac{1}{x}$ b) $\frac{3x-7}{x-3} > \frac{2}{x}$





6. Naszkicuj wykresy funkcji f i g, a następnie odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$. Rozwiąż tę nierówność algebraicznie.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x-4} + 4$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\frac{x-3}{x-4} \leqslant \frac{x-1}{x-3}$ c) $\frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x}$ e) $\frac{4-x}{2x-2} \geqslant \frac{x-3}{1-2x}$

b) $\frac{x+3}{x+2} \geqslant \frac{x+3}{2x+7}$ d) $\frac{x+3}{1-x} < \frac{5-x}{x+2}$ f) $\frac{4x+2}{2x-6} \leqslant \frac{2x+2}{2x+3}$

8. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{8}{x+2} > 2\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{4}{x+1} \geqslant -2\right\}$

b) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x}{x-1} < 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-1}{x-3} \geqslant \frac{x+1}{x-2}\right\}$

c) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{2x+1}{x+1} \geqslant 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{4x-1}{4x+3} \leqslant \frac{2x+3}{2x-5}\right\}$

9. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} > 0$ d) $\frac{2x-5}{x^2-16} \leqslant \frac{x}{x+4}$ g) $\frac{2x+1}{2x^2+7x} < \frac{2x+3}{2x^2+5x}$

b) $\frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} \leqslant 0$ e) $\frac{x+3}{x^2-16} \geqslant \frac{2x}{x^2-4x}$ h) $\frac{2x}{x^2-1} \leqslant \frac{2x+3}{3x^2+3x}$

c) $\frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12} \geqslant 0$ f) $\frac{x-1}{x^2+2x} > \frac{2-x}{x^2+x}$ i) $\frac{x+1}{x-2} \leqslant \frac{6x+2}{x^2-4}$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \geqslant 2$ e) $\frac{2}{9x^2-1} \leqslant \frac{3x+2}{3x-1} + 1$

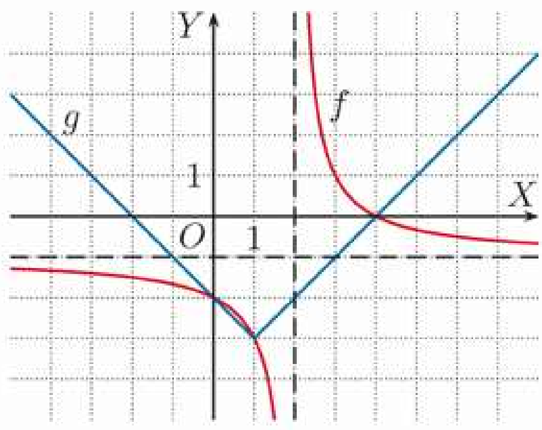
b) $\frac{1}{4-x} + \frac{3x}{x+2} < 3$ f) $\frac{2x^2-3}{(x-1)^3} \geqslant \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{4}{x-3} - 1 \leqslant \frac{2x+3}{2x+1}$ g) $\frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{1}{x+2} \geqslant \frac{2x+2}{x(x+2)}$

d) $\frac{3x}{x^2-4} > \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$ h) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} > \frac{2x+3}{x(x+1)}$

11. Rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

a) $f(x) = \frac{4-x}{x-2}$, $g(x) = |x-1| - 3$ (rysunek obok)



b) $f(x) = \frac{x+7}{x+4}$, $g(x) = |x+5| - 2$

c) $f(x) = \frac{2x-8}{x-3}$, $g(x) = -x^2 + 4x$

d) $f(x) = \frac{x+5}{x+2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$

3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

Gdy jest podany wzór funkcji $y = f(x)$, ale nie została określona jej dziedzina, przyjmuje się, że dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy (taką dziedzinę nazywa się też **dziedziną naturalną** funkcji).

Przykład 1

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x \geqslant 0$ (ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem) oraz $x \neq 2$ (ze względu na mianownik ułamka). Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle 0; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 1

Określ dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ g) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$

b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2\sqrt{3-x}}$

c) $f(x) = \sqrt{-x}$ f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ i) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x^2-4)\sqrt{x+2}}$

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$ ma sens liczbowy, gdy $x + 1 > 0$, zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-1; \infty)$.

Równość $x^2-4 = 0$ jest spełniona dla $x = -2$ oraz $x = 2$. Zauważ, że $-2 \notin D_f$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2.

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę funkcji f. Czy funkcja f ma miejsce zerowe?

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2-x^2}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{1-x}}$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2-16}{|x|+4}$ b) $f(x) = \frac{5-|x|}{x^2-25}$ c) $f(x) = \frac{x(x-3)}{|x|-3}$

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami ($w \not\equiv 0$), nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których $w(x) \neq 0$.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji wymiernej $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$.

a) $v(x) = 2x^6 - 1$, $w(x) = 3x^2 - 6$

b) $v(x) = x - 1$, $w(x) = x^4 - 16$

c) $v(x) = 2x^2 - x$, $w(x) = 4x^3 + x^2$

d) $v(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $w(x) = x^4 + 1$

e) $v(x) = x^2 - 4$, $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$

f) $v(x) = x^3 + x$, $w(x) = x^3 + 7x^2 - 6$

Przykład 3

Określ dziedziny funkcji: f, g i h, a następnie uprość ich wzory.

$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$, $\quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\quad$ wzór po uproszczeniu: $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$, $\quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\quad$ wzór po uproszczeniu: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}$, $\quad D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\quad$ wzór po uproszczeniu: $h(x) = \frac{x}{x-1}$

Zwróć uwagę, że funkcje: f, g, h nie są równe, gdyż mają różne dziedziny.

Definicja

Funkcje f i g o przeciwdziedzinie $\mathbf{R}$ są równe, jeśli mają tę samą dziedzinę D oraz dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$.

Ćwiczenie 5

Zbadaj, czy funkcje f i g są równe. Naszkicuj ich wykresy.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $\quad g(x) = x$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$, $\quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, $\quad g(x) = \frac{x+3}{(x+3)^2}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $\quad g(x) = \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$

Ćwiczenie 6

Wyznacz sumę funkcji wymiernych f i g oraz określ jej dziedzinę.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $\quad g(x) = \frac{-2}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $\quad g(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi.

Przykład 4

Wyznacz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ i $g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$.

Aby funkcje f, g oraz ich iloraz były określone, muszą być spełnione warunki: $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $x^2 + 2x \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-1} : \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{\cancel{x}^{\,1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}_{1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}^{\,1}}{{}_{1}\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz iloczyn $f \cdot g$ oraz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji f i g. Określ dziedziny iloczynu i ilorazu.

a) $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+3}$, $g(x) = \frac{x^2-9}{2x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+x}$

Zadania

1. Określ dziedzinę i podaj miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

c) $f(x) = \frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-x}$

2. Funkcja h dana jest za pomocą wzoru $h(x) = f(x) + g(x)$. Określ dziedzinę funkcji h, podaj jej miejsca zerowe i wyznacz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$

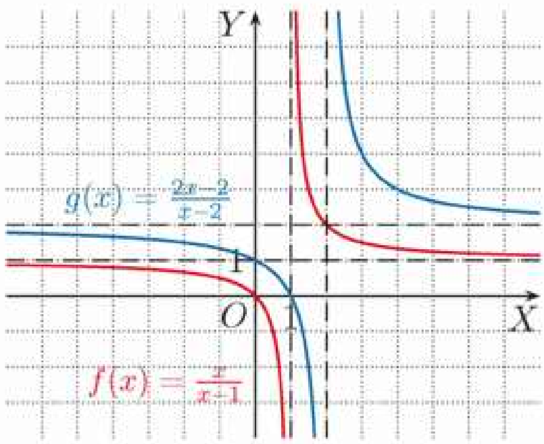
b) $f(x) = \frac{2}{3x+1}$, $g(x) = \frac{4}{1-x}$

c) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{3x+6}$

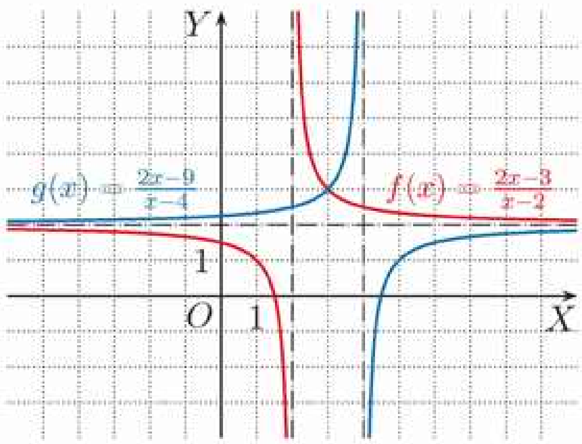
d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$

3. Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g. Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$.

a)



b)



4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0,6)$ i której dziedziną jest zbiór D.

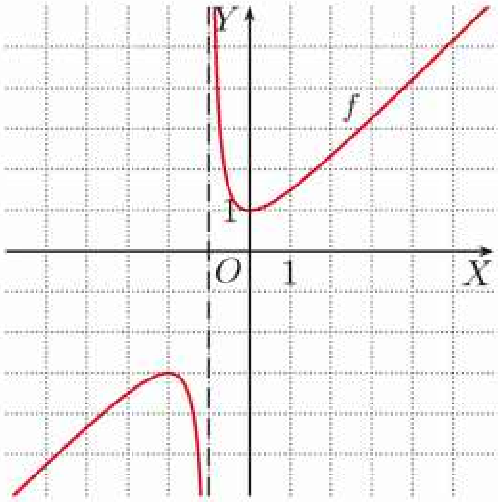
a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$ c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

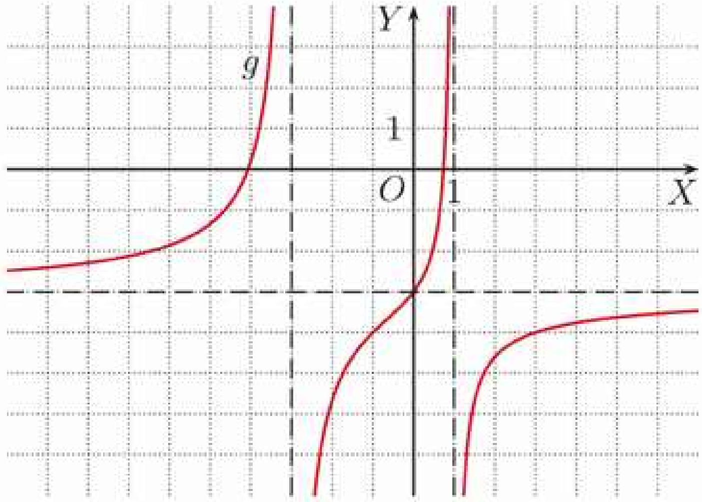
5. Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+1}$ b) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+k}$ c) $f(x) = \frac{4x-1}{kx^2+kx+1}$

6. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{-3x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$$





a) Określ dziedziny funkcji f i g. Dla każdej z tych funkcji podaj jej przedziały monotoniczności oraz argumenty, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od -3.

b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ oraz $g(x) = m$ w zależności od parametru m.

7. Niech $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^3-2x^2}$, $g(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+x}$ i $h(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^3+3x}$.

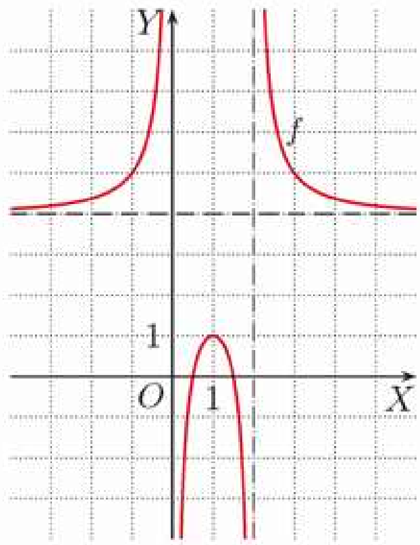
a) Określ dziedziny i uprość wzory tych funkcji.

b) Rozwiąż równanie $f(x) + g(x) - 2h(x) = 0$.

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot g(x) - h(x) \leqslant 0$.

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x}$$



a) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = |m|$ w zależności od parametru m.

3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|3x - 4| = 2$.

> Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.

$$3x - 4 = -2 \text{ lub } 3x - 4 = 2$$
$$3x = 2 \text{ lub } 3x = 6$$
$$x = \tfrac{2}{3} \text{ lub } x = 2$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|5x - 3| = 2$ b) $|9x + 5| = 4$ c) $\left|\frac{2}{3}x + 4\right| = 6$ d) $\left|6 - \frac{7}{5}x\right| = 1$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|2x - 4| + |3x - 6| = 20$.

> 1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
> 2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $b \neq 0$

$$2|x - 2| + 3|x - 2| = 20$$
$$5|x - 2| = 20 \ / : 5$$
$$|x - 2| = 4$$
$$x - 2 = -4 \text{ lub } x - 2 = 4$$
$$x = -2 \text{ lub } x = 6$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $|x - 3| + |2x - 6| = 9$

b) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$

c) $|4x + 2| - |2x + 1| + |6x + 3| = 4$

d) $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

Twierdzenie

> Jeśli $a > 0$, to $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $|2x + 3| < 5$.

Odejmujemy 3 od każdej ze stron nierówności, czyli od -5, od $2x + 3$ i od 5.

$$-5 < 2x + 3 < 5$$
$$-8 < 2x < 2 \ / : 2$$
$$-4 < x < 1$$
$$x \in (-4; 1)$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|3x-1|>2$.

$$3x-1<-2 \quad \text{lub} \quad 3x-1>2$$
$$3x<-1 \quad \text{lub} \quad 3x>3$$
$$x<-\tfrac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x>1$$
$$x\in\left(-\infty;-\tfrac{1}{3}\right)\cup(1;\infty)$$

> Jeśli $a>0$, to $|x|>a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x<-a$ lub $x>a$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $|3x-5|\leqslant 2$
b) $|4x-2|>8$
c) $|2x+4|<8$
d) $\left|\frac{1}{3}+x\right|<\frac{1}{2}$
e) $|6-3x|\geqslant 9$
f) $\left|\frac{1}{3}x-1\right|\leqslant 7$
g) $\left|-\frac{3}{2}x+6\right|\leqslant 9$
h) $\left|-\frac{2}{5}x-2\right|>3$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $|3x+1|=5$
b) $|2x-3|=1$
c) $\left|\frac{3}{5}x+1\right|=2$
d) $\left|2-\frac{2}{3}x\right|=3$
e) $|4x+5|=0$
f) $|x-6|=4$
g) $|x^2-1|=3$
h) $|x^2-3|=1$

2. Rozwiąż równanie.

a) $|3x-6|=7+|x-2|$
b) $|4x+6|+|6x+9|=10$
c) $|6-x|+\left|\frac{1}{2}x-3\right|+|2x-12|=7$
d) $|x-2|+|2x-4|+|4x-8|=7$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $|5x+2|<7$
b) $\left|3x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$
c) $\left|\frac{1}{3}x+2\right|\leqslant 1$
d) $|6x+2|>1$
e) $\left|\frac{2}{3}x-3\right|\geqslant 5$
f) $\left|3x-\frac{1}{4}\right|>\frac{1}{8}$
g) $|2x-3|>0$
h) $|4x-1|\leqslant 0$

4. Wyznacz zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podany warunek.

a) $3\leqslant|2x+1|\leqslant 5$
b) $4\leqslant|2-3x|\leqslant 7$
c) $-2\leqslant 4-3|x|\leqslant 3$
d) $3\leqslant 5-2|x|\leqslant 6$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x-6|+|3x-9|<15$
b) $|4x-2|-|2x-1|>6$
c) $|3x-3|-|1-x|\geqslant 8$
d) $|x+1|+|3x+3|\leqslant 6-2|x+1|$
e) $2|x-4|+|3x-12|\leqslant 4+|8-2x|$
f) $|2x+4|+1\leqslant|3x+6|-|2+x|+2$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{x^2-10x+25}+2|x-5|\leqslant 9$
b) $\sqrt{4x+x^2+4}+3|x+2|>20$
c) $|2x+8|+\sqrt{x^2+8x+16}\geqslant 1$
d) $\sqrt{1-2x+x^2}-|2x-2|+5<0$

*3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

Przykład 1

Aby rozwiązać równanie $|x-1|+3x=7$, rozpatrujemy następujące przypadki:

1° Jeśli $x-1<0$, czyli $x \in (-\infty;1)$, to równanie przybiera postać:

$$-(x-1)+3x=7$$
$$-x+1+3x=7$$
$$2x=6$$
$$x=3 \quad 3 \notin (-\infty;1), \text{ sprzeczność}$$

2° Jeśli $x-1 \geqslant 0$, czyli $x \in \langle 1;\infty)$, to równanie przybiera postać:

$$(x-1)+3x=7$$
$$4x=8$$
$$x=2 \quad 2 \in \langle 1;\infty)$$

Zatem rozwiązaniem równania $|x-1|+3x=7$ jest liczba 2.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|x-1|-2x=4$
b) $|x-1|+x=2$
c) $|x+4|+1=2x$
d) $|3-x|=x-1$
e) $|2x+4|-2x=4$
f) $x|x-4|=x^2+4x$

Przykład 2

Aby rozwiązać nierówność $2|x+2|+x \leqslant 1$, rozpatrujemy następujące przypadki:

1° Jeśli $x+2<0$, czyli $x \in (-\infty;-2)$, to nierówność przybiera postać:

$$-2(x+2)+x \leqslant 1$$
$$-2x-4+x \leqslant 1$$
$$-x \leqslant 5$$
$$x \geqslant -5$$
$$x \in \langle -5;-2)$$

2° Jeśli $x+2 \geqslant 0$, czyli $x \in \langle -2;\infty)$, to nierówność przybiera postać:

$$2(x+2)+x \leqslant 1$$
$$2x+4+x \leqslant 1$$
$$3x \leqslant -3$$
$$x \leqslant -1$$
$$x \in \langle -2;-1\rangle$$

Uwzględniamy założenie.

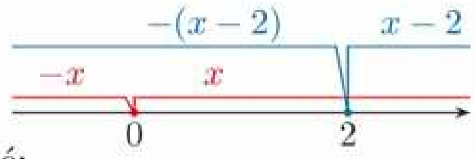
Zatem nierówność $2|x+2|+x \leqslant 1$ zachodzi dla $x \in \langle -5;-1\rangle$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $|x-2|-3x>1$
b) $|2x+6|+x \leqslant 3$
c) $|x-5|<x+5$
d) $|6+x| \geqslant 2x+6$
e) $|3-x| \leqslant x-|2x-6|$
f) $x|1-x| \leqslant x+x^2$

Przykład 3



Rozwiąż równanie $2|x| - |x-2| = 1$.

1° Jeśli $x \in (-\infty; 0)$, to równanie przybiera postać:

$$-2x - (-(x-2)) = 1$$
$$-2x + x - 2 = 1$$
$$-x = 3$$
$$x = -3 \qquad -3 \in (-\infty; 0)$$

2° Jeśli $x \in \langle 0; 2)$, to równanie przybiera postać:

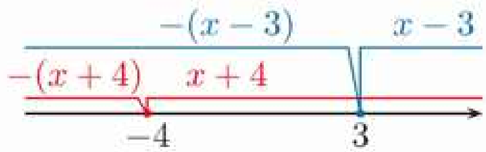
$$2x - (-(x-2)) = 1$$
$$2x + x - 2 = 1$$
$$3x = 3$$
$$x = 1 \qquad 1 \in \langle 0; 2)$$

3° Jeśli $x \in \langle 2; \infty)$, to równanie przybiera postać:

$$2x - (x-2) = 1$$
$$2x - x + 2 = 1$$
$$x = -1 \qquad -1 \notin \langle 2; \infty), \text{ sprzeczność}$$

Zatem rozwiązaniami równania $2|x| - |x-2| = 1$ są liczby -3 i 1.

Przykład 4



Rozwiąż nierówność $|x-3| + |x+4| < 9$.

1° Jeśli $x \in (-\infty; -4)$, to nierówność przybiera postać:

$$-(x-3) - (x+4) < 9$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy, że $x \in (-5; -4)$.

2° Jeśli $x \in \langle -4; 3)$, to nierówność przybiera postać:

$$-(x-3) + x + 4 < 9$$
$$7 < 9$$

Otrzymana nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem $x \in \langle -4; 3)$.

3° Jeśli $x \in \langle 3; \infty)$, to nierówność przybiera postać:

$$x - 3 + x + 4 < 9$$
$$x < 4$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy, że $x \in \langle 3; 4)$.

Zatem nierówność $|x-3| + |x+4| < 9$ zachodzi dla $x \in (-5; 4)$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $|x| + |x - 3| = 5$

b) $|x + 4| - |2 - x| = 6$

c) $|x| + |x - 2| = 2x - 2$

d) $|x| + |x + 5| = 2x + 5$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $|x| + |x - 2| < 4$

b) $|x - 1| + |3 - x| \geqslant 3$

c) $|x + 2| - |3 - x| \leqslant x - 1$

d) $|x| - |5 - x| > x - 2$

Przykład 5

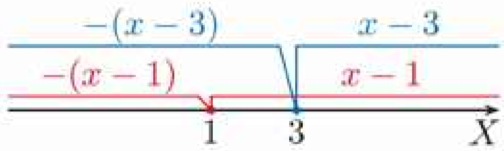
Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| - 6$$

Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant -2$.

1° Dla $x \in (-\infty; 1)$:

$f(x) = -(x-1) - (x-3) - 6 = -2x - 2$

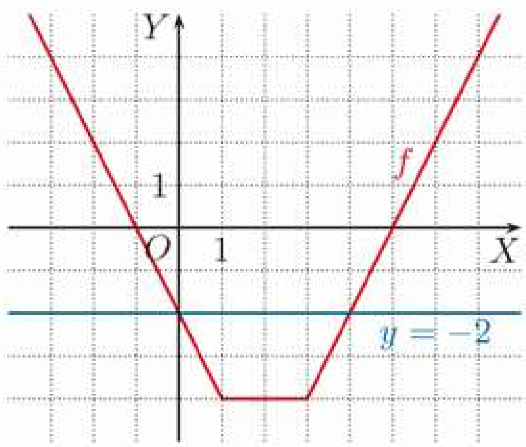


2° Dla $x \in \langle 1; 3)$:

$f(x) = (x-1) - (x-3) - 6 = -4$

3° Dla $x \in \langle 3; \infty)$:

$f(x) = (x-1) + (x-3) - 6 = 2x - 10$



Wzór funkcji f możemy więc zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -4 & \text{dla } x \in \langle 1; 3) \\ 2x - 10 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$$

Nierówność $f(x) \geqslant -2$ jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$.

Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leqslant 4$.

a) $f(x) = |x + 3| + x - 1$

b) $f(x) = |x - 1| - |x + 1| + 1$

c) $f(x) = 2x + |1 - x| + 2|x - 2|$

d) $f(x) = |x| + |x + 1| + |x - 2|$

Ćwiczenie 6

Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresem funkcji f.

a) $f(x) = |x + 4| + |x - 2| - 10$

b) $f(x) = |x + 2| - |x| - x$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $|x+1|-|x|=0$ c) $|x|-|x-4|=2$ e) $|x-2|+|x+2|=4$

b) $|x|+|x+5|=7$ d) $|x+3|+|x|=3$ f) $|2x+4|-|x-1|=3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{x^2+6x+9}-|x-2|=x$ c) $|x-2|-|x-3|+|x|=6$

b) $\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2}=6$ d) $|4-x|-|x|=|x+3|$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-3|+|x|\leqslant 3$ d) $|3x-6|-|x+2|<8$

b) $|1-x|-|1+x|\geqslant 2$ e) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|\leqslant 5$

c) $|x-5|+|x-1|\geqslant 4$ f) $\sqrt{9-6x+x^2}-3>\sqrt{x^2}$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x)\geqslant 0$.

a) $f(x)=|x-2|+|x+1|-5$ b) $f(x)=|1-x|-|x-3|$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Rozwiąż równanie $\big||x|-3\big|=5$.
>
> Jeśli $a>0$, to $|x|=a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a$ lub $x=-a$.
>
> $$|x|-3=5 \text{ lub } |x|-3=-5$$
>
> $$|x|=8 \text{ lub } |x|=-2 \quad \text{sprzeczność}$$
>
> $$x=8 \text{ lub } x=-8$$
>
> Rozwiązaniem równania $\big||x|-3\big|=5$ są liczby -8 i 8.

Rozwiąż równanie.

a) $\big||x|-1\big|=1$ c) $\big||x+1|+5\big|=4$ e) $\big||2x+3|+3\big|=3$

b) $\big||x|+2\big|=3$ d) $\big||x-3|-6\big|=2$ f) $\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|=1$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $\big||x|-3\big|<2$ c) $\big||x+4|-3\big|>2$ e) $\big||2-x|+5\big|\leqslant 6$

b) $\big||x|+4\big|>5$ d) $\big||2x-1|+2\big|\geqslant 3$ f) $\big|7-|2x+1|\big|\geqslant 7$

7. Rozwiąż równanie.

a) $\big|x+|x|\big|=|x|$ b) $\big||x|-1\big|=|x-1|$ c) $\big|x-|x-1|\big|=|x-1|$

*3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{2}{|x-1|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony równania przez $|x-1|$ i otrzymujemy:

$$|x-1| = 2$$

$$x-1=-2 \text{ lub } x-1=2$$

$$x=-1 \text{ lub } x=3$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{|x+2|} = 1$ b) $\frac{2}{|7x-1|} = 5$ c) $\frac{-5}{|2x-1|} = 3$ d) $\frac{1}{|5x-2|} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| = 1$.

$\left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|}$, gdy $q \neq 0$

Zakładamy, że $x \neq 2$.

$$\frac{|x+1|}{|x-2|} = 1 \; / \cdot |x-2|$$

$$|x+1| = |x-2|$$

$$x+1 = x-2 \quad \text{lub} \quad x+1 = -(x-2)$$

$$1=-2 \quad \text{lub} \quad 2x=1$$

$|p| = |q|$ oznacza, że:
$p = q$ lub $p = -q$

Pierwsze równanie jest sprzeczne, z drugiego otrzymujemy rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$.

Uwaga. Równanie z przykładu 2. możemy też rozwiązać, korzystając z tego, że:

$$\frac{x+1}{x-2} = -1 \text{ lub } \frac{x+1}{x-2} = 1$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $\left|\frac{2x-1}{6x+3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x+8}{-4x-1}\right| = 2$ c) $\left|\frac{5x-1}{x-2}\right| = 4$ d) $\left|\frac{5x-3}{3x-2}\right| = 0$

Ćwiczenie 3

a) Rozwiąż równanie $\left|\frac{x}{x-2}\right| = 2$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{x}{x-2}\right|$. Odczytaj z wykresu rozwiązania równania $f(x) = 2$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{5}{|3-x|} > 1$.

Zakładamy, że $x \neq 3$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|3-x|$. Otrzymujemy:

$$|3-x| < 5$$
$$-5 < 3-x < 5$$
$$x \in (-2; 8)$$

Uwzględniamy założenie i otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (-2; 3) \cup (3; 8)$.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\frac{1}{|x-2|} < 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|x-2|$. Otrzymujemy:

$$|x-2| > 1$$
$$x-2 < -1 \quad \text{lub} \quad x-2 > 1$$
$$x < 1 \quad \text{lub} \quad x > 3$$

Zatem $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{|x-1|} > 1$ b) $\frac{7}{|x+2|} \leqslant 1$ c) $\frac{6}{|3x+1|} - 2 \geqslant 1$ d) $\left|1 + \frac{4}{x}\right| \leqslant 3$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{|x-1|} = 2$ c) $\frac{2}{|6-3x|} = \frac{1}{2}$ e) $\left|\frac{x-3}{x+6}\right| = 5$ g) $\left|\frac{4x+1}{6x-1}\right| = 0$

b) $\frac{6}{|2x+1|} = 3$ d) $\frac{1}{|4x-1|} = -2$ f) $\left|\frac{2x-3}{5-x}\right| = 2$ h) $\left|\frac{x-3}{6-2x}\right| = \frac{1}{2}$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{8}{|2x-6|} > 1$ d) $\frac{2}{|x+3|} < 1$ g) $\frac{-2}{|3x-2|} \leqslant \frac{-3}{|3x-2|} + 1$

b) $\frac{1}{|4x-8|} > -3$ e) $\frac{1}{|4-x|} \leqslant 2$ h) $\frac{-3}{|x-2|} > \frac{1}{|2x-4|} - 7$

c) $\frac{8}{|4-2x|} \leqslant -2$ f) $\frac{6}{|1-2x|} \geqslant 1$ i) $\frac{1}{|2x-1|} \leqslant \frac{1}{|3-6x|} + 3$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\left|\frac{2x-3}{x-2}\right| \leqslant 2$ d) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1$ g) $\frac{1}{|x+4|} \leqslant \frac{1}{|x-2|}$

b) $\left|\frac{3-x}{x+1}\right| > 2$ e) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| \leqslant 4$ h) $\frac{6}{|4-x|} > \frac{1}{|2x+1|}$

c) $\left|\frac{x-1}{x+7}\right| \leqslant 0$ f) $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| > 0$ i) $\frac{2}{|x-4|} \geqslant \frac{1}{|2x+8|}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Rozwiąż równanie $\frac{3x}{|x-2|} = 1$.
>
> Zakładamy, że $x \neq 2$.
>
> 1° Dla $x > 2$ mamy $\frac{3x}{x-2} = 1$, czyli $3x = x - 2$.
> Stąd $x = -1$ – sprzeczne z założeniem, że $x > 2$.
>
> 2° Dla $x < 2$ mamy $\frac{3x}{-x+2} = 1$, czyli $3x = -x + 2$.
> Stąd $x = \frac{1}{2}$.
>
> Zatem rozwiązaniem równania $\frac{3x}{|x-2|} = 1$ jest liczba $\frac{1}{2}$.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{|2x-1|} = 1$ b) $\frac{1}{|x|} = x + 2$ c) $\frac{2x}{|x-3|} = x - 2$

***5.** Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{|x-1|}{x} > 0$ c) $\frac{|1-x|}{x} < 0$ e) $\left|\frac{2}{|x|} - 1\right| < 3$

b) $\frac{|x|}{x+2} > 2$ d) $\left|\frac{2}{|x|} - 1\right| \leqslant 0$ f) $\left|\frac{2}{|x|} - 1\right| > \frac{1}{2}$

***6.** Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x-1}{|x|}$ b) $f(x) = \frac{|x|-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

***7.** Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych.

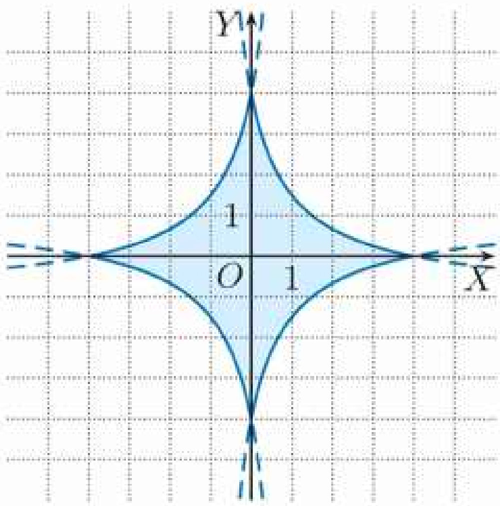
a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{3}{|x+1|} \geqslant 1 \text{ i } |y| \leqslant 2\right\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{|5-x|} < \frac{1}{|x+1|}\right\}$

***8.** Na rysunku obok przedstawiono zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$|y| \leqslant \frac{a}{|x|+1} - 1$$

Oblicz współczynnik a.



3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6(x-3) = 4x$$

$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

b) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 2

a) Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B droższych o 4 zł/kg i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A, a ile – cukierków B?

b) Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Zadania

1. a) Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmieni. Wyznacz ten ułamek.

b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

2. a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile jego tata?

b) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?

3. a) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o x cm, a dłuższy bok – o $3x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $3:4$. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o x cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $5 : 9$. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?
>
> Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:
> $\frac{w}{4}$ – praca wykonana przez Piotrka w ciągu godziny,
> $\frac{w}{8}$ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,
> $\frac{w}{4} + \frac{w}{8} = \frac{3}{8}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.
> Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:
> $$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$
> czyli 2 godzin i 40 minut.

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

5. Dwie koparki, pracując razem, wykonują wykop w ciągu 8 dni. Gdyby w tym samym tempie pracowała tylko pierwsza z nich, wykop powstałby w ciągu 12 dni. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu drugiej koparce?

6. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?

3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Średnia prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz średnie prędkości, z jakimi poruszały się te samochody.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 średnie prędkości samochodów. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1-20}$$

Korzystamy ze wzoru $t = \frac{s}{v}$, gdzie t oznacza czas, s – drogę.

$$320(v_1 - 20) = 240v_1, \text{ stąd } v_1 = 80 \text{ oraz } v_2 = 80 - 20 = 60$$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

a) Samochód jadący ze średnią prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący ze średnią prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

b) Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy z nich jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Ćwiczenie 2

a) Pociąg ekspresowy jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i przebył trasę długości 360 km w czasie o godzinę krótszym. Oblicz średnie prędkości tych pociągów.

b) Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Średnia prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż średnia prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A. Oblicz średnie prędkości, z jakimi się poruszały.

Zadania

1. Pociąg miał pokonać trasę między dwoma miastami w czasie określonym w rozkładzie jazdy. Z powodu awarii został zatrzymany na pół godziny na stacji pośredniej. Pozostałe 120 km przejechał z prędkością większą o 20 km/h i dzięki temu nadrobił powstałe opóźnienie. Oblicz, jaka powinna być średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem jazdy.

2. Dwaj rowerzyści wyjechali równocześnie na trasę długości 36 km. Średnia prędkość pierwszego rowerzysty była o 6 km/h większa niż średnia prędkość drugiego, więc pokonał on trasę w czasie o godzinę krótszym niż drugi. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

3. Tomek przejechał na rowerze 32 km szosą i 20 km polną drogą w czasie 2 godzin i 40 minut. Średnia prędkość jazdy po szosie była o 20 km/h większa od średniej prędkości jazdy po polnej drodze. Oblicz średnią prędkość na szosie i średnią prędkość na polnej drodze.

4. Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążało jezioro w tym samym kierunku. Średnia prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż średnia prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

5. a) Samochód przejechał drogę długości 120 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą, to czas jazdy byłby krótszy o 54 minuty. Jaka była średnia prędkość samochodu?

b) Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B o długości 240 km ze średnią prędkością v. W drodze powrotnej przez godzinę jechał ze średnią prędkością v, a następnie zwiększył prędkość o połowę, w rezultacie drogę powrotną przejechał w czasie o godzinę krótszym. Wyznacz średnią prędkość v.

***6.** a) Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B ze średnią prędkością 40 km/h. Z jaką średnią prędkością powinien jechać w drodze powrotnej, aby jego średnia prędkość w czasie całej podróży wyniosła 60 km/h?

D b) Średnia prędkość jazdy samochodem z miasta A do miasta B wyniosła v_1 km/h, a podczas drogi powrotnej v_2 km/h. Uzasadnij, że średnia prędkość liczona dla całej podróży jest równa średniej harmonicznej prędkości v_1 i v_2.

Średnią harmoniczną liczb dodatnich a i b nazywamy liczbę:
$$śr_H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

3.15. Zagadnienia uzupełniające

Wyrażenia wymierne dwóch zmiennych

1. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = 2$ oraz $y = -4$.

a) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{x^3-x^2y}{yx-y^2}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

2. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $a = -1$ i $b = 2$.

a) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ b) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab} \cdot \frac{a-b}{ab+b^2}$

3. Wykonaj działania.

a) $\frac{y+3}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y^2+6y+9}$ c) $\frac{x^2-4xy}{5x} : \frac{x-4y}{20xy}$ e) $\frac{x^3-y^3}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$

b) $\frac{4y^2-9}{4x} \cdot \frac{6x^2}{3-2y}$ d) $\frac{x^2-y^2}{x+2y} : \frac{4y^2-4x^2}{x^2+4xy+4y^2}$ f) $\frac{(x+y)^3}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

4. Wykonaj działania.

a) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$ c) $\frac{y^2-1}{xy^3} - \frac{x^2-1}{x^3y}$ e) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$

b) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$ d) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$ f) $\frac{3x}{2x-y} - \frac{3x}{2x+y} + \frac{4xy}{4x^2-y^2}$

5. Wykonaj działania.

a) $\frac{a^2+ab}{a^2b^2}\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}\right)$ b) $\left(a - \frac{a^2}{a-1}\right)^{-1}\left(\frac{a+1}{b} - \frac{1}{b-ab}\right)$

Zadania z parametrem

6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania o różnych znakach?

a) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ c) $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m = 0$

b) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ d) $(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa różne rozwiązania dodatnie?

a) $(k+2)x^2 - 4x - k + 2 = 0$ c) $(k+1)x^2 - 3(k-1)x + 2k - 3 = 0$

b) $(k-1)x^2 - 2kx - k - 1 = 0$ d) $(k-2)x^2 - 3(k+2)x + 6k = 0$

8. Wyznacz te wartości parametru a, dla których największa wartość funkcji f jest liczbą ujemną.

a) $f(x) = (3a-2)x^2 + (4a+2)x + 3a - 2$

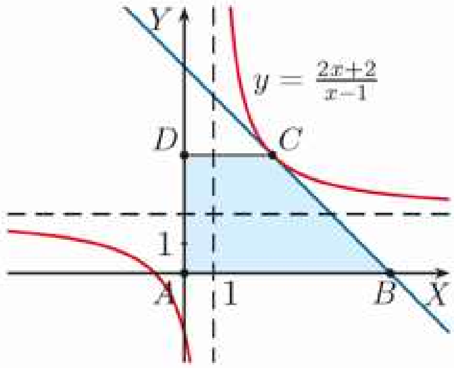
b) $f(x) = (3a-4)x^2 - (2a+1)x + 2a + 1$

D **9.** a) Uzasadnij, że jeśli punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x > 0$, to prostokąt o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(x_0,0)$, $C(x_0,y_0)$, $D(0,y_0)$ ma pole równe a.

b) Wyznacz długość przekątnej kwadratu, którego trzy wierzchołki leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty należy do wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$.

c) Wierzchołki prostokąta o polu 24 są punktami przecięcia hiperboli $y = \frac{a}{x}$ z prostymi $y = \frac{1}{2}x$ i $y = 2x$. Wyznacz a.

10. Prosta $y = -x + m$ ma w I ćwiartce układu współrzędnych jeden punkt wspólny z hiperbolą $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (punkt C na rysunku obok).

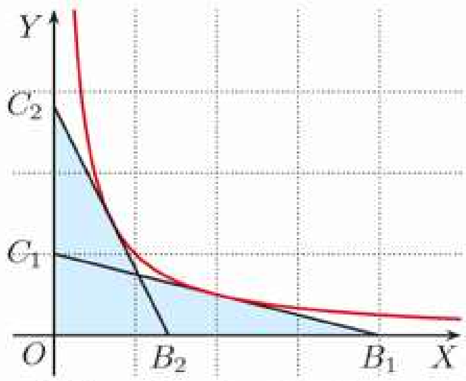


a) Oblicz m oraz pole trapezu $ABCD$.

b) Punkty E i F są punktami przecięcia hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta CEF.

11. a) Wyznacz równanie prostej $y = ax+b$, gdzie $a \neq 0$, której jedynym punktem wspólnym z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$ jest punkt $(1,1)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.

D *b) Uzasadnij, że trójkąty ograniczone osiami układu współrzędnych i prostą $y = ax + b$, gdzie $a < 0$, mającą jeden punkt wspólny z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$, mają równe pola.

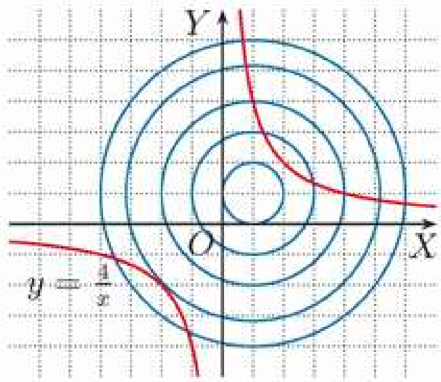


Pola trójkątów OB_1C_1 i OB_2C_2 są równe.

12. Podaj, ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i danym promieniu r z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

a) $r = 1$ b) $r = 1{,}5$ c) $r = \sqrt{2}$

13. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(1,1)$ i promieniu r oraz hiperbola $y = \frac{4}{x}$. Na rysunku obok przedstawiono tę hiperbolę oraz kilka takich okręgów. Podaj, ile punktów wspólnych mają okrąg i hiperbola w zależności od r.

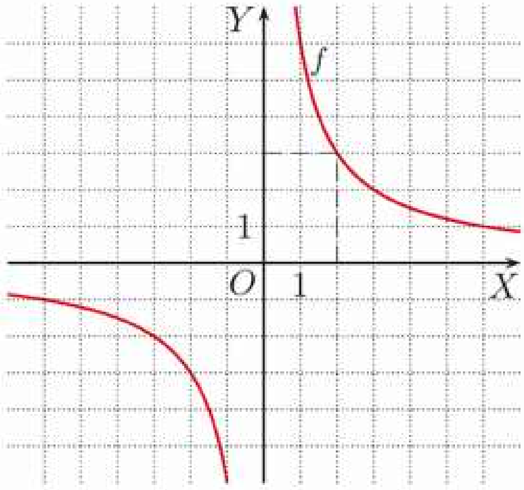


***14.** Hiperbola będąca wykresem funkcji $f(x) = \frac{6}{x-p} + p$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B. Oblicz p, jeśli pole trójkąta AOB (gdzie O jest początkiem układu współrzędnych) jest równe: a) $\frac{1}{2}$, b) $12\frac{1}{2}$.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a.



a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f?

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3.

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant 4$.

2. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 1$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

3. Naszkicuj wykresy funkcji: f, g i h. Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

4. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji f? Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 1$

c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

5. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\overrightarrow{u}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\overrightarrow{u} = [-2, 3]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\overrightarrow{u} = [2, -3]$

6. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $\frac{m}{a} = \frac{2}{b}$, b

b) $\frac{E}{e} = \frac{R+r}{r}$, r

c) $\frac{m}{a} - 2 - \frac{1}{a} = n$, a

d) $m\left(m - \frac{2}{a}\right) = 2$, a

e) $S = \frac{a_1}{1-q}$, q

f) $S = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$, a_1

7. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\frac{x^2+3x}{x^2-3x}$ c) $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$ d) $\frac{x+5}{x^3+125}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2+6x}{x^2-6x}=0$ d) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4x+4}=0$ g) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-x-2}=0$

b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}=0$ e) $\frac{4x^2-12x+9}{3x-2x^2}=0$ h) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}=0$

c) $\frac{x^2-3x}{2x^2-18}=0$ f) $\frac{8x^2-2}{4x^2+4x+1}=0$ i) $\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}=0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x-1}=2$ d) $-\frac{x}{x+2}=x$ g) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{2-x}{x+1}$

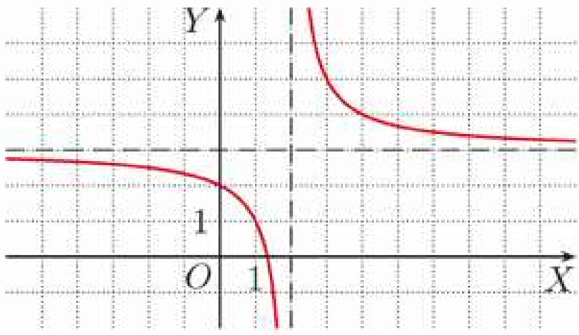
b) $\frac{x+1}{3-x}=1$ e) $\frac{x}{x-4}=x-3$ h) $\frac{x+4}{x-2}-\frac{x-4}{x+2}=0$

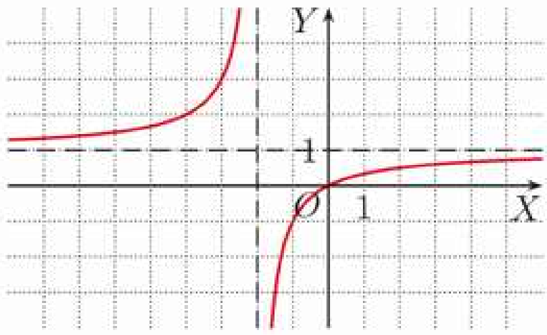
c) $\frac{2x-7}{x}=-5$ f) $\frac{2x+10}{x+5}=x-2$ i) $\frac{x-3}{1-x}+\frac{x+6}{x+2}=0$

10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{a-x}{x}$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y=2$ oraz prostą $y=x$.

a) $a=2$ b) $a=-1$ c) $a=1$ d) $a=-2$

11. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x)=\frac{x}{x+2}$ i $g(x)=\frac{3x-4}{x-2}$.

I.


II.


a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g.

b) Rozwiąż równania: $g(x)=x$ oraz $f(x)=-x$.

12. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x)>1$.

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x>0 \\ -\frac{1}{x} & \text{dla } x<0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x\leqslant -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{dla } x>-1 \end{cases}$

13. Naszkicuj wykres funkcji f. Rozwiąż równanie $f(x)=x$.

a) $f(x)=\frac{x-1}{x}$ c) $f(x)=\frac{x}{1-x}$ e) $f(x)=2+\frac{x+1}{x+3}$

b) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$ d) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ f) $f(x)=-\frac{2-x}{1-x}$

Zestaw II

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x-5}{x-3} \geqslant 0$ c) $\frac{x-3}{x+1} \geqslant \frac{1}{2}$ e) $x - \frac{1}{x} < 0$

b) $\frac{x+2}{x+6} < 0$ d) $\frac{x+2}{x-1} < -2$ f) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(2x-1)^2}{2x-1} \leqslant 0$ c) $\frac{x+2}{x^2-4x} < 0$ e) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x} \geqslant 0$

b) $\frac{x^2-1}{x^2-5x+10} \geqslant 0$ d) $\frac{2x-1}{2x^2-8} > 0$ f) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \leqslant 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x-3} < \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-1} > 2$ c) $\frac{x+3}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2+2x} \geqslant 0$

4. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x \geqslant \frac{4}{x}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x-7}{x-4} \leqslant 2\right\}$

b) $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{x^2+1}{x+1} < 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+2} \geqslant 0\right\}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $|x+3| - x = 7$ c) $|2x-1| + |x-5| = 6$ e) $4|x+1| + |x-1| = 2$

b) $|1-x| + 1 = x$ d) $|1-3x| - |x+6| = -3$ f) $|x-7| = 2 - |4-x|$

6. Wyznacz liczby naturalne x, które spełniają poniższy warunek.

a) $0 < \frac{3}{8-x} \leqslant \frac{1}{x}$ b) $\left|\frac{5}{x-4}\right| > 2$ c) $\left|\frac{x-10}{x}\right| \geqslant 1$

7. Naszkicuj wykres funkcji f. Z wykresu odczytaj, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 2\right|$ b) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$ c) $f(x) = \frac{1}{|x-1|} - 2$

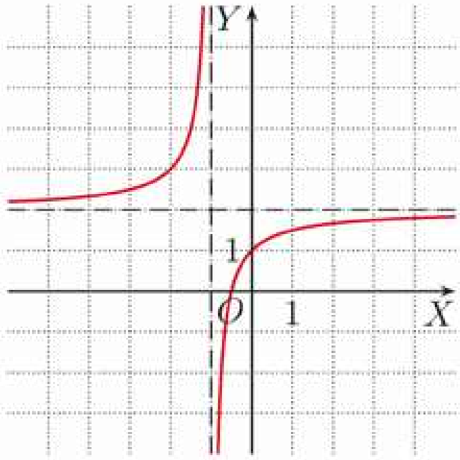
8. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m^2$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ b) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ c) $f(x) = \frac{1}{|x|-1} - 1$

9. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Napisz wzór funkcji $y = g(m)$ określającej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{|x|-1}\right|$ b) $f(x) = \left|\frac{1}{|x|-1} + 2\right|$ c) $f(x) = \left|\left|\frac{2}{x} - 1\right| - 1\right|$

10. Podaj wzór funkcji homograficznej, której wykres przedstawiono na rysunku obok.



a) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby otrzymać wykres funkcji g?

$$g(x) = \frac{-x-3}{x+2}$$

b) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby osiami symetrii otrzymanej hiperboli były proste: $y = x - 4$ i $y = -x - 2$?

11. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = |x|$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$

12. Rozwiąż graficznie i algebraicznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = \left|\frac{2}{x} - 2\right|$, $g(x) = 3$

*b) $f(x) = \left|\frac{4}{|x|-2}\right|$, $g(x) = x - 2$

13. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$, $g(x) = \frac{4}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g(x) = \frac{-6-x}{x+3}$

14. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Dla jakiej wartości parametru m przedział $(-8; 0)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} < m$?

15. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-m}{x}$ i $g(x) = mx$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

16. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych?

a) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = -mx$

b) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = mx$

c) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = (m-1)x$

d) $f(x) = \frac{m-3}{x}$, $g(x) = x + m$

17. Dla jakich wartości parametru m dane proste są równoległe, a dla jakich prostopadłe?

a) $y = \frac{-m}{m-1}x + 3$ i $y = \frac{1-m}{m+2}x$

b) $y = \frac{1}{1-m^2}x - 5$ i $y = \frac{m+1}{m-1}x$

18. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $\frac{mx+2}{x^2+1} > 0$

b) $\frac{3x^2-2x+1}{-x^2+mx-1} < 0$

*c) $\frac{(m-3)x+3}{-x^2+x-2} > -2$

Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$, gdzie $x \neq 3$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Rozpatrujemy dwa przypadki ze względu na znak mianownika.

1° $x - 3 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 3)$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \ / \cdot (x-3)$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

$$2x - 2 > x - 3$$

$$x > -1$$

Zatem $x \in (-1; 3)$.

2° $x - 3 > 0$, czyli $x \in (3; \infty)$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \ / \cdot (x-3)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności.

$$2x - 2 < x - 3$$

$$x < -1$$

Sprzeczność z założeniem.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

II sposób

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika ułamka.

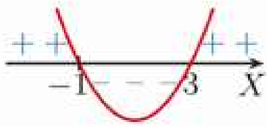
$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \ / \cdot (x-3)^2 \qquad (x-3)^2 > 0$$

$$(2x-2)(x-3) < (x-3)^2$$

$$(2x-2)(x-3) - (x-3)^2 < 0$$

$$(x-3)((2x-2)-(x-3)) < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$



Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

III sposób

Postępujemy następująco:

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - 1 < 0$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Wykorzystujemy fakt, że iloraz i iloczyn mają ten sam znak i rozwiązujemy nierówność $(x-3)(x+1) < 0$, tak jak w II sposobie.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest spełniona dla $x \in (-1; 3)$.

Odpowiedź: $x \in (-1; 3)$

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Punkty $P(1,2)$ i $Q(3,4)$ należą do wykresu funkcji:

A. $f(x) = \frac{3x-6}{x-2}$, **B.** $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, **C.** $f(x) = \frac{x-7}{x-4}$, **D.** $f(x) = \frac{2x+6}{x+3}$.

2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{-4}{x-p} + q$ dla:

A. $p = -3$, $q = 0$, **B.** $p = 2$, $q = -1$, **C.** $p = 4$, $q = -3$, **D.** $p = 1$, $q = 2$.

3. Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$ jest funkcja:

A. $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$, **B.** $f(x) = \frac{6}{x+2}$, **C.** $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$, **D.** $f(x) = \frac{1}{x+2} + 8$.

4. Liczby -5 i 1 są rozwiązaniami równania:

A. $\frac{8-8x}{x-1} = x - 3$, **B.** $\frac{2-6x}{x+1} = x - 3$, **C.** $\frac{6x+30}{x+5} = x + 5$, **D.** $\frac{x+5}{x+1} = x + 5$.

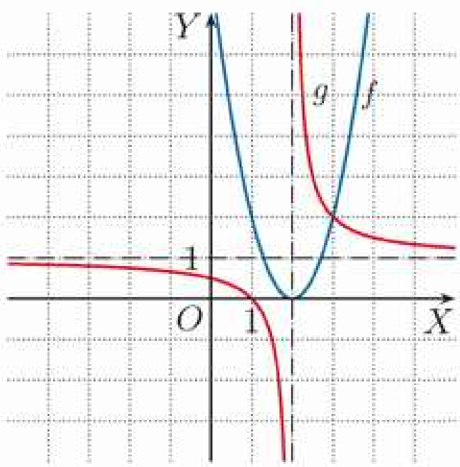
5. Zbiór $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ jest zbiorem wartości funkcji:

A. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, **B.** $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$, **C.** $f(x) = \frac{x}{x-2}$, **D.** $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

6. Dla ilu liczb całkowitych prawdziwa jest nierówność $\frac{x+5}{x+4} + \frac{5}{x-2} < \frac{1}{x+4}$?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

7. Na rysunku obok przedstawione są wykresy funkcji $f(x) = 2(x-2)^2$ i $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$ jest zbiór:



A. $(3; \infty)$, **B.** $\langle 3; \infty)$, **C.** $(0; 2) \cup \langle 3; \infty)$, **D.** $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$.

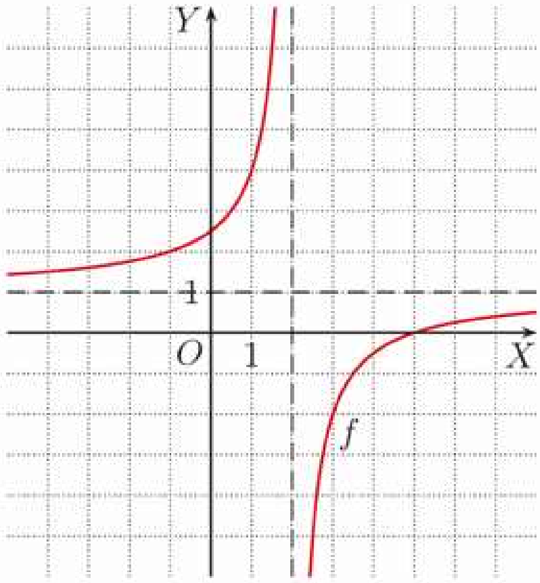
8. Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Płynąc z prądem rzeki, pokonuje trasę długości 24 km w czasie o godzinę krótszym, niż zrobiłby to, gdyby płynął pod prąd. Prąd rzeki ma prędkość:

A. 1 km/h, **B.** 1,5 km/h, **C.** 2 km/h, **D.** 2,5 km/h.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$. Powstał on w wyniku przesunięcia hiperboli $y = -\frac{3}{x}$. Oblicz współczynniki a i b.



Zadanie 2 (2 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a, jeśli wzór funkcji f można zapisać w postaci $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{x}$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $|6x - 3| - |1 - 2x| = 10$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

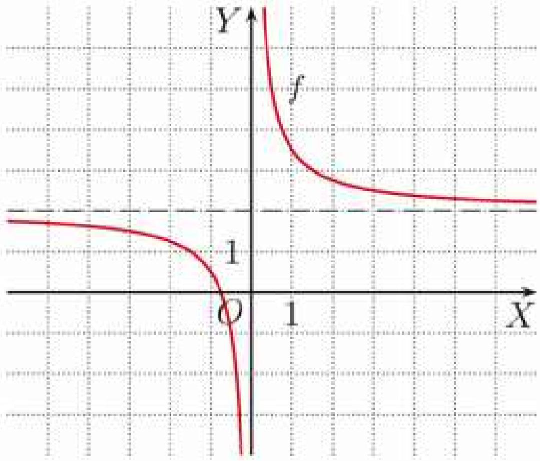
Zadanie 4 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.

a) Podaj wartość współczynnika b i oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{1}{2}; 6 \rangle$.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

$$g(x) = f(x) - \frac{3}{8}x$$



D

Zadanie 5 (3 pkt)

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{9x^3 - x}{9x^3 + 6x^2 + x}$ ma tylko jedno miejsce zerowe.

Zadanie 6 (4 pkt)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył ze średnią prędkością v, a drugą połowę – ze średnią prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t, w jakim pociąg przebył całą trasę, a średnią prędkością v. Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

Zadanie 7 (4 pkt)

Ze stacji A do stacji B, oddalonych od siebie o 100 km, wyjechał pociąg. Po przejechaniu 20 km zatrzymał się z powodu awarii i stał 10 minut. Aby nadrobić opóźnienie, pozostałą część trasy jechał ze średnią prędkością 1,2 raza większą niż przed awarią. Oblicz średnią prędkość, z jaką jechał pociąg na pierwszym odcinku trasy.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Stosunek długości boków prostokąta P_1 jest równy $6:5$. Jeśli każdy bok tego prostokąta skrócimy o $2\frac{2}{3}$, to otrzymamy prostokąt P_2, w którym stosunek boków jest równy $4:3$. Oblicz obwód prostokąta P_1. Zakoduj cyfrę dziesiątek, jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Liczba x_1 jest dodatnim pierwiastkiem równania $\frac{x}{2x-1} = \frac{x-1}{3x-2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_1.

Zadanie 3 (2 pkt)

Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{14}{2x-1} - 3$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x_0.

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba a jest najmniejszą, a liczba b największą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

$$\frac{x^2-14x+24}{x+3} \leqslant 0$$

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ilorazu $\frac{a}{b}$.

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{4x+4}{x+2}\right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania różnych znaków?

Zadanie 6 (5 pkt)

Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^3-x^2-6x}{x^2-2x-8} \geqslant 0$, a zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^2+4}{x^2-4} \leqslant 0$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

Zadanie 7 (3 pkt)

Dana jest funkcja homograficzna $f(x) = \frac{mx-3}{m-x}$. Dla jakich wartości parametru m funkcja ta jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; m)$ i $(m; \infty)$?

Zadanie 8 (5 pkt)

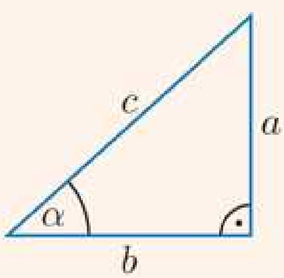
Wykres funkcji g jest symetryczny względem prostej $x = -1$ do wykresu funkcji $f(x) = \frac{10-2x}{x-2}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

Zadanie 9 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ oraz $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$.

4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin\alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c\sin\alpha$.



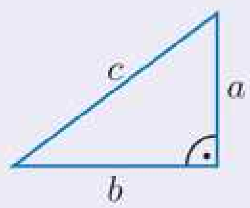
Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65°, wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65^\circ$. Ponieważ $\sin 65^\circ \approx 0{,}9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.

4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia (patrz str. 213–214), tu korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy podobieństwa KKK trójkąty: CBD, ACD i ABC są podobne. Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

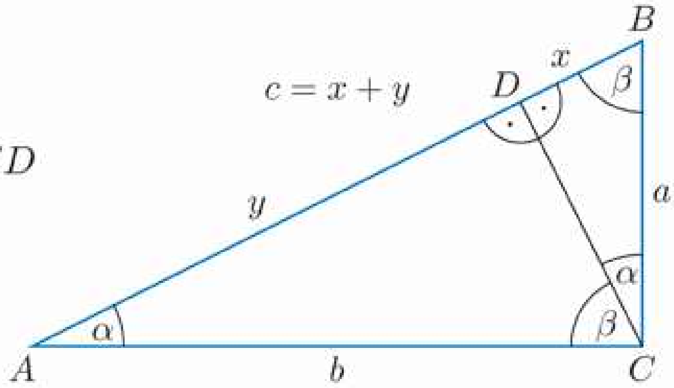
$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Ćwiczenie 1

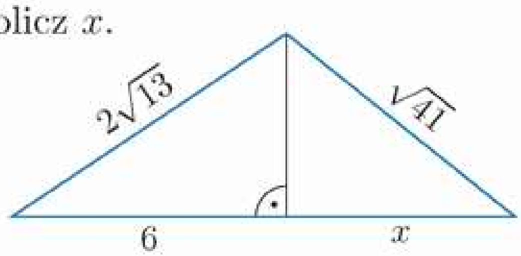
Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 30$, $b = 40$
b) $a = \sqrt{5}$, $b = 2$
c) $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = 2\sqrt{2} + 1$
d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
e) $a = b = 2\sqrt{2}$
f) $a = \frac{1}{b} = 2$

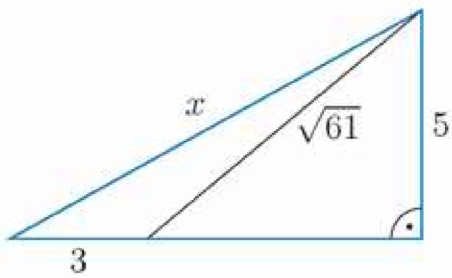
Ćwiczenie 2

Oblicz x.

a)



b)



Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

> Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a, b, c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.

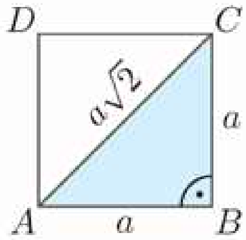
Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy przystawania BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest trójkątem prostokątnym.

a) 3, 4, 5 b) 5, 9, 11 c) 9, 40, 41 d) $\frac{9}{10}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$

Szczególne znaczenie mają dwa trójkąty prostokątne. Jeden z nich to trójkąt będący połową kwadratu, czyli trójkąt o kątach 45°, 45°, 90°.



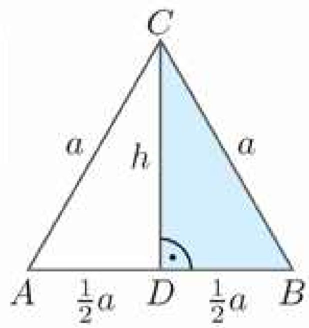
> Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2.

Drugi ważny trójkąt prostokątny to trójkąt będący połową trójkąta równobocznego, czyli trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°.



> Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

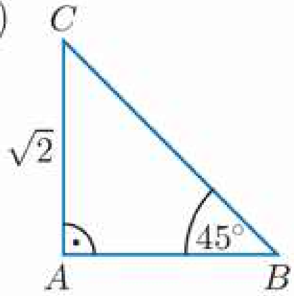
Ćwiczenie 5

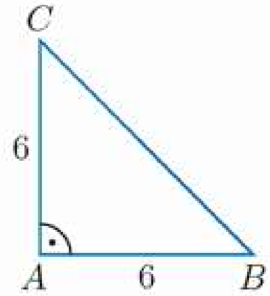
D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

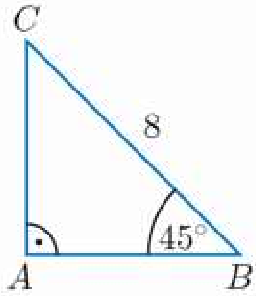
b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

Ćwiczenie 6

Oblicz obwód trójkąta ABC.

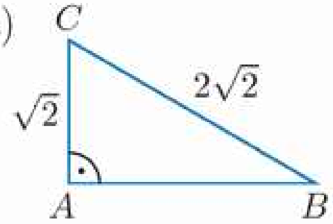
a) 

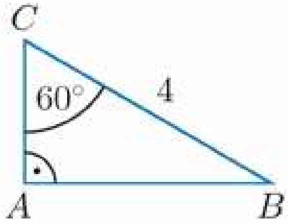
b) 

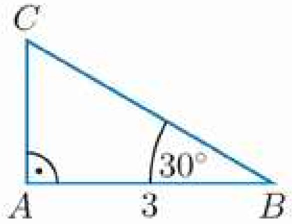
c) 

Ćwiczenie 7

Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) 

b) 

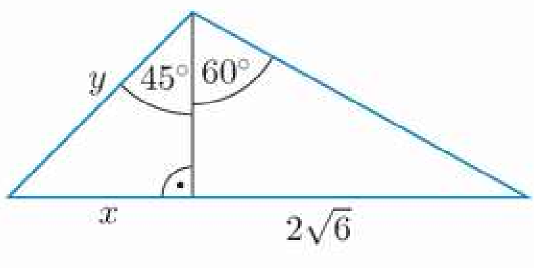
c) 

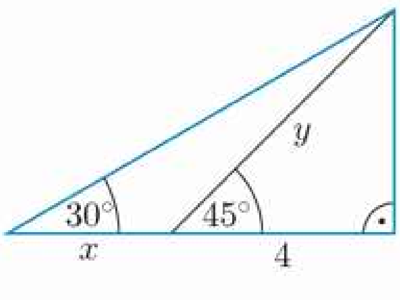
Zadania

1. Oblicz pole równoramiennego trójkąta prostokątnego, którego:
a) obwód jest równy $6(1+\sqrt{2})$,
b) przeciwprostokątna jest o $1+\sqrt{2}$ dłuższa od przyprostokątnej.

2. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że różnica długości jego przyprostokątnych jest równa $12-4\sqrt{3}$.

3. Oblicz x i y.

a) 

b) 

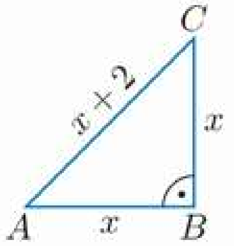
4. a) Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość 15 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120°. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45°, a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

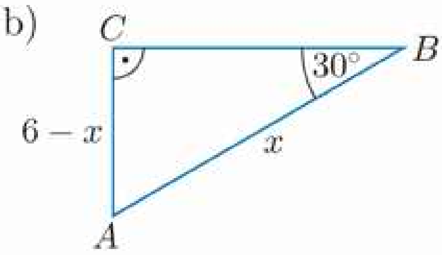
5. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60°, a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

6. Oblicz obwód trójkąta ABC.

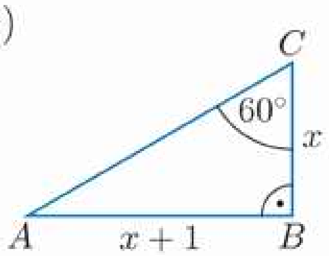
a)



b)



c)

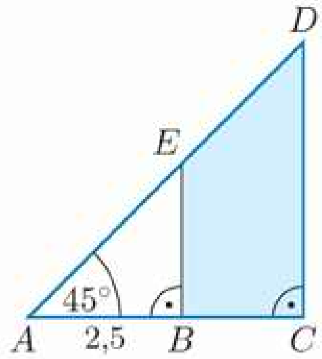


7. a) Oblicz wysokość rombu o kącie ostrym 60° i obwodzie $32\sqrt{3}$ cm.

b) Oblicz obwód rombu o kącie ostrym 45° i wysokości $10\sqrt{2}$ cm.

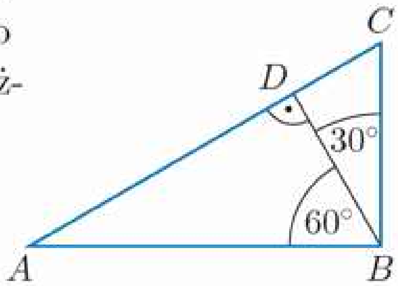
8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Oblicz wysokości trójkąta APC.

9. Oblicz obwód trójkąta ACD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że krótsza przekątna trapezu $BCDE$ ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{41}$.



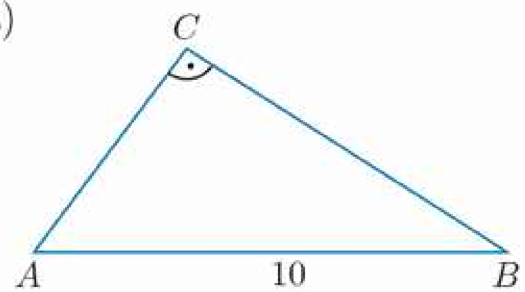
10. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego kąta, a suma długości jego przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$.

11. Oblicz obwód trójkąta ABD (rysunek obok), jeśli pole trójkąta BCD jest równe $3\sqrt{3}$.

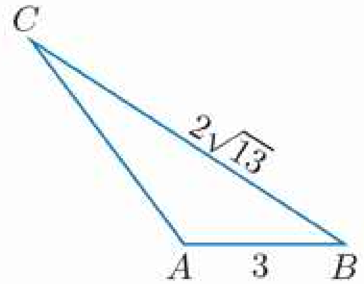


12. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

a)



b)



13. a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

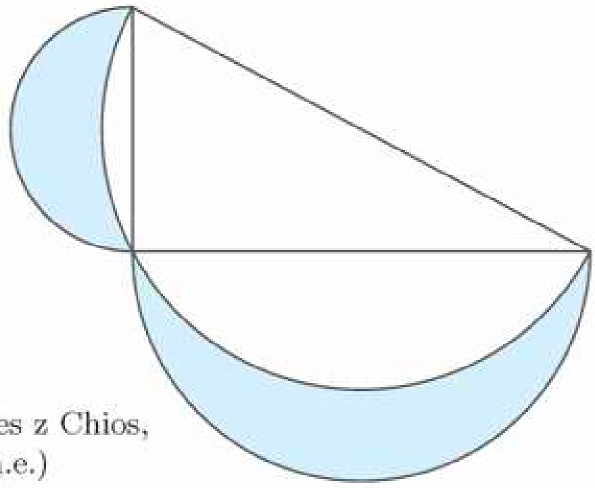
b) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60°, a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

14. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

b) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

15. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

***16.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 cm i 15 cm. Boki trójkąta są średnicami półokręgów, które wyznaczają księżyce Hipokratesa (rysunek obok). Oblicz sumę pól tych księżyców i porównaj ją z polem trójkąta.



Księżyce Hipokratesa (Hipokrates z Chios, grecki matematyk z V wieku p.n.e.)

***17.** a) Z kwadratu o boku 1 odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz obwód tego ośmiokąta.

b) Z kwadratu odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny o boku 1. Oblicz obwód tego kwadratu.

Czy wiesz, że…

Liczby naturalne a, b, c wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**. Są nimi na przykład:

3, 4, 5, bo $3^2 + 4^2 = 5^2$, również 6, 8, 10 czy 9, 12, 15

5, 12, 13, bo $5^2 + 12^2 = 13^2$, również 10, 24, 26

7, 24, 25, bo $7^2 + 24^2 = 25^2$, również 14, 48, 50

Wszystkie trójki pitagorejskie możemy otrzymać, korzystając ze wzorów:

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2, \quad \text{gdzie } x > y \text{ oraz } x, y \in \mathbf{N}_+$$

lub biorąc wielokrotności otrzymanych liczb.

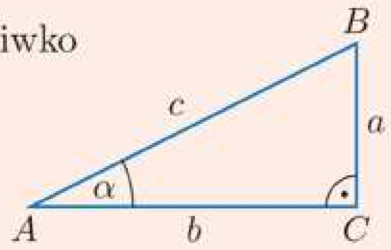
D **18.** Wykaż, że jeśli a, b, c są określone powyższymi wzorami, to $a^2 + b^2 = c^2$. Korzystając z tych wzorów, znajdź trójki pitagorejskie dla:

a) $x = 4,\ y = 3$, b) $x = 5,\ y = 2$, c) $x = 6,\ y = 1$, d) $x = 3,\ y = 2$.

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

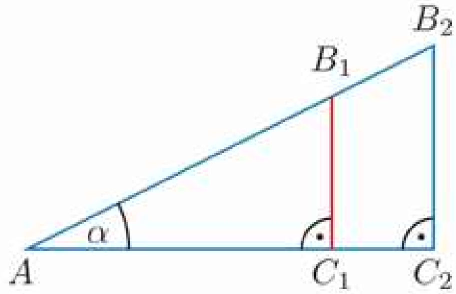
Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta nazywamy **cotangensem** tego kąta.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α.

Zwróć uwagę, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α. Z podobieństwa trójkątów: AB_1C_1, AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin\alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



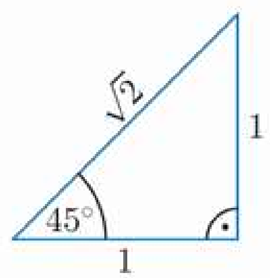
D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha < 1 \quad \text{i} \quad \cos\alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45°.

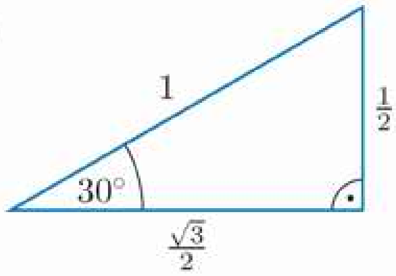


$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.



$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

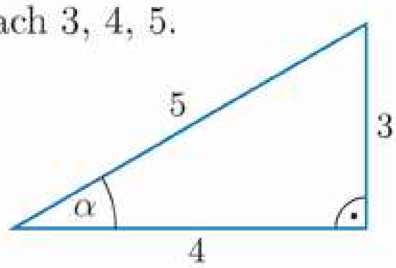
$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60°.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.



$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

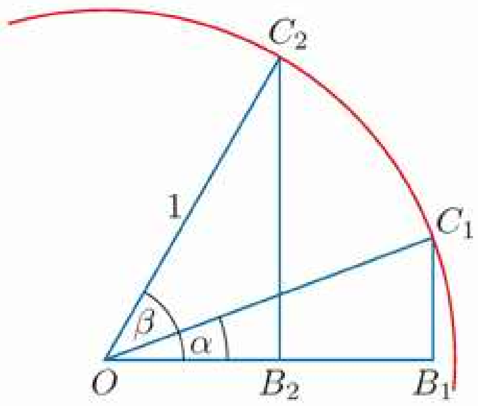
$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3} = 1{,}(3)$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c.

a) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ $\quad$ b) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$ $\quad$ c) $a = 1$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 3$

Dla kątów ostrych α i β z nierówności $\alpha < \beta$ wynika nierówność $\sin \alpha < \sin \beta$. Aby to uzasadnić, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 i OB_2C_2 (rysunek obok). Punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1.



Zauważ, że $\sin \alpha = |B_1C_1|$, $\sin \beta = |B_2C_2|$ oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin \alpha < \sin \beta$.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos \alpha > \cos \beta$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach długości:

a) 6, 8, 10, $\quad$ c) 1, 4, $\sqrt{17}$, $\quad$ e) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5,

b) 7, 24, 25, $\quad$ d) 1, 4, $\sqrt{15}$, $\quad$ f) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 2.

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	1	?

Czy wiesz, że…

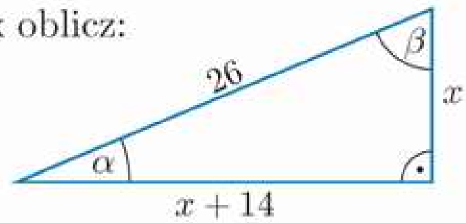
Skrót *sin* pochodzi od łacińskiego słowa *sinus* – zagięcie, zatoka;
cos to skrót od *complementi sinus*, czyli sinus dopełnienia;
tg – skrót słowa *tangens* oznaczającego styczną.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 i 2 dzieli go na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:

a) długości przyprostokątnych,

b) wartości: $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$ oraz $\sin\beta, \cos\beta, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{ctg}\beta$.



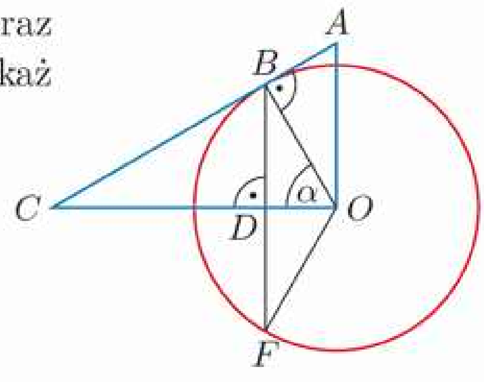
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 9 i 10. Jedna z przekątnych dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego: a) przekątną, b) ramieniem.

8. Dane są okrąg o środku O i promieniu 1 oraz trójkąt prostokątny AOC (rysunek obok). Wskaż odcinek, którego długość jest równa:

a) $\sin\alpha$, b) $\cos\alpha$, c) $\operatorname{tg}\alpha$, d) $\operatorname{ctg}\alpha$.

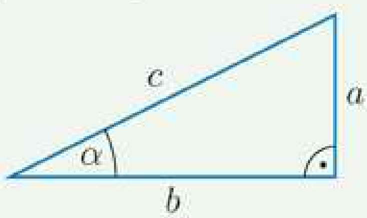


D **9.** Uzasadnij, że na rysunku obok:

a) $|CO| = \frac{1}{\cos\alpha}$, b) $|AO| = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Rozpatruje się również funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

- cosecans kąta α: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$
- secans kąta α: $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$

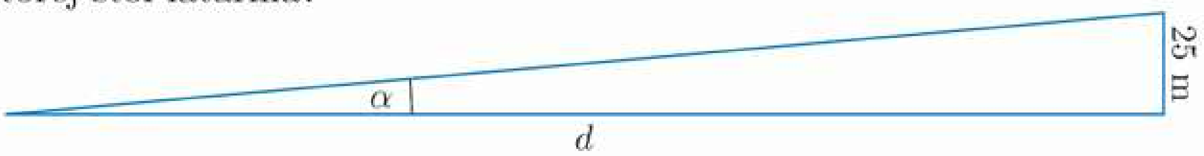


4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 384. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?

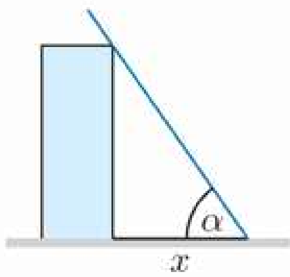


Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0{,}0875$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{25}{0{,}0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

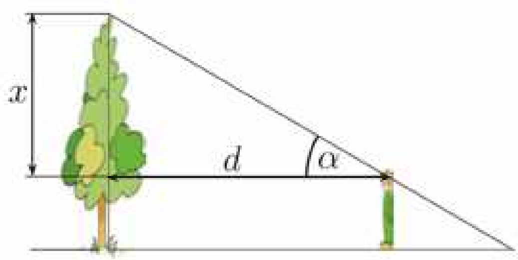
Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α.



a) $x = 5$ m, $\alpha = 58^\circ$ b) $x = 12$ m, $\alpha = 39^\circ$

Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?



$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$

Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0{,}5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0{,}5543 \approx 36$ [m]. Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1{,}5 = 37{,}5$ [m].

Ćwiczenie 2

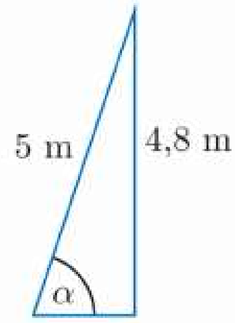
Przyjmij jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, i oblicz wysokość drzewa, jeśli:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m, b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Przykład 3

Drabinę długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?



$\sin\alpha = \frac{4,8}{5} = 0{,}96$. Z tabeli odczytujemy: $\alpha \approx 74^\circ$.

Ćwiczenie 3

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

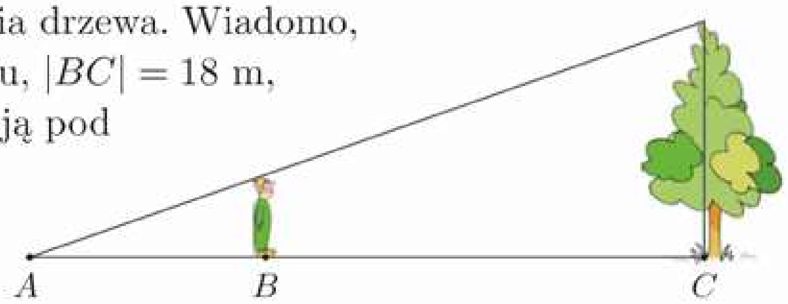
b) 4,5 m, jeśli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania

1. Naciągnięty sznurek długości 20 m, na którego końcu zamocowany jest latawiec, tworzy z poziomem kąt 70°. Jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec?

2. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53°?

3. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Wiadomo, że uczeń ma 180 cm wzrostu, $|BC| = 18$ m, a promienie słoneczne padają pod kątem 31° do powierzchni ziemi. Jaka jest wysokość drzewa?



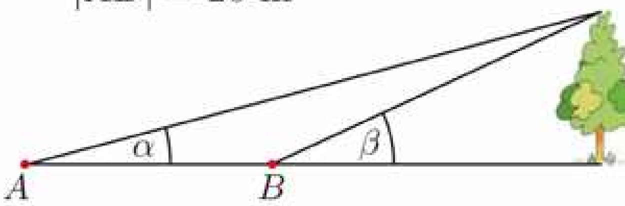
4. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72°. Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?

5. a) Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m?

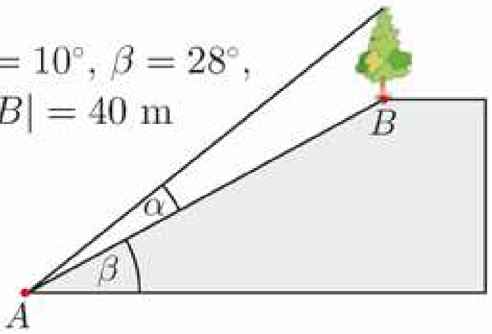
b) Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54°. Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?

6. Oblicz wysokość drzewa.

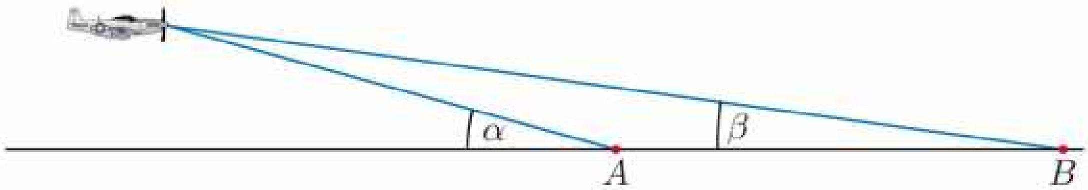
a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $|AB| = 20$ m



b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 28^\circ$, $|AB| = 40$ m



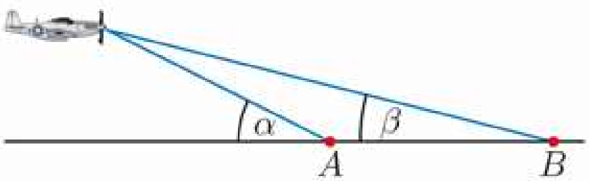
7. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



8. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4°. Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

9. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaką wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

10. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?



11. a) Wierzchołek komina widać z punktu A pod kątem 26°, a z punktu B pod kątem 40°. Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Komin ma wysokość 20 m. Jaka jest odległość między punktami A i B (pomiń grubość komina)? Rozpatrz dwa przypadki.

b) Wierzchołek komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 42°, a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 61°. Oblicz wysokość komina.

D **12.** Obserwator stojący na szczycie latarni morskiej na wysokości a metrów nad poziomem morza zobaczył pod kątem α do poziomu łódź płynącą w kierunku latarni. Po pewnym czasie znów spojrzał w tym kierunku i zobaczył tę samą łódź pod kątem β wciąż płynącą w kierunku latarni. Wykaż, że odległość, jaką łódź przepłynęła między kolejnymi obserwacjami, była równa $a(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)$.

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i wyznaczenie miar jego trzech kątów.
Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków

lub

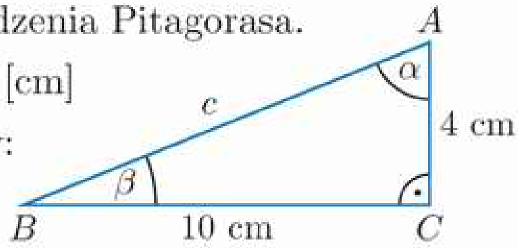
- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych: 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

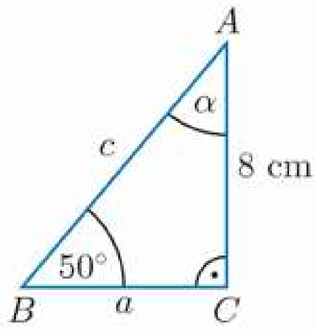
$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$



$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Z tablic (str. 384) odczytujemy: $\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 50° ma długość 8 cm.



$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0{,}766$, stąd $c \approx 10{,}44$ cm.

$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}1918$, stąd $a \approx 6{,}71$ cm.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że:

a) dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
b) długości przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
c) przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37°,
d) długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

1 **minuta** (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.
1 **sekunda** (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.
Na przykład $24{,}5^\circ = 24^\circ 30'$.

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$
$1^\circ = 3600''$

Przykład 3

Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta $45°$.

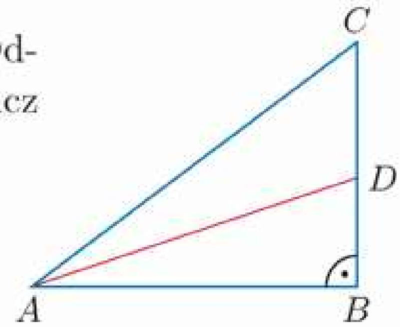
$$\frac{45°}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

a) $360°$, b) $4°$, c) $15°$, d) $12°$, e) $42°$.

Przykład 4



Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC. Oblicz miary kątów trójkąta ADC, jeśli $|AB| = 8$, $|BC| = 6$.

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \tfrac{6}{8} = 0{,}75, \text{ czyli } \sphericalangle BAC \approx 37°$$

Zatem: $\sphericalangle CAD \approx \frac{1}{2} \cdot 37° = 18°30'$

$\sphericalangle ACD \approx 90° - 37° = 53°$

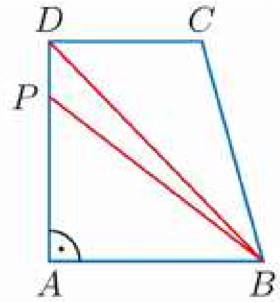
$\sphericalangle ADC \approx 180° - 18°30' - 53° = 108°30'$

Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku A kąt BCA ma miarę $55°$, a $|CB| = 10$. Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD, jeśli punkt D należy do boku AB oraz odcinek CD jest:

a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA, b) środkową trójkąta ABC.

Zadania



1. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43°46'25''$, a kąt ABC – miarę $73°42'10''$.

a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD.

b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP, jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC.

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

a) 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\sphericalangle CAB = 34°$, $|CB| = 6$, b) $\sphericalangle CBA = 66°$, $|AB| = 10$.

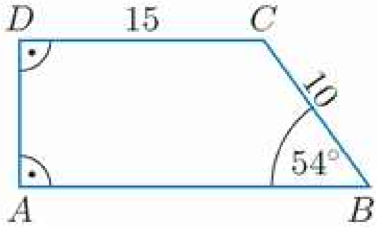
4. Oblicz obwód i pole trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie $37°$.

5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

c) W trapezie równoramiennym przekątna o długości 13 cm tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 5 cm.

6. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).

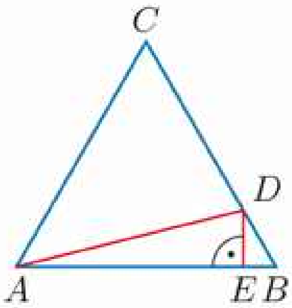


7. a) Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku $2:1$. Oblicz miary kątów deltoidu.

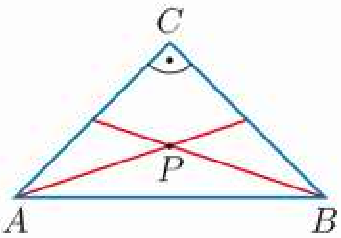
b) Obwód równoległoboku jest równy 90, a wysokość opuszczona na bok długości 30 jest równa 10. Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

8. Wyznacz kąty rombu, jeśli wysokość poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku $1:3$.

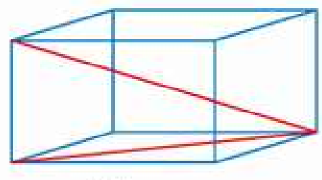
9. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 12 na boku CB obrano taki punkt D, że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED. Rozwiąż trójkąt ABD.



10. Środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o ramieniu długości 6 cm przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Rozwiąż trójkąt ABP.



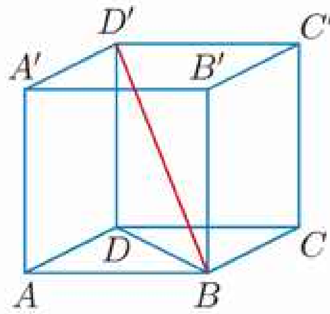
11. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy długości 1 i 3 oraz wysokości 2 (rysunek obok). Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.



12. Dany jest sześcian o krawędzi a (rysunek obok). Wyznacz obwód i miary kątów ostrych trójkąta:

a) BDD',

b) $DD'O$, gdzie O jest środkiem odcinka BD.



4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

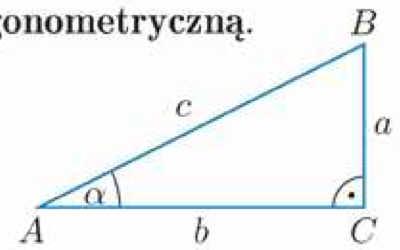
Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są poniższe zależności.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Uwaga. Zapis $\sin^2\alpha$ oznacza $(\sin\alpha)^2$, analogicznie $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.



Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich, jak na rysunku obok:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Zauważ, że w przedstawionym dowodzie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z tożsamości podanych w ramce – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz $\cos\alpha$, jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz α jest kątem ostrym.

Wartość $\cos\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Przykład 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Wartość $\sin\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2\alpha + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Obliczamy wartości $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

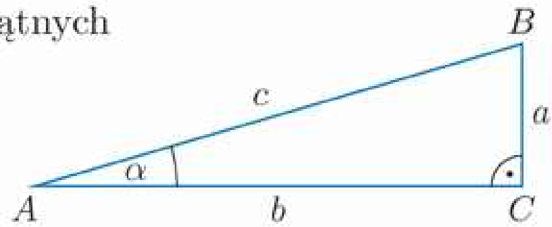
a) $\sin\alpha = 0{,}8$, b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, c) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, d) $\sin\alpha = \frac{1}{17}$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

Przykład 3

Oblicz: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ oraz α jest kątem ostrym.

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:



$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem:

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$, d) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

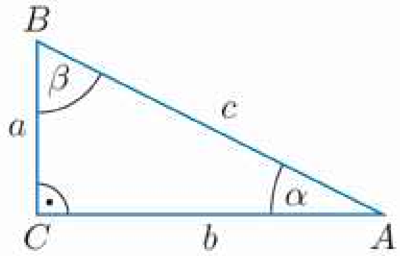
a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, d) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
3. $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
4. $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

D **Ćwiczenie 5**

Uzasadnij podane wyżej tożsamości trygonometryczne: 2., 3. i 4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$.

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\alpha = 0{,}8$, c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, g) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\frac{2}{5}$,

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, d) $\sin\alpha = 0{,}4$, f) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$, h) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{4}{5}$.

2. a) Oblicz sinus kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że jest on trzy razy większy od cosinusa tego kąta.

b) Oblicz cosinus kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że jest on dwa razy większy od sinusa tego kąta.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ c) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ d) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{5} - 2$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{5} + 2$

4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że α jest jednym z kątów ostrych tego trójkąta oraz:

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 10 cm,

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 39 cm.

5. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

b) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\dfrac{6\sin\alpha - 8\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

b) $\dfrac{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}{1 - \sin^2\alpha}$

7. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = m$. Wyznacz wartość wyrażenia.

a) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)$

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

d) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$

D **8.** Uzasadnij tożsamość podaną w ramce obok. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

D **9.** Uzasadnij tożsamość podaną w ramce obok. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$, b) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{21}$.

10. Kąt α jest kątem ostrym i $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$

D **11.** Wykaż, że dla kąta ostrego α podana równość jest tożsamością.

a) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \sin^2\alpha$

b) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = \cos^2\alpha$

c) $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$

d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

e) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

f) $\dfrac{\sin^4\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^4\alpha - \cos^2\alpha} = 1$

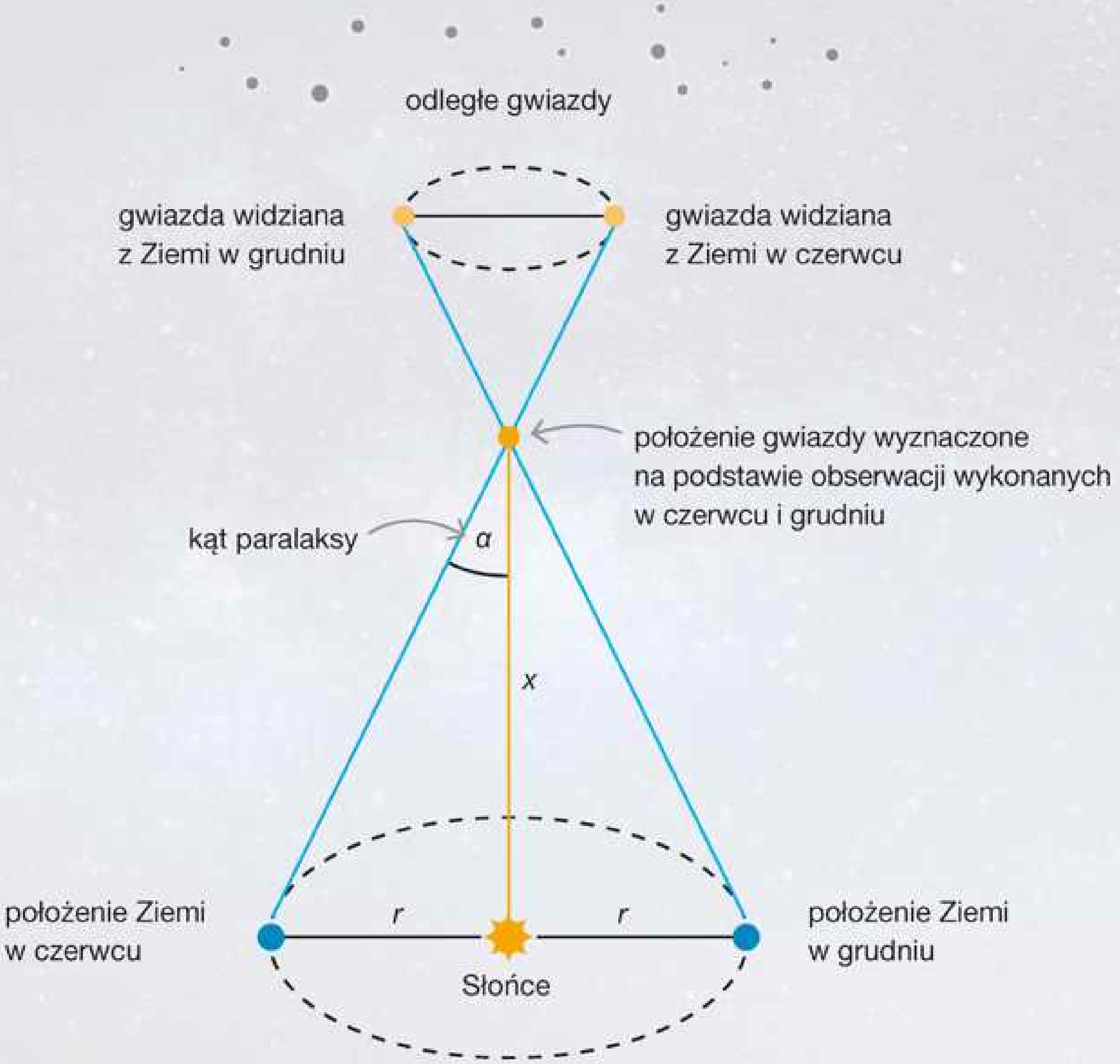
Czy wiesz, że…

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

A α alfa	H η eta	N ν ni	T τ tau
B β beta	Θ θ teta	Ξ ξ ksi	Υ υ ypsilon
Γ γ gamma	I ι jota	O o omikron	Φ ϕ fi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ε epsilon	Λ λ lambda	P ρ ro	Ψ ψ psi
Z ζ dzeta	M μ mi	Σ σ sigma	Ω ω omega

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.



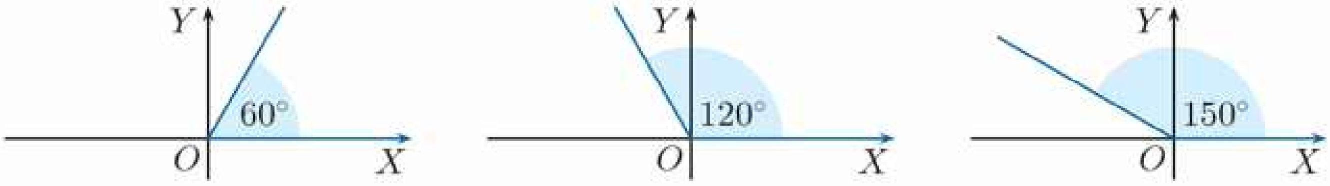
Do wyznaczenia kąta paralaksy możemy wykorzystać obserwacje wykonane w czerwcu i grudniu, gdy Ziemia znajduje się w dwóch przeciwległych położeniach na swojej orbicie wokół Słońca (patrz rysunek). Oznaczmy przez r średnią odległość Ziemi od Słońca, równą w przybliżeniu 150 mln km (wielkość ta została nazwana **jednostką astronomiczną**). Odległość x obliczamy, korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{x}$, gdzie α – kąt paralaksy.

1 Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0{,}77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0{,}77'' \approx 0{,}00000373$.

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX. Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

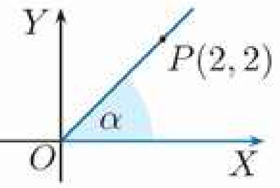
Figurę nazwamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$.



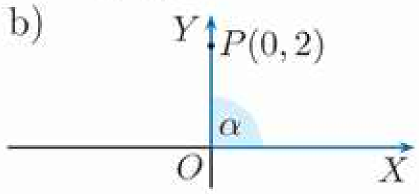
Ćwiczenie 1

Jaka jest miara kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt P? Podaj współrzędne innego punktu należącego do ramienia końcowego tego kąta.

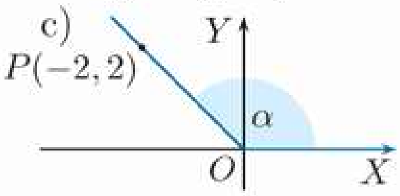
a)



b)



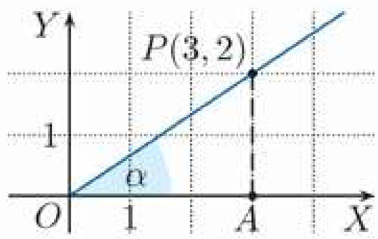
c)



Przykład 1

Dany jest trójkąt POA, gdzie $P(3,2)$ i $A(3,0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.

Rysujemy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok). Oznaczmy miarę kąta POA przez α. Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:



$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$.

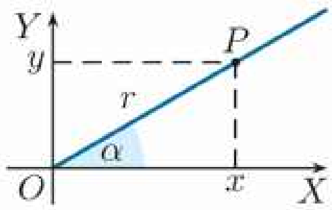
Ćwiczenie 2

Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.

a) $P(3,4)$, $A(3,0)$ b) $P(6,8)$, $A(6,0)$ c) $P(\sqrt{3},1)$, $A(\sqrt{3},0)$

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$
$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



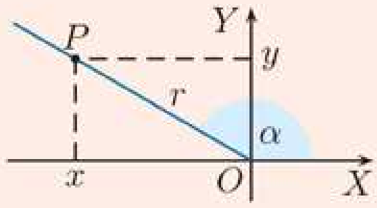
Podane wyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$.

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\quad$ gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad (x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90°)$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $\quad (y \neq 0$, czyli $\alpha \neq 0°$ i $\alpha \neq 180°)$.

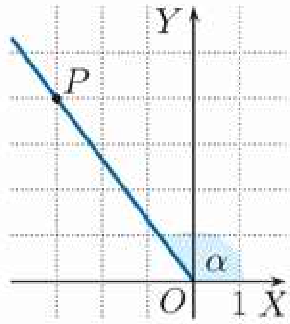


Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{y}{x} = -\tfrac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \tfrac{x}{y} = -\tfrac{3}{4}$$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.



Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

a) $P(-4, 3)$, $Q(-8, 6)$ $\qquad$ b) $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $Q(-2, 6)$

Dla $\alpha \in (0°; 90°)$ zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha > 0, \quad \cos\alpha > 0, \quad \operatorname{tg}\alpha > 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha > 0$$

Dla $\alpha \in (90°; 180°)$ zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha > 0, \quad \cos\alpha < 0, \quad \operatorname{tg}\alpha < 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha < 0$$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α, które są dla niego określone.

a) $\alpha = 0°$ $\qquad$ b) $\alpha = 90°$ $\qquad$ c) $\alpha = 180°$

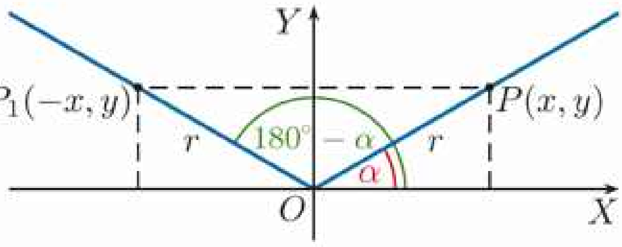
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej). Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha$



Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$, jeżeli punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$.

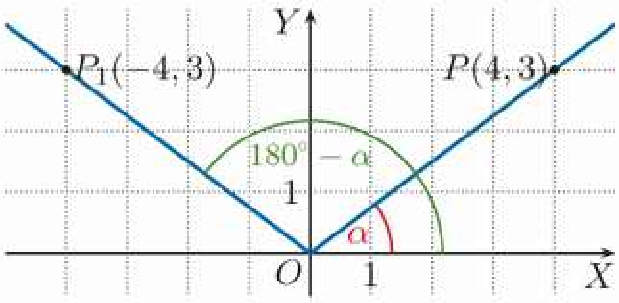
$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{3}$



Ćwiczenie 5

Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

> Dla $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzą wzory:
>
> $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$
>
> $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ$ i $\alpha \neq 180^\circ$

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 6
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

Dla $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są zależności:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ,\ 180^\circ$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ$

D **Ćwiczenie 7**

Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

Przykład 5
Oblicz $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2\alpha = \tfrac{15}{16}, \text{ stąd } \cos\alpha = \tfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ lub } \cos\alpha = -\tfrac{\sqrt{15}}{4}$$

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ cosinus jest ujemny, więc ostatecznie $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ćwiczenie 8
Oblicz $\cos^2\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

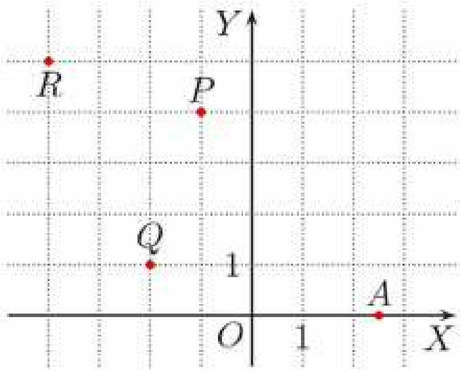
Ćwiczenie 9
Oblicz $\sin^2\alpha$ i $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

a) $\sphericalangle AOP$ b) $\sphericalangle AOQ$ c) $\sphericalangle AOR$



2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\sin\alpha - \sin\beta$.

a) $P(-2,4)$, $Q(4,2)$ b) $P(-9,3)$, $Q(2,6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\cos\alpha + \cos\beta$.

a) $P(3,1)$, $Q(-1,\frac{1}{2})$ b) $P(-2,4)$, $Q(-4,2)$ c) $P(-2,\sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

4. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ b) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ c) $4\cos 150^\circ - 3\operatorname{tg} 135^\circ$

5. Oblicz.

a) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3\operatorname{tg} 150^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ e) $\frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$

b) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 384), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.
>
> $\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0{,}8192$
>
> $\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0{,}9781$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

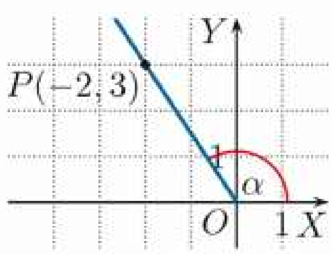
7. Oblicz: $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

a) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. Oblicz: $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$, taki że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
>
> Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, więc np. punkt $P(-2,3)$ należy do ramienia końcowego kąta α. Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy ramię końcowe kąta α.
>
> $r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,
>
> stąd $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
>
> $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.
>
> 
>

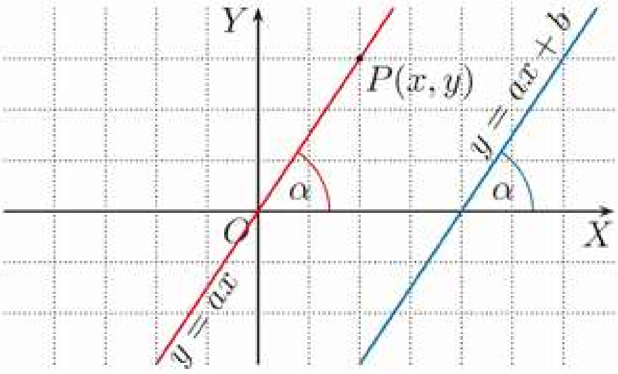
Narysuj w układzie współrzędnych odpowiedni kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ oraz oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

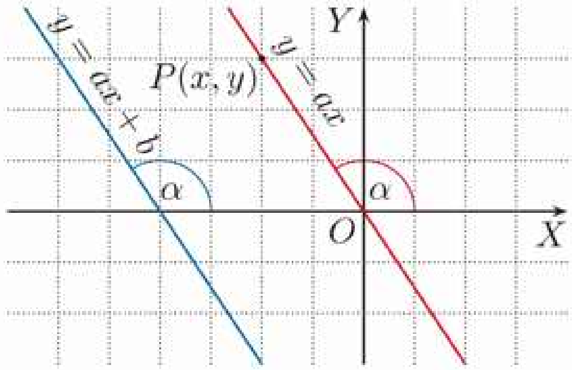
Warto wiedzieć

Współczynnik kierunkowy prostej

$a > 0$



$a < 0$



Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

> Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX:
>
> $$a = \operatorname{tg}\alpha$$

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y + x = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

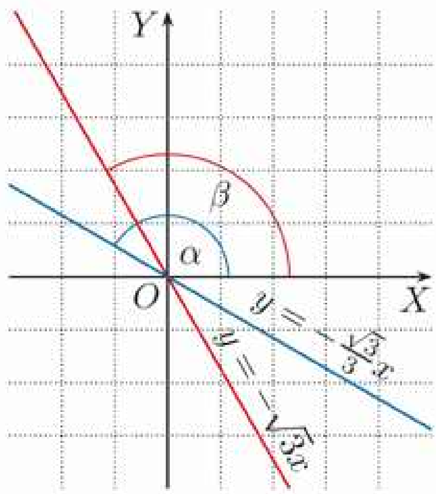
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \text{i} \quad y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150^\circ$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120^\circ$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\alpha - \beta = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



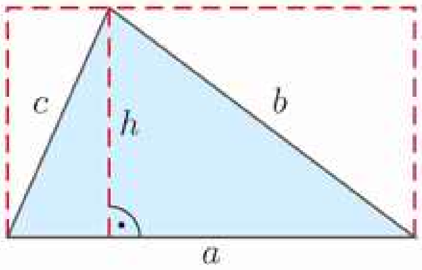
Wyznacz miarę kąta między prostymi:

a) $y = -\sqrt{3}x$ i $y = x$, b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = -x + 2$.

4.7. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



Ćwiczenie 1

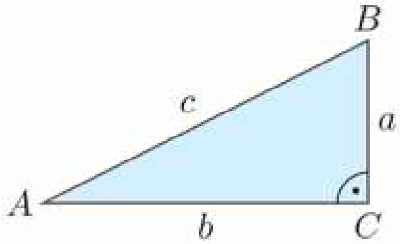
Oblicz pole trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 28 cm, jeśli:

a) jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,

b) cosinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



Ćwiczenie 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 26 cm, jeśli:

a) sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,

b) tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,

c) jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu 4,5 cm^2.

b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2})$ cm.

Ćwiczenie 4

D a) Udowodnij podany obok wzór.

b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3}$ cm.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5

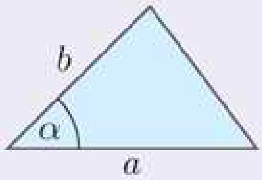
a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3}$ cm^2.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



Dowód

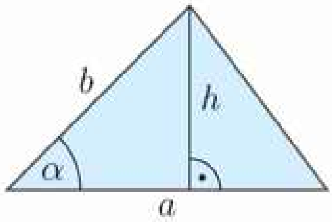
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6.).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, więc $h = b\sin\alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

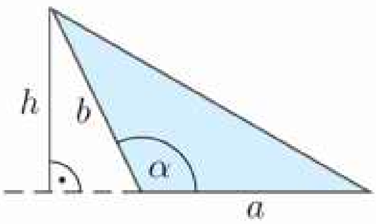


2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b\sin(180^\circ - \alpha)$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \alpha)$.



Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ i otrzymujemy $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC, gdy:

a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$,

b) $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$,

c) $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 100^\circ$,

d) $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle ABC = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC o polu 12 cm^2 bok AB ma długość 4 cm. Oblicz długość boku AC, jeśli wiadomo, że kąt CAB ma miarę:

a) 30°, b) 45°, c) 120°.

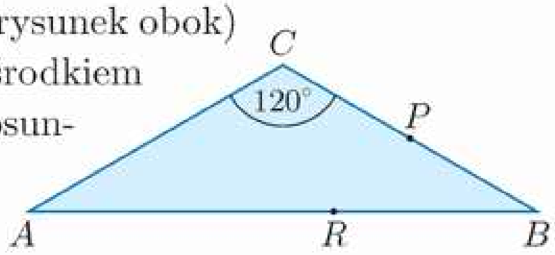
Zadania

1. a) Oblicz pole trójkąta ABC, gdy $|AB| = 7$, $|AC| = 5$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$.

b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm, a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.

2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3})$ cm. Punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:

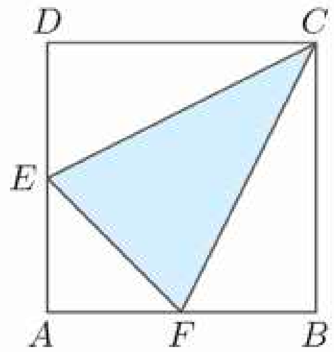
a) APC, b) ARC, c) PRB.



3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 36 cm^2.

b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3}$ cm^2 stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



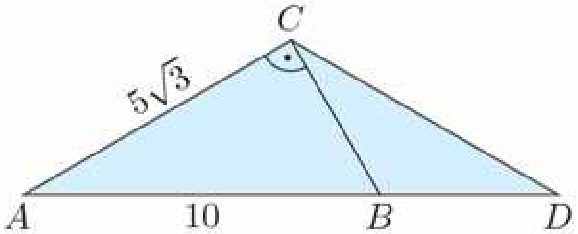
5. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45°.

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.

b) Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$. Oblicz pola powstałych trójkątów.

6. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi 0,3. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że $|BC| = |BD|$.



8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b. Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?

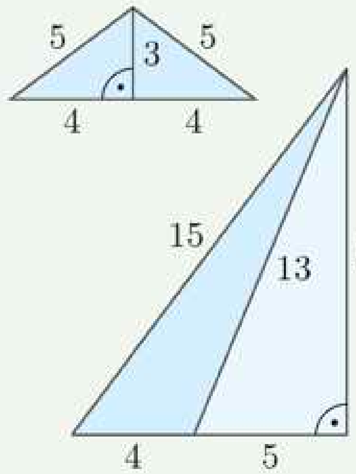
Czy wiesz, że...

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona (Heron z Aleksandrii, I wiek n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.



Przykładem trójkąta Herona jest trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).

9. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona. Czy trójkąt ten jest trójkątem Herona?

a) 3, 4, 5
b) 4, 5, 7
c) 5, 5, 6
d) 4, 6, 8
e) 9, 10, 17
f) 7, 15, 20

D **10.** Dany jest trójkąt, w którym kąt między bokami o długościach x i $2x$ ma miarę 120°. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości x.

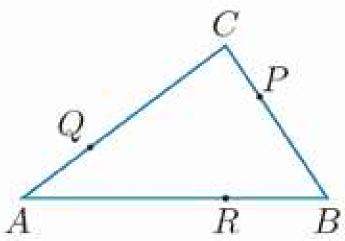
D **11.** Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie równej a i kącie przy podstawie 15°. Uzasadnij, że jeśli wysokość opuszczona na podstawę jest równa h, to ramię tego trójkąta ma długość $\sqrt{2ah}$.

D **12.** Miary kątów trójkąta wynoszą odpowiednio: α, β, γ, a jego pole jest równe P. Wykaż, że:

$$a = \sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

gdzie a jest długością boku leżącego naprzeciw kąta α.

* **13.** Pole trójkąta ABC jest równe 21 (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta, którego boki są zawarte w prostych: AP, BQ i CR, jeśli $|RB| = \frac{1}{3}|AB|$, $|PC| = \frac{1}{3}|BC|$ oraz $|QA| = \frac{1}{3}|CA|$.



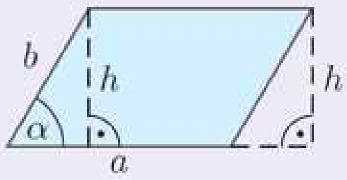
4.8. Pole czworokąta

Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a jego kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz wysokości tego równoległoboku i jego pole.

D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij podany obok wzór.

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie ostrym α wyraża się wzorem $P = ab\sin\alpha$.

Ćwiczenie 3

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45°, b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30°.

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

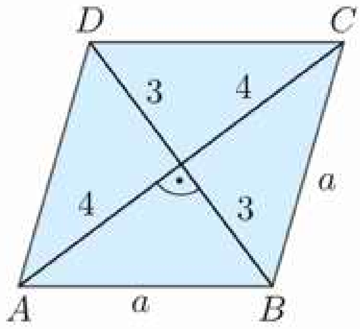
D **Ćwiczenie 5**

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

Przykład 1

Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?



Długość boku rombu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5$ cm.

Pole rombu: $P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ [cm²].

Ale jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ [cm]}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz pole i wysokość rombu o boku:

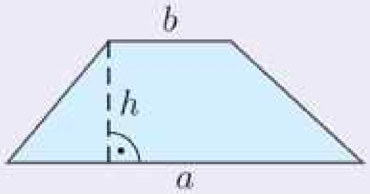
a) 13 cm i dłuższej przekątnej równej 24 cm,

b) 6 cm i kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu o podstawach długości a, b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

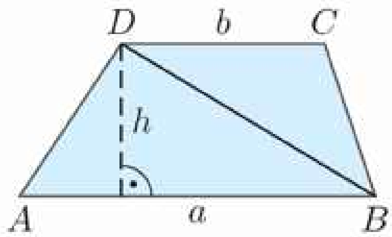


Uzasadnienie wzoru na pole trapezu

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD. Trójkąty te mają taką samą wysokość h, a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



Ćwiczenie 7

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, jeśli wiadomo, że:

a) jego podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,

b) jego ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$,

c) jego krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150°,

d) jedna z jego podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Zadania

1. a) Oblicz pole równoległoboku, w którym kąt rozwarty ma miarę 150°, a boki mają długości 4 cm i 9 cm.

b) Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2, a jego obwód 24 cm. Oblicz wysokości tego równoległoboku, jeśli sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25.

D **2.** a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α, to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} pq \sin\alpha$$

b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33°. Oblicz pole tego równoległoboku.

3. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2}$ cm^2 przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej.

D a) Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych.

b) Oblicz obwód tego równoległoboku.

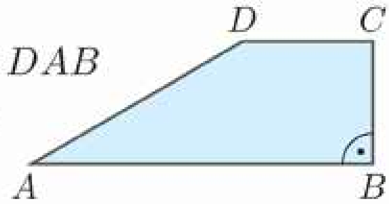
4. a) Przekątne rombu mają długości 12 cm i 16 cm, a jego kąt ostry ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha$.

b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2. Oblicz wysokość tego rombu.

5. W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

6. W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.

7. W trapezie prostokątnym (rysunek obok) sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.

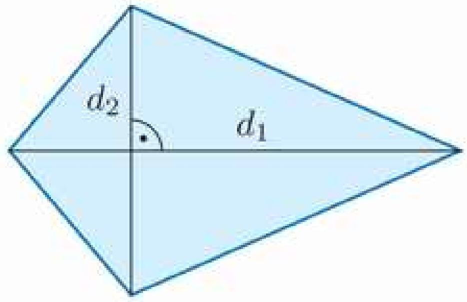


8. a) Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego kąt ostry ma miarę 30°, a podstawy mają długości 4 cm i 10 cm.

b) Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2. Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

D **9.** a) Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2. Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2$$



b) Krótsza przekątna deltoidu o bokach $3\sqrt{2}$ i 5 ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.

10. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o bokach długości: 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody każdej z nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola powierzchni tych działek.

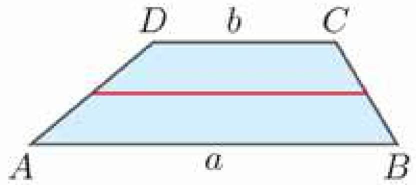
11. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E.

D a) Wykaż, że pole trójkąta AED jest równe polu trójkąta BEC.

b) Oblicz pole trapezu, jeśli wiadomo, że $|AB| = 12$, $|CD| = 3$, a pole trójkąta BEC jest równe $\frac{24}{5}$.

D *c) Pole trójkąta ABE jest równe S_1, a pole trójkąta DEC jest równe S_2. Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ jest równe $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$.

D **12.** Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.



13. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma długość 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.

* **14.** Ramiona trapezu mają długości 7 cm i 9 cm. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie części, których stosunek pól jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole trapezu, jeśli wiadomo, że suma długości jego podstaw wynosi 16 cm.

* **15.** Przekątne trapezu równoramiennego o polu S zawierają się w dwusiecznych jego kątów ostrych. Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz miary kątów i długości boków tego trapezu.

16. Działkę budowlaną w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości: 50 m, 20 m, 50 m, 80 m podzielono na dwie części o równych polach powierzchni płotem równoległym do podstaw trapezu. Jaka jest długość płotu rozdzielającego te części?

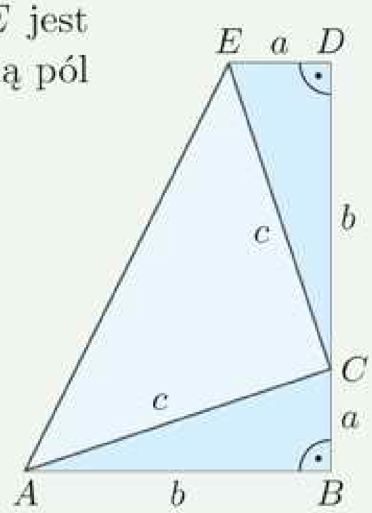
4.9. Zagadnienia uzupełniające

Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dżejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a + b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC, CDE i ACE:



$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

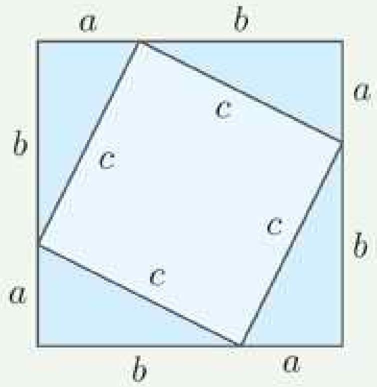
i otrzymujemy równość:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy kwadrat o boku $a + b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).



Duży kwadrat ma bok równy $a + b$, więc jego pole:

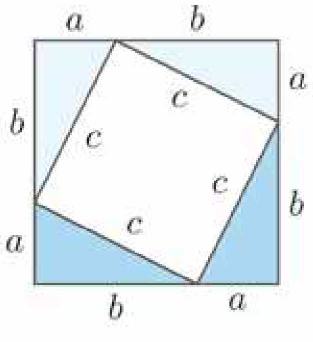
$$P = (a+b)^2$$

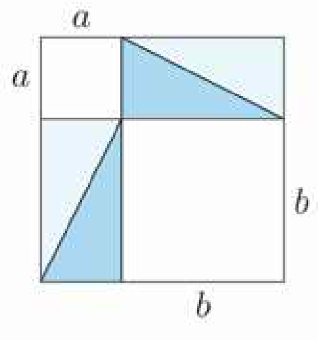
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

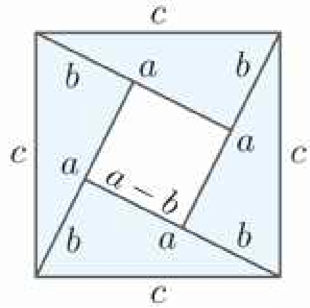
D **1.** Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z przedstawionych obok rysunków.





D **2.** a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.

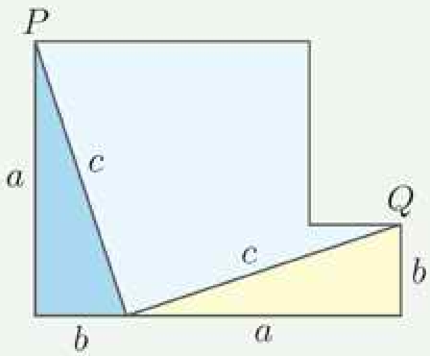
b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b.



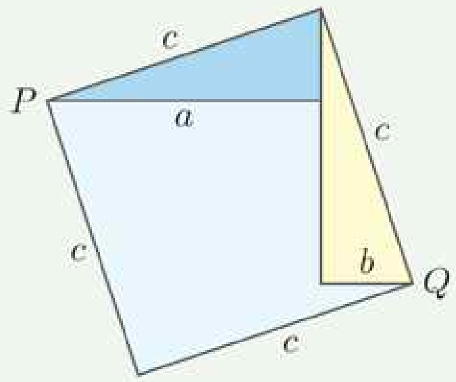
Dowód 3

Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.

Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



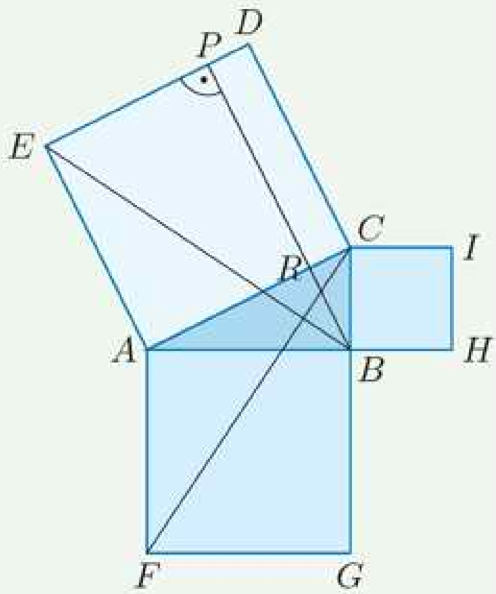
Niebieski trójkąt obracamy wokół punktu P, a żółty – wokół punktu Q, aż otrzymamy kwadrat o boku c.
Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:
Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.



Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów" Euklidesa.

D **3.** Podaj uzasadnienia kolejnych etapów szkicu dowodu 4.

Odcinki w trapezie

Twierdzenie

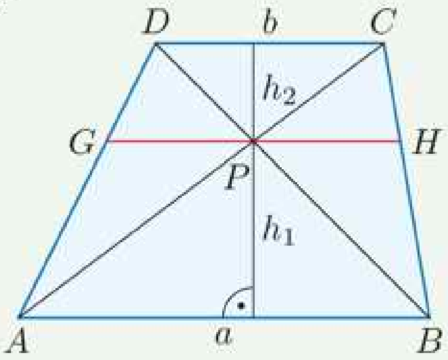
Dany jest trapez o podstawach a i b. Odcinek łączący ramiona tego trapezu, równoległy do jego podstaw oraz przechodzący przez punkt przecięcia jego przekątnych, ma długość równą średniej harmonicznej długości podstaw: $\frac{2ab}{a+b}$.

Szkic dowodu

Trójkąty ABP i CDP są podobne, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.
Z podobieństwa trójkątów GDP i ADB:

$$\frac{a}{|GP|} = \frac{h_1+h_2}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

Stąd $|GP| = \frac{ab}{a+b}$.
$\triangle PHC \sim \triangle ABC$, zatem analogicznie:
$\frac{a}{|PH|} = \frac{a+b}{b}$, czyli $|PH| = \frac{ab}{a+b}$.
Stąd $|GH| = |GP| + |PH| = \frac{2ab}{a+b}$.

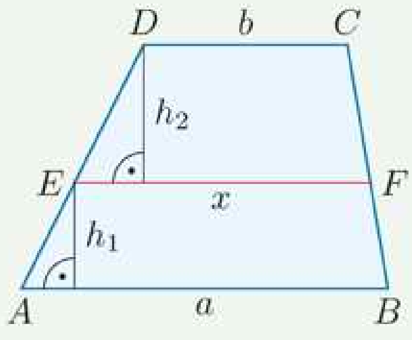


Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b. Odcinek równoległy do podstaw tego trapezu, dzielący go na dwa trapezy o równych polach, ma długość równą średniej kwadratowej długości podstaw trapezu: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Szkic dowodu

Pole trapezu $ABCD$: $P = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2)$.
Odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i dzieli go na dwa trapezy o równych polach, zatem: $\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{P}{2}$, więc $h_1 = \frac{P}{a+x}$ oraz $\frac{b+x}{2} \cdot h_2 = \frac{P}{2}$, więc $h_2 = \frac{P}{b+x}$.



Stąd otrzymujemy:

$$P = \frac{a+b}{2}\left(\frac{P}{a+x} + \frac{P}{b+x}\right) \quad / \cdot \frac{2(a+x)(b+x)}{P}$$

$$2(a+x)(b+x) = (a+b)(b+x+a+x)$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

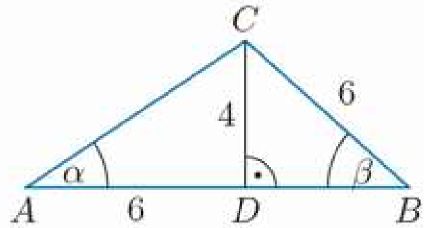
D **4.** Uzupełnij powyższe szkice dowodów o niezbędne uzasadnienia.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β trójkąta ABC (rysunek obok).



3. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 60, a tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $4\sqrt{2}$, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 16. Wiadomo, że dla jego kątów ostrych α i β zachodzi równość $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC.

a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$
b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$
c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$
d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\alpha = 0{,}1$,
b) $\cos\alpha = 0{,}9$,
c) $\cos\alpha = \frac{1}{6}$,
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$,
f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$,
g) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$,
h) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{11}{5}$.

6. Rozwiąż trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB, jeśli:

a) $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, a wysokość CD trójkąta ma 6 cm,

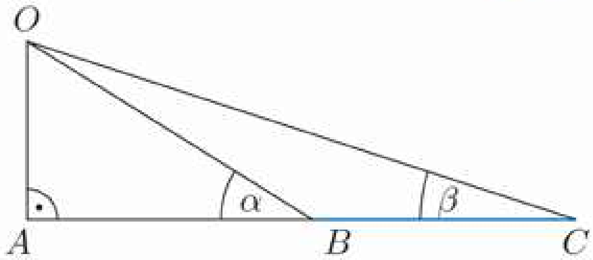
b) jego obwód jest równy 34 cm, a wysokość CD ma 13 cm,

c) jego pole jest równe 12 cm^2, a $\sphericalangle CAB = 40^\circ$.

7. a) Na płaskim terenie stoi 70-metrowa wieża. Obserwator widzi jej wierzchołek pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? Pomiń wzrost obserwatora.

b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

8. Z punktu obserwacyjnego O znajdującego się na wysokości 4,5 m nad ziemią widać brzegi rzeki pod kątami $\alpha = 32^\circ$ i $\beta = 18^\circ$ (rysunek obok). Oblicz szerokość rzeki w tym miejscu.

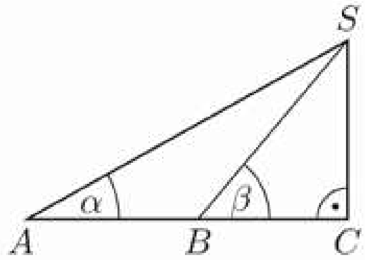


9. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.

a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

10. Z punktów A i B odległych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29^\circ$ i $\beta = 50^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość SC tej góry.



Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75°, bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30°. Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

D **3.** Przeczytaj informację w ramce, a następnie rozwiąż zadanie.

> Punkt w trójkącie, dla którego suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza, nosi nazwę **punktu Fermata** (punktu Torricellego). Można wykazać, że:
>
> • jeśli któryś z kątów trójkąta ma miarę 120° lub większą, to punktem Fermata jest wierzchołek tego kąta;
>
> • jeśli wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze od 120°, to punkt Fermata leży wewnątrz trójkąta i każdy z boków trójkąta widać z tego punktu pod kątem 120°.

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przeciwprostokątnej długości 2. Niech punkt P będzie takim punktem tego trójkąta, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza. Wykaż, że suma ta jest równa $1 + \sqrt{3}$.

4. Dany jest trapez prostokątny o kącie ostrym α, dłuższej podstawie a, krótszej podstawie b i wysokości h. Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu, jeśli:
a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm, b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm.

5. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P. Podstawy trapezu mają długości: $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD.

6. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60°. Oblicz pole tego trapezu.

*7. W trapezie równoramiennym przekątna o długości 10 cm tworzy z jednym z ramion kąt 90°, a z drugim – kąt 30°. Oblicz obwód tego trapezu.

8. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
a) $P(1,4)$ b) $P(-1,4)$ c) $P(-3,2)$ d) $P(-2,3)$

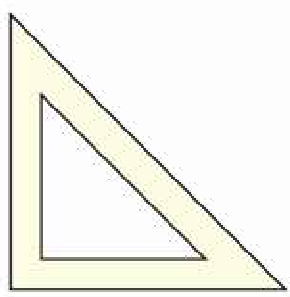
D 9. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ spełniający podane równanie.
a) $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\alpha$ b) $\sqrt{5}\sin\alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3\cos\alpha + \sqrt{3} = 6$

10. Oblicz.
a) $\sin 30^\circ(\cos 0^\circ - 2\cos 135^\circ)$
b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$
c) $\dfrac{\sin 150^\circ - 2\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$
d) $\dfrac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$
e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$
f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$
g) $\dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$
h) $\dfrac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

D 11. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.
a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$
c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$
d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

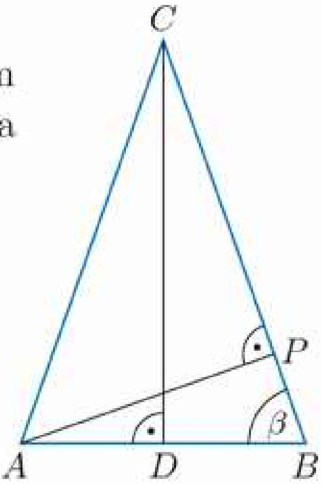
Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

*12. Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekierek? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekierek mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.



Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB i CDB (cecha podobieństwa KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm], zatem:

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB:

$$\cos\beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP, więc:

$\sin\beta = \frac{|AP|}{|AB|}$, stąd $|AP| = |AB| \cdot \sin\beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [cm].

III sposób

Obliczamy wysokość CD trójkąta ABC: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Pole trójkąta ABC zapisujemy na dwa sposoby:

$$P = \tfrac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$
$$P = \tfrac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP| \text{ [cm}^2\text{]}$$

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} |AP|^2 = 4^2 - x^2 \\ |AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm i $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c, może mieć pole równe:

A. $\frac{1}{4}c^2$, **B.** $\frac{1}{3}c^2$, **C.** $\frac{1}{2}c^2$, **D.** c^2.

2. Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem:

A. 90°, **B.** 60°, **C.** 45°, **D.** 30°.

3. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, to $\cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{4}{5}$, **B.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$, **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, **D.** $\frac{1}{4}$.

4. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału:

A. $(0^\circ; 30^\circ)$, **B.** $(30^\circ; 45^\circ)$, **C.** $(45^\circ; 60^\circ)$, **D.** $(60^\circ; 90^\circ)$.

5. Jeżeli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 50 cm, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$, to:

A. pole tego trójkąta jest równe 300 cm^2,

B. obwód tego trójkąta jest równy 112 cm,

C. cosinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{1}{25}$,

D. tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{25}{24}$.

6. Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$,

B. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$,

C. $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$,

D. $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

7. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$

B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$

C. $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 30^\circ$

D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 45^\circ$

8. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$

B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$

C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$

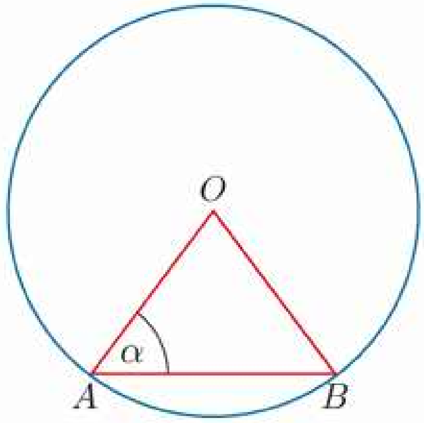
D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

9. Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby:

A. -1, **B.** 1, **C.** $\sqrt{3}$, **D.** $-\sqrt{3}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β. Oblicz $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

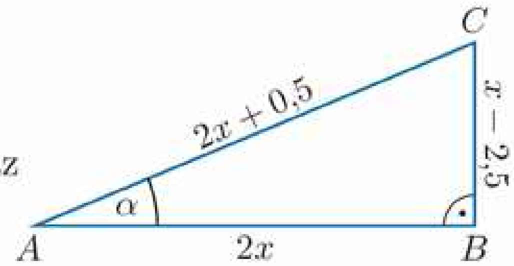


Zadanie 2 (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Oblicz długość cięciwy AB, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Punkt P jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Oblicz długości odcinków AP i BP, jeśli $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Oblicz cosinus kąta rozwartego, jeśli kwadrat odwrotności sinusa tego kąta jest równy 5.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

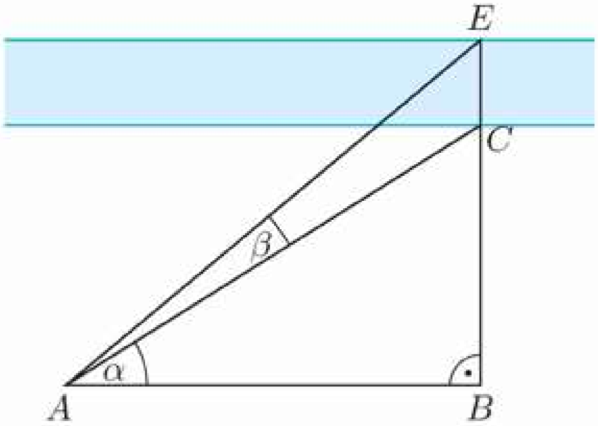


Zadanie 5 (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek obok) oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 6 (4 pkt)
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$.

Zadanie 7 (4 pkt)
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości 3 cm. Jego kąty ostre przylegają do dłuższej podstawy, a jeden z nich ma miarę równą 45°. Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 8 (4 pkt)
Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), dokonano pomiarów w terenie: $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 8^\circ$, $|AC| = 120$ m. Oblicz szerokość rzeki.



W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

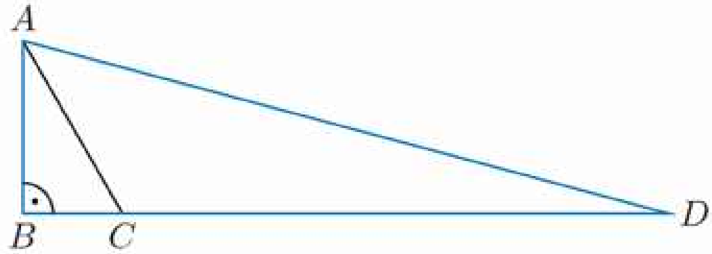
Zadanie 1 (2 pkt)
Kąty α i β spełniają warunki: $\alpha < \beta$ i $\alpha + \beta = 180^\circ$. Oblicz wartość wyrażenia $1 + \cos\beta$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)
Współrzędne punktu $P(x, y)$, który leży na ramieniu końcowym kąta α, spełniają warunki: $x^2 - 6x + 9 = 0$, $4y^2 - 4y + 1 = 0$. Oblicz $\sin\alpha$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)
Oblicz $\sin 22^\circ 30'$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (4 pkt)
Dany jest trapez $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |DA| = 5$, $|AB| = 11$, punkt M jest środkiem boku AD, a P – punktem przecięcia prostych CM i AB. Oblicz pole i obwód trójkąta APM.

Zadanie 5 (5 pkt)
Kąt BAC ma miarę 30°, a kąt CAD – miarę 45° (rysunek poniżej).



a) Oblicz pole trójkąta ABD, jeśli $|AB| = 6$.

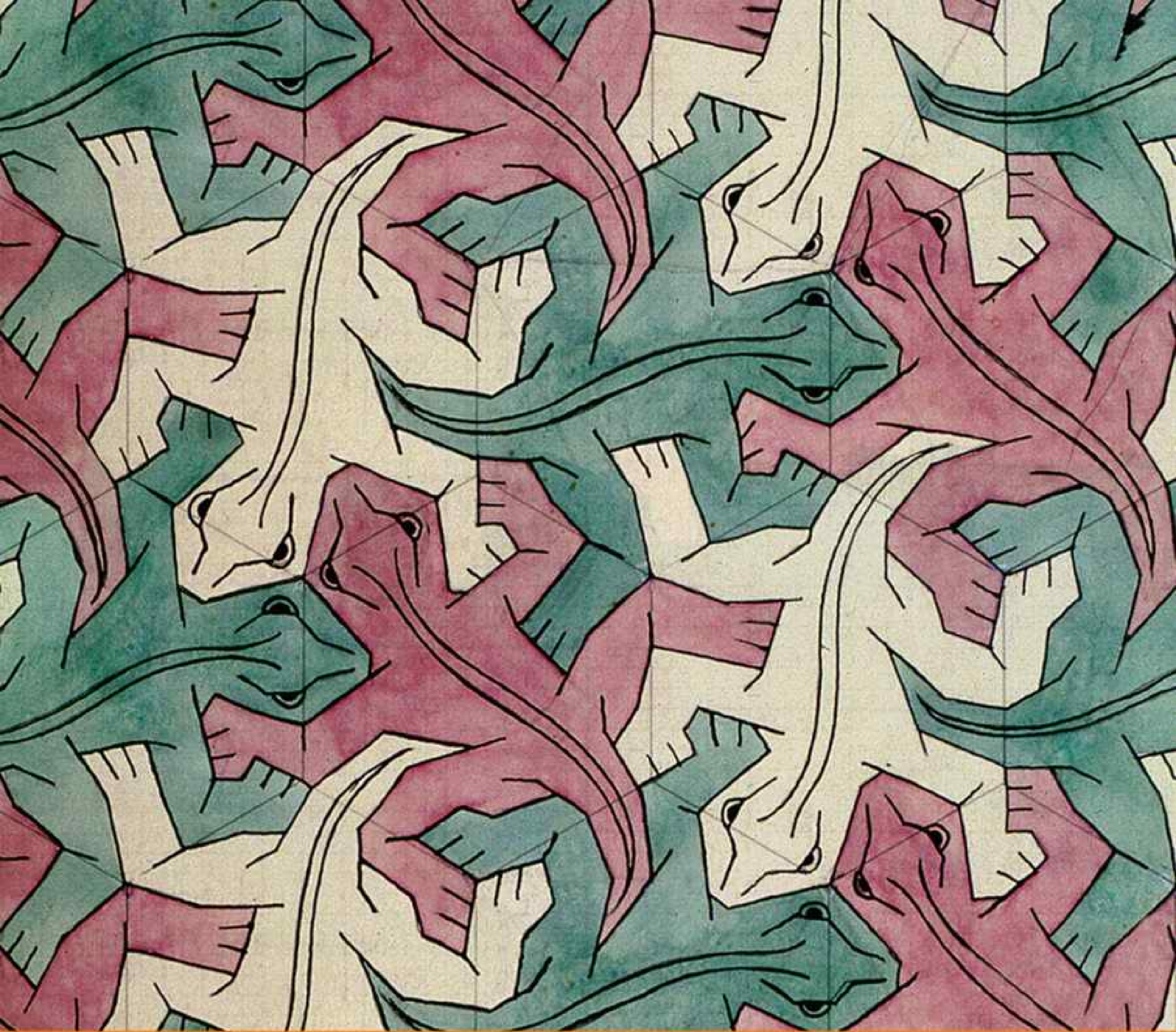
D b) Wykaż, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, i oblicz $\cos 15^\circ$.

D **Zadanie 6 (4 pkt)**
Pole rombu jest równe P, a kąt ostry ma miarę 30°. Wykaż, że suma długości przekątnych tego rombu jest równa $2\sqrt{3P}$.

Zadanie 7 (5 pkt)

D a) Wykaż, że długości dwóch dowolnych boków trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do wysokości opuszczonych na te boki.

b) Oblicz wysokości trójkąta o bokach długości: 4, 5 i 7.



5 Planimetria

Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w sytuacjach praktycznych, takich jak układanie kafelków lub bruku.
Bardzo ciekawe przykłady podziałów płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. eszera] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.

5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

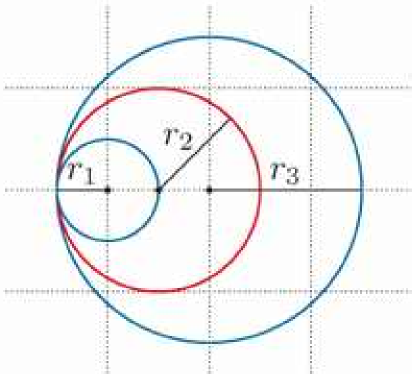
Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π. Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. łiliama dżonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3{,}14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Przykład 1

Oblicz długości okręgów o promieniach: $r_1 = 0{,}5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1{,}5$ cm (rysunek obok).

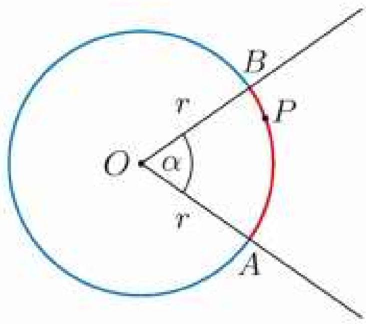


Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \text{ [cm]}$$
$$l_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$
$$l_3 = 2\pi \cdot 1{,}5 = 3\pi \text{ [cm]}$$

Dowolne dwa punkty A, B należące do okręgu dzielą ten okrąg na dwa **łuki**. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc „łuk AB”, będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba, że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\overset{\frown}{AB}$. Czasami, by uniknąć niejednoznaczności, stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku poniżej to łuk $\overset{\frown}{APB}$.

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym**.



Na rysunku obok ramiona kąta α przecinają okrąg w punktach A i B – kąt ten wyznacza łuk $\overset{\frown}{AB}$.

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Ćwiczenie 1

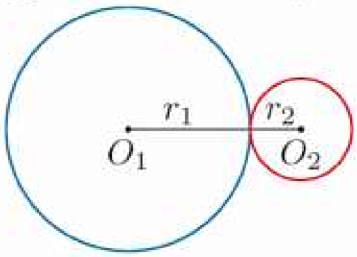
Jaką miarę ma kąt AOB, jeśli punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm?

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miary kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez leżące na okręgu końce tych promieni.

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

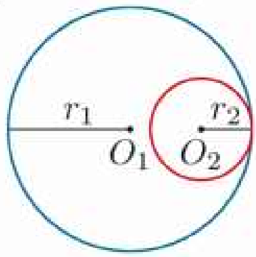
Okręgi styczne zewnętrznie



$|O_1O_2| = r_1 + r_2$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

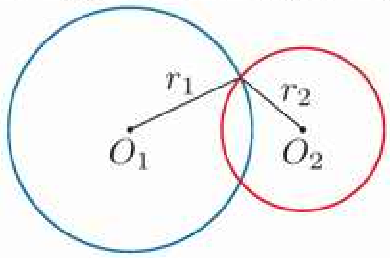


$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

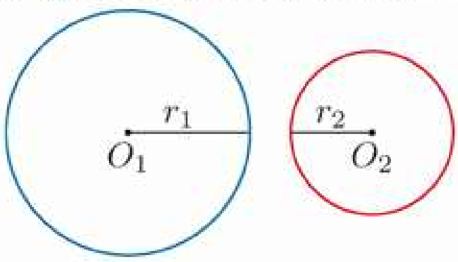
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



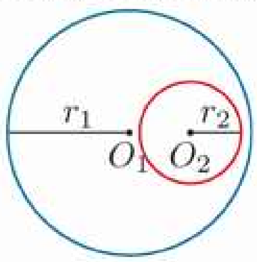
$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$|O_1O_2| > r_1 + r_2$

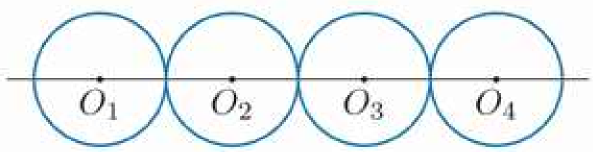
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$

Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej. Oblicz średnicę tych okręgów, jeśli $|O_1O_4| = 48$.



Zadania

1. Punkty A, B leżą na okręgu o średnicy 10 cm. Wiadomo, że $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość łuku $\widehat{AB}$.

2. Oblicz długość łuku okręgu o średnicy 12 cm wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 75°.

3. Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.

4. Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego na okręgu o średnicy 18 cm łuk o długości 4π cm.

5. Wyznacz wartości x, dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.

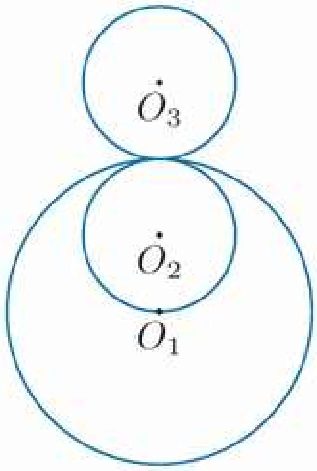
6. Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?

a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$

b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$

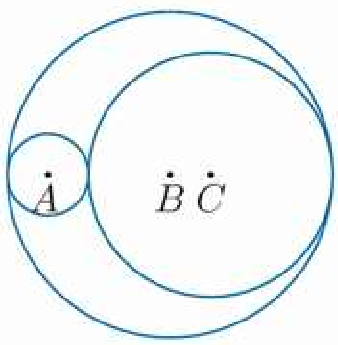
c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$

d) $O_1(2, -1)$, $r_1 = 2$, $O_2(-3, -1)$, $r_2 = 2\frac{1}{2}$



7. Punkty O_1, O_2 i O_3, będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów, jeśli $|O_1O_3| = 18$.

8. Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku $1:3$. Oblicz długości tych okręgów.



9. Punkty A, B i C, będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Oblicz promień każdego z tych okręgów, jeśli $|AB| = 3$ i $|AC| = 4$.

10. Środki trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie są wierzchołkami trójkąta o bokach 5, 6, 7. Oblicz promienie tych okręgów.

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesa.

> **Pole koła** o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

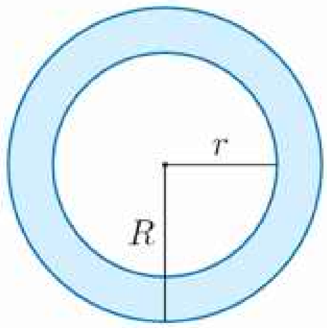
Ćwiczenie 1

a) Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm^2.

b) Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2{,}25\pi$ cm^2.

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



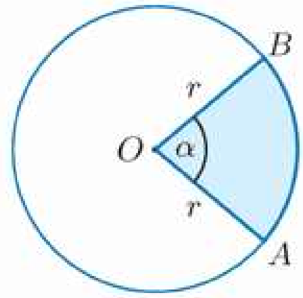
Ćwiczenie 2

a) Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm. Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.

b) Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi 17π cm^2. Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami OA i OB nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

> **Pole wycinka koła** wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:
> $$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

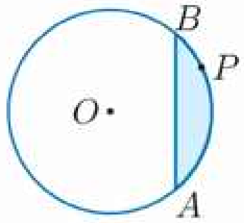
Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α.

a) $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$ b) $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$ c) $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 4

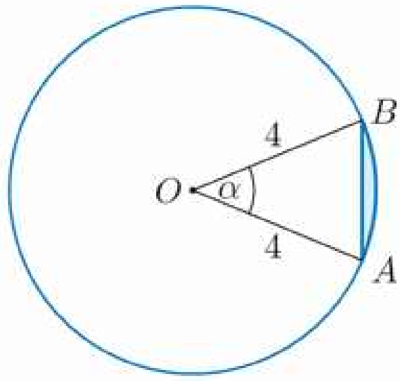
Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π. Oblicz miarę kąta α.

Część koła (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze 45° (rysunek obok).



Obliczamy pole wycinka koła AOB:

$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła $P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$.

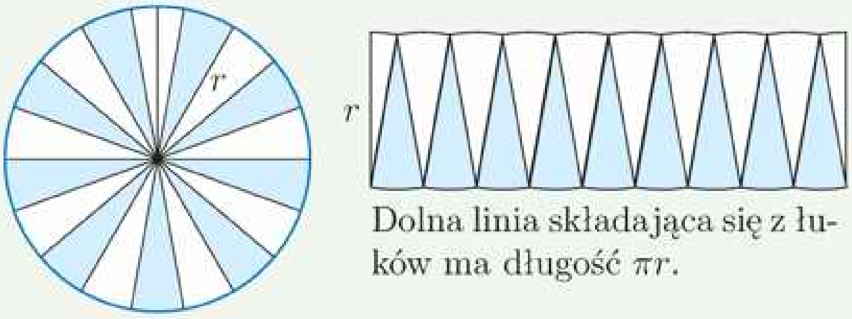
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają podany kąt AOB. Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt.

a) $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ b) $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ c) $\sphericalangle AOB = 30^\circ$

Czy wiesz, że…

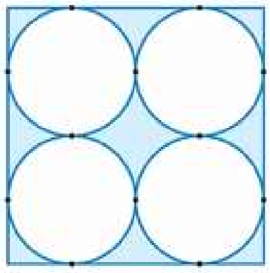
Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.



Dolna linia składająca się z łuków ma długość πr.

Zadania

D **1.** Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).



2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.

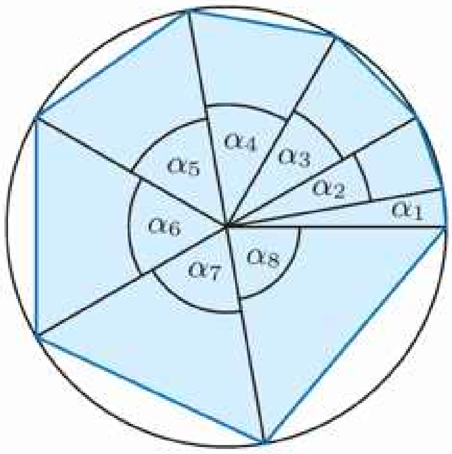
3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła koło, jeśli pole $\triangle AOB$ jest równe $4\sqrt{2}$.

D **4.** Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych: $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.

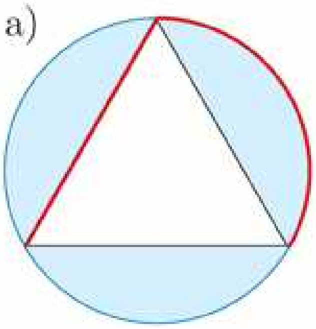
a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8.

b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6.

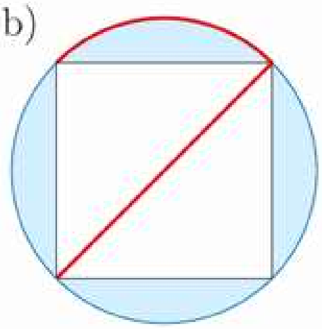


6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki leżą na okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.

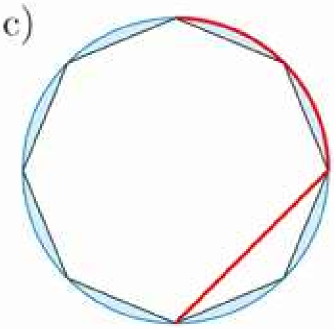
a)



b)

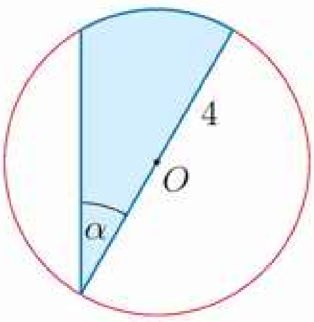


c)

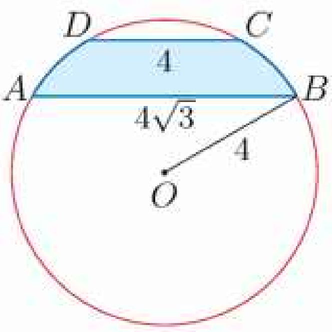


7. Oblicz pole zacieniowanej figury.

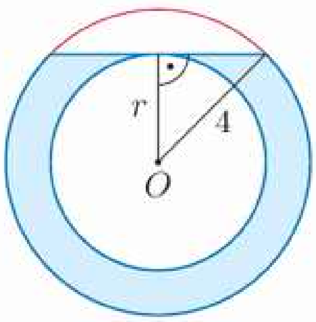
a) $\alpha = 30^\circ$



b) $AB \parallel CD$

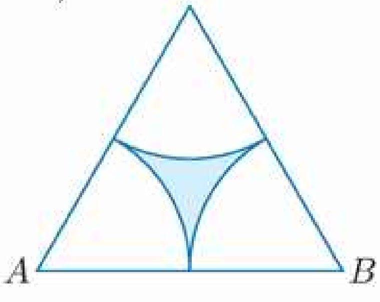


c) $r = 2\sqrt{2}$

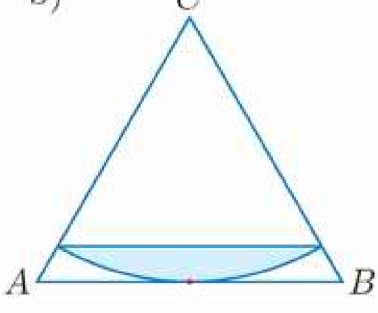


8. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 6 cm. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

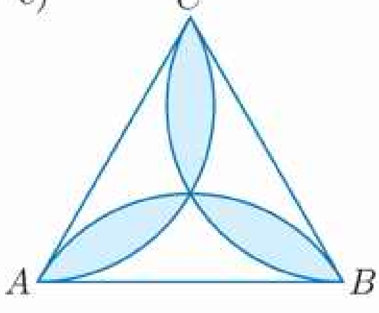
a)



b)



c)

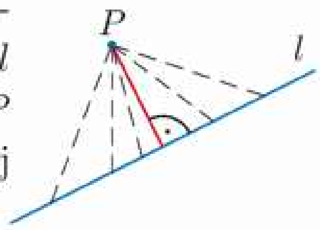


5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że najkrótszy odcinek łączący dany punkt P z punktem leżącym na prostej l, gdzie $P \notin l$, jest do tej prostej prostopadły.

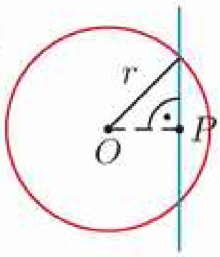
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l, to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

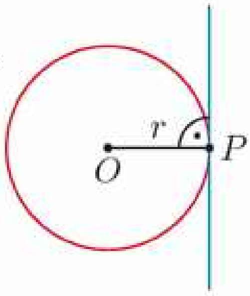
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$|OP| < r$



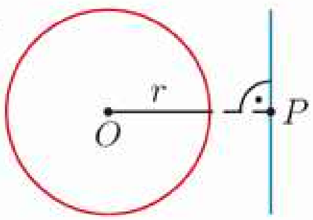
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$|OP| = r$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$|OP| > r$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

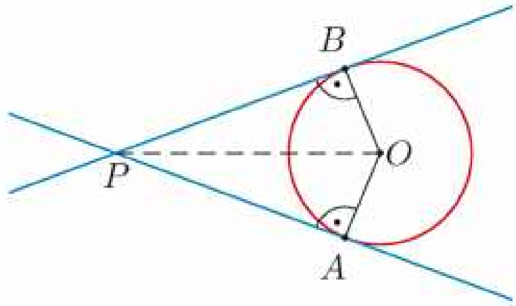
Ćwiczenie 2

a) Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P. Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.

b) Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O. Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

> Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:
> $$|PA| = |PB|$$

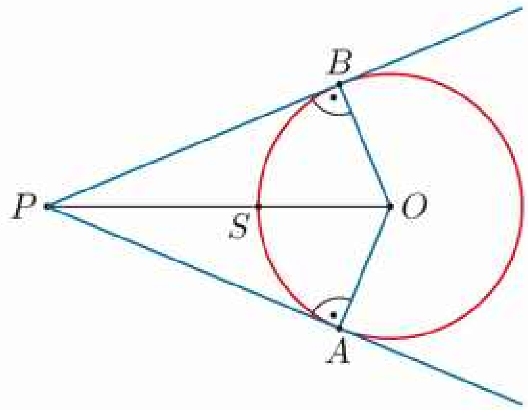


Dowód powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO.

Ćwiczenie 3

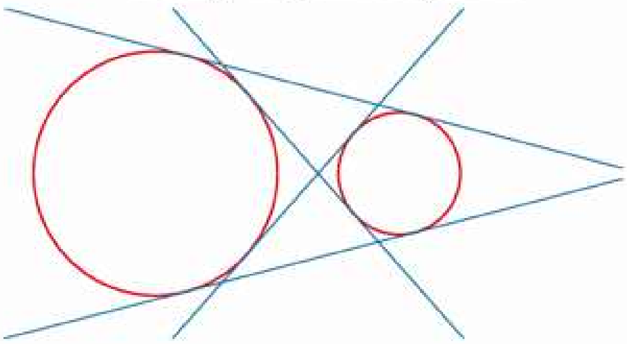
a) Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B. Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.

b) Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm. Oblicz promień okręgu, jeśli wiadomo, że odcinek PS ma długość 8 cm.

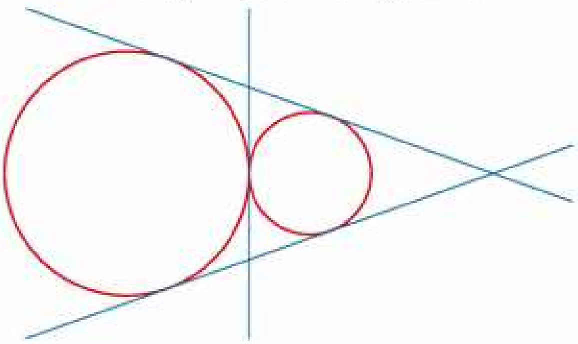


Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

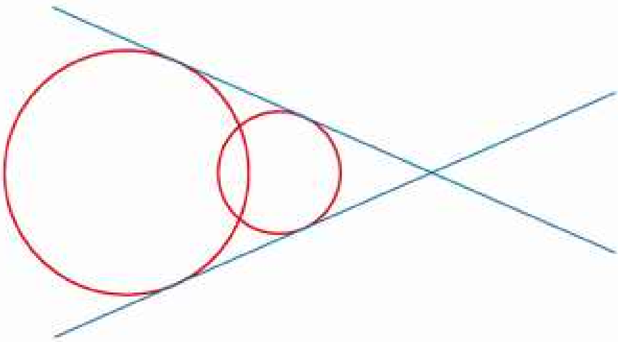
Okręgi rozłączne zewnętrznie
cztery wspólne styczne



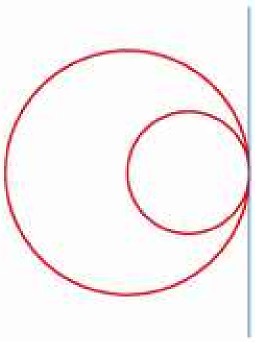
Okręgi styczne zewnętrznie
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

a) $r_1 = 3\frac{1}{2},\ r_2 = 4\frac{1}{2},\ |O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$

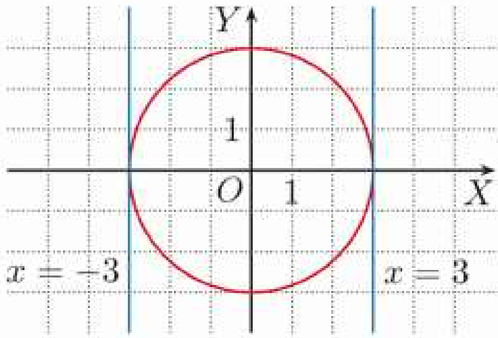
b) $r_1 = 11,\ r_2 = 13,\ |O_1O_2| = 24$

c) $r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = \frac{1}{2},\ |O_1O_2| = \frac{1}{6}$

d) $r_1 = \sqrt{2},\ r_2 = \sqrt{3},\ |O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0,0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m?

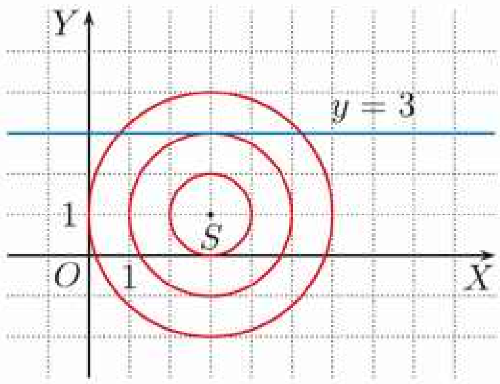


Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wpólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Przykład 2

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3, 1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?



Prosta $y = 3$ z okręgiem o środku S:

- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.

Ćwiczenie 5

Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

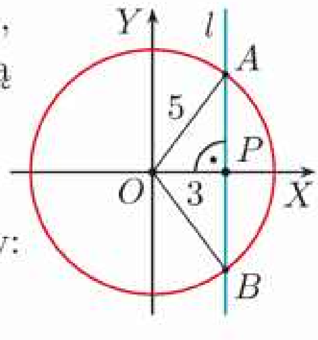
a) k: $y = 3$, $S(3, -1)$ b) k: $x = -1$, $S\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ c) k: $x = \sqrt{2}$, $S(-1, 1)$

Przykład 3

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej l: $x = 3$ i okręgu o środku $O(0, 0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l, a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$



Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$

Ćwiczenie 6

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ i okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 4.

b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ i okręgu o środku w punkcie $(-3, 2)$. Oblicz promień tego okręgu.

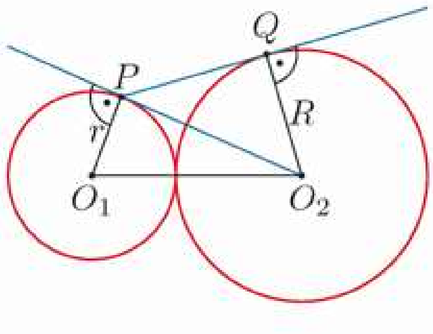
Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 10 w punktach A i B. Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

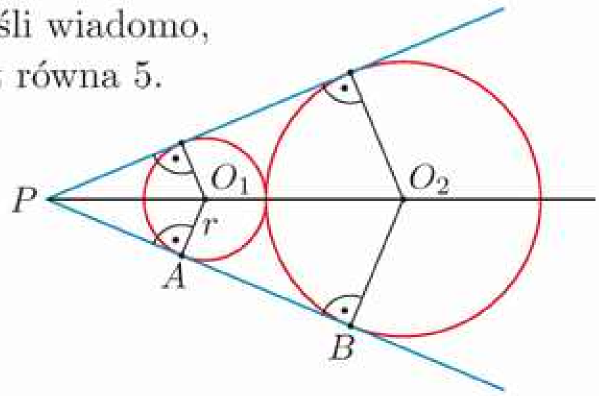
2. Odległość między dwiema prostymi równoległymi to długość odcinka prostopadłego do tych prostych o końcach należących do prostych. Oblicz promień okręgu stycznego do dwóch prostych równoległych, jeśli wiadomo, że odległość między nimi jest równa 5 cm.

3. Okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach r i R są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta PO_2 jest styczna do okręgu o środku O_1, a prosta PQ – do okręgu o środku O_2. Wyznacz obwód czworokąta PO_1O_2Q.



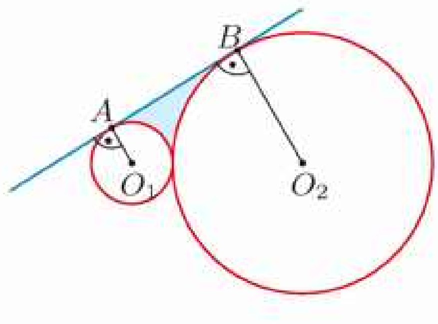
4. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do tej cięciwy, jeśli wiadomo, że jego odległość od środka okręgu jest równa 5.

5. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1, jeśli $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$.



6. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Oblicz pole trójkąta APB.

7. Dane są okręgi o środkach O_1 i O_2 i promieniach $|O_1A| = 4$ cm i $|O_2B| = 12$ cm (rysunek obok). Prosta AB jest wspólną styczną tych okręgów. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

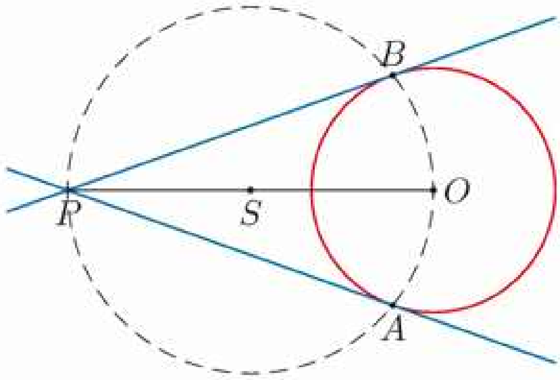


Warto wiedzieć

Konstrukcja stycznej do okręgu

Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O, przechodzącą przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Wyznaczamy środek odcinka OP – punkt S na rysunku poniżej.
- Rysujemy okrąg, którego promieniem jest odcinek SO – okrąg ten przecina dany okrąg w punktach A i B.
- Prosta PA jest styczna do danego okręgu. Zauważ, że $PA \perp OA$ (aby to uzasadnić, można rozpatrzyć kąty trójkątów równoramiennych PSA i OSA). Drugą styczną jest prosta PB.

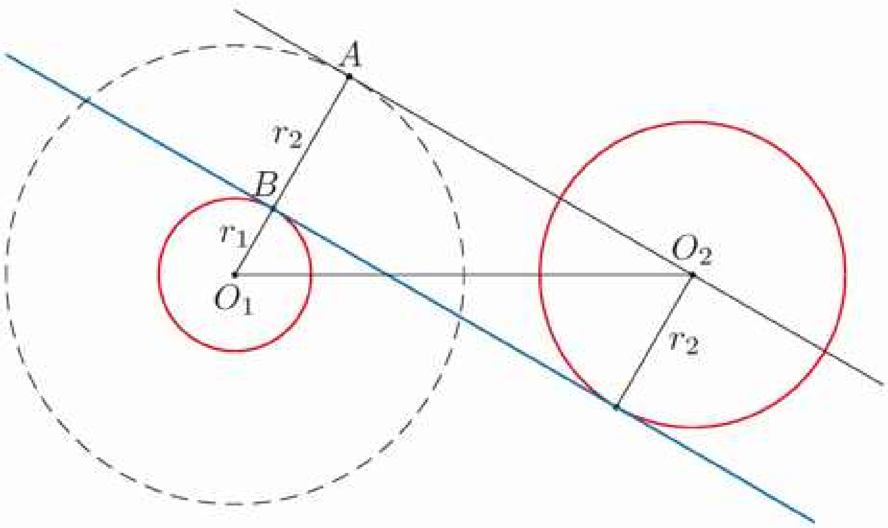


1. Opisz konstrukcję stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt należący do tego okręgu.

Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie

Rozpatrzmy okrąg L_1 o środku O_1 i promieniu r_1 oraz rozłączny z nim zewnętrznie okrąg L_2 o środku O_2 i promieniu r_2 (rysunek poniżej).

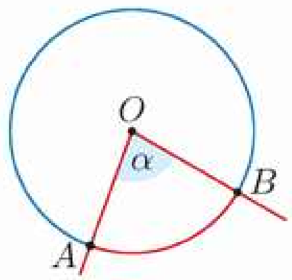
- Rysujemy okrąg L_3 o środku w punkcie O_1 i promieniu równym $r_1 + r_2$.



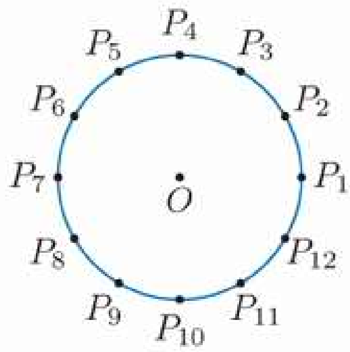
- Rysujemy prostą O_2A – styczną do okręgu L_3 przechodzącą przez punkt O_2.
- Wyznaczamy punkt B – punkt przecięcia odcinka O_1A z okręgiem L_1.
- Rysujemy styczną do okręgu L_1 przechodzącą przez punkt B. Jest ona równocześnie styczną do okręgu L_2 (uzasadnij).

* **2.** Opisz, jak skonstruować pozostałe wspólne styczne dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie.

5.4. Kąty w okręgu



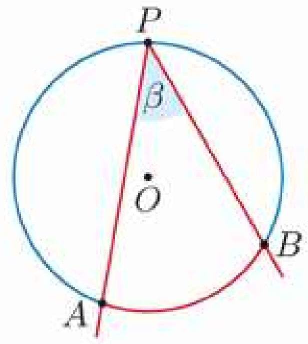
Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez zaznaczonony kolorem czerwonym łuk $\widehat{AB}$.
Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB.



Ćwiczenie 1

Punkty: $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

a) $\widehat{P_1P_2P_3}$, b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$, c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.



Definicja

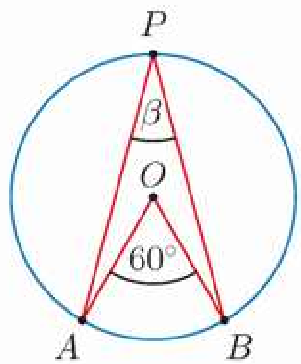
> **Kąt wpisany** w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.

Twierdzenie

> Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz ćwiczenie 4. na następnej stronie.



Ćwiczenie 2

a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).

b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α. Podaj miarę tych kątów.

Ćwiczenie 3

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miarę kąta $\alpha + \beta$, jeśli:

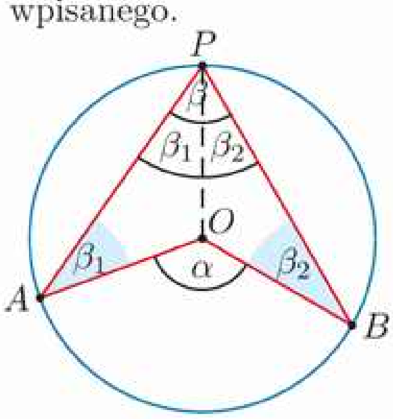
a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

D Ćwiczenie 4

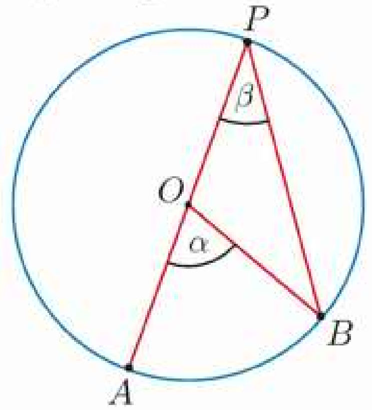
Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

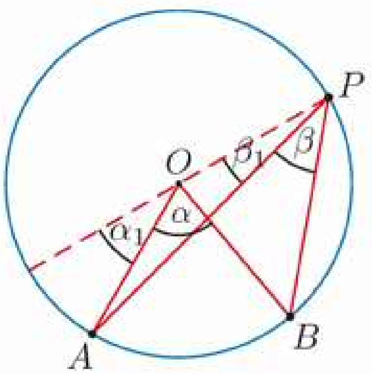
I. Środek okręgu O leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek okręgu O leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek okręgu O leży na zewnątrz kąta wpisanego.



Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO. Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

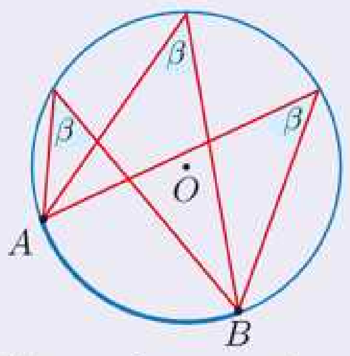
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

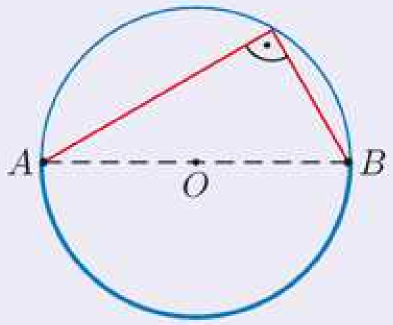
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

Poniższe wnioski wynikają z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym.

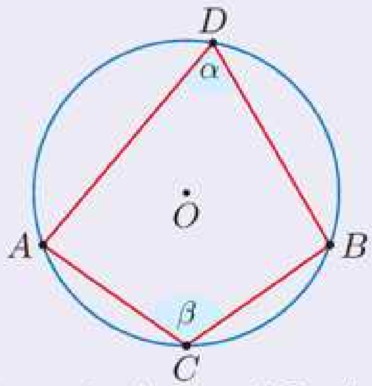
Twierdzenie



Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



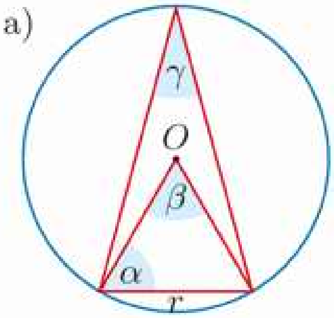
Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku powyżej, jest równa 180°.

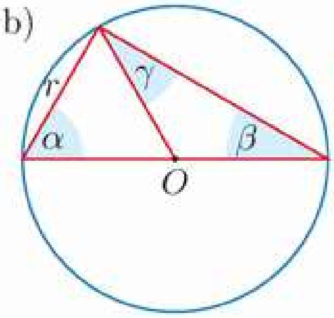
D Ćwiczenie 5

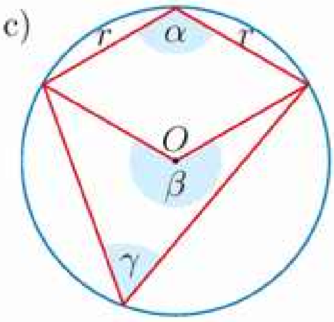
Uzasadnij każdy ze sformułowanych powyżej wniosków.

Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

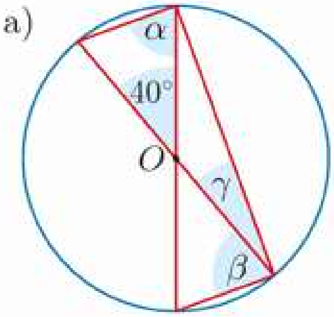
a)


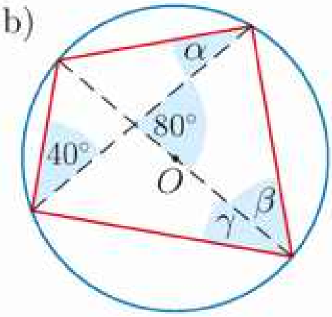
b)


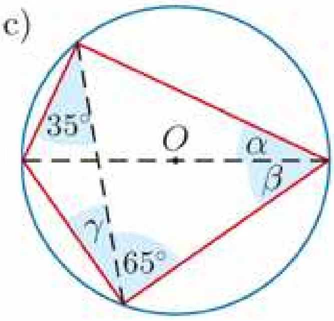
c)


Ćwiczenie 7

Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

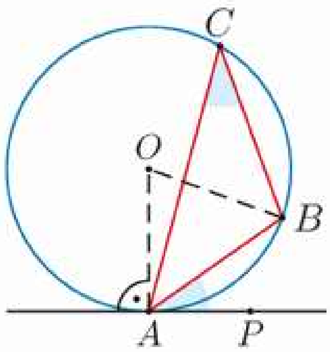
a)


b)


c)


Kąt między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (kąt dopisany do okręgu) ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



D **Ćwiczenie 8**

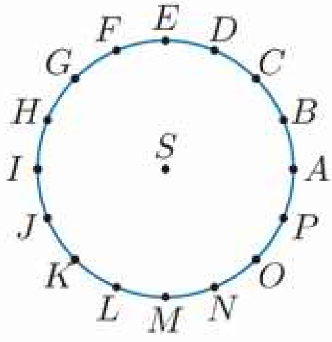
Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Zadania

1. Punkty: $A, B, C, \ldots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β. Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

a) $\beta = 45^\circ$ c) $\beta = 225^\circ$

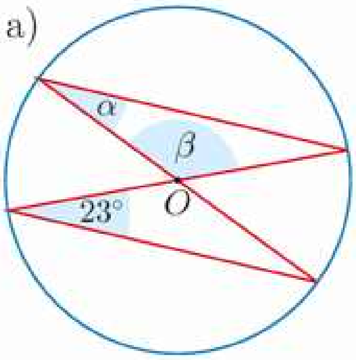
b) $\beta = 112{,}5^\circ$ d) $\beta = 315^\circ$



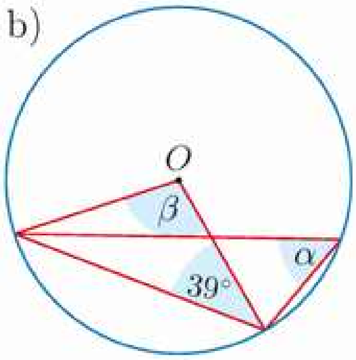
2. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość: a) 2π, b) 3π, c) $\frac{15}{2}\pi$, d) $\frac{\pi}{4}$.

3. Wyznacz miary kątów α i β.

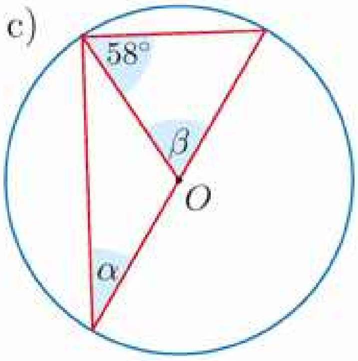
a)



b)



c)

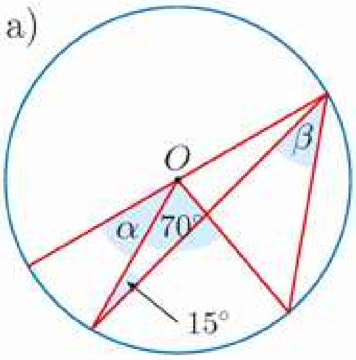


4. Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miary kątów α i β.

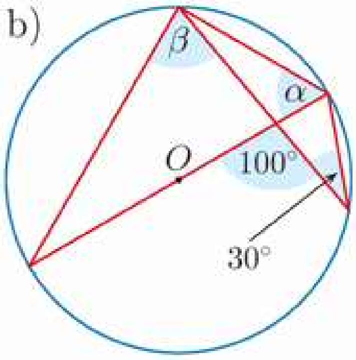
a) $\alpha + \beta = 111^\circ$ b) $\alpha = \beta + 56^\circ 30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48^\circ$

5. Wyznacz miary kątów α i β.

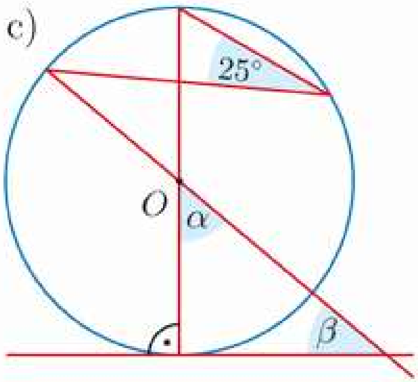
a)



b)

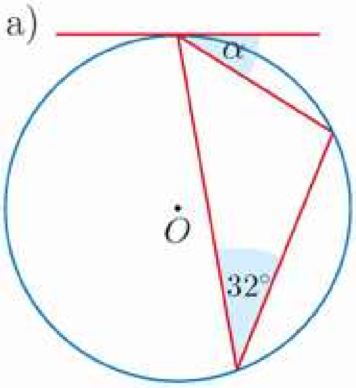


c)

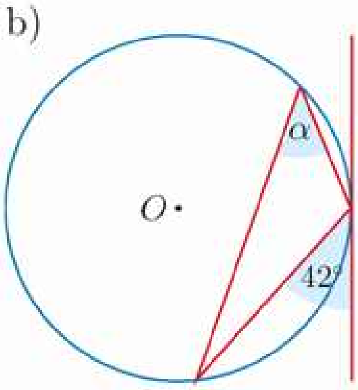


6. Wyznacz miarę kąta α.

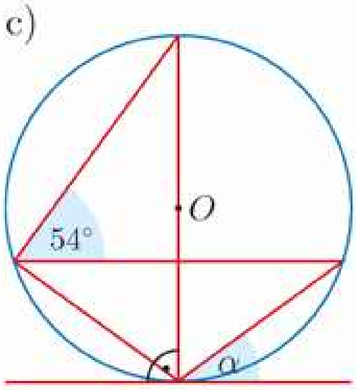
a)



b)



c)



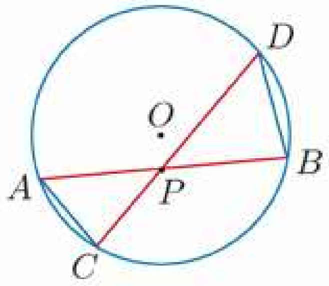
7. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB. Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę 96°. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A.

b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB. Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B.

D **8.** Udowodnij poniższe twierdzenie.

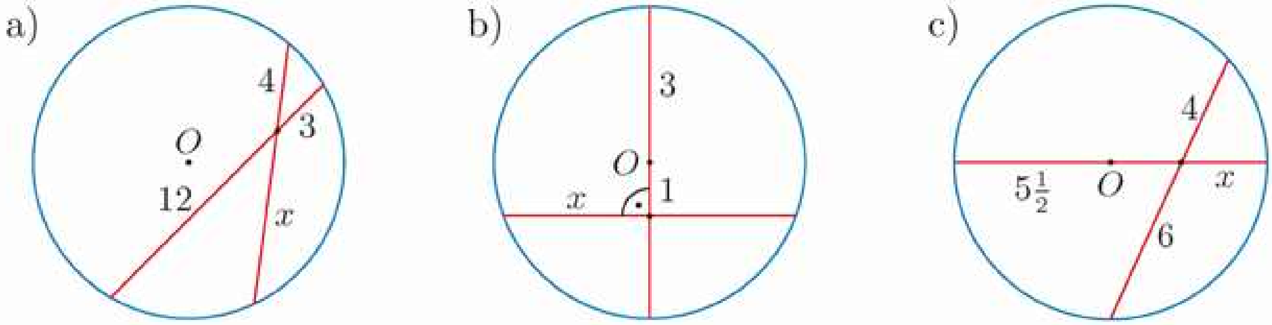
Twierdzenie

> Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.



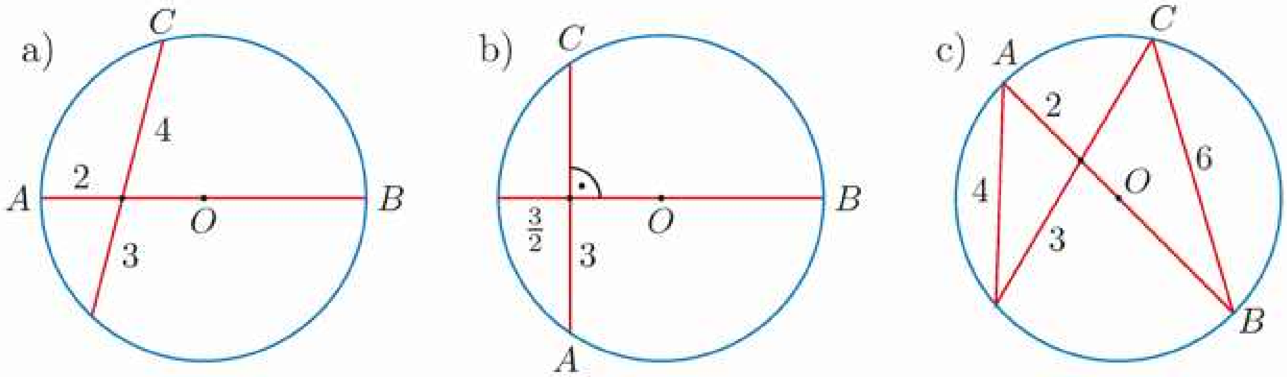
Wskazówka. Uzasadnij, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

9. Oblicz x.



10. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P, odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.

11. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC.

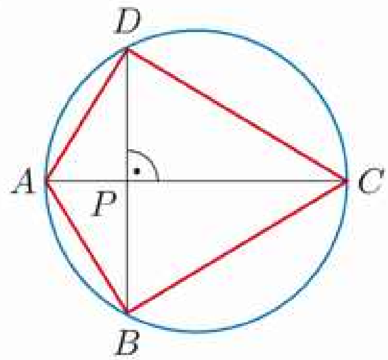


12. Dany jest okrąg o promieniu 8. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $4\sqrt{7}$ i przecina średnicę PQ pod kątem prostym.

a) Oblicz długości odcinków, na które cięciwa AB dzieli średnicę PQ.

b) Wyznacz sinus kąta ostrego czworokąta $APBQ$ i podaj przybliżoną miarę tego kąta.

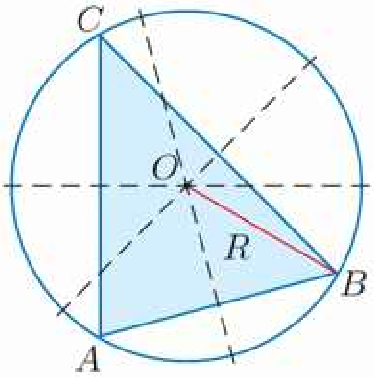
13. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu o promieniu $6\frac{1}{2}$ (rysunek obok). Wiadomo, że $|PA| = 4$ oraz $|PB| = |PD|$. Oblicz obwód tego czworokąta.



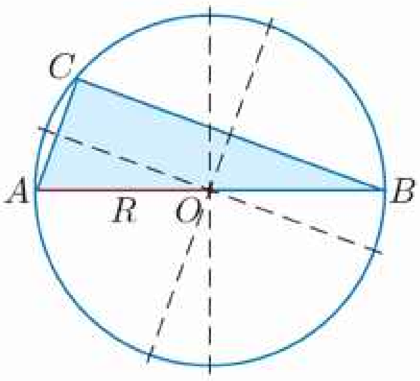
5.5. Okrąg opisany na trójkącie

Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg. Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

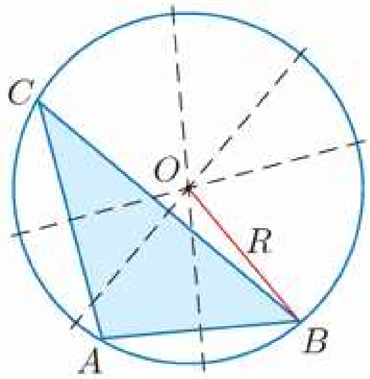
> Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



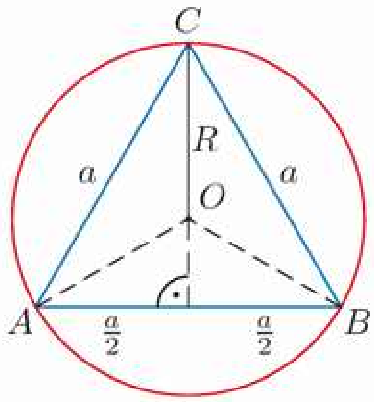
Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta od jego wierzchołków.

> Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:
> $$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



D Ćwiczenie 2

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

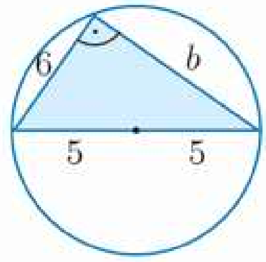
Ćwiczenie 3

a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm^2.

b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), zatem przeciwprostokątna ma długość $c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, skąd $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ćwiczenie 4

a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 5

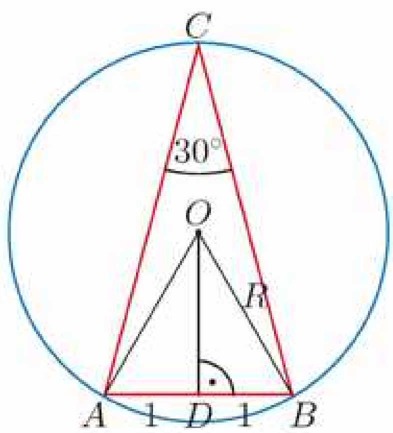
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5, jeśli:
a) jest to trójkąt równoramienny,
b) jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej.

Ćwiczenie 6

Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od jego przyprostokątnych wynoszą 4 i 6. Oblicz pole trójkąta.

Przykład 2

Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 30°, a podstawa trójkąta ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB, zatem: $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 60^\circ$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, więc $R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$. Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego:

$$|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 7

a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45°, a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

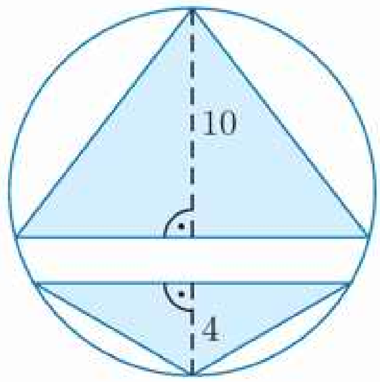
b) W okrąg o promieniu 5 cm wpisany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 8

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie między ramionami równym 120°, jeśli trójkąt ten jest wpisany w okrąg o promieniu 4.

Ćwiczenie 9

Oblicz stosunek pól przedstawionych na rysunku trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 8.



Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

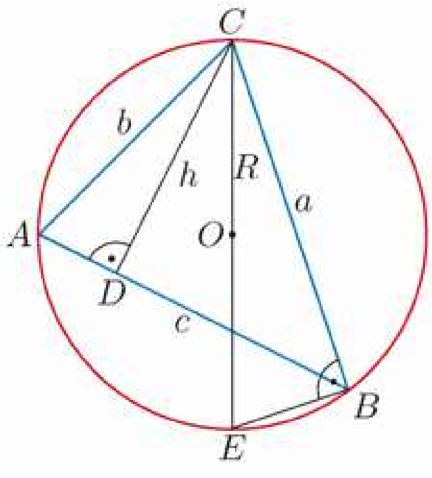
$$P = \frac{abc}{4R}$$

Dowód

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości a, b, c (rysunek obok), wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Odcinek CD jest wysokością trójkąta, a odcinek CE – średnicą okręgu. Kąty CAB i CEB są równe (dlaczego?). Zatem trójkąty ACD i ECB są podobne, czyli:

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}, \quad \text{stąd} \quad h = \frac{ab}{2R}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}$$



Ćwiczenie 10

a) Oblicz pole trójkąta o bokach 4 cm, 13 cm i 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.

b) Dany jest trójkąt o bokach 13 cm, 14 cm i 15 cm i polu równym 84 cm^2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadania

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeśli:

a) jego pole wynosi 8 cm^2, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,

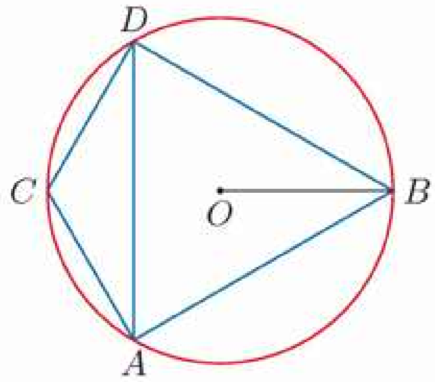
b) krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm, a jeden z kątów ostrych trójkąta jest dwa razy większy od drugiego,

c) jest on równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.

2. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równy $3:4$. Pole koła opisanego na tym trójkącie wynosi $6{,}25\pi$ cm^2. Oblicz pole tego trójkąta.

3. Jakie największe pole może mieć trójkąt prostokątny wpisany w okrąg o promieniu 3?

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABD i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm, jeśli:

a) jego ramię ma długość $4\sqrt{5}$ cm,

b) sinus kąta przy tej podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.

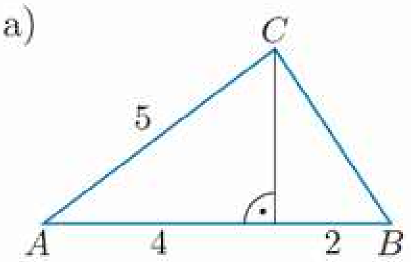
6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm.

a) $h = 20$ cm

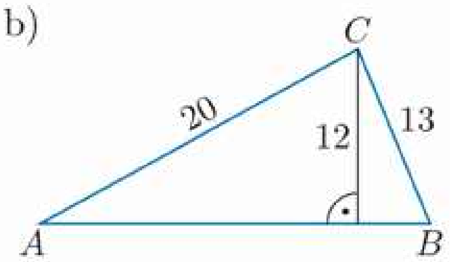
b) $h = 6$ cm

7. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a)



b)



8. Dane są punkty $A(-1, -2)$ i $B(5, -2)$. Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC. Okrąg opisany na tym trójkącie ma promień równy 5. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

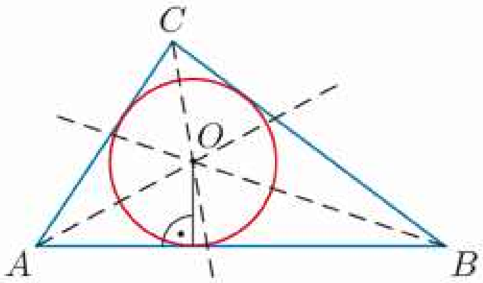
9. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 12, 17, 25.

5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.
W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

> Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



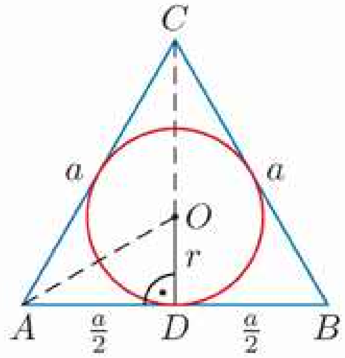
D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta od jego boków.

Twierdzenie

> Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:
> $$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Dowód

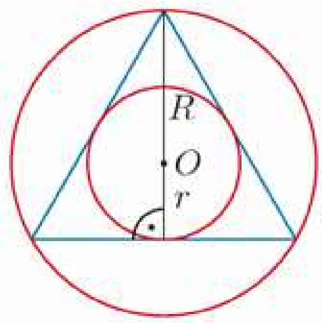
Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC, czyli $\sphericalangle OAD = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 2

a) Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π.

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość trójkąta równobocznego w stosunku $2:1$ (liczymy od wierzchołka trójkąta).

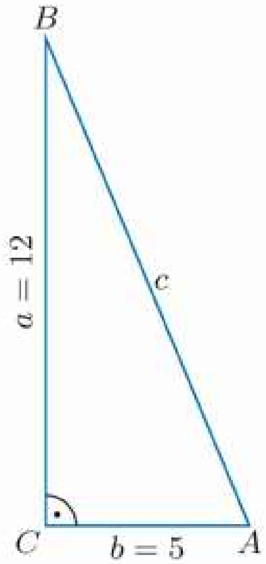


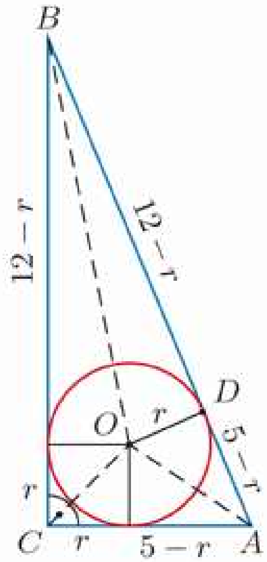
Ćwiczenie 3

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.





Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \quad \text{i} \quad |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.
Stąd otrzymujemy $r = 2$.

Ćwiczenie 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 5

a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

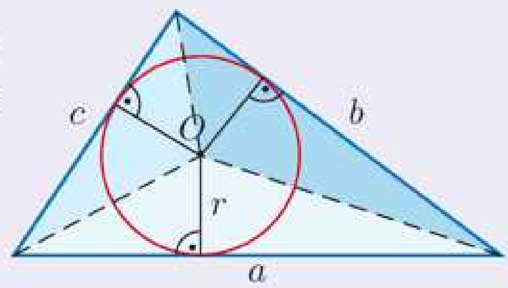
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a + b + c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π.

Przykład 2
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

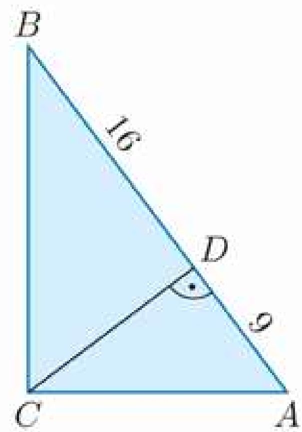
Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c oraz polu P wyraża się wzorem:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Ćwiczenie 8
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 9
Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16 (rysunek obok).



D a) Uzasadnij, że trójkąty ABC, ACD i CBD są podobne.

b) Oblicz długości boków trójkąta ABC.

c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC.

d) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD.

Ćwiczenie 10
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x, a jego ramię – długość y. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 12$, $y = 10$ b) $x = 10$, $y = 13$

Ćwiczenie 11
a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym $120°$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym $30°$ wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadania

D **1.** Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2. a) Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu 2.

b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

3. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) W trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60°. Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

D **4.** Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

5. Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Oblicz jego pole, jeśli odległość środka okręgu od wierzchołka jednego z kątów ostrych trójkąta jest równa $2\sqrt{10}$.

6. Obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości x jest równy q. Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 15,\ \ q = 54$ b) $x = 13,\ \ q = 50$

7. Na okręgu opisano trójkąt równoramienny o podstawie długości 8. Oblicz promień tego okręgu, jeśli jego środek dzieli wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę w stosunku $2:3$ (liczymy od podstawy trójkąta).

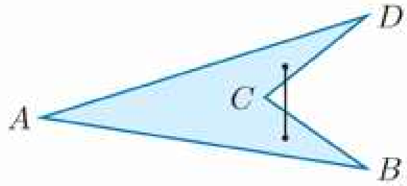
8. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.

9. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.

10. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

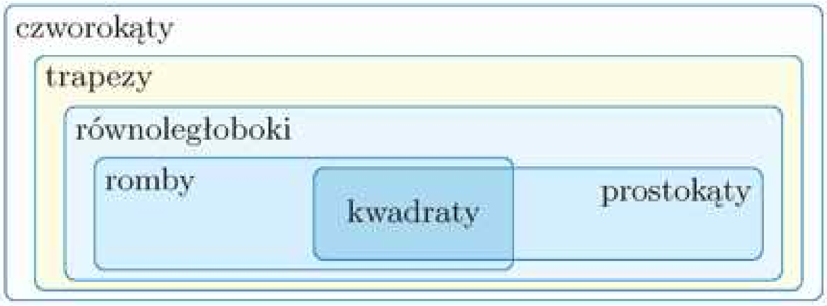
Czworokąty wypukłe

Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty tego wielokąta jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.



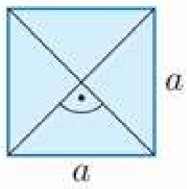
Czworokąt $ABCD$ nie jest wypukły.

Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.



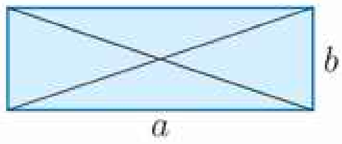
Kwadrat

- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.



$P = a^2$

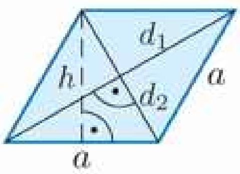
Prostokąt



$P = a \cdot b$

- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

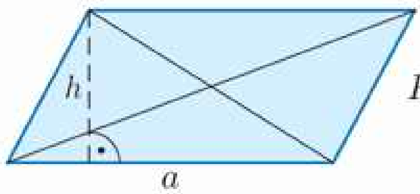
Romb



$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = a \cdot h$

- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

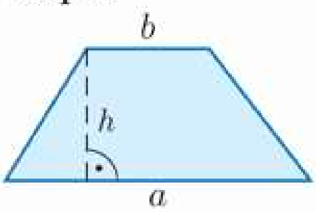
Równoległobok



$P = a \cdot h$

- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

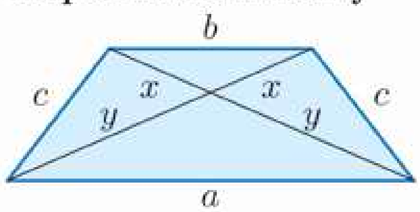
Trapez



$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180°.

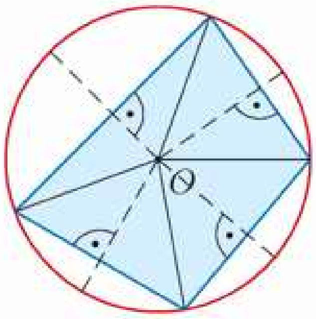
Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

*5.7. Okrąg opisany na czworokącie

Okrąg jest opisany na czworokącie, jeżeli wszystkie wierzchołki czworokąta należą do okręgu. Mówimy też, że czworokąt jest wpisany w okrąg.
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne jego boków przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego.



Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg.

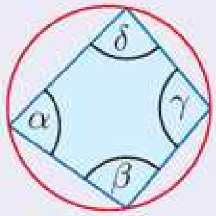
D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że równoległobok, na którym można opisać okrąg, jest prostokątem.

Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

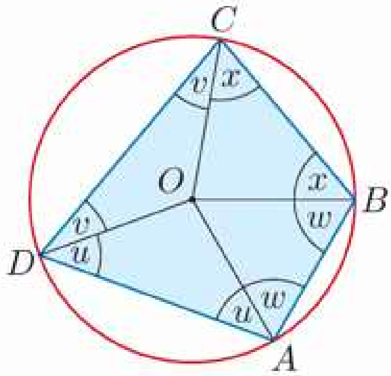


D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij, że jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°. Skorzystaj z:

a) rysunku obok,

b) twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku (str. 235).



Ćwiczenie 3

Kąty α i β to sąsiednie kąty wewnętrzne czworokąta. Oblicz miary pozostałych kątów tego czworokąta, jeżeli wiadomo, że można na nim opisać okrąg.

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ b) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$ c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 150^\circ$

Ćwiczenie 4

Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$, jeżeli wiadomo, że na czworokącie tym można opisać okrąg, oraz spełnione są podane warunki.

a) $\sphericalangle A = 2\sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle D$ b) $\sphericalangle A = 3\sphericalangle C$, $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$

D **Ćwiczenie 5**

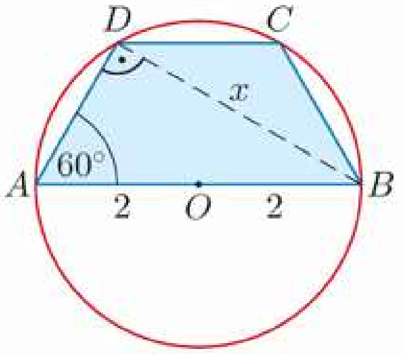
Uzasadnij, że trapez, na którym można opisać okrąg, jest równoramienny.

Ćwiczenie 6

Na trapezie o kolejnych kątach: α, β, γ i δ można opisać okrąg. Oblicz miary kątów tego trapezu, jeśli wiadomo, że $\gamma = 4\alpha$.

Przykład 1

Jedna z podstaw trapezu $ABCD$, wpisanego w okrąg o promieniu 2, jest średnicą tego okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę 60°. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.



Na trapezie można opisać okrąg, więc jest to trapez równoramienny – jego przekątne mają równą długość. Kąt ADB jest kątem prostym (jest oparty na średnicy), zatem $\sin 60^\circ = \frac{x}{4}$ i stąd:

$$x = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Każda z przekątnych ma długość $2\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 7

a) Oblicz obwód trapezu z powyższego przykładu.

b) Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Ramię trapezu ma długość 1 cm, a jego przekątne przecinają się pod kątem 60°. Oblicz obwód tego trapezu.

Mówimy, że koło jest opisane na czworokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Zadania

1. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha > 0$, można opisać okrąg?

a) α, 2α, 3α, 4α b) 2α, α, 4α, 5α c) 3α, 4α, 3α, 2α

2. a) Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości 6 i 10.

b) W okrąg o promieniu 20 wpisano prostokąt. Stosunek długości jego boków jest równy $3:4$. Oblicz pole tego prostokąta.

3. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60°. Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie, jeśli wiadomo, że długość równą 6 cm ma jego:

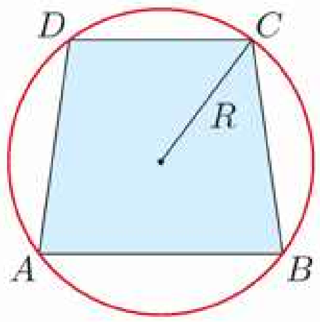
a) krótszy bok, b) dłuższy bok.

4. a) Na trapezie, którego wysokość jest równa 4 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu, jeśli wiadomo, że jedna z jego podstaw jest średnicą tego okręgu.

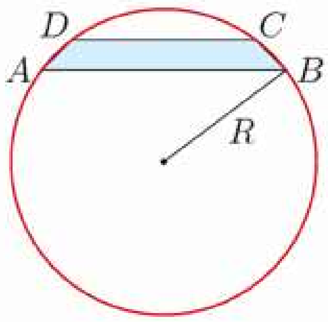
b) Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Kąt między przekątną trapezu a tą podstawą ma miarę 30°, a wysokość trapezu jest równa 2 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

5. Na trapezie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu $R = 5$ (rysunek poniżej). Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|AB| = 8$ oraz $|CD| = 6$.

a)



b)



6. Na trapezie $ABCD$ opisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu R. Kąt między dłuższą podstawą AB a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu A jest równy 30°. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli jego wysokość jest równa h.

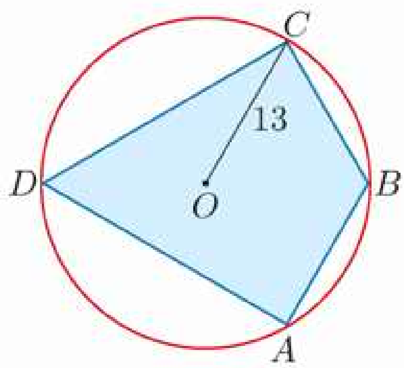
a) $R = 4$ cm, $h = 5$ cm b) $R = 10$ cm, $h = 3$ cm

7. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przekątna jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie. Oblicz długości boków tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 9 cm^2. Oblicz pole koła opisanego na tym trapezie.

D **8.** a) Udowodnij, że jeśli na deltoidzie o bokach x i y można opisać okrąg, to pole tego deltoidu wyraża się za pomocą wzoru: $P = xy$.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na deltoidzie o bokach długości 7 cm i 24 cm.

9. Na deltoidzie o polu równym 312 opisany jest okrąg o promieniu 13 (rysunek obok). Oblicz obwód deltoidu oraz pole trójkąta AOD.



***10.** Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu 6. Boki AD i DC mają równe długości, a kąt ABC ma miarę 120°. Oblicz pole tego czworokąta, jeśli wiadomo, że stosunek pól trójkątów ABD i BCD jest równy $2:1$.

Warto wiedzieć

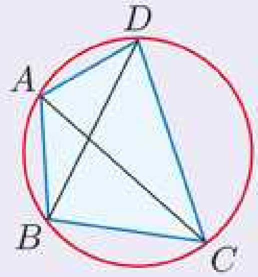
Twierdzenie Ptolemeusza

Poniższe twierdzenie przypisywane jest Klaudiuszowi Ptolemeuszowi, greckiemu astronomowi i matematykowi żyjącemu w Aleksandrii w II wieku n.e.

Twierdzenie

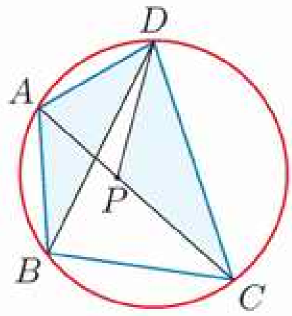
Jeśli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to suma iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta jest równa iloczynowi długości jego przekątnych:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$



Dowód

Na przekątnej AC wybieramy punkt P tak, by kąty ADB i CDP były równe. Ponieważ kąty ABD i ACD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku), trójkąty ABD i PCD są podobne.



Zatem $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|PC|}$ i stąd:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |PC| \qquad \text{(I)}$$

Kąty CAD i CBD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku) oraz kąty BDC i ADP są równe (dlaczego?), więc trójkąty BCD i APD są podobne.

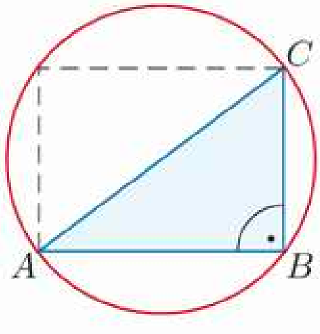
Zatem $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AP|}$ i stąd:

$$|AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AP| \qquad \text{(II)}$$

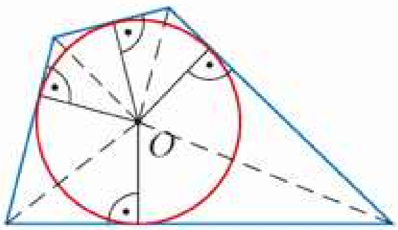
Równości (I) i (II) dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AP| + |BD| \cdot |PC| =$$
$$= |BD| \cdot (|AP| + |PC|) = |BD| \cdot |AC|$$

D **1.** Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, udowodnij twierdzenie Pitagorasa.



*5.8. Okrąg wpisany w czworokąt



Okrąg jest wpisany w czworokąt, jeżeli wszystkie boki czworokąta są styczne do tego okręgu. Mówimy wtedy też, że czworokąt jest opisany na okręgu.

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów wewnętrznych tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego.

Nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg.

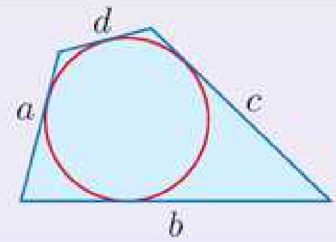
D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że prostokąt, w który można wpisać okrąg, jest kwadratem.

Twierdzenie

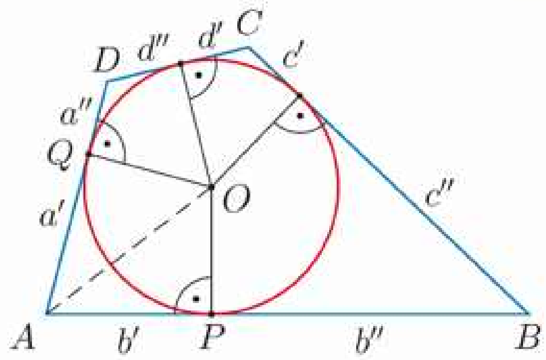
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$



D **Ćwiczenie 2**

Skorzystaj z rysunku obok i udowodnij, że jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.



Ćwiczenie 3

Czy w czworokąt wypukły o podanych długościach kolejnych boków można wpisać okrąg?

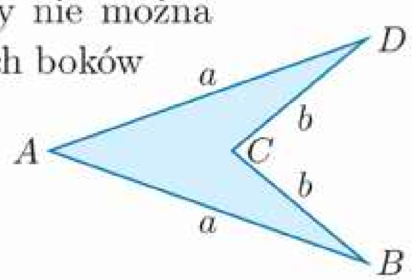
a) 1, 5, 3, 7 b) 14, 9, 8, 13 c) 25, 16, 15, 24

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij, że równoległobok, w który można wpisać okrąg, jest rombem.

Na rysunku obok przedstawiono czworokąt, w który nie można wpisać okręgu, mimo że sumy długości przeciwległych boków są równe:

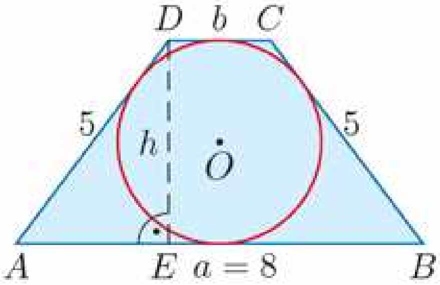
$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$



Przykład ten pokazuje, że w twierdzeniu powyżej założenie, że czworokąt jest wypukły, jest istotne.

Przykład 1

Ramię trapezu równoramiennego ma długość 5, a jego dłuższa podstawa ma długość 8. W trapez ten wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz pole trapezu.



W trapez wpisano okrąg, zatem sumy długości przeciwległych boków tego trapezu są równe: $8 + b = 5 + 5$, stąd $b = 2$. Zauważ, że:

$$|AE| = \frac{a-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość trapezu: $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, czyli $h = 4$.
Promień okręgu wpisanego w ten trapez jest równy połowie jego wysokości, czyli $r = 2$.
Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$.

Ćwiczenie 5

a) W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

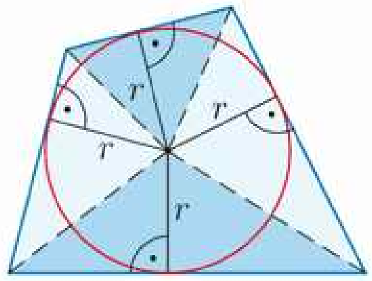
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez, którego ramiona mają długości 5 cm i 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

c) W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu o promieniu 4 cm, jedna z podstaw jest o 12 cm dłuższa od drugiej. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

D Ćwiczenie 6

Skorzystaj z rysunku obok i uzasadnij, że pole P czworokąta o obwodzie równym l opisanego na okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}rl$$



Zadania

1. a) Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 5 cm i 9 cm. Oblicz długość ramion i pole tego trapezu, jeżeli można w niego wpisać okrąg.

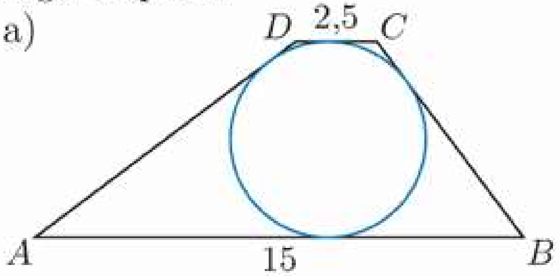
b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 1 cm i 3 cm. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli można w niego wpisać okrąg.

2. Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu długości 10 cm opisanego na okręgu o promieniu 4 cm.

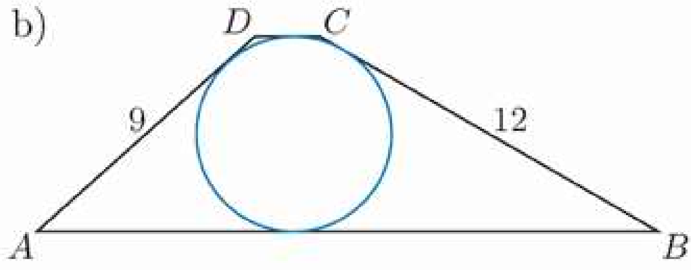
3. W trapez równoramienny (niebędący rombem) o kącie ostrym 45° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

4. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

a)



b)

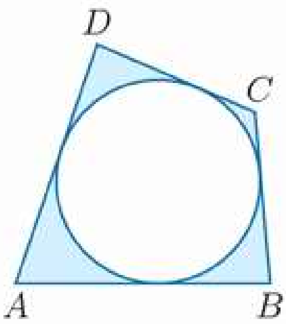


5. W trapez o kątach ostrych przy dłuższej podstawie 30° i 60° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

6. Dłuższa z podstaw trapezu prostokątnego ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 1 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

7. a) W romb o boku długości 2 cm i kącie ostrym 60° wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

b) W romb o kącie ostrym 30° wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego rombu.



8. Czworokąt $ABCD$ (rysunek obok) jest opisany na okręgu o promieniu 2. Wiadomo, że $|AB| = 5$ oraz $|CD| = 3{,}4$. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

D **9.** Wykaż, że jeśli w trapez równoramienny (niebędący rombem) można wpisać okrąg, to wysokość tego trapezu h jest średnią geometryczną długości jego podstaw a i b, czyli $h = \sqrt{ab}$.

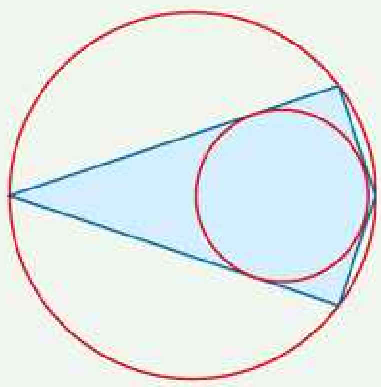
D **10.** a) Uzasadnij, że w dowolny deltoid można wpisać okrąg.

b) Pole deltoidu wynosi 42 cm^2, a jego obwód jest równy 28 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten deltoid.

Czworokątem bicentrycznym nazywamy czworokąt, w który można wpisać okrąg i na którym można opisać okrąg. Przykładem takiego czworokąta jest kwadrat lub deltoid o dwóch kątach prostych.

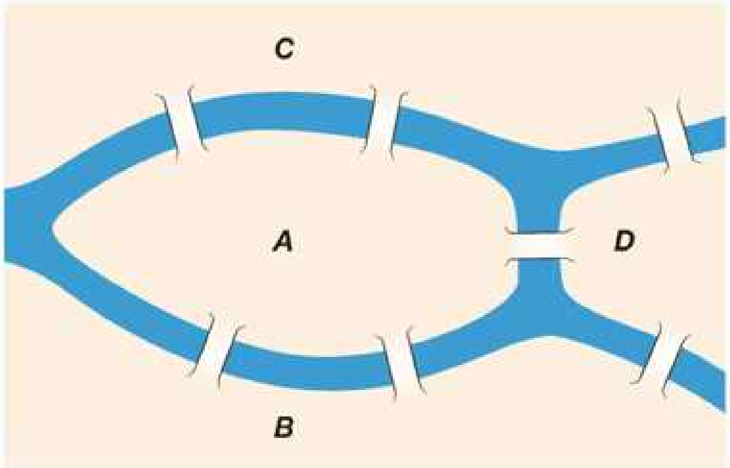
Pole czworokąta bicentrycznego o bokach długości a, b, c, d wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{abcd}$$

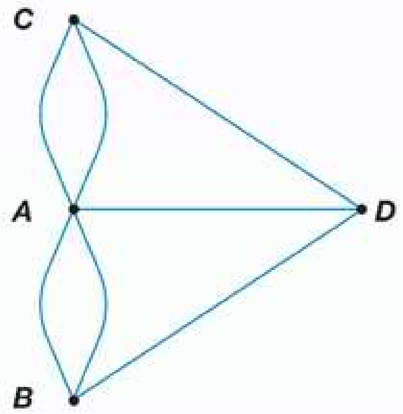


Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregołą, było aż siedem mostów.
Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło?
Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone *A* i *D*), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery *B* i *C*).



Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako *A*, *B*, *C* i *D* są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka *A* jest równy 5, a stopnie wierzchołków *B*, *C* i *D* są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer" po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie".

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].

Kaliningrad, niegdyś Królewiec

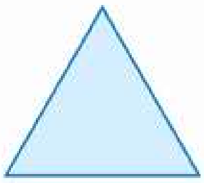
5.9. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywany wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

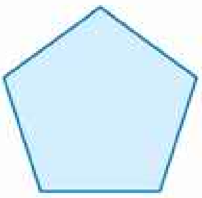
Ćwiczenie 1
Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają: a) wszystkie boki równe, b) wszystkie kąty równe.

Ćwiczenie 2
Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

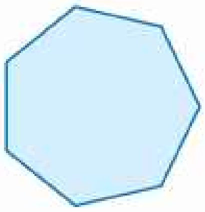
a) trójkąt



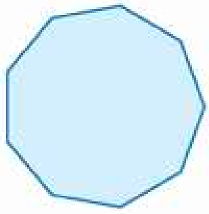
c) pięciokąt



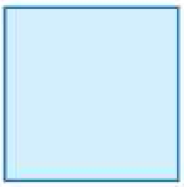
e) siedmiokąt



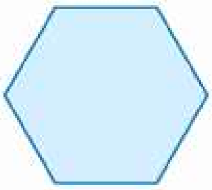
g) dziewięciokąt



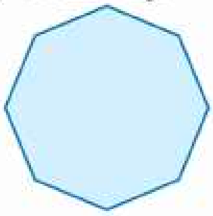
b) kwadrat



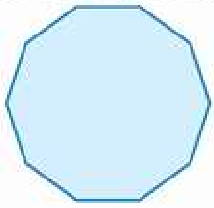
d) sześciokąt



f) ośmiokąt



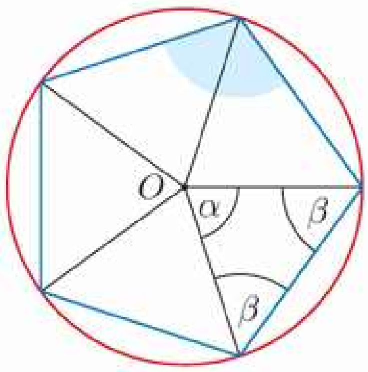
h) dziesięciokąt



Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Przykład 1
Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.



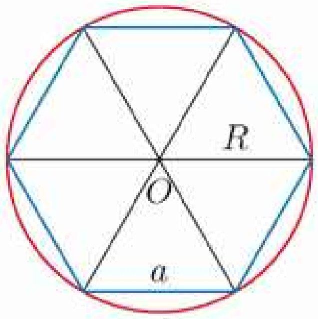
Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Zatem:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

czyli kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

D Ćwiczenie 3
Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a. Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta: $R = a$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.

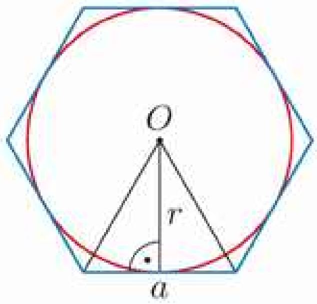
b) Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π.

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a. Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.

b) Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

D Ćwiczenie 6

Dany jest n-kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r. Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

1. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego, b) dziesięciokąta foremnego.

2. Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) $720°$, b) $900°$, c) $1260°$, d) $1440°$, e) $1620°$?

3. Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na danym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.

a) kwadrat o boku a b) sześciokąt foremny o boku a

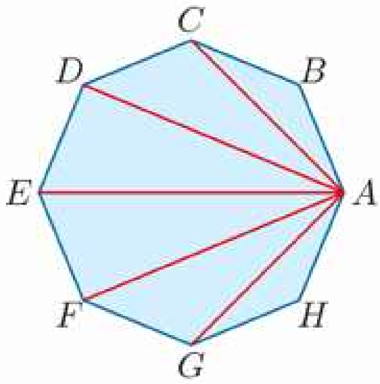
4. Dany jest sześciokąt foremny o boku a i polu P. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R, a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	?	?	?
?	6 cm	?	?
?	?	?	16 cm^2
?	?	12 cm	?

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

D b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n-kąta jest równa $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



D **7.** Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

D **8.** Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a jest równy $\frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

D **9.** Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny o boku a jest równy $\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$.

D **10.** Dany jest n-kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa π cm^2, niezależnie od liczby boków wielokąta.

D **11.** Dany jest wielokąt foremny o boku a. Promień okręgu opisanego na tym wielokącie jest równy R, a promień okręgu wpisanego w ten wielokąt jest równy r. Uzasadnij, że $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

D **12.** a) Uzasadnij, że bok n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R ma długość $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

b) Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w n-kąt foremny o boku długości a jest równy $\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

Warto wiedzieć

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72°

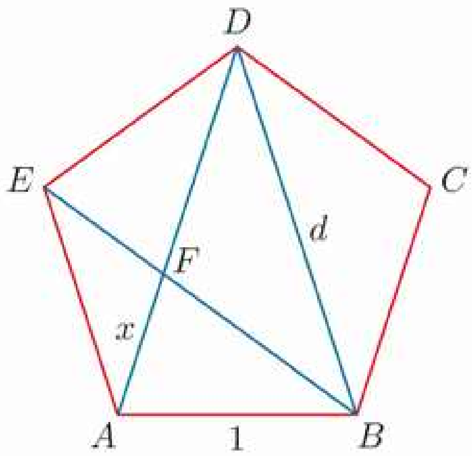
Twierdzenie

Przekątna pięciokąta foremnego o boku 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dowód

Rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku 1 (rysunek obok). Oznaczmy przez d długość jego przekątnej oraz niech:

$$|FA| = x$$



Trójkąty ABD i FAB są podobnymi trójkątami równoramiennymi o kątach równych: 72°, 72°, 36° (sprawdź). Zatem:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{d}$$
$$dx = 1$$

Trójkąt BFD jest równoramienny (jego kąty są równe 36°, 36°, 108°), więc $|FB| = |FD| = d - x$. W trójkącie FAB mamy: $|FB| = |AB| = 1$, stąd $d - x = 1$. Podstawiamy $x = d - 1$ do równania $dx = 1$ i otrzymujemy:

$$d(d-1) = 1$$
$$d^2 - d - 1 = 0$$
$$d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład

Oblicz $\sin 54^\circ$.

Zauważmy, że $\sphericalangle DCB = 108^\circ$ (rysunek powyżej), zatem:

$$\sin 54^\circ = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72° (rozpatrz trójkąty równoramienne ABD i BCD z rysunku w dowodzie powyżej), a następnie przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij.

α	18°	36°	54°	72°
$\sin\alpha$	?	?	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	?
$\cos\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?	?

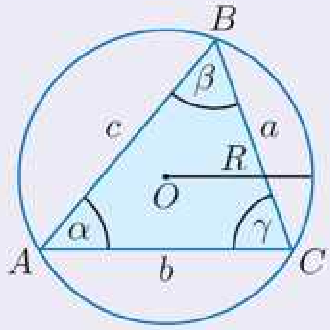
5.10. Twierdzenie sinusów

Przypomnijmy, że **rozwiązaniem trójkąta** nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i miar jego trzech kątów. Jednym z twierdzeń wykorzystywanych do rozwiązywania trójkątów jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie sinusów

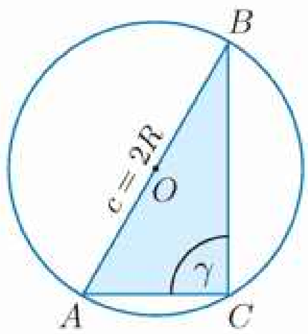
W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

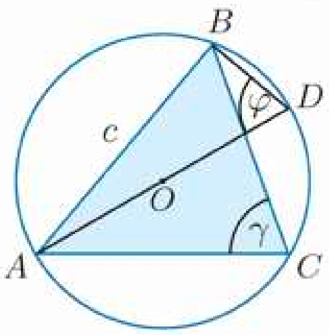
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Dowód. Udowodnimy, że $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. (Równości $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ oraz $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ.

1° Kąt γ jest kątem prostym (rysunek po prawej).
Mamy $c = 2R$ oraz $\sin\gamma = 1$, stąd $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.





2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek po lewej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD. Kąt ABD jest kątem prostym, zatem $\frac{c}{2R} = \sin\varphi$.

Kąty γ i φ są oparte na tym samym łuku, czyli są równe, więc $\frac{c}{2R} = \sin\gamma$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

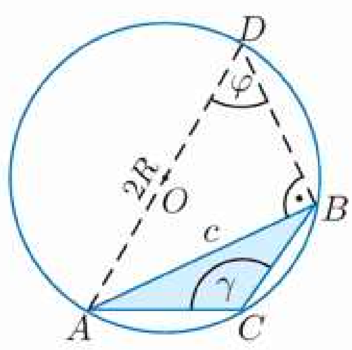
3° Kąt γ jest kątem rozwartym (rysunek poniżej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD.
Kąt ABD jest kątem prostym, zatem:

$$\frac{c}{\sin\varphi} = 2R$$

Suma kątów γ i φ jest równa 180°, stąd:

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$$

Zatem zachodzi równość $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

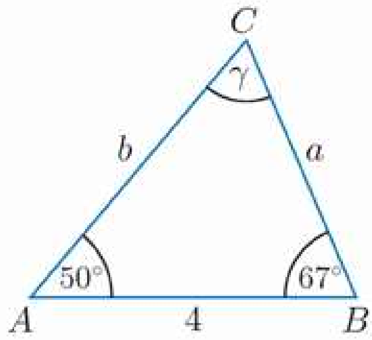


Uwaga. Jeżeli nie zostanie powiedziane, że jest inaczej, będziemy przyjmować, że boki trójkąta: a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów: α, β, γ.

Jeśli dane są dwa kąty i bok trójkąta, to do jego rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia sinusów. Tam, gdzie jest to potrzebne, odpowiednie wartości można odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 384).

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są kąty $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 67^\circ$ oraz bok $c = 4$.



Obliczamy miarę kąta γ:

$\gamma = 180^\circ - (50^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$

Długości boków a i b obliczamy, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \text{zatem} \quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 50^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 3{,}44,$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \text{zatem} \quad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 67^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 4{,}13.$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 6$

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $c = 8$

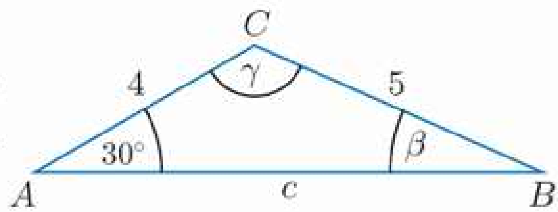
c) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $b = 10$

d) $\beta = 69^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 5$

Twierdzenie sinusów pozwala również rozwiązać trójkąt, gdy dane są dwa jego boki i kąt leżący naprzeciw jednego z tych boków.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są długości boków $a = 5$ i $b = 4$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$.



Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{4\sin 30^\circ}{5} = 0{,}4$$

Z tablic odczytujemy, że $\beta \approx 24^\circ$,

zatem $\gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 24^\circ) = 126^\circ$.

$\sin\beta = 0{,}4$ również dla $\beta \approx 156^\circ$, ale tę możliwość odrzucamy, gdyż $156^\circ + 30^\circ > 180^\circ$.

Z równości $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ obliczamy długość boku c:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{5\sin 126^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}81}{0{,}5} = 8{,}1$$

$\sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 54^\circ) = \sin 54^\circ \approx 0{,}81$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 7$, $b = 6$, $\alpha = 80^\circ$

b) $a = 3$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$

c) $b = 9$, $c = 10$, $\gamma = 45^\circ$

d) $b = 5$, $c = 4$, $\beta = 60^\circ$

D Przykład 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach $a = 3$, $b = 9$ i kącie $\alpha = 30^\circ$.

Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Wówczas na podstawie twierdzenia sinusów prawdziwa jest równość:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin \beta = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{3}{2} > 1$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że taki trójkąt nie istnieje.

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

a) $a = 3$, $b = 2$, $\beta = 60^\circ$

b) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 5$ i $b = 8$ oraz kącie $\alpha = 30^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

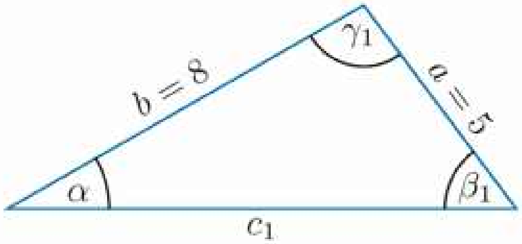
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$ Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0{,}8$$

Z tablic (str. 384) odczytujemy, że $\sin \beta = 0{,}8$ dla kąta ostrego $\beta_1 \approx 53^\circ$. Zauważmy, że $\sin \beta = 0{,}8$ również dla kąta $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 127^\circ$. Kąt β_2 spełnia warunki zadania, gdyż $127^\circ + 30^\circ < 180^\circ$.

Zatem warunki zadania spełniają dwa trójkąty:

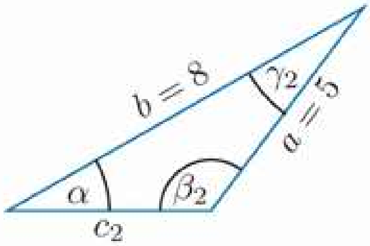
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_1 \approx 53^\circ$, $\gamma_1 \approx 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ) = 97^\circ$



Z równania $\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 9{,}9$$

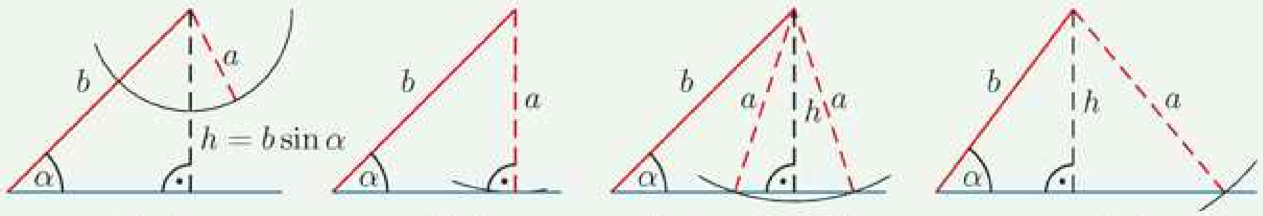
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_2 \approx 127^\circ$, $\gamma_2 \approx 180^\circ - (30^\circ + 127^\circ) = 23^\circ$



Z równania $\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 3{,}9$$

Rozpatrzmy dwa odcinki a i b oraz kąt ostry α, z których chcemy zbudować trójkąt taki, że kąt α będzie leżał naprzeciwko boku a. Może wówczas zachodzić jedna z poniższych sytuacji:



$a < b\sin\alpha$	$a = b\sin\alpha$	$b\sin\alpha < a < b$	$a \geqslant b$
Taki trójkąt nie istnieje.	Trójkąt jest prostokątny.	Istnieją dwa takie trójkąty.	Istnieje jeden taki trójkąt.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$

b) $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$

c) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 60^\circ$

d) $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 45^\circ$

Zadania

1. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

a) $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$

b) $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$

2. a) Bok trójkąta położony naprzeciw kąta o mierze 120° ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135°. Oblicz długość boku trójkąta położonego naprzeciw tego kąta.

D c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15°. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy długości podstawy trójkąta.

3. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 4$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$

b) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$

c) $b = 11$, $c = 12$, $\beta = 60^\circ$

d) $a = 10$, $c = 20$, $\gamma = 150^\circ$

4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $a = 4$, $\alpha = 135^\circ$,

b) $a = 7$, $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 43^\circ$,

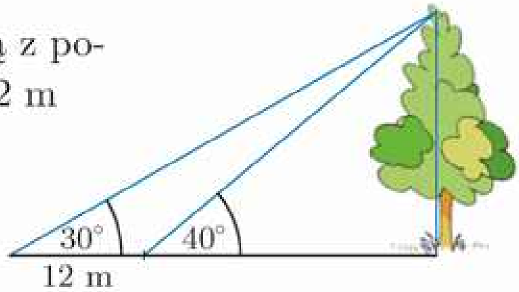
c) $b = 10$, $\beta = 135^\circ$,

d) $a = 7$, $\alpha = 120^\circ$,

e) $a = 3$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 4\gamma$,

f) $c = 11$, $\alpha = \beta = 45^\circ$.

5. W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30°, cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40°. Oblicz wysokość drzewa.



6. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

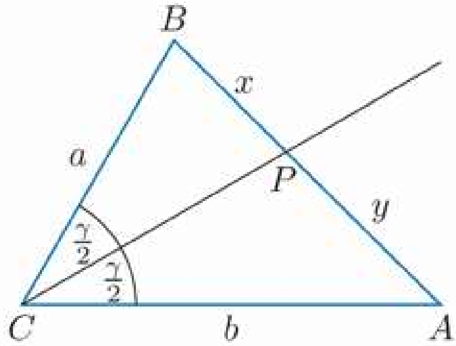
a) $b = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$,
b) $b = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$,
c) $a = 12$, $b = 16$, $\alpha = 30^\circ$,
d) $b = 6$, $c = 5$, $\beta = 20^\circ$,
e) $a = 5$, $c = 7$, $\gamma = 110^\circ$,
f) $a = 6$, $c = 3$, $\gamma = 40^\circ$.

7. Dane są kąty α i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Oblicz obwód trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 135^\circ$.

D 8. Półprosta CP jest dwusieczną kąta γ w trójkącie ABC (rysunek obok). Korzystając z twierdzenia sinusów, udowodnij równość:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$



D 9. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach α, β, γ. Wyprowadź wzór:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

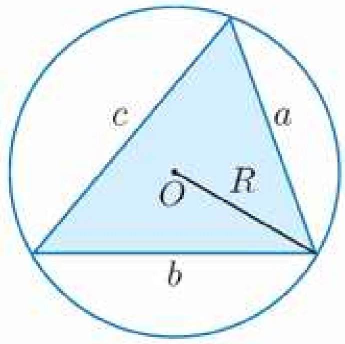
korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości:

$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad P = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta, \quad P = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha$$

D 10. Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

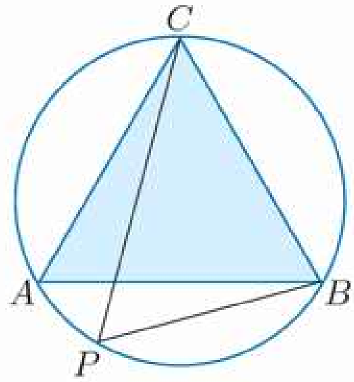


D 11. Niech α i β będą kątami ostrymi trójkąta takimi, że $\alpha > \beta$. Uzasadnij, że bok a jest dłuższy od boku b.

12. W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC (rysunek obok). Punkt P należy do łuku $\widehat{AB}$.

a) Oblicz sinus kąta PAC, jeśli $|AC| = 6$ oraz $|PC| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

D b) Wykaż, że $|AP| + |BP| = |CP|$.

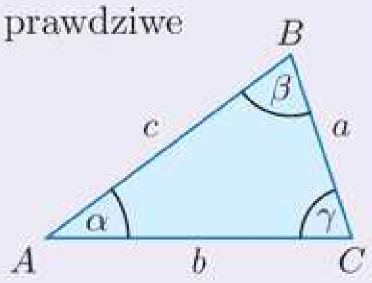


5.11. Twierdzenie cosinusów (1)

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

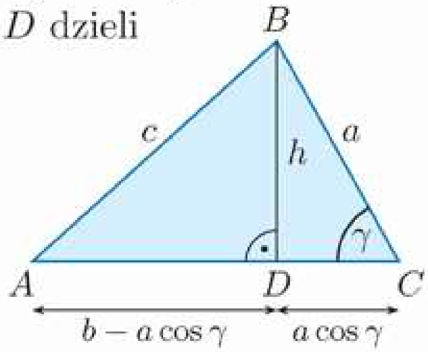


Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (Pozostałe dwie zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny. Wówczas $\cos\gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej). Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry. Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h. Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a\cos\gamma, \quad |AD| = b - a\cos\gamma$$



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

$$h^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$

oraz:

$$h^2 = c^2 - (b - a\cos\gamma)^2$$

Zatem:

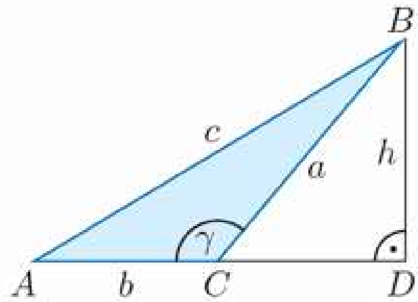
$$c^2 - (b - a\cos\gamma)^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$
$$c^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma - a^2\cos^2\gamma = a^2 - a^2\cos^2\gamma$$

i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ w przypadku, gdy $\gamma > 90°$ (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a\cos(180° - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD.



Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

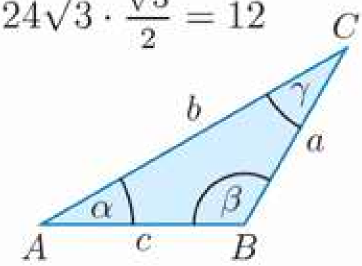
Przykład 1

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$ i $b = 6$ oraz kącie $\gamma = 30^\circ$.

Aby obliczyć długość boku c, korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$



Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Zatem jest to trójkąt równoramienny o kątach:
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

Ćwiczenie 3

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$,

b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$,

c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$.

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach: $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

Stąd:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{36+18-90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

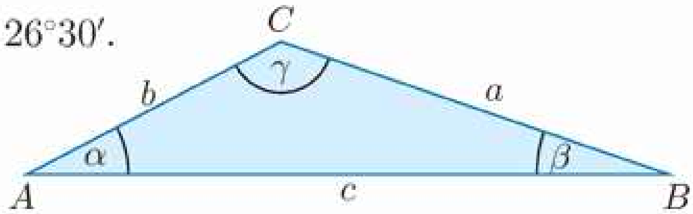
Stąd:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{18+90-36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}8944$$

Z tablic (str. 384) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$



Ćwiczenie 4

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 1,\ b = 1,\ c = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $a = \sqrt{2},\ b = 2,\ c = 1+\sqrt{3}$

Zadania

1. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.

a) $a = 4,\ b = \sqrt{3},\ \gamma = 30^\circ$ c) $a = 2,\ b = 6,\ \gamma = 120^\circ$

b) $b = 5,\ c = 3\sqrt{2},\ \alpha = 45^\circ$ d) $a = 2\sqrt{3},\ c = 4,\ \beta = 150^\circ$

2. Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC: $a = 6$ i $b = 10$. Oblicz długość boku c, jeśli wiadomo, że $\sin\gamma = \frac{4}{5}$ oraz kąt γ jest:

a) ostry, b) rozwarty.

3. Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ wyznaczony przez te boki. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

a) $a = 2,\ b = 4\sqrt{3},\ \gamma = 30^\circ$ c) $a = 5,\ b = 3,\ \gamma = 60^\circ$

b) $a = 4,\ b = 2\sqrt{2},\ \gamma = 45^\circ$ d) $a = 6,\ b = 8,\ \gamma = 120^\circ$

4. Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC.

a) $a = 5,\ b = \sqrt{19},\ c = 3$ b) $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{10},\ c = 2$

5. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 2\sqrt{3},\ b = 4\sqrt{3},\ c = 6$ b) $a = \sqrt{6},\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{3}+3$

6. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ b) $a = 3,\ b = 5,\ c = 7$

7. a) Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 60°. Oblicz długości tych boków, jeśli wiadomo, że trzeci bok tego trójkąta ma długość 7.

b) Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 120°. Oblicz długości tych boków, jeśli wiadomo, że trzeci bok tego trójkąta ma długość 21.

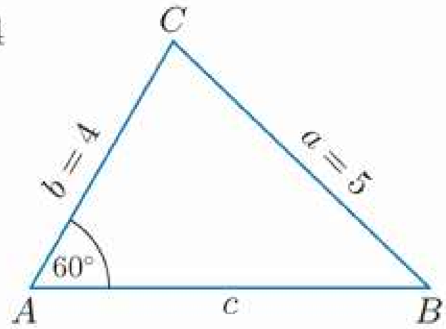
8. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60°. Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz obwód tego trapezu.

5.12. Twierdzenie cosinusów (2)

Aby rozwiązać trójkąt, gdy mamy dane długości jego dwóch boków i miarę kąta położonego naprzeciwko jednego z nich, możemy skorzystać z twierdzenia sinusów lub postąpić tak, jak w przykładzie poniżej.

Przykład 1

W trójkącie ABC (rysunek obok) dane są $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$ oraz $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Oblicz długość boku AB.



Korzystamy ze wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

$$25 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$c^2 - 4c - 9 = 0$$

$$\Delta = 16 + 36 = 52, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

Stąd:

$$c = \frac{4-2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} < 0 \text{ (sprzeczność)}$$

lub

$$c = \frac{4+2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Zatem bok AB ma długość równą $2 + \sqrt{13}$.

Zauważ, że równanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, gdzie nieznany jest bok c, może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć rozwiązań.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $|AC| = 8$, $|BC| = 7$, $\measuredangle BAC = 60^\circ$,

b) $|AC| = 5$, $|AB| = 8$, $\measuredangle ABC = 45^\circ$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 2\sqrt{6}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$ oraz miara kąta BAC równa 30°. Rozwiąż ten trójkąt.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $b = 6$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

b) $a = 4$, $b = 2 + 2\sqrt{3}$, $\gamma = 30^\circ$,

c) $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\beta = 60^\circ$,

d) $a = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $\alpha = 120^\circ$.

Twierdzenie

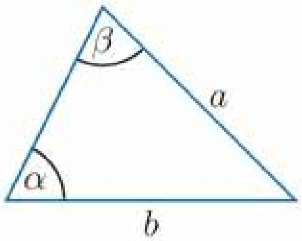
W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód

Niech α będzie kątem ostrym. Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt β.

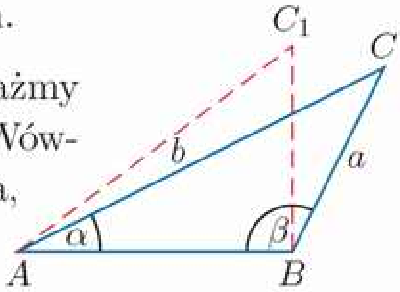
1° Kąt β jest kątem ostrym (rysunek obok). Załóżmy, że $\alpha < \beta$, wówczas $\sin\alpha < \sin\beta$, czyli $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1$. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad \text{zatem} \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < b$$



2° Kąt β jest kątem prostym. Wówczas β jest największym kątem trójkąta, a przeciwprostokątna jest jego najdłuższym bokiem.

3° Kąt β jest kątem rozwartym (rysunek obok). Rozważmy trójkąt prostokątny ABC_1 taki, że $|BC_1| = |BC|$. Wówczas $a < |AC_1|$ oraz z twierdzenia cosinusów wynika, że $|AC_1| < b$ (gdyż $\cos\beta < 0$). Zatem $a < b$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150°.

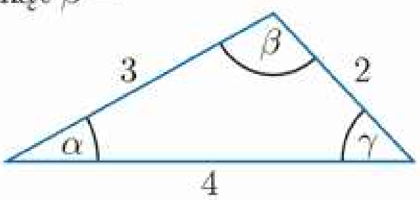
b) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135°, a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3 + \sqrt{3})$ cm. Oblicz długość trzeciego, najkrótszego boku tego trójkąta.

D Przykład 2

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt β – największym. Wykaż, że dla kątów tego trójkąta zachodzą zależności: $\sin\beta = 2\sin\alpha$ oraz $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt β – naprzeciwko najdłuższego. Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$$



zatem $\sin\beta = 2\sin\alpha$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\alpha = \frac{4^2+3^2-2^2}{2\cdot4\cdot3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\cos\beta = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Zatem $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

D Ćwiczenie 5

Dany jest trójkąt o bokach 4, 5 i 6. Wykaż, że $\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha$, gdzie α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a β – największym.

D Przykład 3

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+6^2-9^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos\gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7^2+6^2-9^2}{2\cdot 7\cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos\alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 6

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o bokach a, b, c. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach a, b, c. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?

a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$

b) $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$

c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$

d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:

a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,

b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,

c) promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P. Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c.

a) $a = 4$, $b = 10$, $P = 12$ b) $a = 5$, $b = 6$, $P = 10\sqrt{2}$

4. Oblicz $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ i pole trójkąta o bokach a, b, c.

a) $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{5}$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{3}$

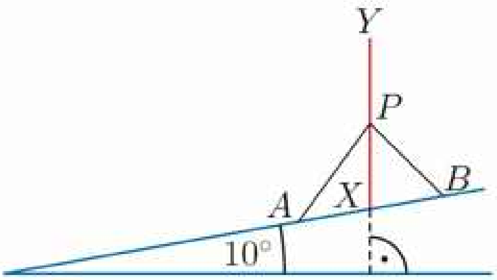
5. a) Oblicz długość przekątnej trapezu równoramiennego, którego dłuższa podstawa ma długość 10 cm, ramię ma długość 6 cm, a kąt między ramieniem i dłuższą podstawą ma miarę 60°.

b) Podstawy trapezu mają długości 3 cm i 6 cm, a jego ramiona są równe 4 cm i 5 cm. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

6. a) Oblicz długości przekątnych rombu o obwodzie równym 16 cm, jeśli wiadomo, że cosinus kąta rozwartego tego rombu jest równy $-\frac{1}{8}$.

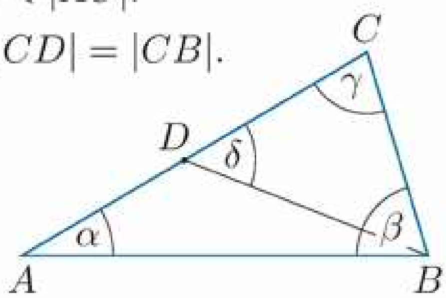
b) Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku, jeżeli wiadomo, że jego obwód jest równy 16 cm.

7. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup XY wysokości 14 m. Jakiej długości są odciągi poprowadzone z punktu P, położonego w środku wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek obok)?



D 8. Przeczytaj podany w ramce szkic dowodu twierdzenia mówiącego, że kąt leżący naprzeciwko dłuższego boku trójkąta jest większy od kąta leżącego naprzeciwko krótszego boku.

> Rozpatrujemy trójkąt ABC, w którym $|BC| < |AC|$.
> Na boku AC wyznaczamy punkt D taki, że $|CD| = |CB|$.
> 1. Zauważamy, że $\alpha < \delta$.
> 2. $\sphericalangle CBD < \beta$ oraz $\delta = \sphericalangle CBD$ (trójkąt BCD jest równoramienny), więc $\alpha < \beta$.

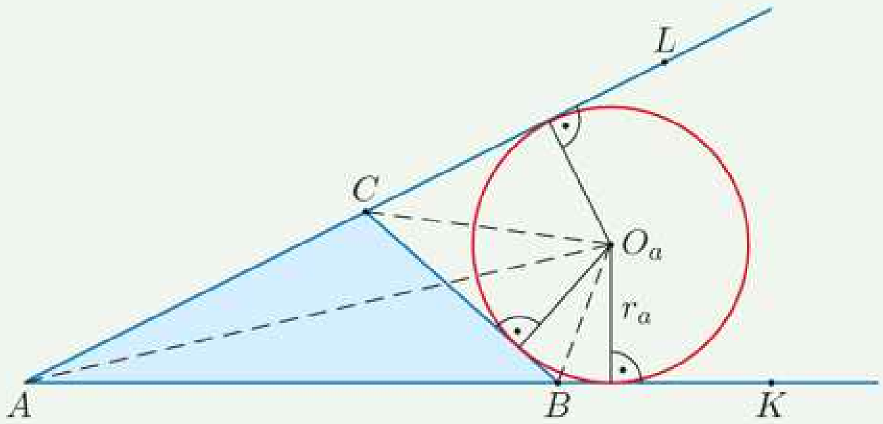


Uzasadnij spostrzeżenie, że w powyższym szkicu dowodu $\alpha < \delta$.

5.13. Zagadnienia uzupełniające

Okrąg dopisany do trójkąta

Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz przedłużeń dwóch pozostałych jego boków.



Środkiem okręgu dopisanego (rysunek powyżej) jest punkt przecięcia dwusiecznych dwóch kątów zewnętrznych trójkąta – kąta CBK i kąta BCL oraz dwusiecznej kąta BAC (uzasadnij, że dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie). Dla dowolnego trójkąta ABC istnieją trzy okręgi dopisane, styczne odpowiednio do boków AB, AC i BC.

Jeśli trójkąt ABC o bokach $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ma pole równe P, to promień r_a okręgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku BC jest równy:

$$r_a = \frac{2P}{b+c-a}$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej. Otrzymujemy:

$$P_{\triangle ACO_a} = \tfrac{1}{2}br_a, \quad P_{\triangle ABO_a} = \tfrac{1}{2}cr_a, \quad P_{\triangle CBO_a} = \tfrac{1}{2}ar_a$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC:

$$P = P_{\triangle ACO_a} + P_{\triangle ABO_a} - P_{\triangle CBO_a} =$$
$$= \tfrac{1}{2}br_a + \tfrac{1}{2}cr_a - \tfrac{1}{2}ar_a = \tfrac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

Stąd $r_a = \dfrac{2P}{b+c-a}$.

1. Oblicz promień okręgu dopisanego do trójkąta równobocznego o boku 1.

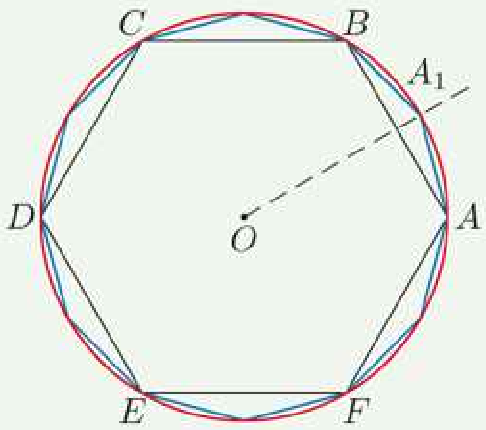
2. Oblicz promienie okręgów dopisanych do trójkąta prostokątnego o bokach równych 3, 4, 5.

Konstrukcja wybranych wielokątów foremnych

Nie wszystkie n-kąty foremne można skonstruować, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Carl F. Gauss udowodnił twierdzenie mówiące, dla jakich liczb n jest to możliwe. Na przykład dla $n < 20$ są to: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$.

Konstrukcja sześciokąta i dwunastokąta foremnego wpisanych w okrąg

- Na okręgu wybieramy dowolny punkt A i zaczynając od tego punktu, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu. Wyznaczone w ten sposób punkty: A, B, C, D, E i F są wierzchołkami sześciokąta foremnego.

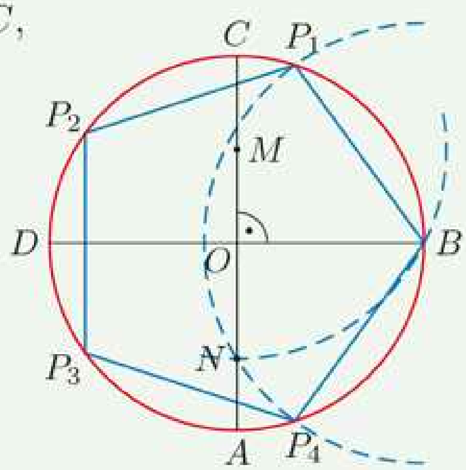


- Konstruujemy symetralną odcinka AB. Przecina ona okrąg w punkcie A_1. Odcinek AA_1 jest bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.
- Następnie, zaczynając od punktu A_1, odmierzamy łuki okręgów o promieniu $|AA_1|$. Punkty przecięcia tych łuków z okręgiem są pozostałymi wierzchołkami dwunastokąta.

3. Skonstruuj kwadrat i ośmiokąt foremny wpisane w dany okrąg.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Rysujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD.
- Wyznaczamy punkt M – środek odcinka OC, gdzie O jest środkiem okręgu.
- Rysujemy łuk okręgu o środku M i promieniu $|BM|$. Łuk ten przecina średnicę AC w punkcie N.
- Odcinek BN ma długość boku szukanego pięciokąta – odkładamy go kolejno na okręgu i otrzymujemy pozostałe wierzchołki pięciokąta: P_1, P_2, P_3 i P_4.



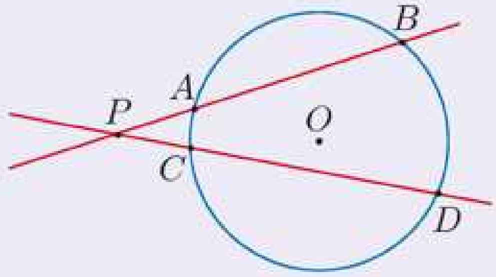
4. Powyżej opisano konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować pięciokąt foremny, gdy dany jest bok tego pięciokąta.

Odcinki stycznych i siecznych

Twierdzenie o siecznych

Jeśli dwie sieczne poprowadzone z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Dowód

Czworokąt $ACDB$ jest wpisany w okrąg, stąd $\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle PDB$.

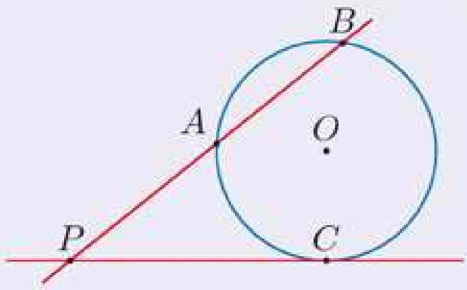
$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PDB$, co oznacza, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

Z proporcji $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$ otrzymujemy równość $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Twierdzenie o stycznej i siecznej

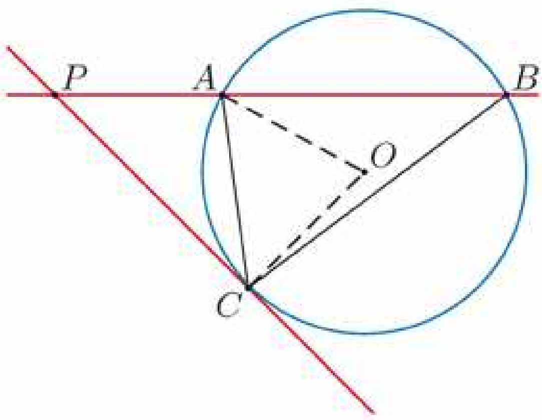
Jeśli przez punkt P przechodzi styczna do okręgu w punkcie C oraz sieczna przecinająca okrąg w punktach A i B, to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$$



D **5.** Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Z punktu P poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie C oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B. Udowodnij twierdzenie o stycznej i siecznej, wykazując kolejno, że:

1. $\triangle PCA \sim \triangle PBC$,
2. $|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$.



6. Oblicz odległość punktu P od środka okręgu o promieniu 2,5 cm, jeśli wiadomo, że:

a) styczna do tego okręgu poprowadzona z punktu P ma z okręgiem punkt wspólny A taki, że $|PA| = 6$ cm,

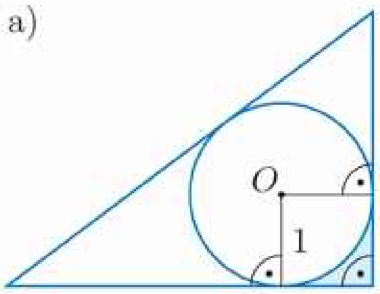
b) sieczna poprowadzona z punktu P przecina ten okrąg w punktach C i D takich, że $|PC| = 2$ cm i $|PD| = 5$ cm.

Zestawy powtórzeniowe

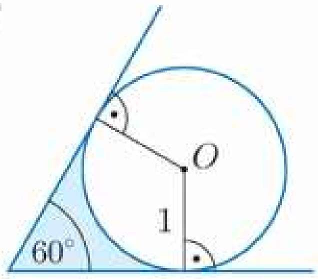
Zestaw I

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

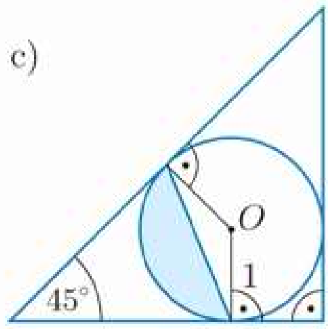
a)



b)

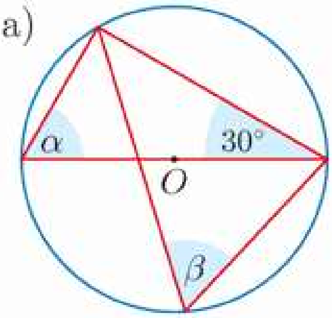


c)

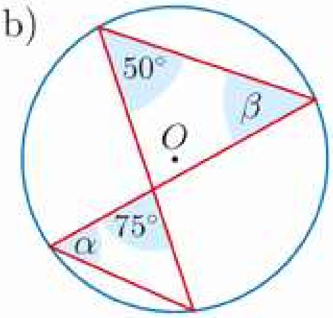


2. Wyznacz miary kątów α i β.

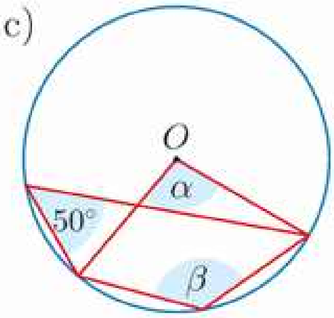
a)



b)



c)

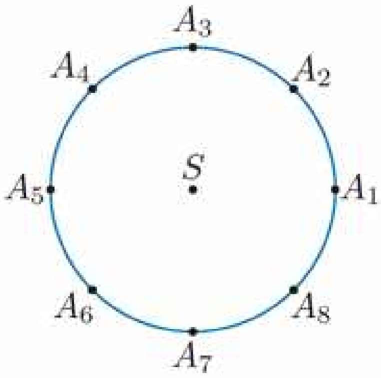


3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B oraz miarę kąta między cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C.

4. Punkty: $A_1, A_2, \ldots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta między cięciwą:

a) A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1,

b) A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8.

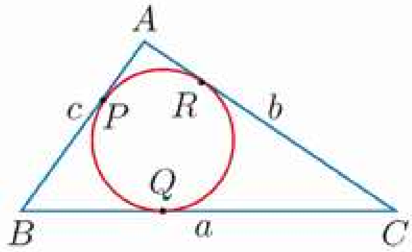


5. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt:

a) prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 3,

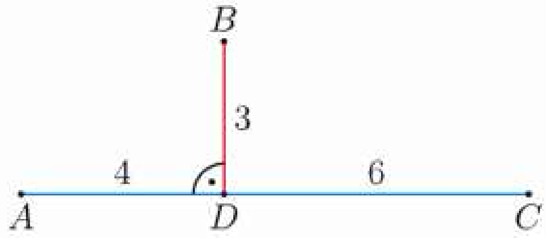
b) o bokach długości 20, 21 i 29.

6. W trójkąt o bokach: $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków: AP, BQ i CR.



D **7.** Wykaż, że suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu na nim opisanego.

8. Oblicz promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C (rysunek obok). Oblicz odległość między środkami tych okręgów.



9. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.

10. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

11. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,

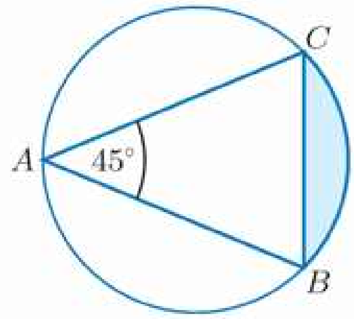
b) jest on równoramienny.

12. Równoramienny trójkąt ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok). Oblicz:

a) długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$,

b) pole zacieniowanego odcinka koła,

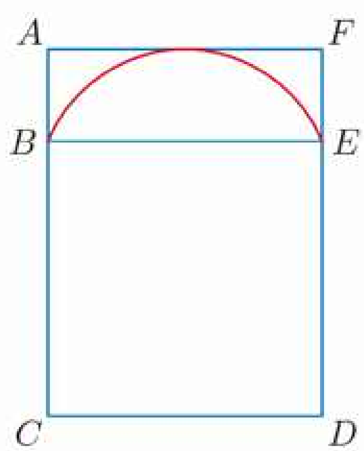
c) obwód trójkąta ABC.



Zestaw II

1. Dany jest równoległobok o bokach a i $2a$ oraz kącie ostrym 30°. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

2. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\widehat{BE}$.



3. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe 5 i 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie, jeśli wiadomo, że jego:

a) wysokość jest równa 3,

b) kąt ostry ma miarę 30°.

4. Oblicz pole ośmiokąta foremnego:

a) opisanego na kole o polu równym 4π cm^2,

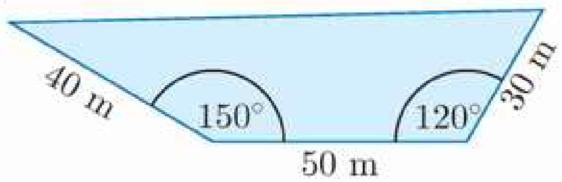
b) którego najkrótsza przekątna ma długość 2 cm.

5. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC, jeśli:

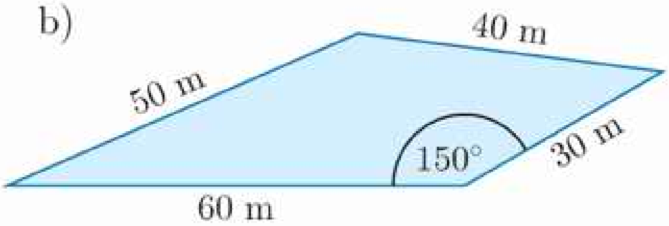
a) $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$, b) $b = 4$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

6. Działka budowlana ma kształt nieregularnego czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.

a)



b)



7. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 75°, jeden z jego boków ma długość 4 cm, a krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{4+\sqrt{3}}$ cm. Oblicz obwód i długość drugiej przekątnej tego równoległoboku.

8. Środek okręgu opisanego na trapezie leży na jednej z jego podstaw. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli jego podstawy mają długości 15 i 9.

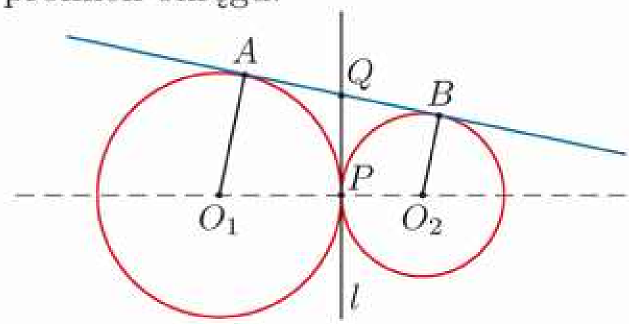
9. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz pole tego trapezu, jeśli:

a) jego wysokość ma 2 cm, a suma długości ramion jest równa 10 cm,

b) promień okręgu jest równy 6 cm, a kąt ostry trapezu ma miarę 30°.

10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i $3a$. Ile powinna być równa wysokość tego trapezu, aby można było w niego wpisać okrąg?

D **11.** Uzasadnij, że prosta l na rysunku poniżej dzieli odcinek AB na połowy, a następnie przyjmij, że promień większego okręgu jest równy 16, a mniejszego 9, i oblicz promień okręgu:



a) opisanego na czworokącie O_1PQA,

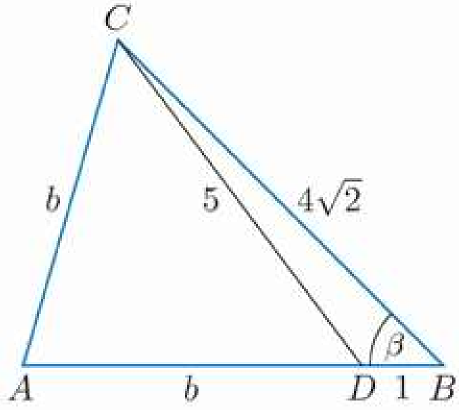
b) wpisanego w czworokąt O_1PQA.

Przykład

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób



Aby obliczyć $\cos\beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:

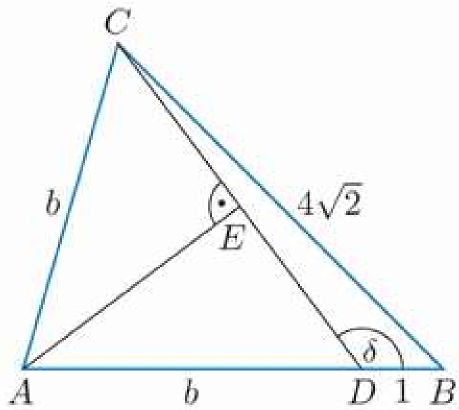
$$5^2 = (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos\beta$$
$$25 = 33 - 8\sqrt{2}\cos\beta$$
$$8\sqrt{2}\cos\beta = 8$$
$$\cos\beta = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Obliczamy b, korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:

$$b^2 = (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2\cdot(b+1)\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos\beta$$
$$b^2 = b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8$$
$$6b = 25$$
$$b = 4\tfrac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2\cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób



Aby obliczyć $\cos\delta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:

$$(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + 1^2 - 2\cdot 5\cdot 1\cdot\cos\delta$$
$$32 = 26 - 10\cos\delta$$
$$10\cos\delta = -6$$
$$\cos\delta = -\tfrac{3}{5}$$

Zatem:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta = \tfrac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD. Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos\sphericalangle ADE = \tfrac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\tfrac{3}{5} = \tfrac{\frac{5}{2}}{b}\text{, czyli } b = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{5}{3} = 4\tfrac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2\cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, **B.** $6a^2$, **C.** $3\sqrt{3}a^2$, **D.** $6\sqrt{3}a^2$.

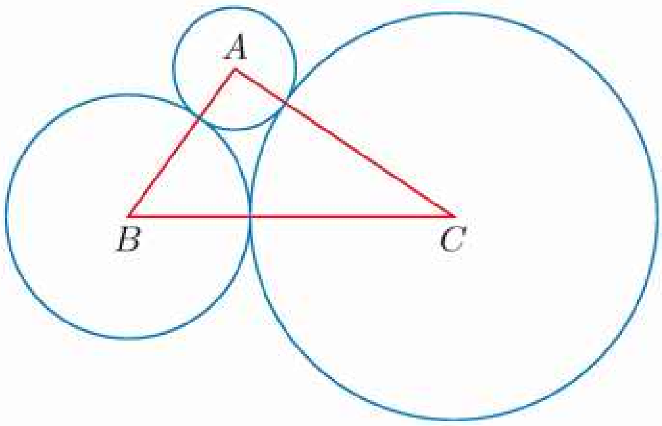
2. Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe:

A. $0{,}6\pi$, **B.** $1{,}2\pi$, **C.** $1{,}8\pi$, **D.** $2{,}4\pi$.

3. Kąty trójkąta równoramiennego mają miary: α, α i 4α, a jego ramię ma długość 2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. $2\sqrt{3}-3$, **B.** $2\sqrt{3}-2$, **C.** $3\sqrt{2}-3$, **D.** $3\sqrt{2}-2$.

4. Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi:



A. $-\frac{1}{6}$, **C.** $-\frac{1}{39}$,

B. $-\frac{1}{16}$, **D.** 0.

5. Okrąg o środku w punkcie O_1 i okrąg o środku w punkcie O_2 przecinają się w punktach A i B. Kąt O_1AB ma miarę 60°, a kąt O_2AB – miarę 30°. Jeśli odcinek AB ma długość 4, to promień okręgu opisanego na czworokącie O_1AO_2B jest równy:

A. $\sqrt{3}$, **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, **C.** $2\sqrt{3}$, **D.** $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

6. Na czworokącie o kolejnych kątach α, β, γ i δ opisano okrąg. Jeśli $\delta = 5\alpha$ oraz $\alpha + \beta = 100^\circ$, to:

A. $\gamma = 100^\circ$, **B.** $\gamma = 120^\circ$, **C.** $\gamma = 140^\circ$, **D.** $\gamma = 160^\circ$.

7. Trzy kolejne boki czworokąta mają długości: $2\sqrt{2}$, $4-\sqrt{2}$, $5-\sqrt{2}$. Jeśli w czworokąt ten można wpisać okrąg, to jego czwarty bok ma długość:

A. $\frac{7}{2\sqrt{2}-1}$, **B.** $\frac{7}{2\sqrt{2}+1}$, **C.** $\frac{7}{\sqrt{2}-1}$, **D.** $\frac{7}{\sqrt{2}+1}$.

8. Trapez prostokątny o kącie ostrym 45° opisany jest na okręgu o promieniu równym $\sqrt{2}$. Obwód tego trapezu jest większy od średnicy okręgu o:

A. $8+4\sqrt{2}$, **B.** $8+2\sqrt{2}$, **C.** $6+4\sqrt{2}$, **D.** $6+2\sqrt{2}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

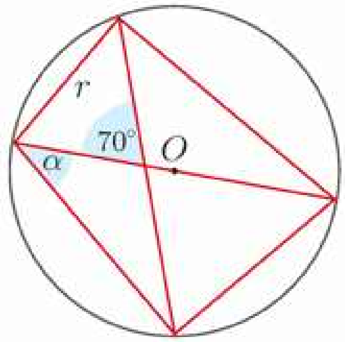
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt $\alpha < 180^\circ$ jest równe P. Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α?

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2} + 1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r. Wyznacz kąt α.



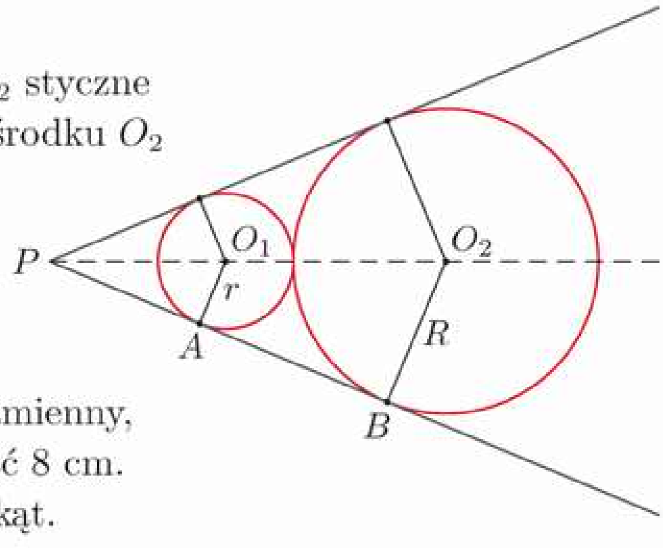
Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $\sphericalangle ABC = 150^\circ$ oraz $|AC| = 4$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (5 pkt)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta O_1PA oraz promień r okręgu o środku O_1.



Zadanie 6 (4 pkt)

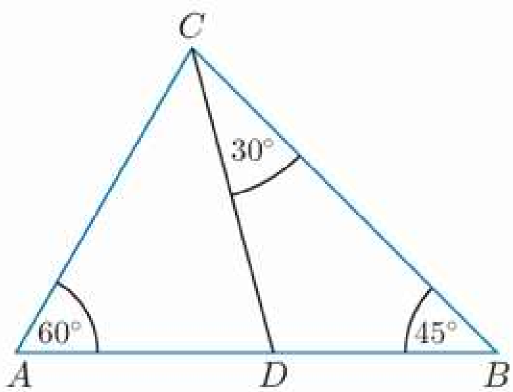
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 7 (4 pkt)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Zadanie 8 (5 pkt)

Odcinek DC na rysunku obok ma długość $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.



W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

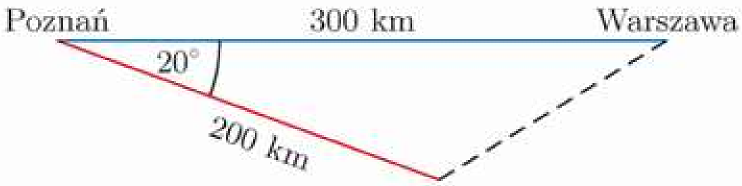
Czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, opisany jest na okręgu o średnicy 3 cm. Niech P będzie polem tego czworokąta wyrażonym w cm^2. Zakoduj trzy początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby P.

Zadanie 2 (2 pkt)

W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle ABC = 23^\circ$, $\sphericalangle ACB = 64^\circ$ i $|BC| = 800$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta i zaokrąglij ją do najbliższej liczby całkowitej. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)

Odległość między Poznaniem a Warszawą jest równa 300 km. Pilot lecący samolotem z Poznania do Warszawy po przebyciu 200 km zorientował się, że pomylił kurs o 20°. W jakiej odległości (w kilometrach) znajdował się wówczas od Warszawy? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

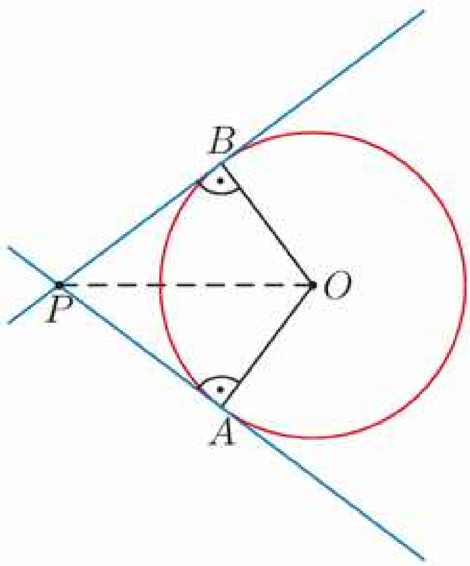


Zadanie 4 (4 pkt)

Oblicz pole koła wpisanego w trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm.

Zadanie 5 (5 pkt)

Proste AP i BP są styczne do okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 3$ cm (rysunek obok). Odległość punktu O od punktu P jest równa 5 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w czworokąt $PAOB$.



Zadanie 6 (4 pkt)

Dany jest trójkąt o bokach 6 cm, 5 cm i 4 cm. Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej do najdłuższego boku.

Zadanie 7 (6 pkt)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 18$, $|AC| = 15$, $|BC| = 12$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ADC.

6 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skalę logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 313).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli

Potęga o wykładniku wymiernym

1. Oblicz.

a) $(-4)^5$ c) 4^{-3} e) $\left(1\frac{1}{2}\right)^6$ g) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$ i) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-3}$

b) $(-5)^4$ d) 5^{-3} f) $\left(\frac{13}{7}\right)^0$ h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ j) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-4}$

2. Przedstaw liczbę w postaci 2^m.

a) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$
b) $2^{-4} : 2^{-6}$
c) $(2^2)^3 \cdot 2$
d) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$
e) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$
f) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$
g) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$
h) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$
i) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$
j) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{Q}$:
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie $a \in \mathbf{N}$.

a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0{,}01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : \left(64^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)$

b) $125^3 \cdot 0{,}2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \cdot 1{,}5^6$

4. Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}}$ c) $64^{\frac{1}{3}}$ e) $8^{\frac{2}{3}}$ g) $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$ i) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

b) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{3}{4}}$ h) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$ j) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

5. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie $m \in \mathbf{Q}$.

a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$

b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0{,}5} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$, $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ b) $x = \left(\frac{2^6}{6^3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $y = \left(\sqrt[3]{1{,}6}\right)^6$

7. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\dfrac{(4x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

8. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{y} : y^{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt[3]{ab^{-2}} : (a^{-2}b)^{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{-1} \cdot \sqrt{xy} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$

b) $(xy)^{\frac{2}{3}} : \left(\sqrt[3]{xy}\right)^5$ d) $\left(ab^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{ab^2}$ f) $\left(x^{\frac{3}{4}}y\right)^{-2} : \left(x^{\frac{2}{3}}y\right)^{-3}$

6.1. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrafimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x, gdy x jest liczbą niewymierną (w celu sformułowania ścisłej definicji wykorzystuje się pojęcie granicy ciągu – zostanie ono omówione w dalszym toku nauki).

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4{,}655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4{,}706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4{,}727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4{,}728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4{,}728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się" do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się" do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9{,}518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9{,}738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9{,}738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9{,}738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9{,}738517742$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^{π}.

$2^{3{,}14}$	$\approx 8{,}815240927$
$2^{3{,}14159}$	$\approx 8{,}824961595$
$2^{3{,}14159265}$	$\approx 8{,}824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^{π}	$\approx 8{,}824977827$

$\pi = 3{,}14159265\ldots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^{π}.

Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne liczby: a) 3^{π}, b) 5^{π}, c) π^{π}.

Podane w „Warto powtórzyć" wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$

b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$

c) $6^{\pi} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi} = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^{\pi} = 9^{\pi}$

d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$

c) $\left(5^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$

d) $\left(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$

g) $\dfrac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$

h) $\dfrac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$
b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$
c) $\left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$
d) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$
e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
f) $\left(\sqrt{3}\right)^{\pi} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\pi}$

2. Oblicz.

a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$
b) $5^{\pi+3} : 5^{\pi}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$
d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$
e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$
f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}}\sqrt{7}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$
g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
h) $4^{\pi+3} \cdot 3^{\pi} : 12^{\pi}$
i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(6^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$.

a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$
b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$
c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$
d) $27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2$
e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3;6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$
b) $q = 0{,}5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$
c) $q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}32199709$
$3^{\sqrt{3}} \approx 6{,}70499185$
$6^{\sqrt{3}} \approx 22{,}2739634$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

a) $x = 2^{4\sqrt{2}},\ \ y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \ z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
b) $x = 1{,}5^{4-2\sqrt{3}},\ \ y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}},\ \ z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$
c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}},\ \ y = 25^{2-3\sqrt{5}},\ \ z = 0{,}0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

6. Wstaw w miejsce $\boxed{?}$ jeden ze znaków: $>$, $<$ lub $=$, tak by powstało zdanie prawdziwe.

a) $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}}\ \boxed{?}\ 4^5$
b) $9^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \cdot 27^{-\frac{\sqrt{7}}{3}}\ \boxed{?}\ 3$
c) $\frac{4^{2\sqrt{3}} \cdot 8}{16^{\sqrt{3}+1}}\ \boxed{?}\ \frac{1}{2}$
d) $\frac{9^{-2\sqrt{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}}{81^{1-\sqrt{5}}}\ \boxed{?}\ \frac{1}{27}$
e) $\frac{\pi^{1-\sqrt{2}} \cdot \pi^{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\ \boxed{?}\ \frac{1}{\pi^3}$
f) $\frac{2^{2\pi} \cdot 9^{\pi}}{36^{\pi-1}}\ \boxed{?}\ 6$

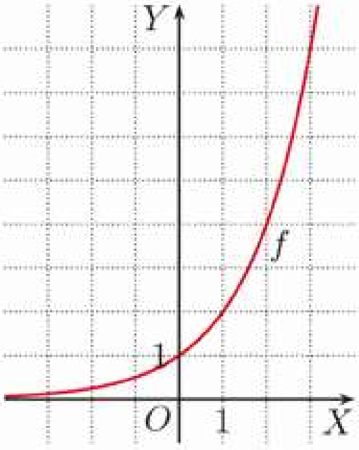
7. Dla jakiej liczby x prawdziwa jest równość?

a) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^x = 1$
b) $5^{1-\pi} \cdot 5^x = 5$
c) $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^x = 25$

6.2. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

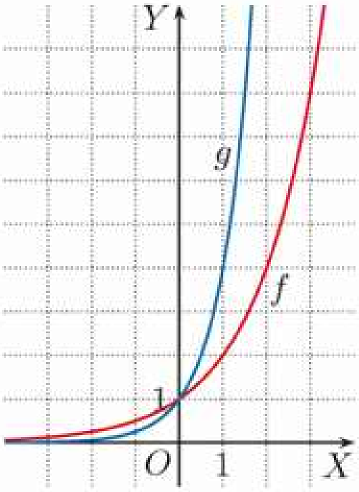


x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.



x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

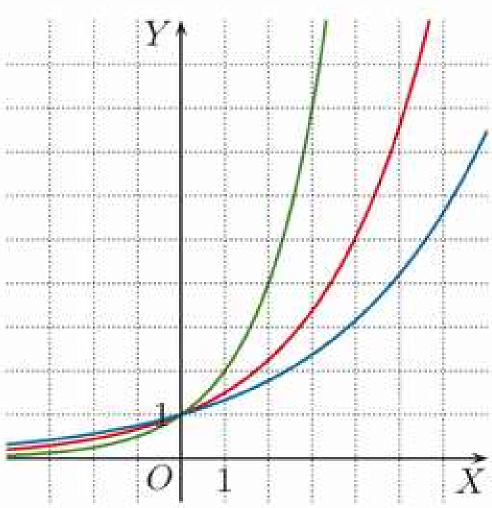
Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbf{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.



a) Dobierz wzór do każdego wykresu.

b) Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g. Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.

c) Które spośród punktów:

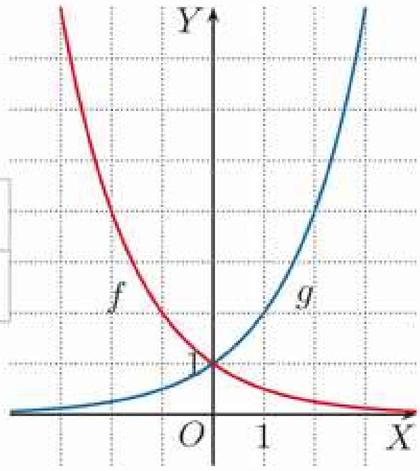
$$A\left(4, 3\tfrac{15}{81}\right),\ B\left(-4, \tfrac{81}{256}\right),\ C\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

należą do wykresu funkcji h?

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY, ponieważ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = g(-x)$.

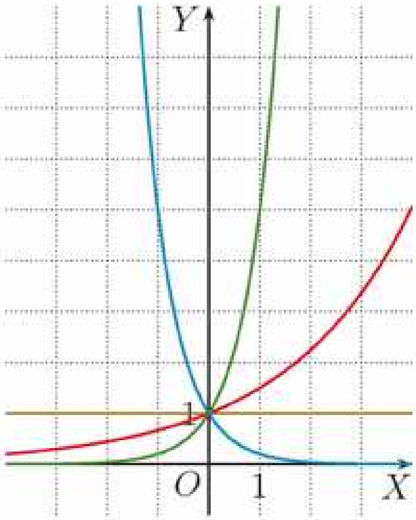
Ćwiczenie 3

a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

b) Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

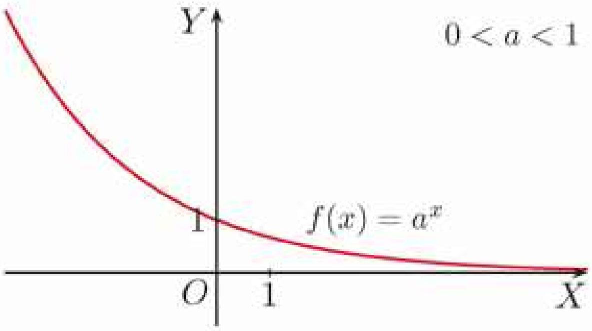
Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0{,}2^x$, $h(x) = 1{,}5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

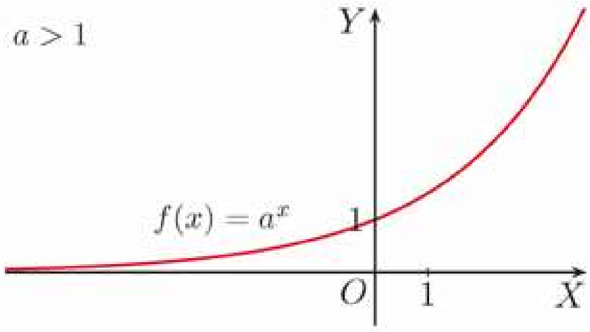


Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX, która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, stąd:

$$10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$$

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, stąd:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $5^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{3}}, 5^{0,3}, 5^{0,33}$

b) $7^{3,1}, 7^{3,2}, 7^{\pi}, 7^{\sqrt{5}}$

c) $0,6^{\frac{1}{2}}, 0,6^{\frac{1}{3}}, 0,6^{\frac{3}{7}}, 0,6^{\frac{3}{8}}, 0,6^{0,35}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 4^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $f(x) = 8^x$

f) $f(x) = 100^x$

2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f?

a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f?

a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$

4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$

5. Określ monotoniczność funkcji f.

a) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\sqrt{3} - 1\right)^x$ c) $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$

6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{7}{5}}, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5, \left(\frac{3}{4}\right)^6, \left(\frac{3}{4}\right)^{2\sqrt{6}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{26}}$

c) $\sqrt[3]{\pi}, \pi^{\frac{1}{2}}, \pi^{\frac{3}{7}}, \pi^{\frac{1}{\pi}}$

d) $9^0, 9^{-2}, 9^{-\sqrt{3}}, 9^{-\sqrt{\pi}}$

7. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $8^{\frac{1}{2}}$, $16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$, $32^{\frac{\pi}{10}}$, $256^{\frac{1}{4}}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{2,6}$, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{243}$

8. Podaj współrzędne trzech punktów należących do wykresu funkcji f, tak aby każda z tych współrzędnych była liczbą wymierną. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ c) $f(x) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^x$

9. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4x + 1$

b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$

c) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 5 - x$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = x + 4$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = |x| + 1$

10. Podaj zbiór rozwiązań nierówności, korzystając z odpowiednich wykresów.

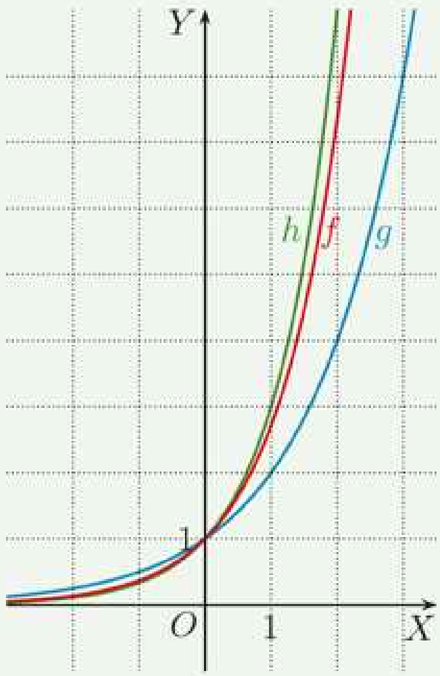
a) $2^x > 3^x$ b) $3^x \leqslant 4^x$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 3^x$

Czy wiesz, że…

W zastosowaniach często korzysta się z funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$. Liczba e (oznaczenie wprowadzone przez Leonharda Eulera [czyt. ojlera]) jest liczbą niewymierną:

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = e^x$ oraz dla porównania wykresy funkcji $g(x) = 2^x$ i $h(x) = 3^x$.



Coraz dokładniejsze przybliżenia liczby e otrzymujemy, obliczając wartość wyrażenia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dla coraz większych liczb naturalnych:

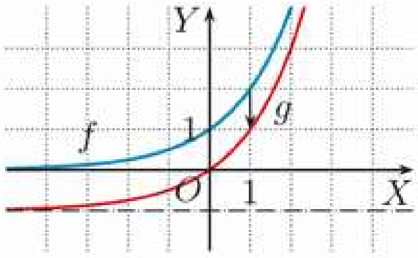
$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}5937\ldots,\quad \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}7169\ldots,\quad \left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} = 2{,}718280469\ldots$$

11. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: 9, $2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{e}\right)^4$, $e^{1,5}$, $e^{\sqrt{3}}$.

6.3. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (1)

Przykład 1



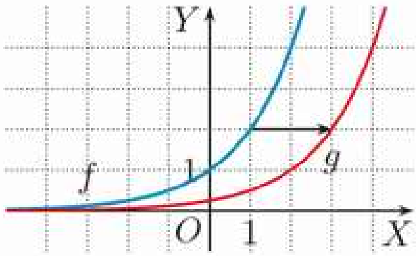
Wykres funkcji $g(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $g(x) = 3^x - 2$ b) $g(x) = 2^x + 1$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

Przykład 2



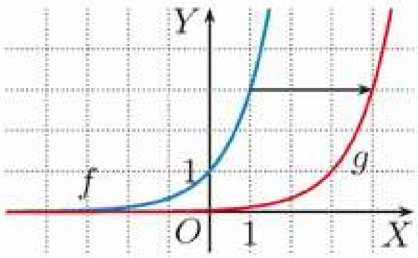
Wykres funkcji $g(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj odciętą punktu należącego do wykresu funkcji g, jeśli rzędna tego punktu jest równa 1.

a) $g(x) = 3^{x-1}$ b) $g(x) = 2^{x+2}$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

Przykład 3



Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{3^x}{27}$?

$$g(x) = \frac{3^x}{27} = \frac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$$

Wykres funkcji f należy przesunąć o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Ćwiczenie 3

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{2^x}{16}$ b) $g(x) = \frac{2^x}{1024}$ c) $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

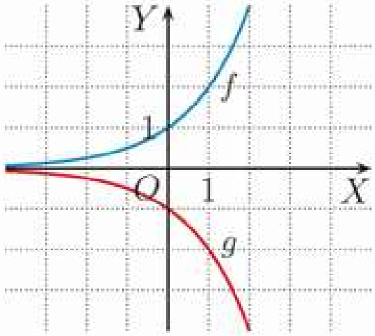
Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $g(x) = 2^{x-1} + 2$ b) $g(x) = \frac{2^x}{4} - 2$ c) $g(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{4}$

Przykład 4

Wykres funkcji $g(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

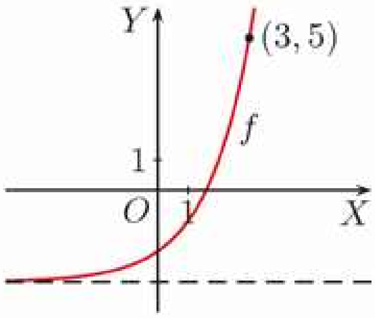
a) $g(x) = -3^x$ b) $g(x) = -4^x$ c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x + 2$
b) $f(x) = 3^x - 1$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
d) $f(x) = 3^{-x} + 1$
e) $f(x) = 4^{-x} - 4$
f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a.



3. Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P. Podaj wartość współczynnika a.

a) $P(0, -3)$ b) $P(2, 7)$ c) $P(4, 0)$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 1$.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x$ b) $f(x) = \frac{2^x}{8}$ c) $f(x) = \frac{0{,}04}{5^x}$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -1$.

a) $f(x) = -2^{x-2}$ b) $f(x) = -3^{x+1}$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

6. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i funkcji g.

a) $f(x) = 2^x - 3$ b) $f(x) = 3^x + 1$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

7. Wykres funkcji $f(x) = 5^x$ przesunięto o wektor $\overrightarrow{v}$ i otrzymano wykres funkcji g. Podaj wzór funkcji g i jej zbiór wartości.

a) $\overrightarrow{v} = [0, -3]$ b) $\overrightarrow{v} = [1, 2]$ c) $\overrightarrow{v} = [-2, 4]$

8. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej miejsce zerowe oraz zbiór wartości.

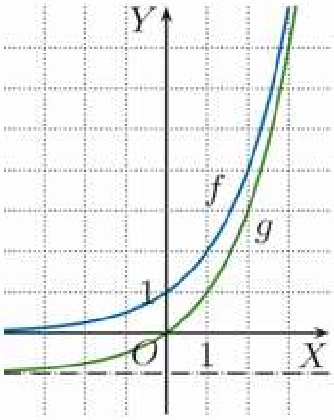
a) $f(x) = 2^{x-2} - 4$
b) $f(x) = 3^{x+1} - 1$
c) $f(x) = \frac{4}{2^x} + 2$
d) $f(x) = 3 - \frac{9}{3^x}$
e) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{2x-4} - 1$
f) $f(x) = 1 - 2^{-x+3}$

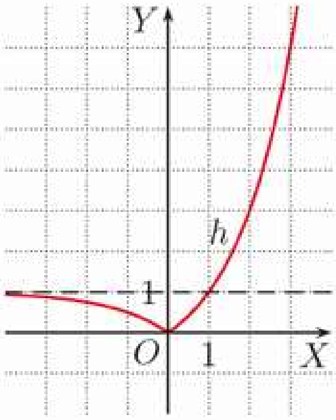
*6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (2)

Przykład 1

Na rysunkach obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x - 1$ i $h(x) = |2^x - 1|$.

Zbiorem wartości funkcji h jest przedział $\langle 0; \infty)$, a asymptotą poziomą jej wykresu jest prosta $y = 1$.





Ćwiczenie 1

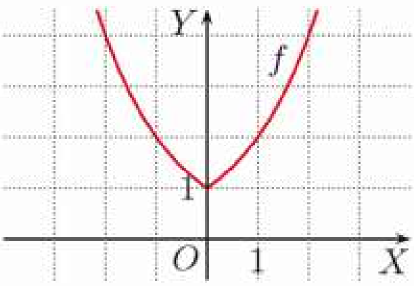
Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = |3^x - 2|$ b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 4\right|$ c) $f(x) = \left|-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1\right|$

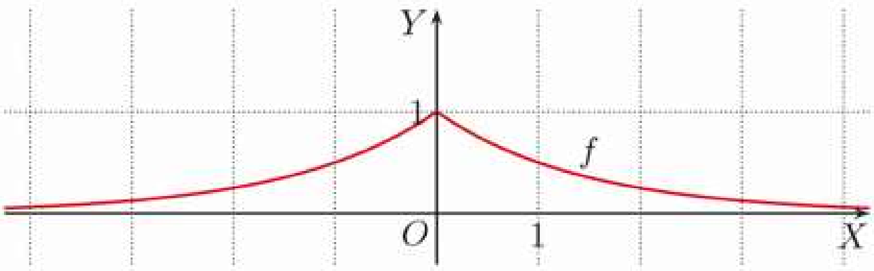
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji f oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 2^{|x|}$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$



$f(D) = \langle 1; \infty)$



$f(D) = (0; 1\rangle$

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -3^{|x|}$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|} - 1$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 3$

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykresy funkcji f, g i h. Podaj zbiory wartości tych funkcji oraz ich przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = 3^{|x|}$, $g(x) = 3^{|x|} - 2$, $h(x) = 3^{|x-2|}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + 1$, $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|}$

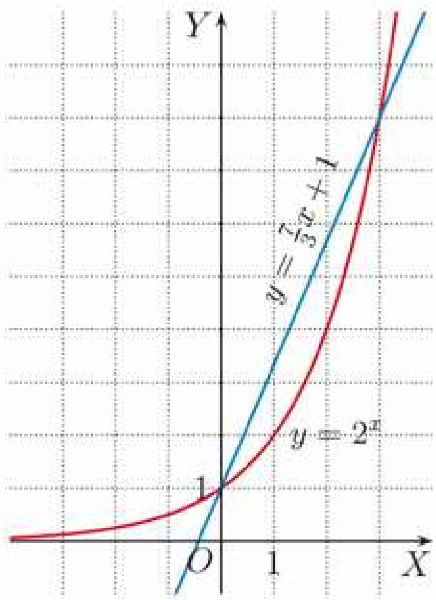
Zadania

1. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = |2^x - 4|$ c) $f(x) = |1 - 2^{x-2}|$ e) $f(x) = \frac{1}{3^{|x|}} + 2$

b) $f(x) = |3^{-x} - 1|$ d) $f(x) = 2^{|x|} - 1$ f) $f(x) = -2^{|x-1|}$

2. Podaj rozwiązania równania $2^x = \frac{7}{3}x + 1$ oraz równania $2^{|x|} = \frac{7}{3}x + 1$. Skorzystaj z rysunku obok.



3. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{|x|} = 2x$ d) $|2^x - 1| = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

b) $3^x = 2|x| + 1$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = |x| + 1$

c) $2^x = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ f) $2^{x-1} = -x^2 + 4x - 2$

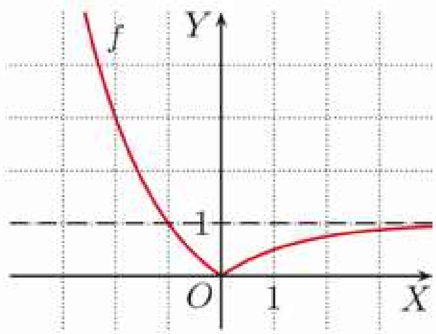
4. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \frac{2}{2^x} + 2$ c) $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = 2^{-|x|}$

b) $f(x) = -4^x$, $g(x) = 2^{x-1} - 5$ d) $f(x) = 3^{|x|} - 3$, $g(x) = 2^{-x} - 4$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^x - 1\right|$$



a) Podaj liczbę rozwiązań równania:

$$f(x) = m$$

w zależności od parametru m.

* b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{|f(x)-1|}{f(x)-1}$.

6. Dana jest funkcja $f(x) = 2^x - 4$. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ * b) $g(x) = \frac{|f(|x|)|}{f(|x|)}$

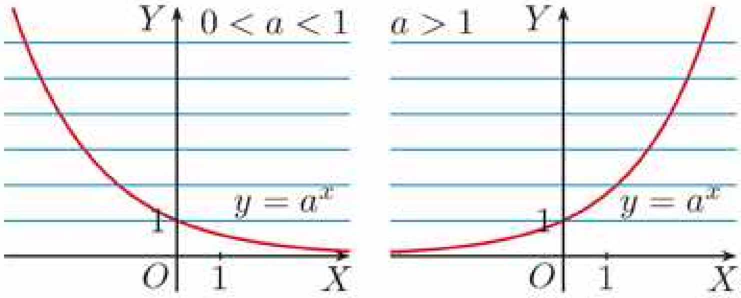
D **7.** Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ wykresy funkcji $f(x) = a \cdot 2^x - a$ oraz $g(x) = -a \cdot 2^x + a$ mają dokładnie jeden punkt wspólny.

8. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych. Podaj wszystkie punkty należące do zbioru A, których obie współrzędne są całkowite.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3^{|x|} \leqslant y < 3\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < y \leqslant 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\right\}$

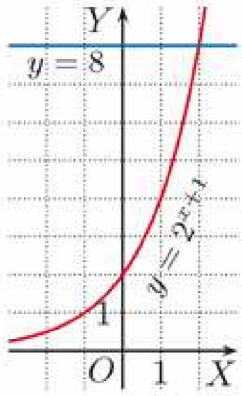
*6.5. Własności funkcji wykładniczej



Zauważmy, że wykres funkcji wykładniczej ma tę własność, że dowolna prosta równoległa do osi OX przecina go co najwyżej raz. Oznacza to, że funkcja wykładnicza nie może przyjmować tej samej wartości dla dwóch różnych argumentów. Można to zapisać następująco: dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz dla dowolnych $p, q \in \mathbf{R}$:

$$a^p = a^q \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p = q$$

O funkcji wykładniczej mówimy, że jest **różnowartościowa**.



Przykład 1

Rozwiąż równanie $2^{x+1} = 8$.

$$2^{x+1} = 2^3$$
Liczbę 8 zapisujemy jako potęgę o podstawie 2.

$$x + 1 = 3$$
$$x = 2$$
Korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $2^{x-3} = 16$
b) $2^{x+5} = \frac{1}{2}$
c) $2^{3x-1} = 1024$
d) $5^{2x+5} = 125$
e) $7^{4x^2+1} = 49$
f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x^2} = \frac{9}{4}$
g) $2^{x^3-x} = 1$
h) $2^{x^3+x} = 4$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $3^{5x-2} = 9^{x+2}$.

$$3^{5x-2} = (3^2)^{x+2}$$
$$3^{5x-2} = 3^{2x+4}$$
Prawą stronę równania zapisujemy jako potęgę o podstawie 3.

$$5x - 2 = 2x + 4$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$
Korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.

Ćwiczenie 2

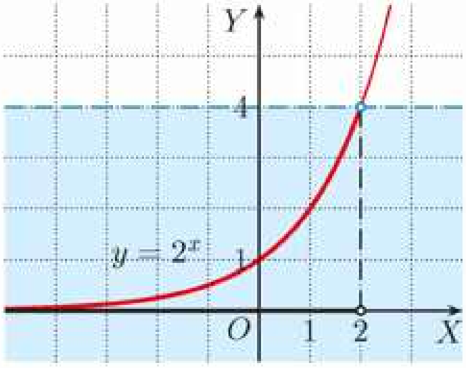
Rozwiąż równanie.

a) $5^{3-x} = 25^{2x+3}$
b) $2^{x+1} = \sqrt{2}^{\,1-x}$
c) $9^{2x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$
d) $0{,}125^{x+1} = 0{,}25^{2-x}$
e) $7^{x^2+x} = 49^{2x+2}$
f) $121^{0{,}5-x} = 11^{x-x^2}$

Rozwiązując nierówności wykładnicze, korzystamy z tego, że funkcja $y = a^x$ jest rosnąca dla $a \in (1; \infty)$, a dla $a \in (0; 1)$ – malejąca.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $2^x < 4$.



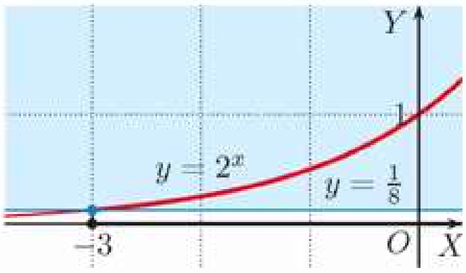
$$2^x < 2^2$$

Funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, więc ostatnia nierówność jest równoważna nierówności:

$$x < 2$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $2^x \geqslant 0{,}125$.



$2^x \geqslant \frac{1}{8}$

$2^x \geqslant 2^{-3}$ Funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, co oznacza, że $2^p \geqslant 2^q$, gdy $p \geqslant q$.

$x \geqslant -3$

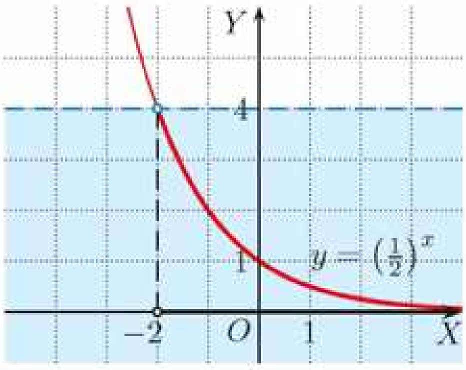
Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $3^x \leqslant \frac{1}{243}$
b) $2^x < \sqrt{8}$
c) $7^x \geqslant 49\sqrt{7}$
d) $3^{x+1} < 81$
e) $4^{2x+3} \geqslant 64$
f) $2^{x^2} \leqslant 16$
g) $3^{x^2+4x} < \frac{1}{27}$
h) $3^{1-x^2} \geqslant 3\sqrt{3}$
i) $0{,}5^x \cdot 2^{x^2+3x} > \frac{1}{2}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

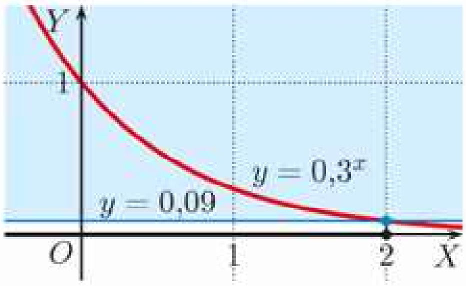


$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ Funkcja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest malejąca, co oznacza, że $\left(\frac{1}{2}\right)^p < \left(\frac{1}{2}\right)^q$, gdy $p > q$.

$x > -2$

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $0{,}3^x \geqslant 0{,}09$.



$0{,}3^x \geqslant 0{,}3^2$ Funkcja $y = 0{,}3^x$ jest malejąca, co oznacza, że $0{,}3^p \geqslant 0{,}3^q$, gdy $p \leqslant q$.

$x \leqslant 2$

W przykładach 5. i 6. zwrot nierówności zmienił się na przeciwny, ponieważ podstawa potęgi $a \in (0; 1)$ i funkcja $y = a^x$ jest wówczas funkcją malejącą.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \frac{8}{27}$
b) $0{,}75^x > \frac{16}{9}$
c) $0{,}25^{2x+1} \geqslant \frac{1}{64}$
d) $0{,}2^{x^2} > 0{,}0016$
e) $(\sqrt{2}-1)^{x^2+x} < 1$
f) $\left(\frac{3{,}14}{\pi}\right)^{x^2} \leqslant 1$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 0{,}25^x \leqslant 64$
b) $16^x \cdot 0{,}25^{2x} \geqslant \frac{3}{4}$
c) $3^{-x} \cdot 6^x \cdot \frac{1}{2^x} < 1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2\sqrt{2}$
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}$
c) $\frac{3^{x-3}}{27} = 9^{2x+2}$
d) $\left(\frac{27}{64}\right)^{x+1} = 0{,}75^{3x+3}$
e) $2 \cdot (\sqrt{2})^x = \frac{1}{4^x}$
f) $0{,}4^x = 2{,}5^{x-6}$
g) $\sqrt{0{,}2} \cdot 5^x = 125^x$
h) $27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 81^x$
i) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+1} = \frac{125}{27}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2^{|x|} = 32$
b) $3^{1-|x|} = \frac{1}{81}$
c) $2^{|x|-7} = 4^{1-|x|}$
d) $2^{|x|} + 2^{|x|+3} = 72$
e) $|2^x - 5| = 3$
f) $|2 - 3^x| = 7$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{5^x}{25} < 625$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \leqslant \frac{16}{81}$
c) $4^{2x-1} \geqslant 64\sqrt{2}$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{27} < \frac{9}{3^x} < 27$
b) $1 < 2^{x^2} \leqslant 2^x$
c) $0{,}125 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \leqslant 1$

5. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{3^{\sqrt{2}-1} \cdot 3^{\sqrt{2}+1}}{3^{\sqrt{8}}} \leqslant \left(\frac{1}{6}\right)^{x^2-x} \leqslant 6^{\pi} \cdot 3^{1-\pi} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi-1}$$

6. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: A, B, $A \cap B$ oraz $B \setminus A$, jeżeli:
$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2^{|x|} \leqslant 16 \text{ i } 3^{|y-1|} \leqslant 9\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2^{|x|+|y|} \leqslant 8\}$.

7. Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leqslant 2^y \leqslant 16 \text{ i } y \geqslant x^2\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leqslant 2^{|x|} \leqslant 4 \text{ i } 2^{|y|} \leqslant 8\}$

6.6. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x, \text{ gdy } \; a^x = b$$

Przykład 1

$\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$,

$\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$,

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

liczba logarytmowana

$$\log_a b = x$$

podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log_2 32$	c) $\log_2 1$	e) $\log_2 \frac{1}{64}$	g) $\log_2 \sqrt{8}$
b) $\log_2 2$	d) $\log_2 \frac{1}{4}$	f) $\log_2 \sqrt{2}$	h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_3 81$	d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	g) $\log_7 7\sqrt{7}$	j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$
b) $\log_3 \frac{1}{9}$	e) $\log_9 3$	h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$	k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$
c) $\log_3 \frac{1}{27}$	f) $\log_9 \frac{1}{27}$	i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$	l) $\log_6 216$

Zwróć uwagę na to, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

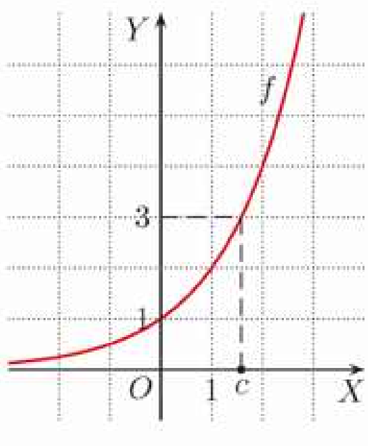
Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.



Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c, że $2^c = 3$.
Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1{,}5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n, takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$.

Zatem $3 = 2^{\frac{m}{n}}$

$$3^n = 2^m$$ Podnosimy obie strony równości do potęgi n.

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D **Ćwiczenie 3**

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

a) $\log_2 5$ b) $\log_3 5$ c) $\log_2 6$ d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\log_2 2^{100}$ c) $\log_{1,1} 1{,}1^{10}$ e) $2^{\log_2 3}$ g) $0{,}4^{\log_{0,4} 10}$

b) $\log_6 6^{15}$ d) $\log_\pi \pi^{-3}$ f) $3^{\log_3 7}$ h) $5^{\log_5 1}$

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Poniżej zamieszczono fragment tablicy,w której znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b+0{,}00$	$b+0{,}01$	$b+0{,}02$	$b+0{,}03$	$b+0{,}04$	$b+0{,}05$	$b+0{,}06$	$b+0{,}07$	$b+0{,}08$	$b+0{,}09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279

Ćwiczenie 5

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

a) $\log 1{,}5$, b) $\log 1{,}11$, c) $\log 1{,}62$, d) $\log 1{,}68$.

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 64$ e) $\log_2 0{,}125$ i) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$ m) $\log_3 \sqrt{27}$

b) $\log_2 512$ f) $\log_4 2$ j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ n) $\log_3 \frac{1}{81}$

c) $\log_2 \frac{1}{32}$ g) $\log_4 8$ k) $\log_{\sqrt{2}} 32$ o) $\log_5 625$

d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ h) $\log_4 \frac{1}{1024}$ l) $\log_3 \sqrt{3}$ p) $\log_5 0{,}04$

2. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ e) $\log_{0,2} 125$ g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

b) $\log_{0,1} 10^6$ d) $\log_{0,25} 16$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$

3. Oblicz.

a) $2^{\log_2 9}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ e) $4^{\log_2 9}$ g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ f) $81^{\log_3 0,5}$ h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$

4. Oblicz.

a) $\log 1000$ c) $\log 10^6$ e) $\log \sqrt{10}$

b) $\log 0{,}1$ d) $\log 0{,}0001$ f) $\log 10\sqrt{10}$

5. Oblicz.

a) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log \sqrt[3]{10}$ e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$

b) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$ d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ f) $\log_{\frac{2}{3}} 1{,}5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$

6. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_a 0{,}25 = -1$ d) $\log_a 64 = -3$

7. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log b = 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log b = -1$

8. Oblicz.

a) $\log_2(\log 100)$ c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$ e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$

b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$

9. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_a a^3$ b) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$ c) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$ d) $\log_{a^2} a^{10}$ e) $\log_{\sqrt{a}} a^4$

6.7. Własności logarytmów

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

$$x \cdot y = a^{p+q}$$ Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a(x \cdot y) = p + q$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \tfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$.

$$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$$

b) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$.

$$\log_3 \tfrac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

d) $\log 0{,}07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_6 4 + \log_6 9$
b) $\log 8 + \log 125$
c) $\log_3 54 - \log_3 2$
d) $\log_5 15 - \log_5 75$
e) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$
f) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}6 - \log_{\frac{1}{2}} 0{,}15$
g) $\log_5 0{,}04 - \log_5 0{,}008$
h) $\log 6 - \log 2 - \log 3$
i) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbf{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$, zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 3

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0{,}3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$

$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0{,}3$

Ćwiczenie 4

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:

a) $\log x^6$, b) $\log \frac{1}{x^3}$, c) $\log \sqrt{x}$, d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

Przykład 4

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$3 + \log_2 7 =$$

Zapisujemy 3 jako $\log_2 8$.

$$= \log_2 8 + \log_2 7 =$$

$$= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56$$

Ćwiczenie 5

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $2 + \log_3 5$ b) $3 \log_2 10 - 1$ c) $2 \log_{\frac{1}{2}} 6 - 2$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$

b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$

c) $\log 0{,}12 - \log 0{,}3 + \log 25$

d) $\log_{0,2} 0{,}3 - \log_{0,2} 0{,}5 - \log_{0,2} 15$

D **2.** Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

a) $\log x^2y^2 = \log x + \log y + \log xy$

b) $\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$

c) $\log xyz = \log \frac{x}{y} + \log y^2 z$

d) $\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$

e) $2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z}\right)^{-1} - 5 \log z$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw je w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $\log x^3 + 2 \log x$

b) $\log \sqrt{x} - \frac{3}{2} \log x$

c) $\frac{1}{2} \log x^4 + 1$

d) $1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x$

e) $2 \log_3 x + \log_3 y + 1$

f) $\frac{1}{3} \log_5 8x^3 - 2 \log_5 y\sqrt{x} + \frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y - 2$

h) $\frac{1}{2} \log 4x^4 + \frac{1}{3} \log 8x^6 + \frac{1}{4} \log 16x^8 - 3$

4. Oblicz.

a) $(2 \log_8 \sqrt{2} + \log_8 32 - 1)^{\log_3 5}$

b) $(\log_2 \frac{1}{8} - \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 4{,}5)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$

c) $6^{0{,}25 \log_6 81 - 2 \log_6 0{,}5}$

d) $9^{\log_{64} 4 + 0{,}5 \log_{27} 3}$

5. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:

a) $\log_3 9x^8$, b) $\log_3 \frac{x^4}{81}$, c) $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$, d) $\log_3 \frac{27\sqrt[3]{x}}{x}$.

6. Wyraź liczbę a za pomocą p, jeśli $p = \log 2$.

a) $a = \log 200$ b) $a = \log 0{,}02$ c) $a = \log 0{,}04$ d) $a = \log 1600$

7. Wyraź liczbę a za pomocą p i q, jeśli $p = \log_3 2$ oraz $q = \log_3 5$.

a) $a = \log_3 20$

b) $a = \log_3 100$

c) $a = \log_3 \frac{2}{25}$

d) $a = \log_3 0{,}4$

e) $a = \log_3 3\frac{1}{8}$

f) $a = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{2}$

g) $a = \log_3 \sqrt{10}$

h) $a = \log_3 0{,}2\sqrt{2}$

8. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0{,}6$ oraz $\log 5 \approx 0{,}7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 80$,

b) $\log 50$,

c) $\log \frac{5}{4}$,

d) $\log 0{,}5$,

e) $\log 2{,}5$,

f) $\log 0{,}64$,

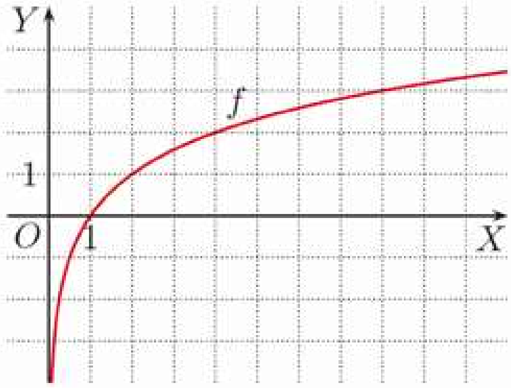
g) $\log 5\sqrt{2}$,

h) $\log 25\sqrt[3]{4}$.

6.8. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.



x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

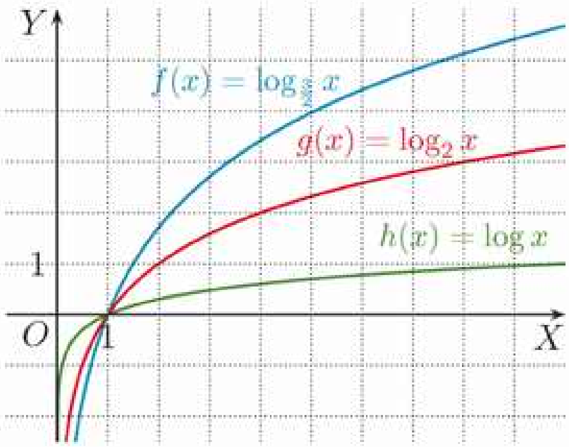
$$f(x) = \log_3 x \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log x$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

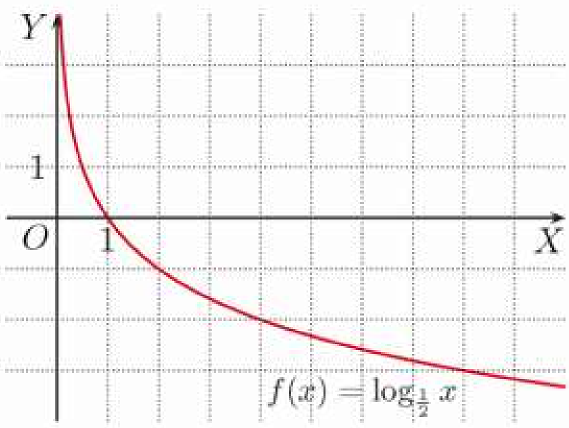
a) $(100, 2)$, b) $(2\frac{1}{4}, 2)$, c) $(1024, 10)$?



Przykład 2

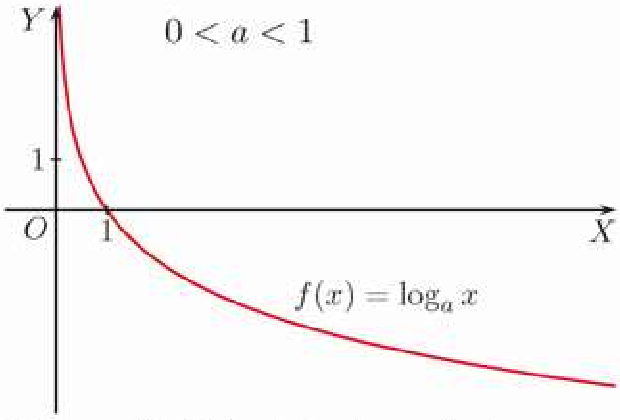
Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

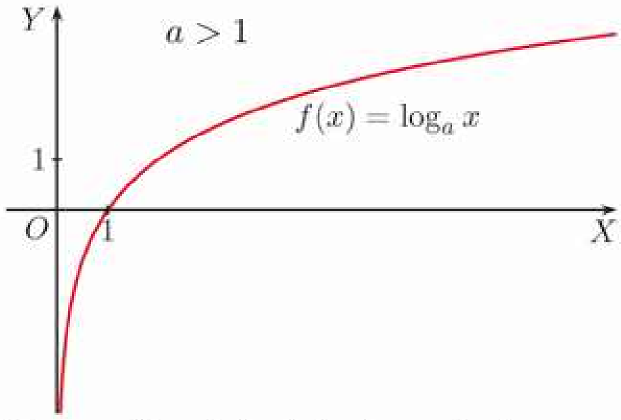
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.





Dla $a \in (0;1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.

Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX.

Ćwiczenie 4

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne, jeśli wiadomo, że: a) $a \in (1;\infty)$, b) $a \in (0;1)$?

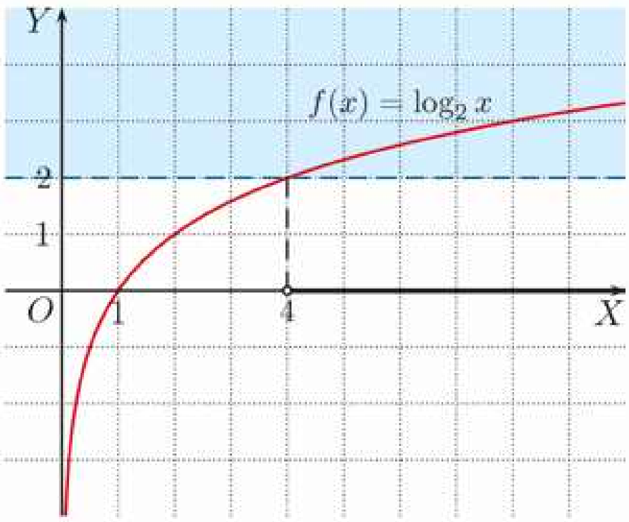
Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\log_2 x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_2 x > \log_2 4 \qquad 2 = \log_2 4$$
$$x > 4, \text{ czyli } x \in (4;\infty)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca.



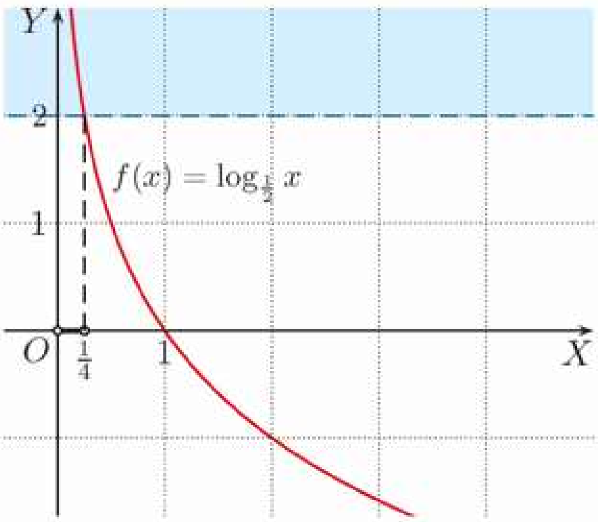
Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

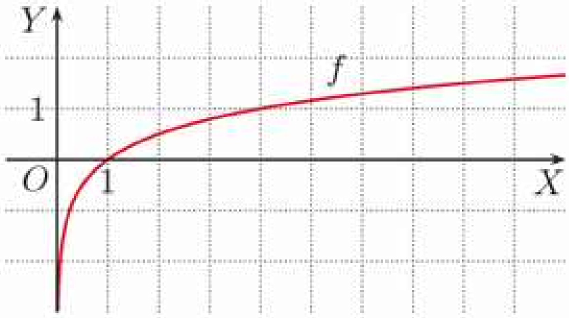
$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4} \qquad 2 = \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4}$$
$$x < \tfrac{1}{4}, \text{ czyli } x \in (0;\tfrac{1}{4})$$

Zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.



Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Podaj rozwiązanie nierówności.



a) $\log_4 x \geqslant 1$
b) $\log_4 x < 1$
c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$
d) $\log_4 x \leqslant \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 6

Naszkicuj odpowiedni wykres i podaj rozwiązanie nierówności.

a) $\log_3 x > 1$
b) $\log_3 x \leqslant 1$
c) $\log_3 x \geqslant -2$
d) $\log_3 x > 2$
e) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -1$
f) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$
g) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$
h) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 2$

Ćwiczenie 7

Rozwiąż nierówność.

a) $-2 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$
b) $-3 < \log_2 x < -1$
c) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 2$
d) $-2 \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x < 1$
e) $|\log_4 x| \leqslant 1$
f) $|\log_4 x| > \frac{1}{2}$
g) $\log^2_{\frac{1}{2}} x \leqslant 4$
h) $\log^2_2 x > 9$

Uwaga. Zamiast $(\log_a x)^2$ piszemy $\log^2_a x$.

Zadania

1. Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?

a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$

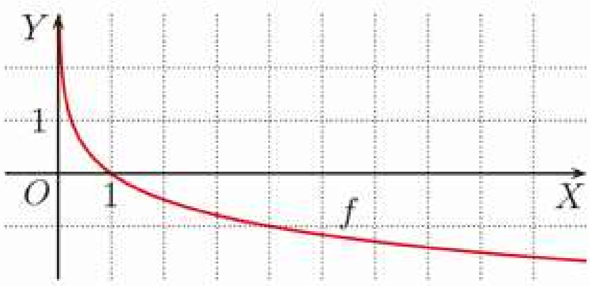
2. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f.

a) $D_f = (0; 1)$ b) $D_f = \langle 2; \infty)$ c) $D_f = \left\langle \frac{1}{2}; 8 \right\rangle$ d) $D_f = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1024 \right\rangle$

3. Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f.

a) $f(x) = \log_3 x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{3}; 1 \right\rangle$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{9}; 27 \right\rangle$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{2}; 8 \right\rangle$
d) $f(x) = \log_8 x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{2}; \sqrt{2} \right\rangle$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Podaj rozwiązanie nierówności.



a) $\log_{\frac{1}{4}} x \leqslant 1$
b) $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant 8$
c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant -1$
d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\frac{1}{2}$

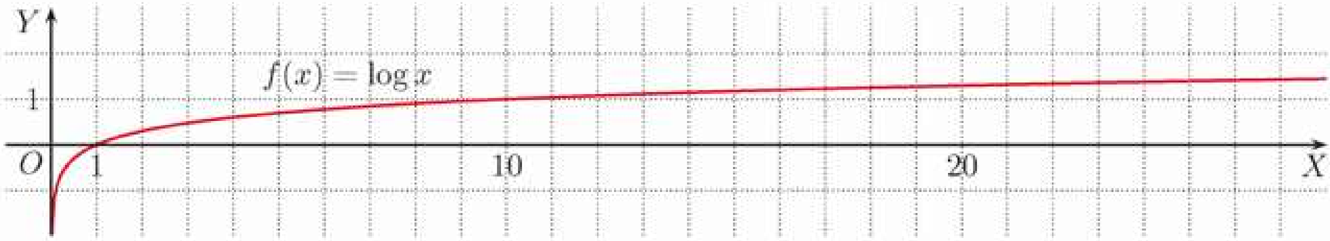
5. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{1-m} x$ c) $f(x) = \log_{m^2} x$

6. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = \log_{m-2} x$ b) $f(x) = \log_{4m^2} x$ c) $f(x) = \log_{1-m^2} x$

7. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



Dla jakich argumentów x spełniona jest podana nierówność?

a) $\log x > 2$ b) $\log x > 3$ c) $\log x > 6$ d) $\log x > 100$

8. Wstaw w miejsce $\boxed{?}$ znak $<$ lub $>$, tak by powstało zdanie prawdziwe.

a) Dla $a \in (0;1)$ i dowolnych liczb dodatnich p, q:

$$p < q \Leftrightarrow \log_a p \ \boxed{?}\ \log_a q$$

b) Dla $a \in (1;\infty)$ i dowolnych liczb dodatnich p, q:

$$p < q \Leftrightarrow \log_a p \ \boxed{?}\ \log_a q$$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

9. Rozwiąż nierówność.

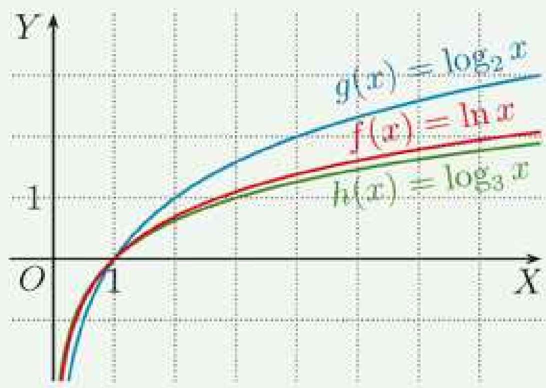
a) $1 \leqslant \log_4 x \leqslant 3$ d) $-2 \leqslant \log_5 x \leqslant 4$ g) $|\log_2 x| \leqslant 5$

b) $0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 4$ e) $-3 \leqslant \log_{0,1} x < 6$ h) $|\log_4 x| > \frac{3}{2}$

c) $0 \geqslant \log_{\frac{1}{4}} x > -\frac{1}{2}$ f) $-1 < \log_{\frac{2}{3}} x \leqslant 3$ i) $\log^2_{\frac{1}{3}} x < 16$

* D **10.** Uzasadnij, że wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji $g(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

W zastosowaniach, obok logarytmu dziesiętnego, często występuje logarytm przy podstawie e, gdzie $e = 2{,}718281828\ldots$ (patrz str. 291).
Logarytm ten nazywamy **logarytmem naturalnym**. Zamiast pisać $\log_e x$, używamy oznaczenia $\ln x$.
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \ln x$. Dla porównania w tym samym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji $g(x) = \log_2 x$ i $h(x) = \log_3 x$.



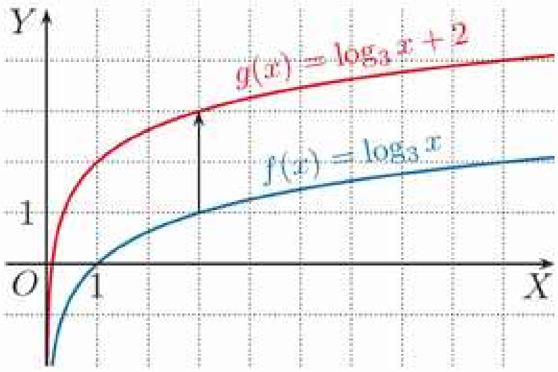
11. Oblicz: a) $\ln e$, b) $\ln 1$, c) $\ln e^4$, d) $\ln \frac{1}{e}$.

6.9. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_3 x + 2$.

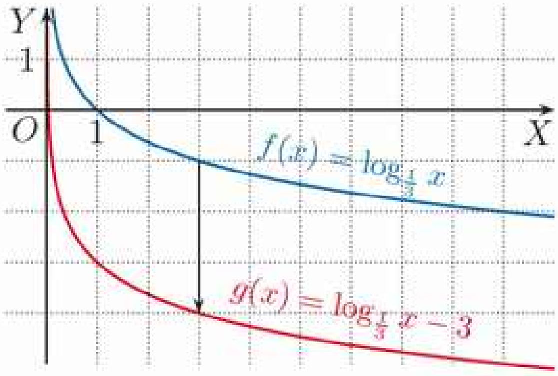
Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -3]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g i h.

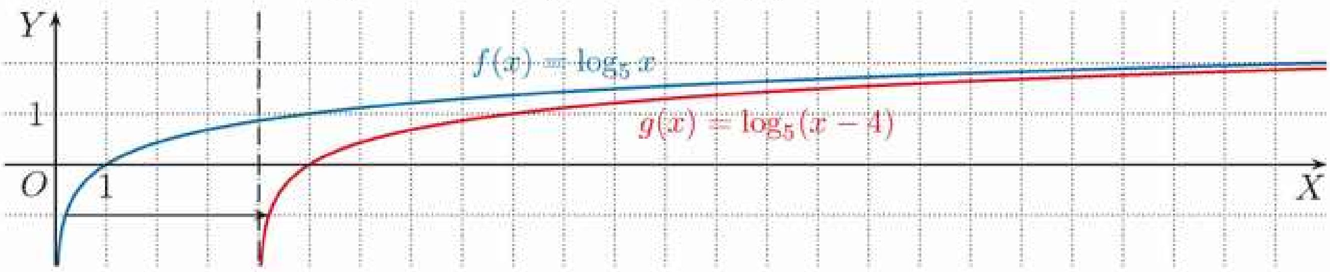
a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 x + 1$, $h(x) = \log_2 x - 3$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$

Przykład 3

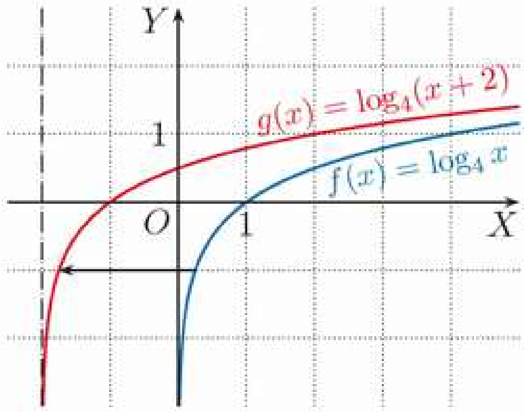
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_5(x - 4)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo, czyli o wektor $[4, 0]$.
Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 5.



Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_4(x+2)$.



Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1.

Ćwiczenie 2

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 1$.

a) $f(x) = \log_2(x-1)$ b) $f(x) = \log_2(x+2)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

Ćwiczenie 3

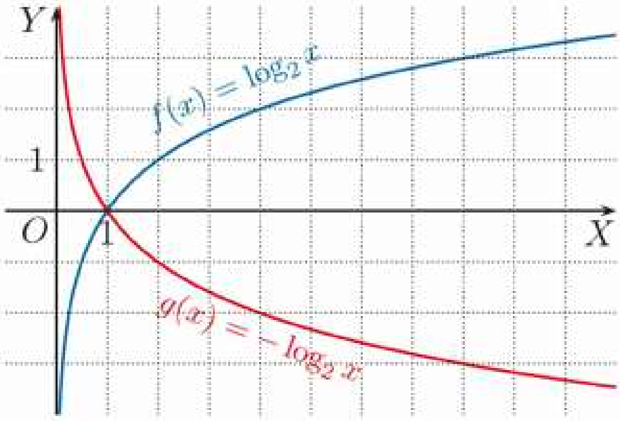
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x-2) + 1$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$
c) $f(x) = \log_3(x+2) - 1$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 2$
e) $f(x) = \log_4(x-1) - 3$
f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 2$

Przykład 5

Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ oraz:

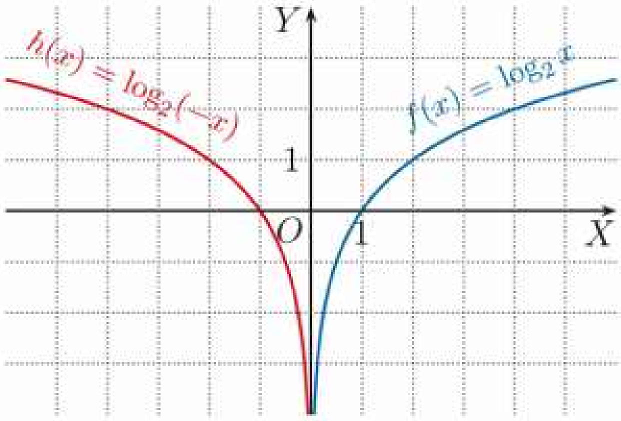
$g(x) = -\log_2 x$



$D_g = (0; \infty)$

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX. Zwróć uwagę, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

$h(x) = \log_2(-x)$



$D_h = (-\infty; 0)$

Wykres funkcji h jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OY.

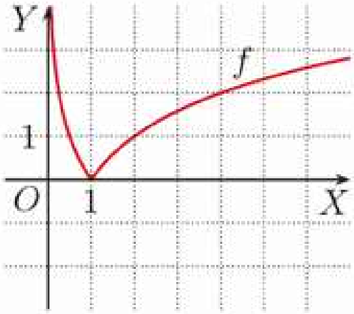
Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

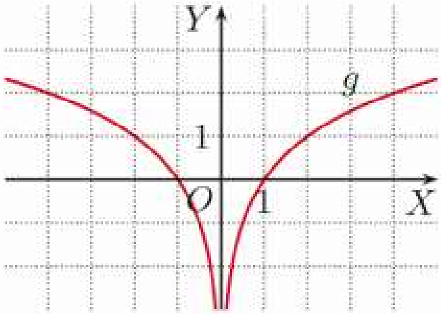
a) $f(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 2$

Przykład 6

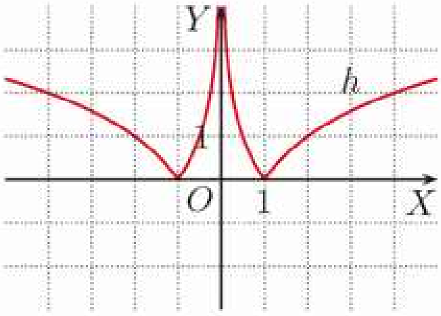
Wykresy funkcji f, g i h otrzymano przez odpowiednie przekształcenie wykresu funkcji $y = \log_2 x$, gdzie $x > 0$.



$f(x) = |\log_2 x|$
$D_f = (0; \infty)$



$g(x) = \log_2 |x|$
$D_g = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$



$h(x) = |\log_2 |x||$
$D_h = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji g. W tym celu wykonaj odpowiednie przekształcenie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Podaj dziedzinę funkcji g.

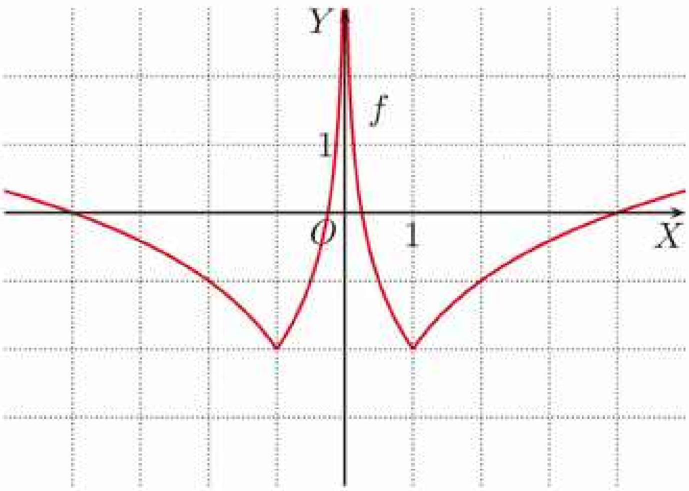
a) $g(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ c) $g(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} |x|\right|$

Przykład 7

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |\log_2 |x|| - 2$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Z wykresu możemy odczytać liczbę rozwiązań równania:

$$|\log_2 |x|| - 2 = m$$

w zależności od parametru m.



Równanie ma:

- 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$,
- 2 rozwiązania dla $m = -2$,
- 4 rozwiązania dla $m \in (-2; \infty)$.

Ćwiczenie 6

Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj wzór funkcji $y = g(m)$ opisującej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m, a następnie naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = |\log_3 x| - 1$ b) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}} |x|\right|$ c) $f(x) = \log_2(|x| + 4)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2 x - 2$ b) $f(x) = \log_3 x + 1$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$

2. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

a) $f(x) = \log_2(x+3)$ b) $f(x) = \log_3(x-1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

3. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = \log_2(x+1) - 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1$
c) $f(x) = \log_3(x-2) + 3$
d) $f(x) = \log_3(x+3) - 1$
e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 1$
f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 3$

4. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = 2 - \log_2 x$
b) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$
c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$

5. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \log_2(1-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-2-x)$ c) $f(x) = \log_3(-1-x)$

6. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = |\log_3(x-2)|$
b) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right|$
c) $f(x) = \log_2 |x-2|$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x+1|$
e) $f(x) = \log_2(|x|-1)$
f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(|x|+1)$

7. Podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m.

a) $\left|\log_{\frac{1}{3}} |x|\right| - 4 = m$ b) $-|\log_4 |x|| + 2 = m$ c) $|\log x^2| + 4 = m^2$

8. Naszkicuj wykres odpowiedniej funkcji i podaj zbiór rozwiązań nierówności.

a) $|\log_3 |x|| \geqslant 1$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(|x|+2) < -2$ c) $-\log_4(|x|-1) \geqslant 0$

9. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -\frac{2}{3}x$ b) $|\log_3 x| = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-\log_2(-x) + 1 = |x|$

10. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \leqslant \log_2(x+5)\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqslant |x+2|\}$
b) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqslant \log_2(|x|+1)\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \leqslant 5 - |x|\}$

Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności dla częstotliwości 1000 Hz),

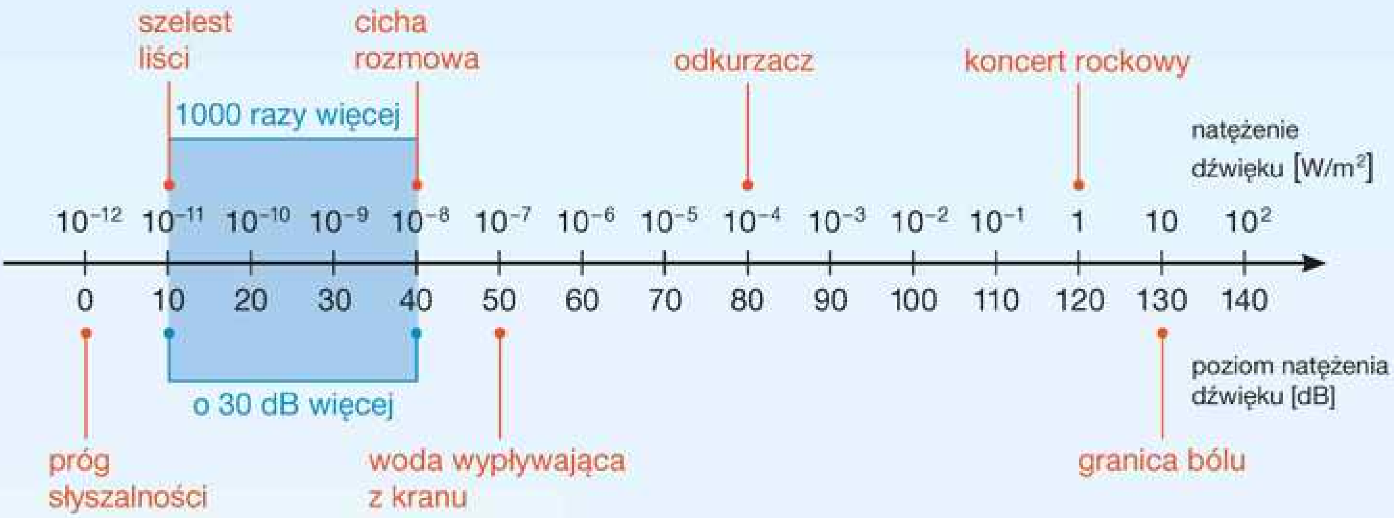
L – poziom natężenia dźwięku.

Poziom natężenia dźwięku podawany jest w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2, to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120\ [dB]$$

Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

*6.10. Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Dowód

Niech a, b i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Niech $p = \log_b x$, $q = \log_a b$, wówczas:

$$x = b^p, \quad b = a^q$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x = (a^q)^p = a^{q \cdot p}$$ Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$q \cdot p = \log_a x$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x \ / : \log_a b$$ $\log_a b \neq 0$, gdyż $b \neq 1$.

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c.

a) $\log_{0,1} 7, \ c = 10$ c) $\log_7 11, \ c = 49$ e) $\log_2 6, \ c = \frac{1}{2}$

b) $\log_8 3, \ c = 2$ d) $\log 625, \ c = 0,1$ f) $\log_{\frac{1}{3}} 12, \ c = 3$

Wzór z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu czasem wygodnie jest zapisać w postaci iloczynu:

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij podaną równość.

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$

b) $\log 0,1 \cdot \log_{0,1} 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,001 \cdot \log_{0,001} 0,0001 = -4$

D **Ćwiczenie 3**

Wykaż, że jeśli liczby a i x są dodatnie oraz $a \neq 1$, to:

a) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_a x^2$,

b) $\log_{a^2} x = \log_a \sqrt{x}$.

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij podany obok wzór.

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

D **Przykład 2**

Wykaż, że jeśli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geqslant 2$.

Podstawiamy $t = \log_a b$. Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, otrzymujemy:

$$t + \tfrac{1}{t} \geqslant 2$$

Przy podanych założeniach $t > 0$, zatem obie strony nierówności mnożymy przez t:

$$t^2 + 1 \geqslant 2t$$

$$t^2 - 2t + 1 \geqslant 0$$

$$(t-1)^2 \geqslant 0$$

Zwróć uwagę, że kolejne nierówności są równoważne.

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbf{R}$.

D **Ćwiczenie 5**

Udowodnij podaną własność.

a) Jeśli $a \in (0;1)$ i $b \in (0;1)$, to $\log_a b + \log_b a \geqslant 2$.

b) Jeśli $a \in (1;\infty)$ i $b \in (0;1)$, to $\log_a b + \log_b a \leqslant -2$.

Zadania

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

a) $\log_{16} 3$
c) $\log_{\sqrt{2}} 11$
e) $\log_4 6 + \log_8 6$
b) $\log_{0,5} 7$
d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$
f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

D **2.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$
c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0{,}125$
b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$
d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

3. Wyraź liczbę a za pomocą p, jeśli $p = \log_3 2$.

a) $a = \log_9 2$
c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$
e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$
g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$
b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$
d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$
f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$
h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Oblicz x.

a) $\log_4 x = \log_{64} 125$

b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$

c) $\log_4 x = \log_8 27$

d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D **5.** Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to:

a) $\log_4 3 = \frac{a}{2}$,

b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2a$,

c) $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{8}} = -\frac{1}{3}a$,

d) $\log_6 2 = \frac{1}{a+1}$,

e) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 2} = 2{,}5a$,

f) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 4} = 1{,}5a$.

D **6.** Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Wykaż, że jeśli:

a) $\log_{\sqrt{a}} x = t$, to $\log_{a^2} x = \frac{t}{4}$,

b) $\log_{a^3} x = t$, to $\log_{\sqrt[3]{a}} x = 9t$.

D **7.** Wykaż, że jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$, to prawdziwy jest podany wzór.

a) $\log_{a^2} x^2 = \log_a x$

b) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3$

c) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

d) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

e) $\log_{\sqrt[n]{a}} x = \log_a x^n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

f) $\log_{a^p} x = \log_a x^{\frac{1}{p}}$, gdzie $p \neq 0$

8. Wiadomo, że $\log_d a = \frac{1}{2}$. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d$

b) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} \cdot \log_b \frac{1}{c} \cdot \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{d}$

D **9.** Wykaż, że jeśli $a \in (0; 1)$ i $b \in (1; \infty)$, to:

a) $\log_a b - \log_a^2 b < 0$,

b) $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$,

c) $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leqslant -2$,

d) $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geqslant -1$.

10. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \log_2 \sqrt{x} + \log_4 x$

b) $f(x) = \log_2 x^4 - \log_{\sqrt{2}} x$

c) $f(x) = \log_4 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2$

d) $f(x) = \log_8 x^3 - \log_{\sqrt{2}} x^4$

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.
>
> $$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0{,}69897}{0{,}47712} \approx 1{,}465$$

Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

a) $\log_3 7$

b) $\log_6 3$

c) $\log_{0{,}5} 9$

6.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

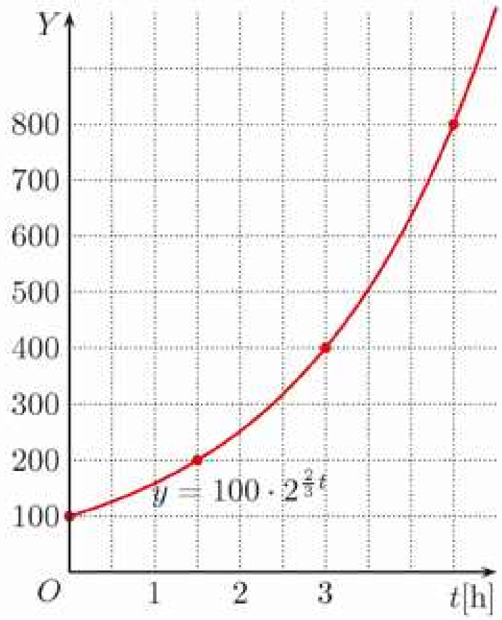
Wzrost wykładniczy

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Stwierdzono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu półtorej godziny. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Aby wyznaczyć stałą a, zauważmy, że dla $t = 1{,}5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1{,}5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}588$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

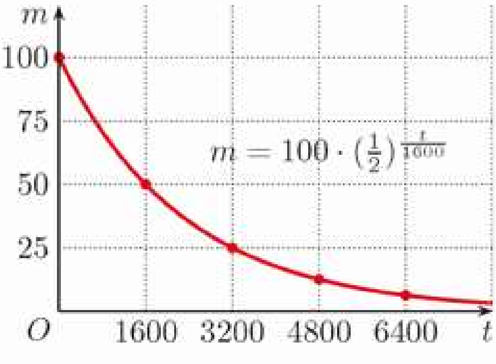
gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

Rozpad promieniotwórczy

Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T, po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Przykładowo okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to po upływie t lat masa dana jest za pomocą wzoru:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Uwaga. Czas t powinien być podany w tych samych jednostkach co okres połowicznego rozpadu T (w tym przypadku jest podany w latach).

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226 o masie:

a) 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,

b) 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1{,}5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmieniona. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 2

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0{,}66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0{,}66 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0{,}66 = \log \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0{,}66 = \tfrac{t}{5700} \log 0{,}5$$

$$t = 5700 \cdot \tfrac{\log 0{,}66}{\log 0{,}5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1{,}875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Zadania

1. a) Oblicz okres połowicznego rozpadu jodu-131, jeśli wiadomo, że z próbki o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g.

b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.

2. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu, jeśli wiadomo, że po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%.

3. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.

4. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym stosunek ilości izotopu ^{14}C do ilości izotopu ^{12}C jest równy $1:10^{13}$.

5. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:

a) egipskiej mumii mającej 3330 lat,

b) kości zwierzęcia mającej 17 000 lat.

Czy wiesz, że...

W niektórych modelach wzrostu liczby ludności zakłada się, że wzrost ten ma charakter wykładniczy. Przyjmijmy, że wzrost liczby ludności opisywany jest wzorem:

$$N = N_0 \cdot e^{kt}$$

(liczba e – patrz str. 291), gdzie N_0 jest początkową liczbą ludności, t – czasem mierzonym w latach, N – liczbą ludności po upływie czasu t oraz k – odpowiednio dobraną stałą.

Wyznaczmy stałą k dla USA w latach 1900–2000.

Rok 1900	Rok 2000
76 mln	275 mln

Liczba ludności USA

Z tabeli odczytujemy: $N_0 = 76$ mln, $N = 275$ mln, $t = 100$ lat. Otrzymujemy więc:

$$275 = 76 \cdot e^{100k}$$

Stąd $100k = \ln \frac{275}{76}$ (logarytm naturalny – patrz str. 308), zatem $k \approx 0{,}013$.

Aby obliczyć liczbę ludności USA w wybranym roku XX wieku, możemy skorzystać ze wzoru $N = 76 \cdot e^{0{,}013t}$, gdzie t oznacza liczbę lat, które upłynęły od 1900 roku. Obliczmy na przykład liczbę ludności w 1950 roku:

$$N_{1950} = 76 \cdot e^{0{,}013 \cdot 50} \approx 146 \text{ mln}$$

oraz w roku 1990:

$$N_{1990} = 76 \cdot e^{0{,}013 \cdot 90} \approx 245 \text{ mln}$$

6.12. Zagadnienia uzupełniające

Równania wykładnicze

1. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

a) $5^x = 6^{x+1}$

b) $11^{x-3} = 13^{3-x}$

c) $7^{x+1} = 3^{2x-2}$

d) $3^{2x} = 2^x \cdot 4^{x-1}$

e) $4 \cdot 2^{x-3} = 10^x \cdot 3^{x-1}$

f) $5^{x+2} = 16 \cdot 2^{-x}$

Rozwiąż równanie $7^x = 4^{x+2}$.

$$7^x = 4^2 \cdot 4^x$$
$$7^x = 16 \cdot 4^x$$
$$\frac{7^x}{4^x} = 16$$
$$\left(\frac{7}{4}\right)^x = 16$$
$$x = \log_{\frac{7}{4}} 16$$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład i sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą.

a) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 63$

b) $3^x + 3^{x-1} - 24 = 0$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 12$

d) $20 \cdot 4^{x-1} + \sqrt{2}^{\,4x} = 6$

e) $16^{x+1} + 4^{2x} + 2^{4x} = \frac{9}{8}$

Rozwiąż równanie $2^{x+3} + 2^x = 54$.

$$2^x \cdot 2^3 + 2^x = 54$$
$$8 \cdot 2^x + 2^x = 54$$
$$9 \cdot 2^x = 54 \ /:9$$
$$2^x = 6$$
$$x = \log_2 6$$

3. Rozwiąż równanie.

a) $4^x - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$

b) $5^{x+1} + 25^x = 6$

c) $4 \cdot 16^x = 4^{x+1} - 1$

d) $4^x + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}$

e) $\frac{1}{4^x} - \frac{3}{2^x} + 2 = 0$

f) $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 5$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$

b) $\frac{3}{2^x - 1} + \frac{2}{2 - 2^x} = 0$

c) $\frac{1 - 4^x}{1 - 2^x} = 2^x + 1$

5. Rozwiąż równanie.

a) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^{-x} = 2$

b) $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zauważ, że $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

6. Rozwiąż równanie.

a) $8^x - 4^{x+1} + 2^{x+2} = 0$

b) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$

c) $16^x - 5 \cdot 8^x + 4^{x+1} = 0$

d) $81^x - 9^x + 9^{1-x} - 9 = 0$

e) $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$

f) $2 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 = 0$

Nierówności wykładnicze

7. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż nierówność.

a) $5^{x-6} < 3$

b) $0{,}7^{x+5} \geqslant 4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-6} < 0{,}1$

> Rozwiąż nierówność $3^{x+1} \geqslant 2$.
>
> $$3^{x+1} \geqslant 2$$
> $$3^{x+1} \geqslant 3^{\log_3 2}$$
> Korzystamy z równości: $a^{\log_a b} = b$.
> $$x+1 \geqslant \log_3 2$$
> $$x \geqslant -1 + \log_3 2$$
> Zatem $x \in \langle -1+\log_3 2; \infty)$.

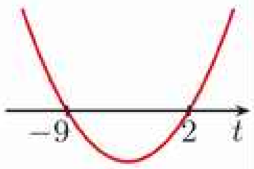
8. Rozwiąż nierówność.

a) $3^{x+1} < 2^{x+2}$ b) $3^x \leqslant 5 \cdot 5^{x+3}$ c) $7^{x-1} \geqslant 3^{2x}$ d) $0{,}2^{2x+2} < \frac{1}{10^x}$

9. Rozwiąż nierówność.

a) $4^{x-2} \geqslant 5^{x+1}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ c) $2^{x^2} \cdot 0{,}5^{2x+0{,}5} > \frac{1}{\sqrt{8}}$ d) $4^{\frac{2}{x+3}} > 1$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Rozwiąż nierówność $9^x + 7 \cdot 3^x - 18 \leqslant 0$.
>
> Podstawiamy $t = 3^x$ (zakładamy, że $t > 0$), wówczas $t^2 = 9^x$ i otrzymujemy nierówność:
> $$t^2 + 7t - 18 \leqslant 0$$
> $$\Delta = 49 + 4 \cdot 18 = 121, \ \sqrt{\Delta} = 11$$
> $$t_1 = \frac{-7-11}{2} = -9, \ \ t_2 = \frac{-7+11}{2} = 2$$
> $$t \in \langle -9; 2\rangle$$
>
> 
>
>
> Uwzględniamy założenie, że $t > 0$, i otrzymujemy $t \in (0; 2\rangle$.
> Wracamy do niewiadomej x: $3^x \in (0; 2\rangle$, czyli:
> $$0 < 3^x \leqslant 2$$
> $$x \leqslant \log_3 2$$
> Zatem $x \in (-\infty; \log_3 2\rangle$.

Rozwiąż nierówność.

a) $16^x - 4^x \leqslant 0$

b) $9^x - 3^{x-2} > 0$

c) $2^{2x} - 2^x - 2 > 0$

d) $9^x \geqslant 10 \cdot 3^x - 9$

e) $\frac{1}{16^x} - \frac{3}{4^x} - 4 < 0$

f) $4^x + 2^{x+1} \leqslant 15$

11. Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $\frac{1}{2^x-1} < \frac{1}{2^x+1}$ b) $2^x - 6 < 3 - \frac{8}{2^x}$ c) $\frac{1}{4^x} - \frac{10}{2^x} + 16 \leqslant 0$

Równania logarytmiczne

12. Przeczytaj podany w ramce przykład. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3(x^2 - 7) = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) = -1$

c) $\log_2(9x - x^2) = 3$

d) $\log_2 |x^2 - 1| = 3$

> Rozwiąż równanie $\log_3(2x - 4) = 2$.
>
> Zakładamy, że $2x - 4 > 0$, czyli $x > 2$.
>
> $$\log_3(2x - 4) = 2$$
> $$2x - 4 = 3^2$$
>
> Stąd $2x = 13$, czyli $x = 6{,}5$.

13. Rozwiąż równanie.

a) $\log_4(\log_2 x) = -\frac{1}{2}$

b) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) = 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(\log_4 |x|)) = 0$

d) $\log_4\left(\log_{\sqrt{2}}(\log_3 x^2)\right) = \frac{1}{2}$

14. Rozwiąż równanie.

a) $\log_{0,3}(\log_5(x^2 + 1)) = 0$

b) $\log_3(\log_3(\log_3 x)) = 0$

c) $\log_3(\log_3(\log_3(x^2 - 9))) = 0$

d) $\log(1 + \log(1 + \log x)) = 0$

15. Rozwiąż równanie. Podaj wykorzystane własności logarytmu.

a) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

b) $\log(2x + 1) + \log(x + 1) = 1$

c) $\log_3(4 - x) - \log_3 x = 2$

d) $\log_2 x + \log_2(x + 3) = 2$

e) $\log_3 x = 1 - \log_3(x - 2)$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(4x + 8) - \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) = -3$

16. Rozwiąż równanie.

a) $\log_4 x + \log_2 x = 9$

b) $\log x - \log_{0,1}(x + 3) = 1$

c) $\log_2 x - 2\log_4(x - 1) = 2$

d) $\log\left(\frac{1}{2}x + x^2\right) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}(x - x^2)$

17. Rozwiąż równanie.

a) $\log_x(1 - x) = 1$

b) $\log_x |x - 1| = 0$

c) $\log_{(x-1)}(3x - 5) = 2$

18. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3^2 x + 3\log_3 x = 0$

b) $\log_2^2 x - \log_2 x^4 = 0$

c) $\log x - \frac{1}{\log x} = 0$

d) $\log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} = 8$

e) $2\log_4 x = 1 + \frac{1}{\log_4 x}$

f) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 = 0$

g) $\log^2 x - \log x^2 = 8$

h) $\frac{1}{\log x - 1} + \frac{3}{\log x + 1} = 2$

i) $\frac{\log(x+1)}{\log(2x-1)} = 1$

j) $\frac{\log(4x+1)}{\log(x+1)} = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zastosuj podstawienie $t = \log_3 x$.

Nierówności logarytmiczne

19. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_4(x-2) \leqslant 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) > 0$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$

d) $\log_7(x^2+3) \leqslant \log_7 4x$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant -2$

b) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

c) $\log_6 x + \log_6(x-1) \leqslant 1$

d) $\log_{\frac{1}{6}}(x+3) + \log_{\frac{1}{6}}(x-2) < -1$

e) $2\log_4 x - \log_4(x+2) > 1$

f) $\log_4 x^2 - \log_4(6-x^2) \geqslant \frac{1}{2}$

21. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_2(\log_3 x) < 0$

b) $\log_5(\log_{0,5} x) \geqslant 0$

c) $\log_4(\log_2(x+2)) < 1$

22. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż nierówność $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 \geqslant 0$.

Zakładamy, że $x > 0$. Podstawiamy $t = \log_2 x$ i otrzymujemy:

$$t^2 - t - 2 \geqslant 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9,\ \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$t \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$$

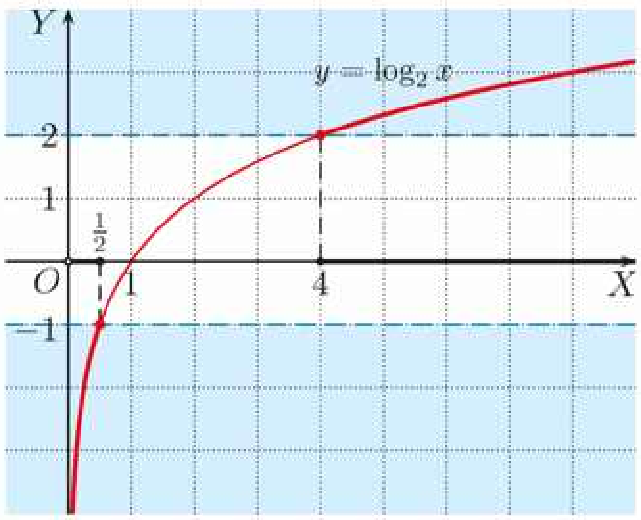
Wracamy do niewiadomej x:

$$\log_2 x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$$

$$\log_2 x \leqslant -1 \quad \text{lub} \quad \log_2 x \geqslant 2$$

$$0 < x \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x \geqslant 4$$

Zatem: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 4; \infty)$.



Rozwiąż nierówność.

a) $\log_3^2 x + \log_3 x < 2$

b) $\log_{0,5}^2 x - 5\log_{0,5} x + 4 \leqslant 0$

c) $\log_{0,1}^2 x - 5\log_{0,1} x - 6 \leqslant 0$

d) $2\log_4^2 x \geqslant 1 - \log_4 x$

e) $\log_2^3 x - 4\log_2 x \geqslant 0$

f) $\log^3 2x - \log^2 2x \geqslant 0$

23. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_x 4 < 1$

b) $\log_x 4 \geqslant 2$

*c) $\log_{x+1} 2x \geqslant 1$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz.

a) $\frac{2^{-3}\cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$ b) $\frac{10^{-2}}{5^{-6}\cdot 25^{2}}$ c) $\frac{6^{4}\cdot 9^{-4}}{4^{2}\cdot 12^{-1}}$ d) $\frac{16^{-2}\cdot 125^{-3}}{10^{-4}\cdot 25^{-2}}$

2. Oblicz.

a) $25^{\frac{3}{2}}\cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ b) $64^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{5}{3}}$ c) $8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{-\frac{3}{5}}$ d) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}09^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $5^{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{5}\cdot 5^{-\frac{4}{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\cdot 2^{\frac{7}{6}}$ c) $\sqrt[3]{100}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}}\cdot\left(\frac{2}{11}\right)^{3}$

4. Zapisz liczbę w postaci potęgi a^x, gdzie $a\in\mathbf{N}$.

a) $3^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sqrt{27}}{9}$ b) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ d) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{8}}$

5. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $5^{\sqrt{5}}$; $25\sqrt{5}$; $125^{\frac{4}{5}}$; $25^{1{,}1}$; $5^{2\sqrt{2}}$ c) $9^{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt[4]{27}$; $(\sqrt[3]{3})^{-2}$; $3^{-0{,}5\pi}$

b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; $\left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $0{,}5$; $16^{-\frac{1}{3}}$; $4^{-0{,}5\sqrt{3}}$ d) $4{,}5^{-2}$; $\sqrt{0{,}4}^{\sqrt{12}}$; $2{,}5^{-2{,}4}$; $0{,}064$

6. Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia: $\sqrt[10]{10}\approx 1{,}258925$.

a) $10^{1{,}1}$ b) $10^{-0{,}9}$ c) $10^{-1{,}9}$ d) $10^{-2{,}9}$

7. Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$, o którym wiadomo, że przechodzi przez punkt P.

a) $P(\frac{5}{2},32)$ b) $P(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ c) $P(-6,729)$

8. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe (jeśli istnieją).

a) $f(x)=2^x-4$ c) $f(x)=2+2^{-x}$ e) $f(x)=1-3^{-x}$

b) $f(x)=3^{x-1}+2$ d) $f(x)=4-2^x$ f) $f(x)=4\cdot 2^{2x}-4$

9. Oblicz.

a) $\log_3 27$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$ j) $27^{\log_3 2}$

b) $\log_{27} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$ k) $\sqrt{27}^{\log_3 2}$

c) $\log_3 \frac{1}{243}$ f) $\log_{27}\sqrt{3}$ i) $\log_{\sqrt{27}} 3$ l) $3^{1-\log_3 2}$

10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

a) $a = \log_3 9$, $b = \log_2 256$ b) $\log_2 a = 5$, $\log_4 b = \frac{1}{2}$

11. Oblicz x.

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ c) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$ d) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$

12. Oblicz x.

a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$

b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$

c) $\log x = 2\log 5 + \log 4$

d) $\log x = \log 80 - 3\log 2$

Zestaw II

1. Oblicz.

a) $49^{0,7} \cdot 7^{-1,4} \cdot 27^{\frac{4}{3}}$ b) $\sqrt[4]{32} \cdot 10^{0,75} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ c) $6^{-0,5} \cdot 2^{2,5} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$

2. Oblicz.

a) $18^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\left(3^{-0,75}\right)^{-4} : \left(9^{-1,5}\right)^{\frac{1}{3}}$

3. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\left(\frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) : \left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{3}}\right)$

b) $\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

d) $\left(x^{1,5} \cdot y^{-0,25}\right) : \left(x^{0,5} \cdot y^{-1,25}\right)$

4. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = (2^{-3})^{-2}$, $y = (2\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$

b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-0,5}$, $y = 9^{-0,75} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$

5. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej wzór i zbiór wartości, jeżeli:

a) $g(x) = -f(-x)$, b) $g(x) = f(x-1) - 1$.

6. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = \log_2(x+1)$, $g(x) = 1 + \log_{0,5} x$

b) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$, $g(x) = -1 + \log_3(x-3)$

7. Naszkicuj wykres funkcji f. Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = 3^{|x-3|} + 1$ c) $f(x) = 2 - 2^{|x|}$ e) $f(x) = |\log_2(x-1)|$

b) $f(x) = |3^{|x|} - 3|$ d) $f(x) = \log_2 |x-1|$ f) $f(x) = |\log_2 |x-1||$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \log_{0,5}(1 - x^3)$

b) $f(x) = \log_{0,1}(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \log_{0,1}|2x + 3|$

d) $f(x) = \log_3(x^2 + x + 1)$

e) $f(x) = \log_2(x^2 - 5x + 4)$

f) $f(x) = -1 + \log|x^2 - 1|$

9. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{\log x}{|\log x|}$ b) $f(x) = \frac{|\log_{0,5} x|}{\log_{0,5} x}$ c) $f(x) = \frac{|\log|x||}{\log|x|}$

10. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne?

a) $f(x) = 2^{-x} - 8$

b) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} - \frac{3}{4}$

c) $f(x) = \log(2x - 7)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$

e) $f(x) = \log(-x)$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}$

11. Dla jakich wartości parametru m równanie ma pierwiastek dodatni?

a) $6^x = 2m$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 m$ c) $x - 1 = \log_3 m$

12. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

a) $f(x) = 2^{|x+2|}$ b) $f(x) = \log_2|x - 4|$ c) $f(x) = |\log_2(x-2)-1|$

13. Rozwiąż równanie.

a) $4^x + \frac{4^x}{5} = 19\frac{1}{5}$ b) $5^{x+2} - 5^{x+1} = 50^2$ c) $3^{-x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 90$

14. Rozwiąż nierówność.

a) $6^{x+1} \leqslant 216$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqslant 0{,}125$

c) $5^{-2x} \geqslant \sqrt{5}$

d) $0{,}04^x < 0{,}008$

e) $\sqrt{3} \cdot 3^{-x} < 9$

f) $0{,}4^{3x+2} > 2{,}5$

15. Wyznacz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \log_3(x + 4) + \log_3(2 - x)$, $\langle -3; 1\rangle$

b) $f(x) = |\log_{\frac{1}{4}}(x - 6) + \log_{\frac{1}{4}}(10 - x)|$, $\langle 7; 9\rangle$

16. Znajdź liczbę x spełniającą podany warunek.

a) $\log(\log_4 x) = 0$ b) $\log_5(\log_4 x) = 1$ c) $\log_4(\log_4 x) = \frac{1}{2}$

17. Przedstaw liczbę w postaci logarytmu o podstawie 3.

a) $\log_{27} 8$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$ c) $\log_{3\sqrt{3}} 64$ d) $\log_{\frac{1}{9}} 25$

18. Oblicz.

a) $3^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\log_{4\sqrt{2}} 32}$ *c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$

***19.** Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór A.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \log_x y > 0\}$ b) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \log_y x \geqslant 1\}$

W takich zadaniach, jak przedstawione poniżej przykłady, rozwiązywanie rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny wskazanej funkcji.

Przykład 1

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 - 2x + 8)$. Dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x, dla których spełniony jest warunek:

$$-x^2 - 2x + 8 > 0$$

Rozwiązujemy tę nierówność i otrzymujemy: $x \in (-4; 2)$ – sprawdź.
Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-4; 2)$.

Zauważmy, że funkcja logarytmiczna o podstawie $a \in (0; 1)$ jest funkcją malejącą. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla największej możliwej wartości wyrażenia $-x^2 - 2x + 8$ dla $x \in (-4; 2)$.

Wyznaczamy największą wartość trójmianu kwadratowego:

$$y = -x^2 - 2x + 8$$
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \in (-4; 2)$$
$$y_w = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 9$$

Zatem najmniejsza wartość funkcji f jest równa: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Odpowiedź: Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -2 dla $x = -1$.

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_{2x-3} \frac{1}{5}(1 - x)(x - 7)$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x, dla których spełnione są warunki:

$$2x - 3 > 0 \ \text{ i } \ 2x - 3 \neq 1 \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{1}{5}(1 - x)(x - 7) > 0 \qquad \text{(II)}$$

Warunek (I) spełniony jest dla $x \in (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; \infty)$.

Warunek (II) spełniony jest dla $x \in (1; 7)$ – sprawdź.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; 7)$.

Liczba x jest miejscem zerowym funkcji f, gdy $\frac{1}{5}(1 - x)(x - 7) = 1$.

$$\frac{1}{5}(1 - x)(x - 7) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 7 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby 2 i 6, ale $2 \notin D_f$.

Zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 6.

Odpowiedź: 6

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Iloczyn liczb $x = \left(\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{5}\right)^{-1}$ i $y = \sqrt[6]{5} \cdot 625^{\frac{1}{4}}$ jest równy:

A. $\frac{1}{5}$, **B.** 1, **C.** $\sqrt{5}$, **D.** 5.

2. Wartość funkcji $f(x) = 10^{-2x}$ dla $x = -(\sqrt[6]{81})^{\frac{3}{2}}$ należy do przedziału:

A. $\langle 0; 1\rangle$,
B. $(1; 100\rangle$,
C. $(100; 1000\rangle$,
D. $(10\,000; \infty)$.

3. Jeśli $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{3}$ oraz $f(x) = 3^{-x}$, to:

A. $f(x_1) < f(x_2)$,
B. $f\left(x_1^{-1}\right) > f\left(x_2^{-1}\right)$,
C. $f(-x_1) < f(-x_2)$,
D. $f\left(-x_1^{-1}\right) < f\left(-x_2^{-1}\right)$.

4. Jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 5$, to $\log_3 31{,}25$ jest równy:

A. $3a - 2b$, **B.** $2a - 3b$, **C.** $3b - 2a$, **D.** $2b - 3a$.

5. Dla jakiego n prawdziwa jest nierówność $\log_n(\sqrt{3}+1) - \log_n(\sqrt{3}-1) > 1$?

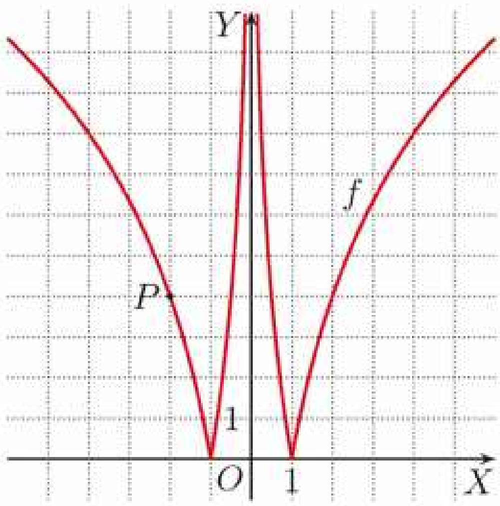
A. $n = 6$ **B.** $n = 5$ **C.** $n = 4$ **D.** $n = 3$

6. Przedział $(1; \infty)$ jest dziedziną funkcji:

A. $f(x) = \log(x^2 - 1) - \log(1 - x)$,
B. $f(x) = \log(x^2 - 1) - \log(1 + x)$,
C. $f(x) = \log(1 - x^2) - \log(1 - x)$,
D. $f(x) = \log(1 - x^2) - \log(1 + x)$.

7. Do wykresu funkcji $f(x) = |\log_a x^2|$ należy punkt $P(-2, 4)$ (rysunek obok). Do wykresu funkcji f należy również punkt:

A. $\left(\frac{1}{16}, 16\right)$, **C.** $\left(\frac{1}{8}, 16\right)$,
B. $\left(\frac{1}{16}, 8\right)$, **D.** $\left(\frac{1}{8}, 8\right)$.



8. Jeśli m_1 i m_2 są różnymi wartościami parametru m, dla których równanie $-2^{|x|} + 4 = m^2$ ma jedno rozwiązanie, to suma $m_1^2 + m_2^2$ jest równa:

A. 10, **B.** 8, **C.** 6, **D.** 4.

9. Liczba $\dfrac{1}{\log_4 3} + \dfrac{2}{\log_{2\sqrt{2}} 9}$ jest równa:

A. $2{,}5 \cdot \log_3 2$, **B.** $3{,}5 \cdot \log_3 2$, **C.** $4{,}5 \cdot \log_3 2$, **D.** $6{,}5 \cdot \log_3 2$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Ile naturalnych dzielników ma liczba n spełniająca równanie $8 = (\sqrt[4]{2})^n$?

Zadanie 3 (2 pkt)
Punkt $P(8, \frac{3}{2})$ należy do wykresu funkcji $y = \log_a x$. Wyznacz a.

D **Zadanie 4 (2 pkt)**
Udowodnij równość $4\log_9 3 + 9\log_3 9 = 5\log_3 81$.

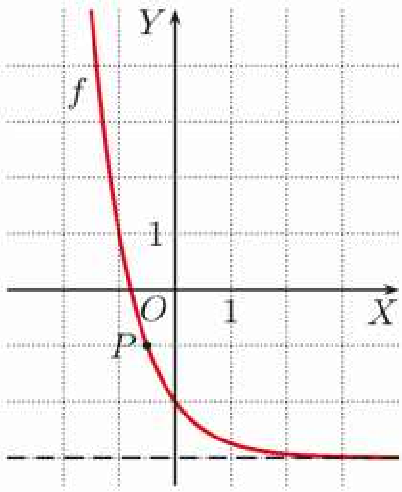
D **Zadanie 5 (2 pkt)**
Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Oblicz wartość tej funkcji dla $x = -5$, jeśli wiadomo, że punkt $P(-\frac{1}{2}, -1)$ należy do jej wykresu.



Zadanie 7 (4 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P, a wykres funkcji g w punkcie Q. Ile jest równa długość odcinka PQ?

Zadanie 8 (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5}$ i $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27$.

Zadanie 9 (5 pkt)
Liczba p jest rozwiązaniem równania $x\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, a liczba q – rozwiązaniem równania $4^6 x - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$. Oblicz sumę odwrotności kwadratów tych liczb.

Zadanie 10 (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

D Zadanie 1 (4 pkt)
Dla jakiej wartości parametru a zbiorem wartości funkcji:
$$f(x) = 3^{|x|} - |\log_a 3 + 1|$$
jest przedział $\langle 0; \infty)$? Uzasadnij, że $\log_9 a$ jest liczbą wymierną.

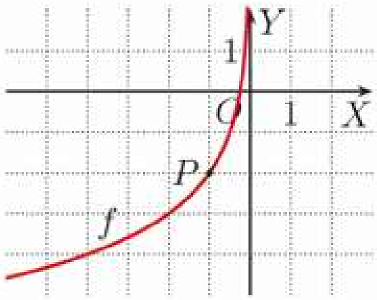
Zadanie 2 (5 pkt)
Dane są funkcje $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \frac{1}{\log_2 x}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

b) Rozwiąż równanie $f(x) = \frac{1}{4} g(x)$.

Zadanie 3 (5 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |m^x - 4|$, jeśli m jest rozwiązaniem równania:
$$(\sqrt{7})^{2m} + \left(\tfrac{1}{7}\right)^{1-m} = 56$$

Zadanie 4 (6 pkt)
Do wykresu funkcji $f(x) = \log_p(-4x)$ należy punkt P (rysunek obok). Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $g(x) = |f(x)|$. Dla jakich argumentów x zachodzi nierówność $g(x) \leqslant 2$?



Zadanie 5 (5 pkt)
Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (p, q), gdzie $p = \log_{\frac{1}{4}} 256$ oraz $q = \log_{2\sqrt{2}} 64$.

D a) Uzasadnij, że liczba naturalna $n = f(-6) - f(-2)$ jest liczbą doskonałą (czyli jest sumą wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej).

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-|x|)$.

D Zadanie 6 (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$. Wykaż, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ jeśli $x_1 + x_2 = 0$, to $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Zadanie 7 (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{|x+2|}$. Na podstawie wykresu podaj wartości parametru m, dla których równanie $2^{|x+2|} = m$ ma dwa rozwiązania ujemne.

Zadanie 8 (4 pkt)
Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_{9-x^2}(x^2 + 4x - 5)$.

D Zadanie 9 (3 pkt)
Uzasadnij, że wyrażenie $\log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a}$ przyjmuje stałą wartość dla:
$$a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Ć **1.** **a)** $x = -6$, $x = 3$
b) $x = -2$, $x = 0{,}5$
c) $x = 2$, $x = 0{,}2$ **d)** $x = 1{,}5$
e) $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
f) $x = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$, $x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$
g) sprzeczne
h) $x = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$, $x = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$
i) $x = \sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$

2. **a)** $x = 0$, $x = 3$ **b)** $x = 0$, $x = \frac{5}{9}$
c) $x = 0$, $x = -\frac{3}{4}$ **d)** $x = 0$, $x = -\frac{1}{9}$
e) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ **f)** $x = 0$, $x = -1\frac{1}{2}$

3. **a)** $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{5}{2}$ **b)** $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -7$ **d)** $x = -\frac{1}{3}$
e) $x = 5$ **f)** $x = \frac{5}{2}$

4. **a)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, $y = 6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$
b) $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 2(x-\frac{1}{2})(x-2)$
c) $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$, $y = -(x-\frac{1}{3})(x-3)$
d) $x = -1$, $x = 7$, $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-7)$
e) $x = -2\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$,
$y = (x+2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
f) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$, $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$,
$y = -3\left(x-\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$
g) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $y = -9(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$
h) $x = -12$, $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}x(x+12)$
i) brak pierwiastków, brak postaci iloczynowej

Z **1.** **a)** $\Delta = -7$; 0 **b)** $\Delta = 49$; 2
c) $\Delta = 112$; 2 **d)** $\Delta = 0$; 1
e) $\Delta = \frac{1}{4}$; 2 **f)** $\Delta = 20$; 2
g) $\Delta = 9$; 2 **h)** $\Delta = 180$; 2
i) $\Delta = -\frac{3}{2}$; 0

2. **a)** $x = 7$, $x = -1$
b) $x = -4$, $x = \frac{1}{2}$
c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{4}$ **d)** $x = \frac{1}{4}$
e) sprzeczne **f)** $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$
g) $x = -\frac{3}{5}$, $x = \frac{2}{5}$ **h)** $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
i) $x = \frac{1}{3}$, $x = 2$

3. **a)** $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
b) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **c)** sprzeczne
d) $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$
e) $x = 0$, $x = 2$ **f)** $x = -\frac{1}{5}$, $x = 5$
g) $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ **h)** $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
i) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$

4. **a)** $x = -1$, $x = 1$ **b)** $x = 2$, $x = 3$
c) $x = -3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$ **d)** sprzeczne
e) $x = \frac{5-\sqrt{105}}{4}$, $x = \frac{5+\sqrt{105}}{4}$
f) $x = -1$, $x = \frac{8}{5}$

5. **a)** $\frac{5}{6}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{3}$

6. **a)** $x = 3$, $x = -7$
b) $x = \frac{1}{3}$, $x = -4$
c) $x = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$
d) $x = -6-3\sqrt{3}$, $x = -6+3\sqrt{3}$

7. **a)** $x = 4$, $x = \frac{3}{2}$ **b)** $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$
c) $x = 1$, $x = \frac{3}{4}$ **d)** $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$

8. **a)** $y = (x+6)(x-4)$
b) $y = 2(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)$
c) $y = \frac{1}{2}(x-2+\sqrt{10})(x-2-\sqrt{10})$
d) $y = -(x-7)^2$ **e)** $y = -4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$
f) $y = -3\left(x-\frac{2+\sqrt{7}}{6}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{7}}{6}\right)$
g) $y = \frac{1}{4}(x+4)^2$ **h)** $y = \frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$
i) brak postaci iloczynowej

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

Ć **1.** **a)** $x \in \langle -2; 3 \rangle$
b) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$ **d)** $x \in (2; 4)$

2. **a)** $x \in (-5; 0)$
b) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle \frac{1}{4}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
d) $x \in \langle \frac{2}{3}; 3 \rangle$
e) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{6}}{5}\rangle \cup \langle \frac{1+\sqrt{6}}{5}; \infty)$
f) $x \in (-\infty; -3-\sqrt{15}) \cup (-3+\sqrt{15}; \infty)$

3. **a)** $x \in \mathbf{R}$ **b)** $x = \frac{2}{3}$ **c)** sprzeczna

4. **a)**, **b)** $x \in \mathbf{R}$ **c)** sprzeczna

Z **1.** **a)** $x \in \langle -1; \frac{1}{3}\rangle$
b) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$
d) $x \in \langle 2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\rangle$
e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$
f) $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{10}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{29}}{10}; \infty\right)$
g) $x \in \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}\right)$
h) $x \in (-\infty; 1-2\sqrt{2}\rangle \cup \langle 1+2\sqrt{2}; \infty)$
i) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{8}; \frac{3+\sqrt{17}}{8}\right)$

2. **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ **b)** $x \in \mathbf{R}$
c) $x \in \mathbf{R}$ **d)** $x = -\frac{3}{2}$
e) $x \in \mathbf{R}$ **f)** sprzeczna

3. **a)** $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
b), **c)** sprzeczna
d) $x \in \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$
e) $x \in \left\langle \frac{-3-\sqrt{33}}{4}; \frac{-3+\sqrt{33}}{4}\right\rangle$
f) $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$

4. **a)** $x \in (0; \frac{2}{5})$ **b)** $x \in \langle -\frac{1}{2}; 3\rangle$
c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle \frac{1}{3}; \infty)$ **d)** $x \in \mathbf{R}$
e) $x \in \mathbf{R}$ **f)** $x \in \langle -2-\sqrt{5}; -2+\sqrt{5}\rangle$

5. **a)** $A \cap B = \langle 2-\sqrt{3}; 3\rangle$, $A \setminus B = (3; 2+\sqrt{3}\rangle$
b) $A \cap B = (1; 4)$,
$A \setminus B = \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1\right\rangle \cup$
$\cup \langle 4; \infty)$
c) $A \cap B = \langle -3; 2-\sqrt{7})$,
$A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (2+\sqrt{7}; \infty)$

6. **a)** $x \in \langle 3; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$
c) $x \in \langle -4; -2\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$
d) $x \in \langle \frac{2}{3}; 4\rangle$

1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Ć **1.** **a)** $x = -\sqrt{3}$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne **c)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
d) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ **e)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -1$, $x = 1$

2. **a)** 3 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4 **e)** 0 **f)** 2

3. **a)** $x = 4$ **b)** sprzeczne **c)** $x = \frac{1}{4}$

4. **a)** $x = 3$, $x = 7$ **b)** $x = 1$, $x = 10$
c) $x = 15$

Z **1.** **a)** $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$
b), **d)**, **f)** sprzeczne
c) $x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$
e) $x = -2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = 2$
g) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$
h) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$
i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. **a)** $x = 1$, $x = 2$ **b)** $x = -1$, $x = \sqrt[3]{2}$
c) $x = -1$, $x = 2$ **d)** $x = -2$, $x = \sqrt[3]{4}$
e) $x = -2$, $x = 2$
f) $x = -\sqrt[4]{2+2\sqrt{7}}$, $x = \sqrt[4]{2+2\sqrt{7}}$

3. **a)** $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -5$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 5$
c) $x = -6$, $x = 6$

4. **a)** $x = 9$ **b)** $x = \frac{9}{4}$, $x = 6$ **c)** $x = -\frac{8}{9}$

5. **a)** $x = 0$, $x = 27$ **b)** $x = -27$, $x = 1$
c) $x = 16$

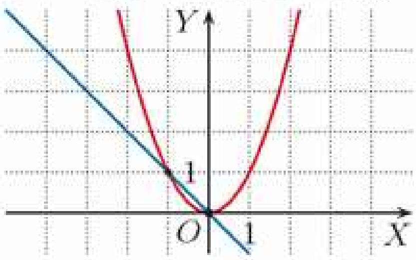
Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

1. **a)** $f(x) = (x-1)^2 - 4$
b) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
e) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$
f) $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$

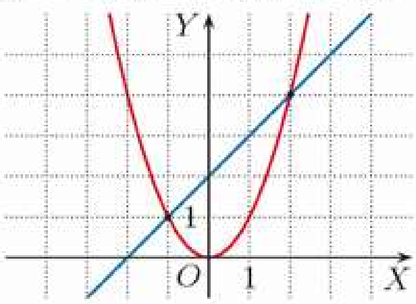
2. **a)** $[1, 2]$ **b)** $[-3, -36]$
c) $[3, 1]$ **d)** $[-\frac{1}{2}, -\frac{17}{16}]$

1.4. Układy równań (1)

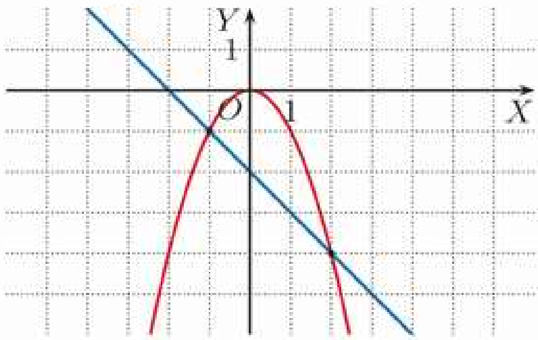
Ć **1.** **a)** $x = -1$, $y = 1$ lub $x = 0$, $y = 0$



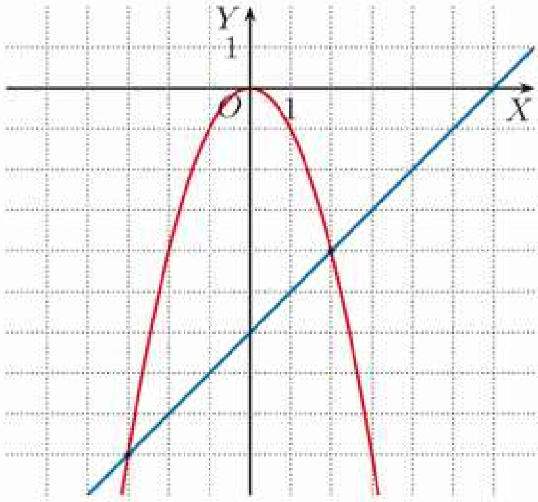
b) $x = -1$, $y = 1$ lub $x = 2$, $y = 4$



1. c) $x=-1,\ y=-1$ lub $x=2,\ y=-4$



d) $x=-3,\ y=-9$ lub $x=2,\ y=-4$



2. a) $x=-1,\ y=2$

b) $x=-1,\ y=1$

c) $x=2-2\sqrt{2},\ y=4\sqrt{2}-6$
lub $x=2+2\sqrt{2},\ y=-4\sqrt{2}-6$

Z **1. a)** 2 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 1

2. a) $x=0,\ y=4$ lub $x=3,\ y=1$

b) $x=-4,\ y=6$ lub $x=0,\ y=-2$

c) $x=-2,\ y=6$ lub $x=2,\ y=-2$

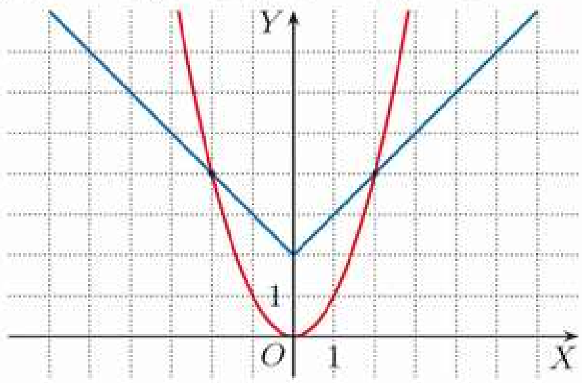
d) $x=-4,\ y=0$ lub $x=2,\ y=3$

e) $x=-1,\ y=3$

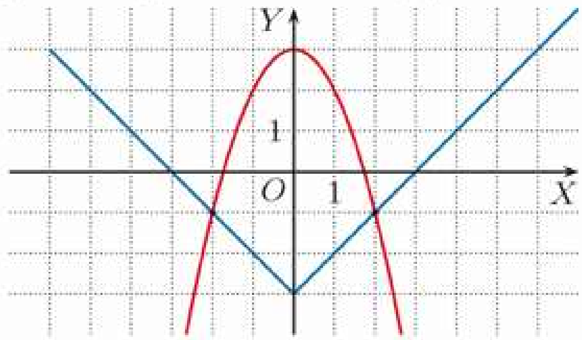
f) $x=-1-\sqrt{3},\ y=-5-4\sqrt{3}$
lub $x=-1+\sqrt{3},\ y=-5+4\sqrt{3}$

3. a) $[1,1]$ **b)** $[\frac{\sqrt{17}}{2},\frac{\sqrt{17}}{2}]$ **c)** $[4,-8]$ **d)** $[3,-3]$

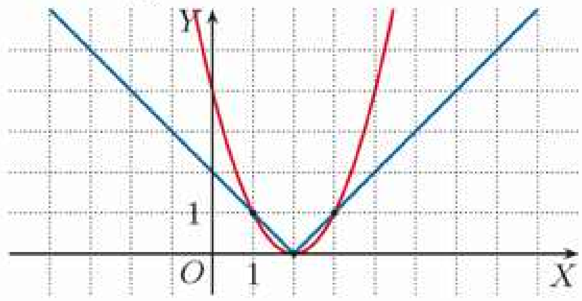
4. a) $x=-2,\ y=4$ lub $x=2,\ y=4$



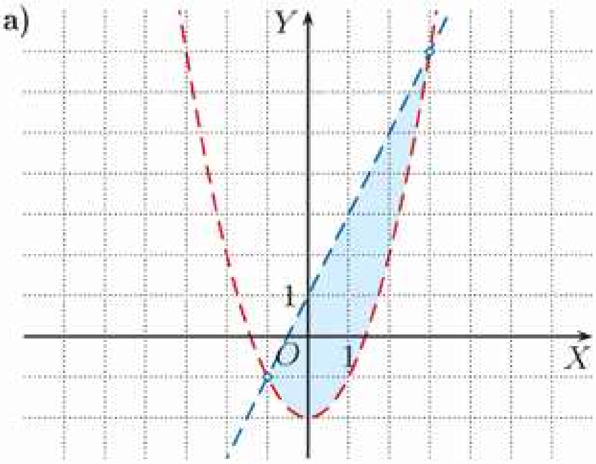
b) $x=-2,\ y=-1$ lub $x=2,\ y=-1$



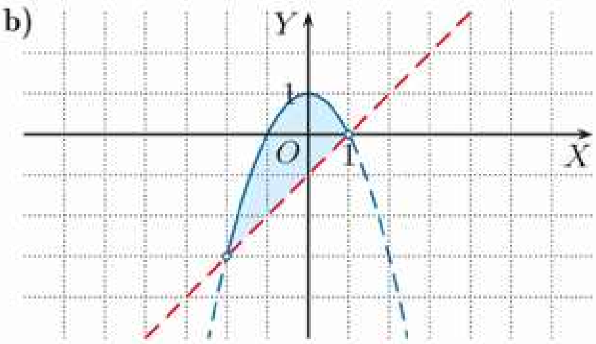
c) $x=1,\ y=1$ lub $x=2,\ y=0$
lub $x=3,\ y=1$



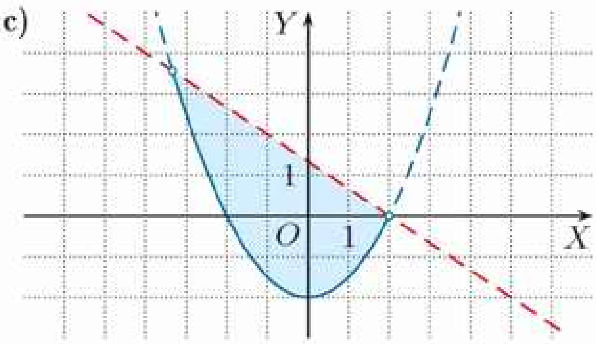
5. a)



b)



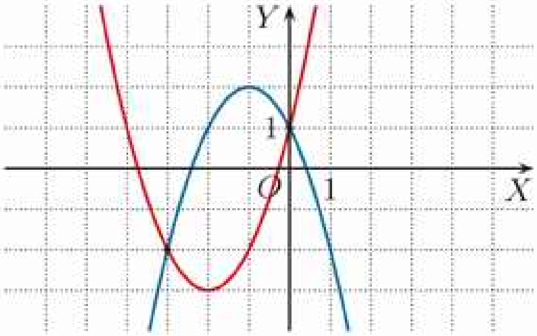
c)



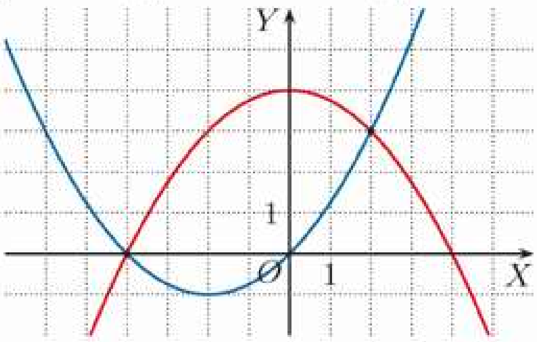
1.5. Układy równań (2)

Ć **1.** **a)** 1 **b)** 0

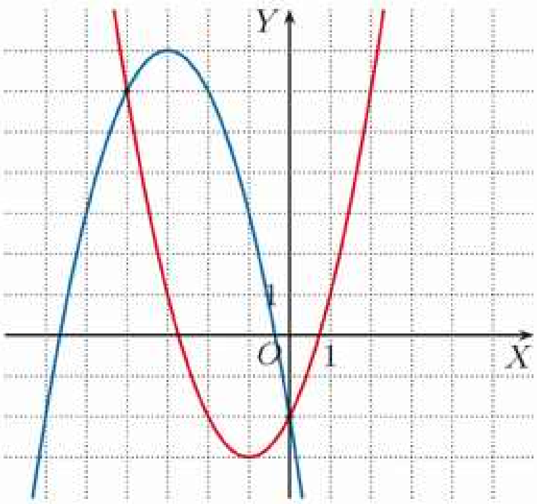
2. **a)** $x = -3$, $y = -2$ lub $x = 0$, $y = 1$



b) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 2$, $y = 3$



c) $x = -4$, $y = 6$ lub $x = 0$, $y = -2$



Z **1.** **a)** $(0,0)$ **b)** $(-2\sqrt{2},4)$, $(2\sqrt{2},4)$

c) $(-2,1)$, $(2,1)$ **d)** $(-1,0)$, $(1,0)$

2. **a)** $x = 0$, $y = -3$ lub $x = 2$, $y = 1$

b) $x = 0$, $y = 2$ lub $x = 2$, $y = 0$

c) $x = 0$, $y = 3$ lub $x = -2$, $y = 3$

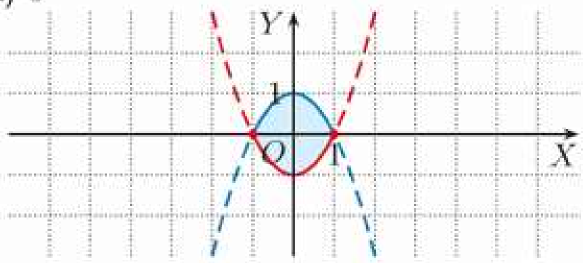
d) $x = -1$, $y = -1$ lub $x = -2$, $y = 2$

e) $x = 0$, $y = -3$ lub $x = 4$, $y = -3$

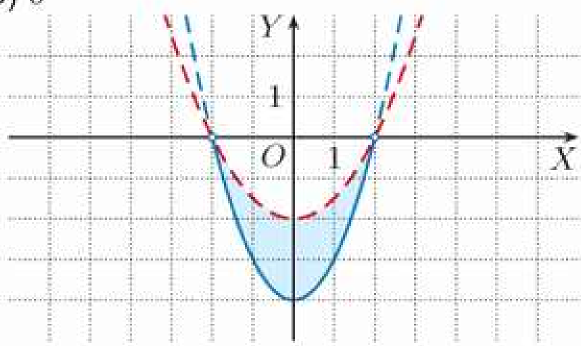
f) $x = -1 - \sqrt{7}$, $y = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$
lub $x = -1 + \sqrt{7}$, $y = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$

3. **a)** 2 **b)** 1 **c)** 0 **d)** 2

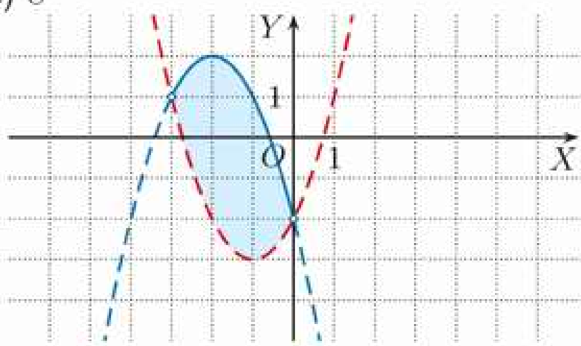
4. **a)** 5



b) 6



c) 8



Równania i nierówności z wartością bezwzględną

1. **a)** $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{5}$

b) $x = -4$, $x = 2 + 2\sqrt{3}$

2. **a)** $x = -2$, $x = 2$

b) $x = -4$, $x = 1$, $x = 2$

c) $x = 0$, $x = 4$ **d)** $x = 0$, $x = 5$

e) $x = 1$, $x = 3$ **f)** $x = 2$, $x = 6$

3. **a)** $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ **b)** $x \in (-4; 2)$

c) $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9+\sqrt{33}}{4}; \infty\right)$

1.6. Wzory Viète'a

Ć **2.** **a)** $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = -7$

b) $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{7}{2}$

c) $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$, $x_1x_2 = \frac{1}{3}$

d) brak pierwiastków

e) $x_1 + x_2 = -12$, $x_1x_2 = -\frac{3}{2}$

f) $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$

3. **a)** różne **b)**, **e)** ujemne **c)**, **f)** dodatnie

d) brak pierwiastków

4. **a)** 3 **b)** 12 **c)** brak pierwiastków

Z **1.** **a)** różne **b)** ujemne **c)** dodatnie
d) brak pierwiastków
e) dodatnie **f)** różne

3. **a)** -1 **b)** $-\frac{8}{3}$ **c)** $\frac{10}{3}$

4. **a)** 69 **b)** 12 **c)** 12

5. **a)** $\frac{13}{9}$ **b)** $\frac{57}{4}$ **c)** $\frac{65}{4}$

7. **a)** $\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{23}{49}$

8. **a)** tak **b)** nie

9. **a)** np. $x^2 - 10x + 4 = 0$
b) np. $x^2 - 12x + 8 = 0$
c) np. $x^2 - 6x + 2 = 0$

1.7. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Ć **1.** $m \in (-\infty; -1)$

2. **a)** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$;
$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-3m}}{3}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-3m}}{3}$
b) $m \in \left(-\infty; \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$;
$x_1 = \frac{-2m-1-\sqrt{4m^2+4m-19}}{2}$,
$x_2 = \frac{-2m-1+\sqrt{4m^2+4m-19}}{2}$
c) $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$;
$x_1 = \frac{-m-\sqrt{m^2+4m}}{2}$, $x_2 = \frac{-m+\sqrt{m^2+4m}}{2}$

3. **a)** 0 dla $m \in (3; 7)$,
1 dla $m \in \{3, 7\}$,
2 dla $m \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$
b) 0 dla $m \in (-4; 0)$,
1 dla $m \in \{-4, 0\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$

4. **a)** $k \in (-\infty; 2)$ **b)** $k \in (0; \infty)$

5. **a)** $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$
b) $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}; 7)$

6. **a)** $k \in \{-4, 6\}$ **b)** $k = -\frac{15}{4}$

7. **a)** $k \in \langle 11 - 4\sqrt{7}; 11 + 4\sqrt{7}\rangle$
b) $k \in (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$

Z **3.** **a)** $m \in (-\infty; \frac{9}{2}\rangle$
b) $m \in (-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)$
c) $m \in (-\infty; 4\rangle$
d) $m \in (-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty)$

4. **a)** $k \in (-\infty; -3)$ **b)** $k \in (5; \infty)$
c) $k \in (1; \infty)$ **d)** $k \in (1; \infty)$

5. **a)** $m \in (4; \infty)$ **b)** $m \in (-3; -\frac{3}{4})$
c) nie ma takiego m
d) $m \in (2; \infty)$

6. **a)** $m \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$
b) nie ma takiego m

7. **a)** $k \in \left(\frac{9}{4}; \infty\right)$ **b)** $k \in \langle -6; 6\rangle$
c) $k \in (-2; 6)$ **d)** $k \in \langle 2-2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}\rangle$
e) $k \in (-\infty; -2\rangle$ **f)** $k \in (1; \infty)$

8. **a)** $k \in \langle 0; 4\rangle$ **b)** $k \in \langle -4; 4\rangle$
c) $k \in (-\infty; 1\rangle$ **d)** $k \in \langle 8; \infty)$
e) $k \in \langle 0; 2)$ **f)** $k \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

9. **a)** $a \in (6; \infty)$ **b)** nie ma takiego a
c) $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (6; \infty)$
d) $a = -1$, $a = 1$

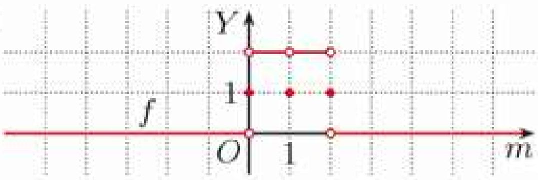
10. **a)** $a = -8$ **b)** $a \in (-\infty; 3) \cup \left(\frac{28}{9}; \infty\right)$

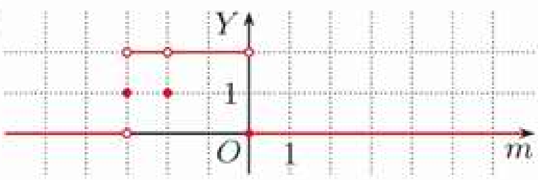
11. **a)** $a = -\frac{\sqrt{22}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{22}}{2}$ **b)** $a = 4 - \sqrt{17}$

12. $a = -3$, $a = 3$

13. $a = -\frac{1}{2}$

14. **a)** $m \in \langle 2; 3)$ **b)** $m \in (-\infty; -1) \cup \langle 3; \infty)$

15. **a)**


b)


16. $D = (-4; 0)$, $x = -1$, $x = 3$

17. $x = \frac{2-\sqrt{3}}{16}$, $x = \frac{2+\sqrt{3}}{16}$

18. **a)** $m \in (-\infty; -2)$ **b)** $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$
c) $m \in (-\infty; -6)$ **d)** $m \in (-\infty; -2\sqrt{3})$

19. **a)** 0 dla $m \in (-4; \infty)$, 2 dla $m = -4$,
4 dla $m \in (-\infty; -4)$
b) 0 dla $m \in (0; \infty)$, 1 dla $m = 0$,
2 dla $m \in (-\infty; 0)$
c) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 dla $m \in \{0\} \cup (9; \infty)$,
3 dla $m = 9$, 4 dla $m \in (0; 9)$

20. $m \in (6; \infty)$

1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Ć **1.** **a)** 361 **b)** $\frac{1}{16}$ **c)** $\frac{1}{2}$

2. 162

3. **a)** najmniejsza: $f(-2) = 4$, największa: $f(1) = 13$
b) najmniejsza: $f(4) = -49$, największa: $f(0) = -1$
c) najmniejsza: $f(-1) = -11$, największa: $f(2) = -2$
d) najmniejsza: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$, największa: $f(-2) = f(1) = 1$

4. boki – 10 cm, pole powierzchni bocznej – 800 cm^2

Z **1.** **a)** najmniejsze: $f(0) = f(4) = -1$, $g(0) = -3$, największe: $f(2) = 3$, $g(4) = 9$
b) najmniejsze: $f(-2) = -13$, $g(-1) = -\frac{7}{2}$, największe: $f(0) = -1$, $g(-2) = g(0) = -3$
c) najmniejsze: $f(-4) = -33$, $g(-1) = -\frac{7}{2}$, największe: $f(2) = 3$, $g(6) = 21$

2. **a)** 8 **b)** 32

3. 21 m $\times$ 21 m

4. 7 m $\times$ 14 m

5. 3 cm $\times$ 3 cm

6. 3 cm $\times$ 6 cm $\times$ 5 cm

7. **a)** $P(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in (0; 2)$, 1×2
b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4

8. **a)** najmniejsza: $f(4) = \frac{1}{8}$, największa: $f(2) = \frac{1}{4}$
b) najmniejsza: $f(0) = f(4) = 2$, największa: $f(2) = 2\sqrt{2}$
c) najmniejsza: $f(-1) = \frac{1}{3}$, największa: $f(-2) = f(0) = \frac{1}{2}$
d) najmniejsza: $f(1) = f(5) = 4$, największa: $f(3) = 36$

1.9. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ć **1.** **b)** cena lalki: 55 zł, wielkość sprzedaży: 1400 sztuk, zysk: 49 000 zł

2. **a)** $z(x) = -50x^2 + 2250x - 17\,500$, $x \in \langle 10; 35\rangle$
b) cena misia: 22,50 zł, wielkość sprzedaży: 625 sztuk, zysk: 7812,50 zł

3. o 10 zł

4. 18 zł

5. **a)** 12 m $\times$ 18 m **b)** 9 m $\times$ 24 m

6. 1,5 m

Z **1.** $x = 3$

2. **a)** 10 cm **b)** $\frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6$ [cm]

3. w obu przypadkach 1,5 m

4. $x > 2$

5. Jeśli przez x oznaczymy szerokość pokoju w metrach, to $x \in \langle\sqrt{17} - 1; 6\rangle$.

6. 40 cm

7. $x \in \langle 2; 8\rangle$

9. **a)** $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$
b) $y = -\frac{1}{9}(x-6)(x+6) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$

10. nie

1.10. Zagadnienia uzupełniające

2. **a)** $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$
b) $(0, 4)$
c) $(-\sqrt{6}, 2)$, $(\sqrt{6}, 2)$, $(-1, -3)$, $(1, -3)$
d) $(0, 5)$, $(-3, -4)$, $(3, -4)$

3. 0, 1, 2, 3 lub 4

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** $x = 0$, $x = \frac{5}{4}$ **b)** $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$ **d)** $x = -\frac{4}{9}$, $x = \frac{4}{9}$
e) $x = -1$ **f)** $x = 6$

2. **a)** $x = -1$, $x = 5$
b) $x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$
c) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 5$ **d)** $x = 6$
e) $x = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, $x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$
f) $x = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, $x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$
g) $x = -3$, $x = 0$
h) $x = -4 - \sqrt{17}$, $x = -4 + \sqrt{17}$
i) $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$

3. **a)** $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
b) $x = -\frac{5}{2}$ **c)** sprzeczna
d) $x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **e)** $x \in \mathbf{R}$
f) $x \in (-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; \infty)$

4. a) $A \cap B = \langle -1-\sqrt{2}; -1\rangle \cup \langle 0; -1+\sqrt{2}\rangle$,
$A \setminus B = (-1; 0)$
b) $A \cap B = (-2+\sqrt{2}; 3)$,
$A \setminus B = (-\infty; -2-\sqrt{2}) \cup \langle 3; \infty)$
c) $A \cap B = \langle 2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\rangle$,
$A \setminus B = (-3; 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}; 6)$

5. a) $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = \sqrt{3}$
c) $x = -1$, $x = 1$
d) $x = 0$
e) $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$
f) sprzeczne

6. a) $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$
c) sprzeczne
d) $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$
e) $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$
f) $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$, $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$
g) $x = -2$, $x = 2$
h) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
i) sprzeczne

7. a) $x = -2$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 4$
b) $x = 1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$
c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 4$

8. a) $x = -1$, $y = 2$ lub $x = 1$, $y = 2$
b) $x = 1$, $y = 3$ lub $x = 3$, $y = 3$
c) $x = 0$, $y = 1$ lub $x = -4$, $y = 1$

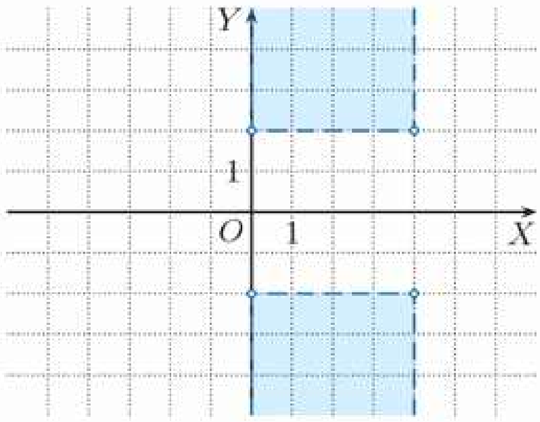
9. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$,
największa: $f(1) = 6$
b) najmniejsza: $f(4) = -8$,
największa: $f(1) = 1$
c) najmniejsza: $f(0) = 1$,
największa: $f(2) = 9$
d) najmniejsza: $f(-2) = -12$,
największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

10. a) $a = b = 2$
b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$
c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

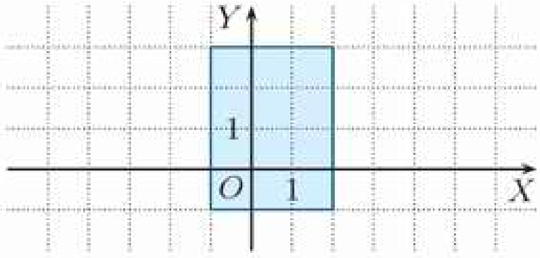
11. 62,5 m $\times$ 62,5 m

12. a) o 100 zł; zysk zwiększy się o 10 000 zł
b) o 280 zł; zysk zwiększy się o 3920 zł

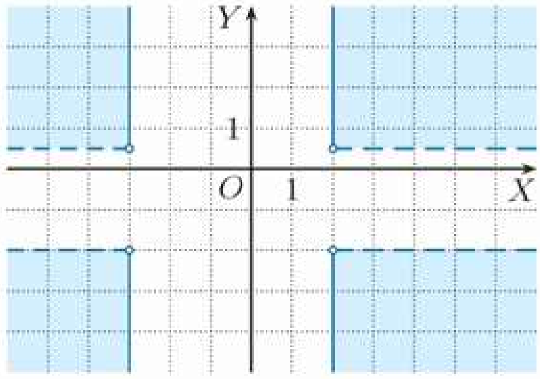
13. a)



b)



c)



Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $c = \frac{9}{4}$ **b)** $c = -5$ **c)** $c = -\frac{5}{4}$
d) $c = 0$, $c = 4$

2. a) $b \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$
b) $b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

3. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$,
3 dla $m = 1$,
4 dla $m \in (0; 1)$
b) 0 dla $m \in (-\infty; -\frac{9}{4})$,
2 dla $m \in \{-\frac{9}{4}\} \cup (0; \infty)$,
3 dla $m = 0$,
4 dla $m \in (-\frac{9}{4}; 0)$
c) 0 dla $m \in (4; \infty)$,
2 dla $m \in (-\infty; 3) \cup \{4\}$,
3 dla $m = 3$, 4 dla $m \in (3; 4)$

4. a) $x = 1$ **b)** $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$
c) $x = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$, $x = 2$, $x = 3$, $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$
d) $x = -1-\sqrt{3}$, $x = -1$, $x = -1+\sqrt{3}$

5. **a)** $x = 148$
b) $x = -6,\ x = -3,\ x = 3,\ x = 6$

6. **a)** $x = 3,\ x = 4$
b) $x = -5,\ x = 0,\ x = 4$

7. **a)** $\frac{1048}{75}$ **b)** $7 - 2\sqrt{2}$

8. **a)** $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$
b) $f(x) = -2x^2 + 20x - 48$

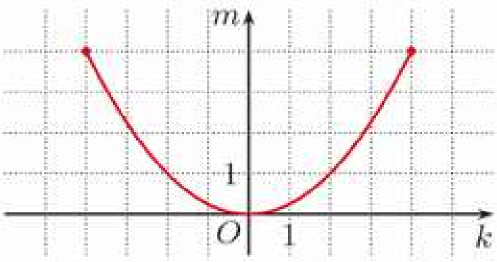
9. **a)** $m \in (-\infty; 0)$ **b)** nie ma takich m
c) $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
d) $m \neq \frac{2}{3}$

10. **a)** $m \in (4 + 4\sqrt{2}; \infty)$
b) $m \in (0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

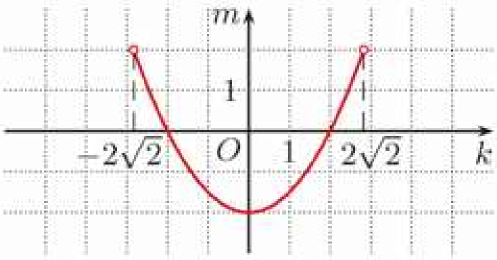
11. **a)** $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\rangle$
b) $m \in \langle 3; \infty)$

12. **a)** $m = -2,\ m = -1$
b) nie ma takich m

13. **a)**



b)



Zadania testowe

1. C **2.** B **3.** C **4.** C **5.** A **6.** A **7.** D
8. C **9.** B **10.** D

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = -\sqrt{7},\ x = \sqrt{7}$

2. $x = 0,\ y = 0$ lub $x = 4,\ y = 8$

3. 12

4. $x = -\sqrt{5},\ x = -3,\ x = 3$

5. l

7. $96\ \text{cm}^2$

8. **a)** $P(x_0) = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0,\ x_0 \in (0; 6)$
b) $O(0,0),\ A(3,0),\ B(3,2),\ C(0,2)$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

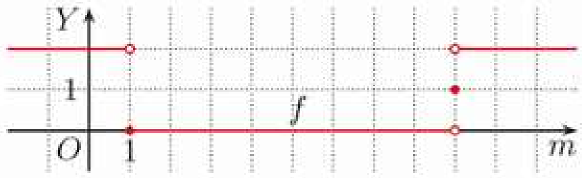
1. $153\ \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. $847\ (2\sqrt{5} + 4)$

3. $519\ (m_0 = 3)$

5. $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$

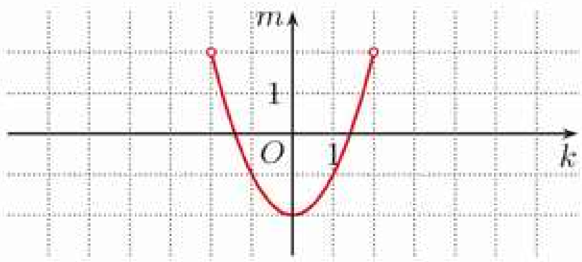
6.



7. $m \in (-4; -3) \cup (5; \infty)$

8. $m = \frac{1-4\sqrt{42}}{6},\ m = \frac{1+4\sqrt{42}}{6}$

9.



2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Č **1.** **a)** tak, stopnia 7 **b)** tak, stopnia 1
c), **d)** nie **e)** tak, stopnia 3

2. **a)** $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
$\operatorname{st}(w) = 5$
b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - x$,
$\operatorname{st}(w) = 6$
c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$,
$\operatorname{st}(w) = 8$
d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5$,
$\operatorname{st}(w) = 10$

3. **a)** $a_5 = -2,\ a_4 = a_3 = a_2 = 0$,
$a_1 = 1,\ a_0 = 0,\ \operatorname{st}(w) = 5$
b) $a_6 = 1,\ a_5 = -\frac{1}{2},\ a_4 = 1$,
$a_3 = 0,\ a_2 = 1,\ a_1 = 0$,
$a_0 = 1,\ \operatorname{st}(w) = 6$
c) $a_0 = 2^{10},\ \operatorname{st}(w) = 0$

4. **a)** $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

5. **a)** $w(0) = -4,\ w(2) = 10,\ w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1,\ w(2) = 21,\ w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2,\ w(2) = 32,\ w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3,\ w(2) = -47,\ w(-2) = -75$

6. **a)** $w\left(-\frac{1}{2}\right)=6$, $w\left(\frac{3}{2}\right)=-24$
b) $w\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$, $w\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{265}{2}$

Z **1.** **a)** $v(x)=x^3-6x^2+4$,
$a_3=1$, $a_2=-6$, $a_1=0$, $a_0=4$
b) $w(x)=-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x-1$,
$a_5=-\frac{1}{6}$, $a_4=\frac{1}{4}$, $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_2=0$,
$a_1=\frac{1}{2}$, $a_0=-1$,
$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=-\frac{3}{4}$

2. **a)** $w(0)=-3$, $w\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{8}$,
$w(-2)=-19$, $w(-3)=-69$
b) $w(0)=2$, $w\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $w(-2)=32$,
$w(-3)=80$
c) $w(0)=-4$, $w\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{8}$,
$w(-2)=-34$, $w(-3)=-76$
d) $w(0)=-10$, $w\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{183}{16}$,
$w(-2)=-58$, $w(-3)=-214$

3. $a=1$, $b=-2$, $c=-8$, $d=4$

4. **a)** Q **b)** P

5. **a)** $a=1$ **b)** $a=-72$ **c)** $a=4$ **d)** $a=-1$

6. **a)** $a=\frac{20}{3}$, $b=\frac{23}{3}$ **b)** $a=3$, $b=1$

7. **a)** 5 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$,
3 dla $m=2$, 1 dla $m=-2$
b) 6 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{-4,0\}$,
4 dla $m=-4$, 2 dla $m=0$

8. $w(x)=\frac{16}{31}x^4+\frac{8}{31}x^3+\frac{4}{31}x^2+\frac{2}{31}x+\frac{1}{31}$

9. **a)** 0 **b)** -1

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Ć **1.** **a)** $u(x)+w(x)=17x^4+6x^3-3x^2+2x$,
$\text{st}(u)=4$, $\text{st}(w)=3$, $\text{st}(u+w)=4$
b) $u(x)+w(x)=6x^4-13x^3-2x^2+5$,
$\text{st}(u)=7$, $\text{st}(w)=7$, $\text{st}(u+w)=4$

2. **a)** np. $u(x)=x^4+1$, $w(x)=x^4$
b) np. $u(x)=-x^4+1$, $w(x)=x^4+x^3$
c) np. $u(x)=-x^4-x+1$, $w(x)=x^4+x^2$
d) np. $u(x)=-x^4+1$, $w(x)=x^4+x+1$
e) np. $u(x)=-x^4+1$, $w(x)=x^4+1$

4. **a)** $u(x)-w(x)=5x^9+4x^8+10x^4+$
$+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$\text{st}(u)=9$, $\text{st}(w)=8$, $\text{st}(u-w)=9$
b) $u(x)-w(x)=\frac{2}{5}x^4-\frac{1}{2}x^2+1$,
$\text{st}(u)=6$, $\text{st}(w)=6$, $\text{st}(u-w)=4$

5. **a)** $h(x)=-10x^6+8x^4+7$, $h(-1)=5$
b) $h(x)=-14x^4-15x^2+4$, $h(-1)=-25$

6. **a)** tak **b)** $a=5$

7. **a)** $u(x,y)+w(x,y)=4x^3y^2+3x^2y^3+$
$-9x^2y^2-4xy-1$,
$u(x,y)-w(x,y)=4x^3y^2-3x^2y^3+$
$+3x^2y^2+8xy+5$
b) $u(x,y)+w(x,y)=\frac{2}{3}x^4y+\frac{10}{3}x^3y+$
$-\frac{1}{6}xy^2-x+5$, $u(x,y)-w(x,y)=$
$=\frac{2}{3}x^4y+\frac{8}{3}x^3y-\frac{5}{6}xy^2+x-3$

8. **a)** $u(x,y,z)+w(x,y,z)=$
$=5xy^2z^3-6x^2y^2z+6x^2yz^2+xyz^3$,
$u(x,y,z)-w(x,y,z)=$
$=3xy^2z^3-6x^2y^2z-6x^2yz^2-3xyz^3$
b) $u(x,y,z)+w(x,y,z)=$
$=8x^2y+14xz^2-4yz^2+z^3$,
$u(x,y,z)-w(x,y,z)=$
$=8x^2y-2xz^2-8y^2z+2yz^2-z^3$

Z **1.** **a)** $f(x)+g(x)=x^6+x^3+x^2-2x+6$,
$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^6-4x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+2$
b) $f(x)+g(x)=-3x^5+x^2-x+2$,
$f(x)-g(x)=-2x^6+3x^5-5x^2+9x+2$
c) $f(x)+g(x)=x^5+3x^4+x-3$,
$f(x)-g(x)=4x^7-x^5+3x^4+7x-7$

2. **a)** $w(x)=2x^5+6x^4$, $\text{st}(w)=5$, $S_w=8$,
$u(x)=-\frac{1}{3}x^5-x^4$, $\text{st}(u)=5$, $S_u=-\frac{4}{3}$
b) $w(x)=12x^2-18x$, $\text{st}(w)=2$,
$S_w=-6$, $u(x)=-2x^2+3x$, $\text{st}(u)=2$,
$S_u=1$

3. **a)** $f(5)=3$, $g(5)=20$
b) $f(-3)=-16$, $g(-3)=10$
c) $u\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{7}$, $w\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{7}$

4. **a)** $\text{st}(p+q)=5$
b) $\text{st}(p+q)\leqslant 5$ lub $p+q\equiv 0$
c) Jeśli $m\neq n$, to $\text{st}(p+q)=\max(m,n)$.
Jeśli $m=n$, to $\text{st}(p+q)\leqslant n$ lub $p+q\equiv 0$.

5. **a)** $\text{st}(u+w)=6$ dla $a\neq 0$,
$\text{st}(u+w)=4$ dla $a=0$
b) $\text{st}(u+w)=5$ dla $a\neq -6$,
$\text{st}(u+w)=1$ dla $a=-6$
c) $\text{st}(u+w)=4$ dla $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$,
$\text{st}(u+w)=3$ dla $a=1$,
$\text{st}(u+w)=1$ dla $a=-1$

6. a) st $(u+w)=5$ dla $a\in\mathbf{R}$ i $b\neq 0$,
st $(u+w)=2$ dla $a=-7$ i $b=0$,
st $(u+w)=3$ dla $a\neq -7$ i $b=0$
b) st $(u+w)=7$ dla $a\neq -3$ i $b\in\mathbf{R}$,
st $(u+w)=1$ dla $a=-3$ i $b=3$,
st $(u+w)=2$ dla $a=-3$ i $b\neq 3$
c) st $(u+w)=4$ dla $a\neq b$,
st $(u+w)=3$ dla $a=b\neq -4$,
st $(u+w)=1$ dla $a=b=-4$

7. a) $p=-2,\ q=-1$ b) $k(x)=2x^2-4x$

8. a) $w(-2,3)=66$ b) $w(2,-4)=60$

9. a) $u(x,y)+w(x,y)=\frac{3}{2}x^3y-\frac{2}{3}x^2y-2xy^2$,
$u(x,y)-w(x,y)=\frac{1}{2}x^3y+\frac{4}{3}x^2y-4xy^2$,
$(u+w)(-2,3)=-8$, $(u-w)(-2,3)=76$
b) $u(x,y)+w(x,y)=$
$=-\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2y+\frac{5}{12}xy^3$,
$u(x,y)-w(x,y)=\frac{4}{3}x^2y^2-\frac{3}{2}x^2y+\frac{1}{12}xy^3$,
$(u+w)(-2,3)=-52{,}5$,
$(u-w)(-2,3)=25{,}5$

10. $P(x,y)=\frac{5}{2}xy+2y^2$

11. a) Q b) P c) P

12. a) $v(x,y,z)=-x^2yz^2+6x^2yz-2xyz^2+$
$-3xyz$, st $(v)=5$
b) $v(x,y,z)=4x^3y^2z-2xy^2z^2-9xyz^2+$
$+5xyz+6yz^2$, st $(v)=6$

13. $P(x,y,z)=4xy+4xz+4yz+10x+$
$+8y+6z+22$

2.3. Mnożenie wielomianów

Ć 1. a) $u(x)\cdot w(x)=x^7+2x^5-x^4-x^3$,
st $(u\cdot w)=7$
b) $u(x)\cdot w(x)=x^7-x^5-x^3+x^2+x-1$,
st $(u\cdot w)=7$
c) $u(x)\cdot w(x)=x^3-1$, st $(u\cdot w)=3$
d) $u(x)\cdot w(x)=x^4-3x^3+4x^2+3x-5$,
st $(u\cdot w)=4$

2. a) $V(x)=x^3-x$, $D=(1;\infty)$
b) $V(x)=x^3+6x^2+11x+6$,
$D=(-1;\infty)$
c) $V(x)=2x^3+4x^2-\frac{1}{2}x-1$,
$D=(\frac{1}{2};\infty)$
d) $V(x)=x^4+6x^3-54x-81$,
$D=(3;\infty)$

3. a) $-4x^4+2x^3y-2x^3+6x^2y^2+x^2y-3xy^3$
b) $3x^3y^3-2x^3y+6x^2y^3-3x^2y-3xy^3+$
$+4xy-y$
c) $4x^4y^3-12x^4y^2+3x^3y^4-11x^3y^3+$
$+10x^3y^2+3x^2y^3-2x^2y^2$

4. a) $2x^3y^2z+2x^3yz^2-x^2y^2z-x^2yz^2+$
$+2xy^2z^2-y^2z^2$
b) $3x^3y^2z-4x^3yz^2-2x^2y^3z+4x^2y^2z^2+$
$-xy^4z+6xyz^2-8xz^3+2y^2z^2$
c) $x^3y^2z^2+2x^3yz^2-x^3yz+2xy^4z^2+$
$+4xy^3z^2-2xy^3z+3xy^2z^4+6xyz^4-3xyz^3$

Z 1. a) $2x^4-7x^3+17x^2-7x$, $a_4=2$, $a_0=0$
b) $4x^4-3x^3+12x^2-6x+8$, $a_4=4$, $a_0=8$
c) $2x^6-2x^5-x^3+2x^2-x$, $a_6=2$, $a_0=0$
d) $-2x^6-3x^5+8x^4+16x^3-3x^2-24x+6$,
$a_6=-2$, $a_0=6$
e) $2x^5-2x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{8}x-\frac{1}{4}$, $a_5=2$,
$a_0=-\frac{1}{4}$
f) $-4x^6-x^5-5\sqrt{2}x^4-\sqrt{2}x^3+6x^2+$
$+2x+2\sqrt{2}$, $a_6=-4$, $a_0=2\sqrt{2}$

2. a) st $(w)=3$, $a_3=1$, $a_0=-1$
b) st $(w)=3$, $a_3=6$, $a_0=-6$
c) st $(w)=5$, $a_5=-4$, $a_0=1$
d) st $(w)=3$, $a_3=1$, $a_0=-6$
e) st $(w)=4$, $a_4=-6$, $a_0=2$
f) st $(w)=5$, $a_5=12$, $a_0=6$

3. a) $v(x)=x^6-8x^5+16x^4+6x^3-24x^2+9$,
st $(v)=6$
b) $v(x)=2x^4+2\sqrt{2}x^3-7x^2-4\sqrt{2}x+8$,
st $(v)=4$

4. a) $f(x)=x^6-3x^5-21x^4+2x^2$,
$g(x)=12x^3+9x^2-6x+1$
b) $f(x)=-6x^7+2x^6+6x^5-3x^4-6x^3+$
$+3x^2-1$,
$g(x)=x^8-2x^6+3x^4+6x^3-4x^2+2$
c) $f(x)=3x^5-5x^4+6x^3-x+1$,
$g(x)=x^6-2x^5+3x^4-4x^2+4x$

5. a) $P(x)=10x^2+2x-20$, $D=(2;\infty)$
b) $P(x)=2x^4+4x^3+14x^2+6x+4$,
$D=(-2;-1)\cup(1;\infty)$

6. a) $m=1$, $n=-11$
b) $m=-4$, $n=0$
c) $m=-3$, $n=-1$

7. **a)** $4x^4 - 12x^3y^2 - 4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
b) $-4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$

8. **a)** $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 - 12xy^2$
b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 - 2xy^2 + -2y^4$
c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$

9. **a)** $-2x^2y + 4x^2z + 4xy^2 - 7xyz - 2xz^2 + -2y^2z + 4yz^2$ **b)** $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
d) $x^2yz + x^2y + x^2 - xy^2z^2 - xy^2z + xy + x$

10. $2xy + xz + 5x + 2y + z + 5$, gdzie $x > -1$, $y > -1$, $z > -1$

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Ć **2.** **a)** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **b)** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
d) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
e) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
g) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
h) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

3. **a)** $2(10 + 7\sqrt{2})$ **b)** $8(\sqrt{5} - 2)$
c) $6(9 - 5\sqrt{3})$ **d)** $2(25\sqrt{2} - 44)$
e) $46\sqrt{5} + 61$ **f)** $3(26\sqrt{3} - 45)$
g) $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ **h)** $3(7\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$

5. **a)** $x^3 + 8$ **b)** $x^3 - 1$ **c)** $x^3 + 1$
d) $x^3 + 216$ **e)** $x^3 - 512$ **f)** $8x^6 - 1$

6. **a)** $x^6 - 1$ **b)** $-x^6 + 729$
c) $x^6 + 64$ **d)** $16x^4 - 200x^2 + 625$

8. **a)** $x^4 - 1$ **b)** $x^6 - 1$
c) $x^{10} - 1$ **d)** $x^6 - x^4 - x^2 + 1$

10. **a)** $x^4 - 81$ **b)** $x^5 - 32$

Z **1.** **a)** $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
f) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
g) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$
h) $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$

2. **a)** $5\sqrt{2} - 7$ **b)** $45 + 29\sqrt{2}$
c) $46\sqrt{5} - 61$ **d)** $4(3\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$

3. **a)** 14 **b)** $100\sqrt{2}$ **c)** -74 **d)** $22\sqrt{5}$

4. **a)** $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
e) $x^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{27}y^3$
f) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
g) $3\sqrt{3}x^3 + 9x^2y + 3\sqrt{3}xy^2 + y^3$
h) $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 - x^2y + \sqrt{3}xy^2 - y^3$

5. **a)** $16x^3 + 60x^2y + 78xy^2 + 35y^3$
b) $26x^3 + 18x^2y - 18xy^2 - 26y^3$

6. **a)** $x^4 + 5x^3 + 125x + 625$
b) $x^4 - 5x^3 - 125x + 625$
c) $81x^4 - 27x^3 - 3x + 1$ **d)** $x^6 - 1$

7. **a)** 73 **b)** -1 **c)** 2 **d)** 8

8. **a)** $x = 27$ **b)** $x = -8$ **c)** $x = \frac{3}{2}$
d) $x = -2\sqrt[3]{17}$

9. **a)** $a^2 - 1$ **b)** $a + 1$

11. **a)** $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
b) $(a^2 + b^2)(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2) \cdot$
$\cdot (a^2 - \sqrt{3}ab + b^2)$

13. **a)** $\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}$ **b)** $\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4$
c) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$
d) $9 + 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}$

Trójkąt Pascala

1. **a)** $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
b) $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$
c) $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$
d) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

2. $(a + b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + + 9ab^8 + b^9$,
$(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$

3. **a)** $12\sqrt{2} + 17$ **b)** $4(7 - 4\sqrt{3})$
c) $70\sqrt{2} + 99$ **d)** $8(26 - 15)\sqrt{3}$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Ć **1.** **a)** $x^3(x-7)$ **b)** $6x^2(3x+5)$
c) $-2x^4(x+4)$ **d)** $-18x^2(3x-2)$
e) $6x(x+1)^2$ **f)** $-3x^2(x-2)^2$
g) $-3x^4(3x-1)^2$ **h)** $\frac{1}{4}x(x^2+2)^2$

2. **a)** $w(x)=3x(x^2+4)$,
$x^2+4>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
b) $w(x)=\frac{1}{4}x^4(x^2+3)$,
$x^2+3>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
c) $w(x)=-6x^3(x^2+7)$,
$x^2+7>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
d) $w(x)=-\sqrt{2}x^5(x^2+\sqrt{3})$,
$x^2+\sqrt{3}>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
e) $w(x)=x^9(7x^2-5x+1)$, $\Delta=-3<0$
f) $w(x)=x^4(\frac{1}{4}x^2+x+2)$, $\Delta=-1<0$
g) $w(x)=-x^3(4x^2-3x+7)$,
$\Delta=-103<0$
h) $w(x)=x^3(3\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{6})$,
$\Delta=12-24\sqrt{3}<0$

3. **a)** $x^2(x-3)(x+1)$ **b)** $2x^3(x+\frac{1}{2})(x-1)$
c) $-2x(x-\frac{3}{2})(x+2)$
d) $20x^3(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{5})$
e) $-2x(x-5+2\sqrt{5})(x-5-2\sqrt{5})$
f) $x^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$
g) $2x^3\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$
h) $4x^4(x-\frac{3}{2}+\sqrt{2})(x-\frac{3}{2}-\sqrt{2})$

Z **1.** **a)** $4x(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{6})$
b) $16x^3(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$
c) $2x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

2. **a)** $x^3(x^2-2x+5)$ **b)** $x^2(x-3)(x+2)$
c) $2x^4(x-1)^2$ **d)** $6x^2(x-\frac{1}{2})(x+1)$
e) $6x(x-\frac{3}{2})(x-1)$ **f)** $\frac{3}{4}x^3(x+\frac{1}{3})(x-2)$

3. **a)** $x^2(x-2)(x-3)$ **b)** $2x(x+\frac{1}{2})(x-5)$
c) $-6x^3(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$ **d)** $x^2(x^2+3x+4)$
e) $x(x^2+\sqrt{2}x+1)$ **f)** $-\frac{1}{3}x^3(x-9)(x+1)$
g) $(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$
h) $(x-4)(x+1)^2(x+4)$
i) $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-3)^2$
j) $x^2(x-3)(x-1)(x+2)(x+5)$
k) $x^5(x-2)(x+3)(x^2+2x+3)$
l) $x(x-2)(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

4. **a)** $S(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5. **a)** $S(n)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ **b)** 3025

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Ć **1.** **a)** $2x^2(x+1)(x^2-x+1)$
b) $-x^3(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $x(2x-1)(4x^2+2x+1)$
d) $x^2(1-0{,}1x)(1+0{,}1x+0{,}01x^2)$
e) $x^3(2x-3)(4x^2+6x+9)$
f) $2x(0{,}3x+1)(0{,}09x^2-0{,}3x+1)$

2. **a)** $(x^2+1)(x+5)$
b) $(x-1)(x+1)(x+3)$
c) $(x-2)(x+2)(4x+1)$
d) $x(x^2+1)(x+3)$
e) $(x-5)(x+5)(x+4)$
f) $(x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)$
g) $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x^2+2)$
h) $x^2(x^2+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$

Z **1.** **a)** $x(x+3)(x^2-3x+9)$
b) $x^2(x-2)(x^2+2x+4)$
c) $-x(x+4)(x^2-4x+16)$
d) $-\frac{1}{8}x^2(x-8)(x^2+8x+64)$
e) $27x^3(x+\frac{2}{3})(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})$
f) $125x^5(x-\frac{1}{5})(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{25})$

2. **a)** $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$
b) $(2x-1)(7x^2+2)$
c) $(x-3)(2x^2+5)$
d) $(x-3)(x+1)(x^2-x+1)$
e) $\frac{1}{6}(3x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$
f) $\frac{1}{3}(2x-9)(x-3)(x+3)$
g) $(x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$
h) $\sqrt{3}x(x+\sqrt{2})(x^2+\frac{\sqrt{3}}{3})$

3. **a)** $(x+1)^3(x-1)^2$
b) $4(x-2)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
c) $3(x+\frac{2}{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$

4. **a)** $20x^2(x-\frac{2}{5})(x-1)(x+6)(x^2+2)$
b) $-\frac{1}{4}x^2(x-7)(x-2)(x+2)(x+4)^2$
c) $7x^2(x-2)(x-1)^2(x+2)(x+3)\cdot$
$\cdot(x^2+x+1)$
d) $3x^2(x-\frac{1}{3})^2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)\cdot$
$\cdot(x^2+x+1)$

5. **a)** $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$
b) $4(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{2})(x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2})$
c) $9(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}x+\frac{4}{3})(x^2+\frac{2}{3}\sqrt{6}x+\frac{4}{3})$
d) $(x^2-x+3)(x^2+x+3)$
e) $16(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})$
f) $4(x^2-x+\frac{3}{2})(x^2+x+\frac{3}{2})$

6. **a)** $2(x-1)(x^2-\frac{3}{2}x+1)$
b) $3(x+1)\left(x-\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$
c) $8(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{4})(x-1)$
d) $64(x-\frac{1}{4})(x^2+\frac{7}{16}x+\frac{1}{16})$

2.7. Równania wielomianowe

Ć **1.** **a)** $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$
b) $x=-2$, $x=0$, $x=2$
c) $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$
d) $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ **e)** $x=-6$, $x=0$
f) $x=0$, $x=\frac{1}{2}$

2. **a)** $x=0$, $x=3$, $x=4$
b) $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=5$
c) $x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$ **d)** $x=0$
e) $x=-1-\sqrt{5}$, $x=0$, $x=-1+\sqrt{5}$
f) $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x=0$, $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

3. u: $x=-2$, $x=0$, $x=3$, wykres C;
v: $x=-3$, $x=0$, $x=4$, wykres B;
w: $x=-4$, $x=0$, $x=2$, wykres A

4. **a)** $x=9$ **b)** $x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=2$
c) $x=-5$, $x=0$
d) $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=\frac{5}{3}$
e) $x=-2$, $x=2$ **f)** $x=3\sqrt{2}$

Z **1.** **a)** $x=0$, $x=2$
b) $x=-3$, $x=0$, $x=3$
c) $x=-27$, $x=0$
d) $x=0$, $x=2$
e) $x=-2$, $x=0$, $x=2$
f) $x=-\sqrt{5}$, $x=0$, $x=\sqrt{5}$

2. **a)** $x=-1$, $x=0$, $x=1$
b) $x=-2$, $x=-1$, $x=0$
c) $x=-1$, $x=0$, $x=5$
d) $x=-1$, $x=0$, $x=3$
e) $x=-2$, $x=0$, $x=3$
f) $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=\frac{2}{5}$
g) $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$
h) $x=-6$, $x=0$, $x=2$
i) $x=-4$, $x=-1$, $x=0$
j) $x=0$, $x=1$
k) $x=-6$, $x=0$, $x=3$ **l)** $x=0$

3. **a)** $x=3$ **b)** $x=-\sqrt{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{3}$
c) $x=-9$, $x=1$ **d)** $x=-1$, $x=1$
e) $x=-1$, $x=2$ **f)** $x=-4$, $x=1$
g) $x=-\sqrt{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{2}$
h) $x=-2$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=2$
i) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **a)** $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x=-1$, $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$
b) $x=-2$, $x=1$
c) $x=-3$, $x=0$, $x=1$, $x=2$

5. $(-2,-7)$, $(2,1)$, $(3,3)$

6. **a)** $(-3,-10)$, $(0,2)$, $(3,14)$
b) $(-\sqrt{2},1-3\sqrt{2})$, $(\frac{1}{4},\frac{7}{4})$, $(\sqrt{2},1+3\sqrt{2})$
c) $(-1,-7)$, $(1,1)$, $(3,9)$

7. **a)** $(0,-3)$, $(2,-3)$
b) $(-3,\frac{15}{2})$, $(0,-3)$, $(2,-\frac{5}{3})$
c) $(-2,-7)$, $(2,-3)$

10. $V(x)=x^3+3x^2-4x$, $D=(1;\infty)$,
$V(x)=12$ dla $x=2$

12. ściana o krawędziach: $(2\sqrt{3}-3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m;
$P=\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\text{ m}^2\approx 0{,}4\text{ m}^2$

2.8. Dzielenie wielomianów

Ć **1.** **a)** $x-2$ **b)** $9x+12$
c) x^2-2x+1 **d)** $2x^3+x^2-x$

2. **a)** $x-3$, reszta 4 **b)** $4x+4$, reszta 5
c) x^2+3x-5, reszta 4
d) $3x^3+3x^2-6x-6$, reszta -2

3. **a)** $w(x)=(x^2+1)(x-2)+2$
b) $w(x)=(-2x^2+9x-27)(x+3)+85$
c) $w(x)=(x^3+2x^2-x)(x-1)$
d) $w(x)=(3x^3-6x^2+11x-13)(x+2)+25$

Z **1.** **a)**, **e)** jest **b)**, **c)**, **d)** nie jest

2. **a)** $w(x)=(2x^2+9x+37)(x-4)+147$
b) $w(x)=(x^2-3x+12)(x+3)-29$
c) $w(x)=(3x^3+3x^2+2x+2)(x-1)+2$
d) $w(x)=(x^2+2x-1)(x+6)+2$
e) $w(x)=(2x^2+6x)(x+\frac{1}{2})-2$
f) $w(x)=(12x^2+4x)(x-\frac{1}{4})+3$

3. **a)** tak **b)**, **c)**, **d)** nie

4. a) $w(x) = (2x^2 + 3x + \frac{1}{2})(2x + 1) - \frac{19}{2}$
b) $w(x) = (x^2 + 2x)(3x - 1) + 7$
c) $w(x) = (2x^2 - x)(3x + 4) - 1$
d) $w(x) = (2x^2 - 4x + 2)(\frac{1}{2}x + 3) - 4$

5. a) $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$
b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$
c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$
d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$
e) $w(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4})(2x^2 + 1) - 3x - \frac{7}{4}$

2.9. Równość wielomianów

Ć **1. a)** tak, $a = 2$ **b)** nie
c) tak, $a = -3$

2. a) $m = 2$ **b)** $m = 2$ **c)** $m = 4$

Z **1. a)** $m = 3$ **b)** $m = 2$
c) nie ma takiego m

2. a) $a = 2$ **b)** $a = -3$ **c)** $a = -8$

3. a) $a = 2, b = 3$ **b)** $a = \frac{1}{2}, b = -5$

4. a) $a = 0, b = -1$
b) $a = 1, b = 3$
c) $a = -4, b = 2$

5. a) $w(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1)$
b) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x - 1)$
c) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
d) $w(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1)$
e) $w(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + 2x + 1)$

2.10. Twierdzenie Bézouta

Ć **2. a), b), d)** 0 **c)** -1

3. a), b) jest **c), d)** nie jest

4. a) $(x + 4)(x + 2)(x - 1)$
b) $(x - 1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
c) $(x + 2)(x + 1)(x - 4)$
d) $(x + 2)(x - 3)^2$

Z **1. a)** 0 **b)** 2 **c)** 0

2. a) $w(x) = (x - 7)(x - 1)(x + 2)$
b) $w(x) = 2(x + 2)(x + \frac{3}{2})(x + 1)$
c) $w(x) = (x + 5)(x^2 - 3x + 4)$

3. a) $2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ **b)** $-1, -3, \frac{1}{2}$
c) $1, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ **d)** $2, -2, \frac{1}{2}$

4. a) $m = 7$ **b)** $m = -\sqrt{5}, m = \sqrt{5}$
c) $m = -2, m = 3$

5. a), c) jest **b)** nie jest

6. a) $2x + 1$ **b)** $4x - 5$

7. a) $10x + 53$ **b)** $x - 1$ **c)** $-7x^2 + 7$

2.11. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

Ć **1. a)** dzielniki: $-1, 1, -3, 3$;
pierwiastek całkowity: 1
b) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$;
pierwiastki całkowite: $-4, 1$
c) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$;
pierwiastki całkowite: $-2, 1, 3$
d) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10$;
brak pierwiastków całkowitych

2. a) $x = 1, x = 4$ **b)** $x = -2$
c) $x = -3, x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
d) $x = -3, x = -\frac{1}{2}$

3. a) $x = 1, x = 3$
b) $x = -3, x = -2, x = 1, x = 3$
c) $x = -1, x = 5$
d) $x = -3, x = 1, x = 2$ **e)** $x = 1$
f) $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}, x = -2, x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$,
$x = 2$

4. a) $-4, -2, 0, 2, 4$ **b)** $-4, 0, 4$
c) $-2, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 2$

5. a) $x = -\frac{1}{2}$ **b)** $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}, x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}, x = \frac{1}{2}$
d) $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{3}$

Z **1. a)** $x = -5, x = 1$
b) $x = -2, x = -1, x = 3$
c) $x = -3, x = -1, x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}, x = 1, x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$
e) $x = -4$ **f)** $x = -1, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$
g) $x = 3$ **h)** $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, x = 3$

2. a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 1, x = 3$
b) $x = 1$ **c)** $x = 1, x = 2$
d) $x = -1, x = -\frac{2}{3}, x = 1$
e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x = -2, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x = 3$
f) $x = -1, x = -\frac{1}{2}$

3. a) $x = \frac{1}{2}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}, x = -\frac{1}{3}, x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = \frac{2}{3}$ **d)** $x = -1 - \sqrt{6}, x = -\frac{1}{2}, x = 0$,
$x = -1 + \sqrt{6}$

4. **a)** $x = 2$ **b)** $x = -3$, $x = 1$
c) $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = \sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 3$

5. **a)** $P(t) = -2t^3 + 12t$, $t \in (0; \sqrt{6})$
b) $t = \sqrt{3} - 1$, $t = 2$

6. $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(3, \frac{13}{2})$, $(-3, \frac{13}{2})$

7. $B(4, 0)$, $C(2, 5)$

8. $4(2 + \sqrt{2})$

9. $3(\sqrt{3} + 3)$ dm^2

10. **a)** $x = 1$ dm **b)** $P = 160$ dm^2

Równania wielomianowe. Wzór Cardano

1. **a)** $x = 1$
b) $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}} - 1}$

2. **a)** $x = 3$ **b)** $x = 2$

3. **a)** $x = 2 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Ć **1.** **a)** $w(x) = (x-2)^2(x+2)$, jest
b) $w(x) = (x-2)^3(x+1)$, nie jest

2. **a)** $x = -\frac{3}{2}$ – dwukrotny,
$x = 0$ – czterokrotny,
$x = 1$ – jednokrotny
b) $x = 0$ – jednokrotny
c) $x = -4$ – jednokrotny,
$x = 4$ – czterokrotny
d) $x = -2$ – dwukrotny,
$x = -\frac{3}{5}$, $x = 0$ – jednokrotne,
$x = 2$ – trzykrotny

3. **a)** $x = -3$ – jednokrotny,
$x = -1$ – dwukrotny
b) $x = -2$ – dwukrotny,
$x = 3$ – jednokrotny
c) $x = 0$, $x = 4$ – jednokrotne,
$x = 1$ – dwukrotny
d) $x = 1$, $x = 2$ – dwukrotne

4. **a)** nie może **b)** może

Z **1.** **a)** $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$ – jednokrotne
b) $x = -1$ – dwukrotny,
$x = 2$ – jednokrotny
c) $x = 2$ – jednokrotny,
$x = 5$ – dwukrotny
d) $x = -3$ – jednokrotny,
$x = 1$ – czterokrotny
e) $x = -3$ – trzykrotny,
$x = 3$ – jednokrotny
f) $x = -2$, $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x = 3$ – jednokrotne
g) $x = -5$ – jednokrotny,
$x = -2$, $x = 0$ – dwukrotne,
$x = 2$ – trzykrotny
h) $x = -4$, $x = 2$ – jednokrotne,
$x = 0$ – trzykrotny, $x = 3$ – dwukrotny

3. **a)** $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$ – jednokrotne
b) $x = 0$ – trzykrotny, $x = 3$ – dwukrotny
c) $x = -1$, $x = 1$ – dwukrotne
d) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ – dwukrotne
e) $x = 0$ – dwukrotny
f) $x = -2$ – dwukrotny,
$x = 0$ – trzykrotny
g) $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$ – jednokrotne
h) $x = 0$ – dwukrotny
i) $x = 0$ – trzykrotny,
$x = -2$, $x = 2$ – jednokrotne

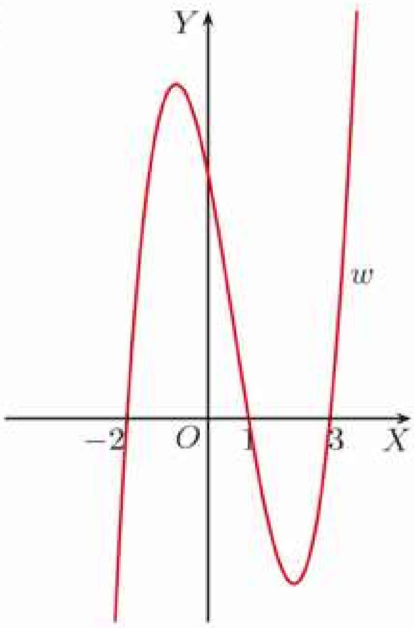
4. **a)** $x = -\frac{1}{3}$ **b)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
c) $x = \frac{1}{3}$

7. **a)** $a = 5$ **b)** $a = -2$, $a = 2$

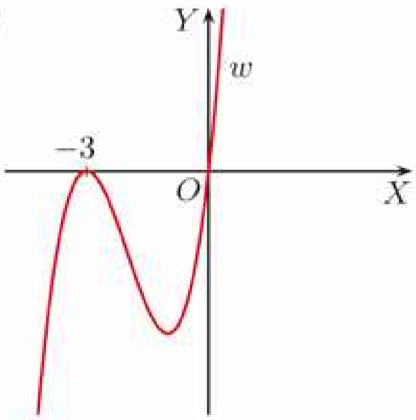
8. **a)** tak, $a = -16$ **b)** nie

2.13. Wykres wielomianu

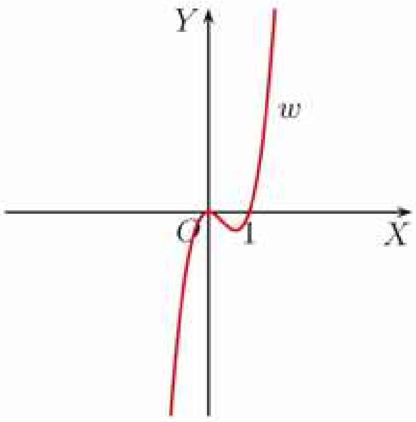
Ć **1.** **a)**



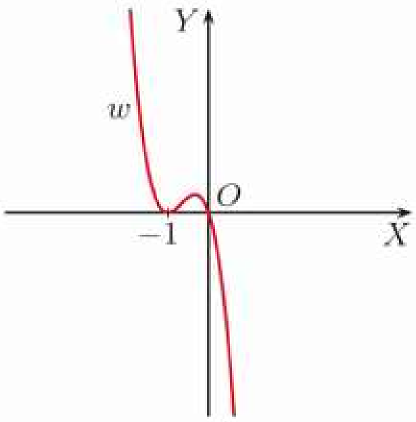
1. **b)**



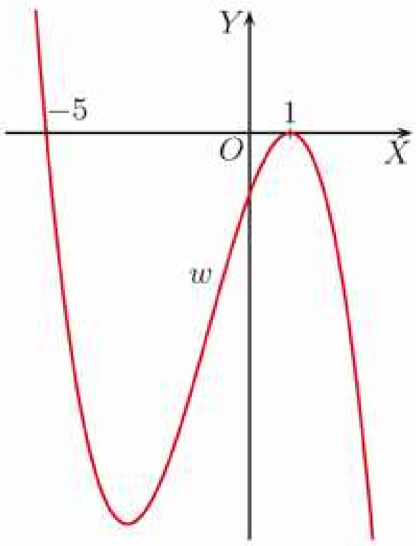
c)



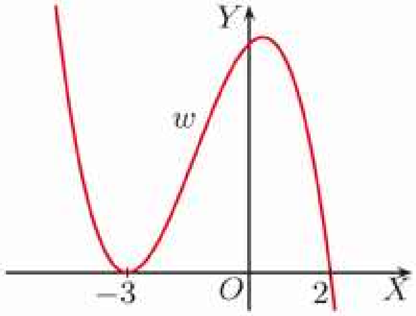
d) $w(x) = -x(x+1)^2$



e) $w(x) = -(x-1)^2(x+5)$



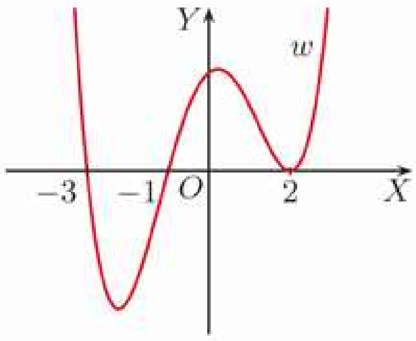
f) $w(x) = -(x-2)(x+3)^2$



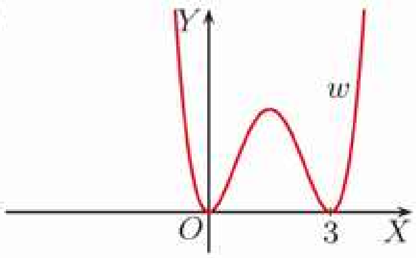
2. A – w, B – u, C – v

3. **a)** $w(x) = -x(x+2)^2(x-2)$
b) $w(x) = -(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$
c) $w(x) = -(x+2)^2(x-1)^2$

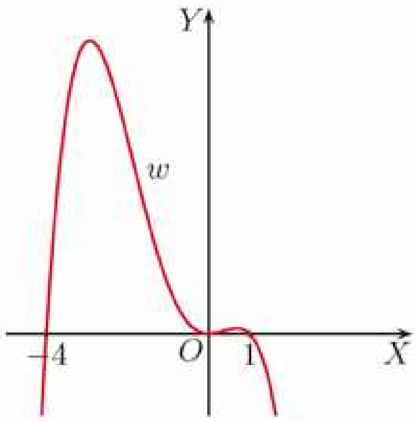
4. **a)**



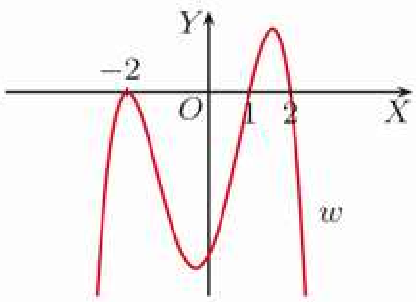
b)



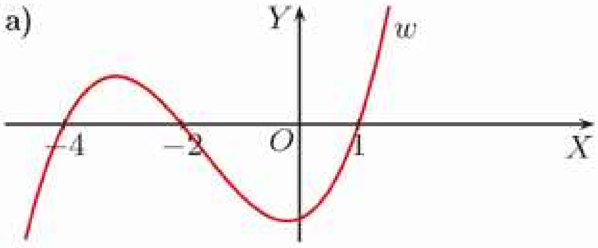
c)



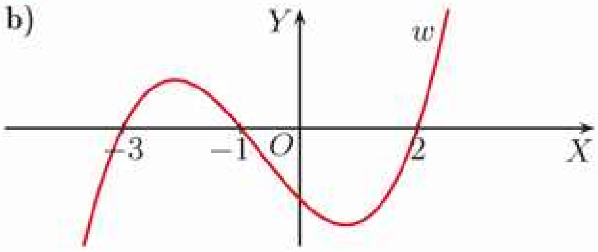
d) $w(x) = -2(x+2)^2(x-1)(x-2)$



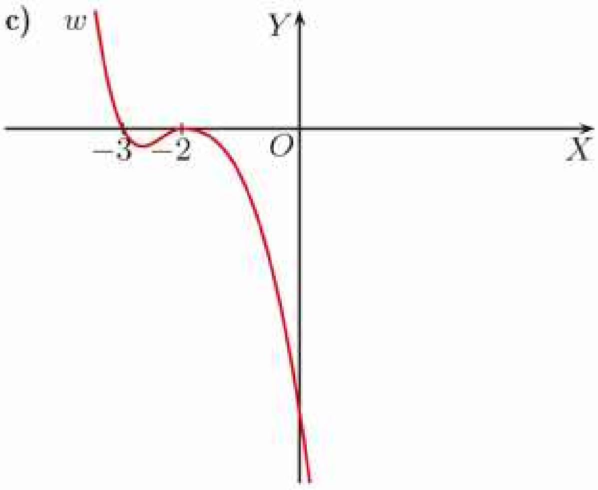
$\boxed{Z}$ **1. a)**



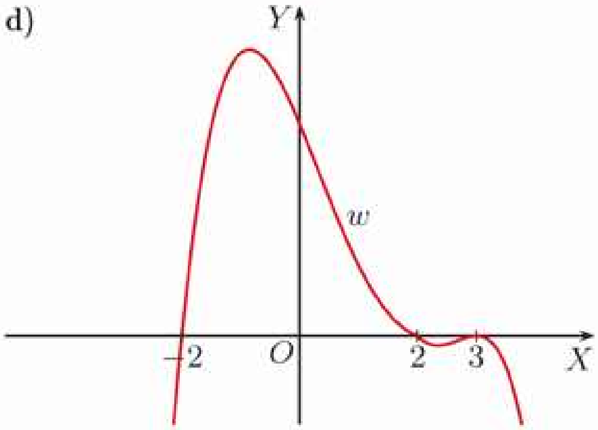
b)



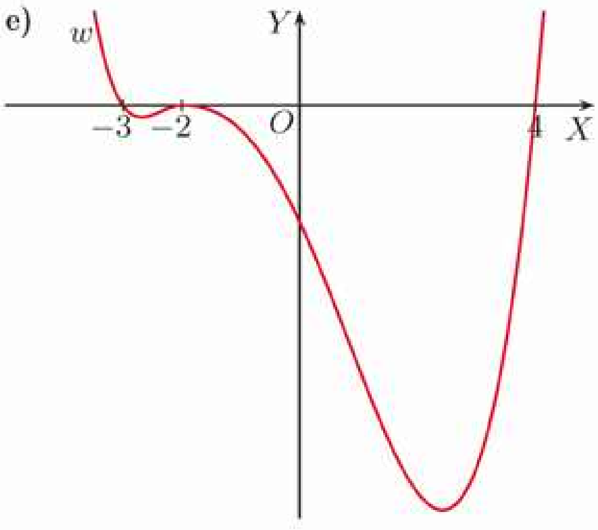
c)



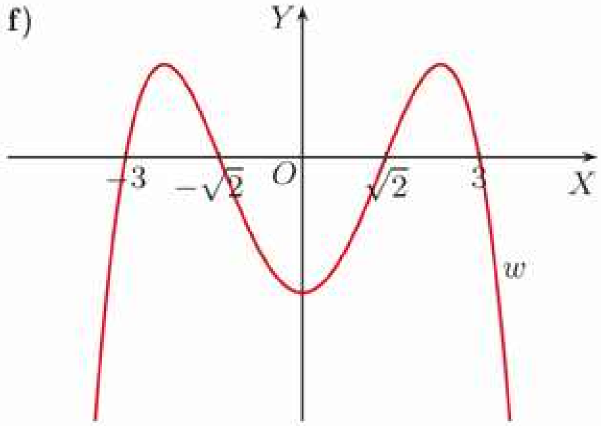
d)



e)



f)



2. a) $w(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$
b) $w(x) = x(x+1)(x-2)^2$
c) $w(x) = (x+2)^2(x-2)^2$

3. a) $w(x) = -x(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$
b) $w(x) = -(x+3)(x+2)(x+1)^2(x-1)$
c) $w(x) = -x^2(x+4)(x+2)^2$

4. a) $x \in (-\infty; -3)$
b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-2; \sqrt{5})$
c) $x \in (-1; 1) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 6)$
e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
f) nie istnieją takie argumenty

5. a) $x \in (-\infty; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$
b) $x \in \{-2, -1, 0\}$
c) $x \in \langle 0; 1\rangle \cup \langle 6; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$
e) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{3}; \infty\right)$
f) $x \in \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\rangle \cup \langle 3; \infty)$

6. a) $v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - 1$
b) $v(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2$
c) $v(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - x + 3$

2.14. Nierówności wielomianowe

$\boxed{Ć}$ **1. a)** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$
b) $x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

2. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$
b) $x \in (1; 4)$
c) $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$
d) $x \in \{-1\} \cup \langle 1; 4\rangle$

3. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1)$
b) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{2\}$
c) $x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$
d) $x \in \{-3\} \cup \langle -1; \infty)$

4. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 5)$
b) $x \in (-\infty; -4) \cup (5; \infty)$
c) $x \in \{-3\} \cup \langle 2; \infty)$
d) $x \in \{-2, 5\}$

5. a) $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 3\rangle$
c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{1\}$
d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 11)$
e) $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$
f) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}; \sqrt{2}\right\rangle$

6. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$
b) $x \in (-\infty; 3\rangle$

7. a) $x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}\rangle \cup \langle -1; -1+\sqrt{2}\rangle$
b) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\rangle$
c) $x \in (-\infty; 3\rangle$
d) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$

Z 1. a) $x \in (-\frac{2}{3}; 0) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
b) $x \in \langle -\frac{3}{4}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \{2\}$
d) $x \in (0; 2)$
e) $x \in \langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\rangle$
f) $x \in (0; \frac{1}{8})$
g) $x \in (-3; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
h) $x \in \langle 1-\sqrt{5}; 0\rangle \cup \langle 1+\sqrt{5}; \infty)$
i) $x \in \left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\rangle \cup \{0\} \cup$
$\cup \left\langle \frac{-5+\sqrt{33}}{2}; \infty\right)$

2. a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle -1; 1\rangle$
b) $x \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
c) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right\rangle$
d) $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (-\frac{1}{3}; 2\sqrt{3})$
e) $x \in (-1; 5)$
f) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle \sqrt[3]{6}; \infty)$
g) $x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
h) $x \in \langle -\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty)$

3. a) $x \in \langle -1; 2\rangle$
b) $x \in (-5; \infty)$
c) $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$
d) $x \in (-\infty; 2\rangle$
e) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$
f) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$
g) $x \in (-1; 1)$
h) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -2; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$

4. a) $A \cap B = (2; 3\rangle$,
$A \setminus B = (-2; 0) \cup (3; \infty)$
b) $A \cap B = (-4; -2\rangle \cup \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle \cup$
$\cup \langle 2; 4)$, $A \setminus B = (-2; -1) \cup (1; 2)$
c) $A \cap B = (-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2})$,
$A \setminus B = \left\langle \frac{1}{2}; \sqrt{2}\right\rangle$

5. a) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
b) $(-\infty; -3\rangle \cup \langle -\sqrt{3}; 0) \cup (1; \sqrt{3}\rangle$
c) $\langle \frac{1}{3}; 1)$

6. a) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$
b) $(-\infty; 1\rangle$

7. a) $m = -4$, $x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 2; \infty)$
b) $m = 0$, $x \in \{-2\} \cup \langle 1; \infty)$
c) $m = \frac{7}{3}$, $x \in (-\infty; -1\rangle$
d) $m = -2$ lub $m = 2$,
$x \in \langle -2; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

8. a) $\{0\} \cup \langle 4; 5\rangle$
b) $\langle 3; \infty)$
c) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle \cup \langle 2; \infty)$
d) $\langle -1; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$
e) $(2; 3\rangle \cup \langle 4; \infty)$
f) $(-2; -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}) \cup$
$\cup (\frac{\sqrt{6}}{3}; 2)$

9. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2) \cup (3; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$
c) $x \in \langle -1; 1\rangle \cup \{3\}$

10. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$
b) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \frac{2}{3}; \sqrt{2}\rangle$
c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$
d) $x \in \{0\} \cup \langle 1; 4\rangle$
e) $x \in (1; \infty)$
f) $x \in (-\infty; 3\rangle$
g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 3)$
h) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$

11. $\langle -2; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

2.15. Wielomiany – zastosowania

Ć 1. $x = 2$

2. a) $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$,
$D = (0; 15)$
b) 5 cm × 20 cm × 30 cm
c) nie jest

3. a) $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $D = (0; 6)$
b) kolejno: 128, 108, 64
c) $x \in (0; \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 4; 6)$
d) $x \in (0; 4 - 2\sqrt{3}\rangle \cup \langle 4; 6)$

$\boxed{Z}$ 1. a) $V(x) = -2x^3 + 10x^2$, $D = (0; 5)$
b) $x = 3$, $x = 1 + \sqrt{7}$

2. 4 dm $\times$ 8 dm $\times$ 4 dm

3. $V(x) = -4x^3 + 28x^2$, $D = (0; 7)$
a) kolejno: $6\frac{1}{2}$, 24, $49\frac{1}{2}$, 80, $112\frac{1}{2}$
b) 280 cm^2 lub $56(1 + \sqrt{11})$ cm^2

4. a) $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$, $D = (0; 5)$
b) $x \in (0; 3)$

5. większe od $110{,}125\pi$ cm^2

2.16. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $w(-1) = 6$, $w(-\frac{1}{2}) = 2$, $w(0) = 1$, $w(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, $w(1) = 2$, $w(\frac{3}{2}) = 1$, $w(2) = -3$, $x_0 \approx 1{,}75$
b) $w(1{,}6) = 0{,}488$, $w(1{,}7) = -0{,}156$, $w(1{,}8) = -0{,}944$, $x_0 \approx 1{,}65$

2. $x_0 \approx 1{,}45$

3. a) $w(3) = 4$ b) $w(2) = 21$

5. a) $6x^2 + 15x + 35$, reszta 114
b) $2x^2 - 10$, reszta 11
c) $x^3 - 4x^2 - 2x - 4$, reszta -16
d) $x^3 - 2x^2 - x + 1$, reszta -4

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $u(x) = -2x^2 + 3x - 1$, $\operatorname{st}(u) = 2$
b) $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 1$, $\operatorname{st}(u) = 5$

2. a) $w(x) = 3x^2(x-1)(x+1)$
b) $w(x) = 2x(x+1)^2$
c) $w(x) = x^4(x+1)(x+6)$
d) $w(x) = 5x(x-1)^2(x+1)^2$
e) $w(x) = -3x(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2$
f) $w(x) = 32x^2(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{2})^2$

3. a) $a = 4$, $b = 6$
b) $a = -2$, $b = -\frac{5}{6}$

4. a) $x = 0$
b) $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$
c) $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$
d) $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{5}$
e) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

5. a) $w(x) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)$, pierwiastki: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2
b) $w(x) = x(x+2)(x+1)(x-2)$, pierwiastki: -2, -1, 0, 2
c) $w(x) = 5(x+\sqrt{3})(x+\frac{1}{5})(x-\sqrt{3})$, pierwiastki: $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{5}$, $\sqrt{3}$
d) $w(x) = 5(x-\frac{3}{5})(25x^2+15x+9)$, pierwiastek: $\frac{3}{5}$
e) $w(x) = 27x(x+\frac{1}{6})(x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{36})$, pierwiastki: $-\frac{1}{6}$, 0
f) $w(x) = -14x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, pierwiastki: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. a) $x = 2$; 0
b) $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$; 1
c) $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$; 0
d) $x = -3$, $x = 1$, $x = 3$; 1
e) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{9}$, $x = \frac{1}{3}$; 3
f) $x = -1$, $x = 2$; 0
g) $x = -2$, $x = -\frac{1}{8}$; 1
h) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$; 2

7. a) $m = -\frac{5}{8}$ b) $m = \frac{11}{3}$
c) $m = -1$, $m = 3$

8. a) $x^2 + 3x + 10$, reszta 31
b) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}$, reszta $\frac{21}{16}$
c) $2x^3 + x^2 - 1$, reszta 5

9. a) $w(x) = (x+2)(x^2-2x+6) - 7$
b) $w(x) = (x+2)(x^2+1) - 1$
c) $w(x) = (x+2)(4x^3-x)$
d) $w(x) = (x+2)(x^2+x-11) + 20$

10. a) 7 b) 0 c) 0

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $x = 3$, $x = 4$, $w(x) = (x+2)(x-3)(x-4)$
b) $x = -1-\sqrt{2}$, $x = -1+\sqrt{2}$, $w(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x-4)$
c) nie ma więcej pierwiastków, $w(x) = 2(x-\frac{1}{2})(x^2+x+1)$
d) $x = -2-\sqrt{3}$, $x = -2+\sqrt{3}$, $w(x) = (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})(x-1)$
e) $x = -3$, $x = 2$, $w(x) = (x+3)(x-2)^2$

2. **a)** $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$
b) $x = 7$ **c)** $x = -3$
d) $x = 3$ **e)** $x = 5$
f) $x = -1$, $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{2}{3}$
g) $x = -2$ $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$
h) $x = -\sqrt{5}$, $x = -1$, $x = 2$, $x = \sqrt{5}$

3. **a)** $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$
c) $x = \frac{3}{2}$ **d)** $x = -\frac{1}{3}$

4. **a)** $a = 0$
b) $a = -3$, $a = 0$, $a = 3$

5. **a)** $a = 6$
b) $a = -8$

6. **a)** $a = -3$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = -1$

7. **a)** $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$
b) $x \in \langle -1; 1 \rangle$
c) $x \in \{-1\} \cup \langle 2; 5 \rangle$
d) $x \in (-\infty; 2\rangle \cup \{3\} \cup \langle 4; \infty)$
e) $x \in \langle -1; 7 \rangle$
f) $x \in \langle -5; 3 \rangle \cup \{6\}$

8. **a)** $x \in (-5; 0) \cup (4; \infty)$
b) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$
c) $x \in \mathbf{R}$
d) sprzeczna
e) $x \in (-4; \infty)$
f) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle \cup \langle 3; \infty)$
g) $x \in \langle -1; \infty)$
h) $x \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

9. **a)** 6 dm **b)** 14 dm

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** B **4.** D **5.** C **6.** A
7. A **8.** C **9.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 54

2. $a = 15$, $b = -21$

3. $x = -1$

4. -2

5. $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - 16x$, $D = (2; \infty)$,
$V(x) = 32$ dla $x = 2\sqrt{2}$

7. $x = -4$, $x = 1$

8. $(0, 0)$, $(-3, -3)$, $(3, 3)$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 314 $(S = \sqrt{3} + \sqrt{2})$

2. 441

3. 033 $(\frac{1}{3})$

4. $x \in \langle -2 - \sqrt{3}; -1 \rangle \cup \langle -2 + \sqrt{3}; 1 \rangle$

5. $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $k = 2$

6. $m = 10$, $n = 4$

8. $V(x) = x^4 - 18x^2 + 81$,
$D = (-3; 3) \cup (3; \infty)$,
$V(x) \leqslant 256$ dla $x \in (-3; 3) \cup (3; 5\rangle$

9. $x = 1$

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Ć **1.** **a)** $A(\frac{1}{2}, 8)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(4, 1)$, $E(8, \frac{1}{2})$

3. **a)** $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $g(-2) = -1$, $h(-2) = -2$, $k(-2) = -3$
b) niebieski – f, zielony – g, czerwony – h, brązowy – k
c) A – k, B – g, C – f, D – g, E – h

Z **1.** **a)** najmniejsza: 3, największa: 6
b) najmniejsza: -4, największa: -2
c) najmniejsza: $\frac{1}{4}$, największa: $\frac{1}{2}$
d) najmniejsza: -5, największa: $-\frac{5}{2}$

2. **a)** $f(D) = \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$
b) $f(D) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) $f(D) = \langle -2; 0) \cup (0; 4\rangle$

3. **a)** $a = -8$, $f(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
b) $a = -16$, $f(-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
c) $a = -14$, $f(-2\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
d) $a = \frac{1}{4}$, $f(-2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$

4. **a)** $a = -3$, $P(1, -3)$,
$f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
b) $a = -6$, $P(2, -3)$,
$f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

5. **a)** $a = 2$, najmniejsza: -2, największa: 1
b) $a = -4$, najmniejsza: -2, największa: 4
c) $a = -6$, najmniejsza: -3, największa: 6

6. $2\sqrt{5}$

7. **a)** $a = 4$ **b)** $a = 8$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

Ć **1.** a) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = 3$
b) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = -1$
c) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = -3$
d) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
e) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = 1$
f) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = -4$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, asymptoty: $x = 4$, $y = 0$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 1$, $y = 0$,
rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$,
rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$, $P(0, -1)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
asymptoty: $x = -2$, $y = 0$, $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
asymptoty: $x = -4$, $y = 0$, $P(0, 1)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$, $P\left(0, -\frac{2}{3}\right)$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = -2$, $y = -3$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 2$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 3$

5. a) $[4, -6]$ b) $[-2, 2]$ c) $[2, -3]$ d) $[3, 1]$

6. a) $[3, -8]$ b) $\left[1, \frac{7}{6}\right]$

7. $g(x) = \frac{a}{x-p} + q$, asymptoty: $x = p$, $y = q$

Z **1.** a) $g(x) = \frac{1}{x} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
asymptoty: $x = 0$, $y = -3$
b) $g(x) = \frac{4}{x+3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
c) $g(x) = -\frac{2}{x} + 2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

2. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = -12$,
$f(-4) = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = 8$, $f(-4) = \frac{1}{3}$

3. a) $g(x) = \frac{1}{x-1} + 4$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{4\}$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 4$
b) $g(x) = \frac{2}{x+2} - 1$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
asymptoty: $x = -2$, $y = -1$
c) $g(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 3$
d) $g(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
asymptoty: $x = 2$, $y = -4$

4. a) 6 b) 4 c) 2 d) 4

5. a) $y = \frac{2}{x+1} + 2$ b) $y = \frac{3}{2(x-3)} - 1$
c) $y = -\frac{1}{3(x-2)} + 1$ d) $y = -\frac{4}{3(x+1)} - 2$

6. a) $g(x) = \frac{4}{x-2} - 9$ b) $g(x) = \frac{2}{3(x-\frac{1}{2})} + 5$
c) $g(x) = \frac{5}{4(x-3)} - \frac{3}{4}$
d) $g(x) = \frac{3\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - 6$

7. a) $y = x - 6$, $y = -x - 6$, $S(0, -6)$
b) $y = x - 3$, $y = -x + 5$, $S(4, 1)$
c) $y = x + 4$, $y = -x + 2$, $S(-1, 3)$
d) $y = x + 1$, $y = -x + 15$, $S(7, 8)$

8. $y = x - p + q$, $y = -x + p + q$, $S(p, q)$

3.3. Funkcja homograficzna

Ć **1.** a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
b) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$
c) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

2. a) $f(x) = -\frac{1}{x+4} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$
b) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$
c) $f(x) = -\frac{2}{x+3} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

3. a) 1 b) -1 c) 2

4. **a)** $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$, $x = -1$, $y = -2$
b) $f(x) = \frac{-1}{x+3} + 2$, $x = -3$, $y = 2$
c) $f(x) = \frac{2}{x+4} - 3$, $x = -4$, $y = -3$

Z **1.** **a)** $f(x) = \frac{2}{x+3} + 2$, $x = -3$, $y = 2$
b) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 3$, $x = 3$, $y = -3$
c) $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 4$, $x = -2$, $y = 4$
d) $f(x) = \frac{-5}{x-4} - 2$, $x = 4$, $y = -2$
e) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{1}{2}$, $x = -3$, $y = \frac{1}{2}$
f) $f(x) = \frac{-1}{x+\frac{1}{2}} + 2$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$

2. **a)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$

3. **a)** $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (4; 5)$
b) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -2)$
c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 0)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

4. **a)** maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
b) rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
e) rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
f) maleje w $(-\infty; \frac{1}{2})$ i w $(\frac{1}{2}; \infty)$

5. **a)** $m = 28$, $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$
b) $m = \frac{1}{4}$, $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$

6. np.: **a)** $f(x) = \frac{1}{x} + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x} - 5$
c) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 4$
d) $f(x) = \frac{1}{x+7}$
e) $f(x) = \frac{1}{x-7} - 3$
f) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

7. **a)** $x = -2$, $y = -2$ **b)** $x = 8$, $y = 20$

8. **a)** $(-2, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 7)$, $(8, 3)$
b) $(-6, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, 1)$, $(-1, -7)$, $(0, -5)$, $(2, -4)$ **c)** $(-8, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, -1)$, $(1, -2)$, $(2, -4)$, $(3, -10)$, $(5, 14)$, $(6, 8)$, $(7, 6)$, $(8, 5)$, $(10, 4)$, $(16, 3)$

9. **a)** dla $c = -2$ stała,
dla $c = 0$ liniowa, ale nie stała,
dla $c \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$ homograficzna
b) dla $c = 8$ stała,
dla $c \neq 8$ homograficzna
c) dla $c = 0$ liniowa, ale nie stała,
dla $c \neq 0$ homograficzna

10. **a)**, **b)**, **c)** funkcja nie jest homograficzna

11. **a)** $f(x) = \frac{-3}{x+3} + 4$
b) $f(x) = \frac{-6}{x+3} + \frac{1}{3}$
c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{6}$

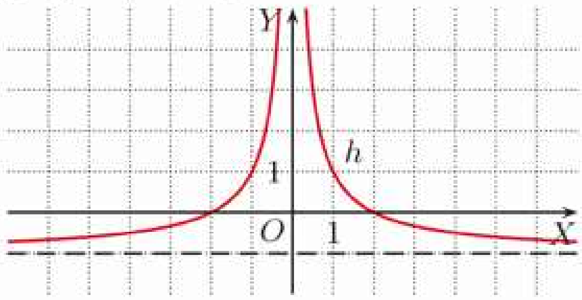
12. **a)** $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
b) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, $D_f = (2; \infty)$

Hiperbola

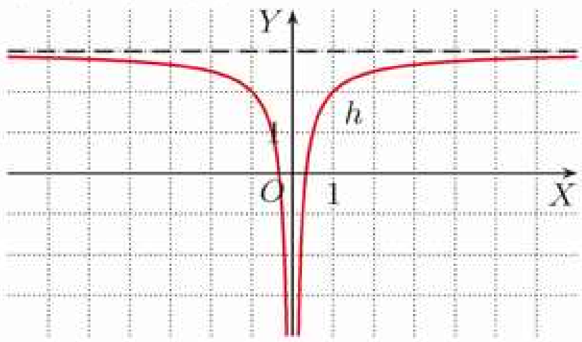
1. **a)** $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $y = -\frac{2}{3}x$, $y = \frac{2}{3}x$,
hiperbola sprzężona: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
b) $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $y = -\frac{5}{4}x$, $y = \frac{5}{4}x$,
hiperbola sprzężona: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$
c) $(0, -4)$, $(0, 4)$, $y = -2x$, $y = 2x$,
hiperbola sprzężona: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$
d) $(0, -3)$, $(0, 3)$, $y = -3x$, $y = 3x$,
hiperbola sprzężona: $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

3.4. Przekształcenia wykresu funkcji

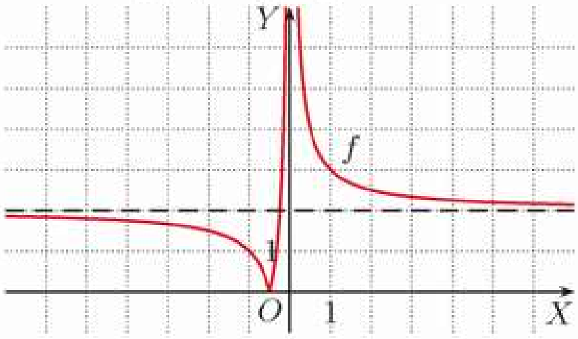
Ć **1.** **a)** $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(D_g) = (0; \infty)$,
$h(D_h) = (-1; \infty)$



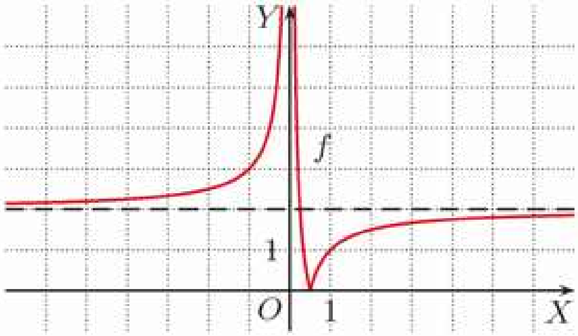
b) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$f(D_f) = (0; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 0)$,
$h(D_h) = (-\infty; 3)$



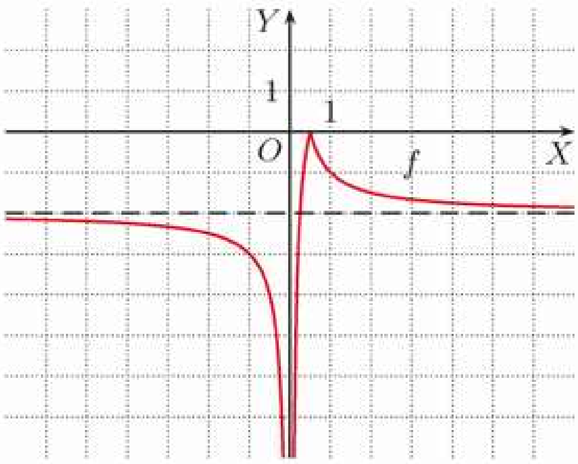
2. **a)** 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 dla $m \in \{0, 2\}$,
2 dla $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$



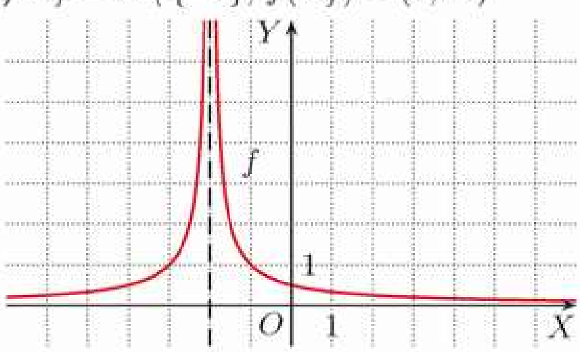
b) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 dla $m \in \{0, 2\}$,
2 dla $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$



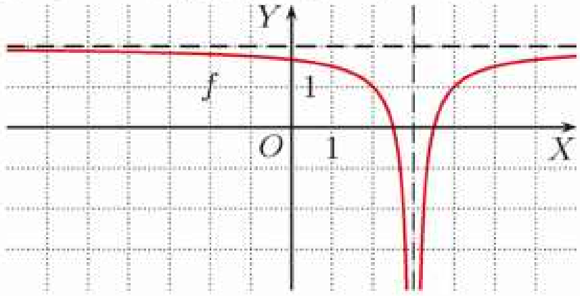
c) 0 dla $m \in (0; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2, 0\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$



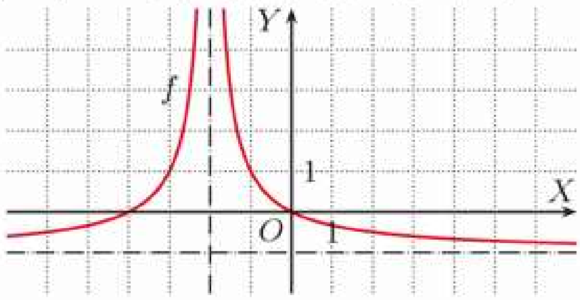
3. **a)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D_f) = (0; \infty)$



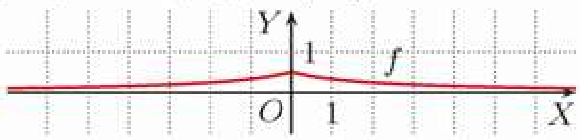
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(D_f) = (-\infty; 2)$



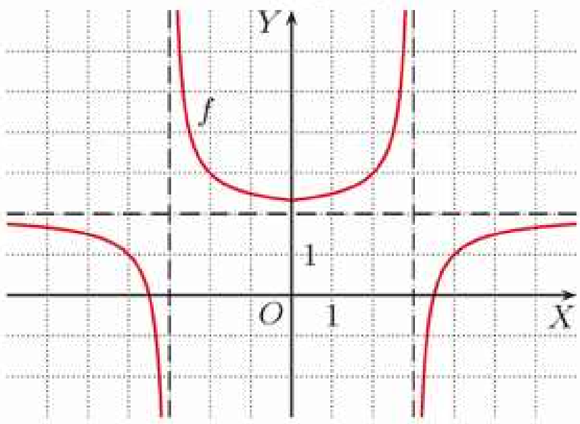
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D_f) = (-1; \infty)$



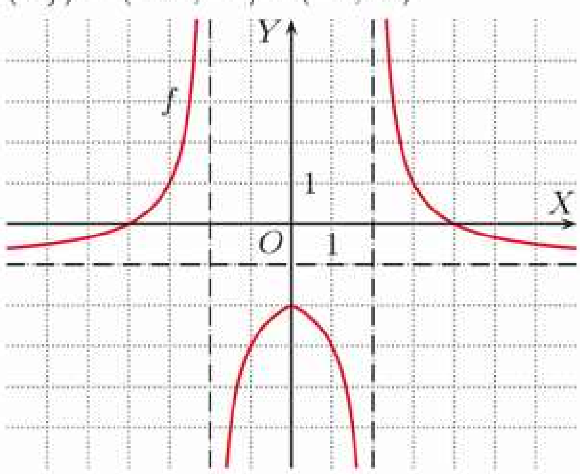
4. **a)** $D_f = \mathbf{R}$, $f(D_f) = \left(0; \frac{1}{2}\right\rangle$



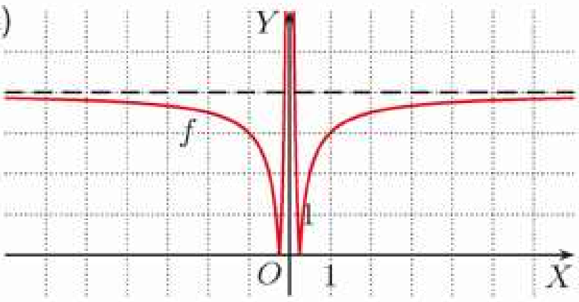
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$,
$f(D_f) = (-\infty; 2) \cup \left\langle 2\frac{1}{3}; \infty\right)$



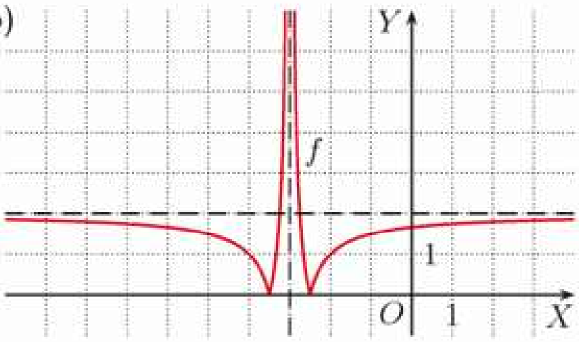
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,
$f(D_f) = (-\infty; -2\rangle \cup (-1; \infty)$



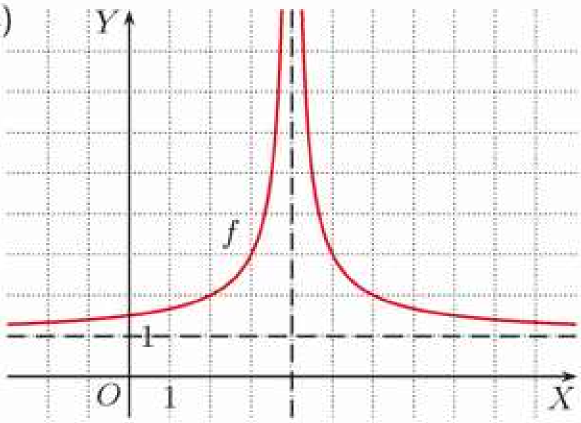
5. a)



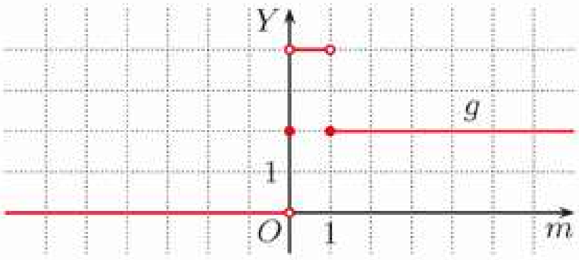
b)



c)



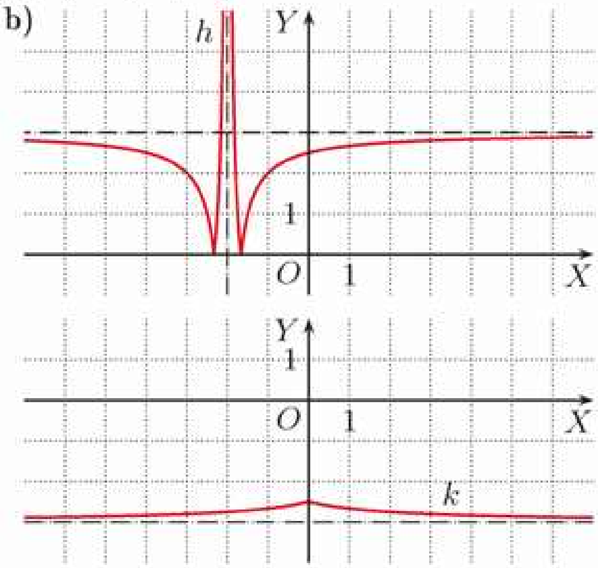
6.



Z **1.** **a)**, **b)**, **c)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \langle 0; \infty)$
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = (-\infty; 0)$
e) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = (-3; \infty)$
f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = (-\infty; 2)$

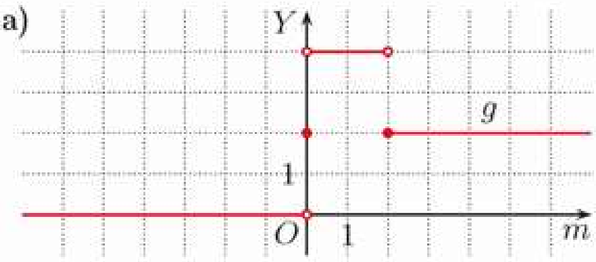
2. **a)** rośnie w $(-\infty; -2)$,
maleje w $(-2; \infty)$
b) rośnie w $(3; \infty)$, maleje w $(-\infty; 3)$
c) rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $\langle 1; \infty)$,
maleje w $(-3; 1\rangle$
d) rośnie w $\langle -1; 1)$,
maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $(1; \infty)$
e) rośnie w $(1; \infty)$, maleje w $(-\infty; 1)$
f) rośnie w $(-\infty; 3)$, maleje w $(3; \infty)$

3. **a)** $g(x) = \frac{1}{|x+2|} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
$g(D) = (-3; \infty)$
b)

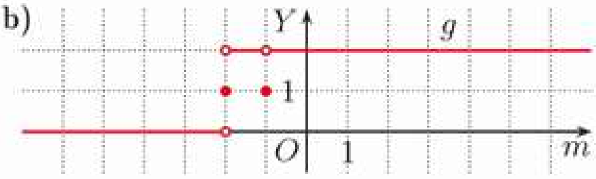


4. **a)** $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$ **b)** $m \in (0; 2)$
c) $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

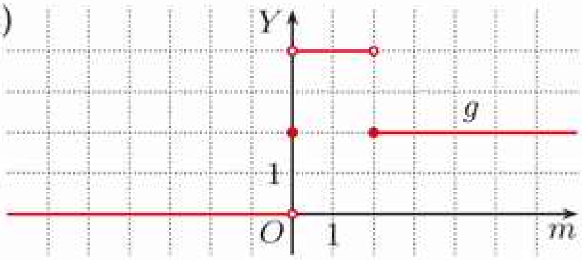
5. **a)**



b)



c)



6. 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
1 dla $m \in \{-1, 0, 1\}$,
2 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

7. **a)** 0 dla $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup (\sqrt{2}; \infty)$,
1 dla $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,
2 dla $m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$
b) 0 dla $m \in \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle$,
2 dla $m \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$,
3 dla $m \in \{-2, 2\}$,
4 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) 3 dla $m = 0$, 4 dla $m \neq 0$

3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Ć **1.** a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{3}{4}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$, $\frac{4}{21}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{5}{4}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$, -4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}$, $-7{,}5$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$, $-\frac{1}{3}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, 1
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$, $-\frac{1}{2}$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $-x-3$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $3x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{2x}{x-5}$
d) $D = \mathbf{R}$, x
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{x+1}{x^3}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $-\frac{x+2}{x}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x^2}{x-3}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, 4
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $-\frac{2}{x}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $-\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$, $-\frac{x+3}{6(x-2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$, $-\frac{x+1}{2(x-1)}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, 8
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $-\frac{3}{2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $\frac{4}{3}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, 4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-7\}$, $-\frac{1}{25}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $\frac{10}{9}$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $8x$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$, $(x-2)(x-1)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x-3}{3x(x+3)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 5\}$, $-\frac{x^2+5x+25}{x+1}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, x^2+1
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$, $\frac{x+3}{x}$

Z **1.** a) tak b), c) nie

2. a) 0 b) 0, 2 c) −2, 3 d) −1, 0, 2

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x^3 - 7x$, 6
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $2(x+1)$, $-1 \notin D$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $-1 \notin D$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{x+2}{x-2}$, $-\frac{1}{3}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x}{x+3}$, $-\frac{1}{2}$
f) $D = \mathbf{R}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, 0
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{(x^2+1)(x+1)}{x-1}$, 0
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}$, $\frac{2(x+3)}{x+2}$, 4

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, wartości kolejno: 1, -5
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,
wartości kolejno: -10, 1
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$, wartości kolejno: $\frac{16}{3}$, 0
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\}$,
wartości kolejno: $-\frac{1}{5}$, -1

5. a) $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$,
wartości kolejno: $\frac{3}{5}$, -1, 3
b) $D = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup$
$\cup (\sqrt{3}; \infty)$, wartości kolejno: 5, -11, 5
c) $D = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$,
wartości kolejno: $-\frac{1}{14}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$
d) $D = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$,
wartości kolejno: $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$

6. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, $-\frac{3}{2}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $-\frac{2}{5}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0\}$, $\frac{1}{2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\frac{1}{4}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{3}{4}$ f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, -1

7. a) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{0, 9\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$,
$D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
b) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$,
$D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
c) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$,
$D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
d) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$,
$D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$

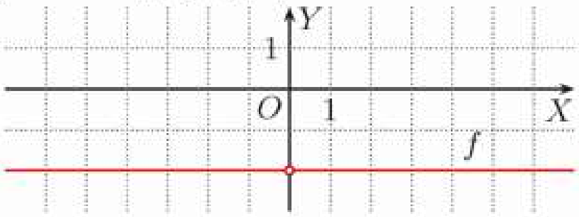
8. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{3}{2x}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}$, -3
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $-\frac{3}{x^2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$, $\frac{x+1}{2(x-1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, $\frac{(x-2)(x-3)}{x}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $-\frac{x^2}{3}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $-\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
i) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $x+3$

9. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$, $\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$, $-x^2 + 5x - 4$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x+2}{x-1}$

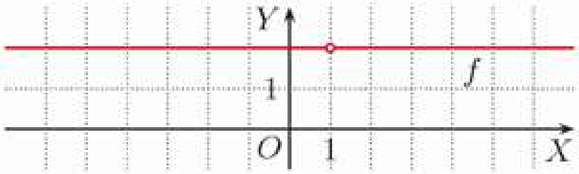
10. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{9}{2}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $-\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}$, $\frac{2}{x}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$, $-\frac{2}{x-1}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$, $-\frac{x^2}{4}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

11. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$, $(x+1)(x+3)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}$, $-\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$, $\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

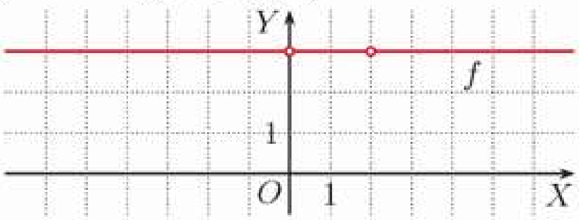
12. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = -2$



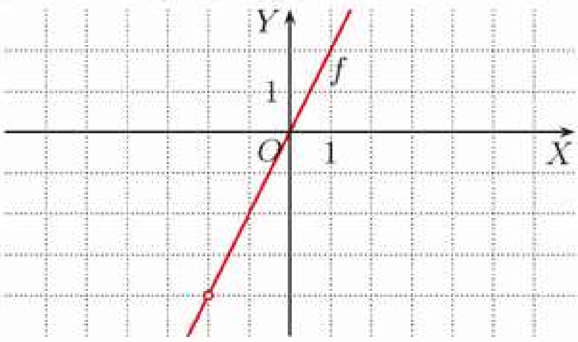
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = 2$



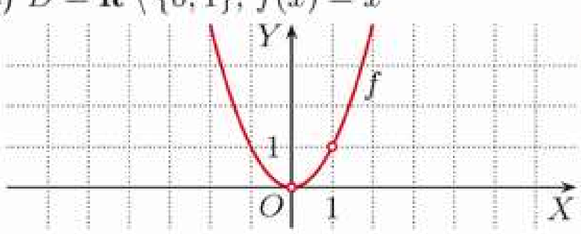
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $f(x) = 3$



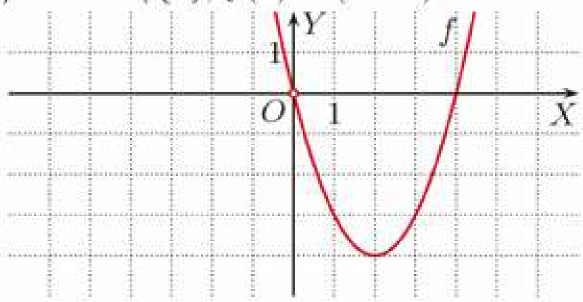
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = 2x$



e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$



f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = (x-2)^2 - 4$



13. $\frac{3}{x+2}$

14. kolejno w wierszach: $\frac{1}{x^2+1}$, gdzie $x > -1$; $\frac{6}{x^2+4}$, gdzie $x > -2$; $\frac{x^2+2}{x+3}$, gdzie $x > 3$

15. **a)** $x \neq -y$, $x \neq y$, x
b) $x \neq -\frac{1}{2}y$, $x \neq -\frac{1}{3}y$, $x \neq \frac{1}{3}y$, $\frac{4x}{3x-y}$
c) $x \neq -\frac{1}{2}y$, $\frac{3}{x^2+y^2}$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Ć **1.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{6x-6}{x^2-9}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, $\frac{2x^2-3x-10}{x(x+2)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 1\}$, $\frac{2x^2+2x-19}{(x+4)(x-1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{x^2-4x+12}{x^2-9}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{4}{x^2-1}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$

2. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, $\frac{6}{x(x+3)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{12-3x}{x-2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$, $-\frac{4x+1}{(x+4)(x+1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 4\}$, $-\frac{6x^2}{(x-4)(x+2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $-\frac{8x+24}{(x-4)(x+4)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $-\frac{5x+2}{x(x+1)}$

3. **a)** nie **b)** tak

4. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$, $-\frac{2(x^2+12)}{x(x^2-16)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{8x}{(x-1)^2(x+1)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $-\frac{7}{x(x-3)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 0, 5\}$, $\frac{x-11}{x^2-25}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{2(x^2-x-1)}{x(x-1)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, $\frac{4x+3}{x(4x^2-1)}$

Z **1.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 4\}$, $\frac{-x+10}{(x-1)(x-4)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{12x^2-13x-11}{2(x^2-1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{5x^2-7x+4}{2x(x-2)}$

1. **e)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,\frac{1}{3}\}$, $\frac{-14x+10}{(x+5)(3x-1)}$

f) $D=\mathbf{R}\setminus\{-6,6\}$, $\frac{28x-12}{36-x^2}$

2. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, $\frac{x^2-3x-12}{x^2-1}$

b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$, $\frac{8}{x^2-4}$

c) $D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\frac{1-3x}{(x-1)^2}$

d) $D=\mathbf{R}\setminus\{-2\}$, $\frac{-2x^2-3x}{(x+2)^2}$

e) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $\frac{2}{x^2(x+1)}$

f) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $\frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}$

3. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$, $\frac{2x}{x^2-4}$

b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-6,0\}$, $\frac{3x^2+3x+2}{2x(x+6)}$

c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\}$, $\frac{-x^2+13x+24}{4x^2-9}$

d) $D=\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$, $\frac{5x^2-7x-5}{(3x-1)^2}$

4. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{3\}$, $\frac{-x^2+15x-18}{2(x-3)^2}$, -1

b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$, $\frac{x^2+13x-18}{2(x^2-16)}$, $\frac{24}{7}$

5. $R_2=\frac{R_1R_c}{R_1-R_c}$, $R_c=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

6. **a)** $l=\frac{P-\pi r^2}{\pi r}$ **b)** $b=\frac{2P}{h}-a$

c) $h=\frac{3V}{\pi r^2}$ **d)** $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

e) $R=\frac{mg-F}{m\omega^2}$ **f)** $m=\frac{F}{g-\omega^2R}$

g) $m=\frac{WrR}{GM(R-r)}$

h) $r=\frac{RGMm}{WR+GMm}$

8. około 10,59 cm

3.7. Równania wymierne

Ć **1.** **a)** $x=3$ **b)** $x=-4$ **c)** $x=-4$

d) $x=-2$ **e)** $x=4$ **f)** sprzeczne

2. **a)** $x=-3$ **b)** sprzeczne **c)** $x=-1$

d) $x=4$ **e)** $x=\frac{1}{2}$ **f)** $x=-\frac{1}{2}$

3. **a)** $x=1$ **b)** $x=2$

c) $x=2$ **d)** $x=-\frac{7}{5}$

4. **a)** $x=-1$, $x=1$ **b)** $x=-3$

c) $x=-4$, $x=4$ **d)** $x=-6$

5. **a)** $x=-1$ **b)** $x=3$

c) $x=-6$, $x=1$ **d)** $x=-3$, $x=1$

e) $x=-\frac{1}{2}$, $x=3$ **f)** $x=-3$, $x=1$

g) $x=-4$, $x=0$ **h)** $x=-3$

6. **a)** $x=-8$ **b)** $x=-\frac{1}{4}$

c) $x=4$ **d)** $x=-3$

Z **1.** **a)** $x=-8$ **b)** $x=8$ **c)** $x=2$ **d)** $x=0$

e) $x=-1$ **f)** $x=1$, $x=2$

2. **a)** $x=-5$, $x=3$ **b)** $x=3$ **c)** $x=-3$

d) $x=3$ **e)** $x=1$

f) brak pierwiastków całkowitych

3. **a)** $x=-5{,}5$ **b)** $x=-6$ **c)** $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$

d) $x=-\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=2$, $x=3$ **f)** $x=-8$

4. nie ma rozwiązania: I; mają nieskończenie wiele rozwiązań: II, III, IV

5. **a)** 1 **b)** 0 **c)** nieskończenie wiele **d)** 2

e) nieskończenie wiele **f)** 1

6. **a)** $x=0$, $x=5$ **b)** $x=-2$, $x=4$

c) $x=3$ **d)** $x=-3$ **e)** $x=0$

f) $x=-3$, $x=0$

g) $x=-2$, $x=-1$ **h)** $x=4$

i) $x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=0$

7. **a)** $x=0$, $x=\frac{1}{2}$

b) $x=\frac{-3-\sqrt{39}}{10}$, $x=\frac{-3+\sqrt{39}}{10}$

c) sprzeczne **d)** $x=0$, $x=7$ **e)** $x=2$

f) $x=\frac{2}{7}$ **g)** $x=-12$ **h)** $x=-1$

8. **a)** $P_1(-1,0)$, $P_2(3,4)$

b) $P_1(-1,0)$, $P_2(2,6)$

c) $P_1(-1,0)$, $P_2(5,3)$

9. **a)** $A(-2,-2)$, $B(2,-2)$, $C(2,2)$, $D(-2,2)$, $P=16$

b) $A(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $D(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $P=12$

10. **a)** $x=-3$, $y=-1$ lub $x=1$, $y=3$

b) $x=-2$, $y=1$ lub $x=3$, $y=-4$

c) $x=-4$, $y=-3$ lub $x=-2$, $y=1$

11. $P_1(-1,-2)$, $P_2(1,2)$, $P_3(2,1)$

12. **a)** $x=-3$, $y=3$ lub $x=-1$, $y=-1$ lub $x=0$, $y=0$

b) $x=-3$, $y=3$ lub $x=3$, $y=3$ lub $x=-1$, $y=1$ lub $x=1$, $y=1$

3.8. Nierówności wymierne

Ć **1.** **a)** $x\in(0;2)$ **b)** $x\in\langle-2;0)$

c) $x\in\left\langle-\frac{3}{4};0\right)$ **d)** $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{8}\right)\cup(0;\infty)$

2. **a)** $f(x)>2$ dla $x\in(0;1)$, $f(x)\geqslant-2$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle\cup(0;\infty)$

b) $f(x)>2$ dla $x\in(-3;0)$, $f(x)\geqslant-2$ dla $x\in(-\infty;0)\cup\langle3;\infty)$

2. **c)** $f(x) > 2$ dla $x \in (5;\infty)$,
$f(x) \geqslant -2$ dla $x \in (-\infty;4\rangle \cup (5;\infty)$

3. **a)** $x \in (2;5\rangle$ **b)** $x \in (4;19)$
c) $x \in \left(-\infty;3\frac{1}{3}\right) \cup (4;\infty)$
d) $x \in (-\infty;2) \cup \langle 3;\infty)$
e) $x \in \left\langle -\frac{1}{3};0\right)$
f) $x \in (-\infty;-1)$
g) $x \in (-\infty;-4) \cup (-3;\infty)$
h) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \langle 5;\infty)$

4. **a)** $x \in (-\infty;1) \cup \left\langle \frac{9}{7};3\right)$
b) $x \in (-\infty;-4) \cup \left(-\frac{12}{5};-2\right)$
c) $x \in \left\langle -\frac{3}{2};2\right) \cup (2;3\rangle$
d) $x \in (-1;1-\sqrt{2}\rangle \cup (1;1+\sqrt{2}\rangle$
e) $x \in \left(-3;-\frac{9}{4}\right\rangle \cup (-2;0) \cup \langle 4;\infty)$
f) $x \in (-\infty;-1-\sqrt{2}) \cup (-1;0) \cup$
$\cup (-1+\sqrt{2};1)$

Z **1.** **a)** $x \in (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$
b) $x \in (-7;3)$
c) $x \in (-\infty;-7) \cup \left(-\frac{19}{3};\infty\right)$
d) $x \in \left(-\infty;\frac{9}{7}\right\rangle \cup \left(\frac{5}{2};\infty\right)$
e) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\rangle \cup (0;\infty)$
f) $x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (2;\infty)$
g) $x \in (-\infty;5) \cup \langle 10;\infty)$
h) $x \in \left(-\frac{5}{2};-\frac{13}{9}\right\rangle$

2. **a)** $x \in \left\langle -\frac{3}{2};\infty\right)$
b) $x \in (-\infty;-1\rangle \cup (0;\infty)$
c) $x \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ **d)** $x \in (0;\infty)$
e) $x \in (-3;-1)$ **f)** sprzeczny

3. **a)** $x \in (-\infty;0\rangle \cup (1;3\rangle$
b) $x \in \langle 0;1) \cup \langle 2;\infty)$

4. **a)** $x \in (-\infty;-6\rangle \cup (-2;-1\rangle$
b) $x \in (-1;0\rangle \cup \langle 1;\infty)$
c) $x \in (-\infty;2\rangle \cup (3;4\rangle$

5. **a)** $x \in (-2;-1\rangle \cup (0;1\rangle$
b) $x \in (-\infty;0) \cup (1;2) \cup (3;\infty)$

6. **a)** $x \in (0;1\rangle$ **b)** $x \in (0;1\rangle \cup \langle 3;4\rangle$

7. **a)** $x \in (3;4) \cup \langle 5;\infty)$
b) $x \in (-\infty;-5\rangle \cup \left(-\frac{7}{2};-3\right\rangle \cup (-2;\infty)$
c) $x \in (-1;0) \cup (2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})$
d) $x \in \left(-2;-\frac{1}{11}\right) \cup (1;\infty)$
e) $x \in \left\langle -2;\frac{1}{2}\right\rangle \cup (1;\infty)$
f) $x \in \left\langle -3-\frac{3}{2}\sqrt{2};-\frac{3}{2}\right) \cup \left\langle -3+\frac{3}{2}\sqrt{2};3\right)$

8. **a)** $A \cup B = (-\infty;-3\rangle \cup (-2;\infty)$,
$A \cap B = (-1;2)$, $A \setminus B = (-2;-1\rangle$
b) $A \cup B = (-\infty;2) \cup (3;5\rangle$,
$A \cap B = (-\infty;1)$, $A \setminus B = \emptyset$
c) $A \cup B = (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{10}\right\rangle \cup$
$\cup \langle 0;\infty)$, $A \cap B = \left(\frac{5}{2};\infty\right)$,
$A \setminus B = (-\infty;-1) \cup \left\langle 0;\frac{5}{2}\right\rangle$

9. **a)** $x \in (-\infty;-1) \cup (2;\infty)$
b) $x \in \left\langle -\frac{1}{2};0\right)$
c) $x \in \{0\} \cup (3;\infty)$
d) $x \in (-\infty;-4) \cup \langle 1;4) \cup \langle 5;\infty)$
e) $x \in (-\infty;-5\rangle \cup (-4;0) \cup (0;4)$
f) $x \in \left(-2;-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup (-1;0) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2};\infty\right)$
g) $x \in \left(-\infty;-\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2};-2\right) \cup (0;\infty)$
h) $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$
i) $x \in (-2;0\rangle \cup (2;3\rangle$

10. **a)** $x \in (-\infty;-3) \cup \left\langle -\frac{5}{2};-2\right)$
b) $x \in \left(-2;\frac{22}{7}\right) \cup (4;\infty)$
c) $x \in (-\infty;2-2\sqrt{2}\rangle \cup \left(-\frac{1}{2};3\right) \cup$
$\cup \langle 2+2\sqrt{2};\infty)$
d) $x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$
e) $x \in \left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{17}}{12}\right\rangle \cup \left(-\frac{1}{3};\frac{-3+\sqrt{17}}{12}\right\rangle \cup$
$\cup \left(\frac{1}{3};\infty\right)$
f) $x \in (-\infty;1) \cup \left\langle \frac{3}{2};\infty\right)$
g) $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;-1) \cup (0;\infty)$
h) $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$

11. **a)** $x \in (-\infty;0\rangle \cup \langle 1;2) \cup \langle 4;\infty)$
b) $x \in (-\infty;-7\rangle \cup \langle -5;-4) \cup \langle -1;\infty)$
c) $x \in \langle 1;2\rangle \cup (3;4\rangle$
d) $x \in (-\infty;-5\rangle \cup \langle -3;-2) \cup \langle 0;\infty)$

3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

Ć **1.** **a)** $\langle 8;\infty)$ **b)** $(-\infty;3\rangle$
c) $(-\infty;0\rangle$ **d)** $(0;\infty)$
e) $(2;\infty)$ **f)** $(-2;\infty)$
g) $(1;6\rangle$ **h)** $\langle -6;0) \cup (0;3)$
i) $(-2;2) \cup (2;4\rangle$

2. **a)** $D = (-2;2) \cup (2;\infty)$, nie ma
b) $D = (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};0\rangle$, $f(0) = 0$
c) $D = (-2;1\rangle$, $f(1) = 0$
d) $D = (3;\infty)$, nie ma
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nie ma
f) $D = \{1\}$, $f(1) = 0$

3. **a)** $D = \mathbf{R}$, $f(-4) = f(4) = 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$,
nie ma miejsc zerowych
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $f(0) = 0$

4. **a)** $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
b) $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$
c) $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, 0\}$
d) $\mathbf{R}$ **e)** $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$
f) $\mathbf{R} \setminus \{-3 - \sqrt{15}, -1, -3 + \sqrt{15}\}$

5. **a)**, **c)**, **d)** nie **b)** tak

6. **a)** $f(x) + g(x) = \frac{x-12}{x(x-4)}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$
b) $f(x) + g(x) = \frac{4x-1}{4x^2-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

7. **a)** $f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{2(x+1)}$,
$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$;
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x+2)^2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$
b) $f(x) \cdot g(x) = \frac{2(2x-1)^2}{(x-2)(x+2)^2}$,
$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$;
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{x-2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$
c) $f(x) \cdot g(x) = (2x-1)(x-3)$,
$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}\}$;
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{(x-3)(x+3)^2}$,
$D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}, 3\}$
d) $f(x) \cdot g(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-4x+5)}{x^3(x+1)}$,
$D_{f \cdot g} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$;
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x(x^2-4x+5)}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$

Z **1.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $x = 1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, nie ma miejsc zerowych
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $x = -1$, $x = \frac{1}{4}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $x = 5$

2. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, $h(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$,
$h(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-1; \frac{1}{2}\rangle \cup (2; \infty)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1\}$,
$h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{5}$,
$h(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -\frac{3}{5}\rangle \cup (-\frac{1}{3}; 1)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$, nie ma miejsc zerowych,
$h(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $h(x) = 0$ dla $x = 1$,
$h(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-2; 1\rangle \cup (2; \infty)$

3. **a)** $f(x) > g(x)$ dla $x \in (1; 2)$
$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle 0; 1) \cup (1; 2)$
b) $f(x) > g(x)$ dla $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$
$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle \frac{3}{2}; 2) \cup (4; \frac{9}{2}\rangle$

4. **a)** np. $y = \frac{-18}{x-3}$ **b)** np. $y = \frac{-12}{(x+2)(x-1)}$
c) np. $y = \frac{-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5. **a)** $k \in (-2; 2)$ **b)** $k \in (0; 4)$ **c)** $k \in \langle 0; 4)$

6. **a)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
f rośnie w $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; \infty)$,
f maleje w $\langle -2; -1)$ i w $(-1; 0\rangle$,
$f(x) < -3$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$,
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$,
g rośnie w: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; \infty)$,
$g(x) < -3$ dla $x \in (-3; 0) \cup (1; \infty)$
b) liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 dla $m \in (-3; 1)$,
1 dla $m \in \{-3, 1\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$;
liczba rozwiązań równania $g(x) = m$:
1 dla $m = -3$,
2 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

7. **a)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$,
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{x+2}{x}$,
$D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $h(x) = \frac{x+2}{x}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$ **c)** $x \in (-\infty; -2\rangle$

8. **a)** 0 dla $m \in (1; 4\rangle$,
1 dla $m = 1$,
2 dla $m \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$
b) 0 dla $m \in \langle -4; -1) \cup (1; 4\rangle$,
1 dla $m \in \{-1, 1\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

Ć **1.** **a)** $x = \frac{1}{5}$, $x = 1$ **b)** $x = -1$, $x = -\frac{1}{9}$
c) $x = -15$, $x = 3$ **d)** $x = \frac{25}{7}$ lub $x = 5$

2. **a)** $x = 0$, $x = 6$ **b)** $x = 1$, $x = 3$
c) $x = -1$, $x = 0$ **d)** $x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$

3. **a)** $x \in \langle 1; \frac{7}{3}\rangle$ **b)** $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
c) $x \in (-6; 2)$ **d)** $x \in (-\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$
e) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)$
f) $x \in \langle -18; 24\rangle$ **g)** $x \in \langle -2; 10\rangle$
h) $x \in (-\infty; -\frac{25}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

Z **1.** **a)** $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$ **b)** $x=1$, $x=2$
c) $x=-5$, $x=\frac{5}{3}$ **d)** $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{15}{2}$
e) $x=-\frac{5}{4}$ **f)** $x=2$, $x=10$
g) $x=-2$, $x=2$
h) $x=-2$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=2$

2. **a)** $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{11}{2}$ **b)** $x=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$
c) $x=4$, $x=8$ **d)** $x=1$, $x=3$

3. **a)** $x\in\left(-\frac{9}{5};1\right)$ **b)** $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
c) $x\in\langle-9;-3\rangle$
d) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\infty\right)$
e) $x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle12;\infty)$
f) $x\in\left(-\infty;\frac{1}{24}\right)\cup\left(\frac{1}{8};\infty\right)$
g) $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **h)** $x=\frac{1}{4}$

4. **a)** $x\in\langle-3;-2\rangle\cup\langle1;2\rangle$
b) $x\in\langle-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\rangle\cup\langle2;3\rangle$
c) $x\in\langle-2;-\frac{1}{3}\rangle\cup\langle\frac{1}{3};2\rangle$ **d)** $x\in\langle-1;1\rangle$

5. **a)** $x\in(0;6)$
b) $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};\infty\right)$
c) $x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle5;\infty)$
d) $x\in\langle-2;0\rangle$ **e)** $x\in\left\langle\frac{8}{3};\frac{16}{3}\right\rangle$ **f)** $x\in\mathbf{R}$

6. **a)** $x\in\langle2;8\rangle$ **b)** $x\in(-\infty;-7)\cup(3;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-\frac{13}{3}\rangle\cup\langle-\frac{11}{3};\infty)$
d) $x\in(-\infty;-4)\cup(6;\infty)$

3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

Ć **1.** **a)** $x=-1$ **b)** $x=1{,}5$ **c)** $x=5$
d) $x=2$ **e)** $x\in\langle-2;\infty)$ **f)** $x=0$

2. **a)** $x\in(-\infty;\frac{1}{4})$ **b)** $x\in\langle-9;-1\rangle$
c) $x\in(0;\infty)$ **d)** $x\in(-\infty;0\rangle$
e) $x\in\langle\frac{9}{4};\frac{9}{2}\rangle$ **f)** $x\in\mathbf{R}$

3. **a)** $x=-1$, $x=4$ **b)** $x\in\langle2;\infty)$
c) $x\in\langle2;\infty)$ **d)** $x\in\langle0;\infty)$

4. **a)** $x\in(-1;3)$ **b)** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{2};\infty\right)$
c) $x\in\langle-4;0\rangle\cup\langle6;\infty)$
d) $x\in(-\infty;-3)\cup(3;7)$

5. **a)** $x\in(-\infty;1\rangle$ **b)** $x\in\mathbf{R}$
c) $x=1$ **d)** $x\in\langle-1;1\rangle$

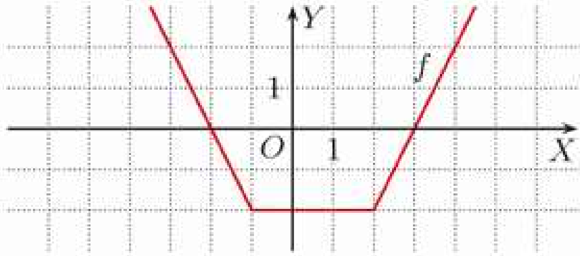
6. **a)** 32 **b)** 4

Z **1.** **a)** $x=-\frac{1}{2}$ **b)** $x=-6$, $x=1$ **c)** $x=3$
d) $x\in\langle-3;0\rangle$ **e)** $x\in\langle-2;2\rangle$
f) $x=-8$, $x=0$

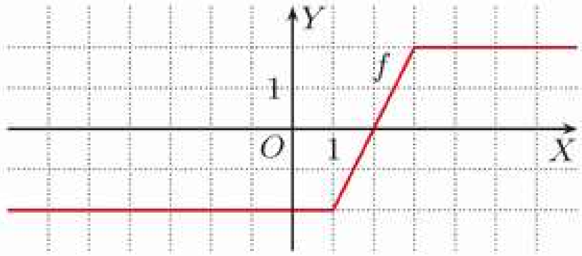
2. **a)** $x=-5$, $x=-1$, $x=5$
b) $x=-2$, $x=4$ **c)** $x=-7$, $x=5$
d) $x=-7$, $x=\frac{1}{3}$

3. **a)** $x\in\langle0;3\rangle$ **b)** $x\in(-\infty;-1\rangle$ **c)** $x\in\mathbf{R}$
d) $x\in(-1;8)$ **e)** $x\in\langle-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\rangle$
f) sprzeczna

4. **a)** $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle3;\infty)$



b) $x\in\langle2;\infty)$



5. **a)** $x=-2$, $x=0$, $x=2$
b) $x=-1$, $x=1$ **c)** sprzeczne
d) $x=-5$, $x=-1$, $x=7$, $x=11$
e) $x=-\frac{3}{2}$
f) $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$

6. **a)** $x\in(-5;-1)\cup(1;5)$
b) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-9)\cup(-5;-3)\cup(1;\infty)$
d) $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle1;\infty)$ **e)** $x\in\langle1;3\rangle$
f) $x\in\left(-\infty;-\frac{15}{2}\right\rangle\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left\langle\frac{13}{2};\infty\right)$

7. **a)** $x=0$ **b)** $x\in\langle0;\infty)$
c) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$, $x=2$

3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

Ć **1.** **a)** $x=-5$, $x=1$ **b)** $x=\frac{3}{35}$, $x=\frac{1}{5}$
c), **d)** sprzeczne

2. **a)** $x=-1$, $x=-\frac{1}{4}$ **b)** $x=-1$, $x=1$
c) $x=-7$, $x=1$ **d)** $x=\frac{3}{5}$

3. **a)** $x=\frac{4}{3}$, $x=4$

4. **a)** $x\in(-1;1)\cup(1;3)$
b) $x\in(-\infty;-9\rangle\cup\langle5;\infty)$
c) $x\in\left\langle-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\rangle$
d) $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle2;\infty)$

$\boxed{\text{Z}}$ **1.** **a)** $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{9}{2}$
b) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{10}{3}$
d) sprzeczne
e) $x = -\frac{33}{4}$, $x = -\frac{9}{2}$
f) $x = \frac{13}{4}$
g) $x = -\frac{1}{4}$
h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$

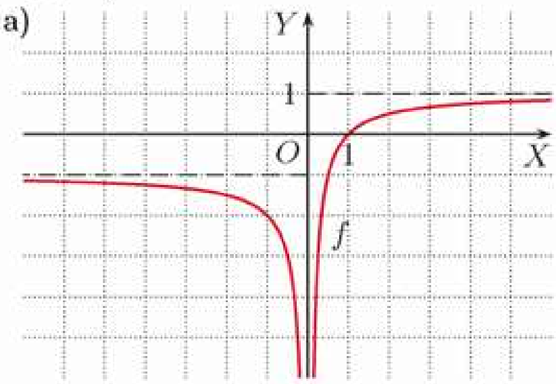
2. **a)** $x \in (-1; 3) \cup (3; 7)$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ **c)** sprzeczna
d) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$
e) $x \in \left(-\infty; \frac{7}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{2}; \infty\right)$
f) $x \in \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\rangle$
g) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 1; \infty)$
h) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$
i) $x \in \left(-\infty; \frac{7}{18}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{18}; \infty\right)$

3. **a)** $x \in \left(-\infty; \frac{7}{4}\right\rangle$
b) $x \in (-5; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right)$ **c)** $x = 1$
d) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
e) $x \in \left(-\infty; \frac{10}{9}\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$
f) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; \infty)$
g) $x \in \langle -1; 2) \cup (2; \infty)$
h) $x \in \left(-\infty; -\frac{10}{11}\right) \cup \left(-\frac{2}{13}; 4\right) \cup (4; \infty)$
i) $x \in \left(-\infty; -\frac{20}{3}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{12}{5}; 4\right) \cup (4; \infty)$

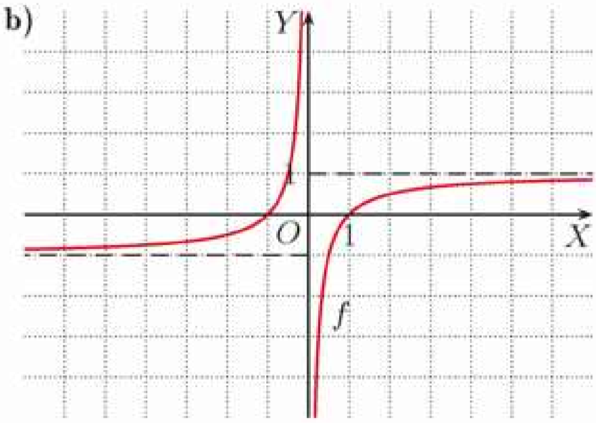
4. **a)** $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$
b) $x = -1$, $x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = 6$

5. **a)** $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
b) $x \in \left(-2; -\frac{4}{3}\right)$
c) $x \in (-\infty; 0)$
d) $x = -2$, $x = 2$
e) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
f) $x \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right) \cup$
$\cup (4; \infty)$

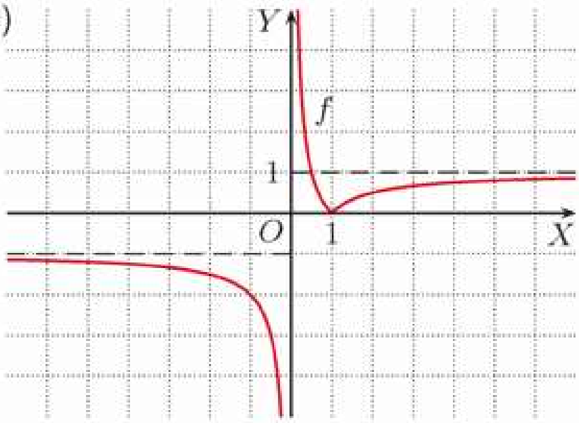
6. **a)**



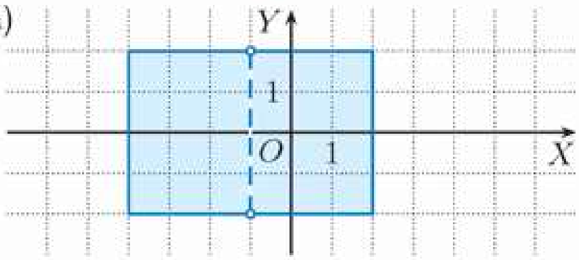
b)



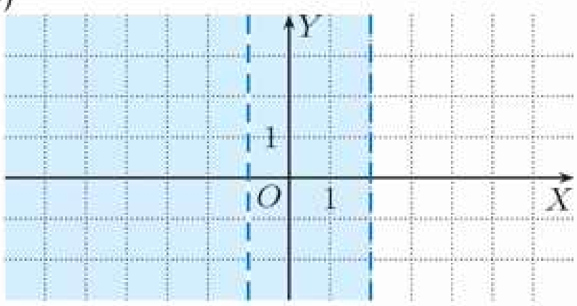
c)



7. **a)**



b)



8. $a = 5$

3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

$\boxed{\text{Ć}}$ **1.** **a)** $\frac{10}{15}$ **b)** 9 i 12
2. **a)** cukierki A – 16 zł/kg,
cukierki B – 20 zł/kg **b)** 8,50 zł/kg

$\boxed{\text{Z}}$ **1.** **a)** $\frac{4}{7}$ **b)** $\frac{3}{5}$
2. **a)** mama – 48 lat, tata – 54 lata
b) za 11 lat
3. **a)** o 40 cm lub o 96 cm
b) o 72 cm lub o 1080 cm

4. 3 h 45 min

5. 24 dni

6. 7 h 12 min

3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Ć **1. a)** 60 km/h, 80 km/h
b) 90 km/h, 60 km/h

2. a) 120 km/h, 90 km/h
b) 90 km/h, 80 km/h

Z **1.** 60 km/h

2. 12 km/h, 18 km/h

3. 32 km/h, 12 km/h

4. 15 km/h, 20 km/h

5. a) 50 km/h **b)** 60 km/h

6. a) 120 km/h

3.15. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$, $\frac{1}{6}$
b) $x \neq y$ i $y \neq 0$, $\frac{x^2}{y}$, -1
c) $x \neq y$, $\frac{x+y}{x-y}$, $-\frac{1}{3}$

2. a) $a \neq b$ i $a \neq -b$, $a+b$, 1
b) $a \neq b$, $a \neq -b$ i $b \neq 0$, $\frac{a^2+b^2}{b}$, $\frac{5}{2}$

3. a) $x \neq 0$ i $y \neq -3$, $\frac{x}{y+3}$
b) $x \neq 0$ i $y \neq \frac{3}{2}$, $\frac{-3x(2y+3)}{2}$
c) $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x \neq 4y$, $4xy$
d) $x \neq y$, $x \neq -y$ i $x \neq -2y$, $-\frac{1}{4}(x+2y)$
e) $x \neq -y$, $(x-y)^2$
f) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$

4. a) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{2x}{x^2-y^2}$
b) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
c) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{y^2-x^2}{x^3y^3}$
d) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{xy+x^2+y^2}{x^2y^2}$
e) $x \neq y$ i $x \neq -y$, 1
f) $y \neq 2x$ i $y \neq -2x$, $\frac{10xy}{4x^2-y^2}$

5. a) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ i $a \neq -b$, $\frac{2}{b(a-b)}$
b) $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $b \neq 0$, $-\frac{a}{b}$

6. a) $m \in (0;2)$ **b)** $m \in (-3;1)$
c) $m \in (-1;0)$
d) nie ma takich m

7. a) $k \in (-2;0) \cup (0;2)$ **b)** $k \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $k \in (-\infty;-1) \cup (\frac{3}{2}; 7-2\sqrt{7}) \cup$
$\cup (7+2\sqrt{7}; \infty)$ **d)** $k \in (2;6)$

8. a) $a \in (-\infty; -\frac{1}{5})$ **b)** $a \in (-\infty; -\frac{1}{2})$

9. b) $d = \sqrt{2|a|}$ **c)** $a = 8$

10. a) $m = 7$, $P = 20$ **b)** $P = 6$

11. a) $y = -x + 2$, $P = 2$

12. a) 0 **b)** 4 **c)** 2

13. 0 dla $r \in (0; \sqrt{2})$,
1 dla $r = \sqrt{2}$,
2 dla $r \in (\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$,
3 dla $r = 3\sqrt{2}$,
4 dla $r \in (3\sqrt{2}; \infty)$

14. a) $p \in \{-3, -2, 2, 3\}$
b) $p \in \{-6, -1, 1, 6\}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. $a = 6$ **a)** P, Q
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle \frac{3}{2}; \infty)$

2. a) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = 1$
b) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = -2$
c) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$, $y = 0$
d) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x = -2$, $y = 0$

3. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_h = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$D_h = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

4. a) $[-3, 3]$ **b)** $[4, 1]$ **c)** $[1, 1]$

5. a) $g(x) = \frac{2}{x+2} + 3$ **b)** $g(x) = -\frac{1}{x-2} - 3$

6. a) $b = \frac{2a}{m}$ **b)** $r = \frac{eR}{E-e}$ **c)** $a = \frac{m-1}{n+2}$
d) $a = \frac{2m}{m^2-2}$ **e)** $q = 1 - \frac{a_1}{S}$
f) $a_1 = \frac{S(1-q)}{1-q^n}$

7. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $x - 1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{x+3}{x-3}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}$, $\frac{1}{x+3}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$, $\frac{1}{x^2-5x+25}$

8. a) $x=-6$ **b)** $x=2$ **c)** $x=0$
d) $x=0$ **e)** sprzeczne **f)** $x=\frac{1}{2}$
g) $x=-2$, $x=4$ **h)** $x=3$ **i)** $x=-\frac{1}{3}$

9. a) $x=2$ **b)** $x=1$ **c)** $x=1$
d) $x=-3$, $x=0$ **e)** $x=2$, $x=6$
f) $x=4$ **g)** $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$
h) $x=0$ **i)** $x=0$

10. a) z prostą $y=2$: $\left(\frac{2}{3},2\right)$;
z prostą $y=x$: $(1,1)$, $(-2,-2)$
b) z prostą $y=2$: $\left(-\frac{1}{3},2\right)$;
z prostą $y=x$ – brak
c) z prostą $y=2$: $\left(\frac{1}{3},2\right)$; z prostą $y=x$:
$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$
d) z prostą $y=2$: $\left(-\frac{2}{3},2\right)$;
z prostą $y=x$ – brak

11. a) II – f, $x=0$; I – g, $x=\frac{4}{3}$
b) $g(x)=x$ dla $x=1$, $x=4$,
$f(x)=-x$ dla $x=-3$, $x=0$

12. a) $x\in(-1;0)\cup(0;1)$ **b)** $x\in(-2;0)$

13. a) sprzeczne **b)** $x=-1$, $x=3$
c) $x=0$ **d)** sprzeczne
e) $x=-\sqrt{7}$, $x=\sqrt{7}$
f) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $x\in(-\infty;3)\cup\langle 5;\infty)$ **b)** $x\in(-6;-2)$
c) $x\in(-\infty;-1)\cup\langle 7;\infty)$ **d)** $x\in(0;1)$
e) $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$ **f)** $x\in(0;\infty)$

2. a) $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$
b) $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-2)\cup(0;4)$
d) $x\in(-2;\frac{1}{2})\cup(2;\infty)$
e) $x\in(-\infty;-2)\cup\langle -1;0)\cup\langle 3;\infty)$
f) $x\in(-3;-2\rangle$

3. a) $x\in(-3;3)$ **b)** $x\in(-7;1)\cup(5;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-2)\cup\langle -\frac{1}{2};0)\cup(2;\infty)$

4. a) $A\cup B=(-\infty;1\rangle\cup\langle 2;\infty)$,
$A\cap B=\langle -2;0)\cup(4;\infty)$, $A\setminus B=\langle 2;4\rangle$
b) $A\cup B=\mathbf{R}$, $A\cap B=(-\infty;-2)\cup(0;1)$,
$A\setminus B=\langle -2;-1)$

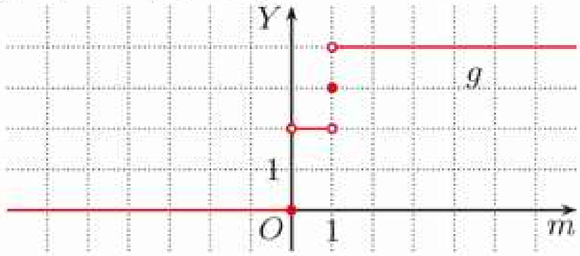
5. a) $x=-5$ **b)** $x\in\langle 1;\infty)$ **c)** $x=0$, $x=2$
d) $x=-\frac{1}{2}$, $x=2$ **e)** $x=-1$ **f)** sprzeczne

6. a) 1, 2 **b)** 2, 3, 5, 6 **c)** 1, 2, 3, 4, 5

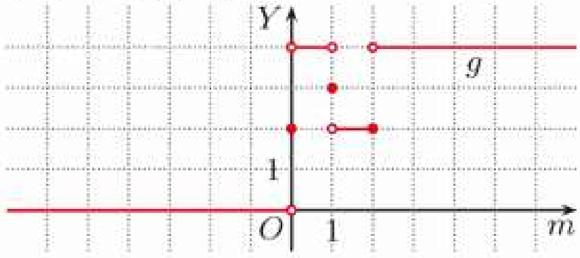
7. a) $m\in(0;2)\cup(2;\infty)$
b) $m\in(0;1)\cup(1;\infty)$
c) $m\in(-2;\infty)$

8. a) 0 dla $m=0$,
2 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$
b) 0 dla $m\in\{-1,1\}$,
1 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$
c) 2 dla $m\in\mathbf{R}$

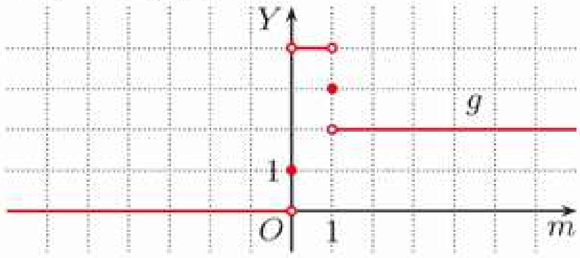
9. a) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$



b) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$



c) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$



10. $y=\frac{-1}{x+1}+2$ **a)** $[-1,-3]$ **b)** $[2,-5]$

11. a) $f(x)=g(x)$ dla $x=-1$, $x=1$;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle\cup(0;1\rangle$
b) $f(x)=g(x)$ dla $x=-1$, $x=1$;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle$
c) $f(x)=g(x)$ dla $x=2$;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(1;2\rangle$
d) $f(x)=g(x)$ dla $x=-1$;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle\cup(0;1)$

12. a) $x=-2$, $x=\frac{2}{5}$ **b)** $x=4$

13. a) $f(x)=g(x)$ dla $x=3$;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;2)\cup\langle 3;\infty)$
b) równanie sprzeczne;
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$

14. $m=-\frac{1}{2}$

15. $m = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$

16. **a)** $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ **b)** nie ma takich m
c) $m \in \langle 0; 1)$ **d)** $m \in (-6; 2)$

17. **a)** równoległe dla $m = \frac{1}{4}$,
prostopadłe dla $m = -1$
b) nigdy nie są równoległe,
prostopadłe dla $m = 0$ i dla $m = 2$

18. **a)** $m = 0$ **b)** $m \in (-2; 2)$
c) $m \in \left(1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** A **4.** B **5.** C **6.** A **7.** D **8.** C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $a = 1$, $b = -5$

2. $a = -\frac{1}{3}$

3. $x = -2$, $x = 3$

4. **a)** $b = 2$; $f(6) = \frac{9}{4}$ **b)** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 6$

6. $t = \frac{210}{v}$, $v > 0$, $t = 1$ h 45 min

7. 80 km/h

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 293 $(29\frac{1}{3})$

2. 618 $(x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$

3. 283 $(x_0 = \frac{17}{6})$

4. 166 $(\frac{a}{b} = \frac{1}{6})$

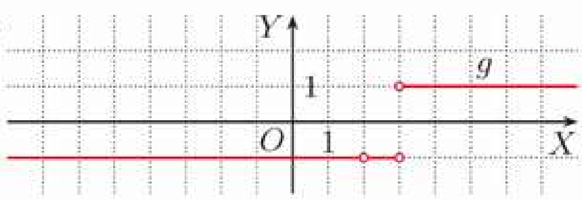
5. $m \in (2; 4)$

6. $\langle 2; 3\rangle \cup (4; \infty)$

7. $m \in (\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

8. $x \in (-4; -1\rangle \cup (2; \infty)$

9.



4.1. Trójkąty prostokątne

Ć **1.** **a)** 50 **b)** 3 **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** 4 **e)** 4 **f)** $\frac{\sqrt{17}}{2}$

2. **a)** $x = 5$ **b)** $x = \sqrt{106}$

3. **a)**, **c)**, **d)** jest **b)** nie jest

4. **b)** $12(2 + \sqrt{2})$ cm

5. **b)** $12\sqrt{3}$ cm

6. **a)** $2(\sqrt{2} + 1)$ **b)** $6(\sqrt{2} + 2)$ **c)** $8(\sqrt{2} + 1)$

7. **a)** $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ **b)** $2(\sqrt{3} + 3)$ **c)** $3(\sqrt{3} + 1)$

Z **1.** **a)** 9 **b)** $\frac{17}{2} + 6\sqrt{2}$

2. $24\sqrt{3}$

3. **a)** $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4$
b) $x = 4(\sqrt{3} - 1)$, $y = 4\sqrt{2}$

4. **a)** $5(3 + 2\sqrt{3})$ cm **b)** $3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

5. $3\sqrt{21}$, $3\sqrt{39}$

6. **a)** $2(3\sqrt{2} + 4)$ **b)** $2(\sqrt{3} + 3)$ **c)** $2\sqrt{3} + 3$

7. **a)** 12 cm **b)** 80 cm

8. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm

9. $4{,}5(2 + \sqrt{2})$

10. $24(2\sqrt{3} - 3)$

11. $3(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$

12. **a)** $2(5 + 3\sqrt{5})$ **b)** $2(4 + \sqrt{13})$

13. **a)** $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm
b) $3\sqrt{7}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm

14. **a)** 5 cm, 12 cm **b)** 4,8 cm

15. 8 cm i 10 cm

16. Suma pól księżyców jest równa 60 cm^2
i równa się polu trójkąta.

17. **a)** $8(\sqrt{2} - 1)$ **b)** $4(1 + \sqrt{2})$

18. **a)** 7, 24, 25 **b)** 20, 21, 29
c) 12, 35, 37 **d)** 5, 12, 13

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Ć **2.** $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{15}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$

Z **1.** **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{24}{25}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}$

1. c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 4$
d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{4}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$
e) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$
f) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$

3. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$

4. a) 10, 24
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

5. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 3$

6. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{9}{10}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$

7. a) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$, $\cos\alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{5}$ **b)** $\sin\beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$,
$\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{5}$

8. a) BD i DF **b)** DO **c)** BC **d)** AB

4.3. Trygonometria – zastosowania

Ć **1. a)** około 8 m **b)** około 9,72 m
2. a) około 19,96 m **b)** około 26,43 m
3. a) około 58° **b)** około 77°

Z **1.** około 18,79 m
2. około 95 cm
3. około 12,62 m
4. około 21,42 m
5. a) około 50° **b)** około 64°
6. a) około 12,59 m **b)** około 8,81 m
7. około 197 m
8. około 34,33 km
9. około 2484,48 m
10. około 91,53 m
11. a) około 17,17 m lub 64,84 m
b) około 89,88 m

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Ć **1. a)** $\sqrt{19}$ cm; około 26°, około 64°
b) $\sqrt{194}$ cm; około 21°, około 69°
c) 53°; około 9,03 cm, około 11,98 cm
d) 36°; około 5,81 cm, około 9,89 cm
2. a) $3^\circ 36'$ **b)** $2'24''$ **c)** $9'$
d) $7'12''$ **e)** $25'12''$
3. a) $|CD| \approx 6{,}47$; $27^\circ 30'$, 35°, $117^\circ 30'$
b) $|CD| \approx 7{,}05$; 35°, około 126°, około 19°

Z **1. a)** $\sphericalangle BCD = 106^\circ 17' 50''$,
$\sphericalangle DBC = 27^\circ 28' 35''$, $\sphericalangle BDC = 46^\circ 13' 35''$
b) $\sphericalangle PAB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABP = 36^\circ 51' 5''$,
$\sphericalangle BPA = 53^\circ 8' 55''$
2. a) $2\sqrt{13}$ cm, około 34°, około 56°
b) $5\sqrt{2}$ cm, około 8°, około 82°
c) $2\sqrt{41}$ cm, około 39°, około 51°
3. a) $\beta = 56^\circ$, $b \approx 8{,}9$, $c \approx 10{,}73$
b) $\alpha = 24^\circ$, $a \approx 4{,}07$, $b \approx 9{,}14$
4. $Ob \approx 14{,}39$, $P \approx 7{,}69$
5. a) około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
b) około 53°
c) około 67°, około 113°
6. $|AB| \approx 20{,}88$, $|AD| \approx 8{,}09$, $\sphericalangle DCA \approx 28^\circ$
7. a) 90°, około 53°, około $108^\circ 30'$,
około $108^\circ 30'$
b) około 42°, około 138°
8. około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
lub około 41°, około 139°
9. kąty: 60°, około 14°, około 106°,
boki: 12, 3, $3\sqrt{13}$; $|ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
10. około $18^\circ 30'$, około $18^\circ 30'$, około 143°;
$6\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm
11. około 32°
12. a) $Ob = a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$,
kąty: około 35°, około 55°
b) $Ob = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$,
kąty: około 35°, około 55°

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Ć **2.** **a)** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\cos\alpha = \frac{12\sqrt{2}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 12\sqrt{2}$

3. **a)** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$
c) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{21}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **a)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$
b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

5. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{91}}{91}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$

Z **1.** **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$
c) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{6}$
f) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$
g) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$
h) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$

2. **a)** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **b)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. **a)**, **d)** tak **b)**, **c)** nie

4. **a)** $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm
b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm

5. **a)**, **c)**, **d)** tak **b)** nie

6. **a)** -1 **b)** $\frac{5}{9}$

7. **a)** m^2 **b)** $1-2m^2$
c) $1+2m\sqrt{1-m^2}$ **d)** $m+\sqrt{1-m^2}$

8. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$
b) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. **a)** $\sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 7$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$

10. **a)** 0,48 **b)** $-0{,}2$ lub 0,2
c) $-0{,}296$ lub 0,296

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Ć **1.** **a)** 45°, np. $(1,1)$ **b)** 90°, np. $(0,1)$
c) 135°, np. $(-1,1)$

2. **a)** $|OP| = 5$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
b) $|OP| = 10$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
c) $|OP| = 2$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

3. **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$ **b)** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$

4. **a)** $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$
b) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$
c) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$

5. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; $\sin(180^\circ-\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(180^\circ-\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -2$

6. **a)** $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -1$
b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}$

8. **a)** $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$
b) $\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
c) $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. **a)** $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$
b) $\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
c) $\sin^2\alpha = \frac{9}{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Z **1.** **a)** $\sin\sphericalangle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\sphericalangle AOP = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle AOP = -4$, $\operatorname{ctg}\sphericalangle AOP = -\frac{1}{4}$
b) $\sin\sphericalangle AOQ = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\sphericalangle AOQ = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle AOQ = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\sphericalangle AOQ = -2$

1. c) $\sin \sphericalangle AOR = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
$\cos \sphericalangle AOR = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$,
$\text{tg} \sphericalangle AOR = -\frac{5}{4}$, $\text{ctg} \sphericalangle AOR = -\frac{4}{5}$

2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$ **b)** $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. a) $\sqrt{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **c)** $3-2\sqrt{3}$

5. a) -1 **b)** -3 **c)** $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$ **d)** $2-\sqrt{2}$
e) -1 **f)** $\frac{3}{2}(3+\sqrt{3})$

6. a) 0,9659 **b)** 0,2588 **c)** $-0{,}6428$
d) $-0{,}9962$ **e)** $-0{,}7813$ **f)** $-0{,}3057$

7. a) $\sin^2\alpha = \frac{15}{16}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
$\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{15}$
b) $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{tg}\,\alpha = -2$

8. a) $\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,
$\text{tg}\,\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$
c) $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$
c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

Współczynnik kierunkowy prostej

1. a) 30° **b)** 60° **c)** 135°

2. a) 75° **b)** 105°

4.7. Pole trójkąta

Ć **1. a)** $12\sqrt{7}$ cm^2 **b)** $8\sqrt{21}$ cm^2

2. a), b) 120 cm^2 **c)** $\frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $3(2+\sqrt{2})$ cm **b)** 112,5 cm^2

4. b) $75\sqrt{3}$ cm^2

5. a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $36\sqrt{3}$ cm

7. a) 15 **b)** $30\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** 4,5

8. a) 12 cm **b)** $6\sqrt{2}$ cm **c)** $4\sqrt{3}$ cm

Z **1. a)** $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ **b)** $16\sqrt{2}$ cm^2

2. a) $6\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $\frac{36}{5}\sqrt{3}$ cm^2
c) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $6(2\sqrt{2}+\sqrt{10})$ cm
b) 30°, 30°, 120°, $Ob = 4(2\sqrt{3}+3)$ cm

4. $P = 24$ cm^2, $Ob = 4(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm

5. a) $6\sqrt{2}$
b) $P_1 = 36(\sqrt{3}-1)$, $P_2 = 36(3-\sqrt{3})$

6. 6, 6, 8

7. $Ob = 5(2+\sqrt{3})$, $P = \frac{25}{4}\sqrt{3}$

8. 90°

9. a) 6, tak **b)** $4\sqrt{6}$, nie **c)** 12, tak
d) $3\sqrt{15}$, nie **e)** 36, tak **f)** 42, tak

13. 3

4.8. Pole czworokąta

Ć **1.** $h_1 = 5\sqrt{3}$ cm, $h_2 = 3\sqrt{3}$ cm,
$P = 30\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $48\sqrt{2}$ **b)** 48

4. b) 12,5 cm^2

6. a) $P = 120$ cm^2, $h = \frac{120}{13}$ cm
b) $P = 24\sqrt{2}$ cm^2, $h = 4\sqrt{2}$ cm

7. a) $P = 8\sqrt{17}$, $Ob = 2(8+\sqrt{21})$
b) $P = 21\sqrt{5}$, $Ob = 28$
c) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(5\sqrt{3}+4)$
d) $P = 18\sqrt{5}$, $Ob = 6(\sqrt{6}+2)$

Z **1. a)** 18 cm^2 **b)** 1 cm, 2 cm

2. b) $15\sqrt{2}$ cm^2

3. b) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm

4. a) 0,96 **b)** 9 cm

5. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\text{ctg}\,\alpha = \sqrt{2}$

6. $6(6+\sqrt{2})$ cm

7. $\frac{320}{9}\sqrt{5}$ cm^2

8. a) $7\sqrt{3}$ cm^2 **b)** 0,8

9. b) 21

10. 161 m siatki, $P_1 = 188$ m^2, $P_2 = 512$ m^2

11. b) 30

13. 12,5 cm, $P = 24$ cm^2

14. $24\sqrt{5}$ cm^2

15. kąty: 60°, 120°, ramiona: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$,
podstawy: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$, $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$

16. $10\sqrt{34} \approx 58{,}3$ [m]

4.9. Zagadnienia uzupełniające

2. b) $a = \sqrt{31}+1$, $b = \sqrt{31}-1$

Zestaw powtórzeniowy I

1. 48

2. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. **a)** 10, 24, 26 **b)** $4(\sqrt{2}+2)$ **c)** $16\sqrt{7}$

4. **a)** $\sin\beta = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\beta = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
b) $\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$

5. **a)** $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{11}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{35}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{35}}{35}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
g) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$
h) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{146}}{146}$, $\cos\alpha = \frac{11\sqrt{146}}{146}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{11}$

6. **a)** $\alpha = \beta = 70^\circ$, $a = b \approx 6{,}39$ cm, $c \approx 4{,}37$ cm
b) $a = b = \frac{229}{17}$ cm, $c = \frac{120}{17}$ cm, $\alpha = \beta \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 30^\circ$
c) $a = b \approx 4{,}94$ cm, $c \approx 7{,}56$ cm, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

7. **a)** około 329,26 m **b)** około 70°

8. około 6,65 m

9. **a)** około 43,6 m **b)** około 20 minut

10. około 829 m

Zestaw powtórzeniowy II

1. $6(3+\sqrt{3})$ cm^2

2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

4. **a)** $Ob = 2(11+3\sqrt{3})$ cm, $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
b) $Ob = 4(8+\sqrt{3})$ cm, $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{41+20\sqrt{3}}$ cm

5. $\sin\sphericalangle PAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\sphericalangle PAD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle PAD = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\sphericalangle PAD = 3$

6. $21(3-\sqrt{3})$

7. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm

8. **a)** $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4}$ **b)** $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{4}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{2}$
d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{3}$

10. **a)** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ **b)** 0 **c)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** 1 **g)** $3-\sqrt{3}$ **h)** $-\frac{8}{3}$

12. około 22651 cm^3, około 17543 cm^3

Zadania testowe

1. A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B **6.** C **7.** D **8.** D **9.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $\frac{2}{5}$

2. 7,2

3. $|AP| = 5{,}75$, $|BP| = 2{,}25$

4. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. $Ob = 28$, $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$

6. $\frac{49}{25}$

7. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

8. około 21,8 m

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 031 $\left(1-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

2. 164 $\left(\frac{\sqrt{37}}{37}\right)$

3. 382 $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$

4. $P = 5$, $Ob = 7{,}5 + \frac{\sqrt{185}}{2}$

5. **a)** $18(2+\sqrt{3})$ **b)** $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

7. **b)** $\frac{8\sqrt{6}}{7}$, $2\sqrt{6}$, $\frac{8\sqrt{6}}{5}$

5.1. Okrąg

Ć **1.** 45°

2. $\frac{3}{2}\pi$ cm, $\frac{9}{2}\pi$ cm, $\frac{15}{2}\pi$ cm, $\frac{21}{2}\pi$ cm

3. 16

Z **1.** $\frac{5}{3}\pi$ cm

2. $\frac{5}{2}\pi$ cm

3. 36 cm

4. 80°

5. **a)** $x = -9$, $x = 7$ **b)** $x = -3$, $x = 1$

6. **a)** $|O_1O_2| = 1$; 0 **b)** $|O_1O_2| = 5$; 1
c) $|O_1O_2| = 3$; 1 **d)** $|O_1O_2| = 5$; 0

7. 12, 12, 24

8. $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

9. $r_A = 1$, $r_B = 4$, $r_C = 3$

10. 2, 3, 4

5.2. Koło

Ć **1.** **a)** 9π cm^2 **b)** 3π cm

2. **a)** $P = 49\pi$ cm^2, $r = 7$ cm
b) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 9$ cm

3. **a)** 30π **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{21}{8}\pi$

4. 20°

5. **a)** $36(\pi - 2)$ **b)** $12(2\pi - 3\sqrt{3})$ **c)** $12(\pi - 3)$

Z **2.** $d_1 = \frac{10}{3}\pi$, $d_2 = \frac{20}{3}\pi$, $P_1 = \frac{25}{3}\pi$, $P_2 = \frac{50}{3}\pi$

3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$

5. **a)** 2π **b)** $\frac{9}{4}(\pi - 1 - \sqrt{3})$

6. **a)** $l = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$, $P = 4\pi - 3\sqrt{3}$
b) $l = 4 + \pi$, $P = 4(\pi - 2)$
c) $l = 2\sqrt{2} + \pi$, $P = 4(\pi - 2\sqrt{2})$

7. **a)** $\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}$ **b)** $\frac{8}{3}\pi$ **c)** $4(\pi + 2)$

8. **a)** $9(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ cm^2 **b)** $\frac{9}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
c) $6(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Ć **2.** **a)** $2\sqrt{13}$ cm **b)** 12 cm

3. **a)** 28 cm **b)** 5 cm

4. **a)** 2 **b)** 3 **c)** 1 **d)** 4

5. **a)** 0 dla $r \in (0; 4)$, 1 dla $r = 4$,
2 dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 dla $r \in (0; \frac{1}{2})$, 1 dla $r = \frac{1}{2}$,
2 dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$
c) 0 dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
1 dla $r = 1 + \sqrt{2}$, 2 dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$

6. **a)** $2\sqrt{7}$ **b)** 5

Z **1.** **a)** $x = -8$ lub $x = 8$
b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$ **d)** $x = 0$

2. 2,5 cm

3. $2r + 2R + \sqrt{2rR}$

4. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$

5. $\frac{20}{9}$

6. $3\sqrt{3}$ cm^2

7. $(64\sqrt{3} - \frac{88}{3}\pi)$ cm^2

5.4. Kąty w okręgu

Ć **1.** **a)** 60° **b)** 240° **c)** 330°

2. **a)** 30° **b)** 60°

3. **a)** 165° **b)** $67{,}5^\circ$ **c)** 51° **d)** 315°

6. **a)** $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$
c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 240^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

7. **a)** $\alpha = \beta = 70^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ **b)** $\alpha = \gamma = 30^\circ$,
$\beta = 40^\circ$ **c)** $\alpha = \gamma = 25^\circ$, $\beta = 35^\circ$

Z **1.** **a)** C lub O **b)** F lub L
c) G lub K **d)** C lub O

2. **a)** 30° **b)** 45° **c)** $112{,}5^\circ$ **d)** $3{,}75^\circ$

3. **a)** $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 134^\circ$
b) $\alpha = 51^\circ$, $\beta = 102^\circ$ **c)** $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 64^\circ$

4. **a)** $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 37^\circ$
b) $\alpha = 113^\circ$, $\beta = 56^\circ 30'$
c) $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$

5. **a)** $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 35^\circ$ **b)** $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$
c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 40^\circ$

6. **a)** $\alpha = 32^\circ$ **b)** $\alpha = 42^\circ$ **c)** $\alpha = 36^\circ$

7. **a)** 48° **b)** 15°

9. **a)** $x = 9$ **b)** $x = 2\sqrt{2}$ **c)** $x = 3$

10. 8 cm, 12 cm

11. **a)** $r = 4$, $P = 4\sqrt{15}$
b) $r = \frac{15}{4}$, $P = 18$ **c)** $r = \frac{13}{4}$, $P = \frac{15}{2}$

12. **a)** 2, 14 **b)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\alpha \approx 41^\circ$

13. $10\sqrt{13}$

5.5. Okrąg opisany na trójkącie

Ć **3.** **a)** $\frac{256}{3}\pi$ cm^2 **b)** $h = 9$ cm, $P = 27\sqrt{3}$ cm^2

4. **a)** $\frac{\sqrt{193}}{2}$ cm **b)** 9π cm

5. **a)** $10(1 + \sqrt{2})$ **b)** $2(5 + 2\sqrt{10})$

6. 48

7. **a)** $2\sqrt{2}$ cm **b)** $3\sqrt{10}$ cm lub $\sqrt{10}$ cm

8. $4\sqrt{3}$

9. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

10. **a)** 24 cm^2 **b)** 8,125 cm

Z **1.** **a)** 4 cm **b)** 5 cm **c)** $3(\sqrt{2} - 1)$ cm

2. 6 cm^2

3. 9

4. $48\sqrt{3}$

5. **a)** 5 cm **b)** $\frac{25}{6}$ cm

6. **a)** $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm
b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$ cm

7. **a)** $P = 9$, $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$
b) $P = 126$, $R = \frac{65}{6}$

8. $(2, -11)$ lub $(2, -3)$ lub $(2, -1)$ lub $(2, 7)$

9. $\frac{85}{6}$

5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

Ć **2.** **a)** $6\sqrt{3}\pi$ **b)** $30\sqrt{3}$

3. $12\sqrt{3}\pi$ cm

4. **a)** 1 **b)** 3

5. **a)** 24 cm i 26 cm **b)** 6 cm i 8 cm

7. 12

8. **a)** 4 **b)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **c)** 4 **d)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. **b)** 15, 20, 25 **c)** $r = 5$, $P = 25\pi$
d) $r_1 = 3$, $P_1 = 9\pi$; $r_2 = 4$, $P_2 = 16\pi$

10. **a)** 3 **b)** $\frac{10}{3}$

11. **a)** $2(3 + 2\sqrt{3})$, $2(3 + 2\sqrt{3})$, $6(2 + \sqrt{3})$
b) $\frac{28}{3}\sqrt{3} + 16$

Z **2.** **a)** $12\sqrt{3}$ **b)** 4

3. **a)** $2(\sqrt{3} - 1)$ **b)** $6\pi(\sqrt{3} - 1)$

5. 24

6. **a)** 8π **b)** $4{,}8\pi$

7. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

8. $\frac{17}{36}\pi$ cm^2

9. $r = \sqrt{2}$ cm, $|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm, $|OC| = 3\sqrt{2}$ cm

10. $4(\sqrt{3} + 3)$, $8(\sqrt{3} + 1)$

5.7. Okrąg opisany na czworokącie

Ć **3.** **a)** 120°, 135° **b)** 80°, 130° **c)** 30°, 60°

4. **a)** $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 120^\circ$
b) $\sphericalangle A = 135^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 45^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$

6. $\alpha = \beta = 36^\circ$, $\gamma = \delta = 144^\circ$

7. **a)** 10 **b)** 5 cm

Z **1.** **a)** nie **b)**, **c)** tak

2. **a)** 34π **b)** 768

3. **a)** 36π cm^2 **b)** 12π cm^2

4. **a)** $4(4 + \sqrt{5})$ cm **b)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

5. **a)** 49 **b)** 7

6. **a)** $4\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{7}$ cm **b)** $10\sqrt{3}$ cm, 12 cm

7. $4\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $P = 4\pi\sqrt{3}$ cm^2

8. **b)** 12,5 cm

9. $Ob = 20\sqrt{13}$, $P = 78$

10. $\frac{243}{7}\sqrt{3}$

5.8. Okrąg wpisany w czworokąt

Ć **3.** **a)** nie **b)**, **c)** tak

5. **a)** 156 cm^2
b) $Ob = 24$ cm, $P = 24$ cm^2
c) $Ob = 40$ cm, $P = 80$ cm^2

Z **1.** **a)** $c = 7$ cm, $P = 21\sqrt{5}$ cm^2
b) $c = 2{,}5$ cm, $h = 1{,}5$ cm

2. 80 cm^2

3. $2(\sqrt{2} - 1)$ cm, $2(\sqrt{2} + 1)$ cm

4. **a)** $P = 52{,}5$, $Ob = 35$ **b)** $P = 63$, $Ob = 42$

5. $2(1 + \sqrt{3})$ cm, $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ cm

6. 1,2 cm

7. **a)** $\frac{3}{4}\pi$ cm^2 **b)** 32 cm^2

8. $16{,}8 - 4\pi$

10. **b)** 9π cm^2

5.9. Wielokąty foremne

Ć **2.** **a)** 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7 **f)** 8 **g)** 9 **h)** 10

4. **a)** 20π **b)** $48\sqrt{3}$

5. **a)** $\frac{243}{4}\pi$ cm^2
b) 12 cm, $8\sqrt{3}$ cm

Z **1.** **a)** 135° **b)** 144°

2. **a)** 6 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 11

3. **a)**, **b)** $\frac{a^2}{4}\pi$

4. $R = a$

R	r	P
4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm^2
6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm^2
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm^2
$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm^2

5. **a)** 9

6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: $22{,}5^\circ$, 135°, $22{,}5^\circ$
$\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: $22{,}5^\circ$, $112{,}5^\circ$, 45°
$\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: $22{,}5^\circ$, 90°, $67{,}5^\circ$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72°

1.

α	18°	36°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

α	54°	72°
$\sin\alpha$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

5.10. Twierdzenie sinusów

Ć **1.** **a)** $\gamma = 75^\circ$, $a \approx 4{,}39$ $b \approx 5{,}38$
b) $\gamma = 45^\circ$, $a = 4\sqrt{2}$, $b \approx 10{,}93$
c) $\beta = 90^\circ$, $a \approx 6{,}43$, $c \approx 7{,}66$
d) $\alpha = 76^\circ$, $b \approx 4{,}81$, $c \approx 2{,}96$

2. **a)** $\beta \approx 57{,}5^\circ$, $\gamma \approx 42{,}5^\circ$, $c \approx 4{,}8$
b) $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $c = 3\sqrt{3}$
c) $\beta \approx 39{,}5^\circ$, $\alpha \approx 95{,}5^\circ$, $a \approx 14{,}08$
d) $\gamma \approx 44^\circ$, $\alpha \approx 76^\circ$, $a \approx 5{,}6$

4. **a)** $\beta_1 \approx 56{,}5^\circ$, $\beta_2 \approx 123{,}5^\circ$, $\gamma_1 \approx 93{,}5^\circ$, $\gamma_2 \approx 26{,}5^\circ$, $c_1 \approx 6$, $c_2 \approx 2{,}7$
b) $\beta_1 \approx 62^\circ$, $\beta_2 \approx 118^\circ$, $\gamma_1 \approx 73^\circ$, $\gamma_2 \approx 17^\circ$, $c_1 \approx 10{,}8$, $c_2 \approx 3{,}3$
c) $\beta_1 \approx 74^\circ$, $\beta_2 \approx 106^\circ$, $\gamma_1 \approx 46^\circ$, $\gamma_2 \approx 14^\circ$, $c_1 \approx 7{,}5$, $c_2 \approx 2{,}5$
d) $\alpha \approx 21^\circ$, $\gamma \approx 114^\circ$, $c \approx 2{,}6$

Z **1.** **a)** $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
b) $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 15^\circ$

2. **a)** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ **b)** $6\sqrt{2}$

3. **a)** $c \approx 7{,}85$, $\beta \approx 48{,}5^\circ$, $\gamma \approx 101{,}5^\circ$
lub $c \approx 2{,}48$, $\beta \approx 131{,}5^\circ$, $\gamma \approx 18{,}5^\circ$
b) $c \approx 12{,}63$, $\beta \approx 52^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$
lub $c \approx 1{,}55$, $\beta \approx 128^\circ$, $\gamma \approx 7^\circ$
c) $a \approx 9{,}59$, $\alpha \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 71^\circ$
lub $a \approx 2{,}42$, $\alpha \approx 11^\circ$, $\gamma \approx 109^\circ$
d) $b \approx 10{,}7$, $\alpha \approx 14{,}5^\circ$, $\beta \approx 15{,}5^\circ$

4. **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** 7
c) $5\sqrt{2}$ **d)** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{3}$ **f)** 5,5

5. około 22,2 m

6. **a)** $a \approx 5{,}18$, $c = 10$, $\gamma = 75^\circ$
b) $a \approx 4{,}9$, $c \approx 6{,}7$, $\beta = 60^\circ$
c) $c \approx 22{,}83$, $\beta \approx 42^\circ$, $\gamma \approx 108^\circ$
lub $c \approx 4{,}99$, $\beta \approx 138^\circ$, $\gamma \approx 12^\circ$
d) $a \approx 10{,}35$, $\alpha \approx 143{,}5^\circ$, $\gamma \approx 16{,}5^\circ$
e) $b \approx 3{,}5$, $\alpha \approx 42^\circ$, $\beta \approx 28^\circ$
f) Taki trójkąt nie istnieje.

7. Informacja do zadania:
$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
a) $3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 30{,}47$ [cm]
b) $3(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 17{,}59$ [cm]

12. **a)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5.11. Twierdzenie cosinusów (1)

Ć 3. a) $c=\sqrt{39}$ b) $c=\sqrt{74+35\sqrt{3}}$
c) $b=\sqrt{5}$ d) $a=\sqrt{29}$

4. a) $\gamma=150^\circ$, $\alpha=\beta=15^\circ$
b) $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=105^\circ$

Z 1. a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c), d) $2\sqrt{13}$

2. a) 8 b) $4\sqrt{13}$

3. a) $d_1=2\sqrt{7}$, $d_2=2\sqrt{19}$ b) $d_1=2\sqrt{2}$, $d_2=2\sqrt{10}$ c) $d_1=\sqrt{19}$, $d_2=7$
d) $d_1=2\sqrt{13}$, $d_2=2\sqrt{37}$

4. a) 60° b) 135°

5. a) $\alpha=30^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=60^\circ$
b) $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=105^\circ$

6. a) $\alpha\approx 29^\circ$, $\beta\approx 46{,}5^\circ$, $\gamma\approx 104{,}5^\circ$
b) $\alpha\approx 22^\circ$, $\beta\approx 38^\circ$, $\gamma\approx 120^\circ$

7. a) $\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ b) $\sqrt{21}, 4\sqrt{21}$

8. $12\sqrt{3}+2\sqrt{21}$

5.12. Twierdzenie cosinusów (2)

Ć 1. a) $|AB|=3$ lub $|AB|=5$
b) Taki trójkąt nie istnieje.

2. $c=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=15^\circ$
lub $c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=105^\circ$

3. a) $a=6$, $\alpha=45^\circ$, $\gamma=90^\circ$
b) $c=2\sqrt{2}$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=105^\circ$
c) $c=3-\sqrt{3}$, $\alpha\approx 105^\circ$, $\gamma\approx 15^\circ$
lub $c=2\sqrt{3}$, $\alpha\approx 75^\circ$, $\gamma\approx 45^\circ$
d) $b=4$, $\beta\approx 41^\circ$, $\gamma\approx 19^\circ$

4. a) $2\sqrt{7}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm

6. a) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, ostrokątny
b) $\cos\alpha=0$, prostokątny
c) $\cos\beta=-\frac{1}{16}$, rozwartokątny
d) $\cos\gamma=-\frac{1}{48}$, rozwartokątny

Z 1. a) $\cos\gamma=\frac{1}{4}$, tak b) $\cos\alpha=-\frac{29}{48}$, nie
c) $\cos\beta=-\frac{3}{4}$, nie d) $\cos\alpha=0$, nie

2. a) $\frac{1}{5}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $R=\frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. a) $\cos\gamma=\frac{4}{5}$, $c=2\sqrt{13}$
lub $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$, $c=6\sqrt{5}$
b) $\cos\gamma=\frac{1}{3}$, $c=\sqrt{41}$
lub $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$, $c=9$

4. a) $\cos\gamma=\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $P=\frac{3}{2}$
b) $\cos\gamma=\frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{55}}{10}$, $P=\frac{\sqrt{11}}{2}$

5. a) $2\sqrt{19}$ cm b) 5 cm, $2\sqrt{13}$ cm

6. a) 6 cm, $2\sqrt{7}$ cm b) $2\sqrt{7}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm

7. $|PA|\approx 9{,}98$ m, $|PB|\approx 8{,}39$ m

5.13. Zagadnienia uzupełniające

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 2, 3, 6

6. a) 6,5 cm b) $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $1-\frac{\pi}{4}$ b) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. a) $\alpha=\beta=60^\circ$ b) $\alpha=50^\circ$, $\beta=55^\circ$
c) $\alpha=100^\circ$, $\beta=130^\circ$

3. 60°, 30°

4. a) $22{,}5^\circ$ b) $67{,}5^\circ$

5. a) $6\pi(\sqrt{2}-1)$ b) 12π

6. $|AP|=3$, $|BQ|=6$, $|CR|=10$

8. promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D: 2,5,
promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C: $\frac{5\sqrt{5}}{2}$,
odległość między środkami okręgów: 5

9. $P=54$, $r=3$

10. $\frac{10}{3}$ cm

11. a) 3,75 cm^2 b) 6,25 cm^2

12. a) 6π, 4π b) $16(\pi-2)$
c) $8(\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}+2})$

Zestaw powtórzeniowy II

1. $a\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $a\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

2. $\frac{13}{4}$

3. a) $\frac{5\sqrt{10}}{6}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4. a) $32(\sqrt{2}-1)$ cm^2 b) $4\sqrt{2}$ cm^2

5. a) $Ob=2(9+\sqrt{21})$, $P=20\sqrt{3}$
b) $Ob=2(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$, $P=4(1+\sqrt{3})$

6. a) około 1749 m^2 b) około 926 m^2

7. $Ob=2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm,
$d_2=2\sqrt{8+\sqrt{3}}$ cm

8. $3\sqrt{5}$

9. a) 10 cm^2 b) 288 cm^2

10. $a\sqrt{3}$

11. a) 10 b) $\frac{48}{7}$

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** A **4.** C **5.** B **6.** D
7. A **8.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $8P$

2. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi$

3. 40°

4. 8π

5. $\sin \sphericalangle O_1PA = \frac{5}{13}$, $r = 2\frac{2}{9}$

6. $16\pi(3-2\sqrt{2})\ \text{cm}^2$

7. 45°, 135°

8. $4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 135 (13,5)

2. 313

3. 131

4. $36\pi\ \text{cm}^2$

5. $\frac{12}{7}$ cm

6. $\frac{\sqrt{46}}{2}$ cm

7. $\frac{20}{7}\sqrt{7}$

Potęga o wykładniku wymiernym

1. a) -1024 **b)** 625 **c)** $\frac{1}{64}$ **d)** $\frac{1}{125}$ **e)** $11\frac{25}{64}$
f) 1 **g)** $1\frac{4}{5}$ **h)** $3\frac{3}{8}$ **i)** $\frac{64}{125}$ **j)** $\frac{81}{10\,000}$

2. a) 2^{10} **b)** 2^2 **c)** 2^7 **d)** 2^{13} **e)** 2^{-16}
f) 2^{22} **g)** 2^{-3} **h)** 2^6 **i)** 2^0 **j)** 2^6

3. np.: **a)** 3^{12} **b)** 5^{16} **c)** 10^2 **d)** 6^{-6}
e) 2^{-31} **f)** 1^1

4. a) 7 **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** 4 **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** 4 **f)** 27
g) $\frac{125}{64}$ **h)** $\frac{81}{16}$ **i)** $\frac{8}{27}$ **j)** $\frac{4}{9}$

5. np.: **a)** $7^{\frac{5}{6}}$ **b)** $3^{\frac{13}{4}}$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$ **d)** $5^{-\frac{5}{3}}$
e) $3^{\frac{10}{3}}$ **f)** 5^{-3}

6. a) y **b)** y

7. a) $x>0$, $2x^{\frac{2}{3}}$ **b)** $x>0$, $x^{\frac{3}{2}}$
c) $x>0$, x

8. a) $x \geqslant 0$, $y>0$, $x^{\frac{5}{6}}y^{-1}$
b) $xy \neq 0$, $x^{-1}y^{-1}$ **c)** $ab \neq 0$, $\frac{a}{b}$
d) $a>0$, $b\neq 0$, $a^{-\frac{1}{2}}b$
e) $x>0$, $y>0$, $x^{\frac{1}{6}}$ **f)** $x>0$, $y \neq 0$, $x^{\frac{1}{2}}y$

6.1. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Ć **1.** $5^{\sqrt{3}} \approx 16{,}2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36{,}5548$

2. a) $3^\pi \approx 31{,}5443$ **b)** $5^\pi \approx 156{,}9925$
c) $\pi^\pi \approx 36{,}4622$

3. a) 3. **b)** 5. **c)** 4. **d)** 1.

4. a) 125 **b)** 81 **c)** 25 **d)** 32 **e)** 1
f) 3 **g)** 32 **h)** 6

Z **1. a)** $3^{5-\sqrt{2}}$ **b)** $3^{1+\sqrt{2}}$ **c)** 3^4 **d)** $3^{\sqrt{3}-3}$
e) $3^{\sqrt{7}}$ **f)** 3^π

2. a) 36 **b)** 125 **c)** $\frac{125}{27}$ **d)** 1 **e)** 1
f) 343 **g)** 3 **h)** 64 **i)** 216

3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$ **b)** $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$ **c)** $3^{\sqrt{5}-3}$
d) $3^{3-2\sqrt{3}}$ **e)** $3^{-6\pi}$ **f)** $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$

4. a) nie **b)** tak **c)** nie **d)** nie

5. a) y, z **b)** x, z **c)** y, z

6. e), f) $>$ **b)** $<$ **a), c), d)** $=$

7. a) $x=-\sqrt{2}$ **b)** $x=\pi$ **c)** $x=\sqrt{2}$

6.2. Funkcja wykładnicza

Ć **1.** $(0,1)$

2. a) zielony – f, czerwony – g, niebieski – h
b) $a=\frac{81}{16}$, $b=\frac{4}{9}$, $c=3$ **c)** B, C

4. zielony – f, niebieski – g, czerwony – h, brązowy – k

5. a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^{\pi} < 7^{3,2}$
c) $0{,}6^{\frac{1}{2}} < 0{,}6^{\frac{3}{7}} < 0{,}6^{\frac{3}{8}} < 0{,}6^{0,35} < 0{,}6^{\frac{1}{3}}$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

Z **1. a)** $f(-4)=\frac{1}{81}$, $f(-3)=\frac{1}{27}$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$f(\frac{1}{2})=\sqrt{3}$, $f(3)=27$, $f(4)=81$
b) $f(-4)=\frac{1}{256}$, $f(-3)=\frac{1}{64}$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$,
$f(\frac{1}{2})=2$, $f(3)=64$, $f(4)=256$
c) $f(-4)=256$, $f(-3)=64$, $f(-\frac{1}{2})=2$,
$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{1}{64}$, $f(4)=\frac{1}{256}$
d) $f(-4)=16$, $f(-3)=8$, $f(-\frac{1}{2})=\sqrt{2}$,
$f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(3)=\frac{1}{8}$, $f(4)=\frac{1}{16}$
e) $f(-4)=\frac{1}{4096}$, $f(-3)=\frac{1}{512}$,
$f(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{2}$, $f(3)=512$,
$f(4)=4096$ **f)** $f(-4)=10^{-8}$,
$f(-3)=10^{-6}$, $f(-\frac{1}{2})=0{,}1$, $f(\frac{1}{2})=10$,
$f(3)=10^6$, $f(4)=10^8$

2. **a)** tak **b)** tak **c)** nie **d)** tak

3. **a)** nie **b)** tak **c)** nie **d)** tak

4. **a)** $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ **b)** $f(x)=(\frac{1}{2})^x$
c) $f(x)=4^x$ **d)** $f(x)=(\frac{3}{2})^x$

5. **a)**, **b)** malejąca **c)** rosnąca

6. **a)** $2^{\frac{7}{5}}<2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}<2^{\sqrt{3}}$
b) $(\frac{3}{4})^6<(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}<(\frac{3}{4})^5<(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$
c) $\pi^{\frac{1}{\pi}}<\sqrt[3]{\pi}<\pi^{\frac{3}{7}}<\pi^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{-2}<9^{-\sqrt{\pi}}<9^{-\sqrt{3}}<9^0$

7. **a)** $256^{\frac{1}{4}}>4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}>32^{\frac{\pi}{10}}>8^{\frac{1}{2}}>16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}>(\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}>\frac{1}{243}>(\frac{1}{9})^{2,6}>$
$>(\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$

8. **a)** np. $(-2,\frac{1}{3})$, $(0,1)$, $(2,3)$
b) np. $(-2,2)$, $(0,1)$, $(2,\frac{1}{2})$
c) np. $(-3,\frac{1}{2})$, $(0,1)$, $(3,2)$

9. **a)** $f(x)=g(x)$ dla $x\in\{0,2\}$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 2;\infty)$
b) $f(x)=g(x)$ dla $x\in\{0,2\}$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 2;\infty)$
c) $f(x)=g(x)$ dla $x=1$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in\langle 1;\infty)$
d) $f(x)=g(x)$ dla $x=-1$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle$
e) $f(x)=g(x)$ dla $x=-1$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle$
f) $f(x)=g(x)$ dla $x\in\{-1,0\}$,
$f(x)\geqslant g(x)$ dla $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\{0\}$

10. **a)** $(-\infty;0)$ **b)** $\langle 0;\infty)$
c) $(-\infty;0\rangle$ **d)** $(0;\infty)$

11. $2\sqrt{2}<e^{1,5}<e^{\sqrt{3}}<(\sqrt{e})^4<9$

6.3. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (1)

Ć **1.** **a)** $g(D)=(-2;\infty)$, $y=-2$
b) $g(D)=(1;\infty)$, $y=1$
c) $g(D)=(2;\infty)$, $y=2$

2. **a)** $x=1$ **b)** $x=-2$ **c)** $x=1$

3. przesunąć o wektor: **a)** $[4,0]$ **b)** $[10,0]$
c) $[-\frac{1}{2},0]$

4. **a)** $g(D)=(2;\infty)$ **b)** $g(D)=(-2;\infty)$
c) $g(D)=(1;\infty)$

5. **a)**, **b)** malejąca **c)** rosnąca

Z **1.** **a)** $f(D)=(2;\infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y=2$ **b)**, **c)** $f(D)=(-1;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=0$, asymptota: $y=-1$
d) $f(D)=(1;\infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y=1$
e) $f(D)=(-4;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=-1$, asymptota: $y=-4$
f) $f(D)=(-3;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=-1$, asymptota: $y=-3$

2. $a=-3$

3. **a)** $a=-4$ **b)** $a=3$ **c)** $a=-16$

4. **a)** $x\in\langle -2;\infty)$ **b)** $x\in\langle 3;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-2\rangle$

5. **a)** $x\in(-\infty;2\rangle$ **b)** $x\in(-\infty;-1\rangle$
c) $x\in\langle -3;\infty)$

6. **a)** $f(D_f)=(-3;\infty)$, $g(D_g)=(-\infty;3)$
b) $f(D_f)=(1;\infty)$, $g(D_g)=(-\infty;-1)$
c) $f(D_f)=(-2;\infty)$, $g(D_g)=(-\infty;2)$

7. **a)** $g(x)=5^x-3$, $g(D)=(-3;\infty)$
b) $g(x)=5^{x-1}+2$, $g(D)=(2;\infty)$
c) $g(x)=5^{x+2}+4$, $g(D)=(4;\infty)$

8. **a)** $f(x)=0$ dla $x=4$, $f(D)=(-4;\infty)$
b) $f(x)=0$ dla $x=-1$, $f(D)=(-1;\infty)$
c) brak miejsc zerowych, $f(D)=(2;\infty)$
d) $f(x)=0$ dla $x=1$, $f(D)=(-\infty;3)$
e) $f(x)=0$ dla $x=2$, $f(D)=(-1;\infty)$
f) $f(x)=0$ dla $x=3$, $f(D)=(-\infty;1)$

6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (2)

Ć **1.** **a)** $f(D)=\langle 0;\infty)$, $y=2$
b) $f(D)=\langle 0;\infty)$, $y=4$
c) $f(D)=\langle 0;\infty)$, $y=1$

2. **a)** $f(D)=(-\infty;-1\rangle$ **b)** $f(D)=\langle -1;0)$
c) $f(D)=\langle 2;3)$

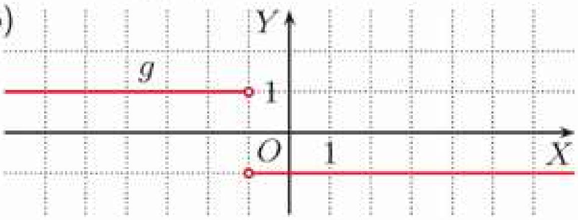
3. **a)** $f(D)=\langle 1;\infty)$, f maleje w $(-\infty;0\rangle$, rośnie w $\langle 0;\infty)$; $g(D)=\langle -1;\infty)$, g maleje w $(-\infty;0\rangle$, rośnie w $\langle 0;\infty)$; $h(D)=\langle 1;\infty)$, h maleje w $(-\infty;2\rangle$, rośnie w $\langle 2;\infty)$ **b)** $f(D)=(0;1\rangle$, f rośnie w $(-\infty;0\rangle$, maleje w $\langle 0;\infty)$; $g(D)=(1;2\rangle$, g rośnie w $(-\infty;0\rangle$, maleje w $\langle 0;\infty)$; $h(D)=(0;1\rangle$, h rośnie w $(-\infty;-1\rangle$, maleje w $\langle -1;\infty)$

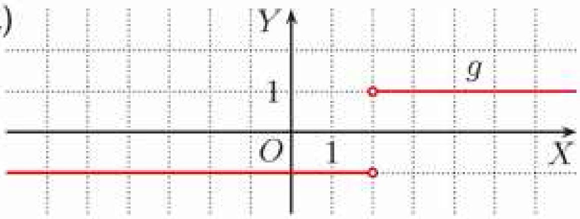
Z **1. a)** $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 2\rangle$, rośnie w $\langle 2; \infty)$
b) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 0\rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
c) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 2\rangle$, rośnie w $\langle 2; \infty)$
d) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 0\rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
e) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (2; 3\rangle$,
maleje w $\langle 0; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 0\rangle$
f) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (-\infty; -1\rangle$,
maleje w $\langle 1; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 1\rangle$

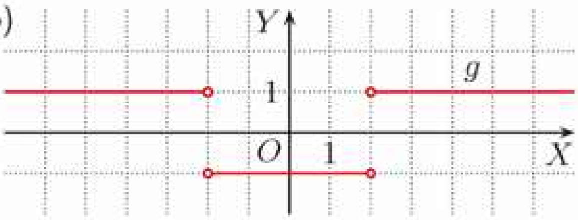
2. dla obydwu równań: $x = 0$, $x = 3$

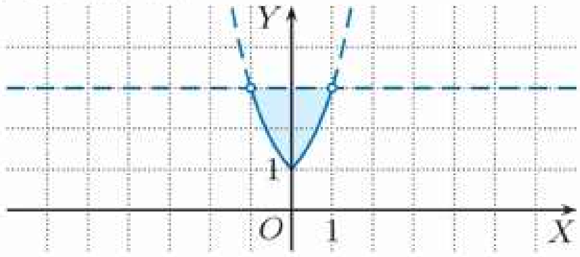
3. a) $x = 1$, $x = 2$
b) $x = 0$, $x = 1$
c) $x = -1$, $x = 1$
d) $x = -1$, $x = 1$ **e)** $x = 0$
f) $x = 1$, $x = 2$

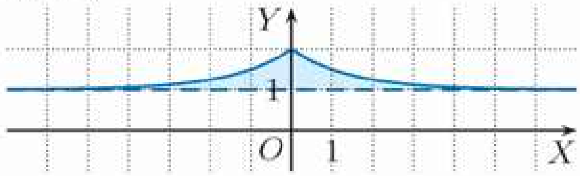
4. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \langle 1; \infty)$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in (-\infty; 1\rangle$
c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \langle 1; \infty)$
d) sprzeczne, $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$

5. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,
1 dla $m \in \{0\} \cup \langle 1; \infty)$,
2 dla $m \in (0; 1)$
b)


6. a)


b)


8. a) $(0, 1)$, $(0, 2)$


b) $(0, 2)$


6.5. Własności funkcji wykładniczej

Ć **1. a)** $x = 7$ **b)** $x = -6$ **c)** $x = \frac{11}{3}$
d) $x = -1$ **e)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -2$, $x = 2$
g) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ **h)** $x = 1$

2. a) $x = -\frac{3}{5}$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$ **c)** $x = -\frac{9}{5}$
d) $x = \frac{1}{5}$ **e)** $x = -1$, $x = 4$
f) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

3. a) $x \leqslant -5$ **b)** $x < \frac{3}{2}$ **c)** $x \geqslant \frac{5}{2}$
d) $x < 3$ **e)** $x \geqslant 0$
f) $x \in \langle -2; 2\rangle$ **g)** $x \in (-3; -1)$
h) sprzeczna **i)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

4. a) $x \geqslant 3$ **b)** $x < -2$ **c)** $x \leqslant 1$
d) $x \in (-2; 2)$
e) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
f) $x \in \mathbf{R}$

5. a) $x \geqslant -2$ **b)** $x \in \mathbf{R}$ **c)** sprzeczna

Z **1. a)** $x = -\frac{3}{2}$ **b)** $x = \frac{1}{2}$ **c)** $x = -\frac{10}{3}$
d) $x \in \mathbf{R}$ **e)** $x = -\frac{2}{5}$ **f)** $x = 3$
g) $x = -\frac{1}{4}$ **h)** $x = \frac{1}{2}$ **i)** sprzeczne

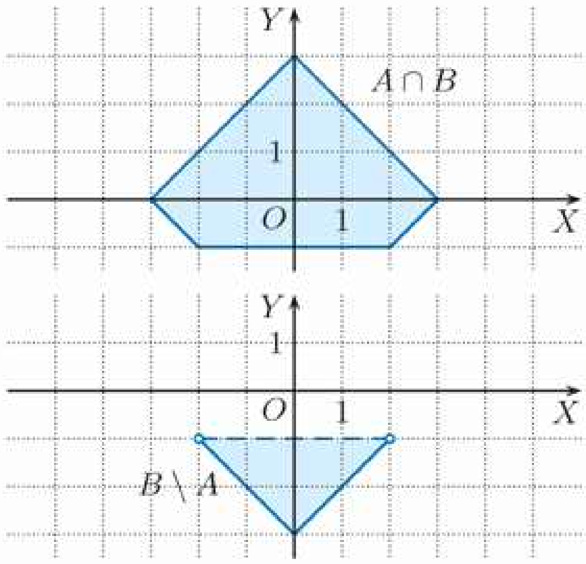
2. a) $x = -5$, $x = 5$ **b)** $x = -5$, $x = 5$
c) $x = -3$, $x = 3$ **d)** $x = -3$, $x = 3$
e) $x = 1$, $x = 3$ **f)** $x = 2$

3. a) $x \in (-\infty; 6)$ **b)** $x \in \langle 2; \infty)$
c) $x \in \langle \frac{17}{8}; \infty)$

4. a) $x \in (-1; 5)$
b) $x \in (0; 1\rangle$
c) $x \in \langle -\frac{3}{2}; 0)$

5. $x \in \langle 0; 1\rangle$

6.



7. a) 14 b) 28

6.6. Logarytm

Ć **1.** a) 5 b) 1 c) 0 d) -2 e) -6 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$

2. a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) 3 i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3

4. a) 100 b) 15 c) 10 d) -3 e) 3 f) 7 g) 10 h) 1

5. a) 0,1761 b) 0,0453 c) 0,2095 d) 0,2253

Z **1.** a) 6 b) 9 c) -5 d) -10 e) -3 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) -5 i) $-\frac{1}{4}$ j) 4 k) 10 l) $\frac{1}{2}$ m) $\frac{3}{2}$ n) -4 o) 4 p) -2

2. a) -1 b) -6 c) 7 d) -2 e) -3 f) 3 g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$

3. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$ d) 3 e) 81 f) $\frac{1}{16}$ g) 3 h) 4

4. a) 3 b) -1 c) 6 d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{2}$

5. a) $\frac{1}{2}$ b) 10 c) $-1\frac{2}{3}$ d) 0 e) 2 f) 2

6. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$

7. a) $b = 32$ b) $b = 2$ c) $b = 9$ d) $b = 1$ e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$ g) $b = 10^6$ h) $b = \frac{1}{10}$

8. a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$

9. a) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a a^3 = 3$
b) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$
c) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3} = -\frac{5}{2}$
d) $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $\log_{a^2} a^{10} = 5$
e) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_{\sqrt{a}} a^4 = 8$

6.7. Własności logarytmów

Ć **2.** Wszystkie równości są prawdziwe.

3. a) 2 b) 3 c) 3 d) -1 e) 2 f) -2 g) 1 h) 0 i) -3

4. a) 2 b) -1 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$

5. a) $\log_3 45$ b) $\log_2 500$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 144$ d) $\log_3 \frac{9}{4}$

Z **1.** a) 2 b) -3 c) 1 d) 2

3. a) $x > 0$, $\log x^5$ b) $x > 0$, $\log \frac{1}{x}$
c) $x \neq 0$, $\log 10x^2$ d) $x > 0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2}$
e) $x > 0$, $y > 0$, $\log_3 3x^2y$
f) $x > 0$, $y > 0$, $\log_5 \frac{2\sqrt{5}}{y^2}$
g) $x > 0$, $y > 0$, $\log_2 \frac{\sqrt{x}}{4y}$
h) $x \neq 0$, $\log \frac{x^6}{125}$

4. a) 1 b) 16 c) 12 d) 3

5. a) 0 b) -5 c) $-\frac{1}{8}$ d) $3\frac{1}{6}$

6. a) $2 + p$ b) $p - 2$ c) $2p - 2$ d) $4p + 2$

7. a) $2p + q$ b) $2p + 2q$ c) $p - 2q$ d) $p - q$ e) $2q - 3p$ f) $\frac{1}{2}q - p$ g) $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$ h) $\frac{1}{2}p - q$

8. a) 1,9 b) 1,7 c) 0,1 d) $-0,3$ e) 0,4 f) $-0,2$ g) 0,85 h) 1,6

6.8. Funkcja logarytmiczna

Ć **1.** $(1, 0)$

2. a) h b) f c) g

4. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$
b) $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$

5. a) $x \in \langle 4; \infty)$ b) $x \in (0; 4)$ c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in (0; 8\rangle$

6. a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3\rangle$ c) $x \in \left\langle \frac{1}{9}; \infty\right)$ d) $x \in (9; \infty)$ e) $x \in (0; 3\rangle$ f) $x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$ g) $x \in \left(\frac{1}{9}; \infty\right)$ h) $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right\rangle$

7. a) $x \in \left\langle \frac{1}{4}; 2\right\rangle$ b) $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \left\langle \frac{1}{4}; 2\right)$ d) $x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right\rangle$ e) $x \in \left\langle \frac{1}{4}; 4\right\rangle$ f) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$ g) $x \in \left\langle \frac{1}{4}; 4\right\rangle$ h) $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (8; \infty)$

Z 1. a) $a = 3$ b) $a = 5$
c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$

2. a) $(-\infty; 0)$ b) $\langle 1; \infty)$ c) $\langle -1; 3\rangle$
d) $\left\langle -\frac{1}{2}; 10\right\rangle$

3. a) $\langle -1; 0\rangle$ b) $\langle -3; 2\rangle$ c) $\left\langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$
d) $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right\rangle$

4. a) $x \in \left\langle \frac{1}{4}; \infty\right)$ b) $x \in \left(0; \frac{1}{4^8}\right\rangle$
c) $x \in (0; 4\rangle$ d) $x \in (2; \infty)$

5. a) $m > \frac{1}{2}$ b) $m < 0$
c) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

6. a) $m \in (2; 3)$
b) $m \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$
c) $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

7. a) $x > 100$ b) $x > 1000$ c) $x > 10^6$
d) $x > 10^{100}$

8. a) $>$ b) $<$

9. a) $x \in \langle 4; 64\rangle$ b) $x \in \left\langle \frac{1}{81}; 1\right)$ c) $x \in \langle 1; 2)$
d) $x \in \left\langle \frac{1}{25}; 625\right\rangle$ e) $x \in (10^{-6}; 10^3\rangle$
f) $x \in \left\langle \frac{8}{27}; \frac{3}{2}\right)$ g) $x \in \left\langle \frac{1}{32}; 32\right\rangle$
h) $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (8; \infty)$ i) $x \in \left(\frac{1}{81}; 81\right)$

11. a) 1 b) 0 c) 4 d) -1

6.9. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Ć 2. a) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
asymptota: $x = 1$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in \langle 3; \infty)$
b) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
asymptota: $x = -2$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in \langle 0; \infty)$
c) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$,
asymptota: $x = -4$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in (-4; -3\frac{1}{2}\rangle$

3. a) $D = (2; \infty)$, $x = 2$
b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$
d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
e) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
f) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

4. a), b), c) $D = (-\infty; 0)$

5. a) $D = (0; \infty)$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

6. a) $D_f = (0; \infty)$
$$g(m) = \begin{cases} 0 \text{ dla } m \in (-\infty; -1) \\ 1 \text{ dla } m = -1 \\ 2 \text{ dla } m \in (-1; \infty) \end{cases}$$
b) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$$g(m) = \begin{cases} 0 \text{ dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 \text{ dla } m = 0 \\ 4 \text{ dla } m \in (0; \infty) \end{cases}$$
c) $D_f = \mathbf{R}$
$$g(m) = \begin{cases} 0 \text{ dla } m \in (-\infty; 2) \\ 1 \text{ dla } m = 2 \\ 2 \text{ dla } m \in (2; \infty) \end{cases}$$

Z 1. a) 4 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$

2. a) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

3. a) $D = (-1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$
b) $D = (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
c) $D = (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(2; \frac{55}{27}\right)$
d) $D = (-3; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0)$
e) $D = (-4; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-2; \infty)$
f) $D = (1; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{28}{27}; \infty\right)$

4. a), b) $D = (0; \infty)$ c), d) $D = (-\infty; 0)$

5. a) $D = (-\infty; 1)$ b) $D = (-\infty; -2)$
c) $D = (-\infty; -1)$

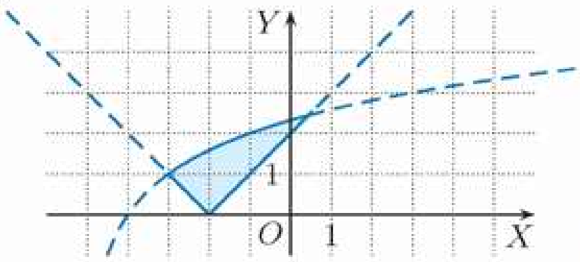
6. a) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
maleje w $(2; 3\rangle$, rośnie w $\langle 3; \infty)$
b) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
maleje w $(-1; 0\rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = 1$, $x = 3$,
maleje w $(-\infty; 2)$, rośnie w $(2; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = -2$, $x = 0$,
rośnie w $(-\infty; -1)$, maleje w $(-1; \infty)$
e) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
$f(x) = 0$ dla $x = -2$, $x = 2$,
maleje w $(-\infty; -1)$, rośnie w $(1; \infty)$
f) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
rośnie w $(-\infty; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; \infty)$

7. **a)** 0 dla $m \in (-\infty; -4)$,
2 dla $m = -4$,
4 dla $m \in (-4; \infty)$
b) 0 dla $m \in (2; \infty)$, 2 dla $m = 2$,
4 dla $m \in (-\infty; 2)$
c) 0 dla $m \in (-2; 2)$,
2 dla $m \in \{-2, 2\}$,
4 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

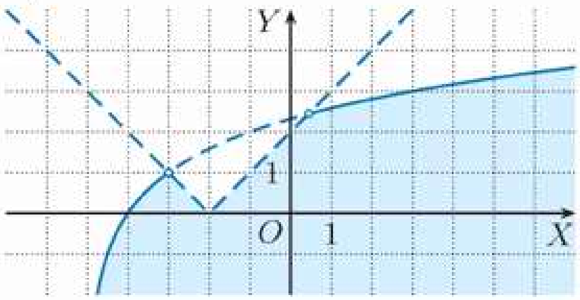
8. **a)** $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right\rangle \cup$
$\cup \langle 3; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) $x \in \langle -2; -1) \cup (1; 2\rangle$

9. **a)** $x = 0$, $x = 3$ **b)** $x = 1$, $x = 3$
c) $x = -1$

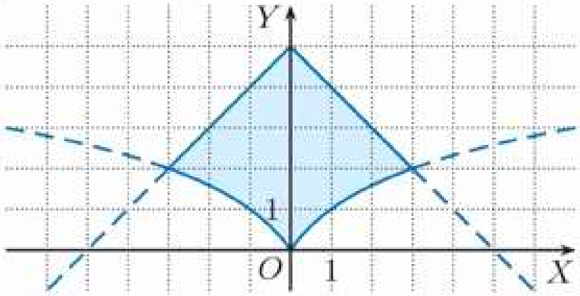
10. **a)** $A \cap B$



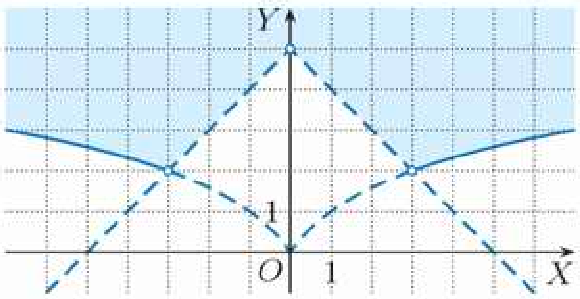
$A \setminus B$



b) $A \cap B$



$A \setminus B$



6.10. Zmiana podstawy logarytmu

Ć **1.** **a)** $\log \frac{1}{7}$ **b)** $\log_2 \sqrt[3]{3}$ **c)** $\log_{49} 121$
d) $\log_{0,1} \frac{1}{625}$ **e)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$ **f)** $\log_3 \frac{1}{12}$

Z **1.** **a)** $\log_2 \sqrt[4]{3}$ **b)** $\log_2 \frac{1}{7}$ **c)** $\log_2 121$
d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$ **e)** $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ **f)** $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$

3. **a)** $a = \frac{1}{2}p$ **b)** $a = -\frac{1}{3}p$ **c)** $a = 4p$
d) $a = \frac{1}{8}p$ **e)** $a = -2 - p$ **f)** $a = 3 + 3p$
g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ **h)** $a = -\frac{1}{3}p$

4. **a)** $x = 5$ **b)** $x = 81$ **c)** $x = 9$
d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$

8. $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ **a)** 2 **b)** -2

10. **a)** $D = (0; \infty)$, $f(x) = \log_2 x$
b) $D = (0; \infty)$, $f(x) = 2\log_2 x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = -\log_2 |x|$
d) $D = (0; \infty)$, $f(x) = -7\log_2 x$

11. **a)** 1,771 **b)** 0,613 **c)** $-3{,}170$

6.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

Ć **1.** $y_0 = 400$, po 10 godzinach: 97 200
2. **a)** po 4800 latach **b)** po 16 000 lat
3. o 75% po 56 latach, o 87,5% po 84 latach
4. **a)** 5700 lat **b)** 11 400 lat
5. 17 100 lat

Z **1.** **a)** 8 dni **b)** $2\frac{1}{3}$ dnia
2. 50 000 lat
3. **a)** 1835 lat **b)** 13 235 lat
4. 22 269 lat
5. **a)** około 67% **b)** około 13%

6.12. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** $x = \log_{\frac{5}{6}} 6$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = \log_{\frac{9}{7}} 63$
d) $x = \log_{\frac{9}{8}} \frac{1}{4}$ **e)** $x = \log_{15} \frac{3}{2}$
f) $x = \log \frac{16}{25}$

2. **a)** $x = 2$ **b)** $x = \log_3 18$ **c)** $x = -1$
d) $x = 0$ **e)** $x = -1$

3. **a)** $x = 2$ **b)** $x = 0$
c) $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $x = 1$, $x = 2$
e) $x = -1$, $x = 0$ **f)** $x = 1$

4. **a)** $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 2$ **c)** $x \neq 0$

5. **a)** $x = 0$ **b)** $x = 0$

6. **a)** $x = 1$ **b)** $x = 0$, $x = 1$
c) $x = 0$, $x = 2$ **d)** $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
e) $x = 4$ **f)** $x = 4$

7. **a)** $x < 6 + \log_5 3$ **b)** $x \leqslant \log_{\frac{7}{10}} 4 - 5$
c) $x > 2 - \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 10$

8. **a)** $x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$ **b)** $x \geqslant \log_{\frac{3}{5}} 625$
c) $x \leqslant \log_{\frac{7}{5}} 7$ **d)** $x > \log_{0,4} 25$

9. **a)** $x \leqslant \log_{\frac{4}{5}} 80$ **b)** $x < -2\log_{\frac{3}{2}} 3$
c) $x \neq 1$ **d)** $x > -3$

10. **a)** $x \in (-\infty; 0\rangle$ **b)** $x \in (-2; \infty)$
c) $x \in (1; \infty)$ **d)** $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$
e) $x \in (-1; \infty)$ **f)** $x \in (-\infty; \log_2 3\rangle$

11. **a)** -1 **b)** 2 **c)** -1

12. **a)** $x = -4$, $x = 4$ **b)** $x = -1$, $x = 2$
c) $x = 1$, $x = 8$ **d)** $x = -3$, $x = 3$

13. **a)** $x = \sqrt{2}$ **b)** $x = \frac{1}{8}$
c) $x = -16$, $x = 16$
d) $x = -3$, $x = 3$

14. **a)** $x = -2$, $x = 2$ **b)** $x = 27$
c) $x = -6$, $x = 6$ **d)** $x = 1$

15. **a)** $x = 4$ **b)** $x = \frac{3}{2}$ **c)** $x = \frac{2}{5}$
d) $x = 1$ **e)** $x = 3$ **f)** $x = 6$

16. **a)** $x = 64$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = \frac{4}{3}$ **d)** $x = \frac{1}{4}$

17. **a)** $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 3$

18. **a)** $x = \frac{1}{27}$, $x = 1$ **b)** $x = 1$, $x = 16$
c) $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$ **d)** $x = 16$
e) $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$ **f)** $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$
g) $x = \frac{1}{100}$, $x = 10\,000$
h) $x = 1$, $x = 100$ **i)** $x = 2$ **j)** $x = 2$

19. **a)** $x \in (2; 66\rangle$ **b)** $x \in (-2; -\frac{3}{2})$
c) $x \in (\frac{3}{2}; 7)$ **d)** $x \in \langle 1; 3\rangle$

20. **a)** $x \in (1; \frac{4}{3}\rangle$ **b)** $x \in (3; \infty)$ **c)** $x \in (1; 3\rangle$
d) $x \in (3; \infty)$ **e)** $x \in (2 + 2\sqrt{3}; \infty)$
f) $x \in (-\sqrt{6}; -2\rangle \cup \langle 2; \sqrt{6})$

21. **a)** $x \in (1; 3)$ **b)** $x \in (0; \frac{1}{2}\rangle$
c) $x \in (-1; 14)$

22. **a)** $x \in (\frac{1}{9}; 3)$ **b)** $x \in \langle \frac{1}{16}; \frac{1}{2}\rangle$
c) $x \in \langle 10^{-6}; 10\rangle$ **d)** $x \in (0; \frac{1}{4}\rangle \cup \langle 2; \infty)$
e) $x \in \langle \frac{1}{4}; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$ **f)** $x \in \{\frac{1}{2}\} \cup \langle 5; \infty)$

23. **a)** $x \in (0; 1) \cup (4; \infty)$ **b)** $x \in (1; 2\rangle$
c) $x \in \langle 1; \infty)$

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{4}{27}$ **d)** $\frac{1}{80}$

2. **a)** 25 **b)** 4 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 3

3. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 20 **d)** $\frac{4}{121}$

4. **a)** $3^{-\frac{1}{6}}$ **b)** $3^{\frac{3}{8}}$ **c)** $5^{\frac{7}{8}}$ **d)** $2^{\frac{53}{24}}$

5. **a)** $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} < 25\sqrt{5} < 5^{2\sqrt{2}}$
b) $4^{-0,5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 < (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
c) $3^{-0,5\pi} < (\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
d) $4,5^{-2} < 0,064 < 2,5^{-2,4} < \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$

6. **a)** $12,5893$ **b)** $0,1259$ **c)** $0,0126$
d) $0,0013$

7. **a)** $f(x) = 4^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8. **a)** $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
c) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
d) $f(D) = (-\infty; 4)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
e) $f(D) = (-\infty; 1)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
f) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$

9. **a)** 3 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** -5 **d)** $-\frac{1}{3}$ **e)** -3 **f)** $\frac{1}{6}$
g) 6 **h)** $\frac{1}{2}$ **i)** $\frac{2}{3}$ **j)** 8 **k)** $2\sqrt{2}$ **l)** $\frac{3}{2}$

10. **a)** 4 **b)** 8

11. **a)** $x = 16$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $x = -64$, $x = 64$

12. **a)** $x = 36$ **b)** $x = 9$ **c)** $x = 100$ **d)** $x = 10$

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)** 81 **b)** 20 **c)** 12

2. **a)** 15 **b)** -2 **c)** 81

3. **a)** $x > 0$, $y \neq 0$, $\frac{3}{xy}$
b) $x > 0$, $y > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
c) $a \neq 0$, $b > 0$, $\frac{1}{ab}$ **d)** $x > 0$, $y > 0$, xy

4. **a)** x **b)** y

5. **a)** $g(x) = -2^x$, $g(D) = (-\infty; 0)$
b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$, $g(D) = (-1; \infty)$

6. **a)** $x \in \langle 1; \infty)$ **b)** $x \in (3; 6\rangle$

7. **a)** maleje w $(-\infty; 3\rangle$, rośnie w $\langle 3; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 0; 1\rangle$,
rośnie w $\langle -1; 0\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; \infty)$
d) maleje w $(-\infty; 1)$, rośnie w $(1; \infty)$

7. **e)** maleje w $(1;2\rangle$, rośnie w $\langle 2;\infty)$
f) maleje w $(-\infty;0\rangle$ i w $(1;2\rangle$, rośnie w $\langle 0;1)$ i w $\langle 2;\infty)$

8. **a)** $D=(-\infty;1)$, $f(x)=0$ dla $x=0$
b) $D=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$
c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$, $f(x)=0$ dla $x=-2$, $x=-1$
d) $D=\mathbf{R}$, $f(x)=0$ dla $x=-1$, $x=0$
e) $D=(-\infty;1)\cup(4;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$
f) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, $f(x)=0$ dla $x=-\sqrt{11}$, $x=\sqrt{11}$

9. **a)** $D=(0;1)\cup(1;\infty)$
b) $D=(0;1)\cup(1;\infty)$
c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$

10. **a)** $x\in(-\infty;-3\rangle$ **b)** $x\in(-\infty;2\rangle$
c) $x\in\langle 4;\infty)$ **d)** $x\in(0;\frac{1}{2}\rangle$
e) $x\in(-\infty;-1\rangle$
f) $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty)$

11. **a)** $m\in(\frac{1}{2};\infty)$ **b)** $m\in(1;2)$
c) $m\in(\frac{1}{3};\infty)$

12. **a)** $m\in(4;\infty)$
b) $m\in(2;\infty)$
c) nie ma takiego m

13. **a)** $x=2$ **b)** $x=3$ **c)** $x=-2$

14. **a)** $x\leqslant 2$ **b)** $x\geqslant 4$ **c)** $x\leqslant -\frac{1}{4}$
d) $x>\frac{3}{2}$ **e)** $x>-\frac{3}{2}$ **f)** $x<-1$

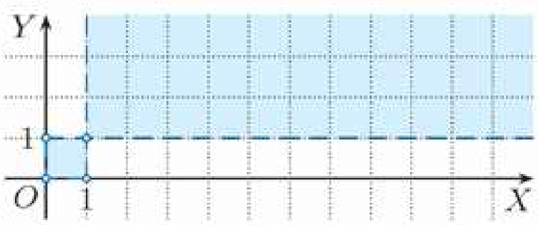
15. **a)** $f(-1)=2$ **b)** $f(8)=1$

16. **a)** $x=4$ **b)** $x=1024$ **c)** $x=16$

17. **a)** $\log_3 2$ **b)** $\log_3 5$ **c)** $\log_3 16$ **d)** $\log_3 \frac{1}{5}$

18. **a)** 9 **b)** $2\sqrt[3]{2}$ **c)** 0

19. **a)**



b)

Zadania testowe

1. B **2.** D **3.** C **4.** C **5.** D **6.** B **7.** A
8. C **9.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 10

2. 6

3. $a=4$

6. 1021

7. $|PQ|=2$

8. 30

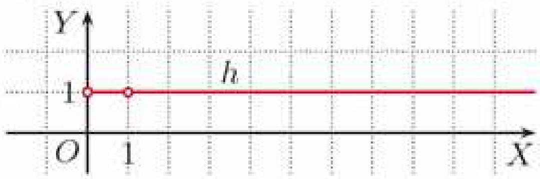
9. $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{2}$, 13

10. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-2$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

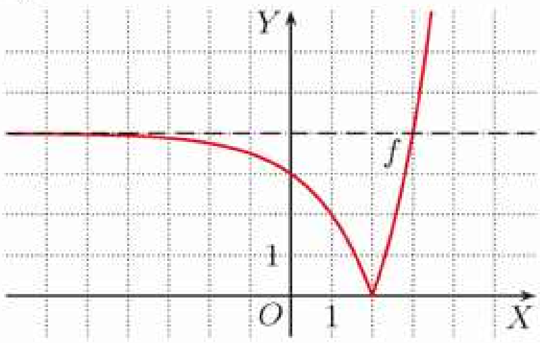
1. $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. **a)**



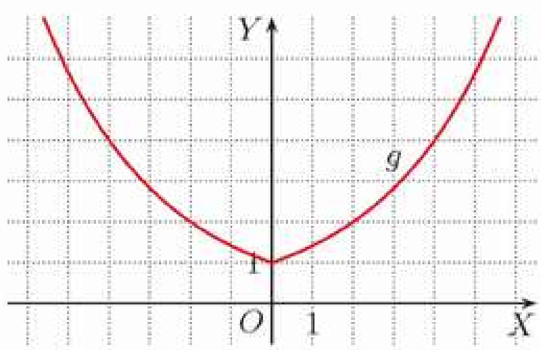
b) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{2}$

3. $m=2$



4. maleje w $(-\infty;-\frac{1}{4}\rangle$, rośnie w $\langle -\frac{1}{4};0)$, $g(x)\leqslant 2$ dla $x\in\langle -1;-\frac{1}{16}\rangle$

5. **b)**



7. $m\in(1;4)$

8. $-2+\sqrt{10}$

Indeks

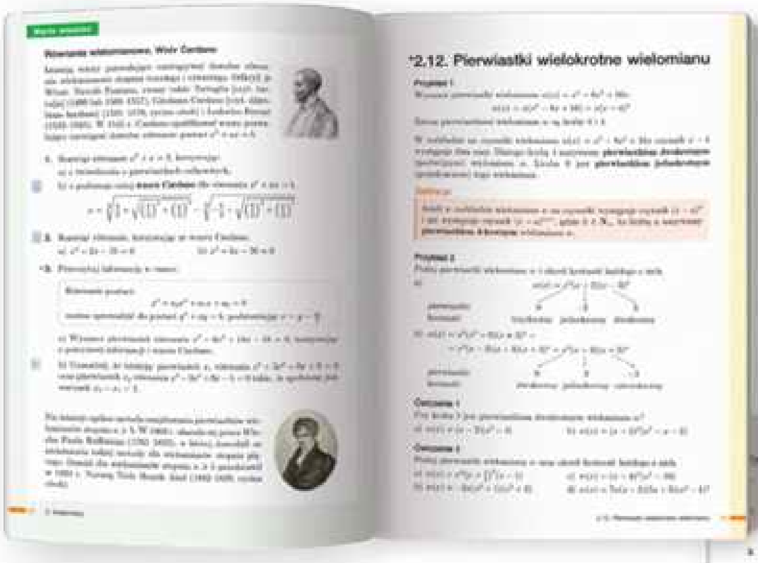
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	–	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175

nowa era Twoje mocne strony

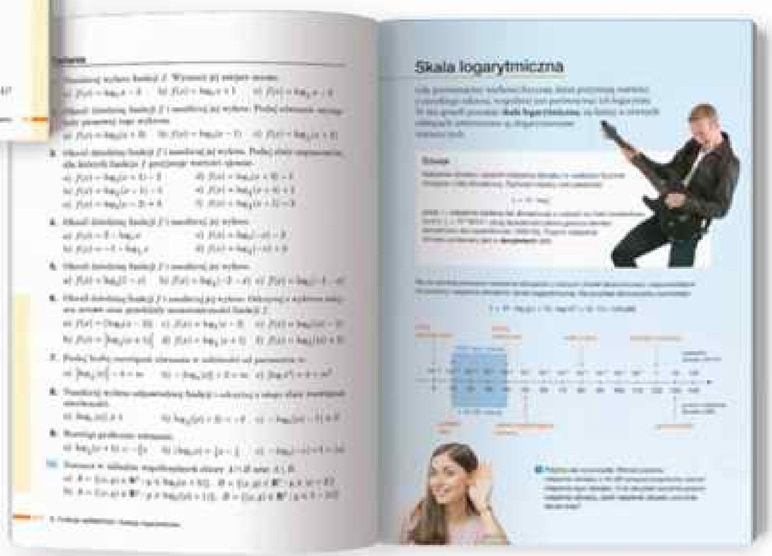
MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 2* do zakresu podstawowego i rozszerzonego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Dzięki niemu lekcje w szkole są ciekawe, a jednocześnie pozwala on na efektywną samodzielną naukę w domu.



Czytelny układ

Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu. Ułatwia to pracę na lekcjach i w domu.



Pomocne sekcje

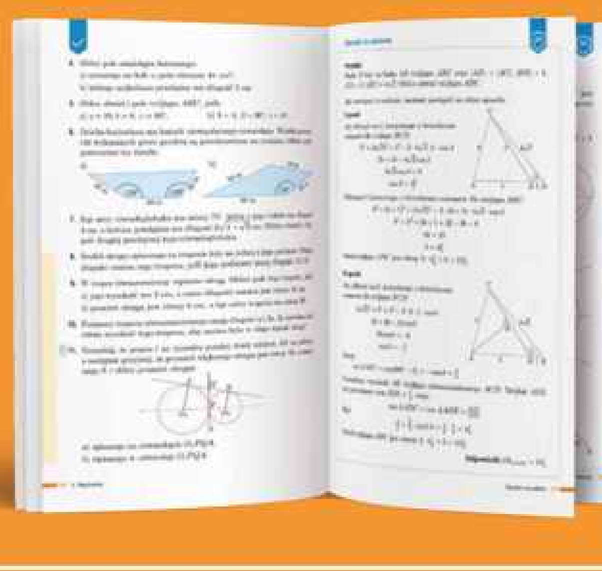
Warto powtórzyć pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnych poszukiwań.

WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika *MATeMAtyka 2* kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania* pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.



Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3900-2