DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 1

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Fotografia na okładce: BE&W/Alamy Stock Photo/beaubelle.

Fotografie: Archiwum NE s. 39 (Merkury, Ziemia, Jowisz); BE&W: Alamy Stock Photo - Alvey & Towers Picture Library s. 140, Bruce Leighty - Sports Images s. 152, Science History Images s. 53; Getty Images: Alexander Hassenstein/Staff s. 316 (pchniecie kulą), E+/BraunS s. 151, iStock/Getty Images Plus - buzbuzzer s. 61, westphalia s. 50, ventdusud s. 291; Shutterstock: Africa Studio s. 177, Alex-505 s. 134 (10 centów), Amanda Carden s. 39 (Słońce), Bojan Pavlukovic s. 15, ch123 s. 279, Claudio Divizia s. 49, Delpixel s. 137 (łódź na rzece), Gertjan Hooijer s. 316 (gaszenie pożaru na statku), Inger Eriksen s. 225, Jonathan Larsen s. 322 (radioteleskopy), Kurt Kleemann s. 322 (reflektor), mexrix s. 316 (morze), Mwiklik s. 207, Nadiia Korol s. 139, Potapov Alexander s. 97, Repina Valeriya s. 253, rsooll s. 134 (5 centów), Tongsai s. 137 (kuter), Tony Baggett s. 134 (25 centów), Vaklav s. 320; Thinkstock/Getty Images: Hemera/Georgios Kollidas s. 69; Lech Chańko: s. 9, 22, 115, 135, 197, 278.

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

2. Język matematyki

3. Układy równań

4. Funkcje

5. Funkcja liniowa

6. Planimetria

7. Funkcja kwadratowa

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

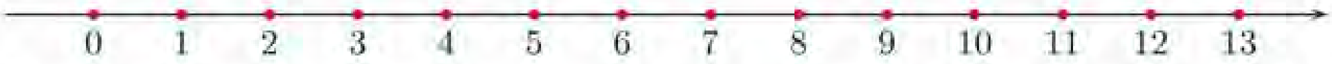
1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane statku pilotowego przedstawionego na zdjęciu: długość 15 m, szerokość 5 m, zanurzenie 2,3 m, prędkość maksymalna 10 węzłów.
Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to długość łuku południka wyznaczonego przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Zatem:

$$1 \text{ Mm} = \frac{40\,000 \text{ km}}{360 \cdot 60} \approx 1{,}851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że 1 Mm $= 1852$ m.

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, \ldots$ jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n+1$ jest następna (większa o 1), i tak po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.
Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbf{N}$.

Definicja

Niech $m \neq 0$ i n będą liczbami naturalnymi. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n, to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m.

Zauważ, że:
– liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
– liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
– każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:
– zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
– zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.
Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.
Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, a liczbę nieparzystą – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 2

Czy prawdziwe jest stwierdzenie?

a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy powiedzieć, że liczba 45 dzieli się przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

Dzieląc 47 przez 3, otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : 3 = 15$ reszta 2

Oznacza to, że liczbę 47 można przedstawić w postaci: $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci: $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**. Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

a) parzyste,

b) mniejsze od 20,

c) większe od 20 i mniejsze od 50,

d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest **rozkładem na czynniki pierwsze**.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb: 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb naturalnych – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\mathrm{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\mathrm{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\mathrm{NWD}(x, y)$ oraz $\mathrm{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18,\ y = 30$
b) $x = 15,\ y = 50$
c) $x = 24,\ y = 72$
d) $x = 144,\ y = 192$
e) $x = 84,\ y = 105$
f) $x = 196,\ y = 420$

Ćwiczenie 8

Ile wynosi $\mathrm{NWD}(x, y)$ i $\mathrm{NWW}(x, y)$, jeśli żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby naturalnej x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby naturalnej y?

Zadania

1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:

a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?

2. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4.

a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$

3. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb: 1, 2, 3?

a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$

4. Podaj sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest:

a) $2n + 1$, b) $2n - 1$, c) $2n - 5$, d) $4n + 3$.

D **5.** Uzasadnij, że iloczyn:

a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,

b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,

c) czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

6. Oblicz wartość $\frac{\mathrm{NWW}(x,y)}{\mathrm{NWD}(x,y)}$, gdy:

a) $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, $y = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3$,

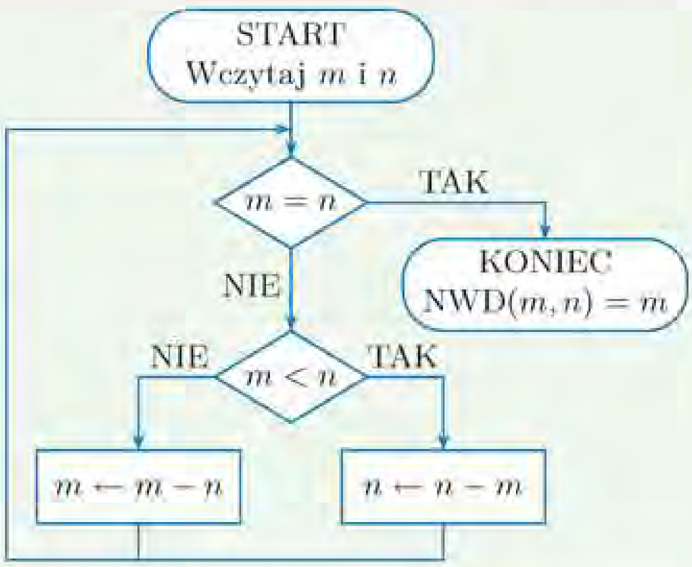
b) $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17$, $y = 2 \cdot 3^4 \cdot 17$,

c) $x = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, $y = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$,

d) $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$, $y = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Czy wiesz, że...

Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych można obliczyć, korzystając z opisanego przez Euklidesa w „Elementach" algorytmu, który przedstawiono obok. Wykorzystuje on fakt, że dzielnik liczb naturalnych m i n jest również dzielnikiem różnicy tych liczb.



7. Korzystając z algorytmu Euklidesa, oblicz NWD liczb:

a) 48, 72, b) 360, 600, c) 253, 69.

Warto powtórzyć

Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb: 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:

a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?

2. Podaj cechy podzielności liczby naturalnej przez 4 oraz przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 4? Czy jest podzielna przez 8?

a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$

3. Przez którą z liczb: 6, 12, 15 jest podzielna liczba:

a) 775 584, b) 868 470, c) 894 665, d) 501 474?

4. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez:

a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.

5. Nie wykonując dzielenia, podaj, które spośród liczb: 15, 45, 75, są dzielnikami danej liczby.

a) 1155 b) 9825 c) 5165 d) 8235

Czy wiesz, że...

Dana jest liczba naturalna x. Niech s_n oznacza sumę cyfr tej liczby znajdujących się w jej zapisie na miejscach nieparzystych, a s_p – na miejscach parzystych. Liczba x jest podzielna przez 11, gdy liczba $s_n - s_p$ jest podzielna przez 11. Na przykład dla liczby $x = 6\,291\,978$ mamy:

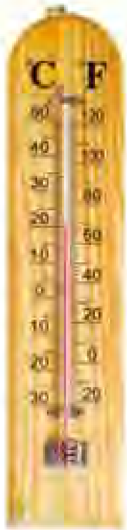
$$s_n = 6 + 9 + 9 + 8 = 32, \quad s_p = 2 + 1 + 7 = 10$$

Liczba $s_n - s_p = 22$ jest podzielna przez 11, więc liczba x też jest podzielna przez 11.

6. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 11. Skorzystaj z podanej cechy podzielności.

a) $x = 9\,191\,809$ b) $x = 13\,602\,479$ c) $x = 8\,354\,311$

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą **Z**.
Każda liczba całkowita jest albo parzysta, albo nieparzysta.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie oś liczbową z zerem i liczbami ujemnymi widzimy w zwykłym termometrze, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci. Wynik zapisz w zeszycie.

a) $42 - 78$
b) $-47 - (-63)$
c) $-240 \cdot (-3)$
d) $-342 + (-139)$
e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w przypadku dzielenia, gdyż same liczby całkowite już nie wystarczają, aby zapisać wynik. Np. po podzieleniu $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ otrzymujemy ułamek.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.
Zwróć uwagę, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^{\,1}}{48 \cdot \cancel{10}_{\,1}} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^{\,1}}{8 \cdot \cancel{6}_{\,1}} = \frac{3}{8}$$

Ułamek $\frac{3}{8}$ jest nieskracalny.

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

a) $x = \frac{27}{72}$, $y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}$, $y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}$, $y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę ułamków $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik:

a) iloczyn liczb 12 i 18, b) NWW$(12, 18)$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$

b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$

b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

Działania na liczbach wymiernych

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

Zadania

1. Jakim liczbom odpowiadają punkty zaznaczone na osi?

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Oblicz.

a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + 0{,}25\right)$

b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $-\left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - 0{,}125$

c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

a) $\dfrac{x - y}{y - z}$ b) $\dfrac{x + y - z}{y + z}$ c) $\dfrac{x - y + 2z}{x + y + 3z}$

4. Uporządkuj liczby: x, y, z w kolejności rosnącej.

a) $x = \frac{1 - 0{,}125 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{8}{7}}$, $y = 2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$, $z = \frac{24}{11} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}75 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$

b) $x = \frac{2\frac{3}{4} : \frac{1}{7} - 22}{6 - (-5)} + 1\frac{3}{4}$, $y = \frac{\frac{6}{11} - \frac{15}{45}}{\frac{11}{3} - 2\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{3}{4}$, $z = 2 - \frac{8 - \frac{1}{2}}{12 + \frac{1}{2}}$

5. Oblicz.

a) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} + \left(3\frac{2}{17} - 4\frac{6}{13}\right) \cdot \left(0{,}75 - \frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3} - \left[0{,}8 \cdot \frac{3}{(-2)^2} - \frac{(-2)^2}{5}\right] : \left(-1\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) - \left(0{,}25 - \frac{3}{8} : 0{,}625\right)$

d) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) : \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)$

e) $\frac{3}{5} - \left(1{,}4 \cdot \frac{5}{14} - \frac{0{,}9}{3^2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right)$

f) $\frac{5\frac{3}{4} - 8\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{27}\right)$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{8} - 1\frac{1}{3}\right)\right)$

h) $\left(\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right) : 4\frac{1}{4}$

D **6.** Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z.

a) $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$

b) $x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$, $y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$, $z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$

7. Ułamki postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, nazywamy **ułamkami egipskimi**. Przeczytaj informację obok i przedstaw ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{2}{17}$ c) $\frac{2}{31}$

Czy wiesz, że...
Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla:

$$a = \frac{n+1}{2},\ b = \frac{n(n+1)}{2}$$

D **8.** Uzasadnij wzór $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, gdzie $n > 0$ jest liczbą naturalną, a następnie oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

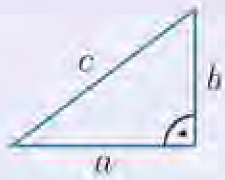
9. Woda płynąca z kranów: A, B i C może napełnić basen w ciągu 6 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{12}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{15}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C?

10. Woda płynąca z kranu A napełnia zbiornik w ciągu 6 godzin. By napełnić ten sam zbiornik wodą płynącą tylko z kranu B, potrzeba 9 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie zbiornika, jeśli kran B odkręcono 4 godziny po odkręceniu kranu A?

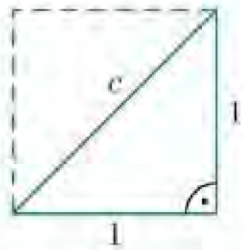
1.3. Liczby niewymierne

W VI wieku p.n.e. Grecy sformułowali twierdzenie znane obecnie jako **twierdzenie Pitagorasa**.

> W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:
> $$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1.



Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).

Można udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$. Tam, gdzie jest to potrzebne, korzysta się z odpowiednio dokładnych przybliżeń. Na przykład $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309504 88$.

Innymi przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.
Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (gdy jest kwadratem liczby naturalnej, np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną. Np. $\sqrt{82}$ nie jest liczbą naturalną, gdyż $9 = \sqrt{81} < \sqrt{82} < \sqrt{100} = 10$, jest więc liczbą niewymierną. Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród poniższych liczb wskaż liczby niewymierne.

a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

W dowodzie niewymierności liczby $\sqrt{2}$ wykorzystamy następujący fakt: jeśli liczba 2 jest dzielnikiem liczby n, to w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n^2 występuje ona parzystą liczbę razy, np.:

$$18^2 = 18 \cdot 18 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{dwukrotnie}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$56^2 = 56 \cdot 56 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{sześciokrotnie}} \cdot 7 \cdot 7$$

Dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieje ułamek $\frac{m}{n}$ (gdzie m i n są liczbami całkowitymi, $n \neq 0$) taki, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \text{ czyli } 2 = \frac{m^2}{n^2}$$
$$\text{wtedy } 2n^2 = m^2$$

Zauważmy, że ostatnia równość nie może zachodzić, gdyż oznaczałaby ona, że przy rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej i nieparzystą liczbę razy po stronie lewej. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{n}$, było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

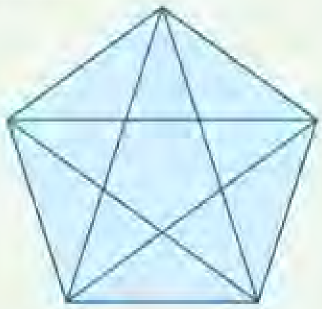
Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*). Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ b) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ c) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$

Ćwiczenie 3

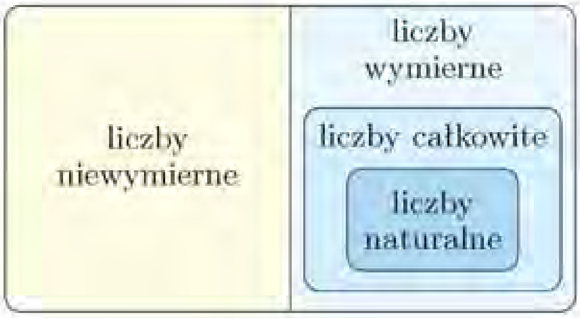
Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy literą **R**.

Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy „liczbę rzeczywistą”.



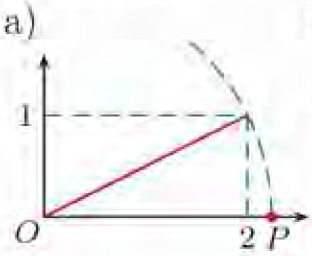
Zadania

1. Wśród poniższych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

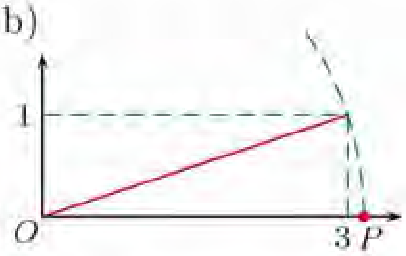
a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ c) $\sqrt{169}$, $\sqrt{256}$, $\sqrt{286}$

2. Jakiej liczbie odpowiada punkt P zaznaczony na osi liczbowej? Czy jest to liczba wymierna?

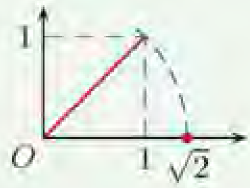
a)



b)



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu odpowiadającego liczbie $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y. Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a) $x = 2$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ e) $x = 5$, $y = 12$

b) $x = 3$, $y = 4$ d) $x = 8$, $y = 10$ f) $x = 7$, $y = 24$

4. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$

5. Podaj największą liczbę naturalną n taką, że ($\pi \approx 3{,}14$):

a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.

6. Dane są liczby niewymierne: p, q, r, s.

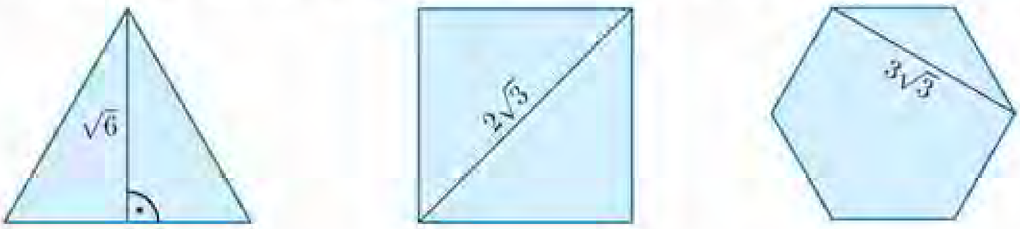
$p = 3 - 2\sqrt{3}$ $q = 2\sqrt{3}$ $r = 2\sqrt{3} - 7$ $s = 7\sqrt{3}$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,

b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

7. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?



D **8.** Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$, udowodnij, że liczba x jest niewymierna.

a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = \sqrt{5}$ c) $x = \sqrt{6}$

D **9.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby całkowitej $k \neq 0$ jest liczbą niewymierną.

Dowód. Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba całkowita $k \neq 0$ takie, że iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n $(n \neq 0)$ takie, że $k \cdot x = \frac{m}{n}$. Wówczas $x = \frac{m}{k \cdot n}$, z czego wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

a) iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej $w \neq 0$ jest liczbą niewymierną,

b) suma dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej w jest liczbą niewymierną.

10. Przeczytaj podane obok twierdzenie. Podaj przykład liczby niewymiernej x takiej, że:

Między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi na osi liczbowej znajdują się liczby niewymierne.

a) $1 < x < 2$, b) $0{,}01 < x < 0{,}02$, c) $5{,}001 < x < 5{,}002$.

D **11.** Uzasadnij, że jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to jego pole powierzchni wyraża się liczbą wymierną, a objętość – liczbą niewymierną.

D **12.** Uzasadnij, że wśród dzielników liczby 12 są takie liczby: a, b, c, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości: a, b, c, jest liczbą wymierną.

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach: 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0{,}15$; $\frac{37}{1000} = 0{,}037$; $5\frac{7}{10} = 5{,}7$.

Zapis po prawej stronie nazywamy **postacią dziesiętną** lub **rozwinięciem dziesiętnym** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3{,}25$$

Takie rozwinięcie liczby nazywamy skończonym.

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166666666\ldots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\,571428\,571428\ldots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0{,}(571428)$.

Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

W rozwinięciu dziesiętnym nawias oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{52}{25}$ e) $\frac{4}{125}$

b) $\frac{11}{25}$ d) $\frac{143}{50}$ f) $\frac{17}{250}$

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) $0{,}(1234)$ b) $5{,}(732)$ c) $2{,}6(435)$ d) $0{,}32(1410)$

W tabeli poniżej podano długości okresów rozwinięć dziesiętnych nieskracalnego ułamka $\frac{m}{n}$ dla wybranych wartości n.

n	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
długość okresu	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że jeśli ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są naturalne oraz $n \neq 0$, ma rozwinięcie okresowe, to długość okresu jest mniejsza od n.

Wskazówka. Liczba różnych reszt przy dzieleniu liczby m przez liczbę n jest mniejsza od n.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub okresowej.
Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. $0{,}101001000100001\ldots$

Ćwiczenie 4

Które z podanych niżej liczb mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$

b) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

W 2002 roku Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,14159265358979323846264338327950288419
7169399375105820974944592307816406286208
9986280348253421170679821480865132823066
4709384460955058223172535940812848111745
0284102701938521105559644622948954930381
9644288109756659334461284756482337867831
6527120190914564856692346034861045432664
8213393607260249141273724587006606315588

Reguła zaokrąglania

Do przybliżenia liczby w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami:

- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Ćwiczenie 5
Zaokrąglij do liczby całkowitej.

a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Ćwiczenie 6
Podaj przybliżoną wartość π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Błąd przybliżenia jest równy różnicy liczby i jej przybliżenia.

Ćwiczenie 7
Zaokrąglij liczbę do dwóch miejsc po przecinku. Podaj błąd przybliżenia.

a) 6,7824 b) 8,4653 c) 7,8951 d) 9,9962 e) 5,9039

Zadania

1. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby.

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{1}{60}$ c) $\frac{1}{300}$ d) $\frac{5}{900}$ e) $\frac{11}{30}$ f) $\frac{17}{90}$

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\ldots$

$\frac{1}{6} = 0{,}16666666\ldots$

$\frac{1}{9} = 0{,}11111111\ldots$

2. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglij tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345) f) 3,123(5037)

3. Znajdź cyfry a i b liczby o rozwinięciu okresowym $7{,}19(1ab693)$, jeśli wiadomo, że w tej liczbie na jedenastym miejscu po przecinku występuje cyfra 3, a na dwudziestym drugim cyfra 6.

4. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone.

a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^k \cdot 5^l$ dla pewnych liczb naturalnych k i l.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Przedstaw liczbę 0,(12) w postaci ułamka zwykłego.
>
> $x = 0{,}121212\ldots$
>
> $100x = 12{,}121212\ldots$ Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.
>
> $100x = 12 + x$
>
> $99x = 12$
>
> $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) 0,(36) b) 3,(72) c) −6,(24) d) 0,(9) e) 41,7(9)

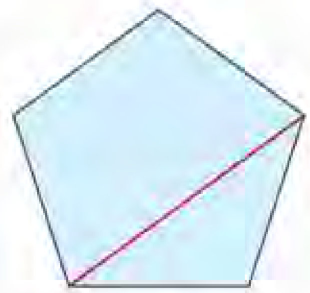
6. Liczby $x = 0{,}(6)$ i $y = 4{,}(36)$ przedstaw w postaci ułamka zwykłego, a następnie oblicz: $x + y$, $x^2 - y$, $x + \frac{1}{y}$.

7. Wyznacz cyfry x i y liczby o rozwinięciu okresowym $0{,}(1x2y3)$, jeśli wiadomo, że cyfra znajdująca się na miejscu dwudziestym trzecim po przecinku jest dwukrotnie większa od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejsza od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym.

8. a) Odgadnij regułę, zgodnie z którą zostały wypisane kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 0,10110111011110..., a następnie podaj sześć następnych cyfr jej rozwinięcia. Czy jest to liczba wymierna?

b) Odgadnij regułę, zgodnie z którą zostały wypisane kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 0,12345678910111213..., a następnie podaj, jaka cyfra występuje na 31. miejscu po przecinku w tym rozwinięciu. Czy jest to liczba wymierna?

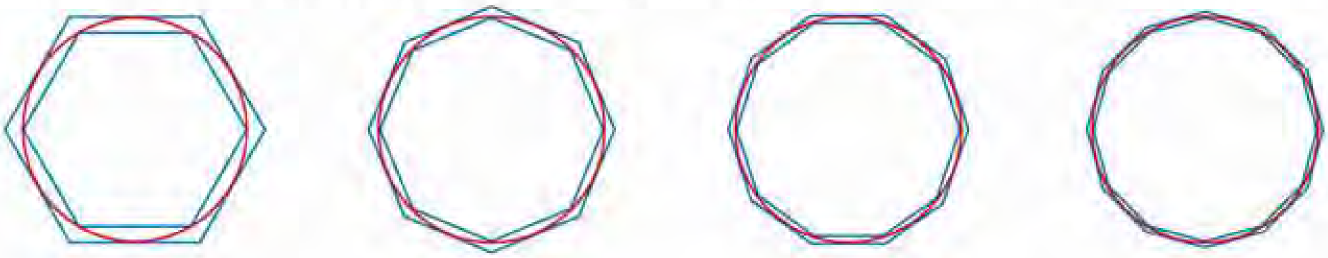
9. Pięciokąt foremny o boku 1 ma przekątną o długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180$. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest nazywana **złotą liczbą** (patrz str. 61). Jej coraz lepszymi przybliżeniami są ułamki tworzone w następujący sposób: jako pierwszy bierzemy dowolny ułamek $\frac{a}{b}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi oraz $a > b > 0$. Następny ma wówczas postać $\frac{a+b}{a}$, a każdy kolejny powstaje z poprzedniego w analogiczny sposób. Na przykład, jeśli weźmiemy $a = 5$ i $b = 4$, to otrzymamy: $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{14}{9}$ itd. Wyznacz pierwszych osiem takich ułamków i sprawdź, które z nich przybliżają złotą liczbę z dokładnością do 0,005.



Warto wiedzieć

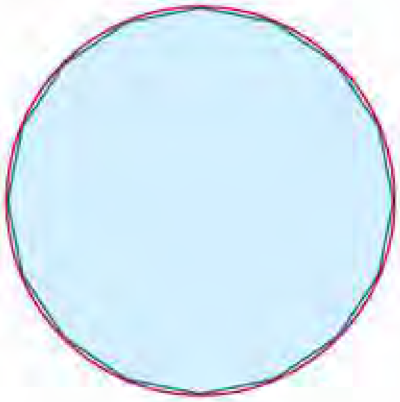
Długość okręgu. Liczba π

Już Archimedes wiedział, że długość okręgu można wyznaczyć z dowolną dokładnością, rozpatrując wielokąty foremne wpisane w okrąg oraz na nim opisane. Wraz ze wzrostem liczby boków wielokątów foremnych ich obwody dają coraz dokładniejsze przybliżenia długości okręgu.



1. W tabeli podano długości boków wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Dla każdego wielokąta podaj długość jego boku oraz połowę obwodu z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Dla którego z tych wielokątów długość połowy obwodu różni się od liczby π o mniej niż 0,01?

Wielokąt foremny	Długość boku
kwadrat	$\sqrt{2}$
8-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
16-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
32-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
64-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$



Istnieje wiele wzorów, za pomocą których można otrzymać przybliżenie liczby π. Oto dwa z nich:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots$$ wzór Wallisa

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots$$ wzór Leibniza

Powyższe wzory są jednak mało praktyczne – np. aby otrzymać cztery cyfry po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π, korzystając ze wzoru Leibniza, należy zsumować ponad 100 000 składników.

2. Znajdź informacje na temat innych wzorów pozwalających otrzymać przybliżenie liczby π.

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, której kwadrat jest równy a.

$$\sqrt{a} = b,\ \text{gdy } b^2 = a \text{ i } b \geqslant 0$$

Przykład 1

$\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, bo $(0{,}4)^2 = 0{,}16$

$\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6, chociaż $(-6)^2 = 36$, ponieważ w definicji założyliśmy, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{625}$ g) $\sqrt{1{,}21}$

b) $\sqrt{225}$ e) $\sqrt{2500}$ h) $\sqrt{3{,}61}$

c) $\sqrt{324}$ f) $\sqrt{8100}$ i) $\sqrt{4{,}41}$

$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
$20^2 = 400$
$21^2 = 441$

Ma miejsce następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geqslant 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

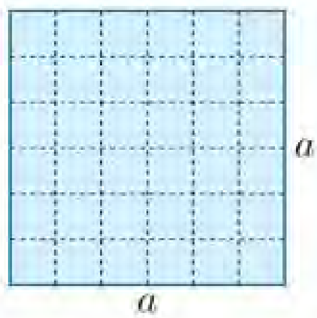
Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1{,}2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3{,}24\ \text{cm}^2$, b) $1024\ \text{cm}^2$.

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład 2

a) $\sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$

b) $\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12{,}5 \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt{4 \cdot 81}$, $\sqrt{25 \cdot 0{,}36}$, $\sqrt{0{,}09 \cdot 361}$

b) $\sqrt{\frac{121}{144}}$, $\sqrt{\frac{361}{400}}$, $\sqrt{\frac{576}{625}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$, $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$

b) $\sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$

c) $\sqrt{0{,}25} + \sqrt{1{,}44} + \sqrt{6{,}25}$

d) $\sqrt{3{,}61} - \sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}09}$

e) $\sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$

f) $\sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$

D **2.** Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$, b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że:

a) $\sqrt{2} < n < \sqrt{33}$, b) $\sqrt{10} < n < \sqrt{140}$, c) $\sqrt{80} < n < \sqrt{300}$.

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{48}$ e) $\sqrt{108}$ g) $\sqrt{392}$

b) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{96}$ f) $\sqrt{252}$ h) $\sqrt{450}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} =$
$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

5. Doprowadź do postaci $a\sqrt{2}$.

a) $4\sqrt{2} + \sqrt{8}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{98}$ e) $\sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$

b) $\sqrt{32} - 3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{200} - \sqrt{50}$ f) $\sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$

6. Doprowadź do postaci $a\sqrt{b}$.

a) $7\sqrt{5} + \sqrt{20}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ e) $0{,}2\sqrt{50} + 0{,}8\sqrt{72} - 0{,}3\sqrt{32}$

b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ d) $\sqrt{45} - \sqrt{125}$ f) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak, jak w przykładzie.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$

b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

10. Oblicz.

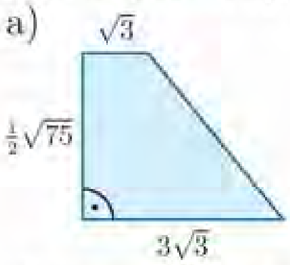
a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

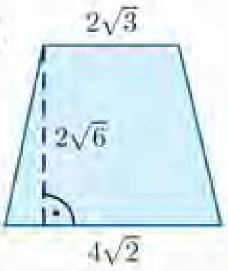
11. Wykonaj działania.

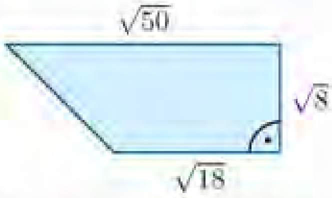
a) $2\sqrt{3}\left(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)$ c) $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{8} + \sqrt{18}\right)$ d) $\sqrt{10}\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{45} - \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

12. Oblicz pole trapezu.

a) 

b) 

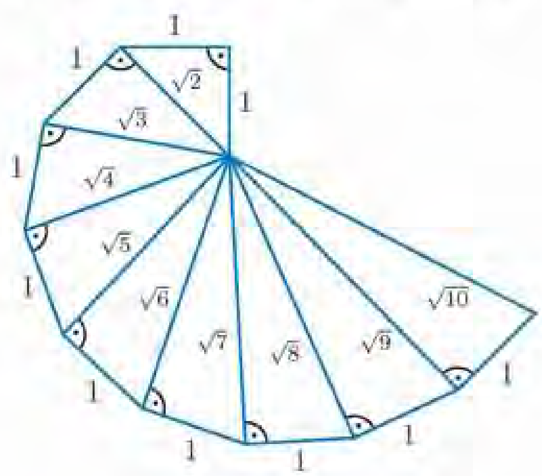
c) 

13. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości x i y.

a) $x = 3\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$ b) $x = 2\sqrt{27}$, $y = 4\sqrt{12}$ c) $x = 2\sqrt{10}$, $y = \sqrt{50}$

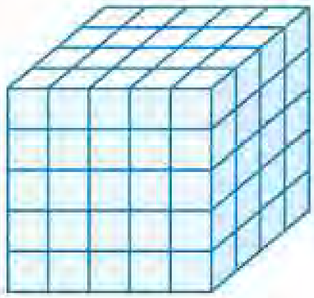
14. Na rysunku obok przedstawiono spiralę Teodorosa. Pokazuje ona, jak konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości $\sqrt{n}$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną, gdy dany jest odcinek o długości 1. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować odcinek o długości:

a) $\sqrt{17}$, b) $\sqrt{38}$.



1.6. Pierwiastek sześcienny

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V. Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125\ \mathrm{cm}^3$ jest równa 5 cm. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$

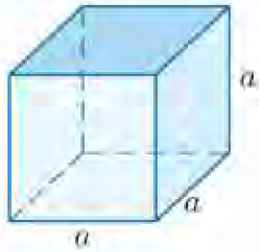
c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

d) $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$, bo $0{,}6^3 = 0{,}216$

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3, więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V.

a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych obok.

$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$11^3 = 1331$

a) $\sqrt[3]{512}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$

c) $\sqrt[3]{1331}$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$

e) $\sqrt[3]{1{,}331}$

f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.
Na przykład $\sqrt[3]{(11)^3} = 11$ oraz $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3 = 9$.

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego.

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0{,}001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0{,}1 \cdot 7 = 0{,}7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu
$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$
Pierwiastek ilorazu
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj podany przykład. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego, definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.
Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.
$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ogólnie dla pierwiastka n-tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$	Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0{,}0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$ g) $\sqrt[8]{256}$ i) $\sqrt[10]{1024}$

b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0{,}000\,01}$ f) $\sqrt[7]{-1}$ h) $\sqrt[7]{-128}$ j) $\sqrt[9]{-512}$

Zadania

1. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0{,}125} + \sqrt[3]{0{,}001}$

b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{32}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{135}$ d) $\sqrt[3]{375}$ e) $\sqrt[3]{108}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt[3]{2}$ d) $4\sqrt[3]{10}$ e) $6\sqrt[3]{5}$

5. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2{,}25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0{,}08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$

b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}064}}{\sqrt[3]{0{,}125}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{0{,}081}}{\sqrt[3]{0{,}192}}$

7. Porównaj liczby.

a) $4\sqrt[3]{2}$ i $2\sqrt[3]{4}$ b) $3\sqrt[3]{5}$ i $2\sqrt[3]{15}$ c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ i $\frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

D **8.** Uzasadnij, że podana liczba jest liczbą naturalną.

a) $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$ c) $\sqrt[3]{14^2-13^2}$ e) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt[3]{1^3+6^3+8^3}$ d) $\sqrt[3]{11^2+\sqrt[3]{64}}$ f) $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{72}$

9. Objętość prostopadłościanu o wymiarach x cm $\times$ y cm $\times$ z cm jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

a) $x=4,\ y=4,\ z=32$ b) $x=16,\ y=20,\ z=25$

10. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Oblicz wysokość wieży, jeśli jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach:

a) 4 cm $\times$ 6 cm $\times$ 16 cm, b) 6,25 cm $\times$ 7,5 cm $\times$ 8 cm.

11. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[3]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0{,}01}$ e) $2\sqrt[10]{5}$

12. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{256}+\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{10\,000}$

c) $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{16}-\frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0{,}001}}-\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[8]{32}-\sqrt[10]{1024}+\sqrt[5]{1024}$

e) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$

f) $6\sqrt[4]{0{,}0625}-3\sqrt[4]{0{,}0081}$

g) $\sqrt[6]{64}-\sqrt[6]{\frac{1}{64}}-\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

h) $\sqrt[6]{1\,000\,000}+\sqrt[8]{256}$

13. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{250}\cdot\sqrt[4]{40}+\sqrt[4]{375}\cdot\sqrt[4]{135}$

b) $\sqrt[4]{\frac{243}{500}}\cdot\sqrt[4]{\frac{64}{15}}-\sqrt[4]{\frac{63}{50}}\cdot\sqrt[4]{\frac{18}{175}}$

c) $\sqrt[5]{405}\cdot\sqrt[5]{1875}-\sqrt[5]{108}\cdot\sqrt[5]{72}$

d) $\sqrt[5]{\frac{275}{108}}\cdot\sqrt[5]{\frac{500}{99}}+\sqrt[5]{\frac{56}{135}}\cdot\sqrt[5]{\frac{20}{63}}$

14. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}001}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

15. Oblicz.

a) $2\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-27}$

b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}}+\sqrt[3]{-0{,}125}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}}-\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-9}\cdot\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}}-\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}}+\frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

D **16.** Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

a) $x=\sqrt[5]{-32}-\sqrt[4]{16},\ y=\sqrt[7]{1}-2\sqrt[6]{1},\ z=\sqrt[10]{1024}+2\sqrt[9]{-1}$

b) $x=\sqrt[5]{32}-\sqrt[4]{81},\ y=\sqrt[5]{-32}-\sqrt[4]{81},\ z=\sqrt[5]{-1}+\sqrt[4]{1}$

c) $x=\sqrt[7]{40}-\sqrt[5]{2},\ y=\sqrt[4]{81}-\sqrt[5]{243},\ z=\sqrt[5]{-11}+\sqrt[4]{11}$

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Przykład 1

Załóżmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{10 półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

$$\overset{\text{wykładnik potęgi}}{\underset{\text{podstawa potęgi}}{a^n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Uwaga. Nie definiujemy wartości 0^0.

Przykład 2

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $(-3)^1 = -3$

d) $345^0 = 1$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) 9^2, 9^3, 9^4

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0,\ (-2)^4,\ (-2)^9,\ (-3)^4,\ (-3)^9$$

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 3

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) 4^{-2} c) $(-3)^{-2}$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ i) $0{,}2^{-2}$

b) 4^{-3} d) $(-3)^{-3}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ j) $(-0{,}2)^{-3}$

Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^{3}$ b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{6}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$ c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{5}$

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują potęgi, możemy wykorzystywać prawa działań na potęgach.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$ c) $(2^5)^{-2}$ e) $5^{-9} : 5^{-11}$ g) $6^5 : 3^5$ i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7$ d) $(0{,}25^{-1})^{-4}$ f) $4 : 4^{-4}$ h) $10^{10} : 5^{10}$ j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $(x^2 \cdot x^6) : x^4$ b) $(x^7 : x^2) : x^{-1}$ c) $(x^2y)^{-1} \cdot x^3$ d) $(x^{-2}y^3)^{-2} : y^{-3}$

Zadania

1. Oblicz.

a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5}

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^4$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-6}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\left(\sqrt{2}\right)^7$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-8}$

2. Zapisz liczbę w postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

a) 16, $\frac{1}{64}$, 8^3, $\left(\sqrt{2}\right)^4$, 1024^2

b) $\frac{1}{81}$, 27, 9^{-2}, $\left(\sqrt{3}\right)^6$, 81^{-5}

c) $0{,}001$, 100^5, $\left(\frac{1}{100}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^{-6}$

d) 25^{-3}, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{125}\right)^4$, 625^{-5}

4. Oblicz.

a) $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$ c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3}$ d) $\left((-3\sqrt{2})^{-1}\right)^{-2}$

5. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$

b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$

c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$

d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$

e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$

f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$

b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}$, $y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$

7. Oblicz.

a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$

b) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$

c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2}$

e) $(0{,}5 \cdot 8^6 - 2 \cdot 16^4) : 7^3$

f) $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$

8. Oblicz.

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-3} : 16^2$

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} \cdot \frac{8^{-3}}{2^5}$

c) $\frac{25^{-2}}{5^{-4}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-7}$

d) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

e) $\left(\frac{125}{16}\right)^{-2} : \left(\frac{75}{8}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{54}{35}\right)^3 \cdot \left(\frac{81}{49}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie tak, aby nie występowały w nim potęgi o ujemnych wykładnikach.

a) $\left(\frac{1}{2}x^{-2}y^{-1}\right)^3 : (2x^2y^0)^{-3}$ b) $(a^{-1}b^{-2}c^{-3}) \cdot \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{-1}$ c) $\frac{\left((3ab)^3c^{-2}\right)^2}{a^6c^{-6}}$

1.8. Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się **notacją wykładniczą** (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leqslant x < 10$, a n – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 1

a) $\underbrace{326\,000\,000\,000}_{11 \text{ cyfr}} = 3{,}26 \cdot 10^{11}$

b) $0{,}\underbrace{000\,000\,97}_{7 \text{ cyfr}} = 9{,}7 \cdot 10^{-7}$

Ćwiczenie 1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $5\,020\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ ton (masa Syriusza)

b) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,029\,9$ kg (masa cząsteczki wody)

c) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,910\,956$ kg (masa elektronu)

Zadania

1. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $6\,320\,000$ c) $43{,}728$ e) $0{,}000\,65$ g) $0{,}100\,324$

b) $109\,000\,000$ d) $8765{,}2$ f) $0{,}003\,02$ h) $0{,}000\,001$

2. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $8{,}62 \cdot 10^4$ b) $7{,}89 \cdot 10^{-4}$ c) $8{,}34 \cdot 10^{-5}$ d) $6{,}02 \cdot 10^0$

3. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $(3{,}4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$

b) $(1{,}4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{-1}) : (1{,}6 \cdot 10^{-3})$

d) $(7{,}2 \cdot 10^{-3}) : (1{,}2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.
$(5{,}2 \cdot 10^9) \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-7}) = 5{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{9-7} =$
$= 2{,}6 \cdot 10^2 = 260$

4. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0{,}0125$ c) $0{,}0044 \cdot 0{,}055$ d) $0{,}0605 \cdot 8600$

5. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) 2 100 000 000 : 105 000
b) 243 000 000 000 : 2,7
c) 51 000 000 000 : 0,017
d) 102 400 000 000 : 0,64

6. Oblicz. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(3{,}2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{4})}{4 \cdot 10^{-18}}$
b) $\frac{(5{,}2 \cdot 10^{8}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})}{1{,}3 \cdot 10^{18}}$
c) $\frac{(3{,}4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-16})}{2{,}5 \cdot 10^{-30}}$
d) $\frac{(4{,}8 \cdot 10^{18}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{16})}$

7. W tabeli podano wybrane prędkości w zapisie dziesiętnym i notacji wykładniczej. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	?	$4{,}6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,001 94	?
Sprinter	10	?
Ziemia wokół Słońca	?	$2{,}96 \cdot 10^{4}$
Światło w próżni	299 792 458	?

8. Prędkość światła wynosi w przybliżeniu 300 000 km/s. Odległość, którą przebywa światło w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny i przedstaw podane niżej wielkości w kilometrach. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Odległość z Ziemi wyrażona w jednostkach świetlnych	
Księżyc	1,3 sekundy świetlnej
Słońce	8 minut 19 sekund świetlnych
Pluton	5,5 godziny świetlnej
Gwiazda Polarna	około 430 lat świetlnych
środek Galaktyki	około 28 000 lat świetlnych
najbliższe kwazary	około 1,5 mld lat świetlnych

9. Największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek, osiągnęła załoga misji Apollo 10 – wynosiła ona niemal 40 000 km/h. Oblicz, ile czasu zajęłoby pokonanie z tą prędkością odległości dzielącej nas od Gwiazdy Polarnej. Odpowiedź podaj, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą.

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion, a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd., z końcówką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	sekstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylion
36	sekstylion	undecylion
39	sekstyliard	duodecylion
42	septylion	tradecylion
45	septyliard	kwatuordecylion
48	oktylion	kwindecylion
51	oktyliard	seksdecylion
54	nonylion	septendecylion

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczającą 10^{100}.

1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

1 Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Słońce i planety

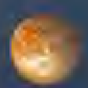
Poniżej podano masy: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.

Słońce
$1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Merkury
$3{,}302 \cdot 10^{23}$ kg

Ziemia
$5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg

Jowisz
$1{,}899 \cdot 10^{27}$ kg



2 Zapisz masy Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęgę o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(\sqrt{10}\right)^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $\left(\sqrt[8]{625}\right)^2$ g) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$ i) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{49}}\right)^3$

b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładniku całkowitym.

Dla liczb wymiernych x, y i liczb rzeczywistych $a > 0$, $b > 0$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$ d) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ e) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{2,5}\right)^{0,6}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$10^{0,3} \approx 1{,}995262315$

$10^{0,45} \approx 2{,}818382931$

$10^{0,625} \approx 4{,}216965034$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość liczby:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

W dalszym toku nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np. $2^{\sqrt{3}}$, $10^{\sqrt{2}}$.

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $10^{\sqrt{2}}$.

Uwaga. $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$

$10^{1,4}$	$\approx 25{,}118864315$
$10^{1,41}$	$\approx 25{,}703957828$
$10^{1,414}$	$\approx 25{,}941793621$
$10^{1,414213562}$	$\approx 25{,}954553497$
$10^{\sqrt{2}}$	$\approx 25{,}954553519$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0{,}5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.

a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7 \cdot \sqrt[5]{7}$

3. Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ g) $10\,000^{0,25}$

b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0,75}$ h) $81^{-0,125}$

4. Oblicz.

a) $0{,}04^{\frac{3}{2}}$ c) $0{,}027^{\frac{2}{3}}$ e) $0{,}0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0{,}0081^{-1,25}$

b) $0{,}16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0{,}000\,32^{\frac{3}{5}}$ h) $0{,}000\,002\,56^{0,375}$

5. Oblicz.

a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ b) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ c) $0{,}008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ d) $0{,}0256^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

6. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie a jest liczbą naturalną, a x – liczbą wymierną.

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ g) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2}$ j) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}}$ e) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3}$ h) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : \sqrt{3}$ k) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{27} : 6^{\frac{3}{4}}$

c) $\sqrt[4]{5^{\frac{3}{2}}}$ f) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ i) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ l) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$

7. Która liczba jest większa: x czy y?

a) $x = 3 \cdot 1024^{-0,1}$, $y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} : \sqrt{2}$ b) $x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \sqrt[6]{\frac{125}{8}}$, $y = \sqrt[6]{36^3}$

1.10. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on wielocyfrowe tablice takich logarytmów.

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$

b) $\log 0{,}1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0{,}1$

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Pytanie o wartość $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0{,}01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatrywane są też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z liczby b jest taka liczba x, że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Pytanie o wartość $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 3

a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$

liczba logarytmowana

$$\log_a b = x$$

podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 prawdziwe są podane obok własności.

> $\log_a 1 = 0$
> $\log_a a = 1$

W obliczeniach wykorzystywane są następujące własności logarytmów (ich dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

> Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:
>
> $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ — logarytm iloczynu
>
> $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ — logarytm ilorazu
>
> $\log_a b^p = p \log_a b$ — logarytm potęgi

Przykład 4

a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$

b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

a) $\log_2 \frac{0{,}25}{32} = \log_2 0{,}25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$

b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

a) $\log_2 \frac{0{,}5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0{,}125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[3]{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\log_2 8^5 = 5\log_2 8 = \\ = 5 \cdot 3 = \\ = 15$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

4. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 4,\ y = 16$ b) $x = 8,\ y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{8}$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 27,\ y = 3$ b) $x = 81,\ y = 9$ c) $x = 3,\ y = \sqrt{3}$

6. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 2 + \log_6 3$ c) $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$

D **7.** Uzasadnij poniższą równość.

a) $\log 15 + \log 12 - 2 = \log \frac{9}{5}$ b) $\log_2 54 - \log_2 3 = 2\log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$

8. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

a) $\log 0{,}03$, $\log 0{,}3$, $\log 3$,

b) $\log 0{,}054$, $\log 0{,}0054$, $\log 5{,}4$,

c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	$-2{,}000$	**0,26**	$-0{,}585$	**0,51**	$-0{,}292$
0,02	$-1{,}699$	**0,27**	$-0{,}569$	**0,52**	$-0{,}284$
0,03	$-1{,}523$	**0,28**	$-0{,}553$	**0,53**	$-0{,}276$
0,04	$-1{,}398$	**0,29**	$-0{,}538$	**0,54**	$-0{,}268$
0,05	$-1{,}301$	**0,30**	$-0{,}523$	**0,55**	$-0{,}260$
0,06	$-1{,}222$	**0,31**	$-0{,}509$	**0,56**	$-0{,}252$
0,07	$-1{,}155$	**0,32**	$-0{,}495$	**0,57**	$-0{,}244$

Warto wiedzieć

Skala logarytmiczna

Czasami, zamiast porównywać dane wielkości, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. Stosuje się wówczas tak zwaną **skalę logarytmiczną**. Jest nią np. **skala Richtera**, określająca siłę trzęsienia ziemi. Wykorzystuje się w niej logarytm dziesiętny. Każdy kolejny stopień tej skali oznacza 10-krotnie większą siłę trzęsienia. Na rysunku poniżej pokazano, jak skonstruować skalę logarytmiczną wykorzystującą logarytm dziesiętny.

Liczby na górze takiej skali nie są położone równomiernie, ale zgodnie z wartościami ich logarytmów:

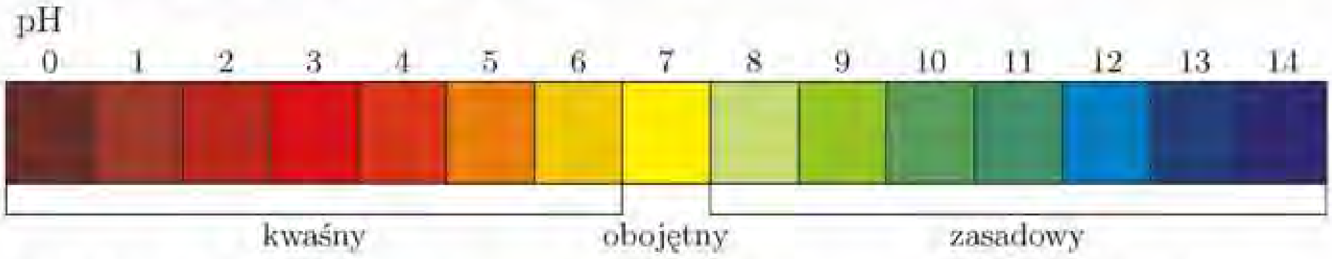
$\log 2 \approx 0{,}30$	$\log 4 \approx 0{,}60$	$\log 6 \approx 0{,}78$	$\log 8 \approx 0{,}90$
$\log 3 \approx 0{,}48$	$\log 5 \approx 0{,}70$	$\log 7 \approx 0{,}85$	$\log 9 \approx 0{,}95$

1. a) Korzystając z tego, że $\log 10x = 1 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 40, 90.

b) Korzystając z tego, że $\log 100x = 2 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 400, 900.

2. Przyjmując jako jednostkę 1 cm, naszkicuj skalę logarytmiczną i zaznacz na niej liczby $a = 10$, $b = 10^4$, $c = 10^6$, $d = 10^{-4}$, $e = 10^{-6}$.

Innym przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.



Każdą z liczb od 0 do 14 z powyższej skali otrzymujemy, mnożąc logarytm dziesiętny odpowiedniego stężenia jonów wodorowych przez -1.

Na przykład dla wody stężenie to wynosi 10^{-7} mol/dm^3.

Zatem pH wody obliczamy następująco: $\text{pH(wody)} = -\log 10^{-7} = 7$.

Dla wody morskiej pH wynosi od 7,5 do 8,4, dla kawy od 5 do 5,9, a dla soku pomarańczowego 3,5.

1.11. Procenty (1)

Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$1\%w = \frac{1}{100}w = 0{,}01w$; $15\%w = \frac{15}{100}w = 0{,}15w$; $4{,}5\%w = \frac{4{,}5}{100}w = 0{,}045w$

1% (1 procent) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

Ćwiczenie 1

Oblicz, ile zapłacimy, jeżeli kupimy czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki).

	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Ćwiczenie 2

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Ćwiczenie 3

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

Ćwiczenie 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p, jeśli: a) $x = 36$, b) $x = 51$.

W niektórych zagadnieniach wymagana jest większa dokładność, wówczas możemy posłużyć się dziesiątą częścią procentu, czyli **promilem**.

1‰ (1 promil) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) 8‰ liczby 300
b) 22‰ liczby 1400
c) 50‰ liczby 100
d) 5‰ liczby 1000
e) 0,2‰ liczby 180
f) 5,5‰ liczby 180

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2{,}25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 6

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,3 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 7

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x.

a) $x = 100$, $y = 50$ b) $x = 50$, $y = 40$ c) $x = 10$, $y = 16$

Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% z x, czyli: $\frac{85}{100}x = 272$ i stąd $x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320$ [zł].

Ćwiczenie 8

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli przed obniżką, korzystając z danych z przykładu 2.

Zadania

1. Oblicz.

a) 401% liczby 40 b) 15‰ liczby 300 c) 2‰ liczby 2

2. Cenę sukni ślubnej obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo co przed obniżką?

a) $p = 50$ b) $p = 20$ c) $p = 36$

3. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, by kosztował tyle, co na początku?

a) $p = 25$ b) $p = 50$

4. Wycieczka do Londynu kosztuje 1200 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:

a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,

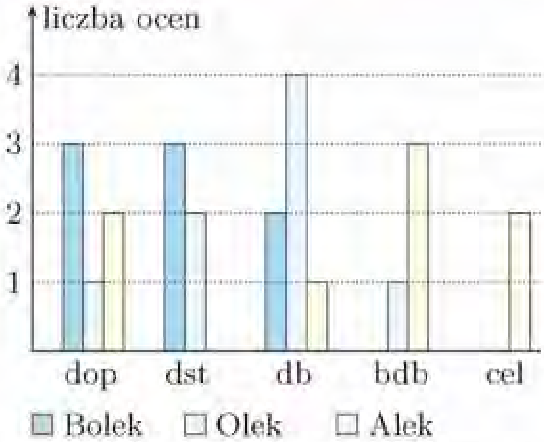
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,

c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?

5. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.

a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?

b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?



6. Firma A w II kwartale miała obroty o 50% większe niż w I kwartale. W III kwartale jej obroty spadły o 20%, zaś w IV – spadły o kolejne 20%. Oblicz, jakie były obroty firmy A w pozostałych kwartałach, jeżeli wyniosły: a) w II kwartale 3 750 000 zł, b) w IV kwartale 1 440 000 zł.

7. Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT.

a) Cena netto komputera jest równa 2200 zł. Oblicz jego cenę brutto. Ile procent ceny brutto stanowi podatek VAT?

b) Cena brutto komputera jest równa 3198 zł. Oblicz jego cenę netto. Ile procent ceny brutto stanowi cena netto?

c) Podatek VAT doliczony do ceny netto komputera wyniósł 483 zł. Jaka jest cena brutto tego komputera? Ile byłaby równa cena brutto tego komputera, gdyby jego cena netto została podniesiona o 200 zł?

1.12. Procenty (2)

Przykład 1

W tabeli przedstawiono procentowy udział Chińskiej Republiki Ludowej, Republiki Południowej Afryki i Stanów Zjednoczonych w światowym wydobyciu złota w latach 1995 i 2008.

Kraj	1995 rok	2008 rok
ChRL	6,2%	12,2%
RPA	23,3%	9,8%
USA	14,1%	9,9%

Źródło: http://www.goldsheetlinks.com/production

Zauważmy, że udział Chin w światowym wydobyciu złota w tym czasie prawie się podwoił. Można też powiedzieć, że wzrósł on o 6 **punktów procentowych**. Udział RPA spadł w tym czasie o 13,5 punktu procentowego.

Przykład 2

Sondaż przeprowadzony we wrześniu pokazał, że partię X popiera 12% wyborców. W październiku poparcie dla partii X deklarowało 18% wyborców.

Można powiedzieć, że poparcie dla partii X wzrosło o 6 punktów procentowych lub że liczba osób popierających tę partię wzrosła o 50%.

Ćwiczenie 1

W tabeli przedstawiono wyniki sondażu, w którym pytano o poparcie dla partii Y oraz Z.

	Luty	Marzec
Y	16%	20%
Z	10%	8%

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii Y? O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię Y?

b) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii Z? O ile procent zmalała liczba osób popierających partię Z?

Ćwiczenie 2

W tabeli podano wysokość oprocentowania lokat w bankach A i B w latach 2017 i 2018. Jak zmieniło się oprocentowanie w każdym z tych banków? Odpowiedź podaj w punktach procentowych.

	2017	2018
A	4,3%	5,8%
B	5,4%	4,2%

Ćwiczenie 3

Kapitał 5000 zł złożono w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości r w skali roku. Podaj wielkość kapitału po roku.

a) $r = 2\%$ b) $r = 3{,}5\%$ c) $r = 4\%$

Kapitał w wysokości k złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $r\%$ wynosi po roku $k(1 + \frac{r}{100})$.

Zadania

1. Do banku A wpłaciliśmy 8000 złotych na lokatę roczną oprocentowaną 4,3% w skali roku. O ile więcej zarobilibyśmy, gdybyśmy wpłacili tę samą kwotę do banku B, w którym oprocentowanie lokaty rocznej jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku A?

2. Połowę z 6000 zł złożono na lokatę roczną w banku A, a drugą połowę – w banku B. Odsetki uzyskane po roku w banku B były o 45 zł wyższe niż odsetki w banku A. O ile punktów procentowych było wyższe oprocentowanie lokaty w banku B od oprocentowania lokaty w banku A?

3. Tomek złożył w banku 7500 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę odbierze po roku, jeśli od odsetek:

a) nie jest pobierany podatek,

b) jest pobierany podatek w wysokości 20%.

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%.

4. Darek chciałby za rok wydać na sprzęt sportowy 5250 zł. Czy uzyska potrzebną kwotę, jeśli złoży 5000 zł na lokacie rocznej oprocentowanej 5% w skali roku, a od naliczanych odsetek jest pobierany podatek w wysokości 20%?

5. Krysia wpłaciła do banku pewną kwotę na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Jaką kwotę:

a) odebrała po roku, jeśli do banku wpłaciła 2250 zł,

b) wpłaciła, jeśli po roku odebrała z banku 2580 zł?

6. Kwotę 12 000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku. Drugą część wpłacono do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. W obu bankach od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Jaką kwotę wpłacono do banku A, jeśli po roku z obu banków odebrano łącznie 12 300 zł?

1.13. Zagadnienia uzupełniające

Liczby pierwsze

- Największa znana liczba pierwsza (znaleziona w grudniu 2018 roku) jest równa $2^{82\,589\,933}-1$, a jej zapis dziesiętny ma 24 862 048 cyfr. Wielkich liczb pierwszych poszukuje się pośród liczb specjalnej postaci, na przykład 2^p-1 (tak zwanych liczb Mersenne'a), gdzie p jest liczbą pierwszą.
- Do tej pory nie udało się rozwiązać wielu problemów dotyczących liczb pierwszych. Na przykład nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele bliźniaczych liczb pierwszych (bliźniaczymi nazywamy liczby pierwsze różniące się od siebie o 2, np. 3 i 5, 17 i 19 czy też 9 999 971 i 9 999 973).

1. W kwadracie magicznym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w obu przekątnych są sobie równe (oznaczmy tę sumę literą S). Przerysuj do zeszytu i uzupełnij przedstawiony obok kwadrat magiczny składający się z liczb pierwszych, jeśli $S = 1077$.

569	59	?
239	?	?
?	?	?

Sito Eratostenesa

Jedną z metod wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych jest **sito Eratostenesa**. Zastosujemy je do wyszukania liczb pierwszych wśród liczb: $2, 3, \ldots, 24$. Zaczynamy od wypisania wszystkich tych liczb, następnie zaznaczamy liczbę 2 – najmniejszą liczbę pierwszą i wykreślamy jej wszystkie wielokrotności:

$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, 21, \cancel{22}, 23, \cancel{24}$

Najmniejsza niewykreślona liczba jest kolejną liczbą pierwszą – jest nią 3. Zaznaczamy ją i wśród pozostałych liczb wykreślamy wszystkie jej wielokrotności:

$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \cancel{24}$

Powyższą procedurę powtarzamy dla kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż wszystkie liczby będą albo zaznaczone jako pierwsze, albo wykreślone.

$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \cancel{24}$

D **2.** Stosując sito Eratostenesa, wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100. Uzasadnij, że po wykreśleniu wielokrotności liczby 7 wszystkie niewykreślone liczby będą pierwsze.

Liczby Fermata

Pierre de Fermat (1607–1665) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Większości swoich prac nie opublikował. Tak zwane **wielkie twierdzenie Fermata** (opublikowane dopiero po jego śmierci, w 1670 r.) mówi, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie x, y, z, n takie, że $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$. Twierdzenie to zostało udowodnione dopiero w 1995 r. Innym pojęciem związanym z jego nazwiskiem są liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną, nazywane **liczbami Fermata**. Pięć początkowych liczb Fermata:

$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$

$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

Fermat przypuszczał, że wszystkie liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$ są pierwsze, ale w 1732 r. **Leonhard Euler** [czyt. ojler] wykazał, że $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$, czyli jest liczbą złożoną. Do dziś nie wiadomo, czy którakolwiek z liczb Fermata oprócz: F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4, jest liczbą pierwszą. Poniższe twierdzenie, udowodnione przez **Carla Friedricha Gaussa**, podaje związek między liczbami pierwszymi Fermata a wielokątami foremnymi.

> Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować n-kąt foremny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest: potęgą dwójki lub liczbą pierwszą Fermata pomnożoną przez 2^k, lub iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata i liczby 2^k, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.

W tabeli obok podano liczby naturalne mniejsze od 100, dla których można skonstruować n-kąt foremny.

$3 = 3$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$4 = 2^2$	$32 = 2^5$
$5 = 5$	$34 = 2 \cdot 17$
$6 = 2 \cdot 3$	$40 = 2^3 \cdot 5$
$8 = 2^3$	$48 = 2^4 \cdot 3$
$10 = 2 \cdot 5$	$51 = 3 \cdot 17$
$12 = 2^2 \cdot 3$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$15 = 3 \cdot 5$	$64 = 2^6$
$16 = 2^4$	$68 = 2^2 \cdot 17$
$17 = 17$	$80 = 2^4 \cdot 5$
$20 = 2^2 \cdot 5$	$85 = 5 \cdot 17$
$24 = 2^3 \cdot 3$	$96 = 2^5 \cdot 3$

3. Sprawdź, czy jest możliwe skonstruowanie za pomocą cyrkla i linijki n-kąta foremnego, gdy n równe jest: 170, 200, 204, 1020.

4. Znajdź informacje dotyczące konstrukcji 17-kąta foremnego (możliwość takiej konstrukcji wykazał C.F. Gauss w 1796 r.).

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:

a) 5, b) 6, c) 7, d) 15?

2. Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.

a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$

b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$

d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$

e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$

f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$

3. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

a) $\dfrac{\left(3\frac{1}{4} - 1{,}5\right) \cdot \left(-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)}{(2{,}25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$

b) $\dfrac{\left(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}\right) : \left(1\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}35 - 1\frac{2}{3} : \left(-2\frac{1}{2}\right)}$

c) $\dfrac{-48 : 0{,}6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}5}$

d) $\dfrac{0{,}3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) : 0{,}75}{\left(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot (-0{,}8) + 1{,}44 : 2\frac{2}{5}}$

4. Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.

a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$

c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$

d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$

5. Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$

b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$

d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$

e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$

f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$

g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$

h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$

6. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$

c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

d) $\frac{\sqrt{121} - \sqrt[3]{125}}{\sqrt{144} - \sqrt[3]{216}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$

f) $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{20}}$

g) $\sqrt[3]{0{,}8} : \sqrt[3]{1\frac{9}{16}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{1{,}44}$

7. a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 4 - \sqrt{5}$ przez ich różnicę.

b) Oblicz sześcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0{,}(9) - \sqrt[3]{3}$.

c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0{,}(2) \cdot \sqrt{3}$.

8. Podaj liczbę naturalną n spełniającą nierówności:

a) $n < 2\sqrt{3} < n+1$, b) $n-1 < 5\sqrt{5} < n$, c) $n < \sqrt{35} < n+1$.

9. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{7{,}2 \cdot 10^{18} \cdot 4{,}9 \cdot 10^{7}}{5{,}6 \cdot 10^{32}}$ c) $4\,410\,000\,000 : 0{,}021$ e) $0{,}000\,000\,216 : 360\,000$

b) $\frac{1{,}44 \cdot 10^{11} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{23}}{1{,}8 \cdot 10^{5} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{8}}$ d) $10\,240 : 0{,}000\,000\,08$ f) $0{,}000\,000\,000\,08 : 2{,}5$

10. Uporządkuj liczby a, b, c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$

b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0{,}04$

11. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:

a) oba boki skrócono o 20%,

b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

12. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?

13. Kwotę 3000 zł wpłacono do banku A na lokatę oprocentowaną $p\%$ w skali roku. Kwotę 4000 zł wpłacono do banku B, w którym oprocentowanie jest o 2 punkty procentowe wyższe. Po roku odsetki uzyskane łącznie w obu bankach wyniosły 360 zł. Oblicz p.

14. Wyznacz liczbę: a) o 2‰ większą od 100, b) o 1,6‰ większą od 500.

Zestaw II

1. Która z liczb: a, b, c, d, e ma najwięcej, a która najmniej dzielników?

$a = 12$ $b = 50$ $c = 60$ $d = 110$ $e = 123$

2. Oblicz.

a) $\frac{4^{-6} \cdot 4^{5}}{4^{-2}}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \cdot \frac{9^4}{8^3}$ e) $2^{-5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} \cdot \left(\sqrt{8}\right)^{6}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \frac{3^{-3}}{3^{2}}$ d) $10^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot \left(5^5\right)^{-1}$ f) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{8}}{\left(\sqrt{27}\right)^{-2}} \cdot \left(3^4 : 3^{-2}\right)^{-2}$

D **3.** Uzasadnij, że nierówność zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

a) $\sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} \geqslant 0$ b) $\sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0{,}01x^8} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}x^4$

4. Liczby $x = 0{,}8(3)$ i $y = 1{,}(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, c) $\frac{1}{x} + y^2$, d) $x^2 - \frac{1}{y^2}$.

5. Podaj potrzebne założenia i uprość wyrażenie.

a) $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{(x^2)^3}$ b) $\left(\frac{-6y^0 \cdot y^{-1}}{y^{-3}}\right)^2$ c) $\left(\frac{3z^2}{y^{-3}}\right)^2 - \frac{z^3y^4}{z^{-1}y^{-2}}$ d) $\frac{s^2t - t^3}{\frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}}}$

6. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(5x^2y^2)^3 : (25x^8y^4)$ dla $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$,

b) $(8x^{-3}y)^3 : (4x^{-4}y^2)^3$ dla $x = \sqrt[3]{12}$, $y = 4\sqrt{3}$,

c) $\frac{(x^2y^3)^2 \cdot (-3x^3y^2)^3}{(-xy^2)^5}$ dla $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{9}$,

d) $\frac{(x^2y^{-1})^{-2}(-xy^{-2})^2}{(x^3y^4)^{-1}}$ dla $x = \sqrt[4]{2}$, $y = \sqrt[8]{8}$.

7. Oblicz $u + v + w$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $u = \frac{14m^2t - 35mt + 28mt^2}{7mt}$, $v = \frac{9m^2t^2 - 21m^2t}{3m^2t}$, $w = \frac{m^2t^2 + 0{,}5mt^3}{-2mt^2}$

b) $u = \frac{64x^4y^2 - 60x^3y^2}{-4x^3y^2}$, $v = \frac{60xy^3 - 85x^2y^3}{5xy^3}$, $w = \frac{11x^3y + 3x^2y}{-x^2y}$

8. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{2}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$ b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$ c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$ d) $\frac{20^{1{,}2} \cdot 24^{0{,}3}}{6^{1{,}3} \cdot 25^{0{,}1}}$

D **9.** Uzasadnij, że prawdziwa jest równość:

a) $\log_2 20 + \log_2 1{,}6 = 10 \log_2 \sqrt{2}$,

b) $\log_3 36 + \log_3 81 = 6 + \log_3 4$,

c) $\log_2 48 - \log_2 6 = \log_4 64$,

d) $\log_3 72 - \log_3 4 = 2 + \log_3 2$.

D **10.** Liczba k jest sumą pięciu kolejnych liczb nieparzystych. Uzasadnij, że $\frac{k}{5}$ jest liczbą całkowitą.

11. Największy wspólny dzielnik liczby x i liczby 48 jest równy 8. Ile może być równa liczba x, jeśli wiadomo, że jest dwucyfrowa?

D **12.** Uzasadnij, że jeśli jeden bok prostokąta ma długość równą 1, a drugi – równą n, gdzie n jest liczbą naturalną, to długość przekątnej tego prostokąta jest liczbą niewymierną.

D **13.** Uzasadnij, że dla dwóch kolejnych liczb całkowitych m i $m + 1$ można wskazać liczbę niewymierną c taką, że $m < c < m + 1$.

Przykład 1

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

• Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.

• Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci: $7n + 3$, gdzie $1 \leqslant n \leqslant 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, by je wszystkie wypisać.

$$1005 = 67 \cdot 15,\ 1020 = 68 \cdot 15,\ 1035 = 69 \cdot 15,\ \ldots,\ 9990 = 666 \cdot 15$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leqslant n \leqslant 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 66 = 600$.

Odpowiedź: 600

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, …, 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci: $100 + 5n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, …, 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci: $102 + 6n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci: $120 + 30n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 29$, zatem takich liczb jest 30.

Liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Liczba a jest ujemna, gdy:

A. $a = \frac{13}{5} - 2{,}(5)$, **C.** $a = 1{,}(9) - \sqrt{3}$,
B. $a = \sqrt{2} - 1{,}(4)$, **D.** $a = \frac{2}{3} - 0{,}(6)$.

2. Jeśli reszta z dzielenia liczby m przez 6 jest równa 4, a reszta z dzielenia liczby n przez 6 jest równa 5, to reszta z dzielenia liczby $m + n$ przez 6 jest równa:

A. 1, **B.** 3, **C.** 4, **D.** 5.

3. Wśród liczb: $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[6]{64}$ jest n liczb niewymiernych, zatem:

A. $n = 0$, **B.** $n = 1$, **C.** $n = 2$, **D.** $n = 3$.

4. Która z poniższych liczb jest równa 24?

A. $12 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ **B.** $8 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ **C.** $6 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ **D.** $3 \cdot \sqrt{6} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$

5. Liczba $\frac{(1{,}4 \cdot 10^{6}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-8})}{(3{,}6 \cdot 10^{-3}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-4})}$ jest k-krotnie większa od liczby 3000 dla:

A. $k = 2$, **B.** $k = 6$, **C.** $k = 10$, **D.** $k = 20$.

6. Dane są liczby $a = -12$, $b = -2\sqrt{38}$ oraz $x = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$, $y = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$. Prawdziwe są nierówności:

A. $a < b$ i $x < y$, **C.** $a > b$ i $x < y$,
B. $a < b$ i $x > y$, **D.** $a > b$ i $x > y$.

7. Prawdziwa jest równość:

A. $\log_8 32 + \log_4 16 = 2\frac{1}{2}$, **C.** $\log_8 64 + \log_4 32 = 4\frac{1}{2}$,
B. $\log_8 16 + \log_4 32 = 3\frac{1}{2}$, **D.** $\log_8 64 + \log_4 64 = 5\frac{1}{2}$.

8. Cena towaru nie uległa zmianie, jeśli:

A. obniżono ją o 10%, a nową cenę podniesiono o 10%,
B. podniesiono ją o 30%, a nową cenę obniżono o 30%,
C. obniżono ją o 20%, a nową cenę podniesiono o 25%,
D. podniesiono ją o 20%, a nową cenę obniżono o 25%.

9. Jeśli 20% liczby 55 jest o 4 mniejsze od 30% liczby x, to:

A. $x = 75$, **B.** $x = 50$, **C.** $x = 45$, **D.** $x = 33$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 2 (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Oblicz $3x - y$, jeśli wiadomo, że $\left(\sqrt{5}\right)^x = 125\sqrt{5}$ oraz $\left(\sqrt{2}\right)^y = 1024$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o p%. Wyznacz p, jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.

Zadanie 5 (2 pkt)
Cena brutto kurtki zimowej wynosi 307,50 zł. Na cenę tę składa się cena netto oraz 23% podatku VAT. O ile zmniejszy się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce ceny podatek VAT będzie wynosił 51,75 zł?

D Zadanie 6 (2 pkt)
Dane są liczby $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$ i $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$. Uzasadnij, że $x < y$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)
Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 8 (4 pkt)
O ile procent liczba x jest większa od liczby y, jeżeli $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0{,}2\right)$, $y = (0{,}5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$?

Zadanie 9 (4 pkt)
Woda płynąca z kranów: A, B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. W ciągu godziny woda płynąca tylko z kranu A napełnia $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C?

D Zadanie 10 (4 pkt)
Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)
Dane są liczby $a = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$, $b = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ i $c = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2$. Liczba x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b, a liczba y – najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i c. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku ilorazu $\frac{y}{x}$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^{-1}y^4 \cdot (x^{-1}y)^3}{(x^2y^{-1})^{-1}x^2y^2}$ dla $x = \sqrt[3]{4}$ i $y = \sqrt[6]{2}$. Wynik zapisz w postaci dziesiętnej i zakoduj jego trzy pierwsze cyfry po przecinku.

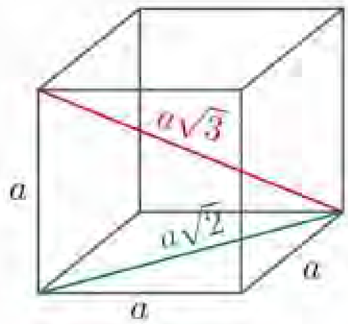
Zadanie 3 (2 pkt)
Liczbę $1,(54)$ zapisz jako ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności liczby $m \cdot n$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\log_2 \sqrt[3]{2} + \log_4 \sqrt[4]{8}$.

D **Zadanie 5 (3 pkt)**
Uzasadnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

D **Zadanie 6 (3 pkt)**
Uzasadnij, że liczba $7^{11} \cdot 11^7$ ma 96 różnych dzielników.

D **Zadanie 7 (3 pkt)**
Przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość $a\sqrt{3}$, a przekątna jego podstawy ma długość $a\sqrt{2}$. Uzasadnij, że jeśli długość przekątnej sześcianu jest liczbą wymierną, to długość przekątnej podstawy jest liczbą niewymierną.



D **Zadanie 8 (3 pkt)**
Logarytmy o podstawie 3 liczb a, b i c są kolejnymi liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 13.

D **Zadanie 9 (3 pkt)**
Uzasadnij, że jeśli $a\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną różną od 0, to a jest liczbą niewymierną.

2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższym budynkiem na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m) wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.

Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbf{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono sześcioelementowy zbiór A. Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

a) $2 \in A$ c) $\sqrt{16} \in A$ e) $-6 \notin A$

b) $1 \in A$ d) $\sqrt{9} \in A$ f) $6 \notin A$

Jeszcze innym sposobem opisania zbioru jest podanie warunku, który muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 16\}$ oznacza, że $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ćwiczenie 2

Czy zbiory A i B są równe?

a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 27\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 30\}$

b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 9\}$

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Zapisujemy to: $A \subset B$. Mówimy również, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B. Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B (zbiór A nie jest zawarty w zbiorze B).

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zawierania: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.
Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

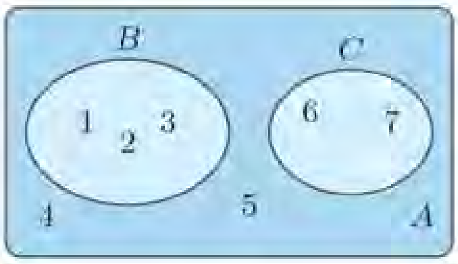
Przykład 1

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.

Między tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



Ćwiczenie 3

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leqslant 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 = 12\}$, $B = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych mają miejsce zawierania:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Zadania

1. Zapisz zbiory A i B, wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 36\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{Z} : -4 \leqslant x \leqslant -2\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \leqslant x^2 \leqslant 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 = 49\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 = 49\}$

2. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów?

a) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15

b) A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48

*c) A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 2 lub przez 5, B – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 3 lub przez 4

3. Liczba podzbiorów zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$ jest równa 2^2. Podzbiorami tymi są: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Wypisz wszystkie podzbiory:

a) zbioru trzyelementowego $\{1, 2, 3\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^3,

b) zbioru czteroelementowego $\{1, 2, 3, 4\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^4.

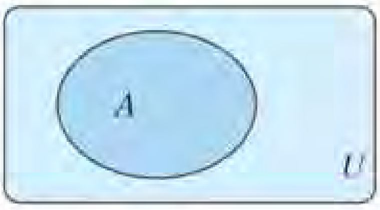
4. Który ze zbiorów A, B ma więcej podzbiorów?

a) $A = \{n \in \mathbf{N} : 2 < n^3 < 125\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : n | 125\}$

b) $A = \{k \in \mathbf{Z} : 2 < k^2 < 15\}$, $B = \{k \in \mathbf{Z} : 1 < k^4 < 75\}$

2.2. Działania na zbiorach

Na diagramie obok zbiór U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

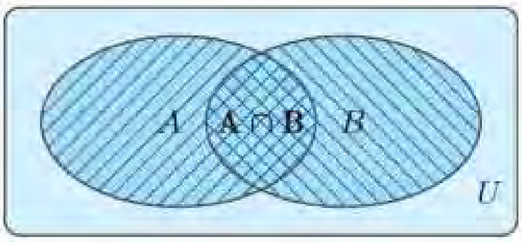


Definicja

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{ i } \ x \in B\}$$

Na diagramie iloczyn $A \cap B$ jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany. Zauważmy, że iloczyn zbiorów jest ich częścią wspólną.



Przykład 1

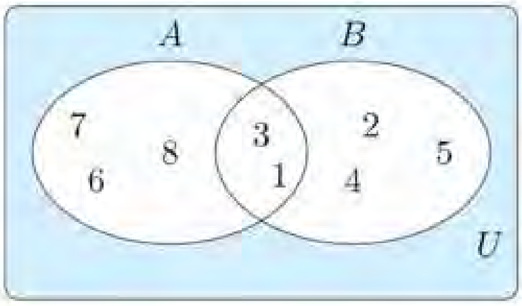
Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

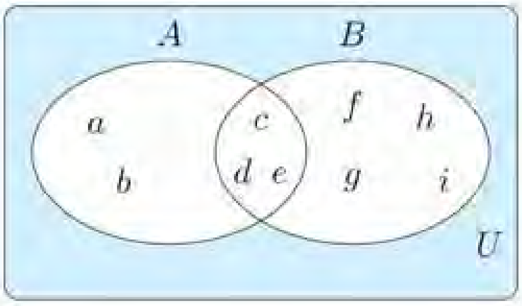
Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: A, B oraz $A \cap B$.

a)



b)



Ćwiczenie 2

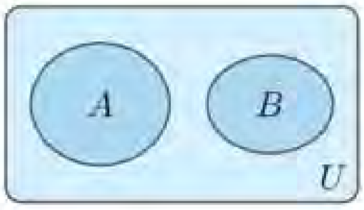
Wyznacz iloczyn zbiorów A i B.

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

b) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$, $B = \left\{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\right\}$

c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{\log 1, \log 10, \log 100, \log 10\,000, \log 100\,000\}$

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na diagramie obok przedstawiono rozłączne zbiory A i B.



Ćwiczenie 3

Czy zbiory X i Y są rozłączne?

a) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych

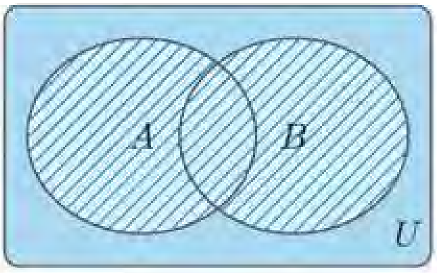
b) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A lub B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na diagramie suma $A \cup B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.



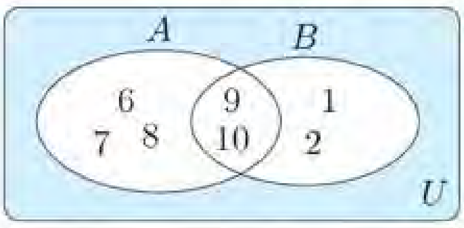
Przykład 2

Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

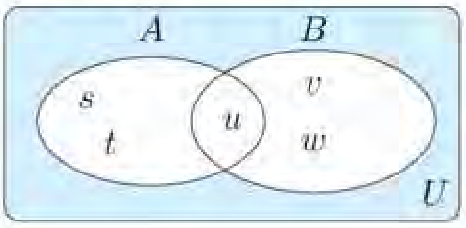
Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B.

a)



b)



Ćwiczenie 5

Wyznacz sumę zbiorów A i B.

a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

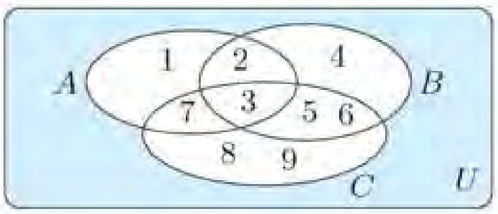
b) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,

b) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

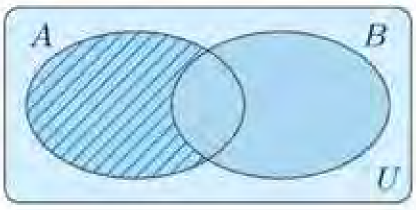


Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

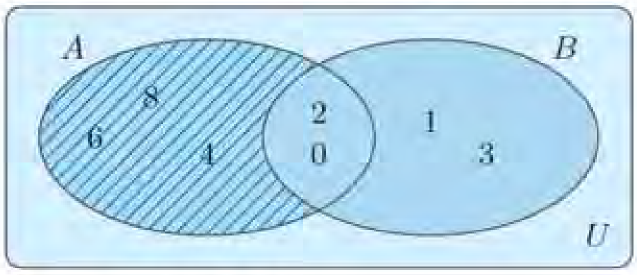
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Na diagramie różnica $A \setminus B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

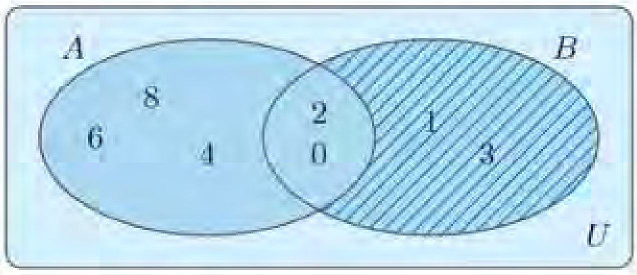


Przykład 3

Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3\}$.



$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$



$B \setminus A = \{1, 3\}$

Ćwiczenie 7

Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli:

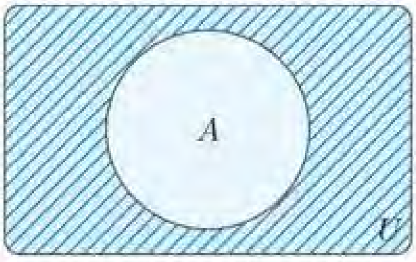
a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $A = \{n \in \mathbf{N} : 8|n \text{ i } n \leqslant 50\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : 6|n \text{ i } n \leqslant 50\}$.

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A:

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A'.



D

Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy zbiór $U = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ oraz jego podzbiory A i B, przy czym do zbioru A należą liczby parzyste, a do B liczby podzielne przez 3. Uzasadnij, że zachodzi równość:

a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$, b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Podane obok równości zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B. Nazywane są **prawami De Morgana**.

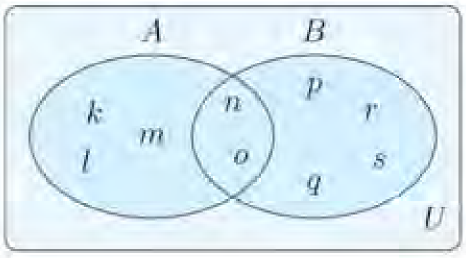
Prawa De Morgana

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



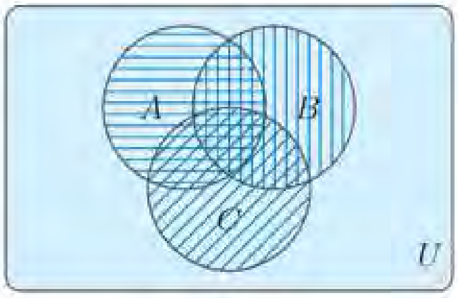
2. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy:

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$,

b) $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$,

c) $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}$.

3. Na diagramie obok obszar potrójnie zakreskowany odpowiada zbiorowi $A \cap B \cap C$. Wyznacz ten zbiór, jeśli $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

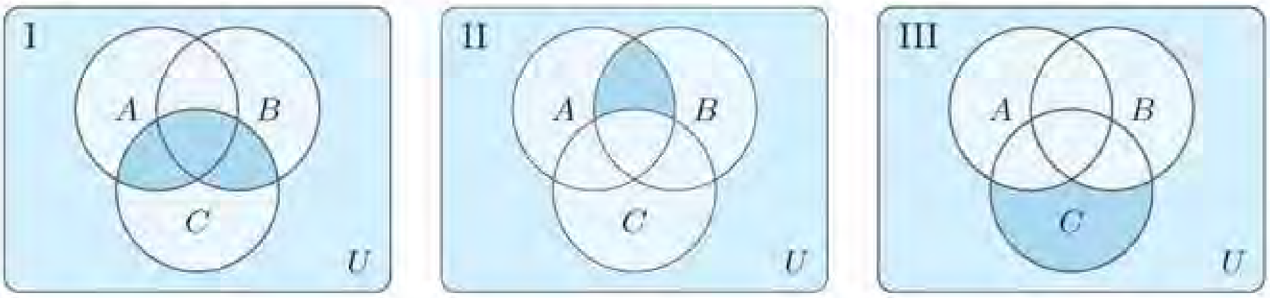


4. A jest zbiorem spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *geometria*, a C – zbiorem spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

a) $A \cap B$, b) $A \setminus B$, c) $B \setminus A$, d) $B \cap C$, e) $B \setminus C$, f) $C \setminus B$, g) $A \cap B \cap C$, h) $A \cup B \cup C$.

5. Który z poniższych diagramów odpowiada zbiorowi:

a) $(A \cap B) \setminus C$, b) $C \setminus (A \cup B)$, c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?



6. Przyjmij, że żadne dwa spośród zbiorów: A, B, C nie są rozłączne i na oddzielnych diagramach przedstaw zbiory:

a) $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$,

b) $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C)$,

c) $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

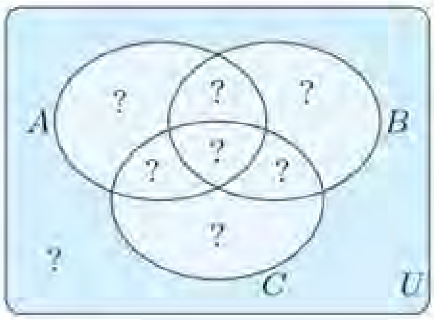
d) $B \setminus (A \cup C)$ i $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

Porównaj otrzymane wyniki.

Czy wiesz, że...

Diagramy ilustrujące zależności między zbiorami – takie jak użyte w tym temacie – noszą nazwę diagramów Venna na cześć angielskiego matematyka i filozofa Johna Venna (1834–1923).

7. Dany jest zbiór $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i umieść na nim liczby ze zbioru U, korzystając z podanych niżej informacji.



$A \cap B \cap C = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$,
$B \cap C = \{1, 2, 6\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$.

Następnie wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,

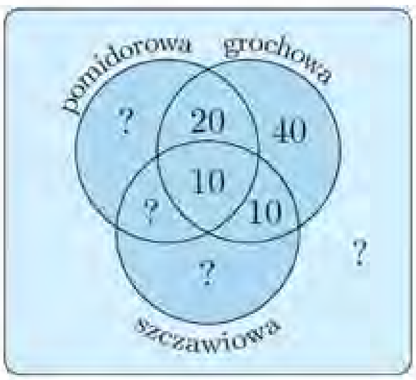
b) $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$,

c) $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$,

d) $A' \cap B'$, $A' \cup C'$, $A' \cup B' \cup C'$.

8. W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram. Podaj, ilu uczniów:

a) nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,

b) lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę,

c) lubi dokładnie dwie zupy oferowane przez stołówkę.

9. W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Podaj, ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota.

10. Naszkicuj diagramy dla zbiorów:

$$(A \cup B \cup C)',\ (A \cap B \cap C)',\ A' \cup B' \cup C',\ A' \cap B' \cap C'$$

Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

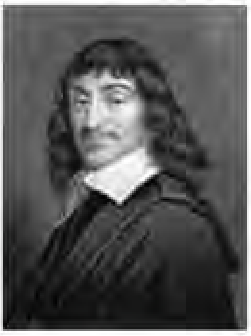
Warto wiedzieć

Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe

Definicja

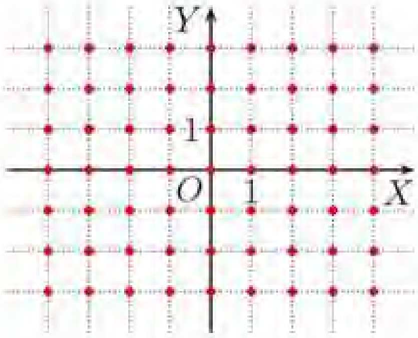
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par (a, b) takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$. Zbiór ten oznaczamy symbolem $A \times B$.

Nazwa „iloczyn kartezjański" upamiętnia francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a zwanego Kartezjuszem (1596–1650), autora sentencji „Myślę, więc jestem". Wprowadził on do geometrii metodę współrzędnych. Obecnie stosujemy w matematyce wiele oznaczeń Kartezjusza, np. zmienne: $x, y, z, \dots$, współczynniki literowe: $a, b, c, \dots$, zapisywanie potęg w postaci: $a^7, x^2, x^4, \dots$



Przykład 1

a) Zbiór $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ to zbiór wszystkich par (x, y) takich, że x i y są liczbami całkowitymi (rysunek obok). Nazywamy go zbiorem **punktów kratowych**.



b) Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, wówczas:
$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

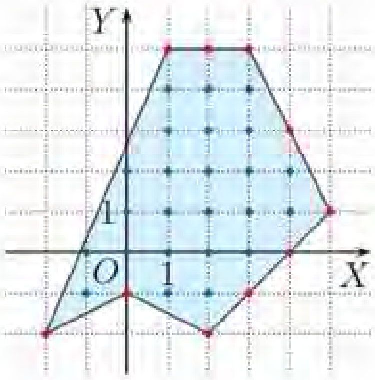
1. Dane są zbiory: $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$.

Twierdzenie Picka

Pole wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe, można obliczyć, korzystając ze wzoru $P = \omega + \frac{b}{2} - 1$, gdzie ω jest liczbą punktów kratowych należących do wnętrza wielokąta, b – liczbą punktów kratowych należących do brzegu wielokąta.

Przykład 2

Dla wielokąta przedstawionego na rysunku obok mamy: $\omega = 24$, $b = 10$, czyli pole $P = 24 + \frac{10}{2} - 1 = 28$.



2. Korzystając z twierdzenia Picka, oblicz pole wielokąta $ABCDE$.

a) $A(-4, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(3, 2)$, $D(2, 5)$, $E(0, 3)$

b) $A(-4, 1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, 2)$, $D(7, 1)$, $E(-1, 5)$

2.3. Przedziały

Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x, które spełniają jednocześnie dwa warunki (nierówności): $x > -2$ i $x < 3$.

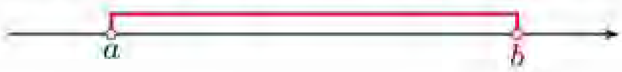
Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3, co zapisujemy symbolicznie: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:

Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3, co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

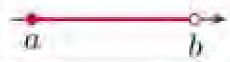
a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $\langle -2; 3 \rangle$.

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, zaś jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$\langle a; b\rangle$	$a \leqslant x \leqslant b$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; b)$	$a \leqslant x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b\rangle$	$a < x \leqslant b$	

Długością każdego z przedziałów $(a; b)$, $(a; b\rangle$ $\langle a; b)$ $\langle a; b\rangle$ nazywamy liczbę: $b - a$.

Ćwiczenie 2

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

a) $\langle -1; 4\rangle$ b) $\left\langle \frac{3}{2}; 5\right)$ c) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right\rangle$ d) $\langle -60; 40\rangle$

Przedziały nieograniczone

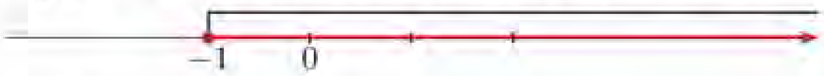
Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.

b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.

Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geqslant -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $\langle -1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leqslant 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3\rangle$.

Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych **R** możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

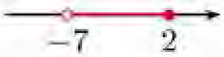
Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a;\infty)$	?	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a;\infty)$	$x \geqslant a$	?
?	?	$x \leqslant b$	
?	$(-\infty;b)$	?	?

Zadania

1. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $-7 \leqslant x \leqslant 0$ b) $\frac{1}{4} \leqslant x < \sqrt{2}$ c) $x \geqslant 2\frac{1}{4}$ d) $x < -\frac{1}{3}$

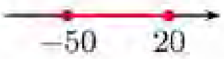
2. Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.

a) 

c) 

e) 

g) 

b) 

d) 

f) 

h) 

3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:

a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,

b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,

c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,

d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.

4. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego:

a) należą liczby odległe od liczby 1 o mniej niż 2,

b) należą liczby odległe od liczby -1 o mniej niż 3,

c) należą liczby odległe od liczby 3 o nie więcej niż 2,

d) należą liczby odległe od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:

a) $\langle -1;4)$, b) $(0;6)$, c) $\langle -\frac{2}{3};\frac{5}{2}\rangle$, d) $\langle -\frac{25}{4};-2\rangle$.

6. Które spośród liczb: x, y, z należą do podanego przedziału?

a) $\left(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}\right\rangle$, $x = -\frac{8}{3}$, $y = -2\frac{3}{4}$, $z = 3\frac{2}{5}$

b) $\langle -1; 2)$, $x = -1{,}01$, $y = -0{,}(9)$, $z = 1{,}(9)$

7. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?

a) $\sqrt{x} \in \langle 1; 2\rangle$ b) $\sqrt{x} \in \langle 2; 3)$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in \langle -2; 0)$

8. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

a) $A = (-1; 2\rangle$, $B = \langle -1; 3)$

b) $A = (-\infty; 7)$, $B = (2; 7\rangle$

c) $A = \left(-\frac{7}{8}; \frac{15}{8}\right)$, $B = \left\langle -\frac{6}{7}; \frac{13}{7}\right\rangle$

d) $A = \left(\frac{22}{7}; 7\right)$, $B = \left(\pi; \sqrt{50}\right)$

9. Podaj najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w przedziale:

a) $\left(-2\frac{1}{2}; 5\right\rangle$, b) $(-\pi; 6)$, c) $\left\langle -3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4}\right)$, d) $\left\langle -\sqrt{2}; \sqrt{3}\right\rangle$.

10. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:

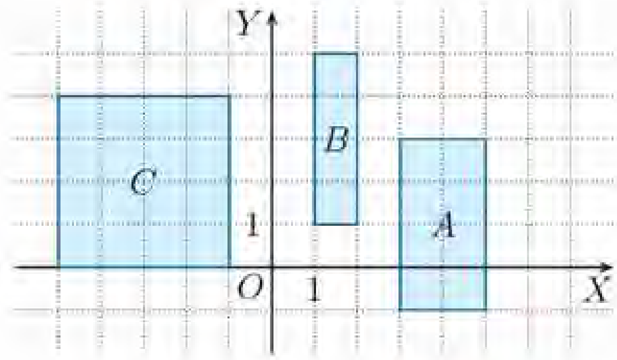
a) $\langle -3; 1\rangle$, b) $\langle -2; 3\rangle$, c) $\left\langle \sqrt{2}; 4\sqrt{2}\right\rangle$, d) $\left\langle 1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}\right\rangle$.

11. Dla jakich wartości parametru p przedziały $\langle p; p+1\rangle$ oraz $\langle 2p; 2p+1\rangle$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

12. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in \langle 3; 5\rangle$ i $y \in \langle -1; 3\rangle$. Zapisz warunki, które spełniają punkty należące do:

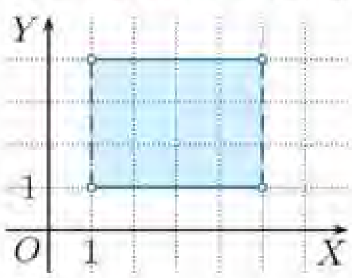
a) prostokąta B,

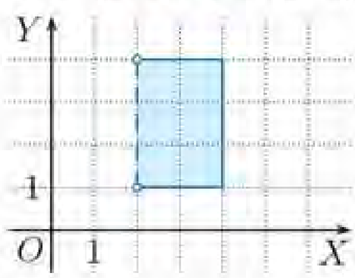
b) kwadratu C.

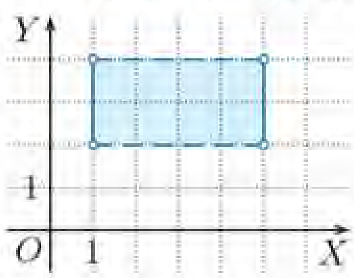


13. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają warunki:

a) $x \in (2; 4\rangle$, $y \in \langle 1; 4\rangle$, b) $x \in \langle 1; 5\rangle$, $y \in (2; 4)$, c) $x \in (1; 5)$, $y \in \langle 1; 4\rangle$?

I


II


III


Uwaga. Linia przerywana na rysunku oznacza, że leżące na niej punkty nie należą do zbioru.

2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -2; 3\rangle$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.

$A \cup B = \langle -2; 5)$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3\rangle$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = \langle -2; 0\rangle$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$

b) $A = \langle -4; 1\rangle$, $B = \langle 1; 3)$

c) $A = \langle 1; 3\rangle$, $B = \langle -5; 3\rangle$

d) $A = \langle -3; 2\rangle$, $B = (-1; 2\rangle$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $\langle -3; 0)$ i $(1; 4\rangle$.

$$X = \langle -3; 0) \cup (1; 4\rangle$$

Ćwiczenie 2

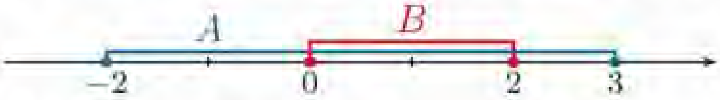
Zaznacz na osi liczbowej zbiór X.

a) $X = \langle -4; -1\rangle \cup \langle 2; 4)$

b) $X = \langle -6; -5\rangle \cup (-3; 2) \cup \langle 4; \infty)$

Przykład 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeżeli $A = \langle -2; 3\rangle$ i $B = \langle 0; 2\rangle$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$A \setminus B = \langle -2; 0) \cup (2; 3\rangle$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

a) $A = \langle -5; 4\rangle$, $B = (-3; -1)$
b) $A = \langle -3; 5)$, $B = \left\langle 2; \frac{5}{2}\right\rangle$
c) $A = \langle -3; \infty)$, $B = \langle -1; 2\rangle$
d) $A = \mathbf{R}$, $B = (-3; 1\rangle$

Zadania

1. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 0)$, $B = \langle -1; 4\rangle$
b) $A = (-4; 2\rangle$, $B = \left\langle -\frac{1}{2}; 3\right\rangle$
c) $A = (-\infty; 2\rangle$, $B = \langle 0; 2)$
d) $A = \langle -1; 2\rangle$, $B = \langle 2; \infty)$

2. Ile elementów należy do zbioru X? Wykonaj odpowiednią ilustrację graficzną.

a) $X = \langle -5; 6\rangle \cap \mathbf{N}$
b) $X = (-3; 3) \cap \mathbf{Z}$
c) $X = (-\pi; \pi) \cap \mathbf{N}$

3. Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:

a) $A \cup B$,
b) $A \cap B$,
c) $A \setminus B$,
d) $B \setminus A$?

4. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = \langle -2; 0\rangle \cup \langle 1; 2\rangle \cup \langle 4; 6\rangle$
b) $X = (-3; -1) \cup (0; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$
c) $X = (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; 1) \cup \{3\}$
d) $X = (-\infty; -2) \cup \{0, 1\} \cup \langle 4; \infty)$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$, $B = (0; 4)$
b) $A = \langle -2; 1\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$, $B = (0; \infty)$
c) $A = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$, $B = (-1; 6)$
d) $A = (-2; 0\rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 3; 5\rangle$
e) $A = \langle 0; 7\rangle$, $B = (1; 3) \cup \langle 8; 9\rangle$
f) $A = \langle 1; 9\rangle$, $B = (1; 2) \cup (6; 9)$

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B. Wyznacz zbiory: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -5; 2\rangle$, $B = \{1, 2\}$
b) $A = \langle 3; \infty)$, $B = \{2, 3, 4\}$
c) $A = (-\infty; 4\rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 4; \infty)$
d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\} \cup (2; \infty)$

7. Zapisz w postaci przedziałów zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant -4 \text{ i } x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x > -1 \text{ i } x \leqslant 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 2\}$, a następnie wyznacz zbiór:

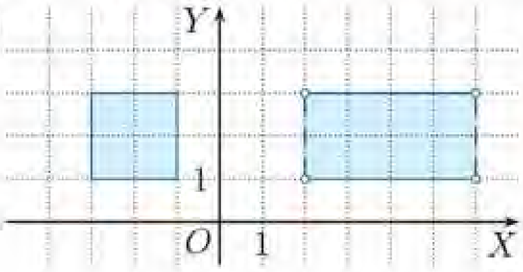
a) $(A \cup B) \setminus C$, b) $(A \cup C) \setminus B$, c) $(A \cap B) \setminus C$.

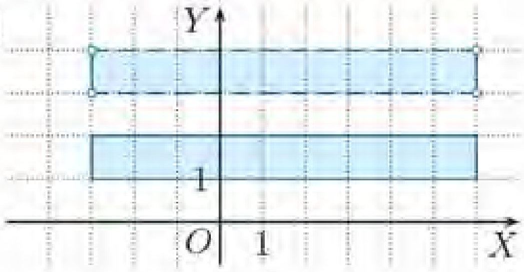
$A' = \mathbf{R} \setminus A$

8. Wyznacz zbiory: A', B' i $A' \cap B'$, gdy:

a) $A = (-3; 0)$, $B = \langle \frac{1}{2}; 3 \rangle$,
b) $A = \langle -4; 4 \rangle$, $B = (0; 2)$,
c) $A = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$, $B = \langle -4; 4 \rangle$,
d) $A = (-\infty; 0) \cup (1; 5)$, $B = (-5; -1)$.

9. Podaj za pomocą przedziałów, jakie warunki spełniają współrzędne punktów (x, y) należących do przedstawionego zbioru.

a)


b)


10. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y), jeśli spełniony jest warunek $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup (1; 2)$ oraz:

a) $y \in \langle -2; 3 \rangle$, b) $y \in \langle -3; -1) \cup (1; 3 \rangle$, c) $y \in (-\infty; -1 \rangle \cup \langle 2; \infty)$.

Na rysunku przedstawiono początkowe etapy zaproponowanej przez Georga Cantora (1845–1918) konstrukcji pewnego zbioru. Zaczynamy od przedziału $C_0 = \langle 0; 1 \rangle$, który dzielimy na trzy części równej długości i usuwamy środkową część będącą przedziałem $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. W ten sposób otrzymujemy zbiór $C_1 = \langle 0; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$. Następnie z każdej części zbioru C_1 usuwamy jej środkową trzecią część itd.

11. a) Zapisz zbiór C_2 w postaci sumy przedziałów. Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_2 do sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_1?

b) Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru C_4 do długości zbioru C_0?

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Np. liczba 7 spełnia nierówność $x+1>5$, bo $7+1>5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x-2<1$.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Przykład 1

Nierówności $>$ i $<$ nazywamy **nierównościami ostrymi**.

a) Rozwiąż nierówność $x+3>7$.

$$x+3>7$$

$$x+3-3>7-3$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 3 – nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.

$$x>4$$

Nierówność jest spełniona dla $x \in (4;\infty)$.

Nierówności $\geqslant$ i $\leqslant$ nazywamy **nierównościami nieostrymi**.

b) Rozwiąż nierówność $x-4 \leqslant 5$.

$$x-4 \leqslant 5$$

$$x-4+4 \leqslant 5+4$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4 – nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.

$$x \leqslant 9$$

Nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty;9\rangle$.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron jest równoważne przeniesieniu tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

a) $x+309<273$ b) $x-\frac{1}{2} \geqslant 2\frac{1}{3}$ c) $x-\frac{1}{4} \leqslant -5\frac{1}{2}$ d) $2x-3>x+17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

a) $x-13<56,\ x+26>95$ b) $x+\frac{1}{4} \geqslant \frac{2}{3},\ x+\frac{1}{12} \geqslant \frac{1}{2}$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$6x + 5 < 17$ — Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$6x < 12 \ / : 6$ — Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$x < 2$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leqslant 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0{,}1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geqslant 3x + 5$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$-\frac{1}{3}x > 5 \ / \cdot (-3)$ — Mnożymy obie strony nierówności przez -3.

$x < -15$ — Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leqslant -13$.

$-6x - 4 \leqslant -13$ — Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$-6x \leqslant -9 \ / : (-6)$ — Dzielimy obie strony nierówności przez -6.

$x \geqslant \frac{3}{2}$ — Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$ c) $3(x - 1) \geqslant x + 5$ e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leqslant 5$ d) $2\left(x + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}x + 4$ f) $\frac{2-x}{5} \leqslant \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 6

Przeczytaj przykład w ramce. Sprawdź, czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna.

a) $3(2 - \frac{1}{6}x) \geqslant -0{,}5x + 1$

b) $-\frac{2}{3}(3x - 2) > \frac{1}{2}(3 - 4x)$

c) $\frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$

d) $\frac{4-3x}{3} \geqslant \frac{2-5x}{5} + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x \ / \cdot 6$

$1 - 3x < -3x$

$1 < 0x$ sprzeczność

Nierówność jest sprzeczna (nie spełnia jej żadna liczba).

b) $4x - 2 \geqslant 4x - 10$

$0x \geqslant -8$

Nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

a) $\begin{cases} x + 9 \geqslant 13 \\ 2x - 6 < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 6 > -9 \\ 1 - x \geqslant 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3 \leqslant 4 \\ 5 - 4x \geqslant 1 \end{cases}$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

a) $2x + 20 > 8$ i $5 < 1 - x$

b) $2x + 3 > 2$ i $4x < 3$

c) $2x + 3 < 7$ i $3 - 4x \leqslant 19$

d) $3x + 9 > -7$ i $-3x > 4x + 21$

3. Które spośród liczb: $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$, spełniają podaną nierówność?

a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$

c) $\frac{3x-2}{5} \geqslant \frac{x+1}{3}$

d) $\frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}$

e) $\frac{3x+2}{-5} < 3 - x$

f) $-3(x + 3) > \frac{x-5}{-2}$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$

b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leqslant 1 - x$

c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geqslant \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$

d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geqslant 3 - \frac{8x-3}{3}$

f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest jedna z relacji: $a < b$, $a = b$ lub $a > b$. Własność ta nosi nazwę trychotomii.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi następująca własność (zwana przechodniością): jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n, od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n.

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k, do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k.

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m.

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k, jeśli:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 cm^2 i mniejsze od 68 cm^2?

8. Właściciel klubu chce zaprosić na koncert jeden z dwóch zespołów rockowych. Zespół Gamma zażądał za występ 2230 zł, a zespół Kappa – 1550 zł plus 8 zł od każdego uczestnika koncertu. Dla jakiej liczby uczestników tańsze będzie zaproszenie zespołu Gamma?

9. Który symbol, $<$ czy $>$, należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać nierówność prawdziwą, jeśli $c < 0$ oraz $a > b$? Zapisz tę nierówność w zeszycie.

a) $-ac \boxed{?} -bc$ b) $\frac{a}{c^2} \boxed{?} \frac{b}{c^2}$ c) $\frac{a}{c^3} \boxed{?} \frac{b}{c^3}$

D **10.** Czy poniższe zdanie jest prawdziwe (odpowiedź uzasadnij)?

a) Dla dowolnych liczb p, q, jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.

b) Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q, jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$.

D **11.** Udowodnij.

a) Jeśli $p < q$ i $r < s$, to $p(r - s) > q(r - s)$.

*b) Jeśli $p, q, r, s > 0$ i $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, to $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$ oraz $\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$.

Warto powtórzyć

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(3x^2+2x-4)x^2$

b) $-2x^3\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2\right)$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y-2xy^2)$

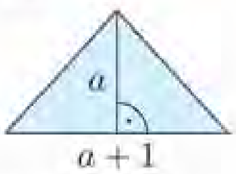
d) $\sqrt{2}x^4\left(\sqrt{8}xy+y^2\right)$

e) $(x^2y-xy+xy^2)x^2y$

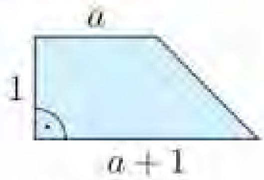
f) $2\sqrt{3}xy^3\left(\sqrt{3}x^2y^2-\frac{1}{2}x^3y\right)$

2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

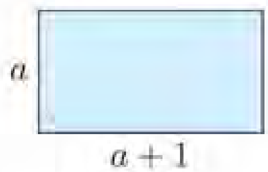
A.



B.



C.



D.

I. $2a^2+a$ II. a^2+a III. $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$ IV. $a+\frac{1}{2}$

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x(3x-4)-6x(x^2+2x-3)$

b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2-2x+6)-2x\left(\frac{1}{2}x^2-4x\right)$

c) $\sqrt{6}x^3\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}x\left(2x^2-4\sqrt{2}x\right)$

d) $xy^2(2x-3xy+y)+\frac{1}{4}x^2y\left(\frac{1}{2}y^2-8y\right)$

e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy-2xy^2)-\frac{1}{8}xy^2(4x^3-16x^2y)$

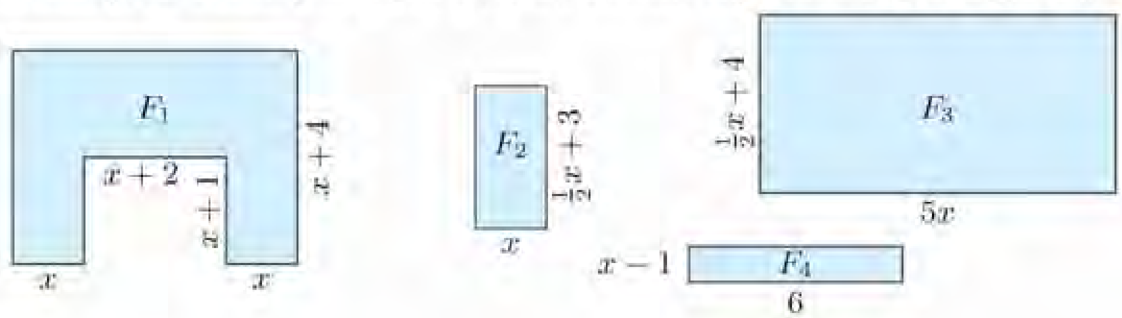
f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x+y)-\frac{3}{4}y(x^2-x^2y)-\frac{1}{2}(x^3y+xy)$

D **4.** Uzasadnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x.

a) $4x^2\left(x^2-\frac{3}{2}x+1\right)-3x\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+1\right)-4\left(x^2-\frac{3}{4}x-8\right)$

b) $\sqrt{15}x\left(2\sqrt{3}x^2-6\sqrt{5}x-\sqrt{10}\right)-2\sqrt{5}x^2\left(3x-3\sqrt{15}\right)+\sqrt{6}(5x-1)$

D **5.** Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4.



2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Jeżeli w poszczególnych wyrazach sumy rozpozna się jednakowe czynniki i wyłączy je przed nawias, łatwiej będzie wykonać obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wyłączamy przed nawias liczbę 7:

$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$

Korzystamy z własności działań $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ zwanej rozdzielnością mnożenia względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$
b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$
c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$
d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$
e) $12 \cdot 228 + 12 \cdot 172$
f) $19 \cdot 116 + 19 \cdot 84$

Również w sumach algebraicznych można wyłączyć wspólny czynnik przed nawias.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wyłączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wyłączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wyłączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wyłączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

To, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

> Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.
>
> $$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5x + 5y$
b) $4b - 8a$
c) $9x - 27y^2$
d) $-6x^2 + 18y^2$
e) $39y^2 - 26z$
f) $-11a^3 + 22b^2$
g) $-48p + 36q^2$
h) $75xy^3 - 125$

Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

a) $4x^2 + xy,\ x$
b) $2x^3 - 12xy,\ 2x$
c) $3xy - xyz,\ xy$
d) $6pq + 18p^2q,\ 6pq$
e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b,\ a^2b$
f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3,\ x^2y^2$

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

a) $8x^3 - 36x^2$
b) $7y^2 - 14y^4$
c) $5x^3 + 10x^2y$
d) $20ax - 15ay$
e) $8ab + 12bc$
f) $4xy + 6x^2y$
g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$
b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$
c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$
d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$
e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.

a) $a^2b + ab^3,\ ab$
b) $x^3y^2 - xy^3,\ xy^2$
c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2,\ 3a^2$
d) $4x^4y^4 + 8y^3z,\ 4y^3$
e) $3a^3b^2 - 6a^2b,\ 3a^2b$
f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3,\ 2x^2y^3$

3. Zapisz wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias podany jednomian.

a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2,\ xyz$
b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2,\ xyz^2$
c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz,\ 2x^2y$
d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2,\ 3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $a + b = 15$.

a) $-3a - 3b$
b) $2(a + b) - 4a - 4b$
c) $a(a + b) + b(a + b)$

6. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $6x + 9y = 12$.

a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

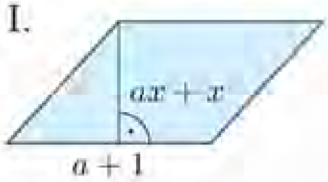
7. Aby obliczyć wartość wyrażenia $a^2 - 2ab$ dla $a = 18{,}5$ i $b = 4{,}25$, można postąpić tak, jak podano poniżej.

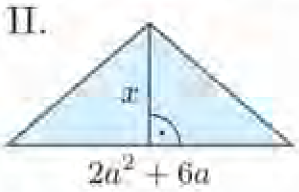
> Obliczenia będą prostsze, gdy zauważymy, że $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$.
> Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:
> $$a(a-2b) = 18{,}5(18{,}5 - 2\cdot 4{,}25) = 18{,}5(18{,}5 - 8{,}5) = 18{,}5\cdot 10 = 185$$

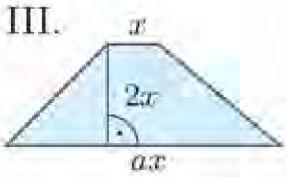
Korzystając z podanej metody, oblicz wartość wyrażenia:

a) $x^2 + 2xy$ dla $x = 17{,}5$ i $y = 6{,}25$, b) $2x^2 - 3xy$ dla $x = 14$ i $y = 6$.

8. Dopasuj wyrażenie opisujące pole figury do odpowiedniej figury.

I.


II.


III.


A. $ax(a + 3)$ B. $x^2(a + 1)$ C. $x(a + 1)^2$

D **9.** W pudełkach ponumerowanych od 1 do 7 znajdowały się kulki. W pierwszym z nich było x kulek, a w każdym następnym o jedną kulkę więcej niż w poprzednim. Uzasadnij, że we wszystkich było $7(x + 3)$ kulek.

D **10.** Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,

b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,

c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

> Niech n, $n+1$ i $n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:
> $$n + (n+1) + (n+2) = \\ = 3n + 3 = 3(n+1)$$
> Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n+1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

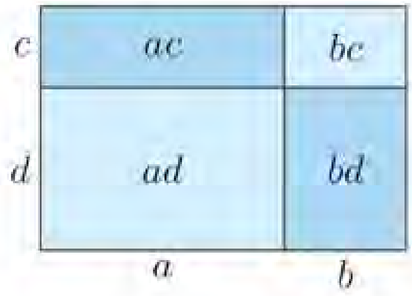
D **11.** Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

D **12.** Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a+b$ i $c+d$, zatem jego pole jest równe $(a+b)\cdot(c+d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac+ad+bc+bd$$



Mamy zatem równość:

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

> Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.
>
> $$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x+3)(x+5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x+3)(x+5)=x\cdot x+x\cdot 5+3\cdot x+3\cdot 5=$$
$$=x^2+8x+15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a+4b)(a-b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a+4b)(a-b)=a^2-ab+4ab-4b^2=a^2+3ab-4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x+4)(x+3)$

b) $(p+6)(p-q)$

c) $(p+q)(q-2p)$

d) $(3x+1)(2x+6)$

e) $(a+3b)(3a-2b)$

f) $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)(4a-3b)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x-3)(x^2+x-2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x-3)(x^2+x-2)=x^3+x^2-2x-3x^2-3x+6=x^3-2x^2-5x+6$$

$$(x^2+x-2)(x-3)=x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6=x^3-2x^2-5x+6$$

Ćwiczenie 2

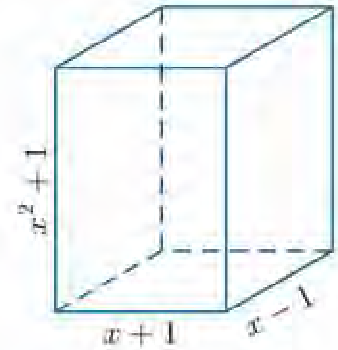
Wykonaj mnożenie.

a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$

b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.



Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V=(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$(x+1)(x-1)(x^2+1)=$
$=(x^2-x+x-1)(x^2+1)=$ Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzymanym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.
$=(x^2-1)(x^2+1)=$
$=x^4+x^2-x^2-1=x^4-1$ Mnożymy dwie sumy i ponownie redukujemy wyrazy podobne.

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V=x^4-1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają podane długości. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

a) $x+2,\ x-2,\ x^2+2$ b) $x-2,\ x^2-1,\ x^2+1$

Przykład 4

a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2=3+\sqrt{3}-2=1+\sqrt{3}$

b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})=2(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=$$
$$=6-\sqrt{6}+2\sqrt{6}-2=4+\sqrt{6}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$

b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n-1)(n-2) + (4-n)(2-n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S:

$S = (4n-1)(n-2) + (4-n)(2-n) =$ Mnożymy sumy algebraiczne.
$= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 =$ Redukujemy wyrazy podobne.
$= 5n^2 - 15n + 10 =$
$= 5(n^2 - 3n + 2)$ Wyłączamy liczbę 5 przed nawias.

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

a) $(2n-3)(n+4) + (n-3)(n+2) - n$ jest podzielna przez 3,

b) $(3n-4)(2n-5) - (2n-1)(5-2n)$ jest podzielna przez 5,

c) $(6n-3)(n+4) - (3n-2)(2n-1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x-1)(x+3) = x^2$.

$(x-1)(x+3) = x^2$
$x^2 + 3x - x - 3 - x^2 = 0$
$2x = 3 \quad / : 2$
$x = 1\frac{1}{2}$

Mnożymy sumy algebraiczne i od obu stron równania odejmujemy x^2 (czyli przenosimy x^2 na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem). Następnie redukujemy wyrazy podobne.

b) Rozwiąż nierówność $(2x+1)(2x+5) + x \leqslant (4x-1)(x+3)$.

$(2x+1)(2x+5) + x \leqslant (4x-1)(x+3)$
$4x^2 + 10x + 2x + 5 + x \leqslant 4x^2 + 12x - x - 3$
$4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x \leqslant -3 - 5$
$2x \leqslant -8 \quad / : 2$
$x \leqslant -4$

Przenosimy ze zmienionym znakiem wyrażenia zawierające niewiadomą na lewą stronę nierówności, a liczby na prawą stronę.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż.

a) $(x+2)(x-5) = x^2$

b) $(x+3)(1-2x) + 2x^2 = 0$

c) $3x^2 - (x+1)(3x+2) = 0$

d) $(x+4)(x-1) < x(x+2) + 2x - 1$

e) $(2x+3)(3x-1) + 4 > (6x-2)(x+1)$

f) $(1-x)(2x+3) \leqslant -2(x+1)(x-2) - 2$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(2a+b)(a-1)$ c) $(-2a+b)(6a-2)$ e) $(2a+b^2)(a-2b)$

b) $(3a-2b)(2b+3)$ d) $(3+4a)(-2b-1)$ f) $(a^2-3b)(2b-3a)$

2. Wykonaj mnożenie.

a) $(x+2y+3)(x-2)$ c) $(x^2+y)(x+y+2)$ e) $2x(x-2y)(3+y)$

b) $(2x-y+1)(2x-3)$ d) $(x-y)(x^2-2x+1)$ f) $-4x(2x-y)(2x+y)$

3. Uprość wyrażenie.

a) $(a+3)(a-4)+(a-3)(a+4)$ d) $3y^2-2x(x+2y)-(x-y)(2x+y)$

b) $(2a-b)(a+3b)-(a-4b)(2a+b)$ e) $2x^2+3(x(x+2)-x(x-3))$

c) $-4a^2+3a(a-1)+(2a-1)(a+3)$ f) $-4x^2-6(y^2-(x-2y)(x+y))$

4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x=-0.5$.

a) $(x+2)(6(x+4)-5(x+6))$ b) $-2(x^4+x^2)+x^3(x+1)+(x^2-2)(x^2+3)$

5. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a+2$.

a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.

b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

6. a) Dany jest kwadrat o boku długości $x+3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?

b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a+3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a+4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy wysokość zwiększymy o 2?

c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x+4$ i $2x+3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.

7. Oblicz.

a) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(4\sqrt{3}-8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(4-\sqrt{6})$

b) $(2\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})+(6-3\sqrt{15})$

D **8.** Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.

a) $(3x-6)(4x-2)-(6x+3)(2x-6)$

b) $(3x-2)(2x-1)-(5x-2)(x-1)$

9. Rozwiąż równanie.

a) $(x+2)(x-3)=x^2+4$

b) $(x-4)(x+6)=x(x-4)$

c) $(2-x^2)(x^2-3)=x+5x^2-x^4$

d) $(x-2)(x-5)=(x+3)(x+6)$

e) $(2x+1)(x+3)=(x-4)(2x-3)$

f) $(2x^2+x-3)(x-4)=x^2(2x-7)$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2-(x+3)(x-3)\leqslant 6x$

b) $(4-x)(2x+3)+2x^2<6$

c) $(2x-1)(3x-1)-(3x-2)(2x-3)\geqslant 0$

d) $(4-6x)(2x+1)+(4x-5)(3x-1)>x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

a) $(3x+1)(2-x)+x(3x-5)\geqslant x$

b) $2x^2-(2x+1)(x-3)>6x-7$

c) $(3x+3)(2x-1)+4x<6(x+2)(x-1)+9$

d) $\left(x+1\frac{1}{2}\right)(2x+1)\geqslant\left(2x+\frac{1}{2}\right)(x-1)+6x$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm^2. Oblicz obwody tych prostokątów.

b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm^2. Oblicz różnicę między polem większego i mniejszego prostokąta.

c) Dane są dwa czworokąty: kwadrat o boku $(2x+7)$ cm oraz prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm^2 większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

13. Wykonaj mnożenie.

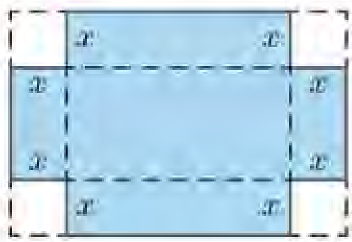
a) $(x+1)(x-1)(x^2-1)(x^4-1)$

b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$

c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$

d) $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)$

D **14.** a) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 30 cm i 20 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem: $V=4x^3-100x^2+600x$.



b) Z kwadratowego arkusza tektury o boku równym 40 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór opisujący pojemność tego pudełka.

2.8. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{kwadrat różnicy}$$

D **Ćwiczenie 1**

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Przykład 1

a) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

b) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

c) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^2$ c) $(x-3)^2$ e) $(2x+1)^2$ g) $(4x-1)^2$

b) $(x+2)^2$ d) $(x-5)^2$ f) $(\frac{1}{2}x+2)^2$ h) $(2x-\frac{1}{2})^2$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

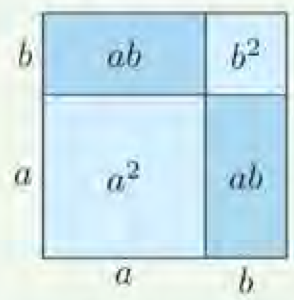
a) $(x+2y)^2$ d) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)^2$

b) $(2x-y)^2$ e) $\left(2x-\frac{1}{4}y\right)^2$

c) $(3x+2y)^2$ f) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(\sqrt{7}+1\right)^2$ d) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{5}-3\right)^2$ e) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)^2$

c) $\left(6-\sqrt{3}\right)^2$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{6}\right)^2$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$ różnica kwadratów

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 2

a) $(x - \boxed{6})(x + \boxed{6}) = x^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$

b) $(2x-3y)(2x+3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-3)(x+3)$

b) $(x+7)(x-7)$

c) $(2x-4)(2x+4)$

d) $(6+5x)(5x-6)$

e) $(3x-4y)(3x+4y)$

f) $\left(\frac{1}{2}x+3y\right)\left(3y-\frac{1}{2}x\right)$

Przykład 3

$(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3}) \approx (7-1{,}732050808)(7+1{,}732050808) =$$
$$= 5{,}267949192 \cdot 8{,}732050808 \approx 46$$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)$

b) $\left(\sqrt{5}+1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

d) $\left(2\sqrt{2}-3\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

f) $\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Zadania

1. Uprość wyrażenie.

a) $(x-3)(x+3)+(2+x)(2-x)$

b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c) $(2y-3)^2-(3y-2)(3y+2)$

d) $(5y+1)(1-5y)-(1+5y)^2$

e) $(2x-y)(2x+y)+(3x+2y)(3x-2y)$

f) $(y+3x)(3x-y)-(x-5y)(x+5y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x+1)(x-1)+(x+2)(x-2)-(x+3)(x-3)$ dla $x=\sqrt{3}$,

b) $(1-2x)(1+2x)+(1-3x)(1+3x)-(1-4x)(4x+1)$ dla $x=\sqrt{5}$,

c) $(2x-1)^2-(2x-1)(1+2x)-(2x+1)^2$ dla $x=\sqrt{2}$.

3. Oblicz.

a) $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{3}-1)^2-(2-\sqrt{3})^2$

c) $(2\sqrt{3}-\frac{3}{2})^2-(2\sqrt{3}+\frac{3}{2})^2$

d) $(\frac{1}{3}+3\sqrt{2})^2-(\frac{1}{3}-3\sqrt{2})^2$

e) $(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})-(\sqrt{5}-2)(2+\sqrt{5})$

f) $(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$

g) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2-(2\sqrt{5}+1)(1-2\sqrt{5})$

h) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2-(5\sqrt{2}-1)(1+5\sqrt{2})$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}$

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a.

a) $a=3+\sqrt{2}$ b) $a=2\sqrt{3}-1$ c) $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a=4-\sqrt{2},\ b=4+\sqrt{2}$ b) $a=8+\sqrt{2},\ b=4-2\sqrt{2}$

7. Oblicz.

a) $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^2$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(2x+3y)(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x=\sqrt{\sqrt{10}-3},\ y=\sqrt{\sqrt{10}+3}$,

b) $(\sqrt{3}x-y)^2-(x-\sqrt{3}y)^2$ dla $x=\sqrt{6}+\sqrt{2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,

c) $(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)^2-(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y)(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y)$ dla $x=\sqrt{5}-4,\ y=\sqrt{6}$,

d) $(x^2-4y^2)^2-(4y^2-x^2)^2$ dla $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

D **9.** Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

a) $(n+1)^2-n^2$ jest nieparzysta,

b) $(2n+1)^2$ jest nieparzysta,

c) $(n+\frac{1}{2})^2-(n-\frac{1}{2})^2$ jest parzysta,

d) n^3-n jest podzielna przez 6.

D **10.** Wyprowadź wzór:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

Wskazówka. Pogrupuj wyrazy i skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.

D **11.** Wykaż, że:

a) jeśli $c\neq 0$ i $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab$, to $a=-b$,

b) jeśli $b\neq 0$ i $(a-b+c)^2=a^2+c^2-2ab+2ac$, to $b=2c$.

2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$\frac{5}{\sqrt{2}-1}=\frac{5}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{5\sqrt{2}+5}{2-1}=5\sqrt{2}+5$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$ c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład. Rozwiąż równanie.

a) $x^2-(2-x)^2=8$

b) $(3x+1)^2-9x^2=7$

c) $(x+1)^2-(x+1)(x-1)=12$

Rozwiąż równanie.

$$(x-4)(x+4)-(x-3)^2=17$$
$$x^2-16-(x^2-6x+9)=17$$
$$x^2-16-x^2+6x-9=17$$
$$6x-25=17$$
$$6x=42$$
$$x=7$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2-(2x+1)^2<3$

b) $(3-x)^2\geqslant x^2+12$

c) $(2x+1)(2x-1)>4x^2-9x$

d) $2-(2x-1)^2\leqslant(3-2x)(2x+3)$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie x^2+4x+4 przyjmuje wartość równą 0?

$x^2+4x+4=(x+2)^2$, więc:
$x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy: „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2+8x+16$ c) $4x^2-4x+1$ e) $4x^2+12x+9$

b) x^2-6x+9 d) $25x^2+10x+1$ f) $9x^2-3x+\frac{1}{4}$

Równanie, które nie jest spełnione przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **równaniem sprzecznym**. Podobnie taką nierówność nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 = 6x$.

$$x^2 + 6x + 9 = 6x$$
$$x^2 = -9$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$.

$$4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 - 4x$$
$$1 < 0$$

Zatem nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Równanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy **równaniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$.

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$$
$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = 12x$$
$$12x = 12x$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x-2)(x+2) + 5 > 0$.

$$(x-2)(x+2) + 5 > 0$$
$$x^2 - 4 + 5 > 0$$
$$x^2 > -1$$

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

a) $(6-x)^2 - (2-x)^2 = -8x$

b) $(x-4)^2 + 4x = (x-2)^2 + 12$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

a) $(x+1)^2 - 2 \leqslant (x-1)(1+x) + 2x$

b) $6x - (3x-1)^2 \geqslant (2x+3)^2$

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0;4)$?

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ e) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$ h) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$ f) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$ i) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ l) $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $(x-5)(x+5)=x^2-100x$ d) $4(x+2)^2-(2x-1)^2=20x+10$

b) $(3-x)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$ e) $\left(6+\frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{1}{3}x+6\right)+\left(\frac{1}{3}x-4\right)^2=4$

c) $4\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2=(6-x)^2$ f) $(-4x-3)(4x-3)+8\left(1-\sqrt{2}x\right)^2=1$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $4(x-3)^2-(2x-5)^2\geqslant 2$ d) $-9(2-x)^2-(1-3x)(3x+1)\leqslant 11$

b) $9\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2>(1-2x)^2-8x$ e) $\left(\frac{1}{4}x+2\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}x\right)\geqslant 0$

c) $2(x+2)^2-(\sqrt{2}x-2)^2\geqslant 0$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-1\right)<\frac{(x-1)^2}{2}$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases}(x+1)^2>x^2+1\\(x-1)^2<(2-x)^2\end{cases}$ c) $\begin{cases}(2x+5)(5-2x)+(2x-3)^2-2>0\\\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4<x-(2-x)(2+x)\end{cases}$

b) $\begin{cases}\frac{x-3}{4}<\frac{x+1}{2}\\(2x-3)^2\leqslant(5-2x)^2\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-\frac{4x-2}{3}\geqslant x-6\\1-(2x-1)(1+2x)<-2x-(2x-1)^2\end{cases}$

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

D **7.** Udowodnij równość: $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}=\sqrt{1+x^2}-x$.

D **8.** Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$.

Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba (patrz str. 61).

Warto wiedzieć

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

D **Przykład 1**

Uzasadnij, że liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned} 13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\ &= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) \end{aligned}$$

Zatem liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

D **1.** a) Uzasadnij, że liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.

b) Uzasadnij, że liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

D **Przykład 2**

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Jeśli $a + b < 0$, to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).
Zakładamy teraz, że $a+b \geqslant 0$. Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu, nie zmieniając zwrotu nierówności (uzasadnij, dlaczego).

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \quad / \cdot 4$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.

$$0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leqslant (a-b)^2$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b, zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

D **2.** Uzasadnij, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność:

a) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$, b) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

D **Przykład 3**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geqslant 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x - y)^2 + (x - 1)^2$

$(x - y)^2 \geqslant 0$ i $(x - 1)^2 \geqslant 0$, więc nierówność jest prawdziwa.

* D **3.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

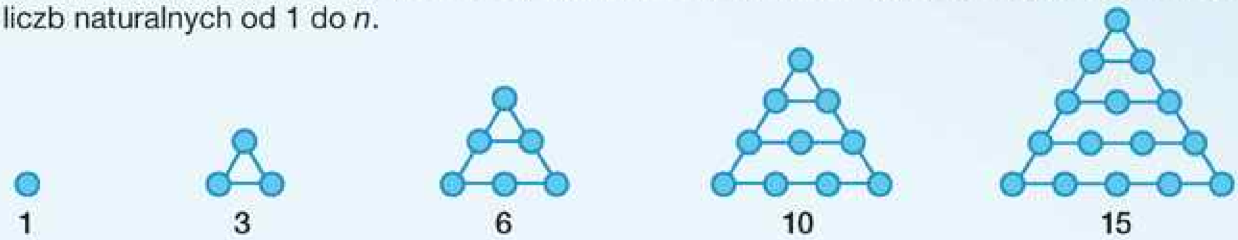
a) $y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geqslant 0$, b) $5x^2 + y^2 + 4 \geqslant 4xy + 4x$.

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

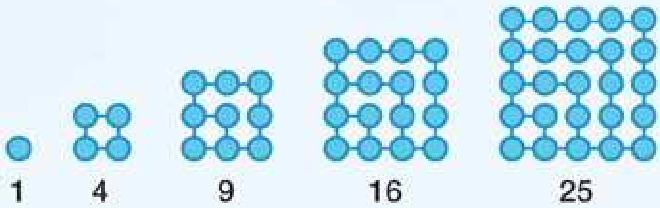
Liczby trójkątne

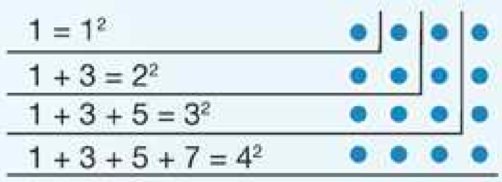
Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n-ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n.



Wzór na n-tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

Liczby kwadratowe

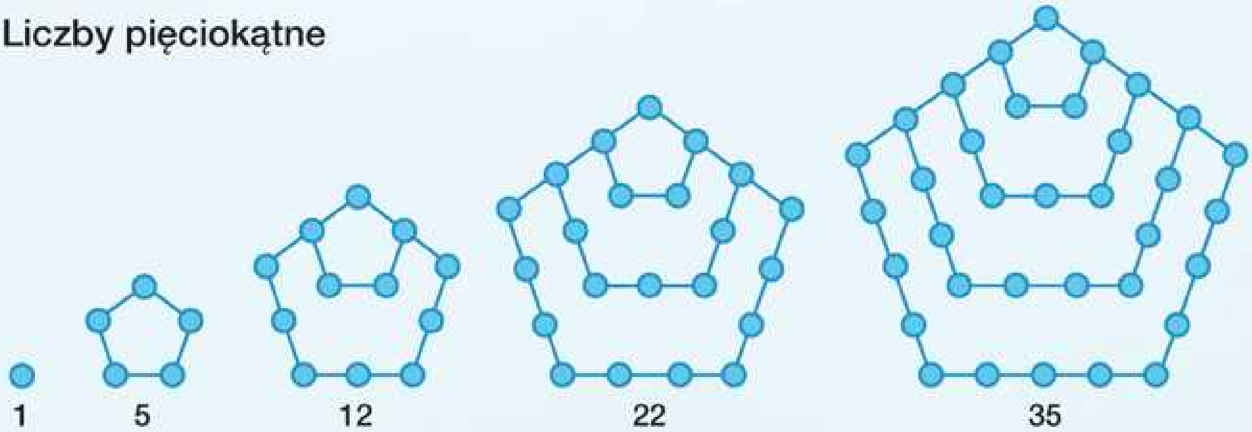




1 Zauważ, że n-ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?

2 Wykaż, że dla $n > 1$ n-ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.

4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n-ta liczba r-kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2)\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n$$

2.10. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{jeśli} \quad a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a.

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geqslant 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Przykład 1

a) $|3{,}5| = 3{,}5$ b) $|-3{,}5| = -(-3{,}5) = 3{,}5$ c) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

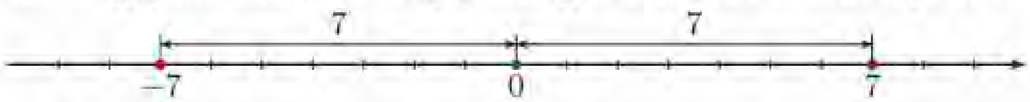
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

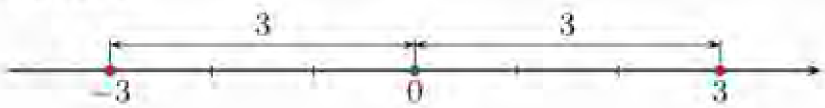
Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3.



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie.

a) $|x| = 2$ b) $|x| = 10$ c) $|x| = 0$ d) $|x| = -3$

Ćwiczenie 3

Która z liczb x, y ma większą wartość bezwzględną?

a) $x = 7$, $y = -6$ b) $x = -10$, $y = -12$ c) $x = -8$, $y = 0$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geqslant 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

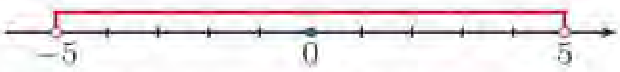
a) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ b) $\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

b) Rozwiąż nierówność $|x| \geqslant 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest większa lub równa 2.

Nierówność jest spełniona dla $x \leqslant -2$ oraz dla $x \geqslant 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

a) $|x| < 8$ b) $|x| \leqslant \sqrt{2}$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geqslant \pi$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $|x| \geqslant 0$ b) $|x| \leqslant 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Zadania

1. Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.

a) $x = -3$ b) $x = 4 - 2\sqrt{6}$ c) $x = 6\sqrt{2} - 8$ d) $x = \pi - 2\sqrt{3}$

2. Wyznacz liczby spełniające równanie.

a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$

b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

3. Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?

a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geqslant -3$, $|x| \leqslant -3$

4. Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?

a) $1 < |x| < 4$ c) $2 \leqslant |x| \leqslant 5$ e) $\frac{1}{2} \leqslant |x| < 3$ g) $\frac{5}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{9}{2}$

b) $0 < |x| < 6$ d) $3 \leqslant |x| \leqslant \pi$ f) $\sqrt{3} < |x| \leqslant 6$ h) $\sqrt{2} < |x| < 5$

5. Oblicz.

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}$

D **6.** Uzasadnij, że:

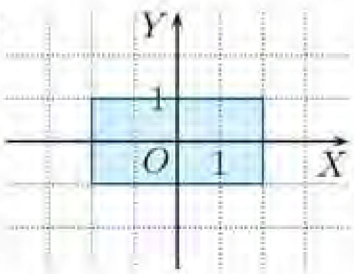
a) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = |\sqrt{2}-2|$, c) $\sqrt{24-8\sqrt{5}} = |2-2\sqrt{5}|$,

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-2|$, d) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} = |3-2\sqrt{3}|$.

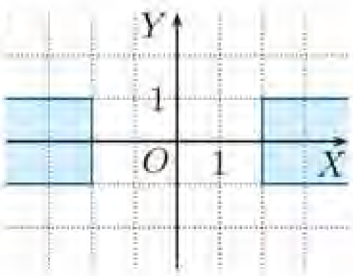
7. Do każdego z przedstawionych zbiorów punktów płaszczyzny dopasuj warunki, które spełniają współrzędne (x, y) tych punktów.

I. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$ II. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \geqslant 1$ III. $|x| \leqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$

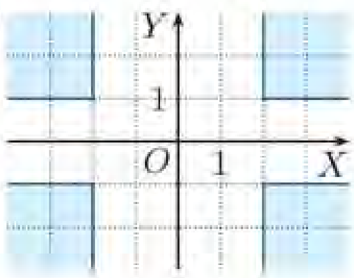
A



B



C



8. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $|x| \leqslant 5$ i $|y| \leqslant 1$ b) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \geqslant 2$ c) $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 4$

Warto wiedzieć

Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

D **Przykład 1**

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{\left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{\left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbf{Z}$.

D **Przykład 2**

Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy metodą prób i błędów:

$\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$\left(1 - 3\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{2} = \left|3 - \sqrt{2}\right| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3$,
czyli dana liczba jest całkowita.

D **Przykład 3**

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba a jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby a:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^2 = \\
&= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\
&= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4
\end{aligned}
$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ (sprawdź), czyli:

$a = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$

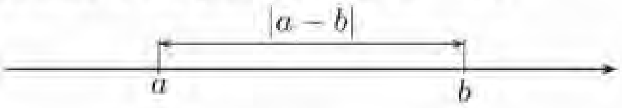
co oznacza, że a jest liczbą wymierną.

D **1.** Wykaż, że:

a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5$, b) $3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10$.

2.11. Własności wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0. Ogólnie odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a - b|$.

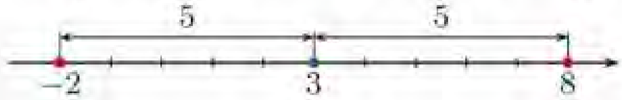


> $$|a - b| = |b - a|$$
>
> Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|x - 3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem $x = -2$ lub $x = 8$.

Sprawdzenie:
dla $x = -2$: $|-2 - 3| = |-5| = 5$,
dla $x = 8$: $|8 - 3| = |5| = 5$.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 3{,}5$.

Równanie zapisujemy w postaci: $|x - (-4)| = 3{,}5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od -4 wynosi 3,5.

Zatem $x = -7{,}5$ lub $x = -0{,}5$.

Sprawdzenie:
dla $x = -7{,}5$: $|-7{,}5 + 4| = |-3{,}5| = 3{,}5$,
dla $x = -0{,}5$: $|-0{,}5 + 4| = |3{,}5| = 3{,}5$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x - 4| = -2$.

$|a| \geqslant 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Równanie jest sprzeczne (nie ma rozwiązań).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|x - 2| = 3$
b) $|x - 4| = 3{,}5$
c) $|x + 6| = 2$
d) $|6 - x| = 1$
e) $|2 + x| = \sqrt{3}$
f) $|x + 1| = -1$
g) $\left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$
h) $|x + 9| = 0$

D **Ćwiczenie 2**

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że liczba $\frac{a+b}{2}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $|x - a| = |x - b|$.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|x-2|<5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 2 jest mniejsza od 5.

Zatem $-3<x<7$, czyli $x \in (-3;7)$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $|x-7|<3$ c) $|x+6|>1$ e) $|9-x| \leqslant 7$ g) $\left|x+\frac{1}{5}\right|<0{,}1$

b) $|x-3|<7$ d) $|x+4| \geqslant 4$ f) $|5+x|>8$ h) $|x-\sqrt{7}| \geqslant \sqrt{7}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2-6x+9}+|x-3| \geqslant 10$.

$$\sqrt{(x-3)^2}+|x-3| \geqslant 10$$
$$|x-3|+|x-3| \geqslant 10$$
$$2|x-3| \geqslant 10$$
$$|x-3| \geqslant 5$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

$\sqrt{a^2}=|a|$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 3 jest większa od 5 lub równa 5.

Zatem $x \leqslant -2$ lub $x \geqslant 8$, czyli $x \in (-\infty;-2\rangle \cup \langle 8;\infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{(x-7)^2}+|x-7| \leqslant 5$ b) $\sqrt{x^2-4x+4}+|x-2|>3$

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $|3x-6|<9$.

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

$|3x-6|=|3(x-2)|=|3||x-2|=3|x-2|$,
zatem:

$$3|x-2|<9$$
$$|x-2|<3$$
$$x \in (-1;5)$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $|2x-8|=4$ c) $|\frac{1}{2}x-1|=3$ e) $|10-x|=4$

b) $|4x+2|=6$ d) $|\frac{2}{3}x+4|=2$ f) $|1-3x|=6$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x+4|\leqslant 8$ d) $|2-\frac{1}{3}x|<1$ g) $|2x-4|\leqslant 0$

b) $|3x-9|\geqslant 6$ e) $|\frac{5}{2}x+10|\geqslant 5$ h) $|x+11|>0$

c) $|2x+\frac{1}{2}|>2$ f) $|0{,}75+\frac{5}{4}x|<\frac{1}{4}$ i) $|x-3|\geqslant -1$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{(x+5)^2}=5$ c) $\sqrt{x^2-2x+1}=1$ e) $\sqrt{\frac{1}{4}+x+x^2}=4$

b) $\sqrt{(3-x)^2}=2$ d) $\sqrt{4x^2+4x+1}=3$ f) $\sqrt{9x^2-12x+4}=6$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $|x|\leqslant\sqrt{(4-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}$

b) $|x+1|\geqslant\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}$

5. Jakie liczby x spełniają równanie?

a) $|x-3|=x-3$ c) $|x+\sqrt{2}|=-x-\sqrt{2}$

b) $|3x-6|=6-3x$ d) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$

6. Uprość wyrażenie dla $x<0$.

a) $\sqrt{x^2}+x$ b) $\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{x^2}$ c) $\sqrt{x^2-4x+4}+x$

D **7.** Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że jeśli $a<b$, to zbiorem rozwiązań nierówności $|x-a|<|x-b|$ jest przedział $(-\infty;\frac{a+b}{2})$.

D **8.** Wykaż, że wyrażenie przyjmuje stale tę samą wartość dla podanych wartości x.

a) $|-x|+|2-x|-|3-2x|$ dla $x\geqslant 2$

b) $\sqrt{x^2+6x+9}+|-x|-|-2x-6|$ dla $x\leqslant -3$

D **9.** Wykaż, że jeśli $0\leqslant a\leqslant b$, to $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}-\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=2\sqrt{a}$.

2.12. Zagadnienia uzupełniające

Logika matematyczna

Sposoby budowania zdań w języku, którym porozumiewamy się na co dzień są określone przez reguły gramatyki. W matematyce podobną rolę odgrywają reguły **logiki matematycznej**. Odnoszą się one do zdań, którym można w jednoznaczny sposób przypisać wartość logiczną: **prawdy** lub **fałszu**. Stosowane są oznaczenia: 1 (prawda), 0 (fałsz).

Na przykład:

a) $\sqrt{2}$ *jest liczbą wymierną.* fałsz 0

b) *Każdy prostokąt jest równoległobokiem.* prawda 1

c) *Każdy równoległobok jest prostokątem.* fałsz 0

Uwaga. Reguły logiki można stosować również do zdań o treści niematematycznej.

Ze zdań składowych (będziemy je oznaczać literami: $p, q, r, \ldots$) możemy tworzyć zdania złożone przy użyciu spójników logicznych: „nie", „lub", „i", „jeżeli..., to...", „wtedy i tylko wtedy, gdy...".

Negacja zdania

Rozpatrzmy dwa zdania: zdanie p i jego zaprzeczenie – zdanie *Nieprawda, że p*, co zapisujemy $\sim p$. Na przykład:

p: *7 jest liczbą ujemną.* 0

$\sim p$: *Nieprawda, że 7 jest liczbą ujemną.* 1

Zdanie p jest fałszywe, zdanie $\sim p$ – prawdziwe.

Zwróć uwagę, że z dwóch zdań, p i $\sim p$, zawsze jedno jest prawdziwe, a jedno fałszywe.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Jeśli zdanie p jest prawdziwe, to zdanie $\sim p$ jest fałszywe.
Jeśli zdanie p jest fałszywe, to zdanie $\sim p$ jest prawdziwe.

1. Jeżeli zdanie p ma postać $\sqrt{8} < 3$, to zdanie $\sim p$ ma postać $\sqrt{8} \geqslant 3$. Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.

a) Sformułuj zdanie $\sim p$, jeżeli p ma postać $\sqrt{625} \neq 25$. Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

b) Sformułuj zdanie p, jeżeli $\sim p$ ma postać *100 jest liczbą nieparzystą.* Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

Koniunkcja zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 2*, a q zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 3*. Zdanie $p \wedge q$ (p i q) będzie brzmiało: *Liczba 12 jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3.*

Przyjmujemy, że zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Interpretacją fizyczną koniukcji zdań $p \wedge q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych szeregowo. Każdy z wyłączników może być włączony (stan 1) lub wyłączony (stan 0). Przepływ prądu nastąpi tylko wtedy, gdy oba wyłączniki są w stanie 1.


Oba wyłączniki w stanie 0

Oba wyłączniki w stanie 1

2. Zapisz zdanie $p \wedge q$. Określ prawdziwość zdań p, q oraz koniunkcji $p \wedge q$.

a) p: $2|20$, q: $5|20$

b) p: $3|39$, q: $9|39$

c) p: $-2 < (-2)^3$, q: $2 < 2^3$

d) p: $\sqrt{221} \in \mathbf{Q}$, q: $\sqrt{212} \in \mathbf{Q}$

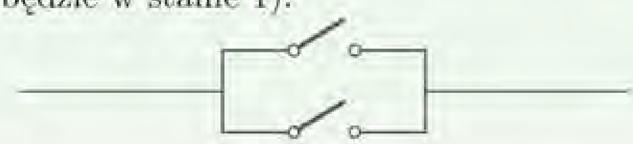
Alternatywa zdań

Niech p oznacza zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 4*, a q zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 3*. Wtedy zdanie $p \vee q$ (p lub q) będzie brzmiało: *Liczba 92 jest podzielna przez 4 lub jest podzielna przez 3.*

Zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe co najmniej jedno ze zdań p, q.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretacją fizyczną alternatywy zdań $p \vee q$ jest układ dwóch wyłączników połączonych równolegle. Na rysunku oba wyłączniki są w stanie 0. Przepływ prądu nastąpi wtedy, gdy którykolwiek z wyłączników zostanie włączony (będzie w stanie 1).



3. Podaj wartość logiczną zdania.

a) $(-6)^2 = 36 \ \vee \ 6^2 = 36$

b) $19^2 = 361 \ \vee \ 19^2 = 381$

c) $-2 > -1 \ \vee \ (-2)^2 > (-1)^2$

d) $-\sqrt{2} < -2 \ \vee \ \sqrt{2} > 2$

e) $|-a| = |a| \ \vee \ |-a| = -a$

f) $|-a| = a \ \vee \ |-a| = -|a|$

Implikacja zdań

Zdanie: *Jeśli 1035 jest liczbą podzielną przez 9, to jest liczbą podzielną przez 3* możemy zapisać symbolicznie: $9|1035 \Rightarrow 3|1035$. Jest to przykład implikacji. Zdanie p nazywamy **poprzednikiem**, a zdanie q – **następnikiem** implikacji $p \Rightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy prawdziwy jest jej poprzednik i fałszywy jej następnik.

Implikacja pojawia się bardzo często we wnioskowaniu matematycznym. Zwróć uwagę na dwa ostatnie wiersze tabeli: wnioskowanie rozpoczynające się od fałszywego poprzednika jest zawsze prawdziwe.

4. Podaj wartość logiczną poprzednika, następnika i implikacji.

a) $0 > 1 \Rightarrow 5 = 5$

b) $2 + 2 = 5 \Rightarrow 2 + 2 = 50$

c) $4|12 \Rightarrow 2|12$

d) $5|25 \Rightarrow 10|25$

Równoważność zdań

Równoważność zdań p i q jest to zdanie postaci: *p wtedy i tylko wtedy, gdy q* (sformułowanie „wtedy i tylko wtedy, gdy" oznaczamy symbolem $\Leftrightarrow$). Zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwe, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną. Na przykład:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

a) $\underbrace{-3 < 2}_{\text{zdanie prawdziwe}} \Leftrightarrow \underbrace{2 < 3}_{\text{zdanie prawdziwe}}$ – równoważność jest prawdziwa,

b) $\underbrace{-3 > 2}_{\text{zdanie fałszywe}} \Leftrightarrow \underbrace{2 > 3}_{\text{zdanie fałszywe}}$ – równoważność jest prawdziwa,

c) $\underbrace{(-3)^2 = 3^2}_{\text{zdanie prawdziwe}} \Leftrightarrow \underbrace{(-3)^3 = 3^3}_{\text{zdanie fałszywe}}$ – równoważność jest fałszywa.

5. Podaj wartość logiczną każdego ze zdań składowych i zdania złożonego.

a) $2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 < 0$

b) $\sqrt{5^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2} = -5$

c) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^4 = 3^4$

d) $(-2)^3 = 2^3 \Leftrightarrow (-2)^6 = 2^6$

Prawa rachunku zdań

Spośród zdań złożonych, które możemy zapisać za pomocą spójników: $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość logiczna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy **prawami rachunku zdań**.

D **Przykład 1**

Wykaż, że zdanie: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ – *zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń* – jest prawem rachunku zdań.

W tym celu sporządzamy tabelę.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań p i q, zawsze otrzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku zdań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

D **6.** Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$ drugie z praw De Morgana

D **7.** Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(\sim p) \vee p$ prawo wyłączonego środka

b) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia

c) $\sim (p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności

d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ prawo odrywania

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji

f) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji

8. Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

c) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$

d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

e) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

f) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?

2. Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15, B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, D – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

a) $A \cap B$, c) $A \cap B \cap C$, e) $A \cap (D \setminus B)$,
b) $A \setminus C$, d) $A \setminus (B \cup C)$, f) $A \setminus (B \setminus D)$.

3. Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = (2; 5)$ d) $A = (-\infty; 0\rangle \cup (1; 2)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
b) $A = \langle 2; 7)$, $B = (3; 5\rangle$ e) $A = (-\infty; -1) \cup \langle 3; 5 \rangle$, $B = (-2; 4)$
c) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9)$ f) $A = (-1; 2\rangle \cup (5; \infty)$, $B = \langle 0; 5)$

4. Wykonaj mnożenie.

a) $(a + 2b + 3)(a - 2)$ d) $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
b) $(2a - b + c)(2a - 3b)$ e) $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
c) $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$ f) $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$

5. Wskaż liczbę całkowitą k, dla której $x \in \langle k; k + 1)$.

a) $x = \sqrt[3]{17}$ b) $x = \sqrt[3]{-25}$ c) $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$ d) $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

6. Ile liczb naturalnych spełnia nierówność?

a) $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$ c) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geqslant \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
b) $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geqslant -2 - \frac{2x-1}{3}$ d) $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $|x| > 1$ i $|x| \leqslant 9$ b) $|x| \geqslant 2$ i $|x - 2| < 4$ c) $|x| < 4$ i $|x + 1| \geqslant 2$

8. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 3| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |x + 2| \geqslant 3\}$ i $C = \{x \in \mathbf{R} : |x| \geqslant 3\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $A \cap B$, b) $A \setminus B$, c) $B \setminus A$, d) $(A \cup C) \setminus B$, e) $(A \setminus B) \cup C$.

Zestaw II

1. Wśród zbiorów: X, Y, T wskaż parę zbiorów równych.

a) $X = \langle -4; 2\rangle \cap \mathbf{Z}$, $Y = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leqslant 4\}$, $T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $X = (2; 7) \cup \{7\}$, $Y = \langle 2; 7\rangle \setminus \{2\}$, $T = (2; 4) \cup (4; 7\rangle$

c) $X = \{x \in \mathbf{N} : |x| \leqslant 6\}$, $Y = (-7; 7) \cap \mathbf{N}$, $T = \mathbf{N} \setminus (5; 8)$

2. Sprawdź, czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon 0 < |x| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |x - 5| \geqslant 1\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon |x + 1| \geqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |2x - 6| > 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon 1 \leqslant |x| \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon \sqrt{x^2 - 10x + 25} < 8\}$

3. Oblicz.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$

b) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 6\sqrt{3})$

d) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{10})(-3\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$

e) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

f) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$

g) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

h) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 0{,}75x \geqslant x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x\right) \geqslant x - \frac{5}{4} \\ (2 - x)^2 \leqslant (x + 1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x - \frac{1}{3}}{2} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 \geqslant x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 - x^2 - (x - 2)^2 \leqslant 6 - 2(x + 4)^2 \\ (4 - x)^2 - (6 - x)^2 \geqslant \frac{11}{4} - \frac{0{,}5 - \frac{1}{2}x}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4(4 - x)^2 < 8 - (4 - 2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0{,}25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1 - x) > \sqrt{2}x - (1 - 2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geqslant 2x - (3 - x)^2 \end{cases}$

5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

a) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 2$

b) $1 \leqslant |x| \leqslant 4$ i $|y| < 1$

c) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ i $1 \leqslant |y| \leqslant 3$

d) $0 < |x| < 3$ i $1 < |y| < 2$

D **6.** a) Liczby p i q przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio: 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe.

b) Liczby p i q przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio: k i l, gdzie $k < l$, a reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 5 są równe. Wyznacz k i l.

D **Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n, $n+1$, $n+2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

• Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

D **Przykład 2**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S.

$$\begin{aligned} S &= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

• Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześcianów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 0

2. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $-x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest:

A. 4, **B.** 3, **C.** 2, **D.** 0.

3. Wyrażenie $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dla $a = 3+\sqrt{2}$ i $b = 3-\sqrt{2}$ jest równe:

A. $\frac{1}{7}$ **B.** 6, **C.** 9, **D.** $2\sqrt{2}$.

4. Liczba π należy do przedziału:

A. $(-\infty; 3{,}14)$, **B.** $(-\infty; 3{,}14\rangle$, **C.** $(3{,}14; \infty)$, **D.** $(\pi; \infty)$.

5. Ile jest par liczb naturalnych (x, y) takich, że $x^2 - y^2 = 48$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 12

6. Jeśli liczbę $(6-3\sqrt{3})^2 - (5-2\sqrt{3})^2$ zapisano w postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$, to:

A. $b = -16$, **B.** $b = 16$, **C.** $b = -56$, **D.** $b = 56$.

7. Równanie $(\sqrt{2}x+1)^2 = 2(x^2+x+1)$ spełnia liczba:

A. $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$, **B.** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$, **C.** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$, **D.** $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$.

8. Liczba $a - (\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$ jest liczbą wymierną dla a równego:

A. $-6\sqrt{2}$, **B.** $-3\sqrt{2}$, **C.** $3\sqrt{2}$, **D.** $6\sqrt{2}$.

9. Dla $x = -4$ prawdziwa jest równość:

A. $|x - |x|| = 8$, **C.** $|-x - |-x|| = 8$,
B. $|x + |x|| = 4$, **D.** $|x - |-x|| = 0$.

10. Do przedziału $\langle -2; 6\rangle$ należą wszystkie rozwiązania równania:

A. $|x+2| = 6$, **B.** $|x-1| = 4$, **C.** $|x+1| = 2$, **D.** $|x-3| = 3$.

11. Dokładnie trzy liczby całkowite spełniają nierówność:

A. $|x-1| \leqslant 5$, **B.** $|x-3| \leqslant 1$, **C.** $|x+3| < 1$, **D.** $|x-2| < 6$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Oblicz wartość wyrażenia $(x-4y)^2-(4y+x)^2$ dla $x=\frac{1}{4}$ i $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3-2x)^2 \leqslant (2x-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2x)$$

D **Zadanie 3 (2 pkt)**
Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D **Zadanie 4 (2 pkt)**
Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b spełniona jest nierówność $a^2 \geqslant b(2a-b)$.

Zadanie 5 (2 pkt)
Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \leqslant |x| < 9$?

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)
Dane są zbiory $A=\left\{x \in \mathbf{R}\colon\ 3-x<\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right\}$ oraz $B=\langle -5;5\rangle$. Wyznacz zbiór $B \setminus A$.

D **Zadanie 7 (3 pkt)**
Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $\left(\frac{7}{2};\infty\right)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x+2 \leqslant 2x$$

Zadanie 8 (4 pkt)
Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geqslant (2x-3)(2x+3)+2 \end{cases}$$

Zadanie 9 (5 pkt)
Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}x\right) \geqslant x-\frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leqslant (x+1)^2 \end{cases}$$

D **Zadanie 10 (4 pkt)**
Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność:

$$-0{,}01x < \tfrac{1}{1-\sqrt{2}}$$

Zakoduj kolejne cyfry tej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dane są zbiory: $A = (-\infty; -6) \cup \langle 4; \infty)$, $B = \langle -100; 36\rangle$ i $C = \langle -8; 4\rangle$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru $(A \cap B) \setminus C$? Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 3 (2 pkt)

A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych k takich, że liczba $\sqrt{2}k$ spełnia nierówność $|2x-3| < 241$. Oblicz różnicę między największym a najmniejszym elementem zbioru A. Zakoduj kolejne cyfry otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (2 pkt)

Niech m będzie liczbą punktów (x, y) o obu współrzędnych całkowitych spełniających warunki: $|x-3| \leqslant 30$ i $|y+2| \leqslant 60$. Zakoduj cyfry tysięcy, setek i dziesiątek liczby m.

Zadanie 5 (3 pkt)

Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

Zadanie 6 (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb x i y zachodzi nierówność:

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geqslant 2xy - y^2$$

Zadanie 7 (4 pkt)

Uzasadnij, że liczba $137^8 - 119^8$ jest podzielna przez 2^{11}.

Zadanie 8 (4 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:

$$\sqrt{12 - 4\sqrt{3}x + x^2} < \tfrac{3}{2\sqrt{3}-3}$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Dane są zbiory:

$$A = \left\{x \in \mathbf{R}\colon\ x \leqslant \sqrt{13-4\sqrt{3}} - \sqrt{21-12\sqrt{3}}\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}\colon\ |2x+12| \geqslant 2\}$$

Wyznacz zbiór $B \setminus A$.

3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?
Jeśli oznaczymy przez x prędkość samolotu, a przez y prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi x i y. Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania: $x = 550$ km/h i $y = 50$ km/h.
Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.

3.1. Co to jest układ równań

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 4{,}75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y, rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety dwu- i pięciozłotowe. Ile monet dwu-, a ile pięciozłotowych wrzucono, jeśli w skarbonce znajduje się 26 zł?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych: x – liczba monet dwuzłotowych, y – liczba monet pięciozłotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety dwuzłotowe i 4 monety pięciozłotowe.

Ćwiczenie 1

Resztę 2 zł 10 gr wydano w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek?

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa równania jednocześnie rozpatrywane, opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ -x+2y=14 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$

A. Podstawiamy do równań układu $x=1$ i $y=2$.

$\begin{cases} 4\cdot 1+3\cdot 2=4+6=10 \\ -1+2\cdot 2=3\neq 14 \end{cases}$ Spełnione pierwsze równanie. Drugie równanie nie jest spełnione.

Zatem para $x=1$, $y=2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x=-2$ i $y=6$.

$\begin{cases} 4\cdot(-2)+3\cdot 6=-8+18=10 \\ -(-2)+2\cdot 6=2+12=14 \end{cases}$ Spełnione pierwsze równanie. Spełnione drugie równanie.

Zatem para $x=-2$, $y=6$ spełnia podany układ równań.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 3x-2y=-18 \\ -\frac{1}{2}x+3y=7 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x=-6 \\ y=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1{,}5 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-5 \\ y=1{,}5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$

Zadania

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} 5x-2y=16 \\ 7x-y=17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=7 \\ 4x+y=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{3}y=3 \\ -x-y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{5}{2}y-\frac{3}{4}x=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3}+\frac{y+1}{4}=\frac{3}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y=0 \\ \frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{3}=-\frac{5}{6} \end{cases}$

2. Sprawdź, która z podanych par liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

a) $3x + 2y = 17$ b) $3x + 4y = 17$ c) $2x + 4y = 17$

4. Do danego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez podaną parę liczb.

a) $4x + 3y = 14$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $3x - 7y = 6$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $4x - 9y = -1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

d) $12x + \frac{1}{2}y = -10$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases}$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Suma liczb x i y wynosi 5. Różnica tych liczb wynosi 2.

b) Liczba x jest o 8 większa od liczby y. Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x.

c) Liczba x jest trzykrotnie większa od liczby y. Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 10.

d) Liczba x jest o 3 mniejsza od liczby y. Różnica liczb x i y jest dwa razy większa od liczby y.

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba a stanowi 40% liczby b. Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b, to otrzymamy 4.

b) Suma liczb a i b jest równa 14. Gdy do 120% liczby a dodamy 70% liczby b, to otrzymamy sumę a i b.

c) Liczba o 10% mniejsza od liczby a jest o 10% większa od liczby b. Różnica liczby o 15% większej od a i liczby o 15% mniejszej od b wynosi 1.

7. Dla jakich wartości parametrów m i n rozwiązaniem układu równań jest podana para liczb?

a) $\begin{cases} mx + 2y = 39 \\ -8x + ny = -34 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - my = 5 \\ nx - 10y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Drugie równanie przepisujemy bez zmian.

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y + 5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian. Podstawiamy wyrażenie $3y + 5$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą y.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 \ / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość y do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą x.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu równań.

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases}$

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$ Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Podstawiamy wyrażenie $x + 2$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą x.

$\begin{cases} 7x = 0 \ / :7 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases}$ Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do drugiego równania.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x+2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \ / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2(x+1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 \ / : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x + y + 1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb. (Jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Podstawiamy wyrażenie $3 + 2y$ w miejsce x w drugim równaniu.

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases}$ Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną wartość niewiadomej y.

Zatem **żadna para liczb nie spełnia danego układu równań**.

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Np. układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x, y, których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci. Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$\begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Podstawiamy wyrażenie $3x - 6$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$\begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 0x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Równanie $0x = 0$ (możemy je również zapisać $0 = 0$) jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość wstawimy w miejsce niewiadomej x. Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.

Równanie $y = 3x - 6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**, np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = -4{,}5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0{,}2x + 0{,}1y = -0{,}1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = 0{,}7 \\ x + 4y = 5{,}3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}3y = -2 \\ 1{,}6x + 1{,}5y = 46 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4(3x - 0{,}5) - 5(y + 0{,}5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2{,}5) = -9y + 5{,}5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0{,}5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1{,}5) = 13{,}5 \end{cases}$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases}$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma podany układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-3y) + 3(x-2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y+1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x-2y) - 2(y-x+1{,}5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0{,}3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 7(y-1) = -2\left(\frac{5}{2} + x\right) \\ -2(1-2x-y) = 1 - x - 5y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(1-x) - 5(2-y) = 5 \\ 0{,}2(2-3x) + y = 0{,}8 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x+2)^2 + 2y = x + 15 + (x-2)(x+2) \\ x + (y-1)^2 = 1 - (\sqrt{3} - y)(y + \sqrt{3}) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(1-2x) - y(1-y) = (y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y+3)(3-2y) \end{cases}$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y-2) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x-1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y-2) \end{cases}$

7. Dane jest równanie $3x - 4y = 2$. Dopisz do niego drugie równanie, tak by otrzymany układ równań był:

a) sprzeczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony.

8. Dla których wartości parametru $m \in \{-2, 0, 2\}$ układ jest oznaczony, dla których nieoznaczony, a dla których sprzeczny?

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + my = 3m \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ mx + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx + 2y = 2 \\ 2x + my = -2 \end{cases}$

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

nie jest układem równań liniowych. Ma cztery rozwiązania, które są parami liczb całkowitych. Podaj te rozwiązania.

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x+3y=-4 \\ -x+6y=13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1). Aby zredukować taką niewiadomą, wystarczy dodać oba równania stronami – otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y.

$$+\begin{cases} x+3y=-4 \\ -x+6y=13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x-x+3y+6y&=-4+13 \\ 9y&=9 \\ y&=1 \end{aligned}$$

Dodajemy równania stronami.
Niewiadoma x została zredukowana.

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x+3y=-4$. Otrzymujemy równoważny układ równań:

$$\begin{cases} y=1 \\ x+3\cdot 1=-4 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 1 w miejsce y w równaniu $x+3y=-4$ i obliczamy niewiadomą x.

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x=-7 \\ y=1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7+3\cdot 1=-7+3=-4 \\ -(-7)+6\cdot 1=7+6=13 \end{cases}$$

Spełnione pierwsze równanie.
Spełnione drugie równanie.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ -5x+y=9 \end{cases}$

Czasami zanim dodamy równania stronami, musimy najpierw pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, by otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + \ \ y = 3 \ / \cdot (-4) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez -4.

$$+\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

$$5x - 8x = 6 - 12$$

Niewiadoma y została zredukowana.

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x:

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2.$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do równania $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.
Podstawiamy liczbę 2 w miejsce x w równaniu $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb $x = 2$, $y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = -3{,}5 \\ 3x - 2y = 4{,}5 \end{cases}$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 5x+7y=4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \ / \cdot 5 \\ 5x+7y=4 \ / \cdot (-2) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5, a drugiego przez -2.

$$+\begin{cases} 10x+15y=10 \\ -10x-14y=-8 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad\qquad y=2 \qquad}$$

Dodajemy równania stronami. Niewiadoma x została zredukowana.

$$\begin{cases} y=2 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.

$$\begin{cases} y=2 \\ 2x+3\cdot 2=2 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 2 w miejsce y w drugim równaniu

$$\begin{cases} y=2 \\ 2x=-4 \ / :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x=-2$, $y=2$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+7y=7 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+2y=13 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

a) $\begin{cases} 3x-7y=2 \\ -5x+4y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+17y=4 \\ \frac{1}{3}x-13y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{2}{5}x-6y=1 \\ 3x-5y=9 \end{cases}$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5(x-y)+5=2(2x+y) \\ 2(x-1)=y+1 \end{cases}$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x-5y+5=4x+2y \\ 2x-2=y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-7y=-5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

Niewiadome przenosimy na lewe strony równań, a wartości liczbowe – na prawe (pamiętamy przy tym o zmianie znaku). Następnie redukujemy wyrazy podobne.

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ 2(-5+7y)-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ -10+14y-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ 13y=13\ /:13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x-7y=-5\ /\cdot(-2) \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x+14y=10 \\ \ \ 2x\ \ \ -y=3 \end{cases}$$

$$13y=13\ /:13$$
$$y=1$$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x-1=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:
- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \ / \cdot 3 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

$$+\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 0x + 0y = 7 \qquad}$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y, zatem układ równań jest sprzeczny.

Przykład 6

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \ / \cdot 3 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \ / \cdot 4 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

$$+\begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 0x + 0y = 0 \qquad}$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y. Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, które spełniają drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Sprawdź metodą przeciwnych współczynników, czy układ równań jest nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0{,}4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y = 3{,}5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}2(x + 2y) - 0{,}3(2x - y) = 3{,}5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}01x - 0{,}01(y - 1) = -0{,}06 \\ 0{,}03x - 0{,}02(y - 2) = -0{,}12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}01(4x - y) = 0{,}01y + 0{,}02 \\ 0{,}6(y - x) = 0{,}1(y + 2x + 1) \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2{,}5}{5} = x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

4. Dla których wartości parametrów $m \in \{1, 3\}$ i $n \in \{1, 3\}$ układ jest nieoznaczony, a dla których – sprzeczny?

a) $\begin{cases} 3x - 18y = n \\ mx - 6y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 2mx - 1 \\ mx + y = -x + n \end{cases}$

Warto wiedzieć

Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

Niektóre zagadnienia wymagają wprowadzenia trzech lub więcej niewiadomych. Tworzy się wtedy i rozwiązuje układ tylu równań, ile niewiadomych zostało wprowadzonych.

1. Przeczytaj zamieszczony obok opis metody rozwiązywania układu trzech równań z trzema niewiadomymi, a następnie rozwiąż podany układ równań.

a) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y-z=20 \\ x-y-z=30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ x+2y+3z=1 \\ 5x-3y-z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-2y+3z=1 \\ 3x+4y-4z=-1 \end{cases}$

Rozwiązywanie układu trzech równań z trzema niewiadomymi

- Z jednego z równań wyznaczamy wybraną niewiadomą i podstawiamy otrzymane wyrażenie do obu pozostałych równań. Powstają w ten sposób dwa równania z dwiema niewiadomymi.
- Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi dowolną metodą.
- Obliczone wartości dwóch niewiadomych podstawiamy do dowolnego równania początkowego układu i obliczamy wartość trzeciej niewiadomej.

2. Czy podany układ równań spełnia trójka liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} x+2y-z=-4 \\ 2y+z=2 \\ 2y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y-z=-9 \\ 2y+3z=16 \\ 3y-z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+2y-z=10 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y-2z=-5 \\ x+2y+z=4 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases}$

3. a) Suma trzech liczb jest równa 36. Suma pierwszej i drugiej liczby jest dwukrotnie większa od trzeciej liczby, a suma drugiej i trzeciej jest o 10 większa od pierwszej liczby. Jakie to liczby?

b) Suma trzech liczb: a, b, c jest równa 27. Liczba c jest o 3 większa od średniej arytmetycznej liczb a i b, a liczba b o 3 mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a i c. Wyznacz liczby a, b i c.

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek, jeśli łącznie przewiozły one 132 tony piasku? Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:
x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,
y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.
Łączna masa przewiezionego piasku.

$$\begin{cases} x + y = 13 \ / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$+\begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 7x = 28 \qquad}$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań $x = 4$ i $y = 9$ (zauważ, że otrzymane liczby spełniają warunki zadania). Zatem pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna, a ile – druga ciężarówka?

Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:

d – wiek Doroty w latach, p – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Sprawdź, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:

b – wiek Basi w latach, m – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

	Sześć lat temu	Obecnie	Za cztery lata
wiek Basi	$b - 6$	b	$b + 4$
wiek mamy Basi	$m - 6$	m	$m + 4$

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Sprawdź, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?

b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alek?

Zadania

1. Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?

2. Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?

3. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik, jeśli moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g?

4. Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?

5. Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2-, i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?

6. Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych, jeśli po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa?

1 dolar = 100 centów

Moneta 5-centowa   Moneta 10-centowa   Moneta 25-centowa

7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Oblicz pole tego prostokąta, jeśli jego obwód jest równy 36 cm.

9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego jego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to proporcja między długościami boków otrzymanego prostokąta wynosiłaby $1:3$. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).

10. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano $\frac{3}{4}$ wszystkich miejsc. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych, jeśli wiadomo, że przychód ze sprzedaży biletów wyniósł 7000 zł?

11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?

12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?

13. Dana jest dwucyfrowa liczba A oraz liczba B uzyskana z przestawienia cyfr liczby A. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że ich suma wynosi 121, a liczba A jest o 7 większa od podwojonej liczby B.

14. Dana jest trzycyfrowa liczba A o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę B. Różnica liczb A i B wynosi 320, a suma liczb A i B jest równa 388. Jakie to liczby?

15. Liczba x powstaje z trzycyfrowej liczby y, mającej dwie cyfry takie same, przez zapisanie jej cyfr w odwrotnej kolejności. Różnica między liczbą x a y jest równa 396. Wyznacz te liczby, jeśli suma cyfr każdej z nich jest równa 16.

16. W pewnym spotkaniu brało udział 180 osób. Ustawiono dla nich łącznie 60 krzeseł i pewną liczbę trzyosobowych kanap. Niestety, nie dla wszystkich starczyło miejsc siedzących. Stosunek liczby osób stojących do siedzących był równy $1:4$. Oblicz, ile kanap ustawiono.

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane do rozwiązywania zadań, w których występują wielkości podane procentowo, oraz zadań dotyczących prędkości.

Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy zmieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

Stężenie procentowe roztworu określa, jaki procent masy całego roztworu stanowi masa rozpuszczonej substancji.

Roztwór soli nazywany jest **solanką**.

Oznaczamy niewiadome:
x – masa w kg solanki 6-procentowej,
y – masa w kg solanki 2-procentowej.

Układamy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

$x + y = 100$

$0{,}06 \cdot x + 0{,}02 \cdot y = 0{,}05 \cdot 100$

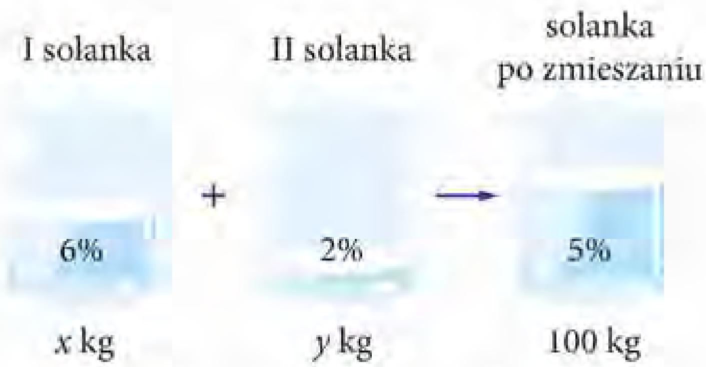
Zapisujemy układ równań i go rozwiązujemy:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}06x + 0{,}02y = 5 \quad / \cdot (-50) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{cases}$$

$$-2x = -150 \quad / : (-2)$$

$$x = 75$$



Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu: $x = 75$ i $y = 25$. Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie: $25 + 75 = 100$ oraz $0{,}06 \cdot 75 + 0{,}02 \cdot 25 = 5$.

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy zmieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

Ćwiczenie 1

a) Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy zmieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?

b) Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 gramów roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

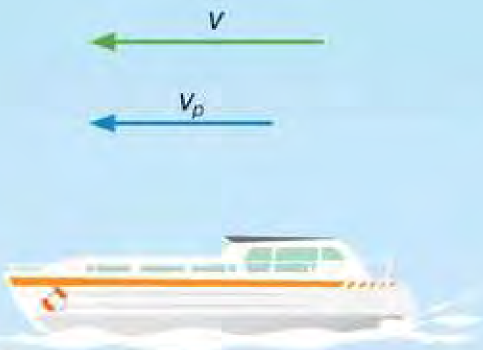
Łódź płynąca z prądem i pod prąd

Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$

Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez v prędkość własną łodzi, a przez v_p prędkość prądu rzeki.



Prędkość łodzi poruszającej się z prądem rzeki jest równa $v + v_p$

Prędkość łodzi płynącej pod prąd jest równa $v - v_p$

Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną zaś w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Zakładamy, że wszystkie prędkości są stałe.
Oznaczamy przez v – prędkość własną łodzi, a przez v_p – prędkość prądu rzeki.
Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

	Odległość	Prędkość	Czas
płynięcie z prądem	36 km	$v + v_p$	2 h
płynięcie pod prąd	36 km	$v - v_p$	3 h

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa $\frac{36\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 18$ km/h, a prędkość łodzi płynącej pod prąd $\frac{36\ \text{km}}{3\ \text{h}} = 12$ km/h.

Otrzymujemy układ równań i rozwiązujemy go metodą przeciwnych współczynników:

$$+\begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases}$$

$$2v = 30$$

$$v = 15$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $2(15 + 3) = 36$, $3(15 - 3) = 36$.

Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki – 3 km/h.

Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Oblicz jej prędkość własną oraz prędkość prądu rzeki, jeśli droga powrotna łodzi trwała trzykrotnie dłużej.

Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd, przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem i 4 godziny pod prąd, przepłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?

2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?

3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A, a jaką do banku B? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

x – kwota w zł wpłacona do banku A,

y – kwota w zł wpłacona do banku B.

$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 1{,}03x + 1{,}04y = 10\,340 \end{cases}$$

4. Kwotę 20 000 zł zainwestowano w dwie różne lokaty roczne oferowane przez bank X i bank Y. Lokata w banku X oprocentowana była 3,5% w skali roku. Oprocentowanie lokaty w banku Y było o 1 punkt procentowy wyższe. Po roku wypłacono z lokat 20 840 zł. Jaką kwotę złożono na lokacie w banku X, a jaką w banku Y?

Mosiądz to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.

5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?

6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli zaś użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaką odległość w tym czasie pokonał?

8. Z miast A i B wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami A i B?

9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?

10. Na pewne przedstawienie w teatrze sprzedano łącznie 500 biletów trzech rodzajów – normalnych po 50 zł, ulgowych po 40 zł i wejściówek po 30 zł. Biletów normalnych było o 40 więcej niż ulgowych i wejściówek razem. Wszystkie bilety kosztowały razem 22 300 zł. Ile biletów poszczególnych rodzajów sprzedano? Przeanalizuj przedstawiony poniżej początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:
x – liczba sprzedanych biletów normalnych,
y – liczba sprzedanych biletów ulgowych,
z – liczba sprzedanych wejściówek.

Możemy zatem ułożyć układ równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x = y + z + 40 \\ 50x + 40y + 30z = 22\,300 \end{cases}$$

11. Jedna ściana prostopadłościanu ma obwód równy 26 cm, druga – 28 cm, a trzecia – 34 cm. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

3.6. Zagadnienia uzupełniające

Wyznaczniki

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

można rozwiązać **metodą wyznacznikową**. Liczbę:

$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem głównym**,

$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej** x,

$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej** y.

1. Jeśli $W \neq 0$, to układ równań ma jedno rozwiązanie wyznaczone za pomocą tzw. **wzorów Cramera:** $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$.
2. Jeśli $W = 0$ i $W_x = 0$, i $W_y = 0$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).
3. Jeśli $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -14$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-4) - 13 \cdot 2 = -70$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 13 - 5 \cdot 11 = -42$$

$W \neq 0$, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y), gdzie:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-70}{-14} = 5 \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{-42}{-14} = 3 \end{cases}$$

1. Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli układ jest oznaczony, to korzystając ze wzorów Cramera, wyznacz jego rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 2x + y = -7 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ -x + \frac{1}{4}y = -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 6y = 12 \\ \frac{1}{6}x + 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 4y = -2 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -4 \end{cases}$

Przykład 2

Określ liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru k.

$$\begin{cases} kx - y = 2 \\ -4x + ky = 4 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - (-1)(-4) = k^2 - 4$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2 \cdot k - (-1) \cdot 4 = 2k + 4$$

$$W_y = \begin{vmatrix} k & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot k - 2 \cdot (-4) = 4k + 8$$

- Dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$ wyznacznik $W \neq 0$. Zatem układ równań ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony).
- Dla $k = 2$ wyznacznik $W = 0$, ale $W_x \neq 0$ i $W_y \neq 0$. Zatem układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).
- Dla $k = -2$ zachodzą równości $W = 0$, $W_x = 0$ i $W_y = 0$. Zatem układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).

2. Dany jest układ równań z niewiadomymi x, y i parametrem k. Dla jakich wartości parametru k układ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

a) $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ kx - 10y = -5k \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + y = -3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} k^2x - 2y = -4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2ky = 4 \\ 2x + 8y = k \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2kx + y = 1 \\ -4x - ky = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (k+1)x + ky = 2 \\ x + ky = 4 \end{cases}$

Metoda eliminacji Gaussa

Czasami przy rozwiązywaniu układu równań pomija się w zapisie niewiadome, a współczynniki występujące w równaniach przedstawia się w postaci tablicy zwanej **macierzą** (poniżej macierze zapisano kolorem niebieskim).

Przykład 3

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ -2x + 7y - 6z = 13 \\ 2x - 9y + 3z = -9 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -6 & 13 \\ 2 & -9 & 3 & -9 \end{array}\right]$$

Najpierw eliminujemy niewiadomą x z drugiego i trzeciego równania. W tym celu do drugiego równania dodajemy stronami pierwsze równanie pomnożone przez 2, a do trzeciego dodajemy stronami pierwsze pomnożone przez -2. Otrzymujemy układ równań (zwróć uwagę, że operacjom na równaniach odpowiadają odpowiednie operacje na wierszach macierzy):

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x - 3y + z = -5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Do 2. wiersza macierzy dodano 1. wiersz pomnożony przez 2, do 3. wiersza dodano 1. wiersz pomnożony przez -2.

Następnie eliminujemy niewiadomą y z trzeciego równania. W tym celu do trzeciego równania dodajemy stronami drugie równanie pomnożone przez 3. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x + 0y - 11z = 22 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array}\right]$$

Do 3. wiersza macierzy dodano 2. wiersz pomnożony przez 3.

Z trzeciego równania mamy $z = -2$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Następnie podstawiamy uzyskane wartości y i z do pierwszego równania i otrzymujemy $x = 3$.

Zatem układ spełniony jest przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Przedstawiona powyżej metoda rozwiązywania układu równań nosi nazwę **metody eliminacji Gaussa**.

Przykład 4

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 5y + 6z = -4 \end{cases}$$

Zapisujemy współczynniki występujące w równaniach układu w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 5 & 6 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Kolejne wiersze macierzy odpowiadają kolejnym równaniom układu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 4 & 9 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Od drugiego i trzeciego wiersza macierzy odjęto pierwszy wiersz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Od trzeciego wiersza macierzy odjęto drugi wiersz pomnożony przez 4.

Z trzeciego równania (reprezentowanego przez trzeci wiersz macierzy) otrzymujemy $z = -1$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Otrzymane wartości y i z podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy $x = -3$. Zatem układ równań jest spełniony przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ x - 4y + 4z = -1 \\ -2x + y - 5z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ -x + 4y - 6z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y - z = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = 11 \\ 3x - y - 5z = -19 \end{cases}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0{,}95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1{,}2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0{,}25 \end{cases}$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

a) $\begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

a) $\begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x - 1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 2y = y - 2 \\ 2(y-3x) = 6 - y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, to otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Co to za ułamek?

5. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto, jeśli otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%?

b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?

Zestaw II

1. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla $m = 1$, a ile – dla $m = -2$.

a) $\begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości parametrów m i k para liczb: $x = 3$, $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań?

a) $\begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k-1)x - 2my = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1-m)x + 4ky = 10 \\ (m-2k)x - (4k+m)y = -8 \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0{,}25 \\ (x-1)^2 = (2-x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x-1)(1+3x) + y = (1-3x)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (y+2)^2 = y^2 + x \\ (2x-1)^2 = 4x^2 - y \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x-y)(x+y) = x^2 - (y-1)^2 \\ (x+y)(x+2) - xy = x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (3x-1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1-2y)^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-8)^2 = (x+8)(x+8) + y \\ x(y-1) = y(x-2) \end{cases}$

4. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb ujemnych?

a) $\begin{cases} x - y = 1 - m \\ x - 2y = m - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 2m - 6 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 3 - m \end{cases}$

5. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb o przeciwnych znakach?

a) $\begin{cases} 2x - y = m \\ 5x - 3y = 2m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = m - 3 \\ 3x - y = 2 - m \end{cases}$

*6. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru $m \in \{-1, 1, 2\}$.

a) $\begin{cases} mx + 3y = 4 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -8x + 6y = m \\ mx - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + my = 1 \\ x + 2y = m \end{cases}$

*7. Dla jakiej wartości parametru m układ jest nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

a) $\begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x + 5y = 8 \\ 2x - 2{,}5y = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 4x + my = -14 \end{cases}$

Rozwiązując zadania tekstowe, możemy spotkać się z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak nie zawsze musimy wtedy wykorzystywać układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach α, β, γ, przy czym suma miar kątów α i β jest równa 105°. Wyznacz te kąty, jeśli spełniona jest równość $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ$.

• Rozwiązanie tego zadania możemy rozpocząć od zauważenia, że mamy trzy niewiadome: α, β, γ. Prowadzi to jednak do układu trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).

• Jeśli zauważymy, że $\alpha = 105^\circ - \beta$, możemy napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ - \beta) + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \\ (105^\circ - \beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$.
Zatem $\alpha = 105^\circ - \beta = 35^\circ$. Sprawdzenie: $35^\circ + 70^\circ + 75^\circ = 180^\circ$,
$35^\circ + 70^\circ = 105^\circ$, $35^\circ + 2 \cdot 70^\circ + 3 \cdot 75^\circ = 400^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Monet 5--złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce, jeśli jest w niej 48 zł.

• Zadanie możemy rozwiązać, wprowadzając trzy niewiadome:
x – liczba monet 1-złotowych,
y – liczba monet 2-złotowych,
z – liczba monet 5-złotowych.
Następnie należy ułożyć i rozwiązać układ trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).

• Zauważmy, że możemy tu wprowadzić dwie niewiadome: x – liczba monet 1-złotowych, y – liczba monet 2-złotowych. Wówczas monet 5-złotowych jest $x - 2$. Otrzymujemy teraz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + (x - 2) = 18 \\ x + 2y + 5(x - 2) = 48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest: $x = 9$ oraz $y = 2$ (sprawdź, czy spełnia ono warunki zadania).

Odpowiedź: W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Wskaż rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

2. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$ jest para liczb ujemnych dla:

A. $m = -\frac{5}{2}$, **B.** $m = -\frac{1}{2}$, **C.** $m = \frac{1}{3}$, **D.** $m = \frac{3}{2}$.

3. Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi $\frac{2}{3}$ wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację?
Przyjmij oznaczenia k – wiek Kuby, m – wiek Magdy.

A. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$

4. Wskaż równanie, które należy dopisać do równania $3x - 4y = 6$, aby otrzymać nieoznaczony układ równań.

A. $3x - 4y = -6$
C. $\frac{3}{2}x - 2y = -3$
B. $-3x + 4y = 6$
D. $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$

5. Wskaż układ równań równoważny układowi $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

A. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$
D. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$

6. Układ równań $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym dla:

A. $m = -\frac{1}{2}$, **B.** $m = -1$, **C.** $m = 1$, **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{-x-5}{2} = x - y \\ 5 - 2(x - 3(y - 1)) = 0 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Ile było banknotów każdego rodzaju, jeśli banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych?

Zadanie 3 (2 pkt)

Różnica miar kątów α i β pewnego trójkąta wynosi 30°. Kąt γ tego trójkąta ma miarę o 20° większą od sumy miar kątów α i β. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 4 (2 pkt)

Para liczb $x = 2$, $y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

I. $x - 2y = -4$ II. $2x + 3y = 15$ III. $2x - 3y = -5$ IV. $3x - y = 2$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat co obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

Zadanie 6 (3 pkt)

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Suma pieniędzy w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

Zadanie 7 (3 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4(x+y)^2 - 4y(2x+y) = (2x)^2 + x + y \\ (x-1)(y+1) = (x+2)(y-2) \end{cases}$

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dwaj rowerzyści wyruszyli w tę samą trasę: pierwszy o 10.00, drugi godzinę później. O godzinie 14.00 drugi rowerzysta dogonił pierwszego. Oblicz prędkości obu rowerzystów, jeśli drugi jechał ze średnią prędkością o 5 km/h większą niż pierwszy. Niech v oznacza prędkość wolniejszego rowerzysty w metrach na sekundę. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby v.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wyznacz liczby x i y spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y - x(2x+1) = -2(x-1)^2 + 3 \\ (y+1)^2 + 2x = y(y+1) + 5 \end{cases}$$

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego iloczynu xy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego sumy liczb x i y, które tworzą parę będącą rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 4\sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

Zadanie 4 (4 pkt)

Michał uczestniczył w dwudniowym zgrupowaniu zawodników klubu kajakarskiego. Pierwszego dnia płynął kajakiem 3 godziny z prądem rzeki oraz tyle samo czasu pod prąd i pokonał łącznie 24 km. Drugiego dnia płynął kajakiem 2 godziny z prądem rzeki i 4 godziny pod prąd, pokonując łącznie 21 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

D **Zadanie 5 (3 pkt)**

Uzasadnij, że punkt $P(x, y)$, którego współrzędne spełniają podany układ równań, należy do prostokąta o wierzchołkach: $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(1, 6)$.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-x)(y+x) = y(y-1) \\ x + y - \frac{x-y}{2} = \frac{x+2y}{2} + 2 \end{cases}$$

D **Zadanie 6 (4 pkt)**

Wykaż, że $m = -5$ jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań

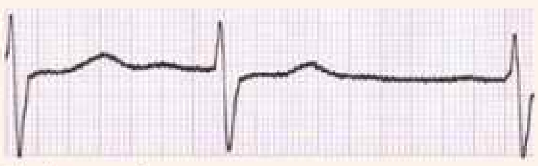
$$\begin{cases} 2x - y = 2m + 1 \\ 3x - 2y = 2m - 3 \end{cases}$$

jest spełniony przez parę liczb ujemnych.

4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.
Elektrokardiogram wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.

Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca

4.1. Pojęcie funkcji

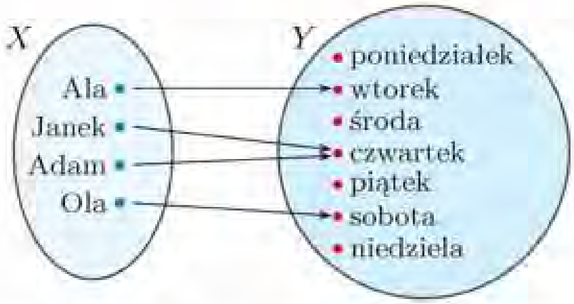
Przykład 1

W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn A, B, C, D i E. Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8

Przykład 2

Na grafie obok każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X, a zbiór dni tygodnia – literą Y.

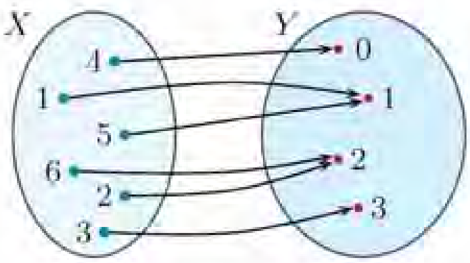


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y, oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y. Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2



Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

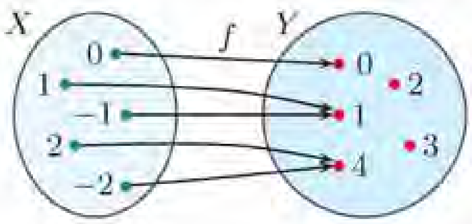
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X, to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład: f, g, h.

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y, używamy zapisu $f\colon X \to Y$, a wartość, którą funkcja f przyjmuje dla argumentu x, oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y, która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, przedstawiono za pomocą grafu i tabeli.



Argument x	-2	-1	0	1	2
Wartość funkcji $f(x)$	4	1	0	1	4

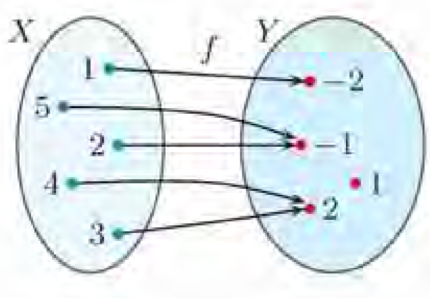
Zwróć uwagę, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f, ale nie są wartościami tej funkcji.

Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „$f(2) = 4$" i czytamy: „f od 2 jest równe 4".

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f\colon X \to Y$ przedstawiona za pomocą grafu.



a) Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?

c) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.

Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f\colon X \to Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f\colon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

Dla których argumentów zachodzi równość:

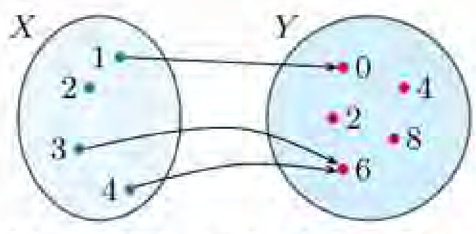
a) $f(x) = 0$, b) $f(x) = 1$, c) $f(x) = -2$, d) $f(x) = -1$?

Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y, gdy **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y.

D Przykład 5

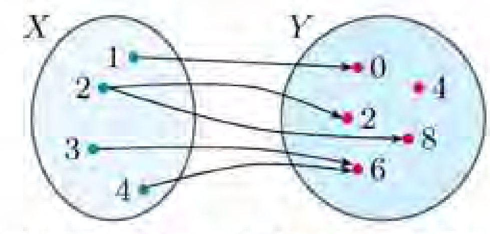
Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y.

a)



Liczbie 2 należącej do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y. Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y.

b)

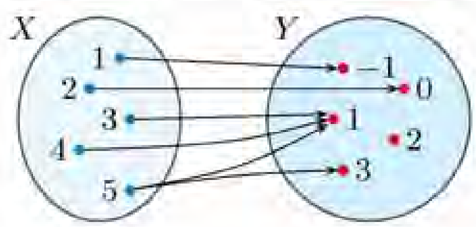


Liczbie 2 należącej do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y. Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y.

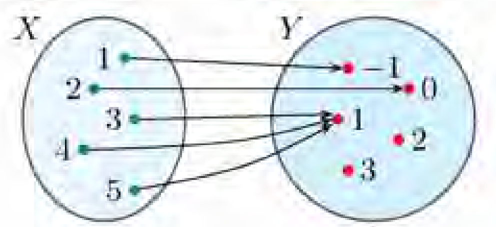
Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.

a)



b)



Definicja

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f\colon \{-2,-1,0,1,2\} \to \{0,1,2,3,4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe, jeśli każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1,0,1,2,3\}$ przyporządkowuje ona:

a) liczbę o 2 mniejszą,

b) liczbę o 3 większą,

c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,

d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Zadania

1. Funkcję $f\colon \{-2,-1,0,1,2\} \to \{-1,0,1,2,3,4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f\colon \{-2,-1,0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4,5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

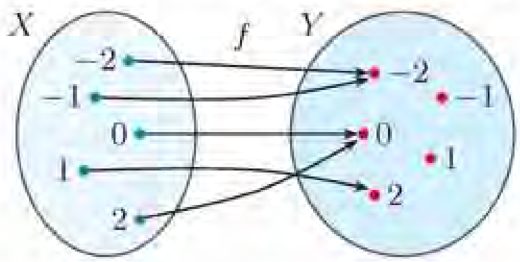
a)

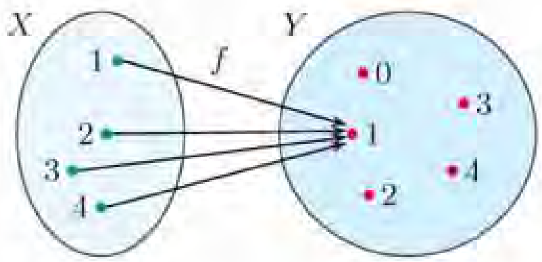
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f\colon X \to Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.

a)


b)


4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \to Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.

b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

D 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że przyporządkowanie to nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y, jeśli:

a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbf{Q}$, b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbf{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 10$

9. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$.

a) Podaj zbiór wartości funkcji f.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

10. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(234) = 9$.

a) Podaj zbiór wartości funkcji f.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich 3?

11. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje iloczyn jej cyfr, np. $f(213) = 6$.

a) Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

b) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 8?

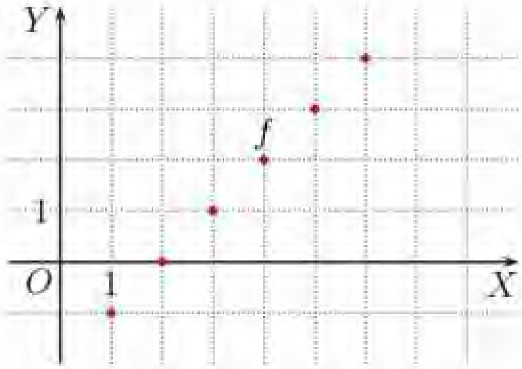
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. Jednym ze sposobów przedstawienia takiej funkcji jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4



Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y), gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.

Definicja

Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y), że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

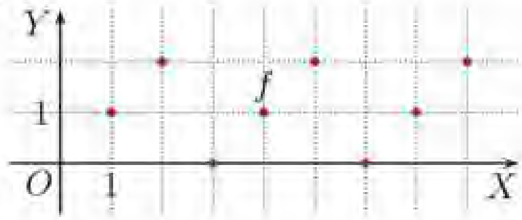
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



Ćwiczenie 2

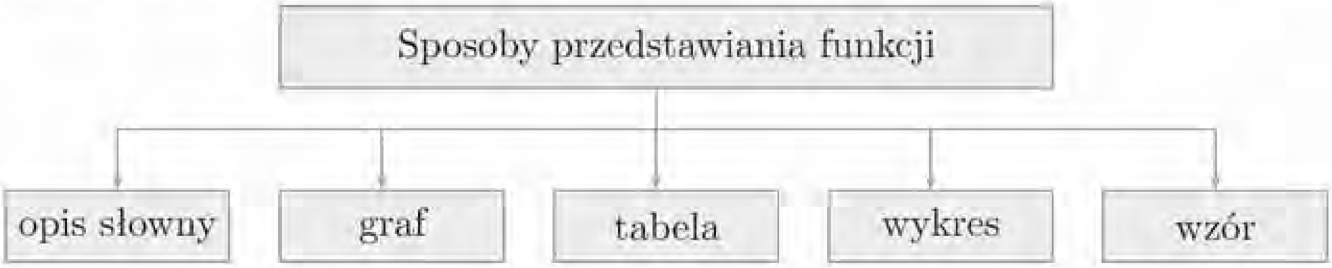
Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Wzór
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą	$f(x) = x + 3$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę	$f(x) = \frac{1}{2}x$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat	$f(x) = x^2$

Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.

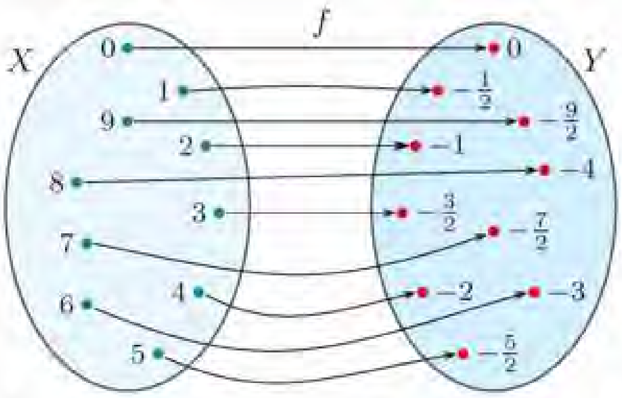
W zależności od sytuacji korzystamy z jednego lub kilku sposobów przedstawiania funkcji.

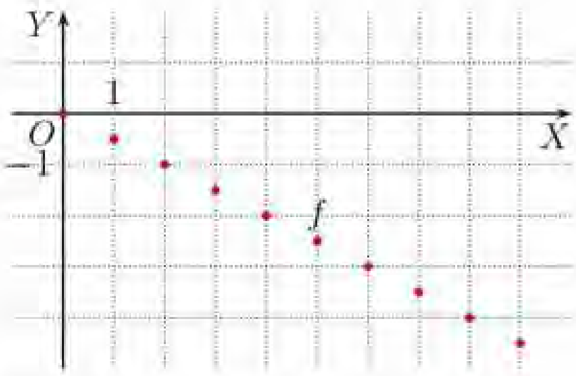


Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$





Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$ (lub $y = -\frac{1}{2}x$).

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji f, która każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

a) liczbę o 3 mniejszą,

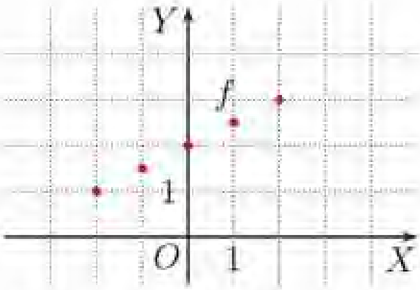
b) połowę kwadratu tej liczby.

Przed naszkicowaniem wykresu funkcji, należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

Przykład 4

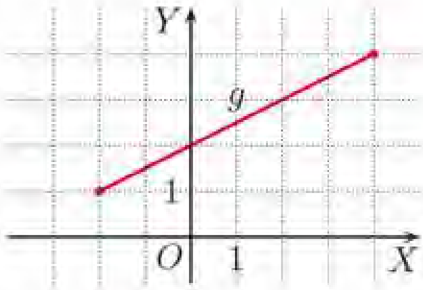
Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$



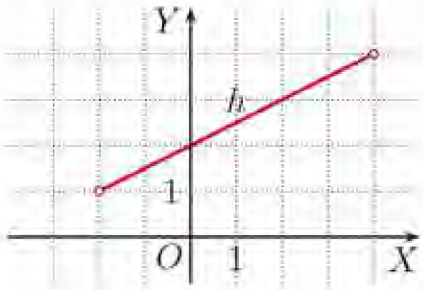
$f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

II. przedział $\langle -2; 4\rangle$



$g\colon \langle -2; 4\rangle \to \mathbf{R}$
$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

III. przedział $(-2; 4)$



$h\colon (-2; 4) \to \mathbf{R}$
$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$

• Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.

• Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami, jest przedział domknięty $\langle x_1; x_2\rangle$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, należy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \langle -2; 6) \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

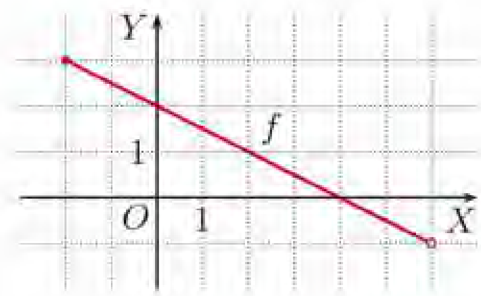
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\tfrac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x+2$ dla $x = 6$:

$$-\tfrac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon D \to \mathbf{R}$, jeśli:

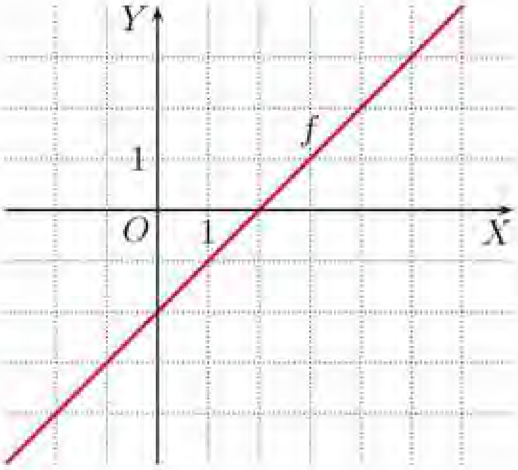
a) $D = \langle -2; 3\rangle$, $f(x) = x + 1$,

b) $D = \langle -2; 6)$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$,

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$,

d) $D = (-4; 2\rangle$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

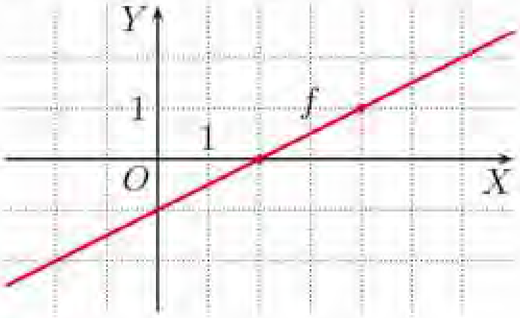
Dla dowolnych liczb a, b wykresem funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.



Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych różnych argumentów (dlaczego?).

Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.



Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$: $f(2) = 0$, $f(4) = 1$.

Do wykresu funkcji f należą punkty: $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.

Ćwiczenie 5

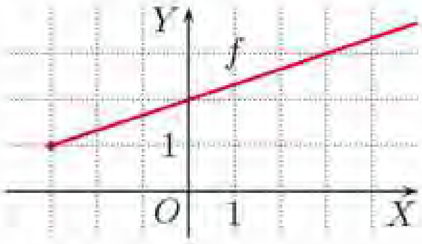
Wykresem funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest prosta. Wyznacz dwa różne punkty należące do tego wykresu i go naszkicuj.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = -x$ c) $f(x) = x - 1$ d) $f(x) = -2x + 2$

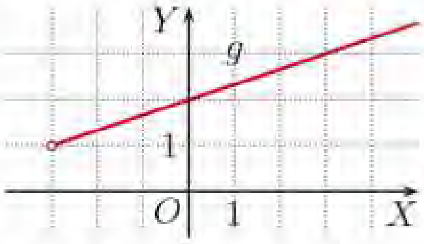
Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

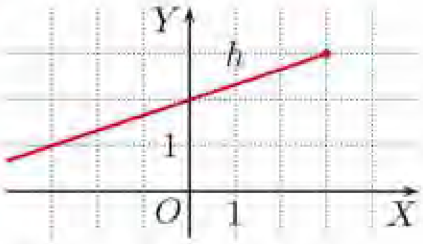
I. przedział $\langle -3; \infty)$ II. przedział $(-3; \infty)$ III. przedział $(-\infty; 3\rangle$



$f\colon \langle -3; \infty) \to \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$



$g\colon (-3; \infty) \to \mathbf{R}$
$g(x) = \frac{1}{3}x + 2$



$h\colon (-\infty; 3\rangle \to \mathbf{R}$
$h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (zawierają swój początek). Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbf{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:

a) liczbę o 1 mniejszą,

b) liczbę przeciwną,

c) jej wartość bezwzględną,

d) jej kwadrat.

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$

3. Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naszkicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0

b)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	4	3	2	1

d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

4. Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -2x - 5$.

5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, jeśli jej dziedziną jest przedział:

a) $\langle 0; 4\rangle$, b) $\langle -2; 3\rangle$, c) $\langle 1; \infty)$, d) $(-\infty; 2\rangle$.

6. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x + 3$, jeśli jej dziedziną jest przedział:

a) $(0; 4)$, b) $(-3; 2)$, c) $(0; \infty)$, d) $(-\infty; -1)$.

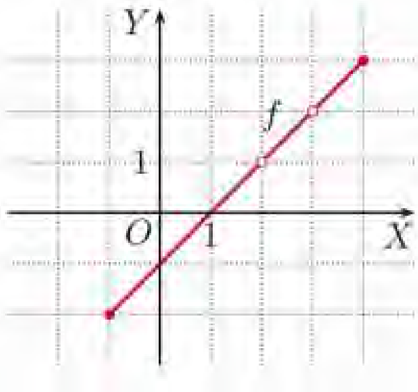
7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon D \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 1$, gdzie $D = \langle -1; 4\rangle \setminus \{2, 3\}$. Naszkicuj wykres funkcji określonej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór:

a) $D = \langle -3; 0\rangle \cup (2; 4)$,

b) $D = (-2; 5) \setminus \{4\}$,

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$,

d) $D = (0; \infty) \setminus \{3\}$.



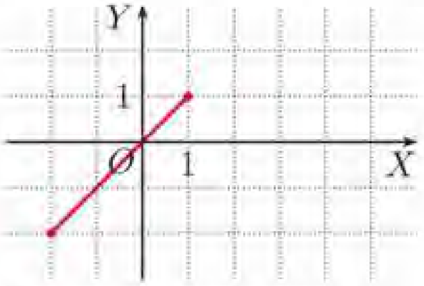
8. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4, a funkcja g jej resztę z dzielenia przez 5. Naszkicuj wykresy tych funkcji. Dla ilu liczb naturalnych mniejszych od 25 funkcje f i g przyjmują te same wartości?

4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

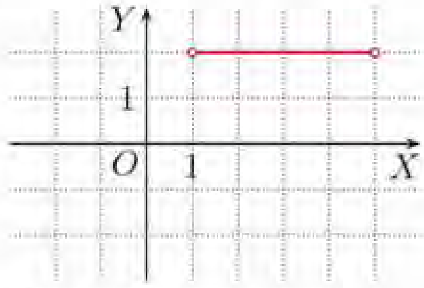
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

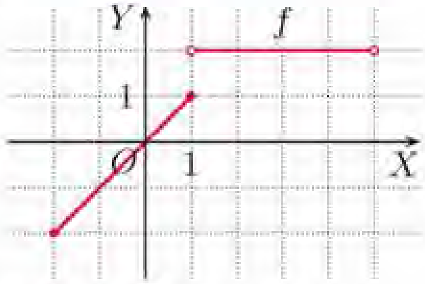
Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 5)$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in \langle -2; 1\rangle$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$

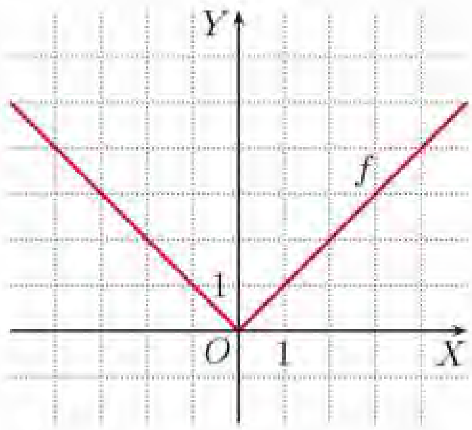
b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2\rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3\rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. W tabeli podano wartości funkcji f dla wybranych argumentów.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3

Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

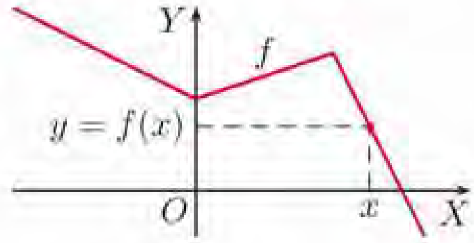
Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dla całkowitych argumentów x, takich że $|x| \leqslant 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

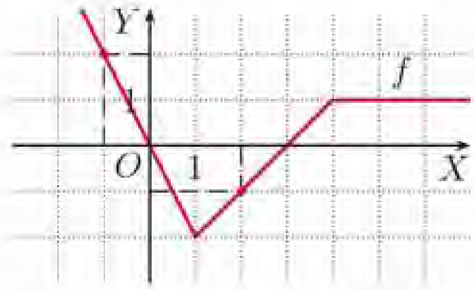
a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |3x|$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$

Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f.



Przykład 3

Z podanego obok wykresu funkcji f odczytaj jej wartości dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.



Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.

Ćwiczenie 3

Wykresem funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B. Naszkicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

a) $A(-3, -1)$, $B(5, 3)$ b) $A(3, 0)$, $B(5, -3)$

Dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe. Wartość funkcji dla danego argumentu jesteśmy w stanie wyznaczyć, gdy znamy jej wzór.

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości tych funkcji dla $x = 2$:

$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8$
$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio w miejsca x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $P(-2, -11)$ b) $f(x) = -2x^2 - x$, $P(-\frac{1}{2}, 0)$

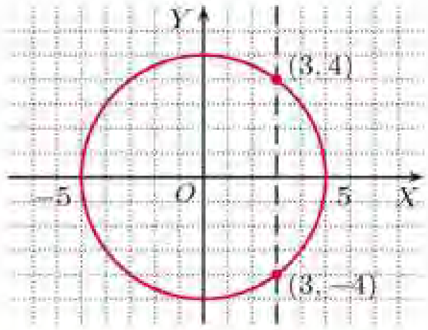
Czy wiesz, że...

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler [czyt. ojler] (1707–1783) jako pierwszy do opisu wartości funkcji używał oznaczenia $f(x)$. Podana przez nas definicja funkcji została sformułowana dopiero w połowie XIX wieku przez niemieckiego matematyka Petera G.L. Dirichleta (1805–1859).

Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y, więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 5

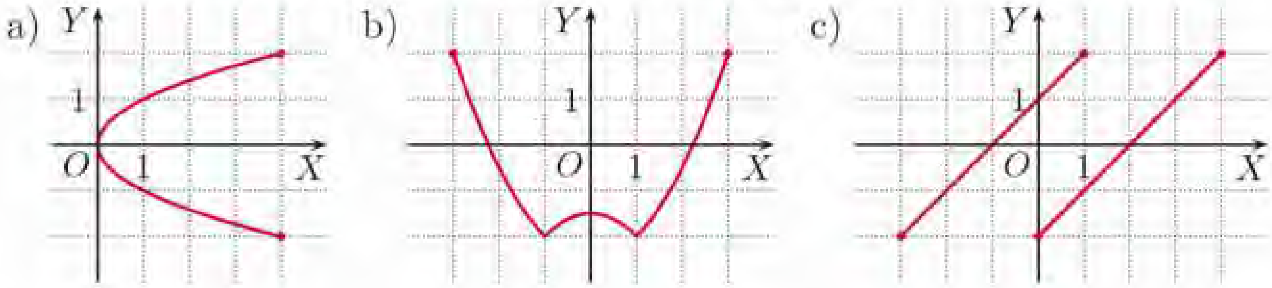
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x, którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2, np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Zadania

D **1.** Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



2. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D.

a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = \langle -2; \infty)$

3. Dana jest funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -2; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0\rangle \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

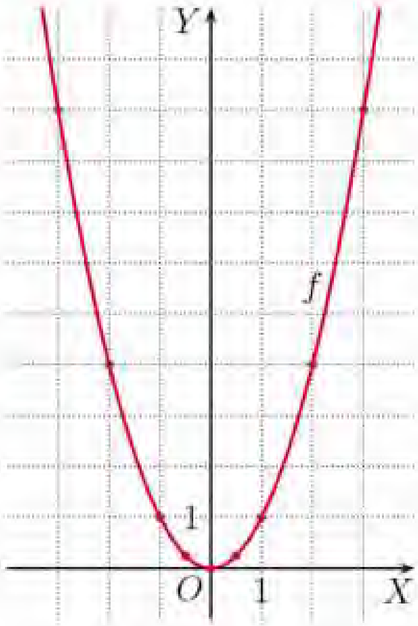
a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ |x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

Warto wiedzieć

Inne przykłady wykresów funkcji

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.



Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f. Wykres ten nazywamy **parabolą**.

1. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$ o podanej dziedzinie D. Skorzystaj z wykresu z przykładu 1.

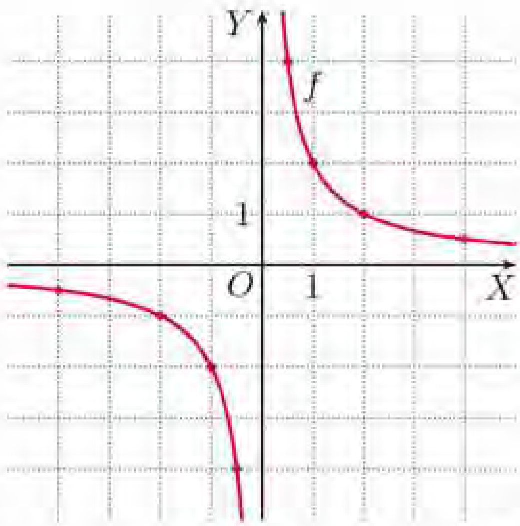
a) $D = \langle -2; 2\rangle$ b) $D = \langle 1; 3\rangle$ c) $D = \langle 0; \infty)$

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu, a następnie narysuj jej wykres.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$.



Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów (zwróć uwagę na to, że liczba 0 nie należy do dziedziny funkcji, ani nie jest wartością dla żadnego argumentu).

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i odpowiednio je łączymy – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f (składa się on z dwóch osobnych gałęzi). Wykres ten nazywamy **hiperbolą**.

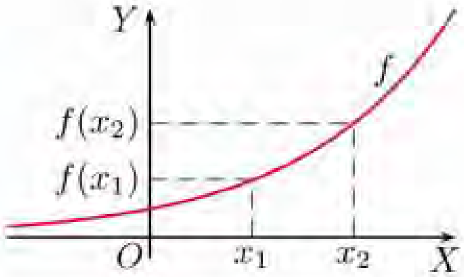
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f. Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \to \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnąca.

Załóżmy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.
Wówczas:

$$\tfrac{1}{2}x_1 < \tfrac{1}{2}x_2$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 4 < \tfrac{1}{2}x_2 - 4$$

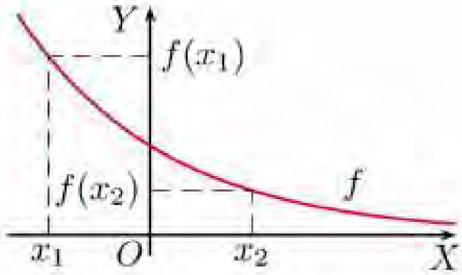
Zatem $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f. Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \to \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejąca.

Załóżmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.
Wówczas:

$$4x_1 < 4x_2 \quad /: (x_1 \cdot x_2)$$
$$\frac{4}{x_2} < \frac{4}{x_1}$$

Dzielenie obu stron nierówności przez $x_1 \cdot x_2$ nie zmienia zwrotu nierówności, gdyż $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Zatem $f(x_2) < f(x_1)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0; \infty)$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

a) funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,

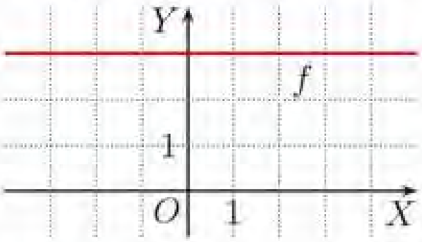
b) funkcja $f\colon (0;\infty) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,

c) funkcja $f\colon (-\infty;0) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

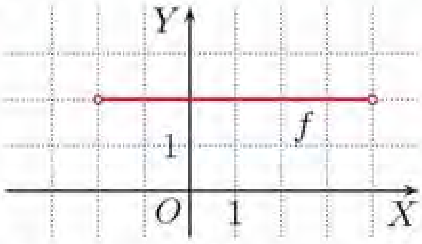
Definicja

Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

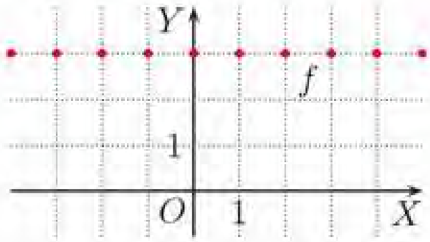
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3$



$f\colon (-2;4) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2$

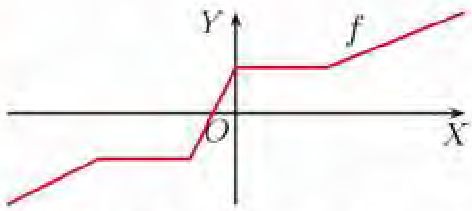


$f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3$

Definicja

Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$

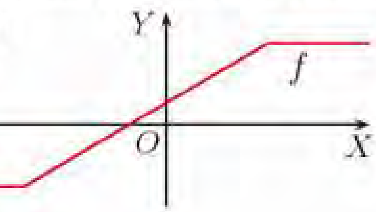


Przykład funkcji niemalejącej

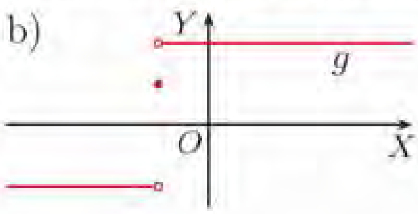
Ćwiczenie 2

Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?

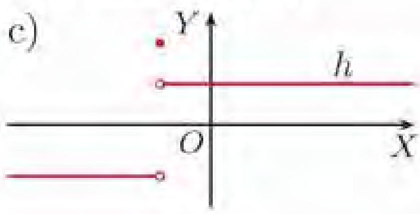
a)



b)



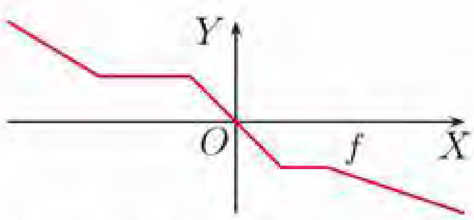
c)



Definicja

Funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

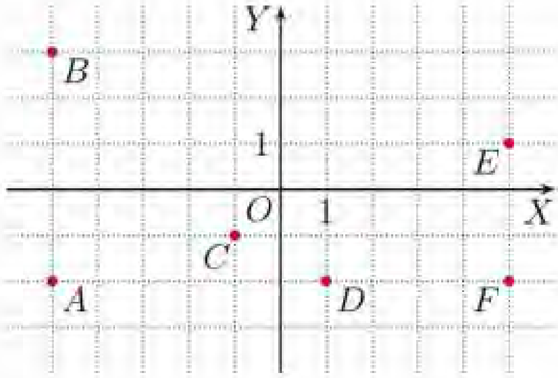
jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$



Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 3

a) Naszkicuj wykres funkcji nierosnącej $f : \langle -5; 5\rangle \to \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów A–F.



b) Czy można naszkicować wykres funkcji niemalejącej $f : \langle -5; 5) \to \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów A–F?

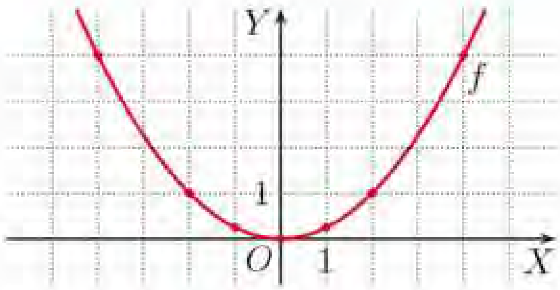
Uwaga. Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą. Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą jak i nierosnącą.

Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

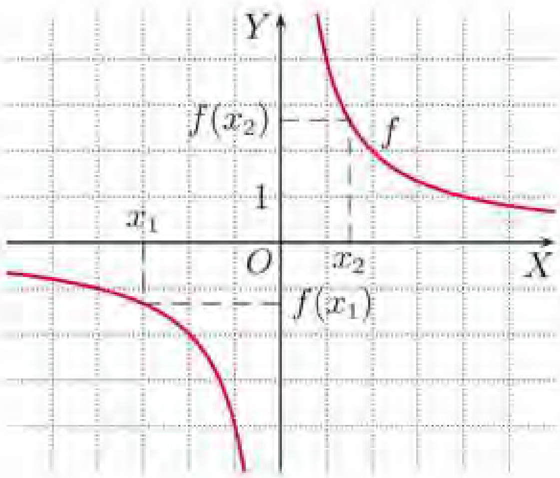


Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.

W przedziale $(-\infty; 0\rangle$ funkcja f maleje, a w przedziale $\langle 0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f : (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.



Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów x_1, x_2, mamy:

$$x_1 < x_2 \text{ i } f(x_1) < f(x_2)$$

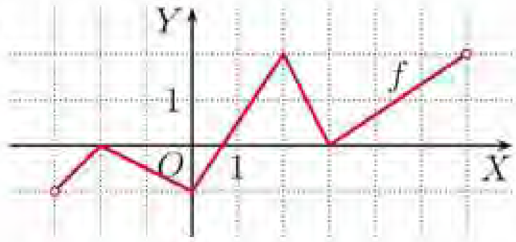
Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres dowolnej funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest funkcją monotoniczną.

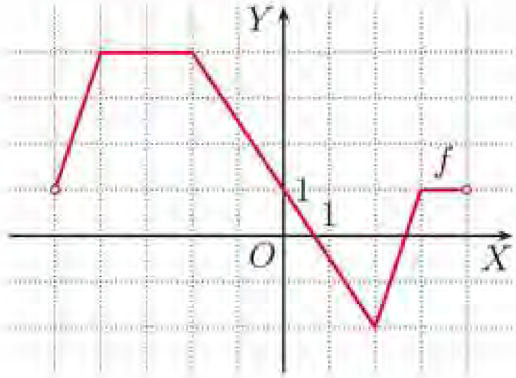
Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \to \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) 

b) 

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \to \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?



A. Funkcja f jest nierosnąca w $\langle -4; 2 \rangle$.

B. Funkcja f jest niemalejąca w $(-5; -2 \rangle$.

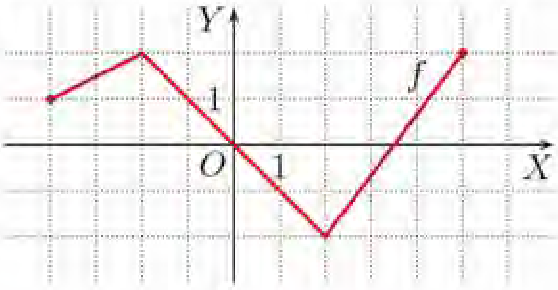
C. Funkcja f jest niemalejąca w $\langle 2; 4)$.

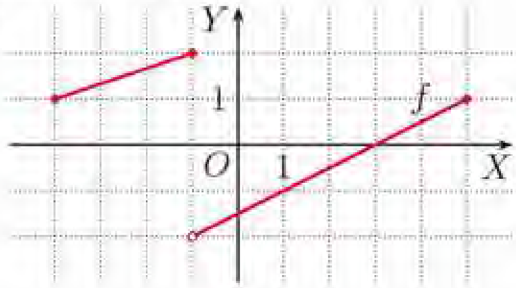
3. Naszkicuj wykres funkcji $f: (-5; 6) \to \mathbf{R}$ spełniającej warunki:

a) f rośnie w $(-5; -1 \rangle$ i w $\langle 3; 6)$ oraz maleje w $\langle -1; 3 \rangle$,

b) f jest stała w $\langle 0; 4 \rangle$, rośnie w $\langle 4; 5 \rangle$, maleje w $(-5; 0 \rangle$ i w $\langle 5; 6)$.

D **4.** Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \to \mathbf{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) 

b) 

D **5.** Przeczytaj podany w ramce przykład. Wykaż, że funkcja:

a) $f: (-\infty; 0) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = 6x^2 + 1$ jest malejąca,

b) $f: (-\infty; 0) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2$ jest rosnąca,

c) $f: (0; \infty) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -8x^2 + 6$ jest malejąca.

> Wykaż, że funkcja $f: \langle 0; \infty) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ jest rosnąca.
>
> Niech $x_1, x_2 \in \langle 0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$.
>
> $$f(x_2) - f(x_1) = \tfrac{1}{2}x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$
>
> $x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$. Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

Odczytywanie dziedziny funkcji

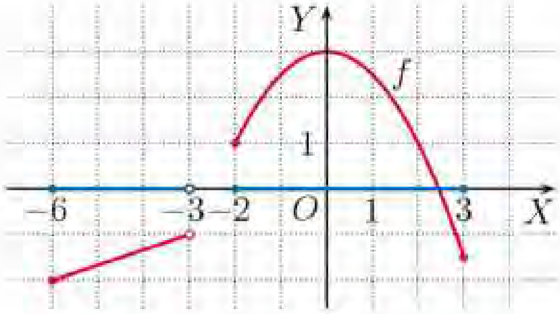
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Jej dziedziną jest zbiór:

$$D = \langle -6; -3) \cup \langle -2; 3\rangle$$

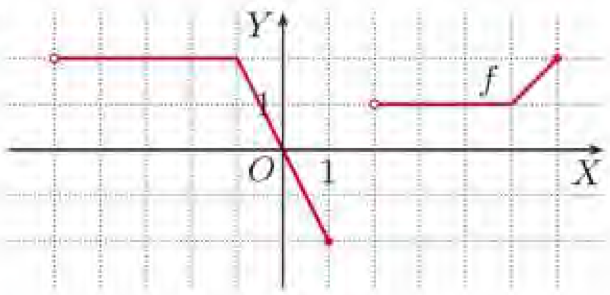
Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



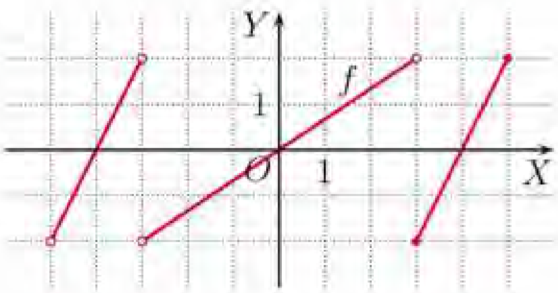
Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.

a)



b)

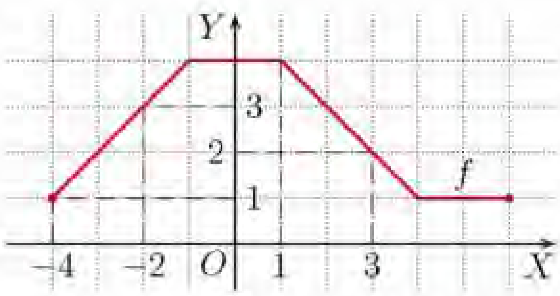


Odczytywanie zbioru wartości funkcji

Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4; 6\rangle \to \mathbf{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f.



Z wykresu odczytujemy wartości funkcji: $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leqslant y \leqslant 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; 4\rangle$.

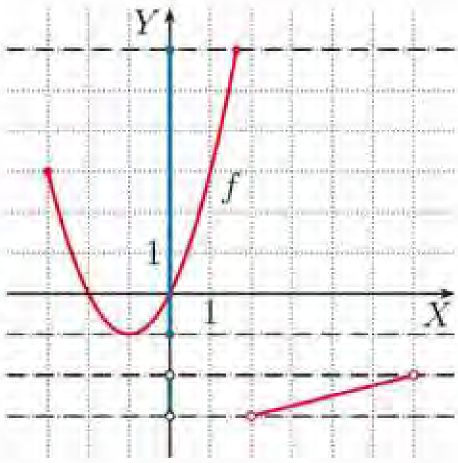
Definicja

Zbiór wartości funkcji $f\colon D \to Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.



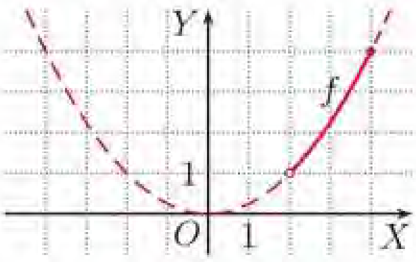
Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup \langle -1; 6\rangle$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.

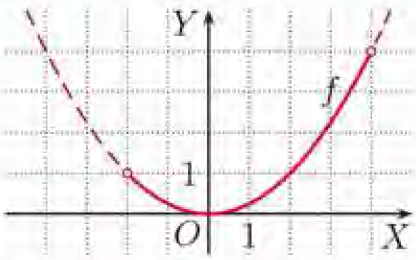
Ćwiczenie 2

Linią ciągłą narysowano wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f.

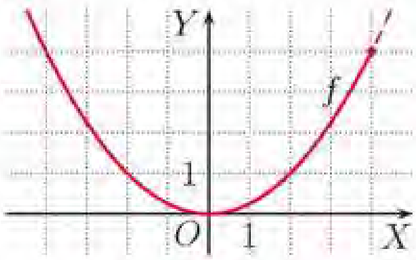
a) $D = (2; 4\rangle$



b) $D = (-2; 4)$

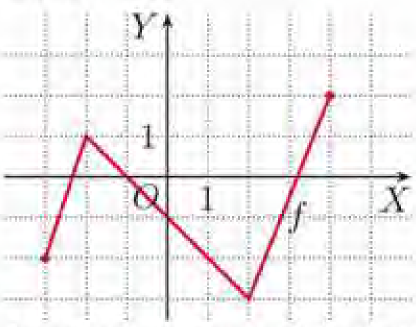


c) $D = (-\infty; 4\rangle$

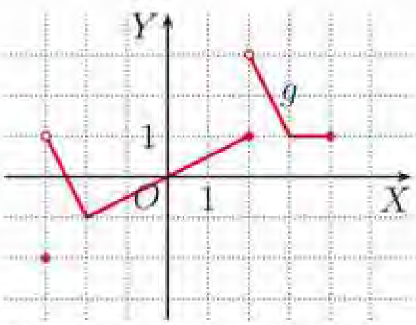


Ćwiczenie 3

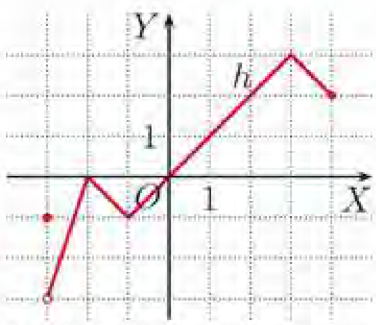
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f, g i h określonych w przedziale $\langle -3; 4\rangle$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3. Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



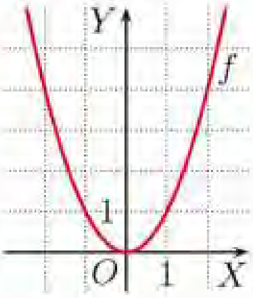
Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2. Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbf{R}$.

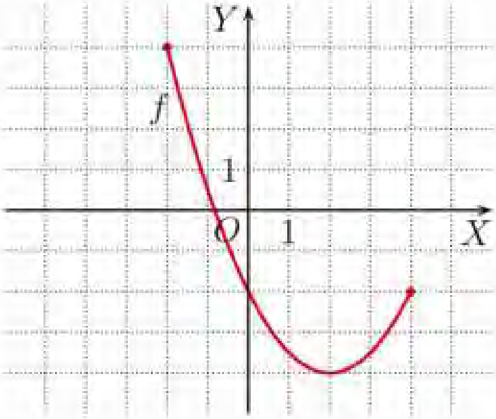


Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; \infty)$. Najmniejsza wartość funkcji f równa 0 jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

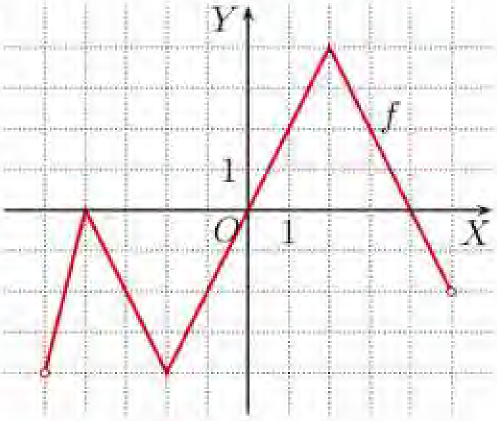
Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.

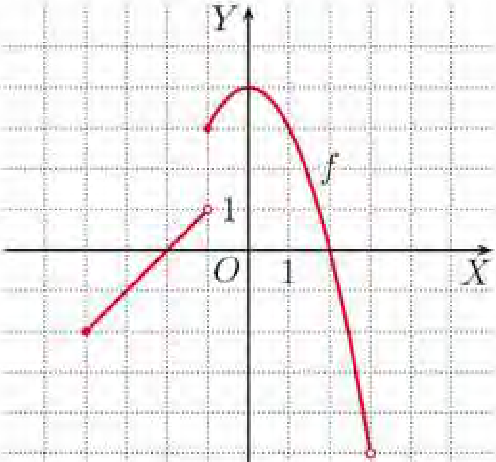
a)



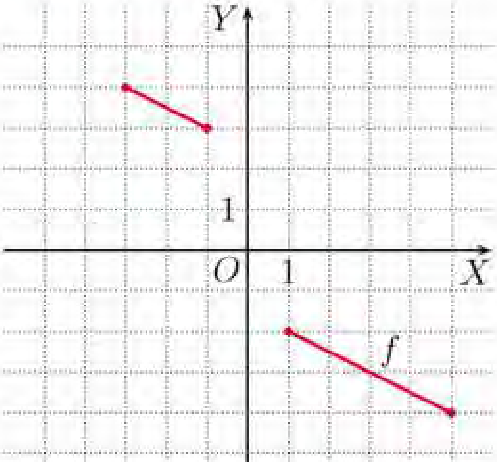
d)



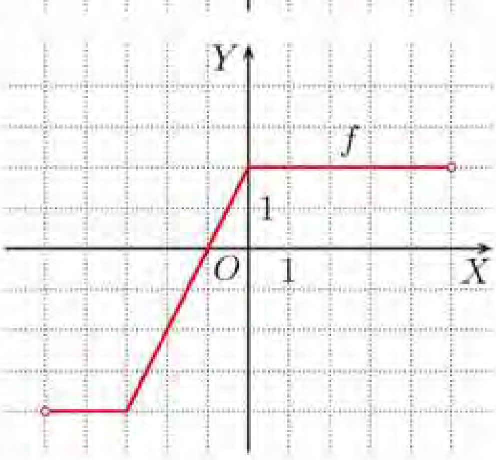
b)



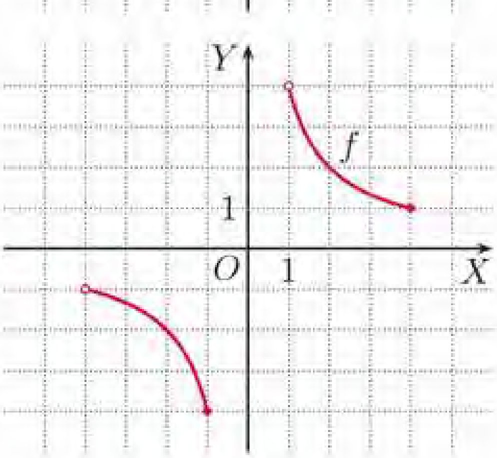
e)



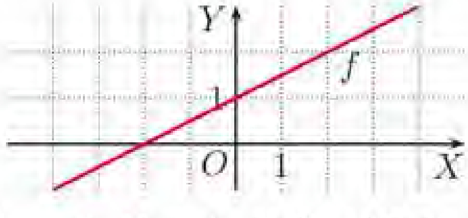
c)



f)



2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x+1$. Podaj zbiór wartości funkcji danej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór D.



a) $D = \langle -4; 4\rangle$ b) $D = \langle -4; -2\rangle \cup \langle 0; 4\rangle$ c) $D = \langle -4; 0) \cup (2; 4\rangle$

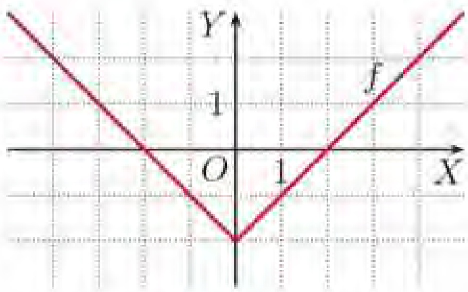
3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x+3$ o dziedzinie D. Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \langle -4; 6\rangle$ b) $D = \langle -4; 0\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$ c) $D = \langle -4; -2\rangle \cup \langle 4; 6\rangle$

4. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 2x - 4$. Podaj jej dziedzinę, jeśli zbiór wartości jest równy:

a) $(-3; 4\rangle$, b) $(-2; 2) \cup (2; \infty)$, c) $(0; 2) \cup \{3\}$, d) $\{0, 2, 3\}$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji g danej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane, jeśli dziedziną tej funkcji jest zbiór:



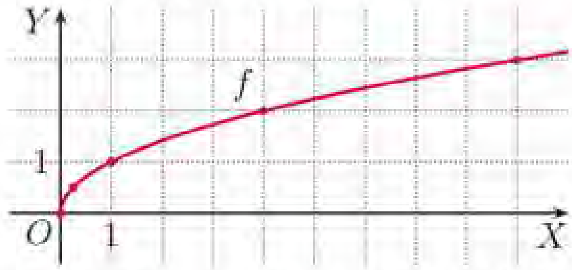
a) $D = \langle -4; -1\rangle$, b) $D = \langle -3; 4)$, c) $D = \langle -2; \infty)$.

6. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $f: \langle -2; 6\rangle \to \mathbf{R}$, której zbiór wartości jest równy:

a) $\langle -2; 6)$, b) $\langle -4; 0\rangle \cup (1; 4\rangle$, c) $\langle -2; 3) \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

7. Aby naszkicować wykres funkcji $f: \langle 0; \infty) \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzono tabelę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



Odczytaj z wykresu, jakie wartości funkcja f przyjmuje dla:

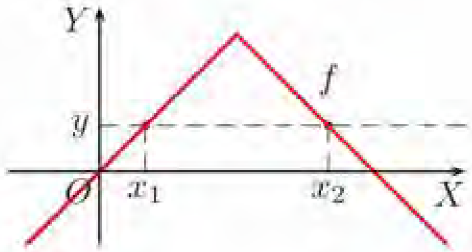
a) $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right\rangle$, b) $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$, c) $x \in \langle 4; 9\rangle$, d) $x \in \left\langle 2\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}\right\rangle$.

8. Na podstawie odpowiedniej tabeli wartości funkcji naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Jakie wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów z przedziału:

a) $\langle 0; 1\rangle$, b) $(0; 8)$, c) $\langle -8; 1\rangle$, d) $(-8; \infty)$?

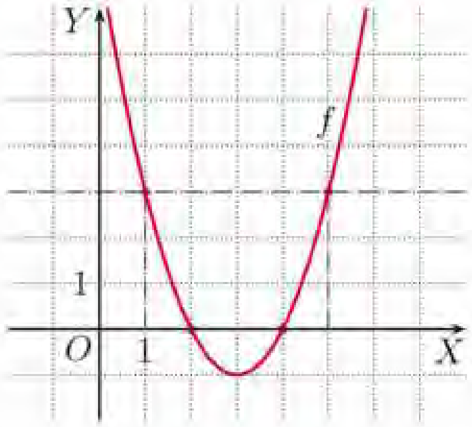
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę, że funkcja f, której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2.



Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.



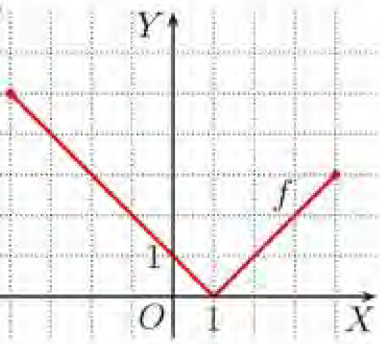
Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$. Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.

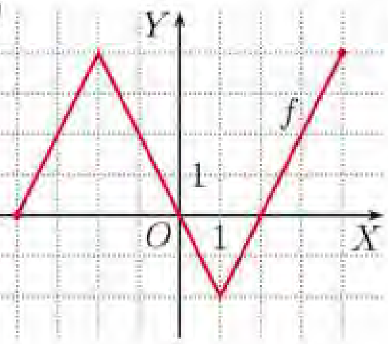
Ćwiczenie 1

Na podstawie wykresu funkcji $f\colon \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x, dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.

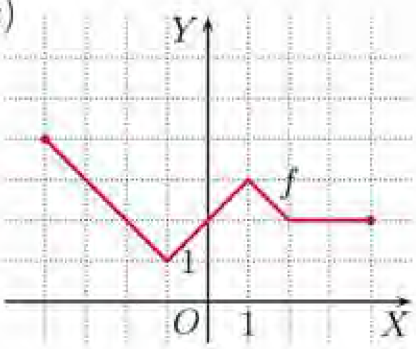
a)



b)

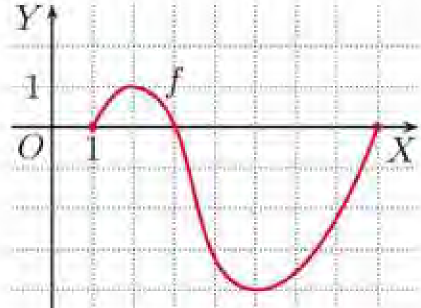


c)



Przykład 2

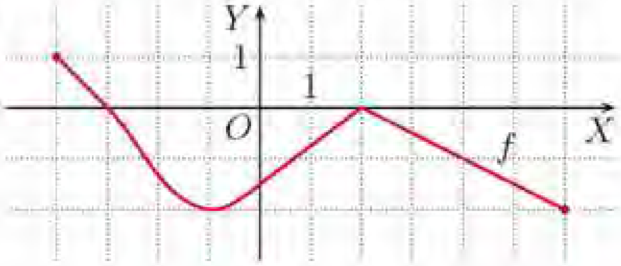
Dany jest wykres funkcji $f\colon \langle 1; 8\rangle \to \mathbf{R}$. Odczytujemy z niego:

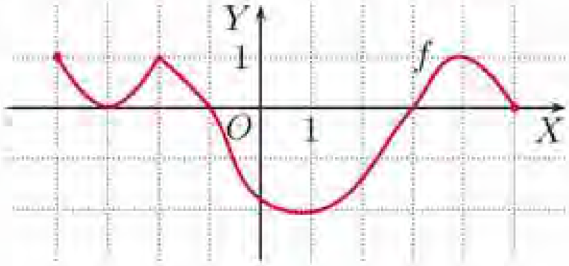


- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leqslant 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup \langle 3; 8\rangle$.

Ćwiczenie 2

Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leqslant 0$.

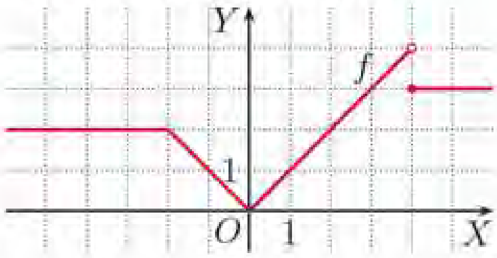
a) 

b) 

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$



Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geqslant 2$.

Nierówność $f(x) > 2$ jest spełniona dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geqslant 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Odczytaj z niego rozwiązanie równania:

- $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 1\rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

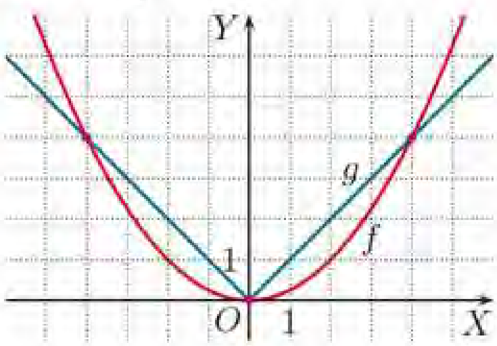
Przykład 4

Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.
Z wykresów odczytujemy:

$\frac{1}{4}x^2 = |x|$ dla $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$

$\frac{1}{4}x^2 < |x|$ dla $x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$



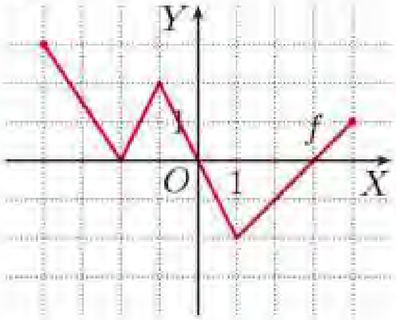
Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4 rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geqslant |x|$.

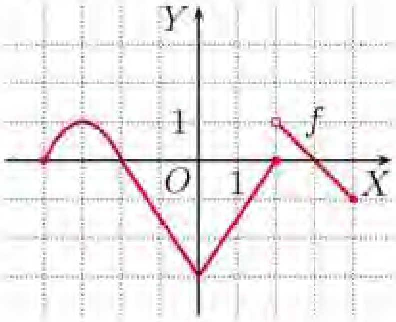
Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geqslant 0$.

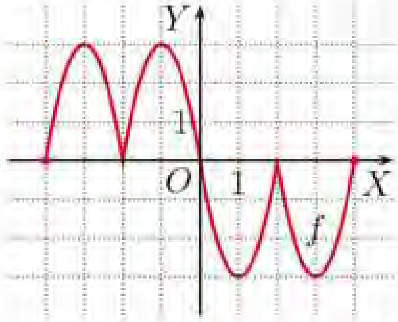
a)



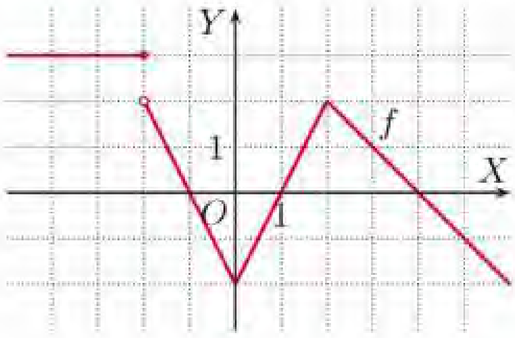
b)



c)



2. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania:



a) $f(x) = 0$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$,

b) $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 2$,

c) $f(x) = 3$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 3$.

3. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 1$.

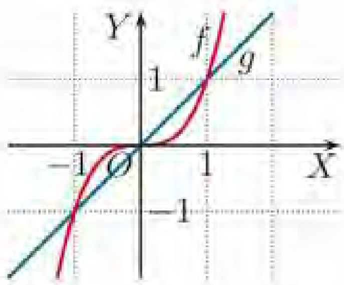
a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 1) \\ 5 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = x$. Odczytaj z wykresów:



a) rozwiązanie równania $x^3 = x$,

b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < g(x)$,

c) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

* **5.** a) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = |2x|$ i nierówność $x^2 < |2x|$.

b) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = 2 - x$ i nierówność $x^2 \geqslant 2 - x$.

Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 grudnia 2017 r. Taki wykres składa się z bardzo wielu punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.

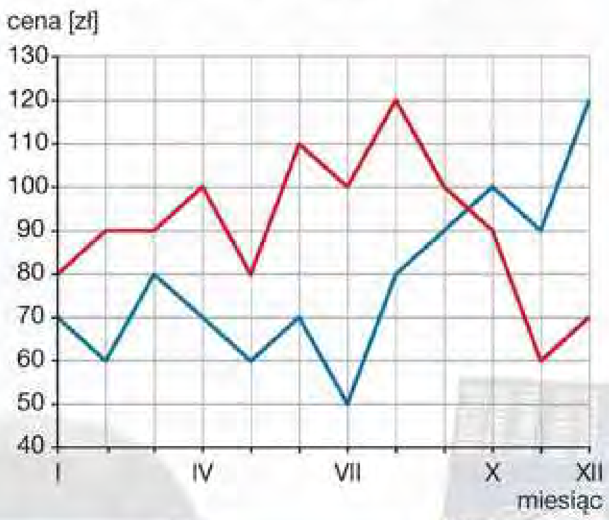
Źródło: http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/statystyka/kursy.html

Badaniem zachowań rynku na podstawie analizy wykresów finansowych zajmuje się **analiza techniczna**.

1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki *X* (kolor czerwony) i spółki *Y* (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2018 roku.

a) Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki *X*, a jaki – spółki *Y*?

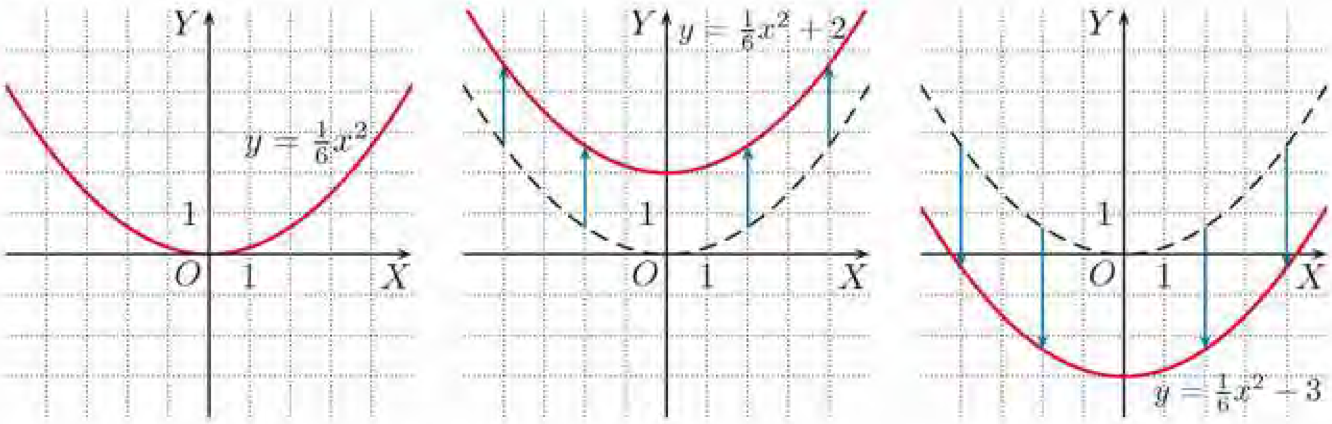
b) Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki *X*, a jaka – spółki *Y*?



4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OY*

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

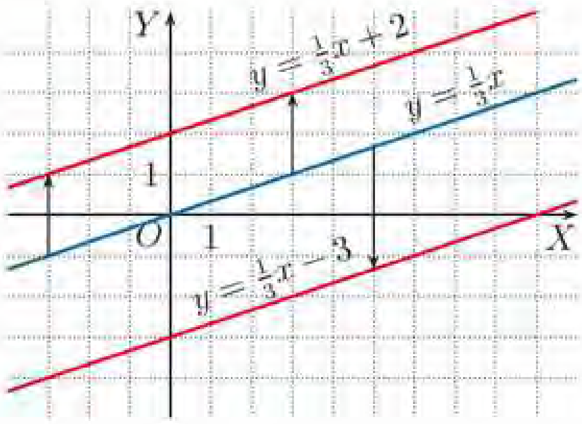
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

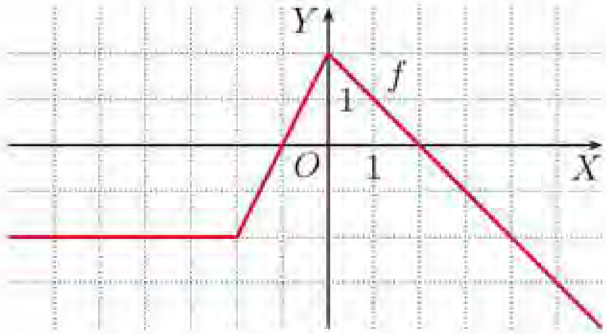
Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.

a) $g(x) = f(x) + 2$

b) $g(x) = f(x) - 2$

c) $g(x) = f(x) - 3$



2. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f, g i h.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -1; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \left|\frac{1}{2}x\right| & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$, jeśli wiadomo, że:

a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\langle 1; \infty)$,

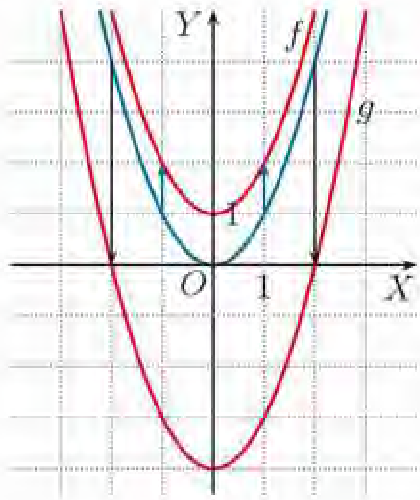
b) miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4.

4. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in \langle -3; 3) \\ 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty) \end{cases}$

Naszkicuj wykresy funkcji f oraz funkcji $g(x) = f(x) + a$ takiej, że podane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

a) $g(x) = 5$ b) $g(x) = -4$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^2$ (kolor niebieski) oraz wykresy funkcji f i g (kolor czerwony). Podaj wzory funkcji f i g.



6. Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = x^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 3$

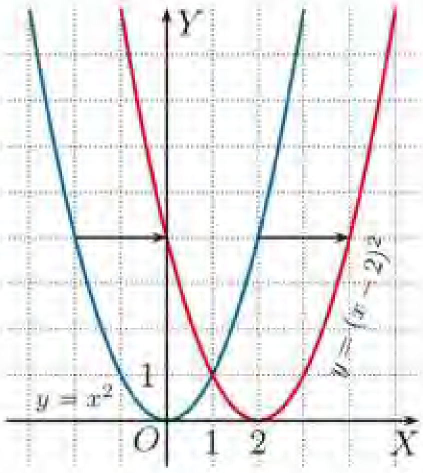
b) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 9$

7. Dla jakiej wartości współczynnika a wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}|x| + a$ wraz z osią OX ogranicza trójkąt o polu równym: a) 8, b) 98?

4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OX*

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x-2)^2$, a poniżej tabele wartości tych funkcji wykorzystane do ich naszkicowania.



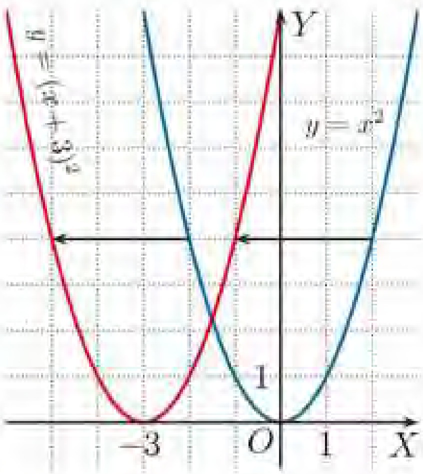
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x-2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x-2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x+3)^2$, a poniżej tabelę wartości funkcji $y = (x+3)^2$.



x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x+3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x+3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x-p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x+p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

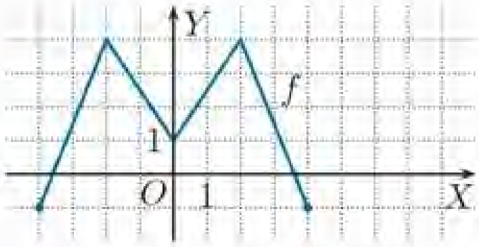
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g.

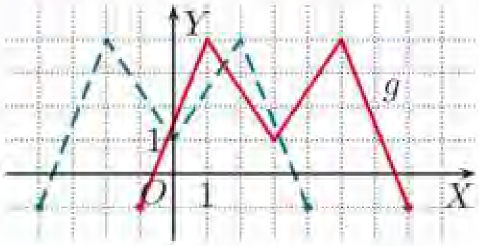
a) $g(x) = |x-1|$ b) $g(x) = |x+2|$ c) $g(x) = |x+3|$ d) $g(x) = |x-4|$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ i podaj jej dziedzinę.



Wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.



Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7\rangle$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g, stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g.

a) $g(x) = f(x-2)$ b) $g(x) = f(x+3)$ c) $g(x) = f(x+4)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g. Podaj jej miejsce zerowe.

a) $g(x) = (x-1)^2$ b) $g(x) = (x+1)^2$ c) $g(x) = (x+2)^2$

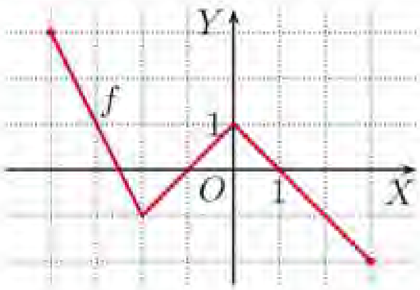
2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = |2(x-3)|$ b) $g(x) = |2x-4|$ c) $g(x) = |2x+6|$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4; 3\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

a) $g(x) = f(x-2)$ c) $g(x) = f(x+1)$

b) $g(x) = f(x-3)$ d) $g(x) = f(x+2)$



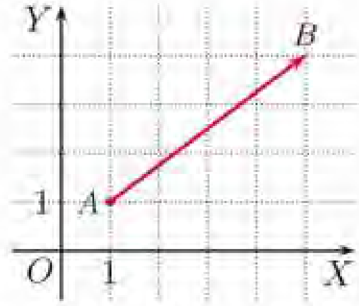
4. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^3 - 4x$ są liczby: $-2, 0, 2$. Podaj miejsca zerowe funkcji g.

a) $g(x) = (x-3)^3 - 4(x-3)$ b) $g(x) = (x+5)^3 - 4(x+5)$

5. Dla jakiej wartości współczynnika a liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f? Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = |3x + a|$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x + a\right|$, $x_0 = -4$

4.9. Wektory w układzie współrzędnych

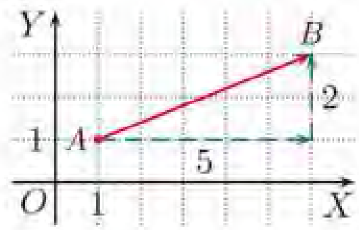


Intuicyjnie **wektor** to odcinek z wyróżnionym **początkiem i końcem**, często rysowany jako strzałka. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.
Wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) możemy określić, podając współrzędne początku wektora $A(1,1)$ i współrzędne końca $B(5,4)$.
Punkt A będący początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy też **punktem zaczepienia** wektora, a o wektorze $\overrightarrow{AB}$ mówimy, że jest zaczepiony w punkcie A.

Ćwiczenie 1

Narysuj wektor $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(-3,2)$, $B(4,-1)$ b) $A(2,2)$, $B(-1,5)$ c) $A(6,3)$, $B(6,-1)$



Wektory są wygodnym sposobem opisu przesunięcia w układzie współrzędnych. Zauważmy, że przesunięcie o wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) oznacza przesunięcie o 5 jednostek w prawo i 2 jednostki w górę. Zapisujemy to następująco: $\overrightarrow{AB} = [5,2]$.

Twierdzenie

Dowolny wektor w układzie współrzędnych zapisujemy jako parę liczb $[a,b]$. W przesunięciu o wektor $[a,b]$:
- współrzędna a określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w poziomie (wzdłuż osi OX) **w prawo**, jeśli $a > 0$, lub **w lewo**, jeśli $a < 0$;
- współrzędna b określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w pionie (wzdłuż osi OY) **w górę**, jeśli $b > 0$, lub **w dół**, jeśli $b < 0$.

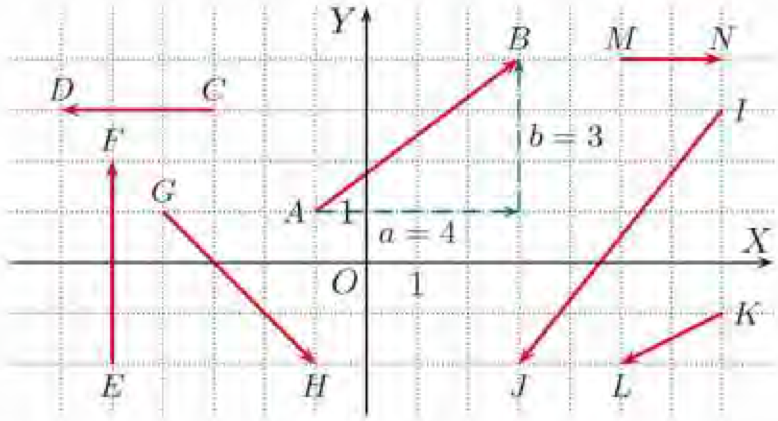
Przykład 1

Na rysunku obok:

$\overrightarrow{AB} = [4,3]$, $\overrightarrow{CD} = [-3,0]$,
$\overrightarrow{EF} = [0,4]$, $\overrightarrow{KL} = [-2,-1]$.

Ćwiczenie 2

Korzystając z rysunku obok, podaj współrzędne wektora:
a) $\overrightarrow{GH}$, b) $\overrightarrow{IJ}$, c) $\overrightarrow{MN}$.



Ćwiczenie 3

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A(-2,3)$, $B(3,4)$, $C(6,3)$, $D(3,1)$, $E(-2,-2)$. Podaj współrzędne wektorów:

a) $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BE}$, b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AE}$, c) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, d) $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

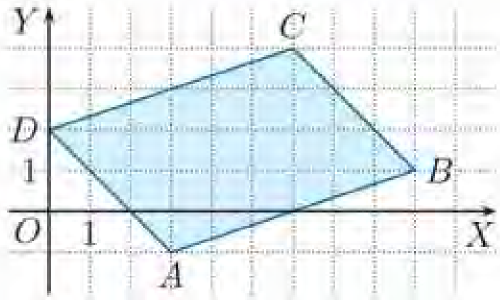
> Dane są punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:
> $$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Ćwiczenie 4

Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Podaj współrzędne wektorów:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$,

b) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.



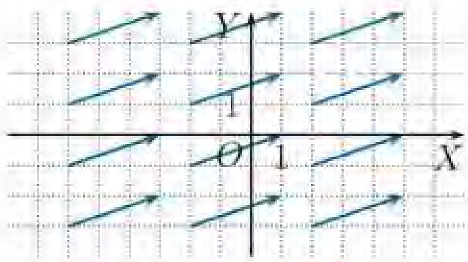
Zauważ, że jeśli wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[a,b]$, to wektor $\overrightarrow{BA}$ ma współrzędne $[-a,-b]$. Zapisujemy to: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$.

Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:

a) $A(2,1)$ i $B(3,7)$, b) $A(5\frac{1}{4},-2)$ i $B(-3\frac{1}{2},6\frac{2}{3})$.

Aby określić **wektor zaczepiony**, podajemy współrzędne jego początku i końca. Rozważamy również **wektor swobodny**, dla którego podajemy wyłącznie jego współrzędne $[a,b]$. Wektory swobodne oznaczamy zwykle: $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

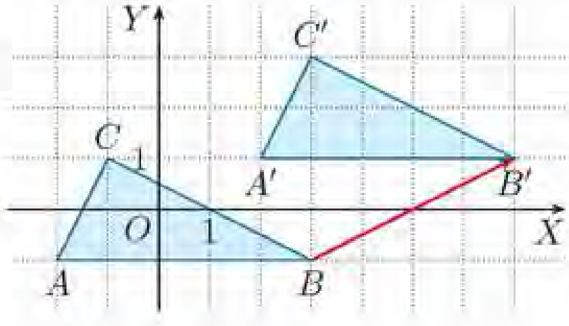


Wszystkie wektory na rysunku odpowiadają wektorowi swobodnemu $\overrightarrow{u} = [3,1]$.

Uwaga. Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, zamiast: „wektor swobodny” czy „wektor zaczepiony” mówimy po prostu: „wektor”.

Przykład 2

Trójkąt $A'B'C'$ (rysunek obok) otrzymano przez przesunięcie trójkąta ABC o wektor $\overrightarrow{v} = [4,2]$. Zauważ, że jeśli znamy współrzędne punktów A, B, C i wektor $\overrightarrow{v}$, możemy wyznaczyć współrzędne punktów A', B', C'.

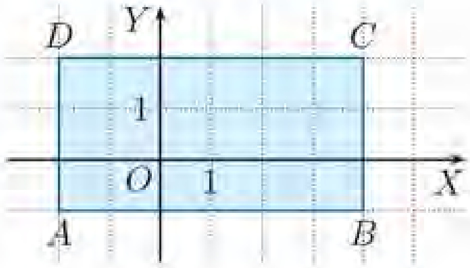


Figurę F' otrzymaną w wyniku przesunięcia figury F o wektor $\overrightarrow{v}$ nazywamy **obrazem** figury F w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v}$.

Ćwiczenie 6

Prostokąt $ABCD$ (rysunek obok) przesunięto o wektor $\overrightarrow{v}$ i otrzymano prostokąt $A'B'C'D'$. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

a) $\overrightarrow{v} = [-3, 2]$ b) $\overrightarrow{v} = [4\frac{1}{2}, -1]$



Zadania

1. Wyznacz współrzędne punktu B, mając dane punkt A i wektor $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(-3, 5)$, $\overrightarrow{AB} = [9, 0]$

b) $A(2, 2)$, $\overrightarrow{AB} = [-5, -2]$

c) $A\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[3, -\frac{3}{2}\right]$

d) $A(4, -1)$, $\overrightarrow{AB} = \left[-5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. Wyznacz współrzędne punktu A, mając dane punkt B i wektor $\overrightarrow{AB}$.

a) $B(0, 4)$, $\overrightarrow{AB} = [3, 4]$

b) $B(-2, 3)$, $\overrightarrow{AB} = [-3, 2]$

c) $B(-1, 2)$, $\overrightarrow{AB} = [14, -15]$

d) $B(1, 4)$, $\overrightarrow{AB} = [-22, -28]$

3. Sprawdź, czy wektor $\overrightarrow{u}$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ lub wektora $\overrightarrow{CD}$.

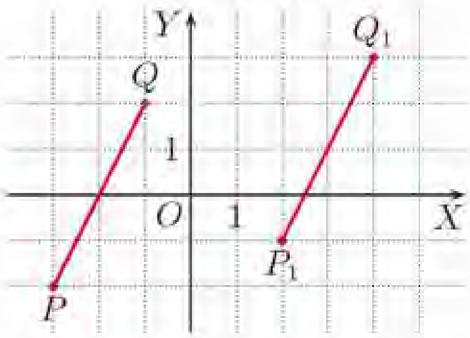
a) $\overrightarrow{u} = \left[7\frac{1}{2}, 6\right]$, $A(8, 4)$, $B\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $C\left(3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}\right)$, $D\left(-4, 3\frac{3}{4}\right)$

b) $\overrightarrow{u} = \left[-3, 2\frac{1}{6}\right]$, $A\left(-2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$, $C\left(\sqrt{3}, 2\frac{1}{6}\right)$, $D\left(\frac{6}{3-\sqrt{3}}, 0\right)$

4. a) O jaki wektor należy przesunąć odcinek PQ, aby otrzymać odcinek P_1Q_1?

b) Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[2, -2]$.

c) Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[-2, 1]$.



5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ otrzymujemy, przesuwając trójkąt ABC o wektor $\overrightarrow{v}$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów, jeśli:

a) $A(-5, -3)$, $B(4, -3)$, $C(1, 3)$, $\overrightarrow{v} = [-2, 1]$,

b) $A(-4, -3)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$, $\overrightarrow{v} = [-5, -1]$.

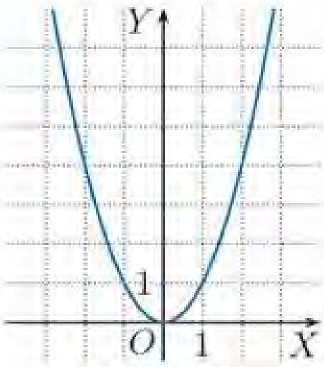
6. Dany jest równoległobok $ABCD$ taki, że $\overrightarrow{BC} = [-4, 4]$, $\overrightarrow{DC} = [9, 3]$ oraz $C(2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków: A, B i D. Oblicz pole części wspólnej równoległoboku $ABCD$ i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{v} = [3, 1]$.

4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

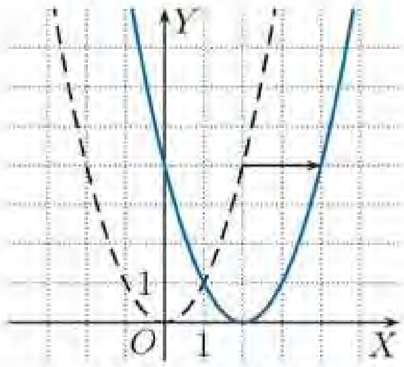
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x-2)^2 + 3$.

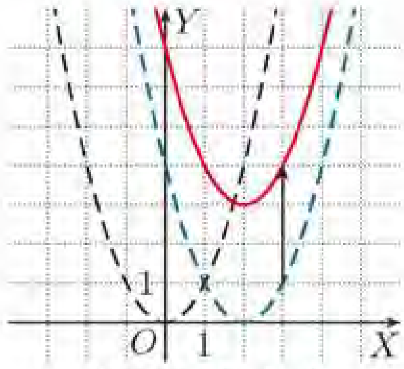
Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX, a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY.



Wykres funkcji
$y = x^2$

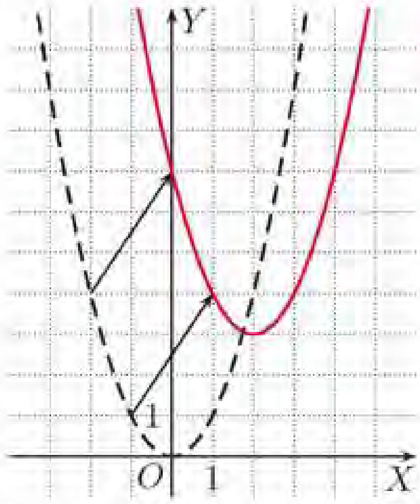


Wykres funkcji
$y = (x-2)^2$



Wykres funkcji
$y = (x-2)^2 + 3$

Zauważ, że wykres funkcji $y = (x-2)^2 + 3$ możemy otrzymać, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ jednocześnie o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w górę (rysunek obok). Mówimy, że wykres funkcji został przesunięty o wektor $[2, 3]$ – wektor ten nazywamy **wektorem przesunięcia**.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = x^2$, g i h. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji h?

a) $g(x) = (x-1)^2$, $h(x) = (x-1)^2 - 2$ b) $g(x) = (x+3)^2$, $h(x) = (x+3)^2 + 2$

Twierdzenie

> Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

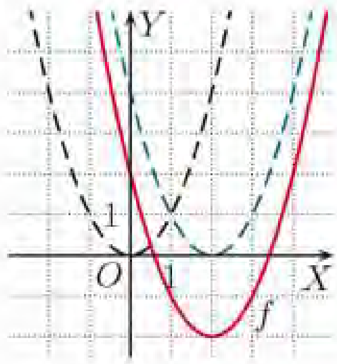
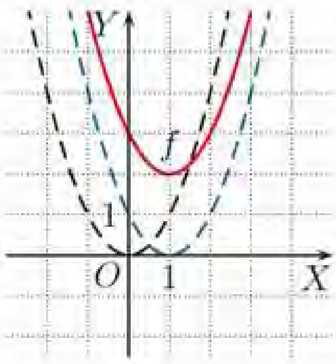
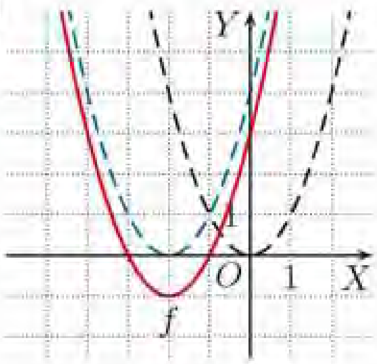
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ o odpowiedni wektor. Podaj ten wektor.

a) $f(x) = (x-2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x+3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x+1)^2 + 1$

Zadania

1. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f oraz wektor przesunięcia.

a) 
b) 
c) 

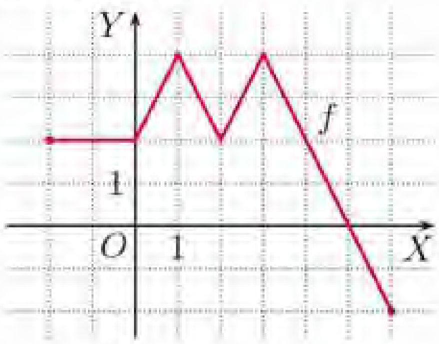
2. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = |x+2| + 3$ b) $f(x) = |x-2| - 3$ c) $f(x) = |x+1| - 2$

3. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g.

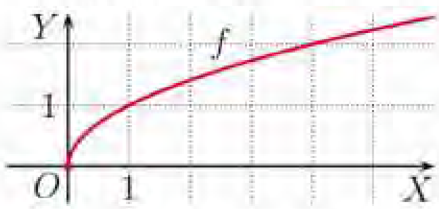
a) $f(x) = |2x| - 2$ i $g(x) = |x-1| + 1$

b) $f(x) = |2x+2| + 1$ i $g(x) = |x-2| + 1$



4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -2; 6\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g, odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant 0$.

a) $g(x) = f(x+2) - 2$ b) $g(x) = f(x-1) + 2$ c) $g(x) = f(x-2) - 4$



5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle 0; \infty) \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = \sqrt{x-1} + 3$ b) $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$ c) $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$

6. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -7; -1\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle 5; 8\rangle$. Wykres funkcji g powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\overrightarrow{v}$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.

a) $\overrightarrow{v} = [2, 3]$ b) $\overrightarrow{v} = [-3, -5]$ c) $\overrightarrow{v} = \left[-6\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}\right]$

7. Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = |x+2| - 3$. Wyznacz wektor przesunięcia, jeśli:

a) $g(x) = |x-3|$, b) $g(x) = |x| + 1$, c) $g(x) = |x+3| - 4$.

4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

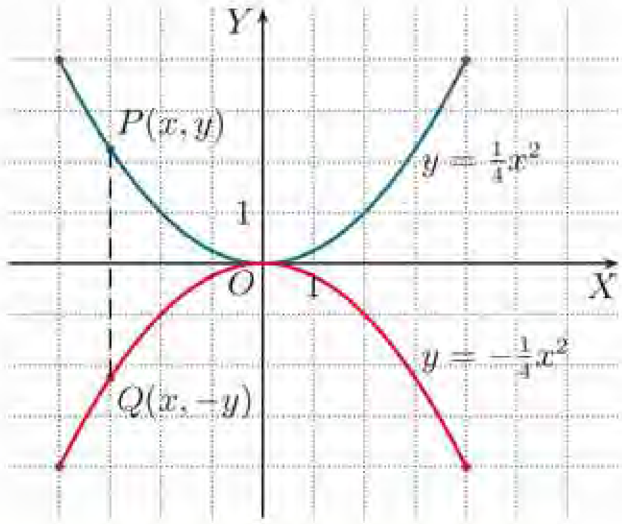
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in \langle -4; 4 \rangle$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX (jeden jest lustrzanym odbiciem drugiego) – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.

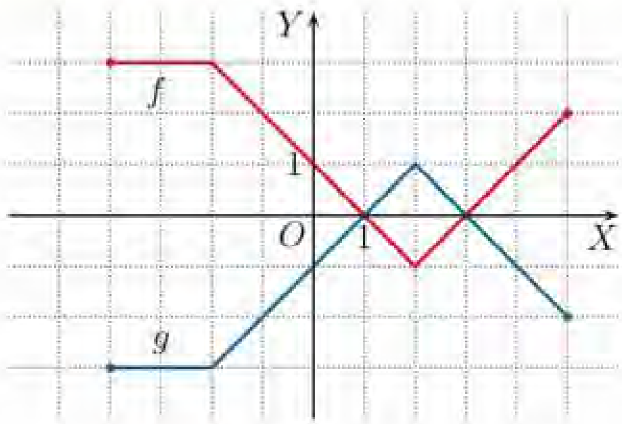


Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości każdej z tych funkcji.



Ćwiczenie 2

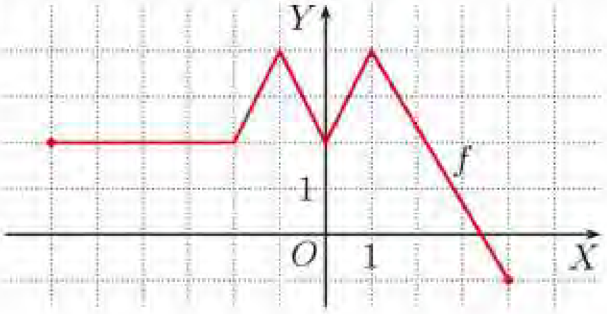
Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x|$ b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$

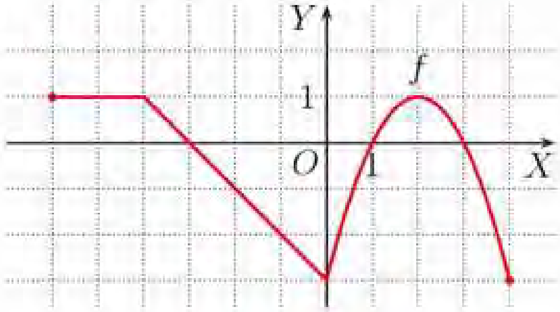
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -6; 4\rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g.

a)

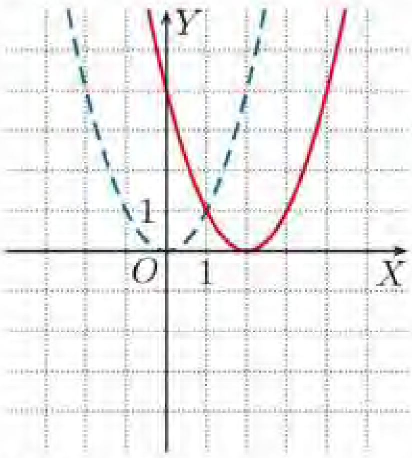


b)

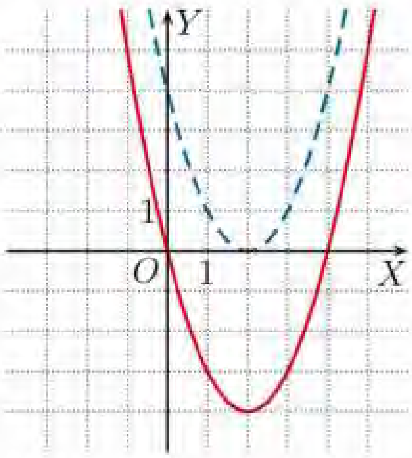


Przykład 2

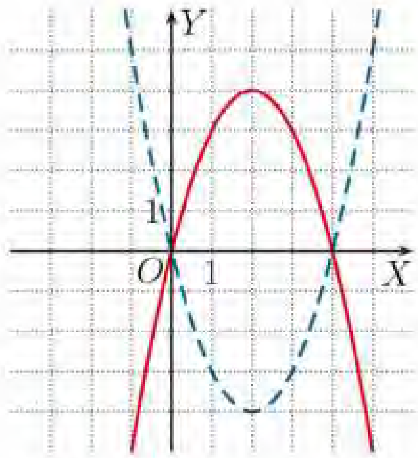
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(x-2) - 4$, $k(x) = -[f(x-2) - 4]$.



Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
$f(x) = x^2$
linią ciągłą – wykres funkcji:
$g(x) = (x-2)^2$



Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
$g(x) = (x-2)^2$
linią ciągłą – wykres funkcji:
$h(x) = (x-2)^2 - 4$



Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
$h(x) = (x-2)^2 - 4$
linią ciągłą – wykres funkcji:
$k(x) = -[(x-2)^2 - 4]$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy funkcji:

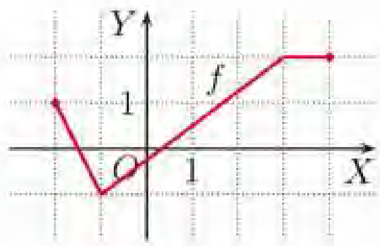
a) $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x-2) - 3$, $k(x) = -[f(x-2) - 3]$,

b) $g(x) = f(x+3)$, $h(x) = f(x+3) + 1$, $k(x) = -[f(x+3) + 1]$.

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = -f(x-1)$ b) $g(x) = -f(x+2)$



Przykład 3

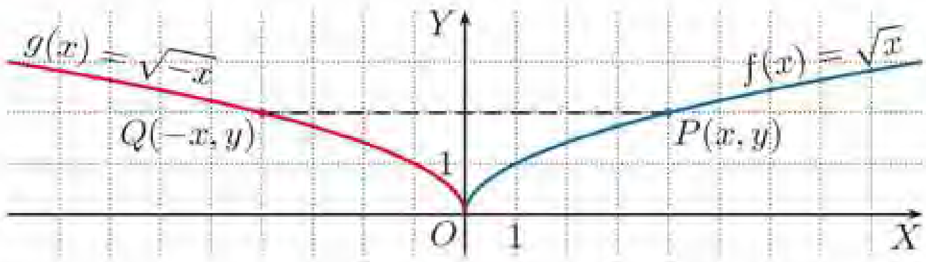
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f:\langle 0;\infty) \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x)=\sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g:(-\infty;0\rangle \to \mathbf{R}$ danej wzorem $g(x)=\sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$g(-4)=f(4)=2$

$g(-1)=f(1)=1$

$g\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$



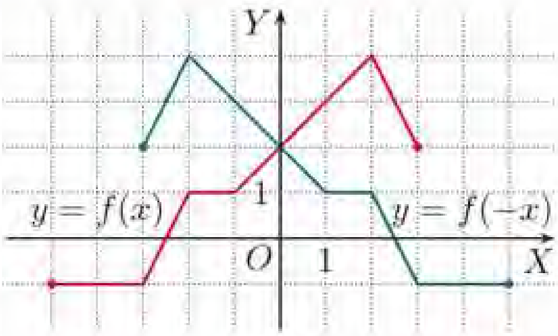
Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x,y)$ należącemu do wykresu funkcji f odpowiada punkt $Q(-x,y)$ należący do wykresu funkcji g.

Twierdzenie

> Wykres funkcji $y=f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y=f(x)$ względem osi OY.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y=f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y=f(-x)$ (kolor niebieski).



Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y=f(x)$ jest przedział $\langle -5;3\rangle$, a dziedziną funkcji $y=f(-x)$ jest przedział $\langle -3;5\rangle$.

Funkcje $y=f(x)$ i $y=f(-x)$ mają takie same zbiory wartości.

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie kolejno wykresy funkcji g i h.

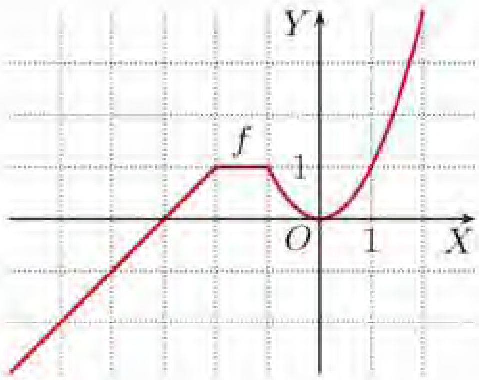
a) $f(x)=|x|,\ \ g(x)=f(x-2),\ \ h(x)=f(-x-2)$

b) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=f(x+2),\ \ h(x)=f(-x+2)$

Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{dla } x\in(-\infty;-2) \\ 1 & \text{dla } x\in\langle -2;-1\rangle \\ x^2 & \text{dla } x\in(-1;\infty) \end{cases}$$

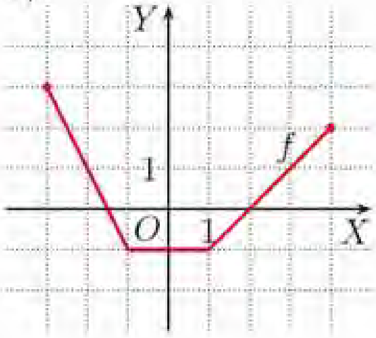


Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f(-x)$ i podaj jej wzór.

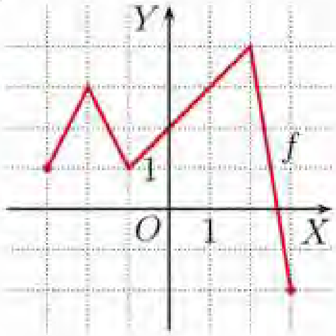
Zadania

1. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g.

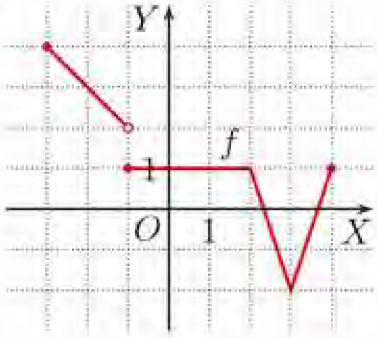
a)



b)



c)

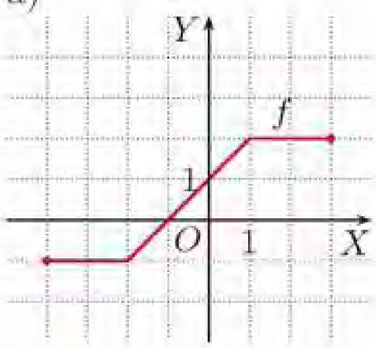


2. Naszkicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

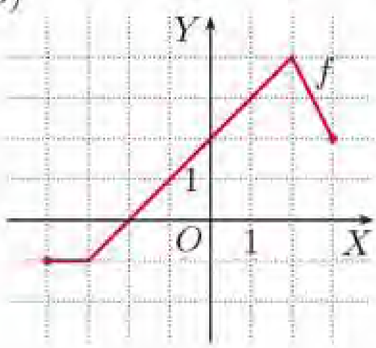
a) $f(x) = |x| - 1$ b) $f(x) = |x| + 2$ c) $f(x) = |x - 2|$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g.

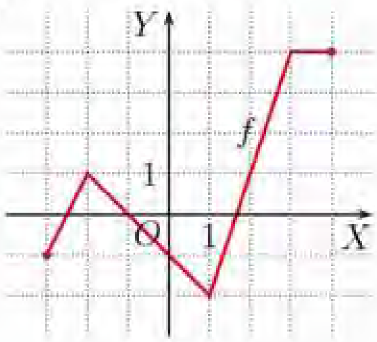
a)



b)



c)



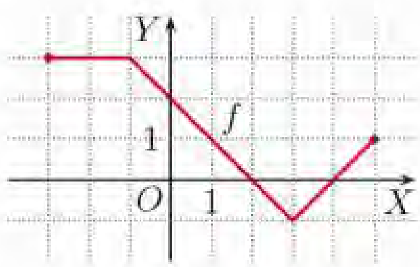
4. Naszkicuj wykresy funkcji f oraz funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = -f(-x)$. Podaj wzory funkcji g i h.

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x < -1 \\ |x| & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = f(-x-2)+1$

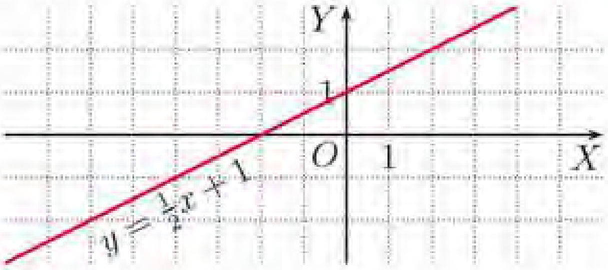
b) $g(x) = f(-x+2)$ d) $g(x) = -f(-x+1)$

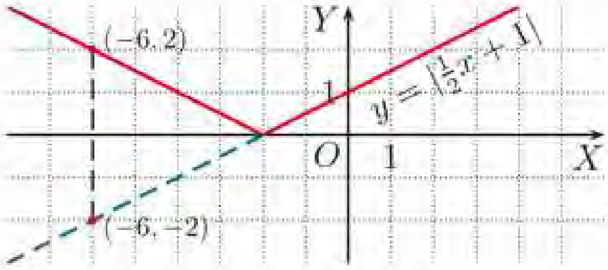


*4.12. Inne przekształcenia wykresu

Przykład 1

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x + 1$ i $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.





Zwróć uwagę, że punktowi $(-6, -2)$ należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x+1$ odpowiada położony symetrycznie względem osi OX punkt $(-6, 2)$ należący do wykresu funkcji $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.

> Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie względem osi OX tej części wykresu funkcji f, która znajduje się pod osią OX, pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.

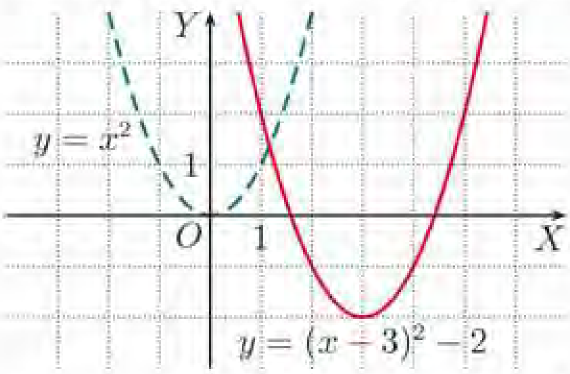
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

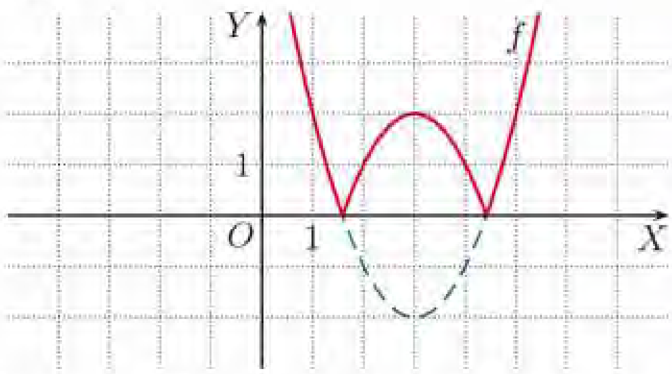
a) $f(x) = x - 2$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.



Po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^2$ o wektor $[3, -2]$ otrzymamy wykres funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$.



Następnie odbijamy symetrycznie względem osi OX fragment wykresu funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$, który znajduje się pod osią OX, i otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = |(x + 3)^2 - 1|$ b) $f(x) = ||x + 3| - 1|$ c) $f(x) = ||x| - 2|$

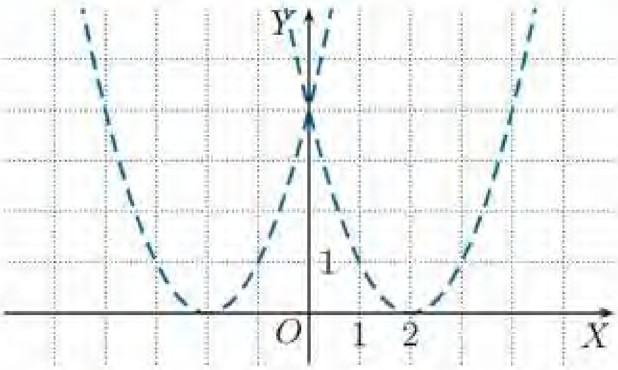
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

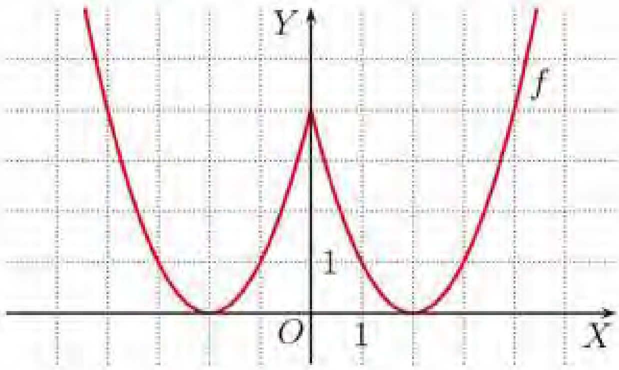
Skorzystamy z tego, że:

$$(|x| - 2)^2 = \begin{cases} (-x-2)^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ (x-2)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Zauważ, że $(-x-2)^2 = (x+2)^2$.

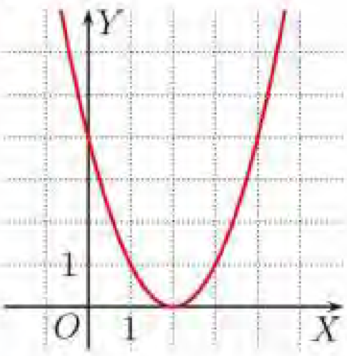


W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = (x+2)^2$ oraz $y = (x-2)^2$.

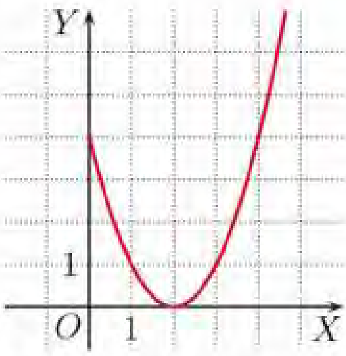


Odpowiednie fragmenty tych wykresów tworzą wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

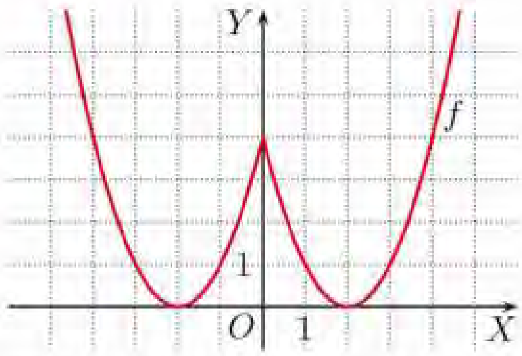
Zauważmy, że wykres funkcji $f(x) = (|x|-2)^2$ możemy też otrzymać w opisany poniżej sposób.



Szkicujemy wykres funkcji $y = (x-2)^2$.



Dla $x \geqslant 0$ wykresy funkcji f i $y = (x-2)^2$ się pokrywają.



Wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$ jest symetryczny względem osi OY.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji f, korzystając z tego, że:
- dla $x \geqslant 0$ (należących do dziedziny) zachodzi równość $f(|x|) = f(x)$,
- wykres funkcji $y = f(|x|)$ jest symetryczny względem osi OY.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f.

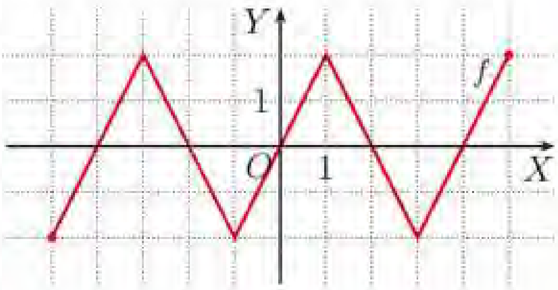
a) $f(x) = (|x| - 1)^2$ b) $f(x) = (|x| + 1)^2$ c) $f(x) = (|x| - 3)^2$

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $f(x) = 2|x| - 2$ c) $f(x) = -2|x| + 2$

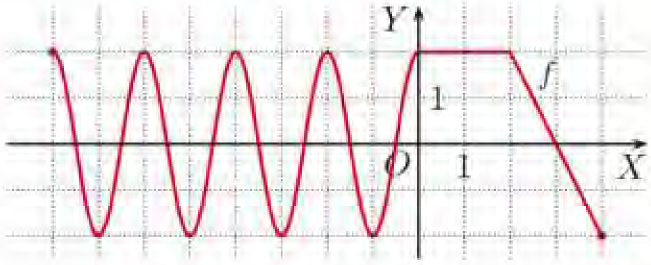
2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -5; 5\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = 1$.



a) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(-|x|)$

b) $g(x) = f(|x|)$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -8; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji:

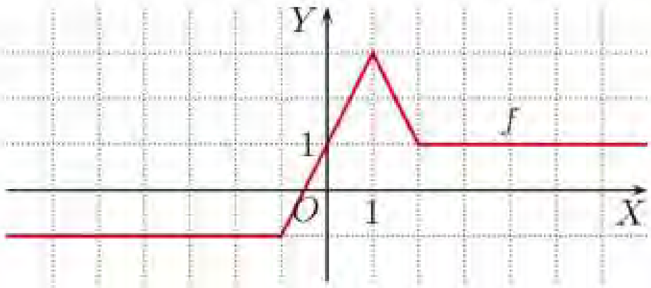


a) $y = f(|x|)$, b) $y = |f(|x|)|$.

4. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = (|x| - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = (|x| + 2)^2$ c) $f(x) = (1 - |x|)^2 - 4$

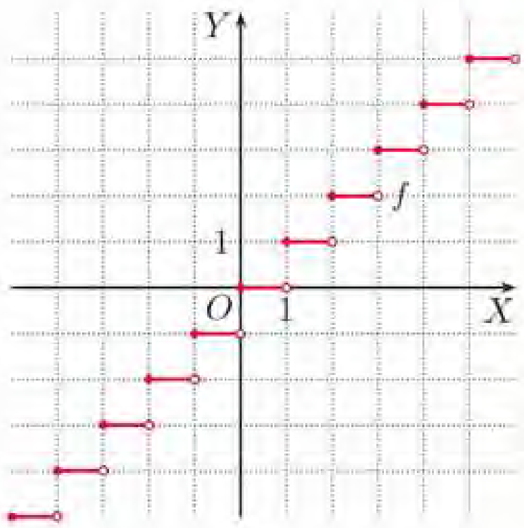
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g.



a) $g(x) = |f(x-1) - 2|$

b) $g(x) = f(|x| - 1) - 2$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x (np. $[-3\frac{1}{2}] = -4$, $[-3] = -3$, $[0{,}22] = 0$, $[3{,}7] = 3$).



a) Naszkicuj wykres funkcji $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $g(x) = x - [x]$.

b) Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $g(|x|) = g(x)$?

7. Naszkicuj wykres funkcji f.

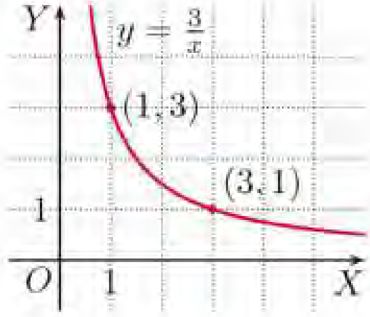
a) $f(x) = -[x]$ b) $f(x) = [-x]$ c) $f(x) = |[x]|$ d) $f(x) = [|x|]$

4.13. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

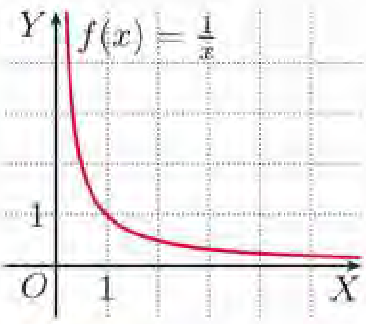
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

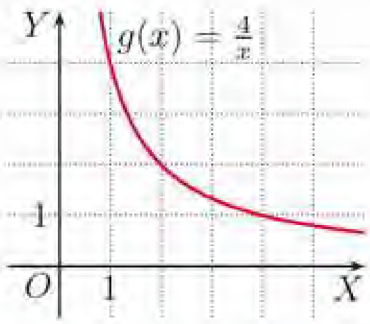
Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty $(1, 3)$ i $(3, 1)$.

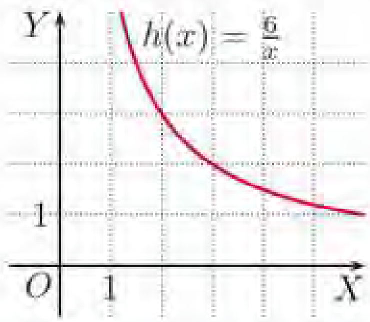


Ćwiczenie 1

Funkcje f, g i h, których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.







Definicja

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

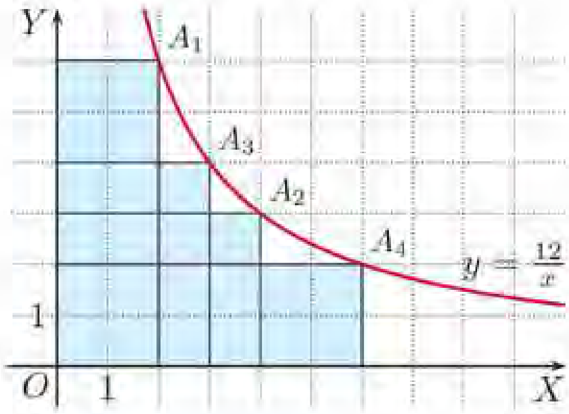
$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).

Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P. Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x, y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1, A_2, A_3 i A_4 tych prostokątów należą do wykresu funkcji $y = \frac{12}{x}$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność: $x \cdot y = 12$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich proporcjonalnie maleje druga.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – liczba [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y, które możemy kupić.
Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	?	?	?	?	1,5

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$, i zaznacz na nim punkty odpowiadające wartościom z tabeli.

Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres.

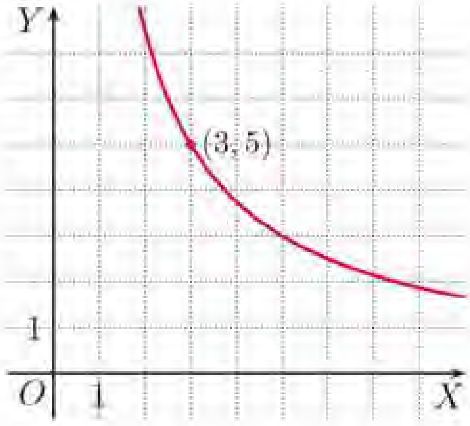
a)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	3,2	?	?

b)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	?	2,5	?

2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y, które można w tej cenie kupić.



a) Podaj wartość k.

b) Przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

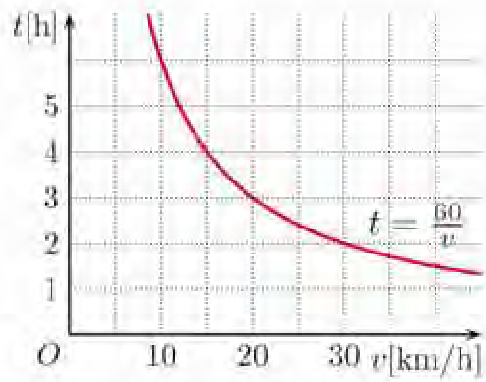
3. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{5}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$ d) $f(x) = \frac{18}{x}$

4. Rozważmy n-kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n-kąta od liczby boków dla $n \leqslant 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

Zależność między czasem t potrzebnym do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

5. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:



a) 15 km/h,
b) 18 km/h,
c) 24 km/h,
d) 25 km/h?

6. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naszkicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

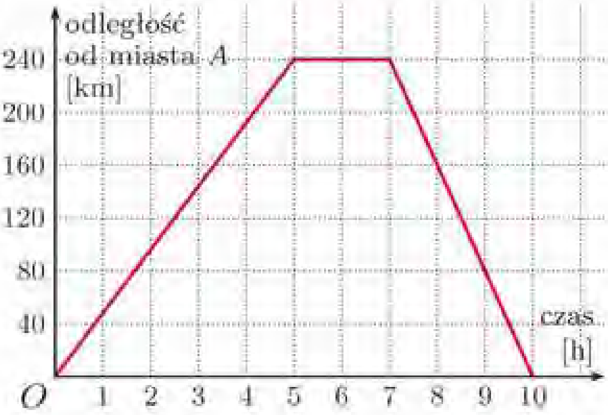
4.14. Zagadnienia uzupełniające

Prędkość, droga, czas

1. Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 240 km miasta B i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu, podaj średnią prędkość przejazdu:

a) z miasta B do miasta A,

b) całej trasy bez postoju.

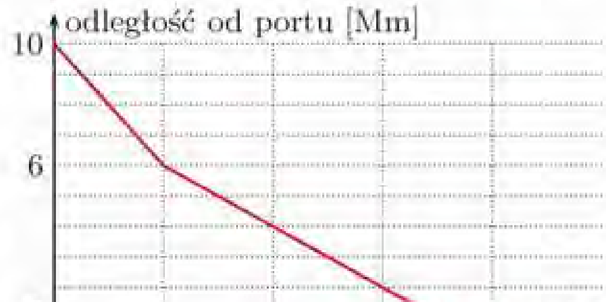


2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniała się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.

a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.

b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby $11\frac{1}{2}$ godziny?

3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie pokazano, jak zmieniała się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.

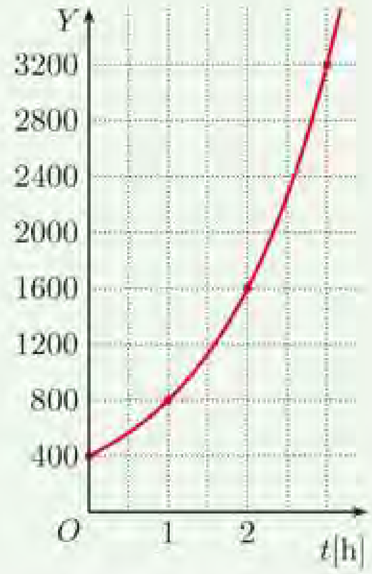


Inny jacht, będący 10 mil morskich od portu, płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie – z prędkością 6 węzłów. Naszkicuj wykres przedstawiający zmiany odległości tego jachtu od portu w zależności od czasu. Po jakim czasie dotarł on do portu?

Wzrost wykładniczy i funkcja wykładnicza

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 400 bakterii, następnie stwierdzono, że ich liczba podwajała się w ciągu godziny. Funkcja $y = 400 \cdot 2^t$ (wykres obok) opisuje liczbę bakterii po upływie czasu t mierzonego w godzinach. Na przykład po 2 godzinach liczba bakterii wynosiła $400 \cdot 2^2 = 1600$, a po upływie 2 godzin i 30 minut liczba bakterii wzrosła do $400 \cdot 2^{2,5} \approx 2263$. W tabeli podano wartości funkcji $y = 400 \cdot 2^t$ dla wybranych argumentów.



t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = 400 \cdot 2^t$	800	1131	1600	2263	3200	4525

W opisie doświadczenia wykorzystana została funkcja $f(t) = 2^t$. Funkcje opisane wzorem $y = a^x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in \mathbf{R}$, noszą nazwę **funkcji wykładniczych**.

D **4.** Podczas pewnego doświadczenia liczba bakterii, których początkowo było 600, podwajała się w ciągu pół godziny. Uzasadnij, że funkcja $y = 600 \cdot 4^t$ opisuje liczbę bakterii w zależności od czasu t mierzonego w godzinach i uzupełnij tabelę.

Czas t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba bakterii y	?	?	?	?	?	?	?	?

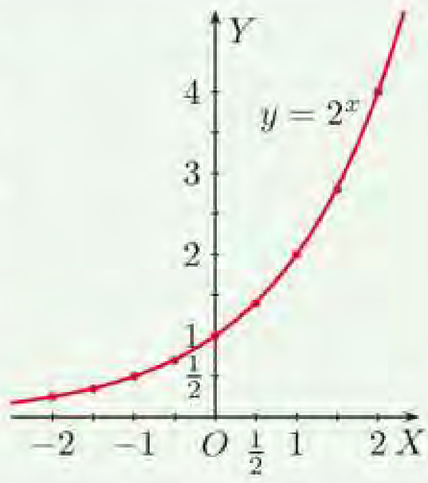
5. W pewnym doświadczeniu badano liczebność kolonii bakterii. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Wyznacz stałą a, jeśli początkowo było 1500 bakterii, a po 8 godzinach ich liczba wzrosła do 24 000. Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii będzie równa 96 000?

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zaznaczone zostały punkty odpowiadające danym z tabeli (wartości funkcji podano z dokładnością do 0,01), które połączono krzywą, jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
2^x	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

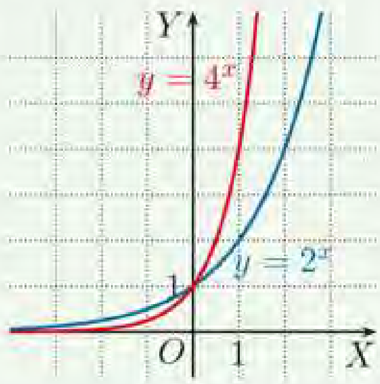


6. Podaj wartość funkcji $y = 2^x$ dla argumentu:

a) 3, b) 4, c) 10, d) -10.

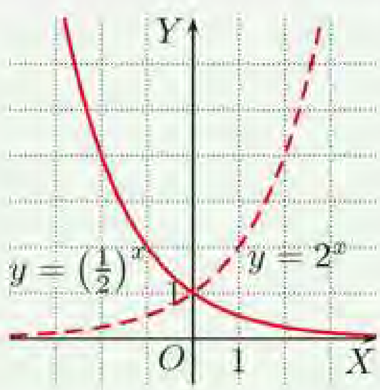
Wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = 4^x$ dla porównania umieszczono w tym samym układzie współrzędnych.

Zauważmy, że dowolna funkcja określona wzorem $y = a^x$, gdzie $a > 1$, jest funkcją rosnącą. W przypadku zjawisk opisywanych za pomocą takich funkcji mówimy o **wzroście wykładniczym**.



7. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = 3^x$, a następnie naszkicuj jej wykres.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Funkcja ta jest funkcją malejącą. Jej wykres możemy otrzymać przez symetryczne odbicie względem osi OY wykresu funkcji $y = 2^x$ (uzasadnij).
Funkcja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wykorzystywana jest przy opisie zjawiska rozpadu promieniotwórczego.

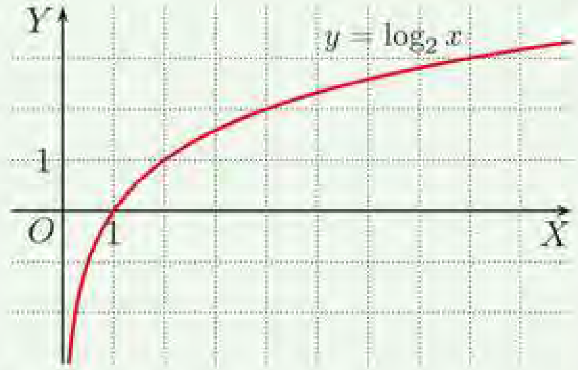


8. a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $1 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4} \leqslant g(x) \leqslant 4$.

Funkcja logarytmiczna

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji opisanej wzorem $y = \log_2 x$. Zaznaczone punkty odpowiadają wartościom z tabeli.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

Funkcje opisane wzorem $y = \log_a x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in (0; \infty)$, noszą nazwę **funkcji logarytmicznych**.

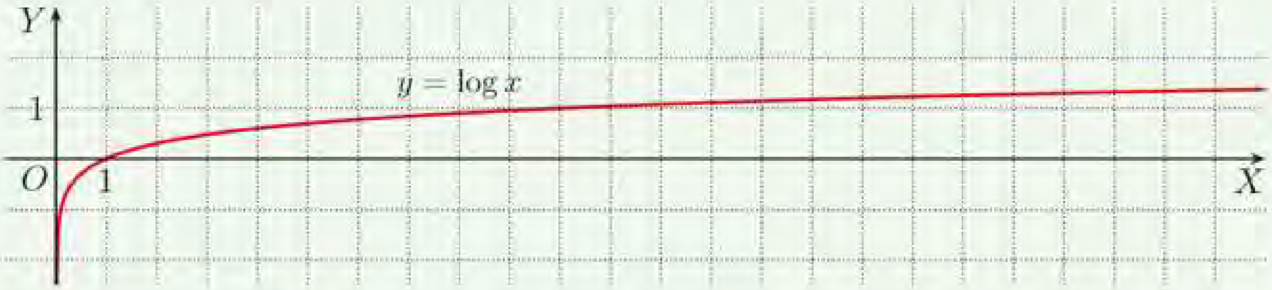
9. Dla jakiego argumentu x funkcja $y = \log_2 x$ przyjmuje wartość równą:

a) 4, b) 5, c) 10, d) $\frac{1}{2}$?

10. Wykresy funkcji $y = \log_2 x$ i $y = \log_4 x$ umieszczono dla porównania w tym samym układzie współrzędnych (rysunek obok). Podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z tych funkcji.

11. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = \log_3 x$, a następnie naszkicuj jej wykres.

Poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = \log x$.



Zauważ, że funkcja $y = \log x$ (oraz dowolna funkcja $y = \log_a x$, gdzie $a > 1$) jest funkcją rosnącą. Jednak jest to wzrost bardzo powolny.

12. Dla jakich argumentów x funkcja $y = \log x$ osiąga wartości większe od:

a) 2, b) 3, c) 6, d) 10?

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej iloczyn jej cyfr.

a) Jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość funkcji f?

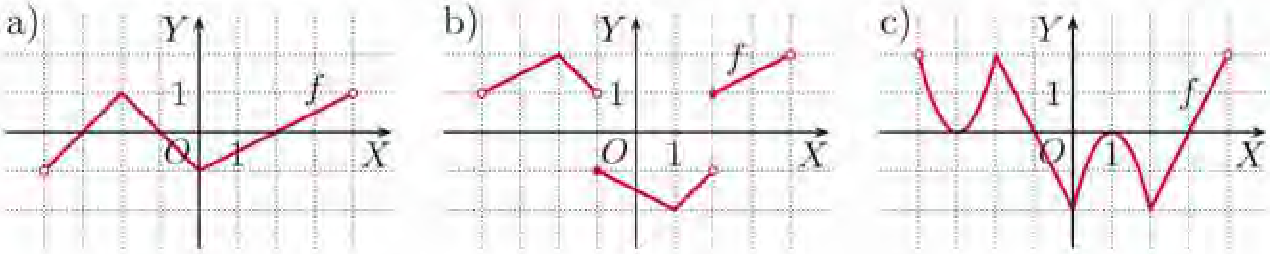
b) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 12, a dla ilu 16?

c) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartości parzyste?

2. Naszkicuj wykres funkcji $f : X \to \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = |x| - 1$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

a) $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ b) $X = (-\infty; 2)$ c) $X = \langle -3; -1\rangle \cup \langle 2; 4)$

3. Dany jest wykres funkcji $f : (-4; 4) \to \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności, miejsca zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



4. Naszkicuj wykres funkcji f, przesuwając wykres funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ o wektor.

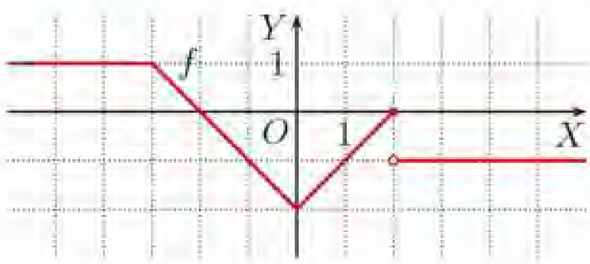
a) $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}|x + 3| + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$

5. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g.

a) $f(x) = |2x| - 1$, $g(x) = |x + 2|$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$, $g(x) = |x + 3| - 6$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| - 2 & \text{dla } x \in \langle -3; 2) \\ -1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej wzór, a następnie odczytaj z wykresu rozwiązanie:

a) równania $g(x) = 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$,

b) równania $g(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant 1$,

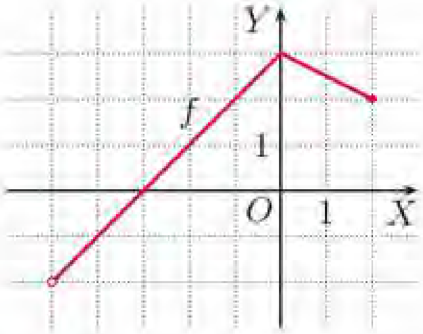
c) równania $g(x) = -1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant -1$.

Zestaw II

1. Dziedziną funkcji f (rysunek obok) jest przedział $\langle -5; 2\rangle$. Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = f(x-3)$ c) $g(x) = -f(x+2)$

b) $g(x) = f(2-x)$ d) $g(x) = -f(1-x)$



2. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g.

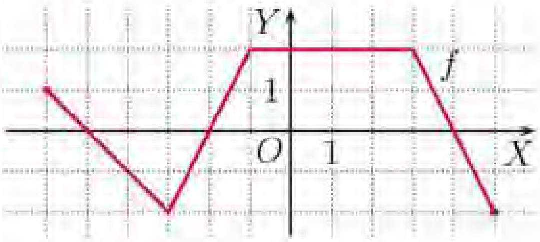
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 3\rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ -5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

3. Liczby: -1, $-\frac{1}{2}$, 3 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$. Podaj wzór i miejsca zerowe funkcji g.

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x+1)$ c) $g(x) = f(1-x)$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f : \langle -6; 5\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej miejsca zerowe.

a) $g(x) = -f(-x)$ b) $g(x) = -|f(x)|$



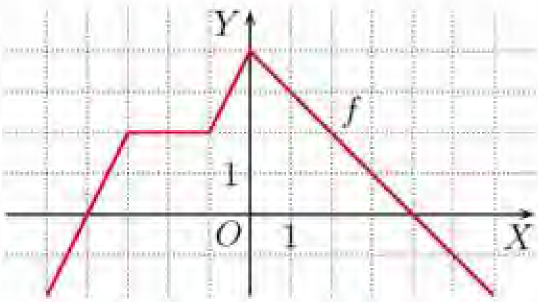
5. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie, a dla jakich – trzy rozwiązania?

a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x < -2 \\ |x| & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8-x & \text{dla } x > 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x+2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji:

a) $y = f(x)$ i $y = -f(x)$,

b) $y = f(-x)$ i $y = |x|$.



D **7.** Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a.

Przykład 1

Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x+3 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ -2x+8 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

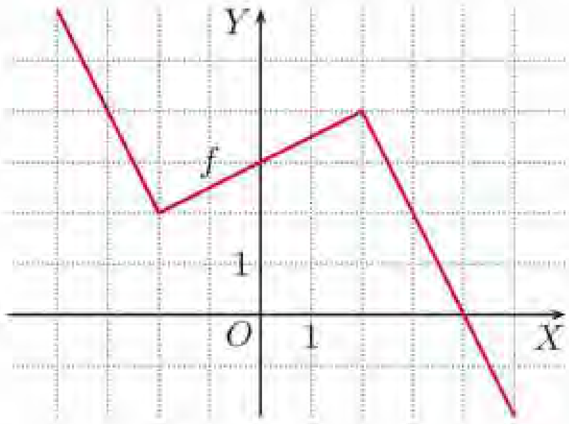
Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

• Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$-2x-2=0$, skąd $x=-1$, ale $-1 \notin (-\infty; -2)$

$\frac{1}{2}x+3=0$, skąd $x=-6$, ale $-6 \notin \langle -2; 2)$

$-2x+8=0$, skąd $x=4 \in \langle 2; \infty)$



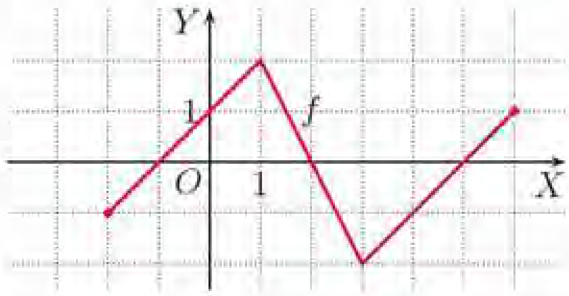
Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f, jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4.

Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

• Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B

Przykład 2



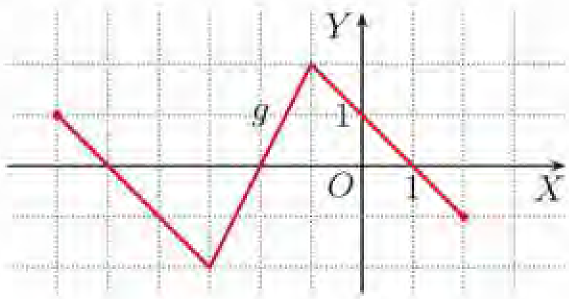
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -2; 6\rangle \to \mathbf{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa:

A. -2, **B.** -4, **C.** -6, **D.** -8.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

• Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -1, 2, 5. Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: 1, -2, -5. Ich suma jest równa -6.

• Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: -5, -2 i 1. Ich suma jest równa -6.



Odpowiedź: C

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas:

A. $a > f(29)$, **B.** $a = f(59)$, **C.** $a < f(89)$, **D.** $a = f(149)$.

2. Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji:

A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$, **B.** $y = x^3 - \frac{27}{8}$, **C.** $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$, **D.** $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$.

3. Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem:

A. $y = \sqrt{x+2}$, **B.** $y = x^2 - 2$, **C.** $y = x^3 + 8$, **D.** $y = \frac{2}{x} + 1$.

4. Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt:

A. $A(-2, 0)$, **B.** $B(4, 6)$, **C.** $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, **D.** $D(-4, -8)$.

5. Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt:

A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$, **C.** $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$,
B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$, **D.** $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$.

6. Jeśli $D_f = \langle -5; 3 \rangle$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(-x+1)$ jest zbiór:

A. $\langle -2; 6 \rangle$, **B.** $\langle -3; 5 \rangle$, **C.** $\langle -4; 4 \rangle$, **D.** $\langle -6; 2 \rangle$.

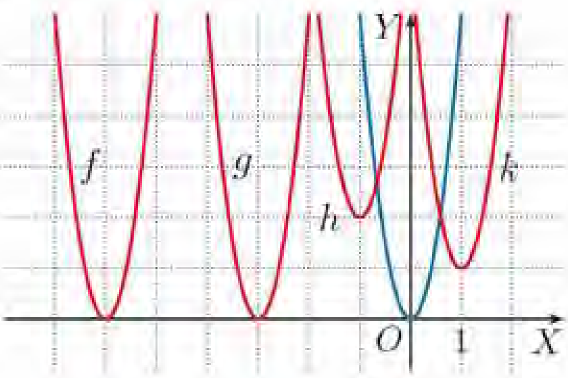
7. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

8. Wykresy funkcji: f, g, h, k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem:

A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$,
B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$,
C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$,
D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$.



9. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa:

A. -9, **B.** -7, **C.** 7, **D.** 9.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f danej wzorem $f(x) = \begin{cases} -3x+5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x+3 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty: $(-6,4)$, $(-3,2)$, $(1,2)$ i $(4,-5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f\left(-2\sqrt{2}\right)$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -3;6\rangle \to \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x-2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -3, 2 i 4. Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x+6)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

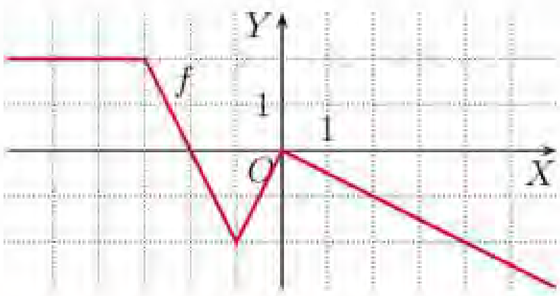
Dana jest funkcja $f(x) = 2x+2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x-4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h.

Zadanie 7 (4 pkt)

Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant 0$.



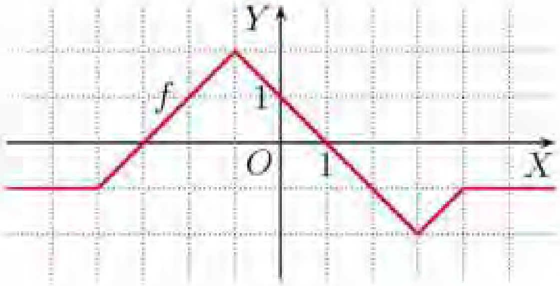
W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji:

$$g(x) = f(x - 3\sqrt{2}) - 1$$

Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku sumy liczb x_1 i x_2.



Zadanie 2 (2 pkt)

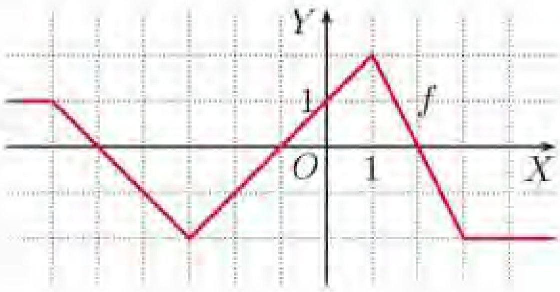
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = |x - 2| - 6$ o wektor $\overrightarrow{v} = [0, \sqrt{3}]$. Funkcja g ma dwa miejsca zerowe. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku większego spośród miejsc zerowych funkcji g.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wykres funkcji $g(x) = 6(x-8)^2 + 7$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = 6(x+9)^2 - 12$ o wektor $[a, b]$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby $a \cdot b$.

Zadanie 4 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(-x)|$. Podaj rozwiązanie nierówności $g(x) \geqslant 2$.



Zadanie 5 (3 pkt)

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji:

$$f(x) = |x + 4| - 2 \quad \text{i} \quad g(x) = -|x + 3| + 5$$

Oblicz pole figury ograniczonej tymi wykresami.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = f(-x) - 3$. Podaj rozwiązanie równania $g(x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 3 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty) \end{cases}$$

Zadanie 7 (4 pkt)

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 2|x| - 2$ i $g(x) = (|x| - 1)^2$. Podaj rozwiązanie nierówności $2|x| - 2 \leqslant (|x| - 1)^2$.

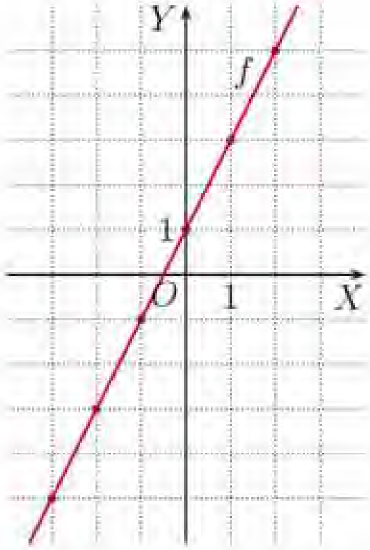
5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest niezwykle istotny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę przy ustalaniu stopnia trudności trasy narciarskiej.
Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynieryjnych, takich jak budowa dróg czy kolei.
O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a.

5.1. Wykres funkcji liniowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.



Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

> Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Uwaga. Stała oznacza ustaloną liczbę rzeczywistą.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$. Powiemy też krótko: prosta $y = ax + b$.

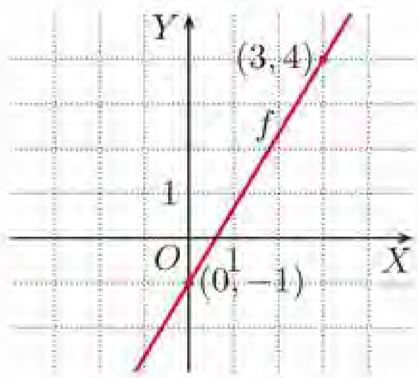
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.
Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.
Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f.



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f. Naszkicuj ten wykres.

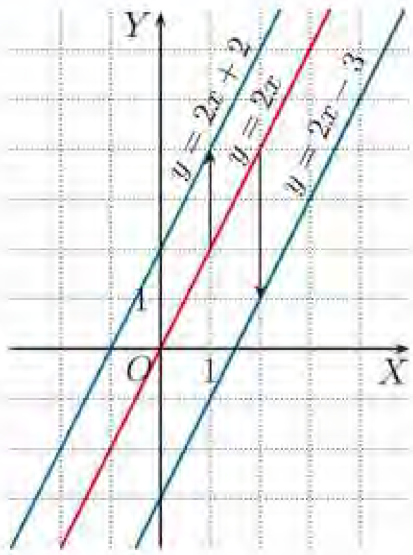
a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

> Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY.



Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$.

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f.

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Twierdzenie

> Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Podane powyżej twierdzenie można też sformułować następująco:

> Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \ldots, l_8$ są równoległe?

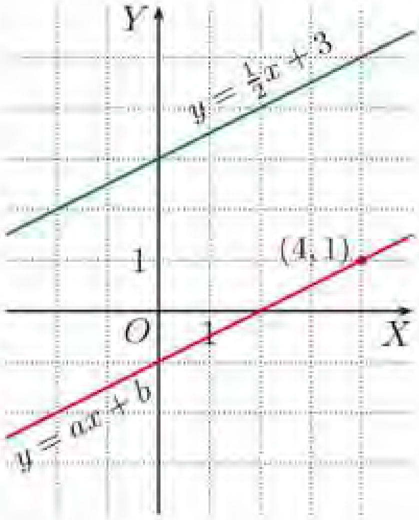
$l_1\colon y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3\colon y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5\colon y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7\colon y = 1 - 2x$

$l_2\colon y = 2x - 3$ $l_4\colon y = 4 + 2x$ $l_6\colon y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8\colon y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Uwaga. Zapis „l: $y = ax + b$" czytamy „prosta l o równaniu $y = ax + b$".

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4,1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.



Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$. Aby wyznaczyć współczynnik b, podstawiamy współrzędne punktu $P(4,1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P.

a) $l\colon y = 2x - 4,\ \ P(3,7)$ b) $l\colon y = -\frac{2}{3}x + 3,\ \ P(3,-4)$

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 5

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0,2)$.

Ćwiczenie 6

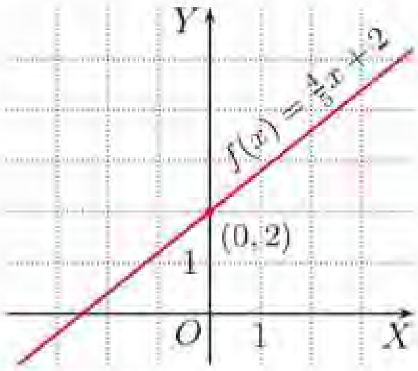
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$, jeśli wiadomo, że:

a) $a = 0,\ b = 1$, b) $a = 0,\ b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0,\ b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY.

Przykład 6

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY.



Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY. Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0,2)$.

Uwaga. Odcięta punktu to jego pierwsza współrzędna, rzędna – to druga współrzędna.

Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Ćwiczenie 7

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P.

a) $l\colon y = 3x - 4$, $P(0, 6)$

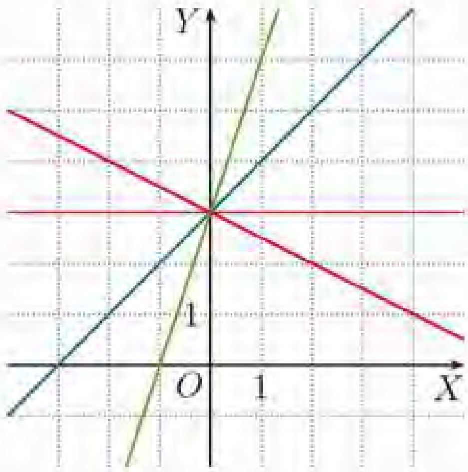
b) $l\colon y = -\frac{3}{4}x + 1$, $P\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$f_1(x) = x + 3$, $\quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3$,

$f_2(x) = 3$, $\quad f_4(x) = 3x + 3$.



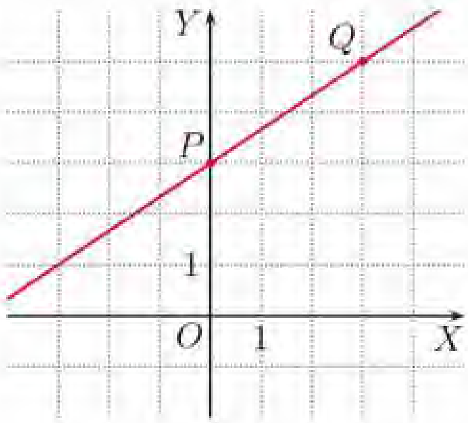
a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 7

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.



Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a, podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i otrzymujemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji: $y = \frac{2}{3}x + 3$.

Ćwiczenie 9

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q. Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$

b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Zadania

1. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \ldots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0,2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0,-1)$.

l_1: $y = 3x + 2$	l_3: $y = -1$	l_5: $y = -2x + 2$	l_7: $y = \frac{1}{2}x - 1$
l_2: $y = 3x - 1$	l_4: $y = 2$	l_6: $y = -2x - 1$	l_8: $y = \frac{1}{2}x + 2$

2. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym wzorze i przechodząca przez punkt P.

a) $y = 4x - 2$, $P(0,5)$

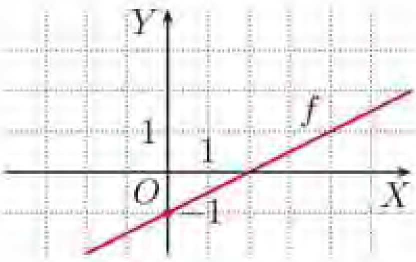
b) $y = -3x + 4$, $P(1,8)$

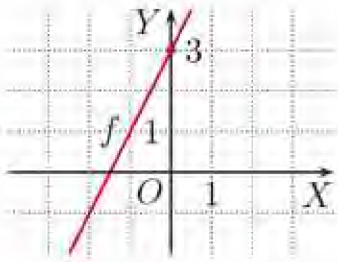
c) $y = -\frac{4}{3}x + 6$, $P(-6,5)$

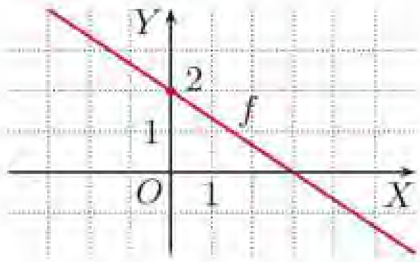
d) $y = \sqrt{3}x - 3$, $P(2\sqrt{3}, 6)$

3. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f, jeśli należy do niego punkt P.

a) $P(8,3)$, $Q(16,9)$ b) $P(-6,-9)$, $Q(7,19)$ c) $P(9,-4)$, $Q\left(8, -3\frac{1}{3}\right)$





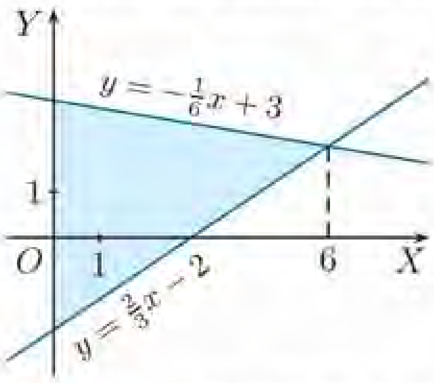


4. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0,4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

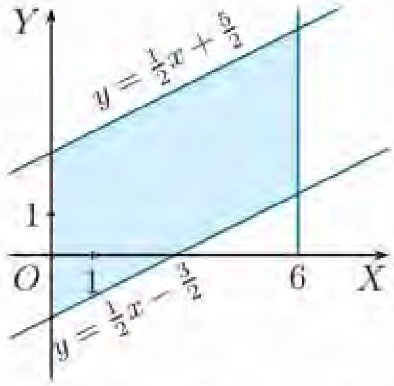
a) $P(2,6)$ b) $P(-6,1)$ c) $P(5,-11)$ d) $P\left(\frac{3}{4}, -2\right)$

5. Oblicz pole zacieniowanej figury.

a)



b)



D **6.** Wykaż, że punkt $(0,0)$ jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x$.

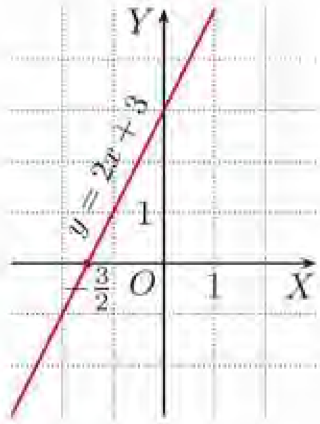
D **7.** Wykaż, że do wykresu funkcji $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

Wskazówka. Przeprowadź dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

5.2. Własności funkcji liniowej

Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Można je wyznaczyć, rozwiązując równanie $2x + 3 = 0$.



> Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

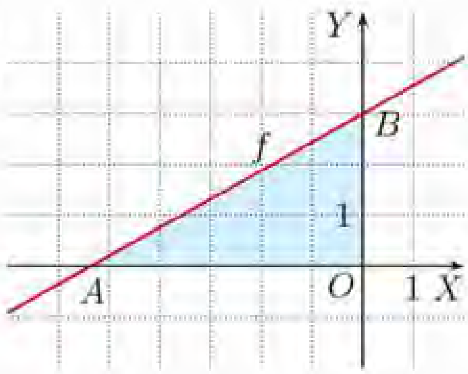
Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a, b funkcja $f(x) = ax + b$:

a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 1

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).



Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f:

$\frac{9}{16}x + 3 = 0$ dla $x = -\frac{16}{3}$. Zatem $|OA| = \frac{16}{3}$.

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB:

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$

Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f.

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

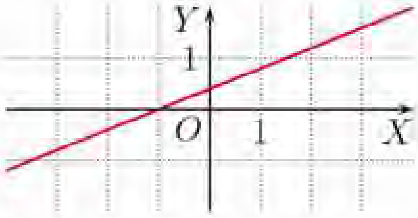
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$

d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.

> Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

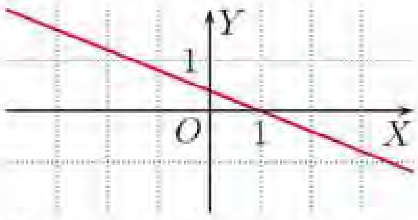
Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ ax_1 &< ax_2 \\ ax_1 + b &< ax_2 + b \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.



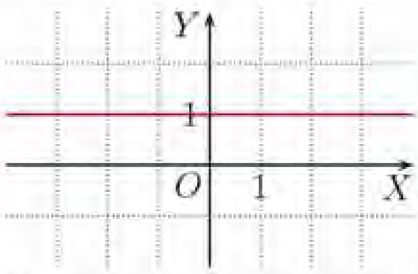
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.

> Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

> Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX.

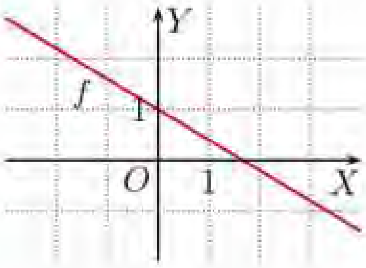
Ćwiczenie 6

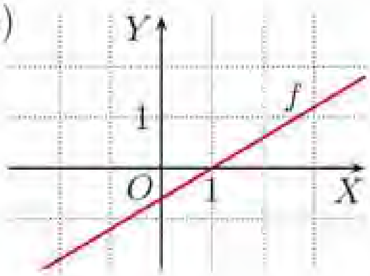
Określ monotoniczność funkcji f.

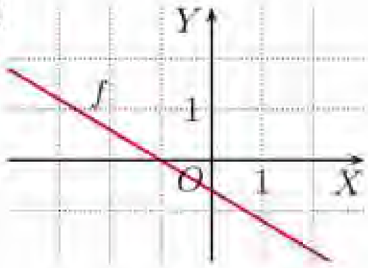
a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b.

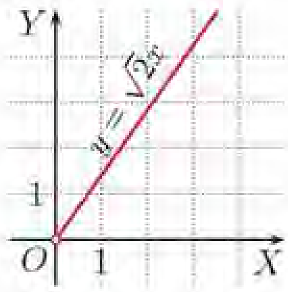
a) 

b) 

c) 

Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a > 0$ jest stałą, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności**.



Przykład 2

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.

Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

a) Długość boku kwadratu i jego obwód.

b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P.

c) Obwód i promień okręgu.

d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P.

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie przerysuj do zeszytu i uzupełnij poniższą tabelę. Naszkicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	?	?

b)

x	1	1,8	?
y	?	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	?	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	?

Zadania

1. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta:

a) $y = -\frac{3}{2}x + 1$, c) $y = -8x - 3$, e) $y = (1 - \sqrt{2})x + 3$,
b) $y = 4x + 1$, d) $y = 12x - 1$, f) $y = -5$?

2. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$, gdy:

a) $m = \sqrt{3} - 2$, b) $m = 5 - 2\sqrt{5}$, c) $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.

3. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m.

a) $f(x) = (5 - m)x$ b) $f(x) = (1 + 5m)x$ c) $f(x) = (|m| - 1)x$

4. Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty:

a) $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$, b) $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$, c) $\left(\frac{2}{3}, -8\right)$ i $\left(\frac{3}{5}, -7\right)$.

5. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli:

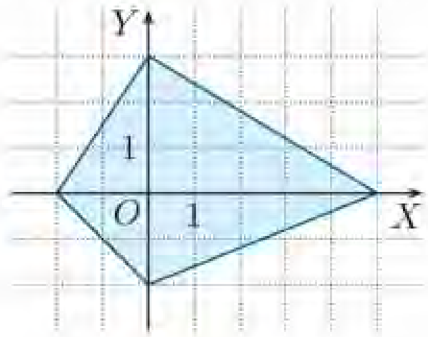
a) do jej wykresu należy punkt $(0, 4)$ i przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x < -6$,

b) do jej wykresu należy punkt $(0, -2)$ i przyjmuje ona wartości nieujemne tylko dla $x \leqslant -4$.

6. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się:

a) boki przedstawionego obok czworokąta,

b) boki czworokąta o wierzchołkach: $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.



7. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli trójkąt ograniczony jej wykresem i osiami układu współrzędnych jest równoramienny oraz:

a) funkcja ta przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 3$,

b) do wykresu tej funkcji należy punkt $(0, -4)$.

8. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym: a) 6, b) $10\frac{1}{2}$, c) $9\sqrt{2}$.

9. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym:

a) 6, b) $4\frac{1}{2}$, c) $3\sqrt{2}$.

5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

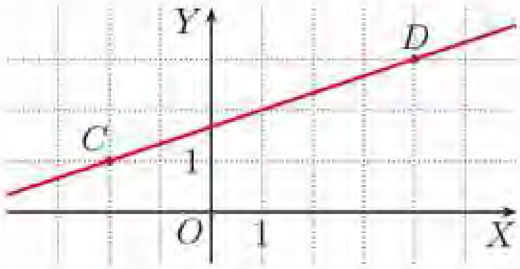
Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.



Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

Równania układu otrzymujemy, podstawiając współrzędne punktów C i D do równania $y = ax + b$.

Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.
Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D.

a) $C(-1, -5)$, $D(3, 3)$ b) $C(-2, 4)$, $D(8, -1)$ c) $C(-3, -3)$, $D(6, 3)$

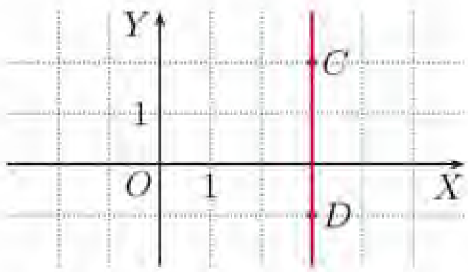
Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.

a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$
c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 2

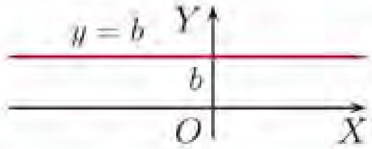
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.



Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Uwaga. Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 3

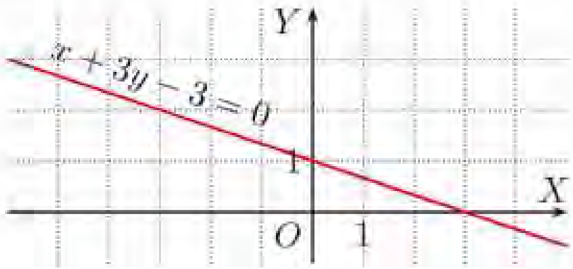
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D. Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

a) $C(-3,4)$, $D(-3,6)$ b) $C(-5,-3)$, $D(7,-3)$ c) $C(8,-2)$, $D(8,6)$

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 5

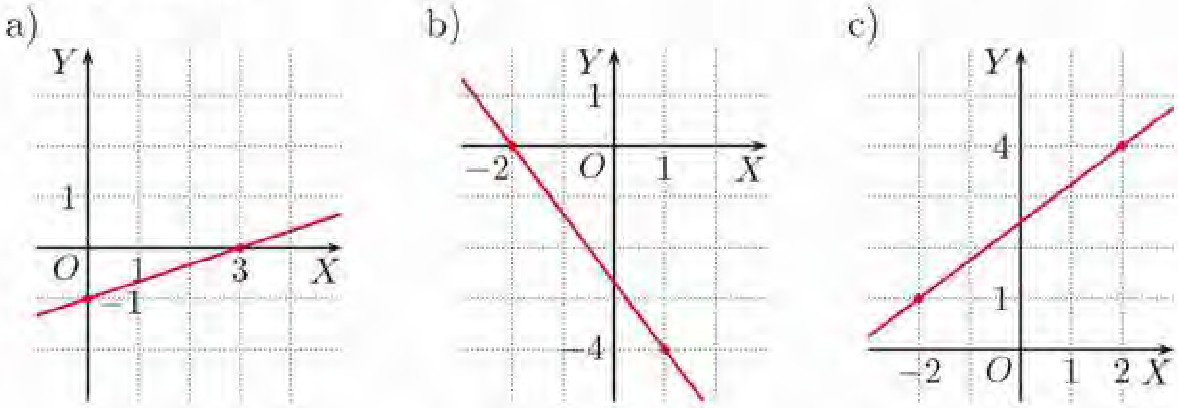
Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

$l\colon -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n\colon 9x - 12y + 12 = 0$ $p\colon 3x - 4y + 4 = 0$

$m\colon -3x + 4y + 4 = 0$ $o\colon 6x - 8y + 12 = 0$ $r\colon -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

Zadania

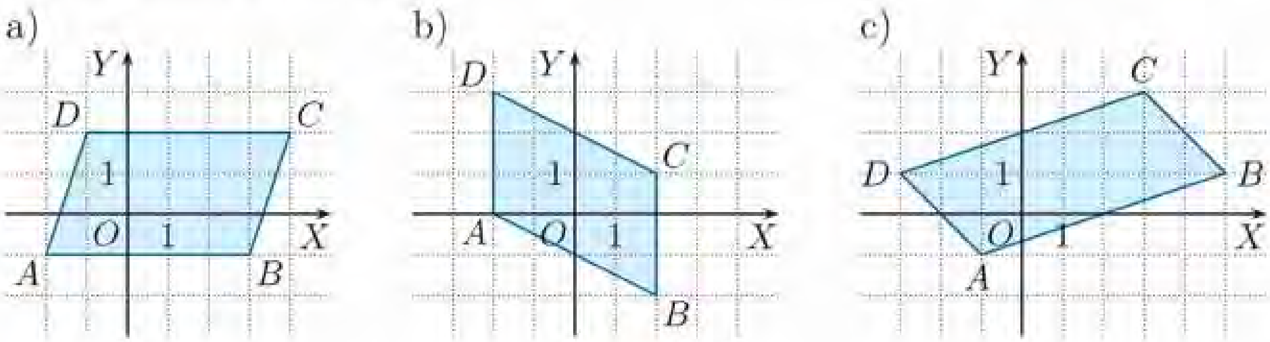
1. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B\left(-3, \frac{8}{3}\right)$ należy do tej prostej?



2. Naszkicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$
b) $10x + 5y - 5 = 0$
c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$
d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$
e) $-4\left(y - \frac{1}{4}x\right) = 16$
f) $2\left(1 - \frac{1}{3}y\right) - 4x = 0$

3. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.



4. Dla jakiej wartości parametru m prosta o podanym równaniu jest równoległa do prostej $4x + 3y + 7 = 0$?

a) $mx + 6y - 1 = 0$
b) $(2m + 1)x - y = 0$
c) $(m - \frac{1}{2})x - \frac{1}{2}y = 0$
d) $\frac{m}{6}x - \frac{3}{4}y + 3 = 0$
e) $x + my + 9 = 0$
f) $\frac{1}{3}x - 2my = 0$

D **5.** Uzasadnij podane poniżej twierdzenie.

> Jeśli równania ogólne $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ opisują tę samą prostą oraz A_2, B_2 i C_2 są różne od zera, to $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

6. Podstawy trapezu są zawarte w prostych l_1 i l_2. Korzystając z informacji podanej w ramce, wyznacz wartości parametru m.

a) $l_1: -6x + 4y + 3 = 0$,
$l_2: mx + (m+1)y - 4 = 0$

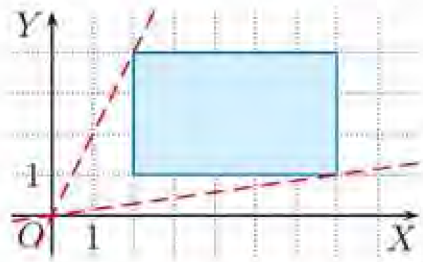
b) $l_1: 9x + 8y + 1 = 0$,
$l_2: -m^2x + (1-m^2)y + 4 = 0$

> Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe $\Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$.

7. Dla jakich wartości parametru m prosta $2x - y + m = 0$ ma punkt wspólny z odcinkiem AB, jeśli:

a) $A(-2,0)$, $B(0,-4)$, b) $A(0,2)$, $B(6,2)$?

8. Ile punktów wspólnych, w zależności od parametru m, ma prosta $mx - y = 0$ z bokami narysowanego obok prostokąta?



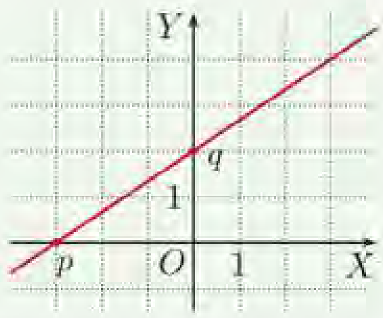
D **9.** Uzasadnij, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie prostej $y = ax + b$ można zapisać w postaci:

$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

Czy wiesz, że...
Równanie prostej przecinającej oś OX w punkcie $(p,0)$, gdzie $p \neq 0$, i oś OY w punkcie $(0,q)$, gdzie $q \neq 0$, można zapisać w postaci:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Jest to **równanie odcinkowe prostej**.



10. Wyznacz punkty, w których prosta o danym równaniu odcinkowym przecina osie układu współrzędnych. Narysuj tę prostą w układzie współrzędnych i podaj jej równanie kierunkowe.

a) $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$ b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$ c) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$

11. Dane jest równanie prostej w postaci odcinkowej. Zapisz to równanie w postaci $y = ax + b$ i określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest ta prosta.

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ b) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$ c) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} = 1$

12. Wyznacz równanie odcinkowe prostej:

a) $y = 2x + 6$, b) $y = \frac{2}{3}x - 4$, c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

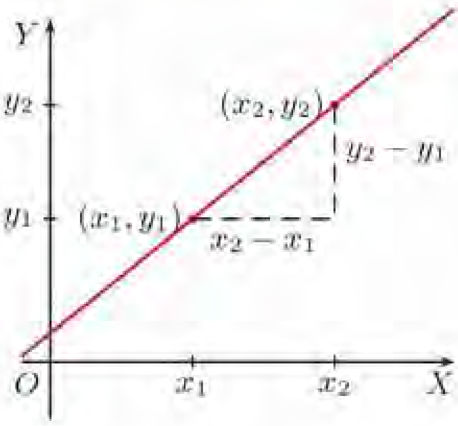
Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$



Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga: $x_1 \neq x_2$.

Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B.

a) $A(3, 7)$, $B(9, 12)$ b) $A(3, 5)$, $B(-7, -5)$ c) $A(12, -2)$, $B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S?

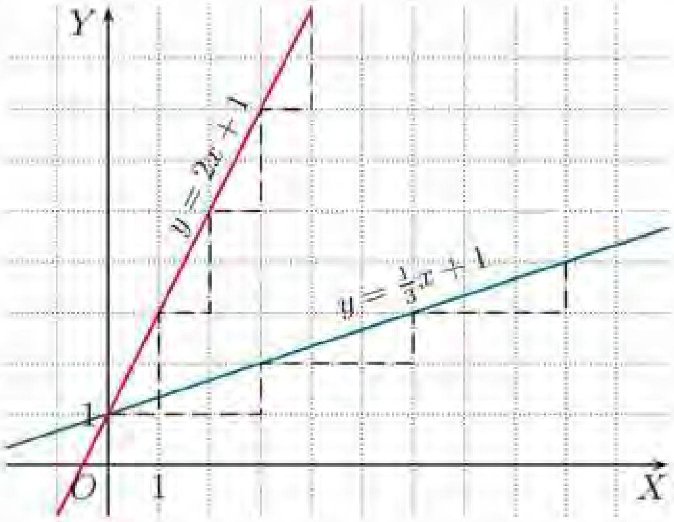
a) $R(0, 6)$, $S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4)$, $S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2})$, $S(8, 2)$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

Interpretacja współczynnika kierunkowego

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma". Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o dwie jednostki, a dla prostej $y = \frac{1}{3}x + 1$ wzrostowi argumentu o trzy jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o jedną jednostkę.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = 3x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 2$ c) $y = -2x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{2}{5}x - 3$ b) $y = \frac{4}{3}x - 3$ c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ d) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów: P lub Q.

Dla punktu $P(3, -7)$ otrzymujemy:

$$-7 = -2 \cdot 3 + b, \text{ stąd } b = -1.$$

Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

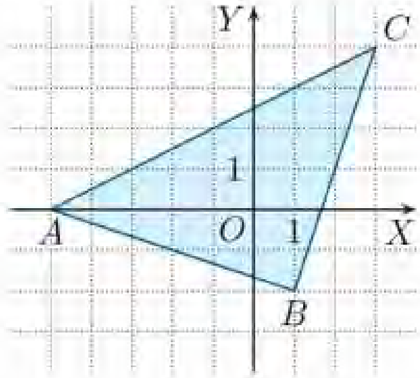
Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q.

a) $P(4, 5)$, $Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13)$, $Q(2, -7)$ c) $P(3, 3)$, $Q(1, \frac{7}{3})$

Zadania

1. Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC. Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki tego trójkąta.



2. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie: $A(-4,-2)$, $B(2,1)$, $C(0,3)$, $D(-5,4)$.

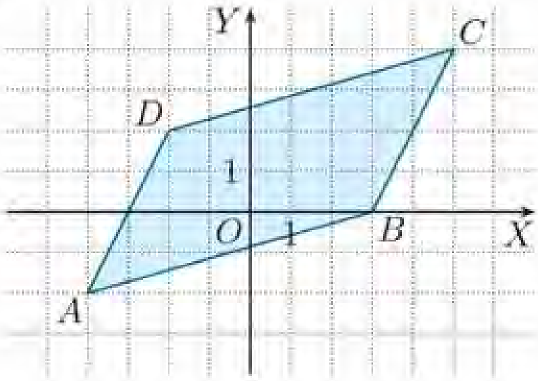
3. Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q.

a) $P(3,4)$, $Q(7,6)$ c) $P(\frac{1}{3},1)$, $Q(\frac{1}{2},-1)$ e) $P(-2,-6)$, $Q(8,-6)$

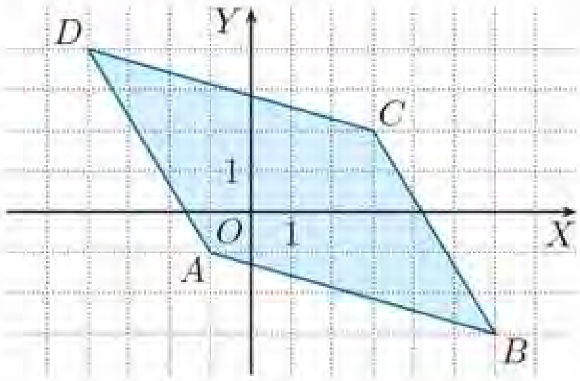
b) $P(-2,7)$, $Q(2,-1)$ d) $P(3,\frac{7}{3})$, $Q(2,\frac{1}{3})$ f) $P(\sqrt{3},4)$, $Q(3\sqrt{3},10)$

D **4.** Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

a)



b)



D **5.** Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem.

a) $P(0,-5)$, $Q(9,1)$, $R(6,11)$, $S(-6,3)$

b) $P(-8,5)$, $Q(-6,-2)$, $R(4,-6)$, $S(7,-1)$

6. Dane są punkty A, B, C i D. Wyznacz wartość parametru m, wiedząc, że proste AB i CD są równoległe.

a) $A(-1,-3)$, $B(9,2)$, $C(5,4)$, $D(1,m)$

b) $A(9,m)$, $B(4,-m)$, $C(9,2)$, $D(3,6)$

7. Dane są punkty $K(-4,5)$, $L(4,-1)$, $M(0,8)$, $N(m,\frac{1}{4}m)$. Wyznacz wartość parametru m, dla którego proste KL i MN są równoległe.

8. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A(-2,4)$, $B(-3,-2)$, $C(4, 1-m^2)$ i $D(0,4)$. Wyznacz wartość parametru m, wiedząc, że współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się przekątne czworokąta $ABCD$, są liczbami przeciwnymi.

D **9.** Udowodnij poniższe twierdzenie.

> Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

10. Zapisz w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$ równanie prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P.

a) $l\colon\ y = 2x + 8$, $P(2,1)$

b) $l\colon\ y = 7x - \frac{1}{4}$, $P(-3,-5)$

c) $l\colon\ y = -\frac{7}{3}x + 8$, $P(2,-9)$

d) $l\colon\ y = \sqrt{2}x - 7$, $P(-1, \sqrt{2})$

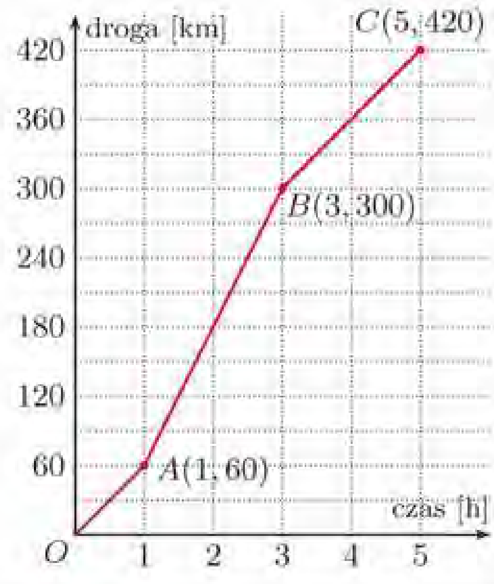
D **11.** Uzasadnij, że jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY, to jej równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

gdzie (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są różnymi punktami należącymi do tej prostej.

12. Przeczytaj podaną w ramce informację.

> Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się droga podczas pięciogodzinnej jazdy samochodem. Punkty A i B wykresu odpowiadają początkowi i końcowi jazdy autostradą. Aby obliczyć, z jaką prędkością jechał wtedy samochód, korzystamy ze wzoru $v = \frac{s}{t}$:
>
> $$v = \frac{300 - 60}{3 - 1} = 120 \text{ [km/h]}$$
>
> Zwróć uwagę na to, że prędkość v jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej AB.



a) Oblicz współczynniki kierunkowe prostych OA i BC. Z jaką średnią prędkością jechał samochód w ciągu pierwszej godziny jazdy, a z jaką w ciągu dwóch ostatnich godzin?

b) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej OC i podaj jego interpretację.

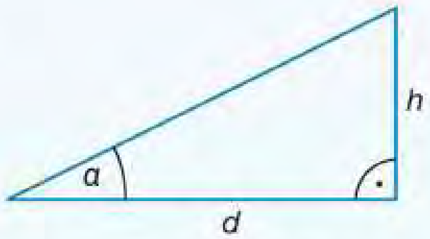
Nachylenie trasy

Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej stromości, czyli o jej nachyleniu do poziomu.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach. Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.

5.5. Warunek prostopadłości prostych

Przykład 1

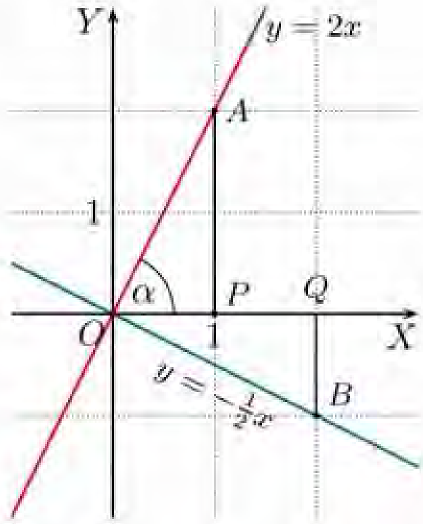
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $\sphericalangle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO: $\sphericalangle OBQ = \alpha$ oraz $\sphericalangle BOQ = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOP + \sphericalangle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie, że proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ $(a_1 \neq 0)$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ (czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$).

Przykład 2

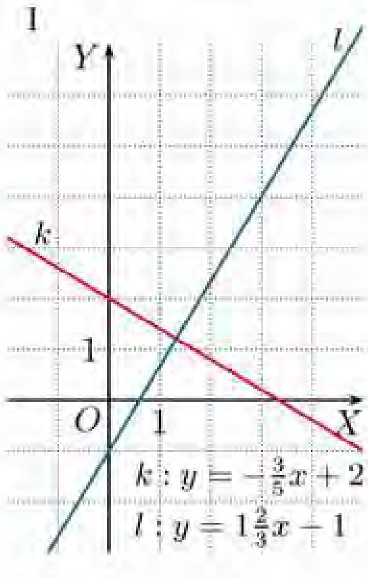
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

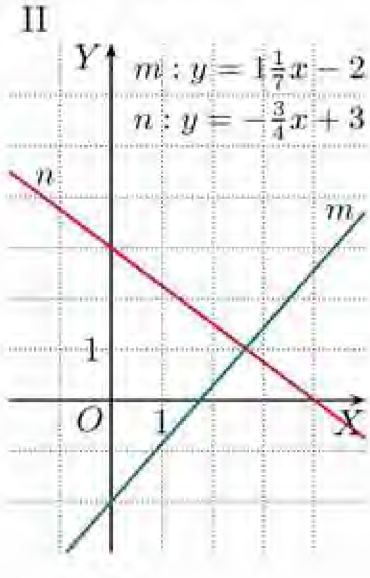
I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.

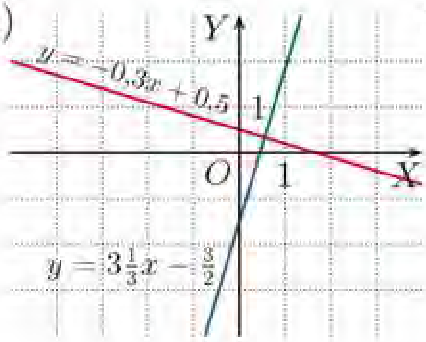




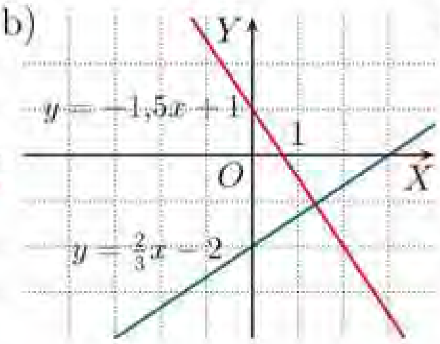
Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.

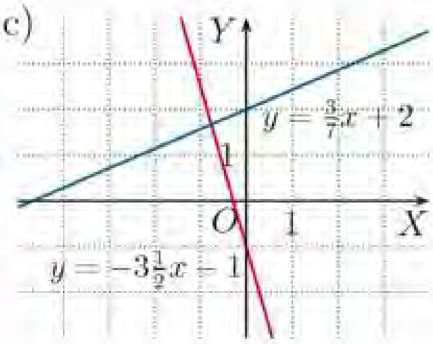
a)



b)



c)



Przykład 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k, jeśli jest ona prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$.

Oznaczmy przez a_1 współczynnik kierunkowy prostej k. Wówczas:

$$a_1 = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

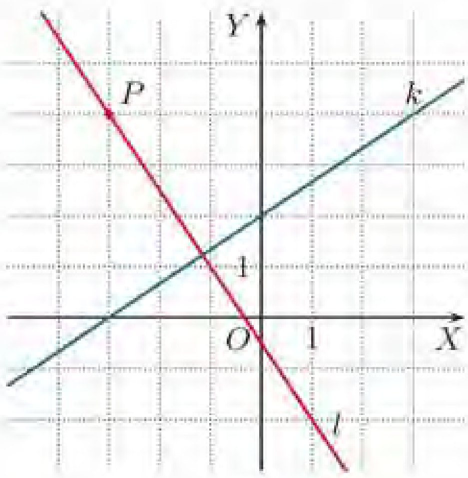
Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych współczynników b_1, b_2 prostopadłe są również proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4



Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.
Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P.

a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0{,}1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

Przykład 5

Miejscem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l.

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.
Równanie prostej l ma zatem postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

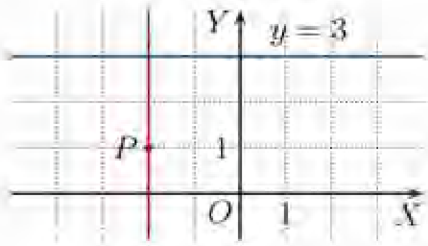
Miejscem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2. Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

a) $3x + 2y + 6 = 0$ b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$ c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.



Ćwiczenie 7

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do prostej:

a) $y = -3$, b) $x = -3$, c) $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P.

a) $l\colon y = -3x + 1$, $P(3, -2)$ c) $l\colon y = -\frac{4}{3}x + 11$, $P(-4, -2)$
b) $l\colon y = \frac{2}{3}x - 3$, $P(4, 1)$ d) $l\colon y = 3\frac{1}{2}x - 3$, $P(14, -4)$

2. Wyznacz równania prostych: AB, AC i BC. Czy trójkąt ABC jest prostokątny?

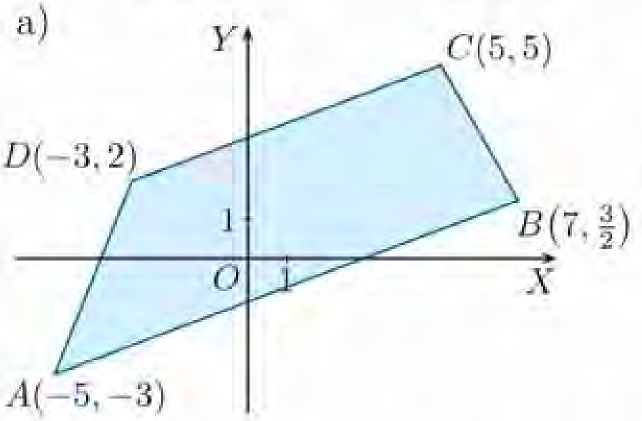
a) $A(1, 5)$, $B(4, 2)$, $C(7, 5)$ c) $A(-7, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 3)$
b) $A(-2, -1)$, $B(0, -3)$, $C(4, 5)$ d) $A(4\frac{1}{2}, 6)$, $B(-2, -\frac{1}{2})$, $C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

3. Punkty: A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.

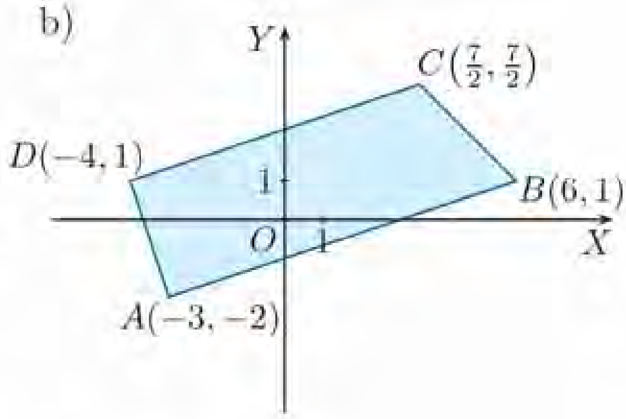
a) $A(-2, -6)$, $B(5, -3)$, $C(8, 4)$ b) $A(-1, -2)$, $B(6, -1)$, $D(-6, 3)$

D **4.** Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?

a)



b)



D **5.** Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

a) $P(-5,0)$, $Q(-1,-6)$, $R(8,0)$, $S(4,6)$

b) $P(-8,-2)$, $Q(6,-8)$, $R(9,-1)$, $S(-5,5)$

D **6.** Punkty $A(0,0)$ i $C(2,8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. a) Dany jest trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek o końcach $B(-5,-5)$, $C(3,-1)$ jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A.

b) Punkty $A(-5,4)$ i $C(4,-3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołka B, jeśli bok AB jest równoległy do osi OY oraz prosta $y = -3x - 11$ zawiera jedną z wysokości tego trójkąta.

8. Wyznacz równania prostych prostopadłych l_1, l_2 przecinających się w punkcie $(2,4)$, jeśli jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6,0)$. O ile procent większe jest pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY?

9. Korzystając z podanej obok informacji, sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe.

a) $k\colon 3x - 4y + 9 = 0$, $l\colon \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0$

b) $k\colon 4x + 6y - 3 = 0$, $l\colon \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0$

> Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

10. Dla jakich wartości parametru m proste l_1, l_2 są prostopadłe?

a) $l_1\colon x + my - 9 = 0$, $l_2\colon 0{,}1x - 0{,}02y + 3 = 0$

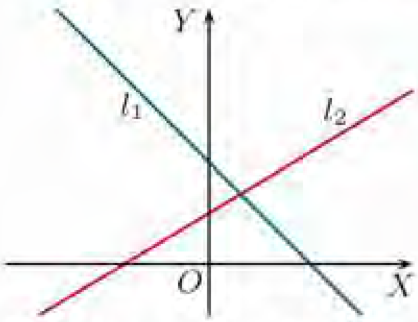
b) $l_1\colon 4x - 9y - 7 = 0$, $l_2\colon (4m^2 - 4)x - m^2y + 17 = 0$

5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

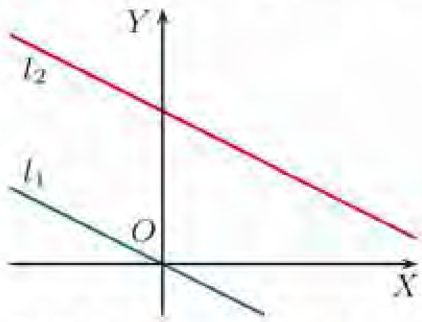
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

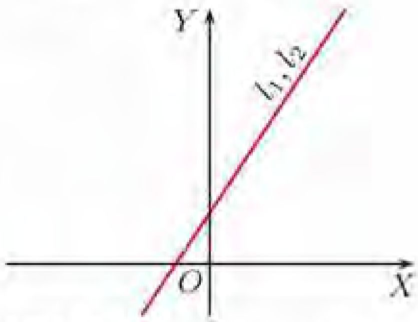
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ sprzeczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.

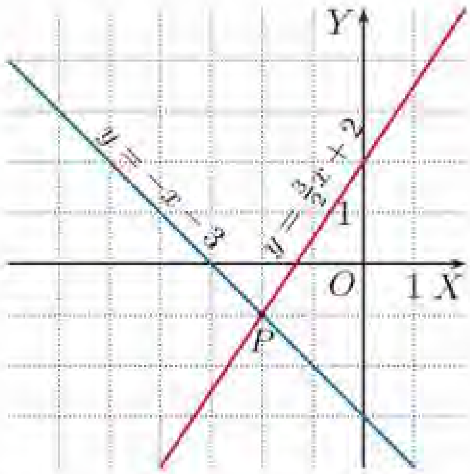


Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste pokrywają się.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$



Pierwsze równanie po przekształceniu do postaci kierunkowej ma postać $y = -x - 3$, a drugie $y = \frac{3}{2}x + 2$. Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.

Rozwiązaniem układu równań jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).

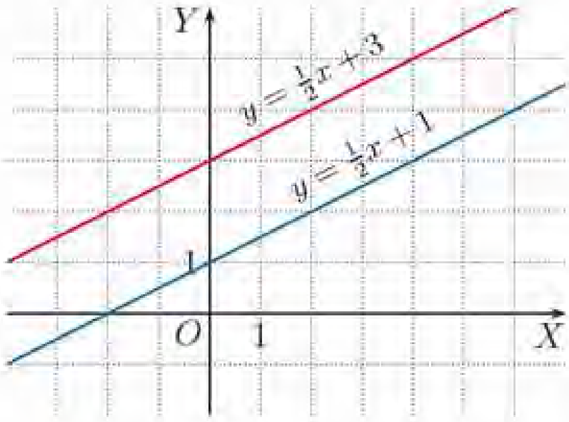
Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$



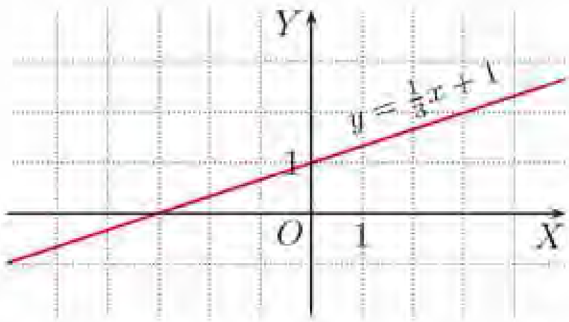
Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.

Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań.



$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $\left(x, \frac{1}{3}x + 1\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0{,}5y - x = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

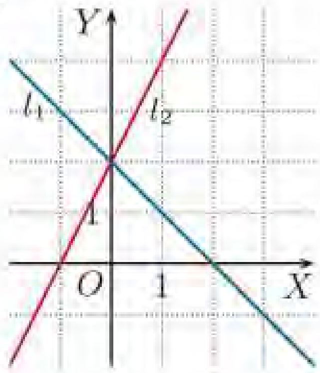
2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases}$

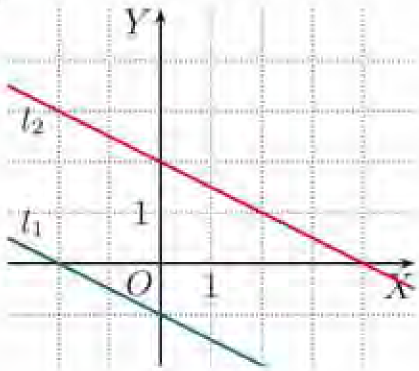
b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases}$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.

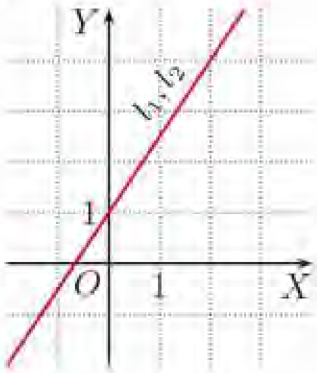
a)



b)



c)



4. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki: a_1, a_2, b_1, b_2, aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Dla jakich wartości parametru k układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ kx + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + ky = 4k \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = -1 \\ x - k^2y = \frac{k}{2} \end{cases}$

6. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

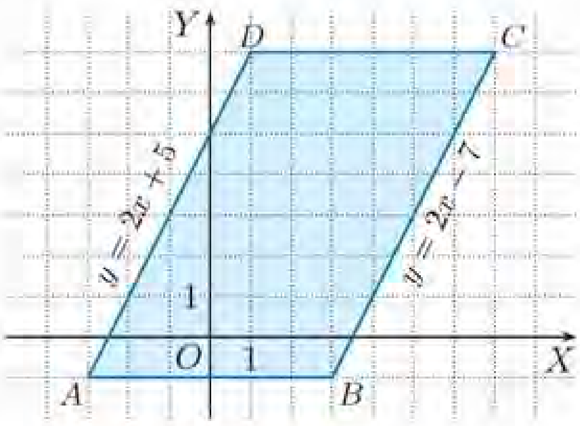
a) $y = x - 2, \ y = x - 6, \ y + 3 = 0, \ y - 2 = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3, \ y = \frac{1}{2}x - 2, \ y = -2x - 7, \ y = -2x + 8$

c) $3x - y = -2, \ 3x - y = 4, \ x - 2y = 6, \ x - 2y = -14$

7. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych: $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

8. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).



a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP.

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.

9. Wierzchołki B i C trójkąta prostokątnego ABC są punktami przecięcia prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3$ z osiami układu współrzędnych. Narysuj ten trójkąt i odczytaj współrzędne wierzchołka A, jeśli przeciwprostokątna AB jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x - 2$.

D **10.** Prosta AC dana jest równaniem $y = \frac{3}{4}x - 1$, a wierzchołek B kwadratu $ABCD$ ma współrzędne $(-1, -8)$. Naszkicuj proste zawierające przekątne kwadratu i odczytaj współrzędne ich punktu przecięcia. Uzasadnij, że dwa wierzchołki tego kwadratu należą do osi układu współrzędnych.

Czy wiesz, że...

Pole trójkąta o wierzchołkach: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

11. Narysuj trójkąt, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta. Oblicz jego pole, korzystając z podanego powyżej wzoru.

a) $y = x + 4, \ y = -\frac{1}{2}x + 1, \ y = -2x + 10$

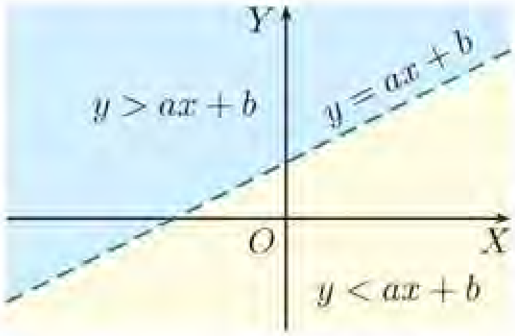
b) $y = \frac{2}{3}x + 5, \ y = 3x - 2, \ y = -\frac{1}{2}x - 2$

*5.7. Układy nierówności liniowych

Każdą z dwóch części płaszczyzny, na które dzieli ją prosta, nazywamy **półpłaszczyzną**. Prosta ta jest **krawędzią** obu półpłaszczyzn. Półpłaszczyznę zawierającą swoją krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**. Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt z jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

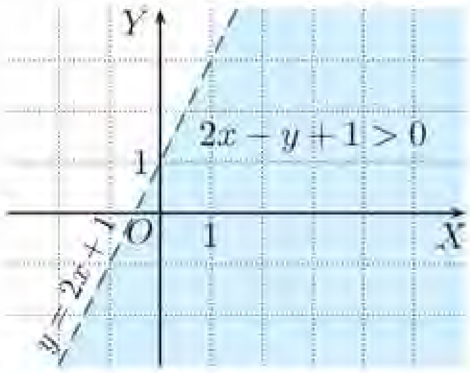
Prosta $l: y = ax + b$ wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ i $y < ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej l,
- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ i $y > ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą powyżej tej prostej.



Przykład 1

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $2x - y + 1 > 0$.



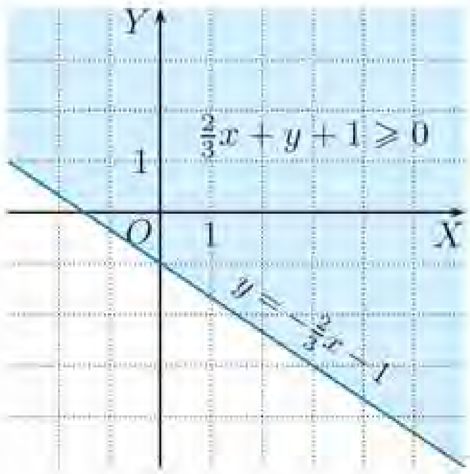
Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej $y = 2x + 1$. Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności $y < 2x + 1$, więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.

Przykład 2

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $\frac{2}{3}x + y + 1 \geqslant 0$.



Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geqslant -\tfrac{2}{3}x - 1$$

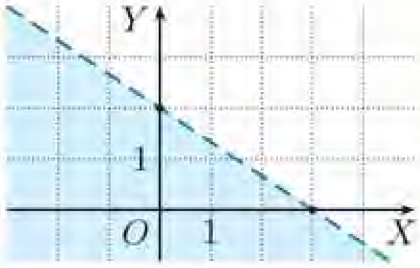
Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą ograniczoną przez prostą $y = -\frac{2}{3}x - 1$. Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność $y \geqslant -\frac{2}{3}x - 1$, więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.

Ćwiczenie 1

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność:

a) $-3x + 2y - 6 > 0$, b) $y \geqslant -\frac{1}{2}x - 1$, c) $y - 2x \leqslant -3$.

Przykład 3



Podaj nierówność opisującą zaznaczoną na rysunku obok półpłaszczyznę.

Wyznaczamy równanie prostej będącej krawędzią półpłaszczyzny:

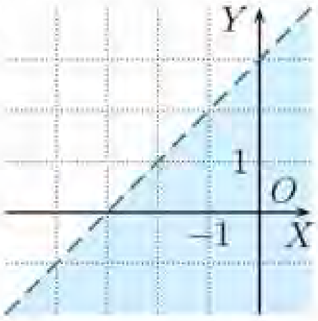
$$y = -\tfrac{2}{3}x + 2$$

Półpłaszczyzna jest otwarta, jej punkty leżą poniżej prostej $y = -\frac{2}{3}x + 2$, więc szukana nierówność ma postać $y < -\frac{2}{3}x + 2$.

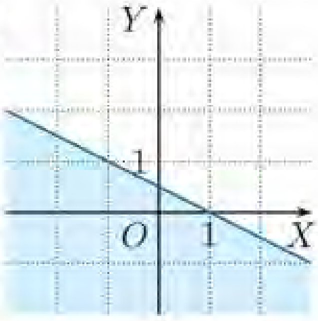
Ćwiczenie 2

Podaj nierówność opisującą zaznaczoną półpłaszczyznę.

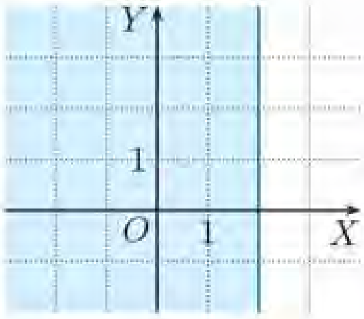
a)



b)



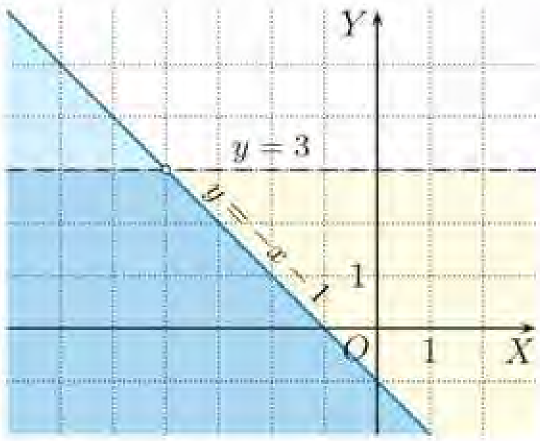
c)



Przykład 4

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

$$\begin{cases} x + y + 1 \leqslant 0 \\ y < 3 \end{cases}$$



Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $y = -x - 1$. Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą $y = 3$. Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.

Zauważ, że punkt $(-4, 3)$ nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.

Ćwiczenie 3

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

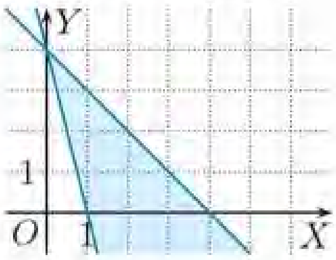
a) $\begin{cases} -2x + y - 3 \leqslant 0 \\ x > -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y + 3 \geqslant 0 \\ 2x + y \geqslant 8 \end{cases}$

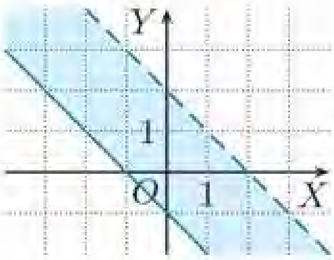
Zadania

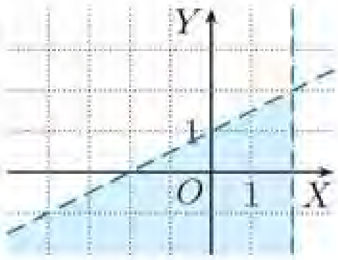
1. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności. Które z punktów $P(6, 1)$, $Q(-3, 5)$, $R(8, -3)$ należą do otrzymanego zbioru?

a) $\begin{cases} x - y + 1 \geqslant 0 \\ y + 3 \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y + 1 \geqslant 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$

2. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.

a) 

b) 

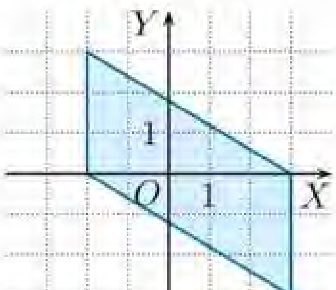
c) 

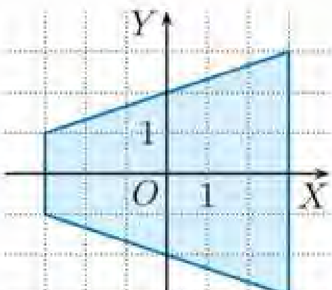
3. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC, jeśli: a) $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$, b) $A(-6, 7)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

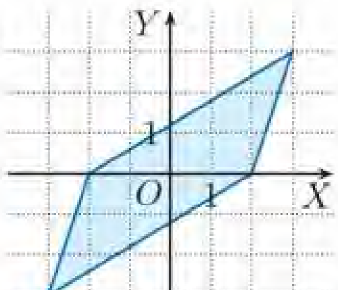
4. Pewien trójkąt został opisany przez podany układ nierówności. Naszkicuj ten trójkąt i podaj współrzędne jego wierzchołków.

a) $\begin{cases} y - x \geqslant 0 \\ y + x \leqslant 6 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y - 12 \leqslant 0 \\ 3x - 2y + 6 \geqslant 0 \\ y + 3 \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 3 \geqslant 0 \\ 2x - y - 6 \leqslant 0 \\ x - 2y + 3 \geqslant 0 \end{cases}$

5. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.

a) 

b) 

c) 

6. Dane są zbiory: $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 2\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y > 6\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -x + y - 2 < 0\}$.
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór:

a) $A \cap B \cap C$, c) $(A \cup B) \setminus C$,

b) $(A \cap C) \setminus B$, d) $(A \setminus C) \cup B$.

Symbol $\mathbf{R}^2$ oznacza zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej, czyli płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych.
$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R}\}$

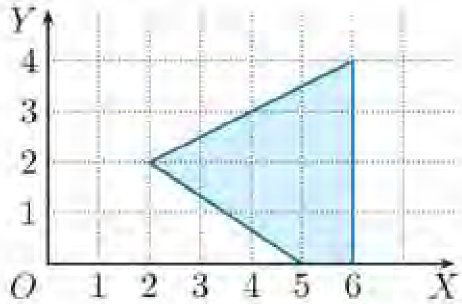
Warto wiedzieć

Programowanie liniowe

Przykład

Chcemy wyznaczyć największą i najmniejszą wartość sumy $x+y$ dla punktów (x,y) należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geqslant -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leqslant \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geqslant 0 \\ x \leqslant 6 \end{cases}$$



Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.

Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy $x+y$ jest osiągana w którymś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

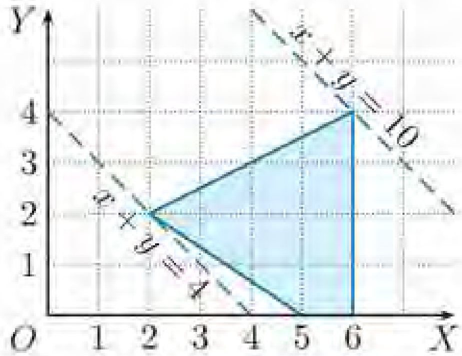
Wierzchołkami wielokąta są punkty: $(5,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$ i $(2,2)$. Obliczamy dla nich wartości sumy $x+y$:

$(5,0)$: $x+y=5+0=5$

$(6,0)$: $x+y=6+0=6$

$(6,4)$: $x+y=6+4=10$

$(2,2)$: $x+y=2+2=4$



Zatem największą wartością sumy $x+y$ jest 10, a najmniejszą 4.

W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działu matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

1. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą sumy $x+y$ dla wielokąta opisanego układem nierówności.

a) $\begin{cases} y \leqslant 2x+4 \\ y \geqslant 2x-4 \\ y \geqslant -2 \\ x \leqslant 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \leqslant 2x+9 \\ y \geqslant 2x-6 \\ y \geqslant -x-3 \\ y \leqslant -\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-6 \leqslant 0 \\ x-y+3 \geqslant 0 \\ x+y-7 \leqslant 0 \\ x+3y+3 \geqslant 0 \end{cases}$

*5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

Przykład 1

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a - x$ z niewiadomą x w zależności od parametru a. Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = -1$ i $a = 3$.

$$a^2x - 3 = a - x$$

$$a^2x + x = a + 3$$

$$(a^2 + 1)x = a + 3 \ / : (a^2 + 1)$$

Zauważ, że $a^2 + 1 \neq 0$ dla $a \in \mathbf{R}$.

$$x = \frac{a+3}{a^2+1}$$

Otrzymane rozwiązanie równania zależy od parametru a.

Dla $a = -1$ otrzymujemy $x = 1$, natomiast dla $a = 3$ otrzymujemy $x = \frac{3}{5}$.

Uwaga. Zazwyczaj przyjmujemy, że x jest niewiadomą, chyba że wyraźnie zaznaczono inaczej.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $a^2x - 3 = a + 9x$ w zależności od parametru a.

$$a^2x - 3 = a + 9x$$

$$a^2x - 9x = a + 3$$

$$(a^2 - 9)x = a + 3$$

Zauważ, że wyrażenie $a^2 - 9$ może przyjmować wartość 0.

- Dla $a = -3$ otrzymujemy równanie **tożsamościowe** (spełnione przez dowolną liczbę): $0x = 0$.
- Dla $a = 3$ otrzymujemy równanie **sprzeczne**: $0x = 6$.
- Dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ mamy $a^2 - 9 \neq 0$. Równanie **ma jedno rozwiązanie** postaci: $x = \frac{a+3}{a^2-9} = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, dla jakich wartości parametru a podane równanie: jest sprzeczne, jest tożsamościowe, ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie.

a) $\frac{1}{2}ax - 4a = x + a$ b) $(a - 1)x + 4 = 3x + a$ c) $4a^2x + \frac{1}{2} = a + x$

Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + b = 0$ jest tożsamościowe, sprzeczne, ma jedno rozwiązanie.

Przykład 3

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax + 4 = 2a + 2bx$ jest: tożsamościowe, sprzeczne, ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie. Podaj rozwiązanie tego równania dla $a = 5$ i $b = 1$.

$$ax + 4 = 2a + 2bx$$
$$ax - 2bx = 2a - 4$$
$$(a - 2b)x = 2a - 4$$

- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 = 0$ (czyli $a = 2$ i $b = 1$) równanie jest tożsamościowe.
- Dla $a - 2b = 0$ i $2a - 4 \neq 0$ (czyli $a \neq 2$ i $b = \frac{1}{2}a$) równanie jest sprzeczne.
- Dla $a - 2b \neq 0$ (czyli $b \neq \frac{1}{2}a$) równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{2a-4}{a-2b}$.

Po podstawieniu $a = 5$ i $b = 1$ otrzymujemy $x = 2$.

Ćwiczenie 3

Przeprowadź analizę liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów a i b. Wyznacz rozwiązanie tego równania dla $a = 2$ i $b = -1$.

a) $2ax - 1 = a^2 + bx$
b) $a^2x + 2 = b - b^2x$
c) $6ax + 3a = 2bx + b$
d) $ax - b = 2 - bx$
e) $3ax - 9 = 2bx + 3b$
f) $ax + a = 3bx + b$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji $f(x) = (m + 1)x + 2$ jest liczbą dodatnią?

1. Zauważmy, że dla $m = -1$ funkcja f nie ma miejsca zerowego – jest funkcją stałą $f(x) = 2$.
2. Dla $m \neq -1$ wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f.

$$(m + 1)x + 2 = 0$$
$$(m + 1)x = -2$$
$$x = \frac{-2}{m+1}$$

Nierówność $\frac{-2}{m+1} > 0$ jest spełniona, gdy $m + 1 < 0$, czyli dla $m < -1$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru m miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną?

a) $f(x) = (m - 2)x - 4$
b) $f(x) = (2m + 3)x + 1$
c) $f(x) = (m^2 + 1)x + m$
d) $f(x) = -m^2x + 3 - m$

Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru k zbiorem rozwiązań nierówności $(k+1)x-2 \leqslant 0$ jest przedział $(-\infty; 1\rangle$?

Rozpatrzmy pomocniczą funkcję $f(x) = (k+1)x - 2$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 0$ jest przedział $(-\infty; 1\rangle$, gdy jest to funkcja rosnąca, której miejscem zerowym jest 1.

- Funkcja f jest rosnąca, gdy $k+1 > 0$, czyli dla $k > -1$.
- Miejsce zerowe funkcji f jest równe 1, gdy $\frac{2}{k+1} = 1$, czyli $k = 1$.

Zatem warunki zadania są spełnione dla $k = 1$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wartość parametru k, dla której zbiorem rozwiązań nierówności jest podany przedział.

a) $(k-3)x+2 \leqslant 0$, $(-\infty; -2\rangle$

b) $(k+1)x+6 > 0$, $(-\infty; 3)$

c) $kx+3 \geqslant 4x$, $\langle 1; \infty)$

d) $2x < kx+2$, $(-4; \infty)$

Zadania

1. Dla jakich wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie będące liczbą dodatnią?

a) $\frac{x-m}{3} = \frac{m+4}{2}$ b) $\frac{mx-m}{2} = \frac{1-2m}{4}$ c) $\frac{mx-1}{2} = 1+x$

2. Określ liczbę rozwiązań równania ze względu na parametr m.

a) $2x-2 = 4+mx$

b) $mx+2 = m-3x$

c) $(m+1)x = m^2-1$

d) $(1-2m)x = m^2 - \frac{1}{4}$

e) $(m^2-1)x = m^2+m$

f) $(m^2+2m)x = m^2-4$

3. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów p i q.

a) $2px - qx = p-4$

b) $px+2 = 3x+q$

c) $px+q^2 = p^2-qx$

d) $p^2x+q = p+q^2x$

e) $(x-p)(x-q) = x^2+pq$

f) $(x-p)^2 = x^2-qx$

4. Rozwiąż równanie $ax-2x = 4a-1$:

a) z niewiadomą x i parametrem a, b) z niewiadomą a i parametrem x.

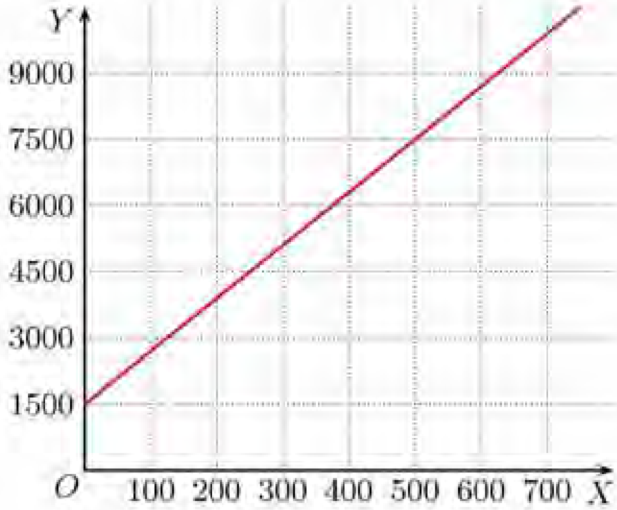
5. Dla jakich wartości paramatru k miejsce zerowe funkcji f należy do przedziału $\langle -2; 2\rangle$?

a) $f(x) = -3x+1-6k$ b) $f(x) = (x-k)^2-(x+k)^2+k^2$, $k \neq 0$

5.9. Funkcja liniowa – zastosowania

Ćwiczenie 1

Funkcja $y = 1500 + 12x$ opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

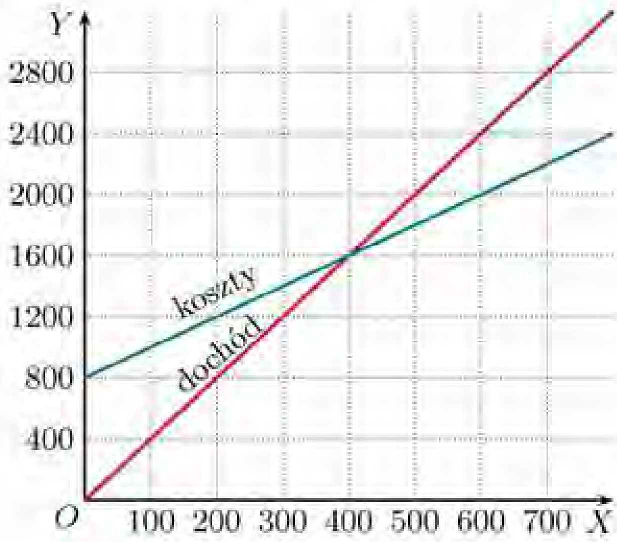


a) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

b) Naszkicuj wykres funkcji opisującej miesięczne koszty firmy, jeśli podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, a koszt wyprodukowania jednego wyniesie 18 zł (koszty stałe bez zmian).

Ćwiczenie 2

Firma produkująca pokarm dla kotów ponosi koszty dzienne opisane za pomocą wzoru $y = 2x + 800$, gdzie 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje wzór $y = 4x$, gdzie x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:



a) zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),

b) dzienny zysk w wysokości 400 zł,

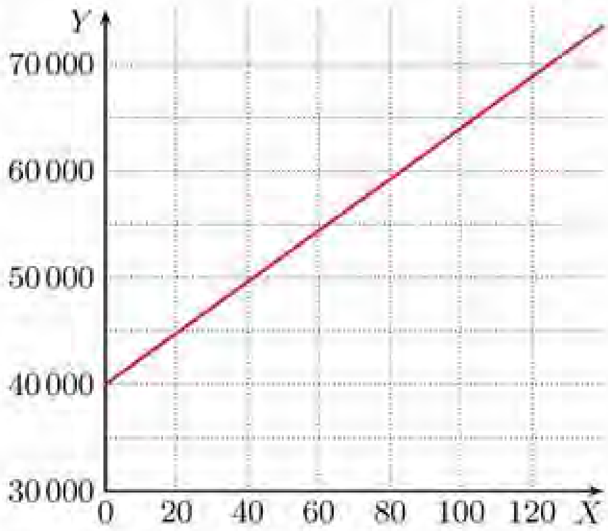
c) dzienny zysk w wysokości 1400 zł.

Ćwiczenie 3

Wynajęcie lokalu A na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu B kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naszkicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach A i B w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?

Zadania

1. Samochód A kosztuje 35 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B, jeśli cena benzyny wynosi średnio 4 zł za litr.



a) Naszkicuj analogiczny wykres dla samochodu A.

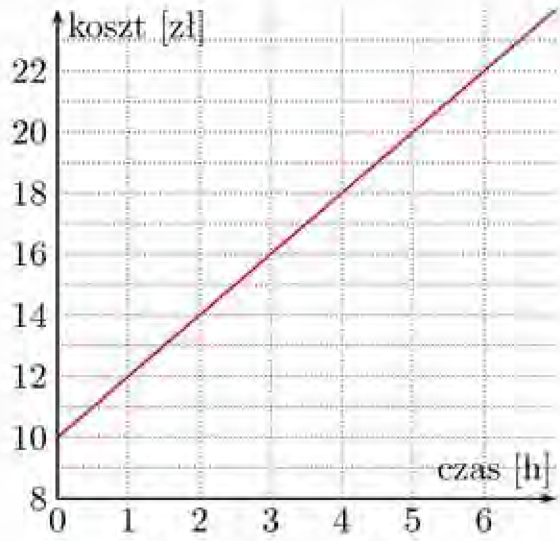
b) Jeżeli zakupiono samochód B, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?

2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA	
• Rower górski	10 zł + $2x$ zł
• Rower dziecięcy	6 zł + $2x$ zł

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA	
• Rower górski	6 zł + $3x$ zł
• Rower dziecięcy	2 zł + $3x$ zł

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.



a) Naszkicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.

b) Odczytaj z wykresów, dla jakiej liczby godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a dla jakiej z wypożyczalni Szprycha.

c) Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Dla jakiej liczby godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni Wagabunda?

3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie. Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h, a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością 22,5 km/h.

a) Naszkicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C?

4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby przejechanych kilometrów przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:

a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,

b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,

c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km.

5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turyście droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.

6. Z miejscowości A do oddalonej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h. Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.

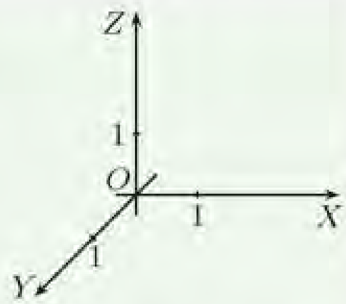
a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.

b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km?

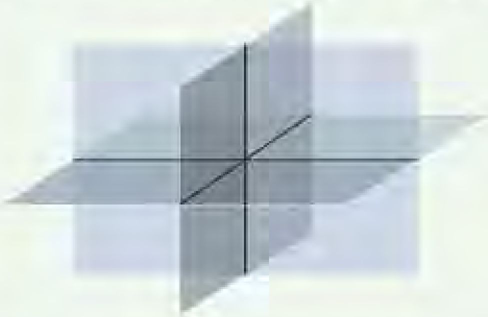
5.10. Zagadnienia uzupełniające

Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych

Równanie $ax + by + cz = d$, gdzie a, b, c, d są stałymi oraz a, b, c nie są wszystkie jednocześnie równe zeru, opisuje płaszczyznę w przestrzeni z trójwymiarowym układem współrzędnych.
Rozwiązując układ trzech takich równań, szukamy punktów wspólnych trzech płaszczyzn.



Na pierwszym rysunku przedstawiono przypadek, gdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, na drugim – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a płaszczyzny nie pokrywają się.



Na poniższych rysunkach przedstawiono przykładowe sytuacje, gdy układ równań jest sprzeczny.

1. Wyznacz punkt wspólny płaszczyzn P_1, P_2 i P_3.

a) P_1: $2x - y + z = 4$, P_2: $4x + y - z = 2$, P_3: $3x - 3y + z = 1$

b) P_1: $x + 2y + z = 7$, P_2: $2x + y - z = 2$, P_3: $x + 2y - z = 9$

2. Napisz równanie płaszczyzny, do której należą punkty A, B i C.

a) $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, $C(1, 0, 1)$ b) $A(2, 0, 2)$, $B(1, 3, 5)$, $C(3, 2, 9)$

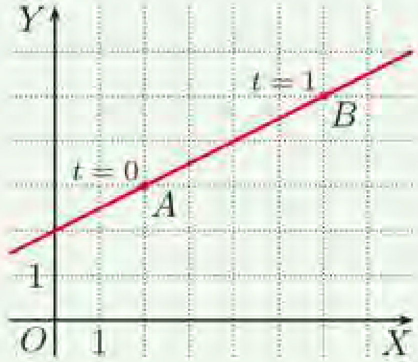
3. Napisz równania płaszczyzn, w których są zawarte ściany prostopadłościanu o wierzchołkach: $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 0, 3)$, $(1, 2, 3)$.

Postać parametryczna równania prostej

Innym sposobem opisu prostej jest postać parametryczna. Na przykład układ równań z parametrem t:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

jest parametrycznym przedstawieniem prostej AB (rysunek obok). Opisuje on ruch punktu po prostej AB. Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $A(2, 3)$, a dla $t = 1$ – punkt $B(6, 5)$.



4. Naszkicuj prostą opisaną parametrycznie.

a) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$

b) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$

Przykład 1

Podaj równanie kierunkowe prostej przedstawionej parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy t: $t = 2x - 2$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$y = 3 - 2t = 3 - 2(2x - 2)$$

skąd otrzymujemy $y = -4x + 7$.

D **5.** Uzasadnij, że układy równań: I, II i III, gdzie $t \in \mathbf{R}$, opisują tę samą prostą.

I. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ II. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$ III. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

6. Prosta l dana jest w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Podaj wartość parametru t, dla którego punkt A należy do prostej l.

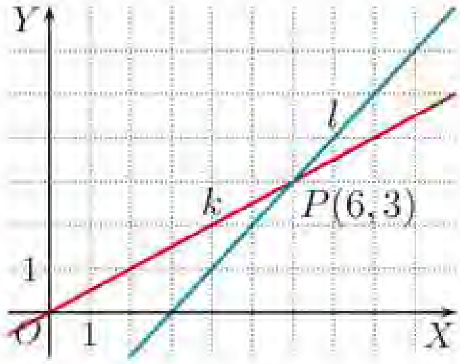
a) $A(-10, 12)$ b) $A(11, -2)$ c) $A(\frac{3}{2}, \frac{13}{3})$

Czy punkty $P(-1, 2)$ i $Q(8, 4)$ leżą na prostej l?

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ruch kuli K_1 toczącej się po prostej k opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$



Ruch kuli K_2 toczącej się po prostej l opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

Czy kule K_1 i K_2 się zderzą?

Wyznaczmy równania kierunkowe prostych k: $y = \frac{1}{2}x$ i l: $y = x - 3$. Proste k i l przecinają się w punkcie $P(6,3)$. Zderzenie jednak nie nastąpi, gdyż kula K_1 będzie w punkcie P dla $t = 3$, zaś kula K_2 dopiero dla $t = 6$.

Przemieszczanie się ślimaków S_1 i S_2 opisują podane równania parametryczne. Czy ślimaki te się spotkają $(t \geqslant 0)$?

a) $S_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$ $\quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

b) $S_1: \begin{cases} x = 6t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$ $\quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$

Równanie prostej w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy przedstawić w postaci parametrycznej. Na przykład prosta opisana równaniami:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

przechodzi przez punkty $A(3,2,4)$ dla $t = 0$ oraz $B(4,1,6)$ dla $t = 1$.

8. Które spośród punktów $P(3,1,2)$, $Q(9,0,6)$, $R(-3,7,2)$ należą do podanej prostej przedstawionej w postaci parametrycznej?

a) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \\ z = 4 - t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$ c) $f(x) = -3x - 7{,}5$

2. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m.

a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$

3. Sprawdź, czy punkty: A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.

a) $A(-4, 1)$, $B(8, 7)$, $C(11, 5)$ b) $A(2, -7)$, $B(3, -10)$, $C(-2, 5)$

4. Oblicz k, jeśli punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$.

a) $P\left(\frac{2}{3}, 2\right)$, $Q(5, k)$ c) $P(1{,}8;\ 2{,}4)$, $Q(12, k)$

b) $P(k, 6)$, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ d) $P\left(\sqrt{6}, k\right)$, $Q(\sqrt{2}, 2)$

5. Wyznacz punkty przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych, jeśli jest ona równoległa do prostej k i przechodzi przez punkt P.

a) $k\colon x - 2y + 2 = 0$, $P(4, -1)$ b) $k\colon 5x + 3y + 6 = 0$, $P(-3, 1)$

D **6.** Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest trapezem.

a) $P(-5, -4)$, $Q(7, 4)$, $R(1, 4)$, $S(-5, 0)$

b) $P\left(-4, -\frac{5}{2}\right)$, $Q\left(0, -\frac{7}{2}\right)$, $R\left(3, -\frac{5}{2}\right)$, $S\left(-9, \frac{1}{2}\right)$

7. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do podanej prostej.

a) $y = -4{,}5x - 5$ b) $3x - 5y - 1 = 0$

8. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach: A, B, C. Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(0, 0)$, $B(8, 6)$, $C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0)$, $B(1, 1)$, $C(-3, 4)$

D **9.** Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach: $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.

10. Rozwiąż równanie z niewiadomą x w zależności od parametru m.

a) $m(x - 6) = 2x - 12$ b) $m(mx - 1) = 9x + 3$

Zestaw II

1. Wyznacz t, wiedząc, że punkty: A, B, C należą do tej samej prostej.

a) $A(t,0)$, $B(-2,-6)$, $C(2,-3)$ b) $A(-4,-5)$, $B(5,t)$, $C(2,1)$

2. Dla jakiej wartości parametru k współczynniki kierunkowe prostych AB i CD są liczbami przeciwnymi?

a) $A(3,2)$, $B(1,k)$, $C(6,2k)$, $D(4,1)$ b) $A(4,4)$, $B(2,3k)$, $C(3,k)$, $D(4,1)$

3. Dla jakiej wartości parametru m prosta $3x + 2y = 0$ jest równoległa do prostej:

a) $mx + 6y + 7 = 0$,

b) $3mx + (m^2 + 1)y - 5 = 0$?

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:
- równoległe, wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
- prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

4. Dla jakiej wartości parametru m prosta $x + 4y - 9 = 0$ jest prostopadła do prostej:

a) $(6m + 1)x + y - 8 = 0$, b) $16mx + (m^2 + 4)y + 13 = 0$?

5. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}5y - 0{,}125x = 1{,}5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1{,}5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1{,}5x = 5 \end{cases}$

6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y - 10 = 0$ i $4x - 3y - 5 = 0$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.

7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.

a) $k: y = 2x + 2$, $l: y = \frac{3}{4}x - 3$, $m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$

b) $k: y = -2x - 7$, $l: y = 2x - 3$, $m: y = \frac{1}{2}x + 3$

8. Punkty $A(1,4)$, $B(-2,-2)$, $C(2,-4)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D, jeśli wiadomo, że leży on na osi OX (rozpatrz dwie możliwości).

Przykład 1

Prosta $y = ax+b$ przechodzi przez punkty P i Q. Współczynnik a jest ujemny, gdy:

A. $P\left(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}\right)$, $Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3}\right)$,

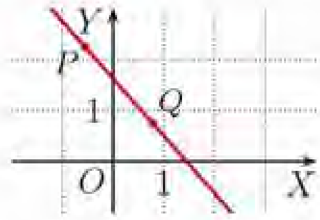
B. $P\left(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}\right)$, $Q\left(\frac{9}{7}, \frac{5}{6}\right)$,

C. $P\left(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}\right)$, $Q\left(\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right)$,

D. $P\left(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}\right)$, $Q\left(\frac{7}{9}, \frac{3}{4}\right)$.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.
- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Można zauważyć, że w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

Przykład 2

Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a?

A. $(-8, -5)$, $(8, 9)$

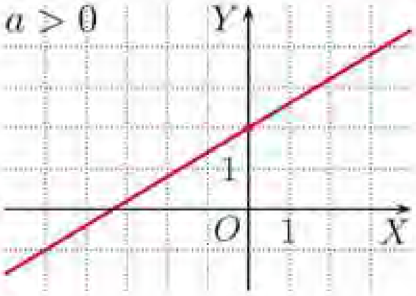
B. $(-9, 6)$, $(9, -2)$

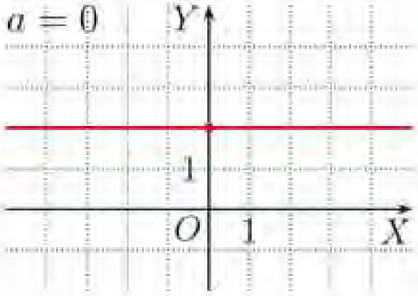
C. $(-8, -6)$, $(4, -2)$

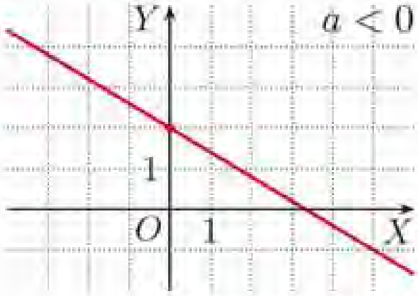
D. $(-10, 4)$, $(5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.
- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.







Odpowiedź: C

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$?

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

2. Prosta przechodząca przez punkt $(3, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej równej -1 przecina oś OY w punkcie:

A. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, **B.** $(0, 3)$, **C.** $(0, -3)$, **D.** $(0, -6)$.

3. Do wykresu funkcji $f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 1$ nie należy punkt:

A. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 0\right)$, **C.** $\left(\sqrt{3}, 3 - \sqrt{6}\right)$,
B. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{6}\right)$, **D.** $\left(\sqrt{2}, \sqrt{6} - 3\right)$.

4. Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x-2)$ dla żadnej wartości współczynnika a?

A. $(4, 1)$, $(-4, -3)$ **C.** $(-3, -2)$, $(-1, 3)$
B. $(-3, -10)$, $(1, -2)$ **D.** $(1, 3)$, $(3, -3)$

5. Prosta $y = (\sqrt{2} - 1)x - 1$ jest prostopadła do prostej o współczynniku kierunkowym równym:

A. $-1 - \sqrt{2}$, **B.** $-1 + \sqrt{2}$, **C.** $1 + \sqrt{2}$, **D.** $1 - \sqrt{2}$.

6. Prosta $(4 - m^2)x + (1 - m)y + m = 0$ jest wykresem funkcji rosnącej dla:

A. $m = 2$, **B.** $m = \sqrt{2}$, **C.** $m = 1$, **D.** $m = -2$.

7. Proste $y = mx + \frac{1}{2}x$ i $y = mx - \frac{1}{2}x$:

A. są prostopadłe dla $m = 0$, **C.** są prostopadłe dla $m = -1$,
B. są prostopadłe dla $m = 1$, **D.** nigdy nie są prostopadłe.

8. Przekątne czworokąta o wierzchołkach $(-3, -5)$, $(2, -5)$, $(5, 1)$, $(-2, 7)$ przecinają się w punkcie:

A. $(1, -2)$, **B.** $(1, -1)$, **C.** $(-2, -1)$, **D.** $(-2, -2)$.

9. Ile punktów (x, y) o obu współrzędnych całkowitych dodatnich należy do półpłaszczyzny opisanej nierównością $y \leqslant -\frac{1}{2}(x - 8)$?

A. 9 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 18

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dla jakiej wartości współczynnika c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą $y = \frac{1}{2}x + 3$ i osiami układu współrzędnych.

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0{,}4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz równanie prostej k, jeśli wiadomo, że jest ona prostopadła do prostej l: $y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l.

Zadanie 5 (2 pkt)

Znajdź największą liczbę całkowitą m, dla której prosta $y = \left(\frac{3}{2}m + 9\right)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Uzasadnij, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 7 (4 pkt)

Punkty: $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD.

Zadanie 8 (4 pkt)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B, a prosta $y = 1{,}5x - 6$ – w punktach C i D. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 10 (6 pkt)

Wyznacz punkt przecięcia przekątnych prostokąta $PQRS$, jeśli wiadomo, że $P(-3, 0)$, $S(-1, 4)$, a punkt R leży na osi OX.

W zadaniach 1–4 odpowiedź jest zakodowana: ma formę trzech cyfr opisanych w poleceniu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Prosta $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej $y = \sqrt{3}x + 4$ i przechodzi przez punkt $P(\sqrt{3}, 7)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $a + b$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Punkty $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(4, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Bok CD tego równoległoboku zawiera się w prostej przecinającej oś OX w punkcie $(x_0, 0)$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby x_0.

Zadanie 3 (3 pkt)

Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności najmniejszej liczby całkowitej $m \neq 0$, dla której rozwiązaniem poniższego układu równań jest para liczb dodatnich.

$$\begin{cases} 2x - y = m - 170 \\ mx + my = 2m^2 - 550m \end{cases}$$

Zadanie 4 (3 pkt)

Oznaczmy przez n liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do trójkąta, którego boki zawierają się w prostych $x = 0$, $x - 3y + 9 = 0$ i $3x - y - 5 = 0$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby n^2.

D Zadanie 5 (4 pkt)

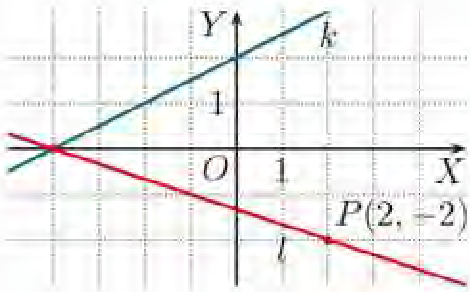
Udowodnij, że proste dane równaniami $y = m^2x + 2x$ i $y = -n^2x - x - 2$ przecinają się w punkcie należącym do III ćwiartki układu współrzędnych dla dowolnych wartości parametrów m i n.

D Zadanie 6 (4 pkt)

Udowodnij, że do prostej $y = \sqrt{6}x - 1$ należy tylko jeden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

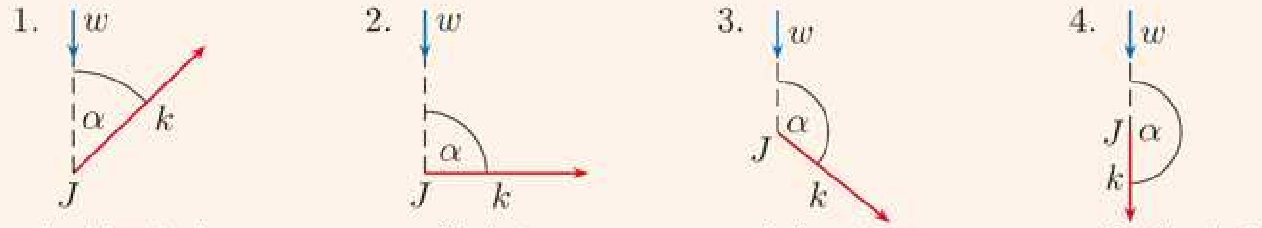
D Zadanie 7 (5 pkt)

Dwa boki trójkąta prostokątnego są zawarte w prostych k i l, a trzeci bok jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt P (rysunek obok). Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe 10 lub 20.



6 Planimetria

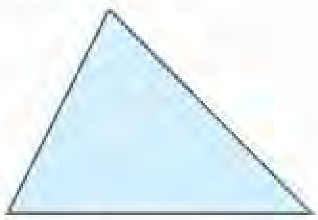
Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarstwie od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka w oznacza kierunek wiatru, punkt J – położenie jachtu, a strzałka k – kurs obrany przez jacht).



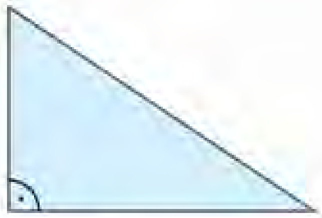
1. bajdewind 2. półwiatr 3. baksztag 4. fordewind

6.1. Miary kątów w trójkącie

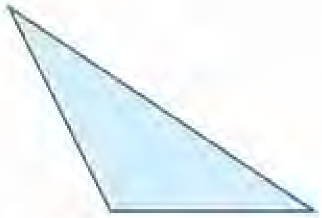
Trójkąt to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.
(Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od 90°.)



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.
(Kąt prosty to kąt o mierze równej 90°.)



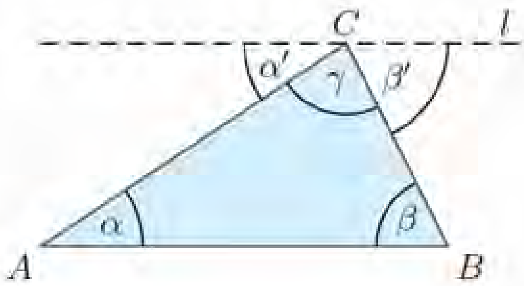
Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.
(Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180°.)

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ABC (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB, przechodzącą przez wierzchołek C. Kąty α i α' są równe (są to kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe). Zatem $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma$. $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, więc również:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180°.

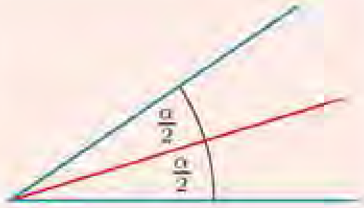
Uwaga. Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt" i „miara kąta".

Ćwiczenie 1

D a) Wykaż, że trójkąt ABC, w którym kąt B jest dwa razy większy od kąta A, a kąt C jest trzy razy większy od kąta A, jest trójkątem prostokątnym.

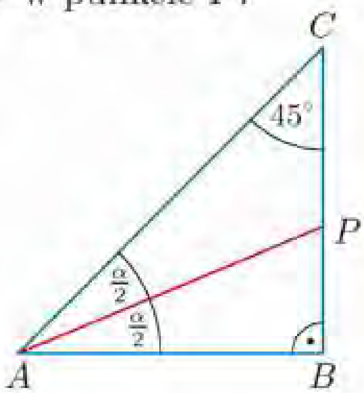
b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak $1:4:5$. Podaj miary tych kątów.

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty przystające.



Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Oblicz miarę kąta APC.



Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 45^\circ$$

Stąd:

$$\sphericalangle CAP = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ$$

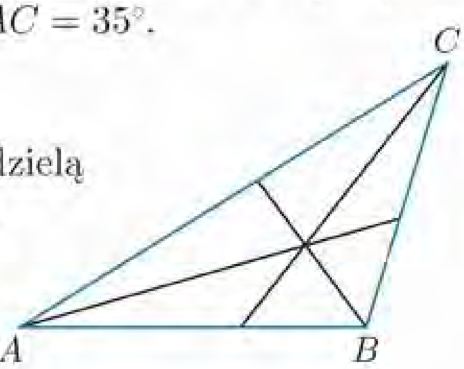
Zatem $\sphericalangle APC = 180^\circ - (45^\circ + 22{,}5^\circ) = 112{,}5^\circ$.

Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Oblicz miary kątów trójkąta APB, jeśli: a) $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, b) $\sphericalangle BAC = 35^\circ$.

Ćwiczenie 3

Dwusieczne kątów trójkąta ABC (rysunek obok) dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów, jeśli miary kątów CAB i CBA są odpowiednio równe 32° i 108°.

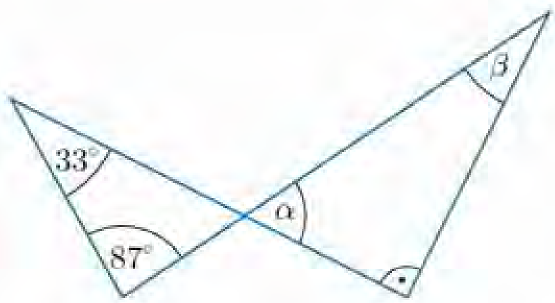


Zadania

1. Wyznacz miary kątów α i β.

a)

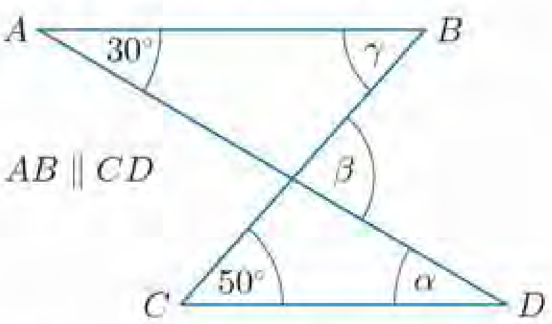
b)



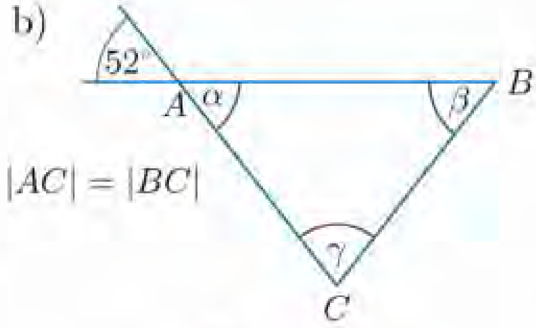
2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi $2:3$, a miara trzeciego kąta jest o 26° większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Wyznacz miary kątów α, β i γ.

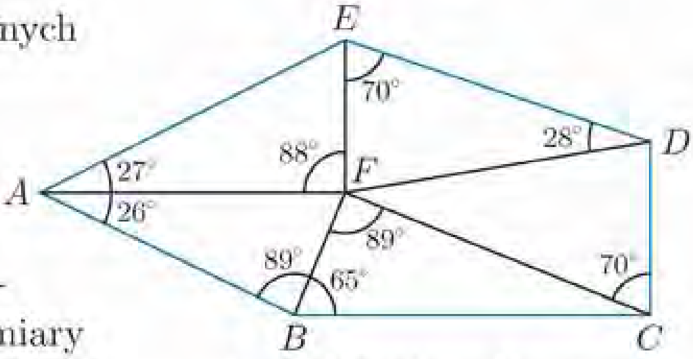
a)



b)



4. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną triangulacją. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Określ miary pozostałych kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.



5. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli ich stosunek jest równy $1:4$.

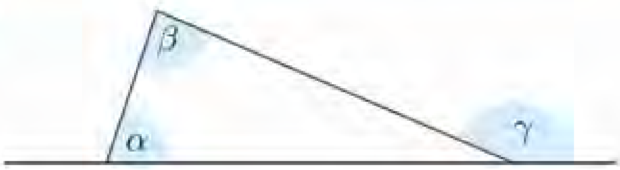
Dwa kąty są **przyległe**, jeśli mają wspólne ramię, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

D **6.** Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

7. Wyznacz miary kątów zewnętrznych trójkąta, jeśli miary jego kątów wewnętrznych są w stosunku $1:2:6$.

Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.

D **8.** Wykaż, że miara kąta zewnętrznego γ trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych α i β.



D **9.** Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa $360°$.

10. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych:

a) w pięciokącie, b) w sześciokącie, c) w n-kącie?

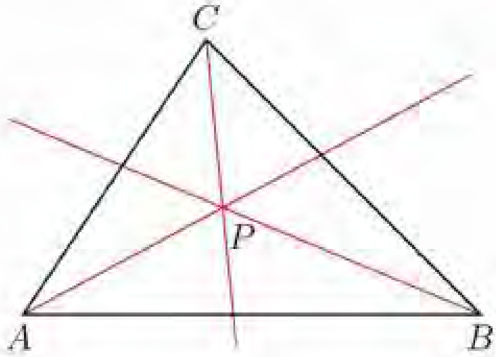
11. Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wewnętrznych jest równa $1440°$?

12. Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty. Podaj miary kątów tych trójkątów.

Warto wiedzieć

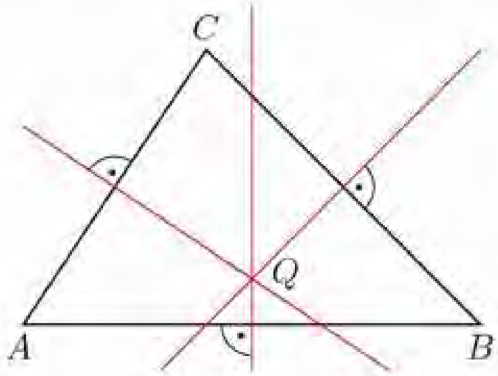
Punkty specjalne w trójkącie

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.



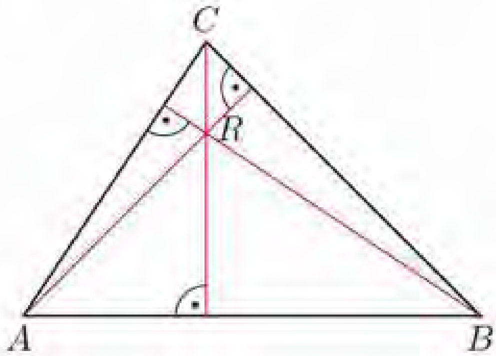
> Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, przechodzącą przez jego środek.



> Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

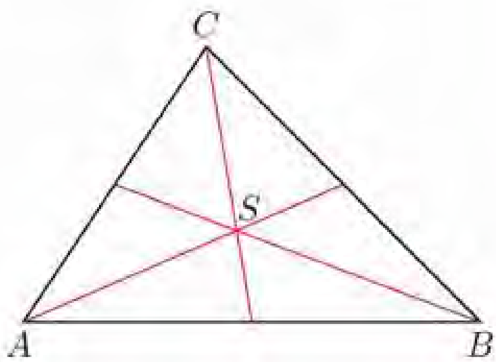
Wysokością trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwległym wierzchołkiem.



> Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



> Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** lub **barycentrum trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

6.2. Trójkąty przystające

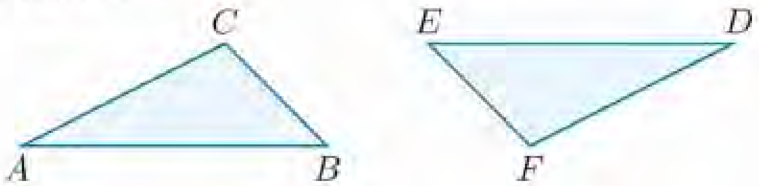
Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

W tym temacie omówimy przystawanie trójkątów.

Symbolem $|AB|$ oznaczać będziemy długość odcinka AB.

Ćwiczenie 1

Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i kątów.



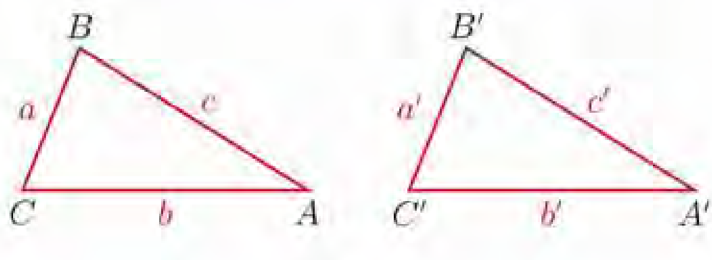
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawaniu trójkątów.

Cecha BBB

> Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

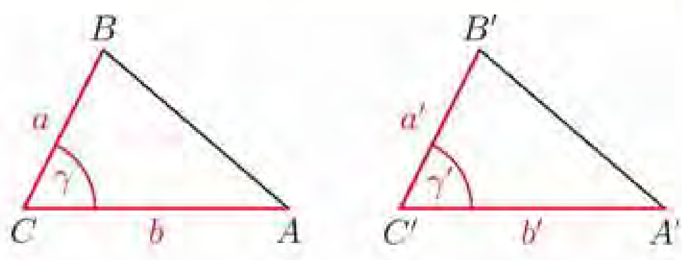


Cecha BKB

> Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

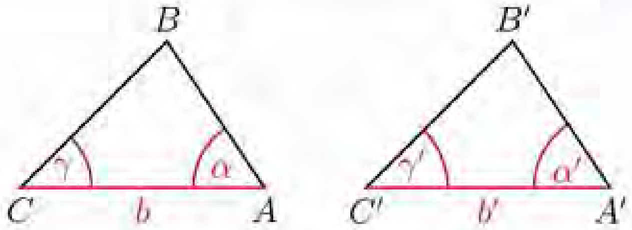


Cecha KBK

> Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 2

Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

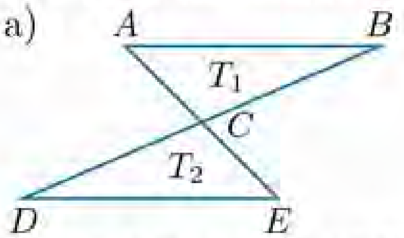
a) trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,

b) mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

Ćwiczenie 3

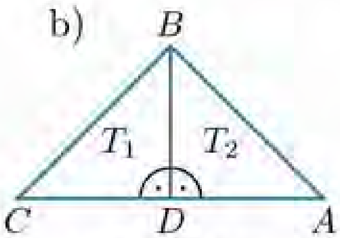
Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty T_1 i T_2 są przystające.

a)



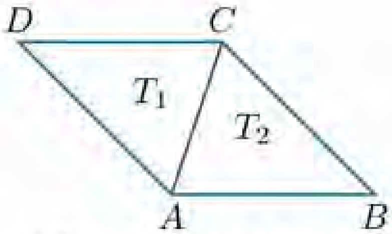
$AB \parallel DE$, $|AC| = |CE|$

b)



$|AD| = |CD|$

c)



$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

D Przykład 1

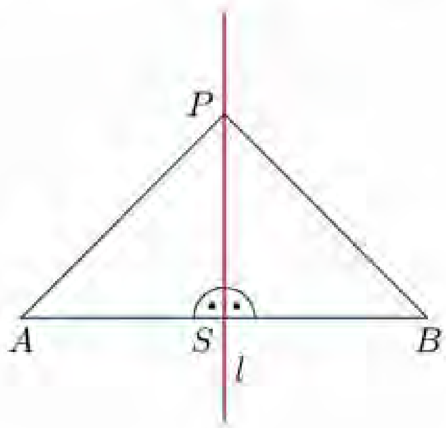
Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek AB i jego symetralną l, tj. prostą przechodzącą przez środek tego odcinka (punkt S) i do niego prostopadłą.

Niech P będzie dowolnym, różnym od S, punktem symetralnej.

Korzystając z cechy BKB, stwierdzamy, że trójkąty ASP i BSP są przystające (uzasadnij).

Zatem zachodzi równość $|AP| = |BP|$.



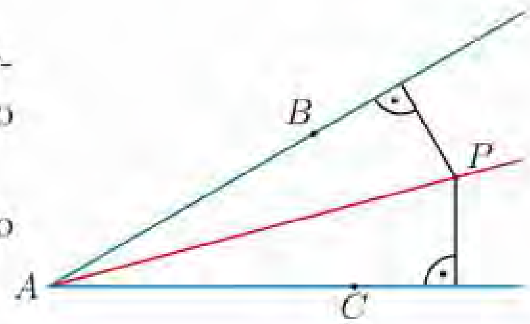
D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D **Ćwiczenie 5**

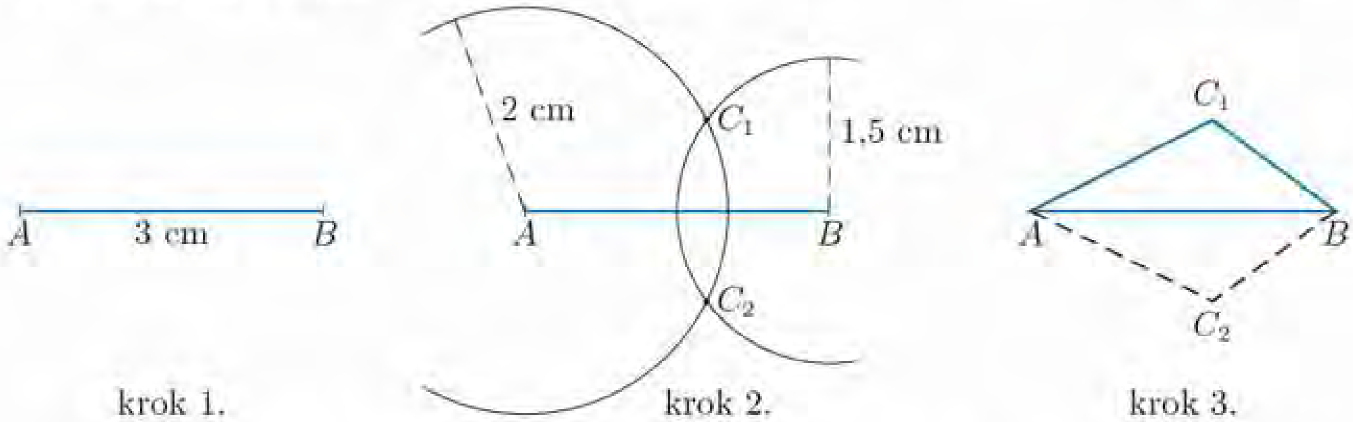
a) Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC (rysunek obok). Uzasadnij, że punkt P jest równo odległy od ramion tego kąta.

b) Uzasadnij, że dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości: 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



W kroku 2. z punktów A i B zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie C_1 oraz w punkcie C_2.

Konstrukcja trójkąta jest możliwa tylko wtedy, gdy najdłuższy odcinek jest krótszy od sumy dwóch pozostałych.

Nierówność trójkąta

Z odcinków długości: a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Ćwiczenie 6

Czy boki trójkąta mogą mieć długości:

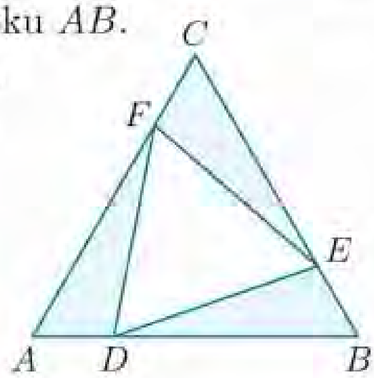
a) $2, 2, \sqrt{7}$, b) $7, 8, \sqrt{225}$, c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, d) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$?

Ćwiczenie 7

Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli mamy dane dwa odcinki długości 2 dm, trzy odcinki długości 3 dm i dwa odcinki długości 5 dm?

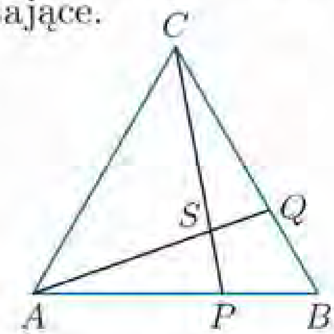
Zadania

D **1.** a) W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AB. Uzasadnij, że trójkąty APD i BPC są przystające.
b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.



D **2.** Trójkąt ABC jest równoboczny (patrz rysunek). Odcinki AD, BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

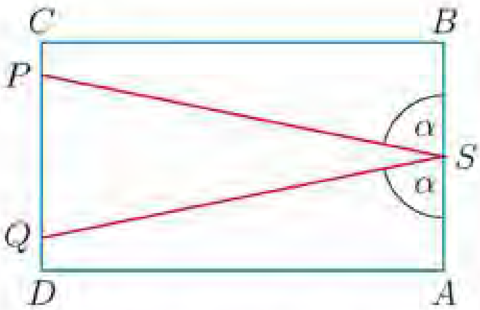
D **3.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Środkowe AP i BQ tego trójkąta przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąty AOQ i BOP są przystające.



D **4.** W trójkącie równobocznym ABC (rysunek obok) na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty P i Q tak, że $|AP| = 2|BP|$ i $|CQ| = 2|BQ|$. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie S. Uzasadnij, że trójkąty APS i CQS są przystające.

D **5.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwie pary boków są równe: $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DA|$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąt AOB jest przystający do trójkąta COB oraz trójkąt AOD jest przystający do trójkąta COD.

D **6.** Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (rysunek obok). Kula przebyła drogę z P do S i z S do Q, gdzie S jest środkiem bandy AB. Uzasadnij, że $|PC| = |QD|$.

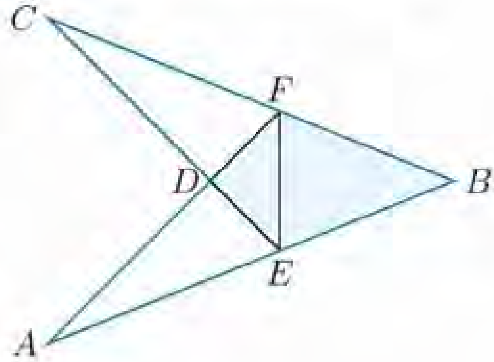


D **7.** Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.

D **8.** W czworokącie $ABCD$ (rysunek obok) kąty EFB i FEB są równe oraz $|AE| = |CF|$. Uzasadnij, że:

a) trójkąty BAF i BCE są przystające,

b) czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.

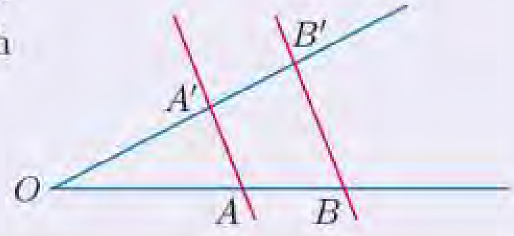


6.3. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA' są przecięte dwiema prostymi równoległymi AA' i BB', to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

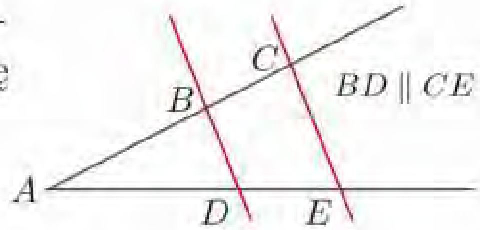
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



Ćwiczenie 1

a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać proporcję prawdziwą? Zapisz tę proporcję w zeszycie.

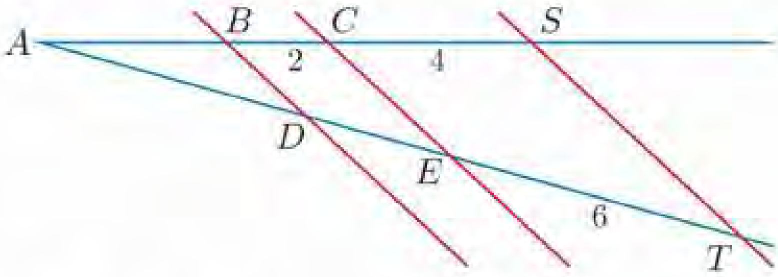
$$\frac{\boxed{?}}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \qquad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\boxed{?}}{|DE|}$$



b) Oblicz długość odcinka AD, jeśli: $|AB| = 3{,}6$; $|AC| = 5{,}4$; $|DE| = 1{,}2$.

Ćwiczenie 2

Proste: BD, CE i ST (rysunek obok) są równoległe.



D a) Uzasadnij, że:

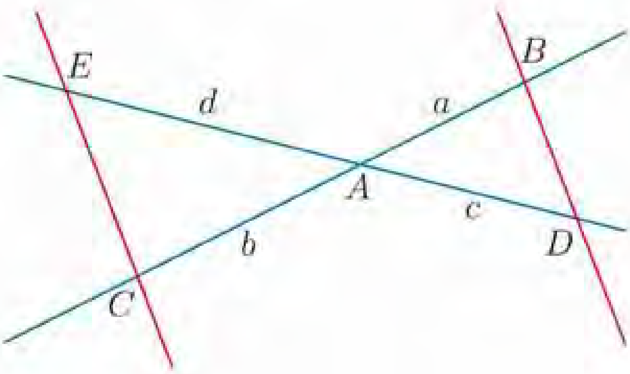
$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

b) Oblicz długości odcinków: AD i DE, jeśli $|AS| = 10$.

Zauważmy, że równość $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ($BD \parallel CE$).

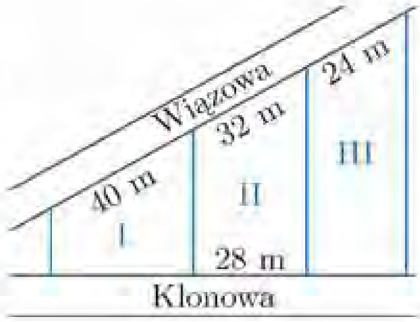
Ćwiczenie 3

Oblicz długość odcinka ED (rysunek obok), jeśli $a = 3{,}6$, $b = 4{,}8$, $c = 4{,}5$ oraz proste BD i CE są równoległe.



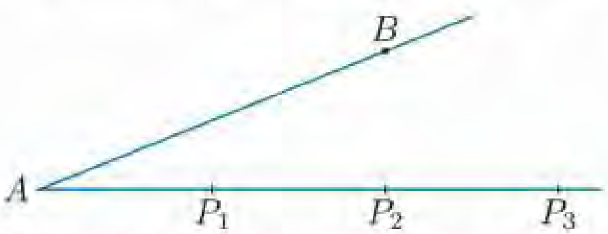
Ćwiczenie 4

Każda z trzech działek budowlanych położonych między ulicami Klonową i Wiązową ma kształt trapezu (rysunek obok). Oblicz długości boków działek I i III przylegających do ulicy Klonowej.

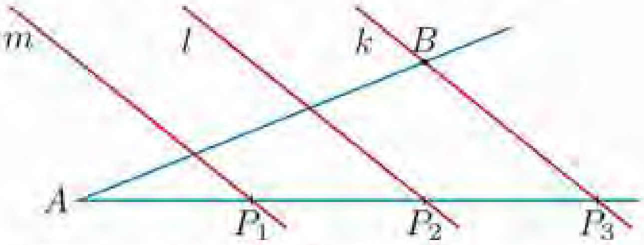


Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podziel dany odcinek AB na trzy równe części.



Odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzamy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki AP_1, P_1P_2 i P_2P_3.



Przez punkt P_3 i B prowadzimy prostą (prosta k), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej k przechodzące przez punkty P_2 i P_1 (proste l i m). Patrz str. 283.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 5

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku $4:5$?

Prawdziwe jest również **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**.

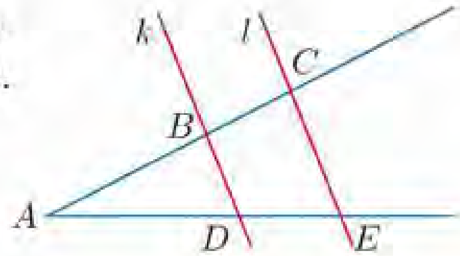
Twierdzenie

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Ćwiczenie 6

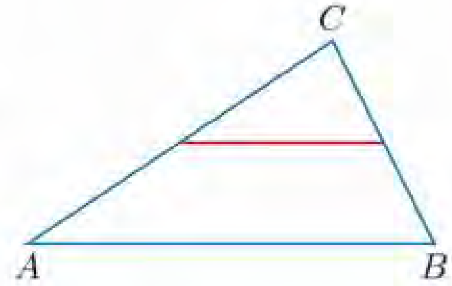
a) Podaj przykłady proporcji odcinków, z których wynika równoległość prostych k i l (rysunek obok).

D b) Uzasadnij, że jeśli $|AB| = 2{,}4$, $|AC| = 3{,}6$, $|AD| = 2{,}8$ i $|DE| = 1{,}4$, to proste BD i CE są równoległe.



D **Ćwiczenie 7**

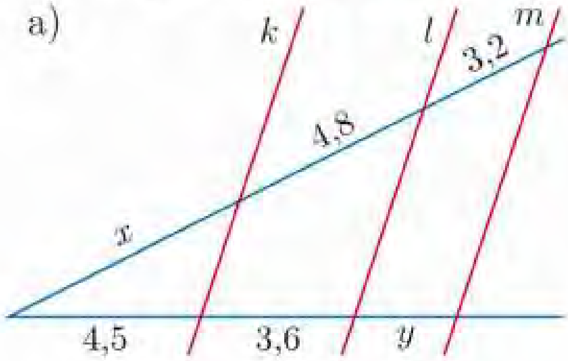
Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku.



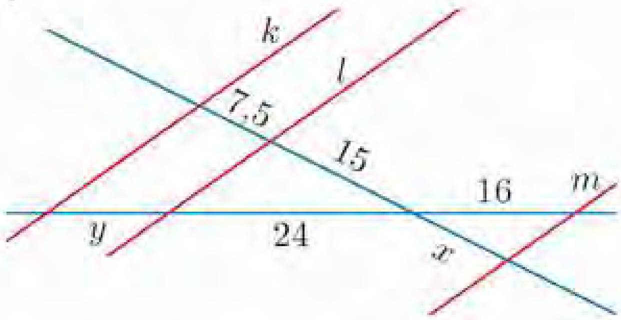
Zadania

1. Wiedząc, że proste k, l i m są równoległe, oblicz długości x i y.

a)

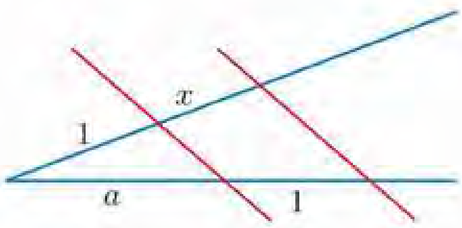


b)



2. Dany jest trapez $ABCD$ o ramionach $|AD| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm. Na ramieniu AD wybrano punkty P i Q takie, że $|AQ| = 7$ cm i $|DP| = 5$ cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty P i Q podzieliły ramię BC.

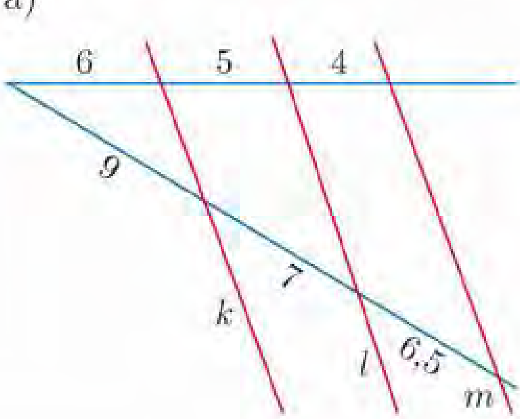
3. Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinek o długości $x = \frac{1}{a}$. Opisz, jak mając dane odcinki o długościach 1 i a, skonstruować odcinki o długościach a^2 i a^3.



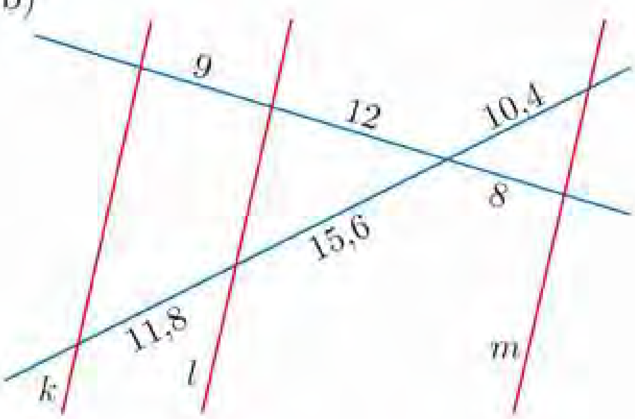
4. Opisz, jak podzielić dany odcinek w stosunku $1 : \sqrt{2}$.

5. Sprawdź, które z prostych k, l i m są równoległe.

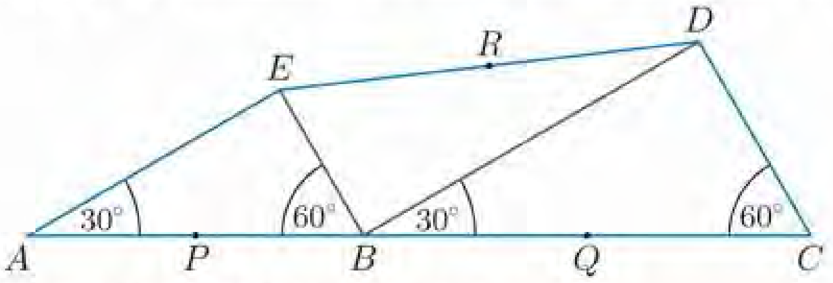
a)



b)



6. Punkty: P, Q i R są środkami odcinków: AB, BC i DE (rysunek poniżej).

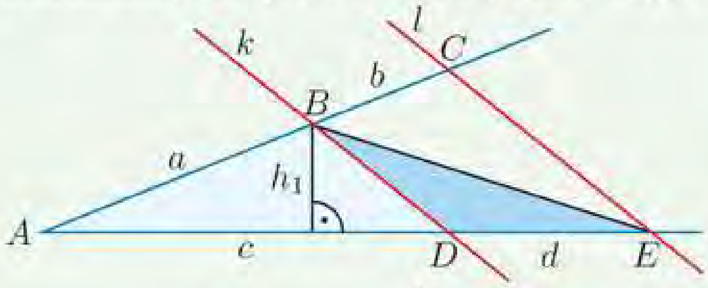


D a) Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny.

b) Oblicz obwody trójkątów BDE i PQR, jeśli $|AB| = 6$ i $|CD| = 4$.

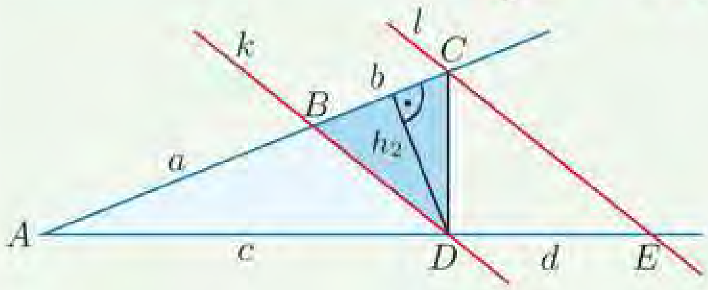
Dowód twierdzenia Talesa

Zakładamy, że proste k i l są równoległe (rysunek poniżej).



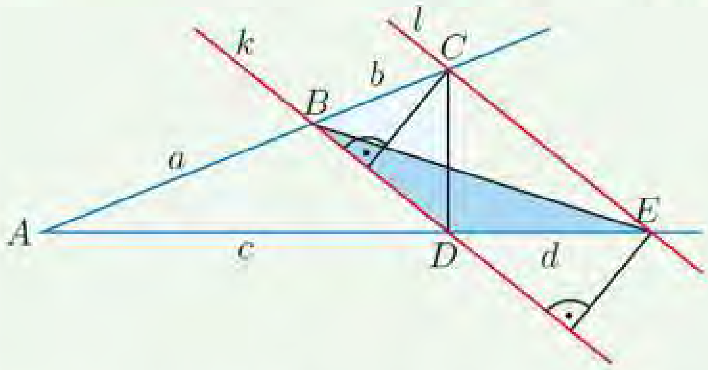
Trójkąty ADB i DEB mają wspólną wysokość h_1, zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty ADB i CBD mają wspólną wysokość h_2, zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty DEB i CBD mają wspólną podstawę BD oraz tę samą wysokość (gdyż proste k i l są równoległe). Zatem:

$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

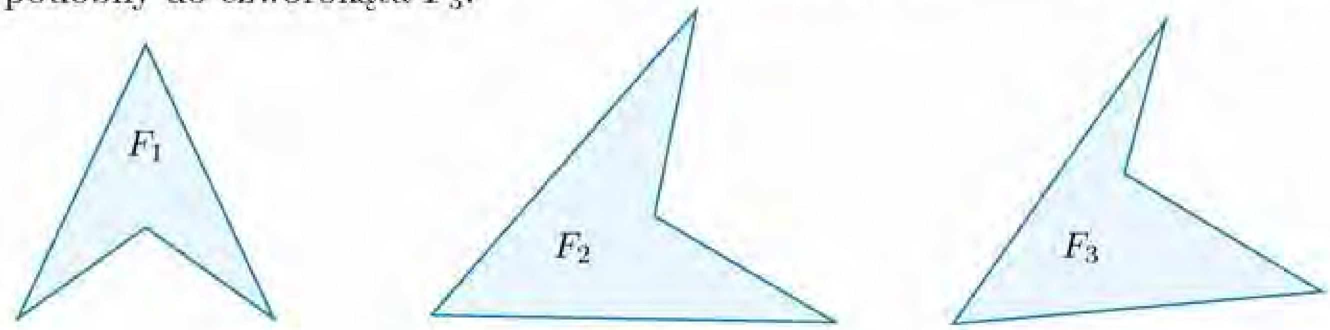
Na podstawie powyższych równości otrzymujemy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub równoważnie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

D **7.** Skorzystaj z oznaczeń na rysunku powyżej i uzasadnij, że z równości $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ wynika równość $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$.

6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty F_1 i F_2. Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta F_3.



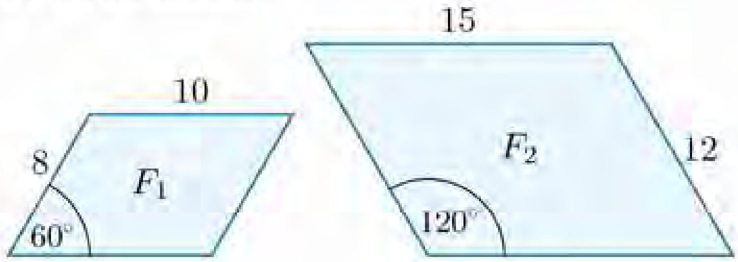
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Jeśli figury F_1 i F_2 są podobne, to piszemy $F_1 \sim F_2$.

Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

Długości boków równoległoboków F_1 i F_2 są proporcjonalne, ponieważ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$, a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem $F_1 \sim F_2$.



Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt P_1 o bokach $a = 2{,}4$ i $b = 1{,}8$. Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta P_2 o bokach c i d.

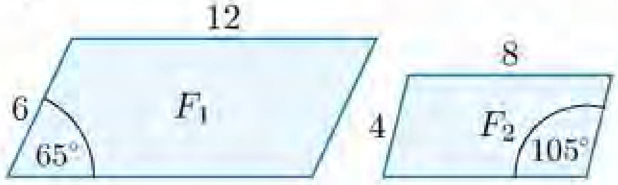
a) $c = 3{,}6,\ \ d = 2{,}7$ b) $c = 4,\ \ d = 6$ c) $c = 54,\ \ d = 72$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

a)

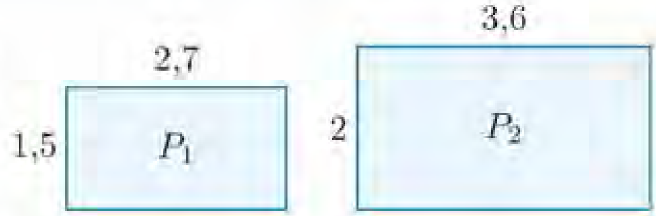
b)



Stosunek długości odpowiadających sobie odcinków w wielokątach podobnych nazywamy **skalą podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą k).

Przykład 2

Prostokąty P_1 i P_2 (rysunek obok) są podobne. Podaj skale podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz prostokąta P_1 do prostokąta P_2.



Skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$$

Zwróć uwagę, że również $\frac{3{,}6}{2{,}7} = \frac{4}{3}$.

Skala podobieństwa prostokąta P_1 do prostokąta P_2 jest równa:

$$k_2 = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$$

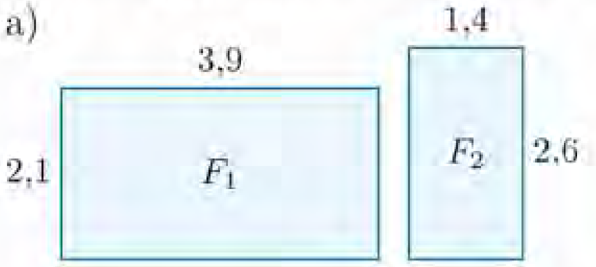
Zauważ, że skale podobieństwa k_1 i k_2 są liczbami odwrotnymi.

Zwróć uwagę, że jeśli figury F_1 i F_2 są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

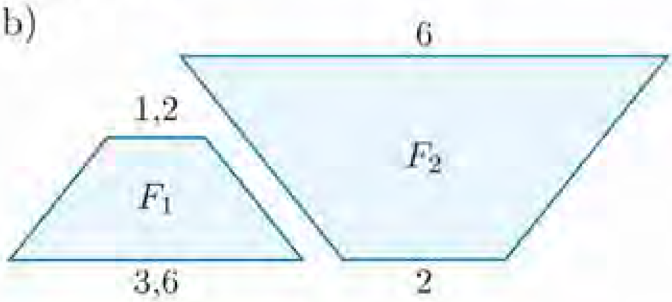
Ćwiczenie 3

Figury F_1 i F_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do figury F_2.

a)



b)



Przykład 3

Dane są prostokąty: P_1 o bokach $a_1 = 5$ i $b_1 = 8$ oraz podobny do niego P_2 o krótszym boku $a_2 = 15$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta P_2.

Oznaczmy przez b_2 długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

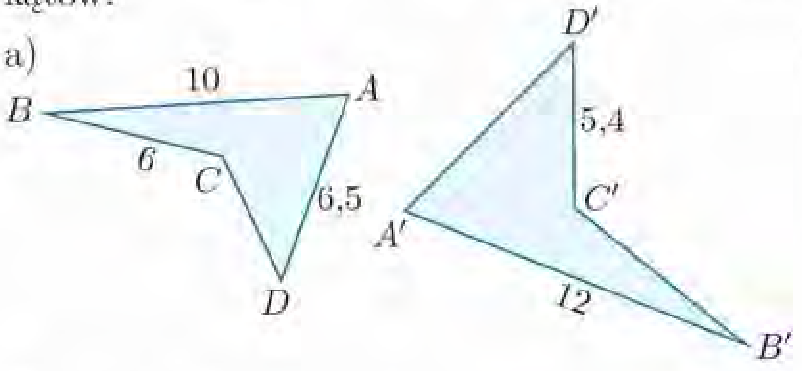
Stąd $\frac{b_2}{8} = 3$, czyli $b_2 = 24$.

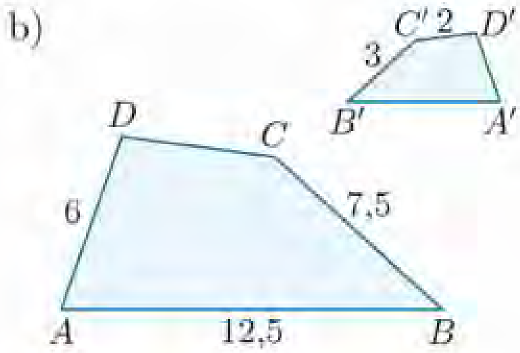
Długość boku b_2 możemy też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa k prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

Ćwiczenie 4

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Oblicz skalę podobieństwa większego czworokąta do mniejszego oraz brakujące długości boków tych czworokątów.





Ćwiczenie 5

Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

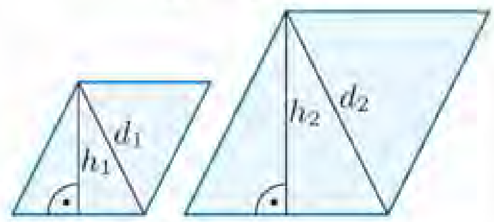
Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$, a jego krótsza przekątna ma długość $9\sqrt{3}$ cm.

a) Oblicz obwód równoległoboku $A'B'C'D'$.

b) Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali k, to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$



Zadania

1. Oblicz skalę podobieństwa kwadratu K_1 o boku 5 cm do kwadratu K_2:

a) o przekątnej $8\sqrt{2}$ cm,

b) o obwodzie 40 cm.

2. Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.

3. Dany jest prostokąt P o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta P', jeśli skala podobieństwa prostokąta:

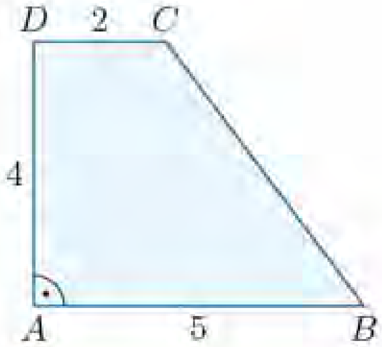
a) P' do P jest równa 3,

b) P do P' jest równa 2.

D **4.** Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

5. a) Dwa romby są podobne w skali $k = \frac{5}{2}$. Oblicz obwód każdego z nich, jeśli długości przekątnych mniejszego są równe 12 i 16.

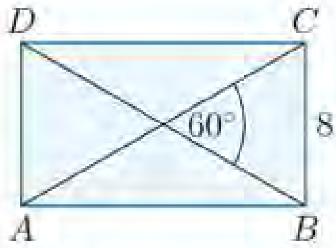
b) Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 10 i 24, obwód podobnego do niego rombu $A'B'C'D'$ jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.



6. Trapez $A'B'C'D'$ o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu $A'B'C'D'$.

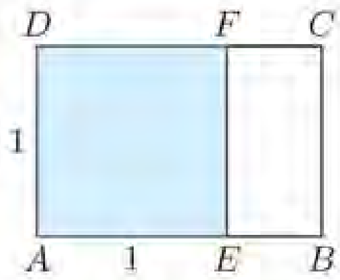
7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{25}{24}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.

8. Dwa kwadraty o przekątnych długości d_1 i d_2 są podobne w skali $k = \sqrt{2}$. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów, jeśli $d_1 + d_2 = 2$.



9. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz skalę podobieństwa tych figur, jeśli obwód prostokąta $A'B'C'D'$ jest równy $20 + 20\sqrt{3}$.

D **10.** Prostokąt o bokach długości x i 4, gdzie $x > 4$, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i $x + 5$. Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.



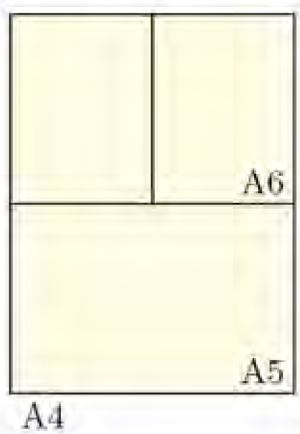
D **11.** Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1. Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 (rysunek obok) otrzymamy prostokąt $BCFE$ podobny do prostokąta $ABCD$.

12. Arkusz papieru formatu A4 jest prostokątem, który po złożeniu na pół daje dwa prostokąty podobne do prostokąta wyjściowego (arkusze formatu A5).

a) Jaki jest stosunek długości boków arkusza A4?

b) Krótszy bok arkusza A4 ma długość 21 cm. Jaką długość ma dłuższy bok? Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 mm.

c) Jakie są wymiary arkusza A5, a jakie – arkusza A6?



6.5. Trójkąty podobne

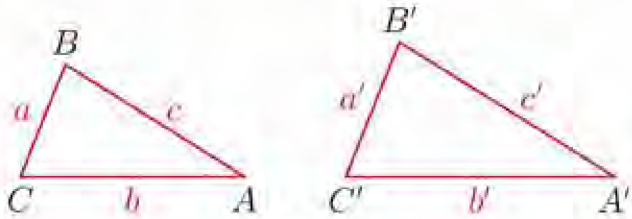
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać przystawania wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

Cecha BBB

> Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

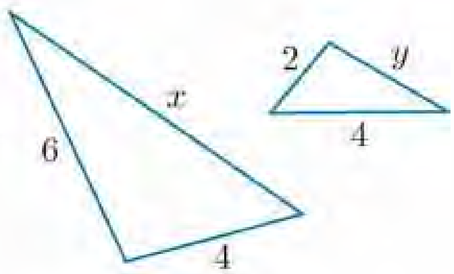
Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne. Oblicz długości boków x i y tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.



Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

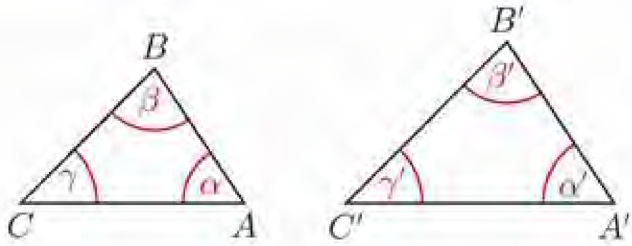
b) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 20

Cecha KKK

> Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



D **Ćwiczenie 3**

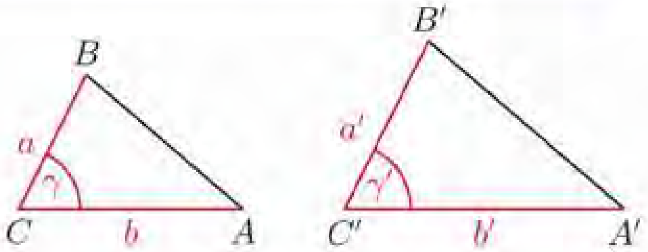
a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę 27°, jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę 63°.

Cecha BKB

> Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ i $\gamma = \gamma'$, to:
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



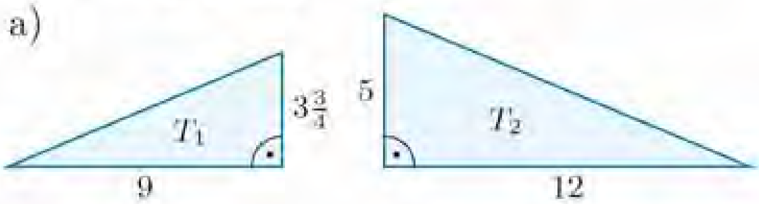
D Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne T_1 i T_2. Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych w trójkącie T_1 równa się stosunkowi długości przyprostokątnych w trójkącie T_2, to trójkąty te są podobne.

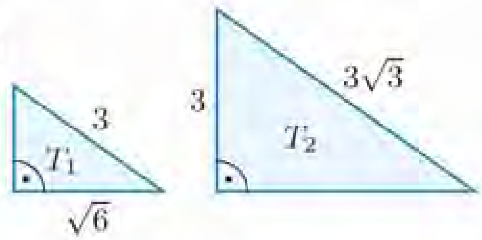
D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_1 do trójkąta T_2.

a)

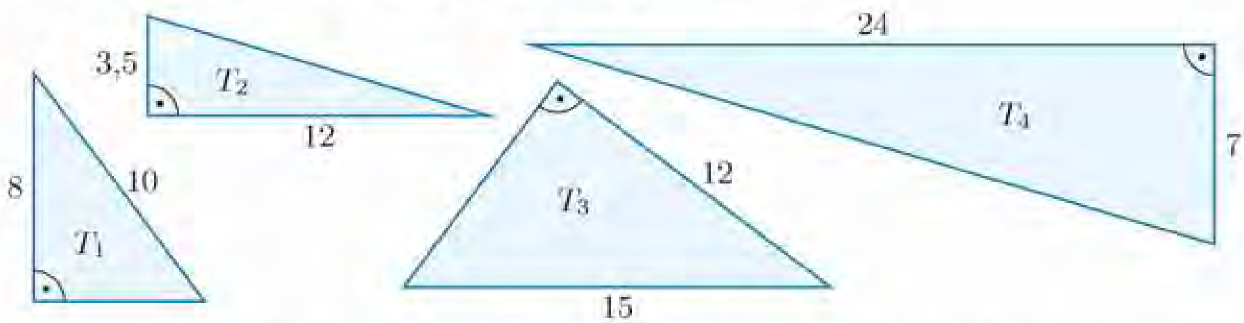


b)



Zadania

1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.

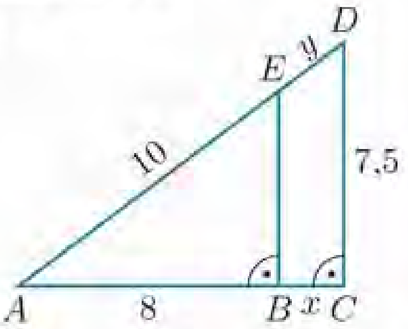


2. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: 6, 8, 12. Najdłuższy bok trójkąta $A'B'C'$ jest równy 16 oraz $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów? Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$.

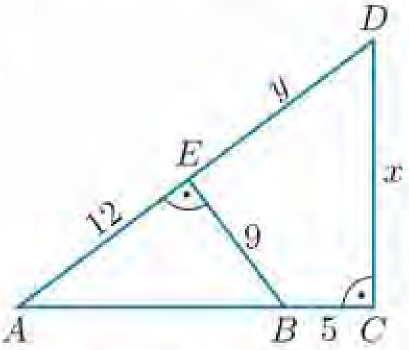
b) Trójkąt ABC, którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości: 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków x i y.

a)

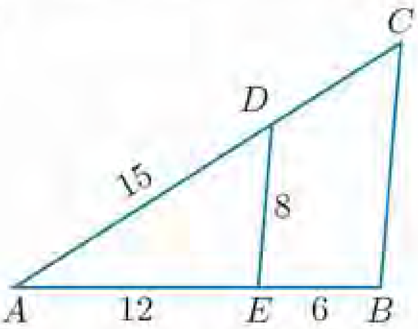


b)

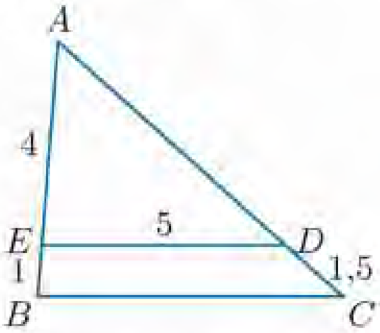


4. Wiedząc, że $ED \parallel BC$, oblicz obwód trójkąta ABC.

a)



b)



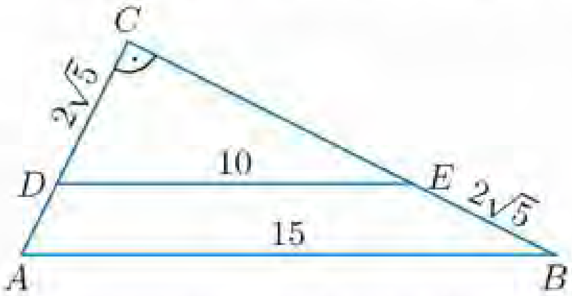
5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.

b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5.
Oblicz obwody obu trójkątów.

D **6.** Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Oblicz:

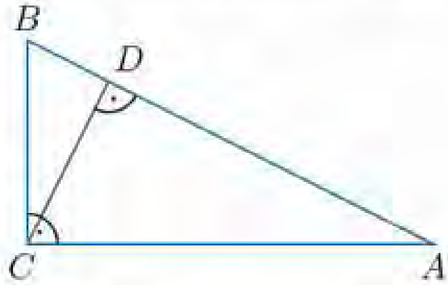
a) skalę podobieństwa tych trójkątów,

b) obwody tych trójkątów.



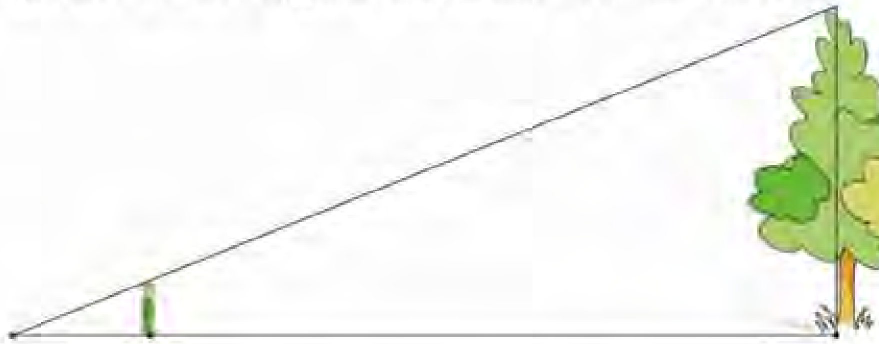
D **7.** a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Odpowiedź uzasadnij.

b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną.



8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki długości 2 cm i 8 cm.

9. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrył się z końcem cienia drzewa. Okazało się, że musiał stanąć w odległości 22,5 m od drzewa. Cień rzucany przez ucznia miał długość 4,5 m. Jaka jest wysokość drzewa, jeśli uczeń ma 180 cm wzrostu?

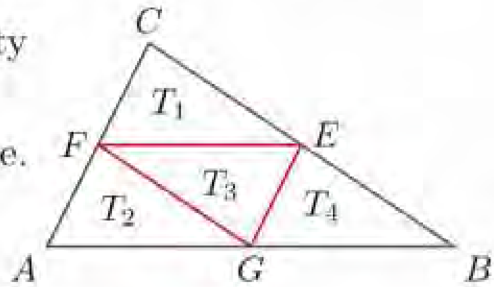


D **10.** W trójkącie ostrokątnym DEF poprowadzono wysokości DM i EN. Wykaż, że trójkąty FEN i FDM są podobne.

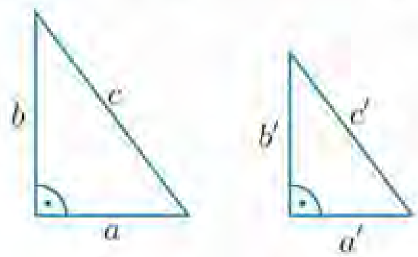
D **11.** W trójkącie ABC połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).

a) Wykaż, że trójkąty ABC i EFG są podobne.

b) Uzasadnij, że trójkąty: T_1, T_2, T_3 i T_4 są przystające.

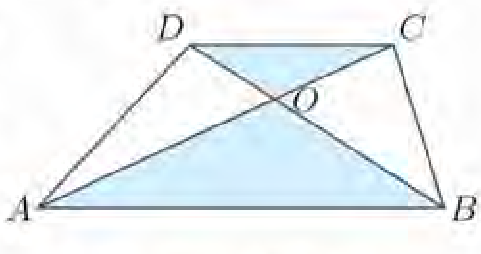


D **12.** Uzasadnij, że jeśli stosunek przeciwprostokątnych trójkątów prostokątnych jest równy stosunkowi odpowiednich przyprostokątnych, tj. $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ lub $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, to trójkąty te są podobne.



D **13.** a) Dany jest trapez o podstawach AB i CD. Jego przekątne przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąty ABO i CDO są podobne.

b) Jaka jest odległość punktu O (rysunek obok) od krótszej podstawy, jeśli wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw są równe odpowiednio 4 cm i 8 cm? Oblicz pola trójkątów ABO i CDO.



D **14.** a) Dany jest trapez o podstawie AB i przekątnych AC i BD. Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie O, to pola trójkątów AOD i BOC są równe.

b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm – od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą trapez.

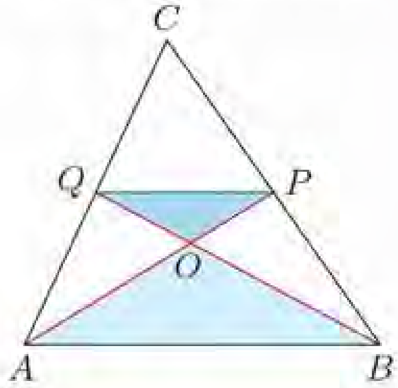
Warto wiedzieć

Proste i odcinki pomocnicze

Przeprowadzając dowody w geometrii, często dorysowujemy pomocnicze odcinki lub proste.

D **1.** Udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

Rozpatrzmy środkowe AP i BQ trójkąta ABC. Punkt O jest punktem ich przecięcia. Rysujemy pomocniczy odcinek PQ.



Uzasadnij kolejno, że:

a) odcinek PQ jest równoległy do odcinka AB,

b) trójkąty ABO i PQO są podobne,

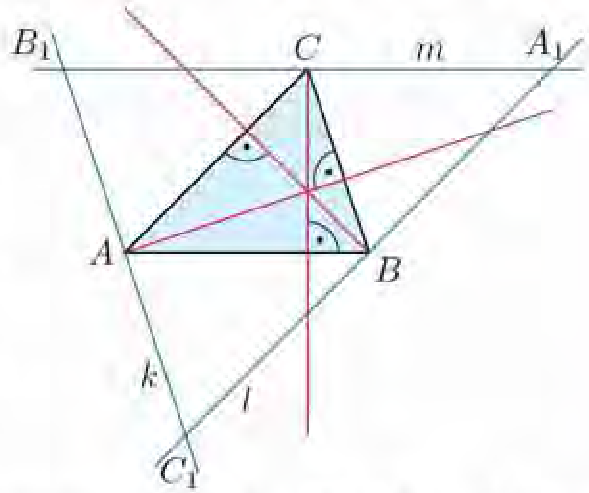
c) punkt O dzieli każdą ze środkowych AP i BQ w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C, a następnie uzasadnij, że wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D **2.** Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dany jest trójkąt ABC. Rysujemy proste pomocnicze:

- prosta k jest równoległa do boku BC i przechodzi przez wierzchołek A,
- prosta l jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B,
- prosta m jest równoległa do boku AB i przechodzi przez wierzchołek C.



Punkty przecięcia prostych k, l, m oznaczamy przez A_1, B_1, C_1 – jak na rysunku. Uzasadnij kolejno, że:

a) czworokąty $ABCB_1$ i AC_1BC są równoległobokami (skąd wynika, że $|AC_1| = |AB_1|$, analogicznie $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$),

b) punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$ jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC.

6.6. Pola wielokątów podobnych

Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

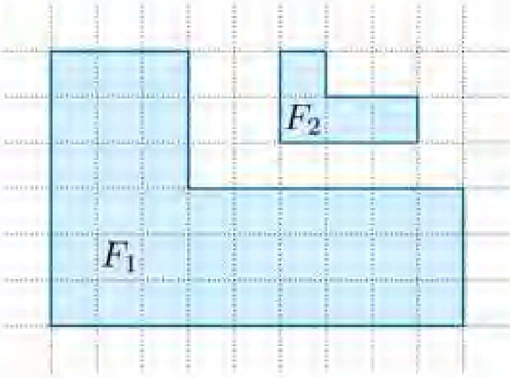
Niech bok pierwszego kwadratu ma długość a, wówczas bok drugiego z nich ma długość $a + 20\%\, a = 120\%\, a = \frac{6}{5}a$.

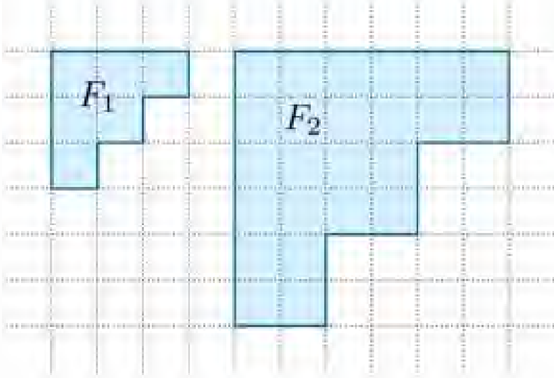
Zatem skala podobieństwa $k = \frac{6}{5}$.

Pola kwadratów są odpowiednio równe a^2 i $\frac{36}{25}a^2$, zatem stosunek ich pól jest równy $\frac{36}{25}$. Zauważmy, że $\frac{36}{25} = k^2$.

Ćwiczenie 1

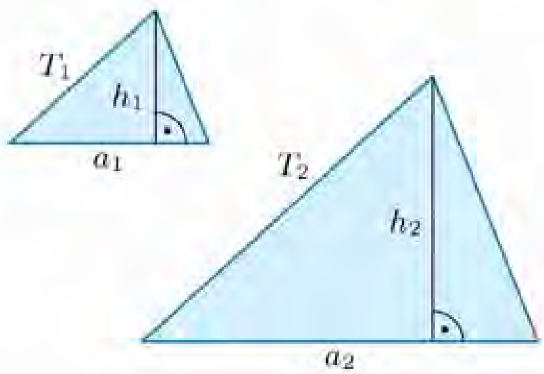
Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne F_1 i F_2. Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury F_2 do pola figury F_1.

a) 

b) 

D **Przykład 2**

Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali k. Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta T_2 do pola trójkąta T_1 jest równy k^2.



Pole trójkąta T_1: $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$.

Dla trójkąta T_2 mamy:

$a_2 = k \cdot a_1, \;\; h_2 = k \cdot h_1$.

Stąd pole trójkąta T_2:

$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1$

Zatem $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_1h_1}{\frac{1}{2}a_1h_1} = k^2$.

D **Ćwiczenie 2**

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali k. Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta P_2 do pola prostokąta P_1 jest równy k^2.

Twierdzenie

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się k, to stosunek ich pól jest równy k^2.

Ćwiczenie 3

Jaka jest skala podobieństwa dwóch kwadratów, jeśli pole jednego z nich jest:

a) o 19% mniejsze od pola drugiego, b) o 125% większe od pola drugiego?

Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny T_1 o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu T_2 podobnego do trapezu T_1 jest równe 6 cm^2. Oblicz skalę podobieństwa trapezu T_2 do trapezu T_1 oraz ich obwody.

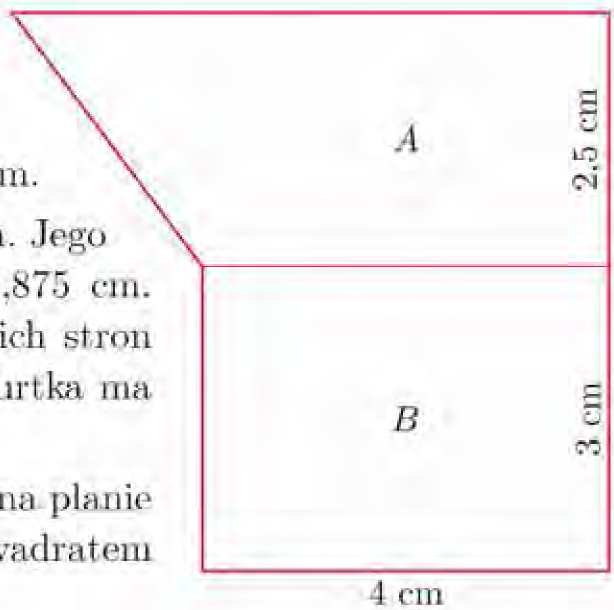
Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

a) Wyznacz skalę planu, jeśli działka B jest prostokątem o wymiarach 32 m × 24 m.

b) Działka A jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość 5,875 cm. Czy na ogrodzenie działki A ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość 1,5 m?

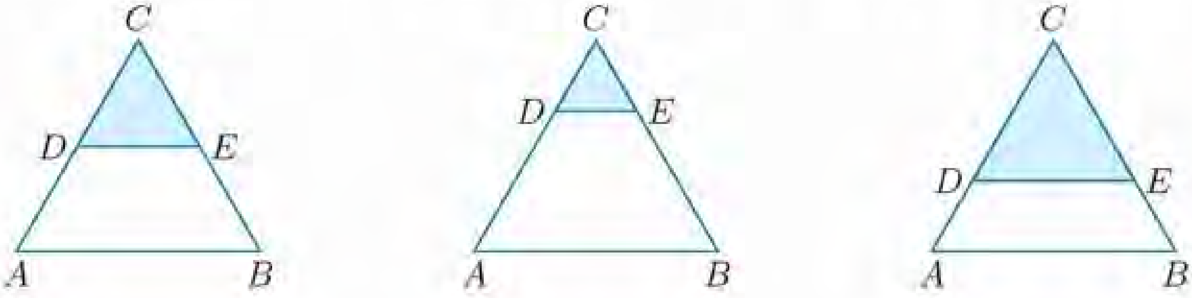
c) Jaka jest powierzchnia działki C, jeśli na planie wykonanym w tej samej skali jest ona kwadratem o polu równym 9 cm^2?



Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt równoboczny ABC, którego bok ma długość 12 cm. Odcinek DE jest równoległy do boku AB, a pole trójkąta DEC jest równe P. Wyznacz stosunek długości odcinków DC do AC i oblicz obwód trapezu $ABED$.

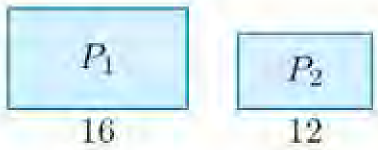
a) $P = 9\sqrt{3}$ cm^2 b) $P = 4\sqrt{3}$ cm^2 c) $P = 16\sqrt{3}$ cm^2



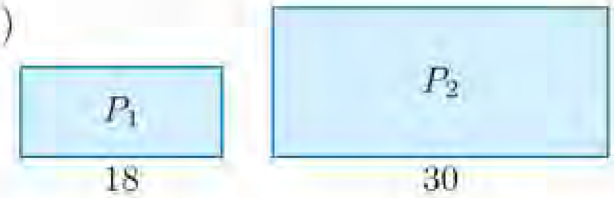
Zadania

1. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz pole prostokąta P_2, jeśli wiadomo, że pole prostokąta P_1 jest równe 144 cm^2.

a)



b)



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.

3. a) Trójkąt prostokątny T_2 jest podobny do trójkąta T_1 o polu równym 45 cm^2 w skali $k = \frac{2}{3}$. Oblicz obwód trójkąta T_2, jeśli wiadomo, że jedna z jego przyprostokątnych ma długość 10 cm.

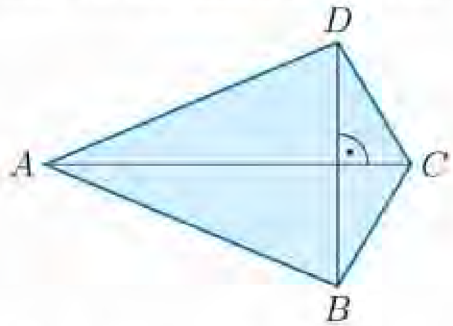
b) Romb R_2 jest podobny do rombu R_1 w skali $k = 3$. Pole rombu R_2 jest równe 648 cm^2. Oblicz obwód każdego z rombów, jeśli wiadomo, że jedna z przekątnych rombu R_1 ma długość 6 cm.

4. Dany jest równoległobok R_1, którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok R_2 o polu $200\sqrt{5}$ cm^2 jest podobny do równoległoboku R_1. Oblicz obwód równoległoboku R_2.

5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2, a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.

b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa 180 cm^2, a ich skala podobieństwa $k = 3$. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.

6. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długości: $|AC| = 15$ cm i $|BD| = 10$ cm. Oblicz pole powierzchni latawca podobnego do tego deltoidu, jeśli wiadomo, że jego wymiary są czterokrotnie większe.



7. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 w skali $\frac{3}{4}$. Stosunek pól wielokątów podobnych F_2 i F_3 jest równy $\frac{4}{9}$. Oblicz skalę podobieństwa wielokąta F_3 do F_1.

8. Trzy odbitki zdjęć to prostokąty podobne P_1, P_2 i P_3. Pole prostokąta P_2 jest o 44% większe od pola prostokąta P_1, a pole prostokąta P_3 jest o 125% większe od pola prostokąta P_1. Oblicz wymiary prostokąta P_3, jeśli wymiary prostokąta P_2 są równe $24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$.

9. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.

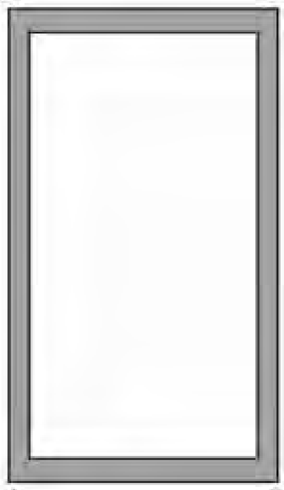
10. Działka budowlana o powierzchni 1025 m^2 ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m. Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.

11. W trójkącie prostokątnym ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm, poprowadzono wysokość CD. Stosunek pól trójkątów ADC i BCD jest równy 4. Oblicz obwód trójkąta ABC.

12. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie P. Oblicz odległości punktu P od podstaw trapezu, wiedząc, że stosunek pola trójkąta ABP do pola trójkąta CDP jest równy $\frac{9}{4}$.

* D 13. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie P. Pole trójkąta ABP jest równe S_1, a pole trójkąta DCP jest równe S_2. Uzasadnij, że pole tego trapezu jest równe $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

14. Według projektu zewnętrzny obrys fundamentów domu jest prostokątem. Przed wykonaniem wykopu kierownik budowy nakazał, oprócz pomiaru długości boków, wykonanie pomiaru długości przekątnych. Jak sądzisz, dlaczego?



a) W projekcie budynku wykonanym w skali 1:50 $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 18$ cm. Ile powinien wynieść wynik pomiaru przekątnej w terenie?

b) Ile m^3 betonu potrzeba na wykonanie fundamentów, jeśli ich przekrój poprzeczny ma mieć wymiary $0{,}5 \text{ m} \times 0{,}5 \text{ m}$?

Fraktale

Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest **krzywa Kocha** (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.

Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o $\frac{1}{3}$ długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:
$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots$

Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, ale jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.


Śnieżynka Kocha

SAMOPODOBIEŃSTWO
Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.

1 Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?

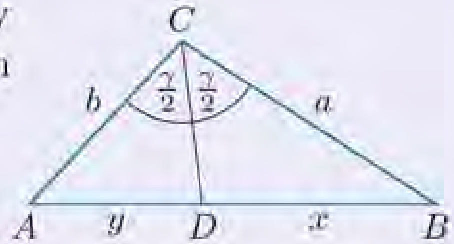
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód

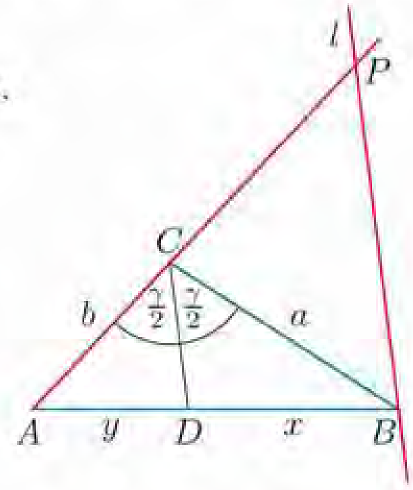
Rysujemy półprostą AC oraz prostą l równoległą do prostej CD przechodzącą przez punkt B. Punkt przecięcia półprostej AC z prostą l oznaczamy przez P.

Proste CD i BP są równoległe, więc:

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle APB$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBP$ (uzasadnij).

Oznacza to, że trójkąt BPC jest równoramienny i $|CP| = |CB| = a$.

Z twierdzenia Talesa otrzymujemy: $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$, zatem $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



Ćwiczenie 1

a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.

b) Przeciwprostokątna trójkąta o kątach 30°, 60°, 90° ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.

c) Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości $\frac{15}{7}$ i $\frac{20}{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

d) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę $22{,}5^\circ$. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1.

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB, jeśli:

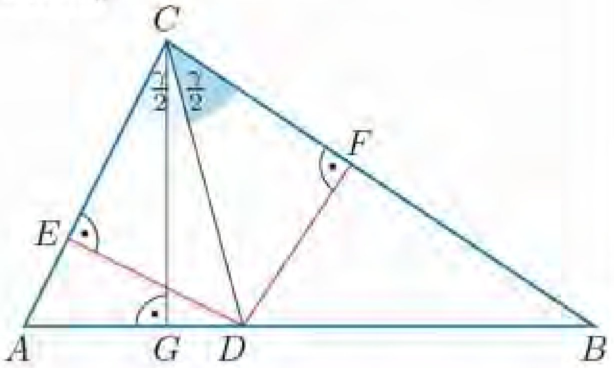
a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$, b) $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$.

2. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość $\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie P. Oblicz obwody trójkątów BCP i BAP.

D **3.** Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB na odcinki długości $\frac{ac}{a+b}$ i $\frac{bc}{a+b}$.

D **4.** Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych $\boxed{?}$ podaj brakujące uzasadnienia.

Na rysunku odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB, a CG jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.



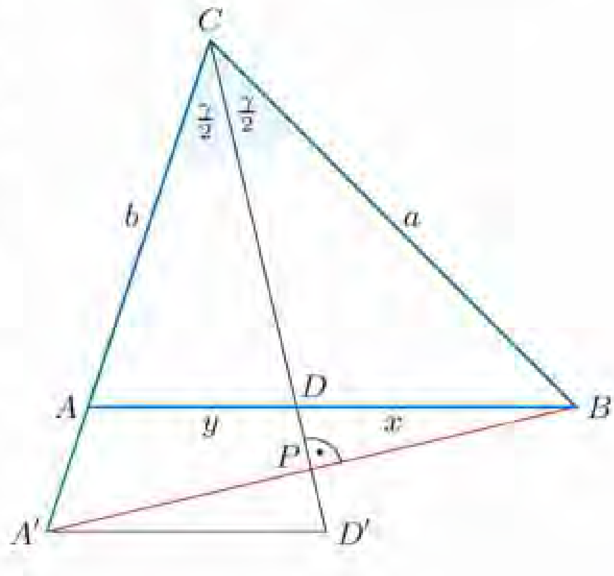
Stąd $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|DB|}{|AD|}$ $\boxed{?}$

Odcinki DE i DF mają równe długości $\boxed{?}$. Zatem:

$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \boxed{?}$$

czyli prawdziwa jest proporcja $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$.

D **5.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD kąta γ (rysunek obok). Punkt A' leży na prostej AC, odcinek $A'B$ jest prostopadły do dwusiecznej CD i przecina ją w punkcie P, a odcinek $A'D'$ jest równoległy do odcinka AD. Uzasadnij, że trójkąty $A'D'P$ i BDP są przystające, a trójkąty $A'D'C$ i ADC są podobne. Korzystając z równości $|A'C| = a$, uzasadnij prawdziwość proporcji: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



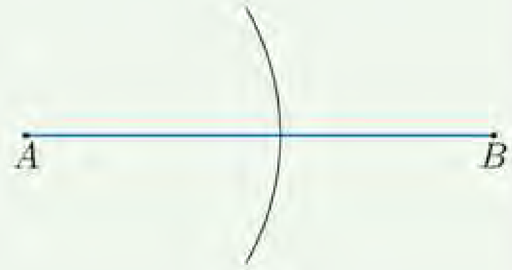
6.8. Zagadnienia uzupełniające

Problemy konstrukcyjne

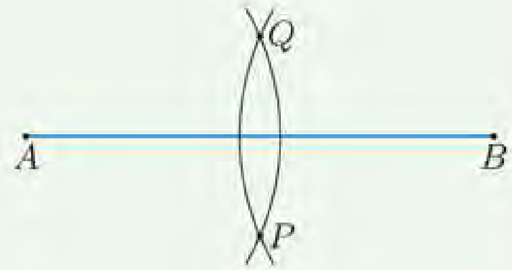
Klasyczne konstrukcje wykonujemy, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

Konstrukcja symetralnej odcinka

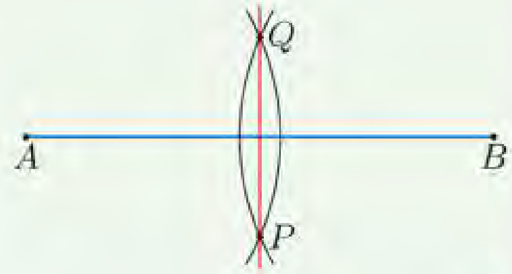
1. Z jednego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu większym od połowy odcinka.



2. Z drugiego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o tym samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez P i Q.

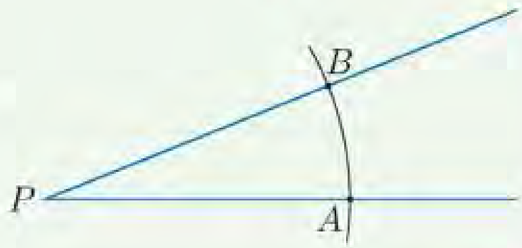


3. Rysujemy prostą PQ – jest ona symetralną odcinka AB, ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.

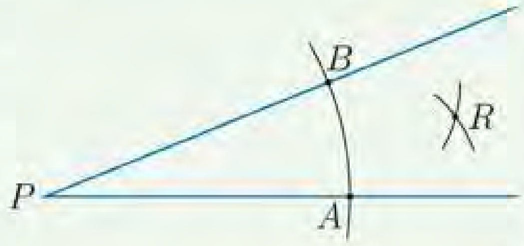


Konstrukcja dwusiecznej kąta

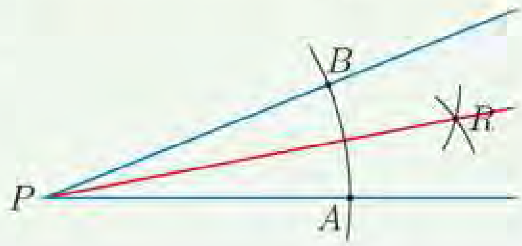
1. Z wierzchołka kąta rysujemy łuk okręgu przecinający jego ramiona. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B.



2. Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o takim samym promieniu oraz środkach w punktach A i B. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez R.



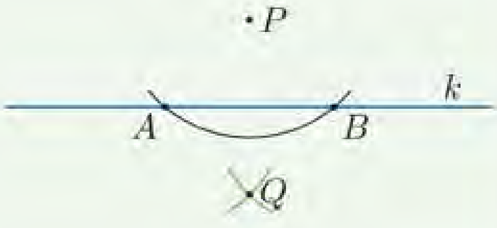
3. Rysujemy prostą PR – jest ona dwusieczną kąta APB, ponieważ trójkąty PAR i PBR są przystające (cecha BBB).



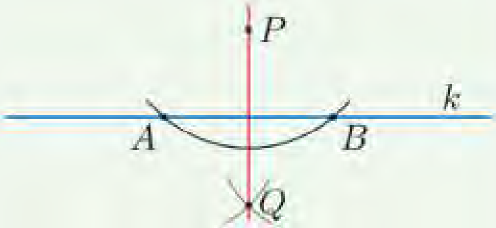
Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt nieleżący na tej prostej

1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający prostą k. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B.

2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AP|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez Q.



3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k, ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.

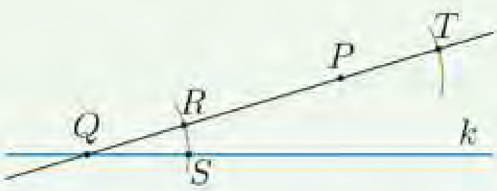


1. Dana jest prosta k i leżący na niej punkt P. Skonstruuj prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt P.

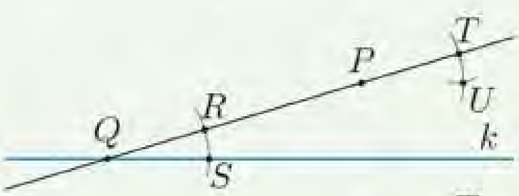
Konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt, równoległej do danej prostej

1. Rysujemy dowolną prostą przechodzącą przez dany punkt P. Punkt przecięcia tej prostej z daną prostą k oznaczamy przez Q.

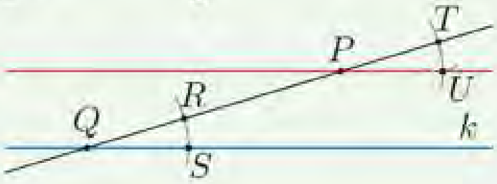
2. Rysujemy łuki okręgów o tym samym promieniu i środkach w punktach P i Q. Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie Q z prostą k oznaczamy przez S.



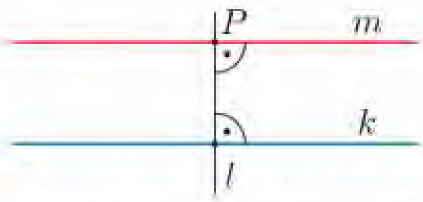
3. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie T i promieniu $|RS|$. Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie P oznaczamy przez U.



4. Rysujemy prostą PU – jest ona równoległa do prostej k, ponieważ kąt TPU jest przystający do kąta RQS.

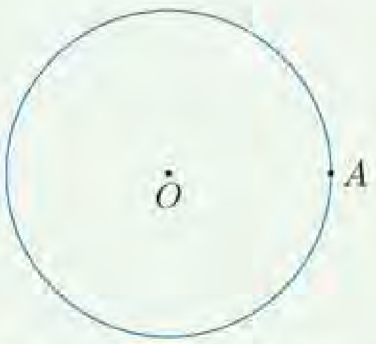


2. Prostą równoległą do danej prostej k i przechodzącą przez punkt P możemy skonstruować, rysując kolejno proste l i m takie, że $l \perp k$ i $m \perp l$. Przeprowadź tę konstrukcję i podaj jej opis.

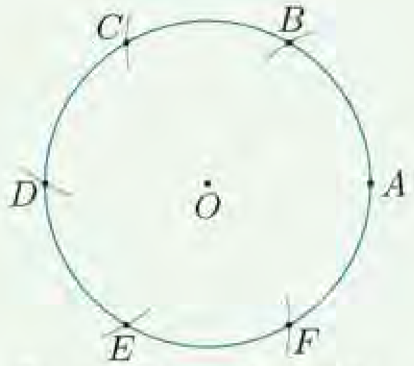


3. W dowolnych trójkątach ostrokątnym oraz rozwartokątnym skonstruuj punkt przecięcia jego: a) symetralnych, b) dwusiecznych, c) wysokości.

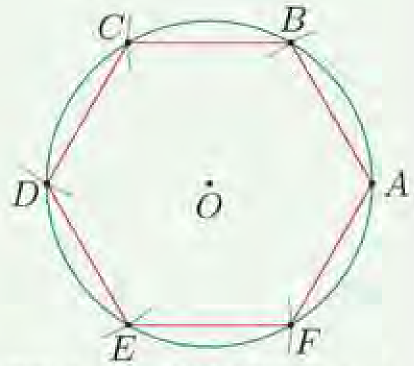
Konstrukcja sześciokąta foremnego



Rysujemy okrąg i wybieramy dowolny punkt tego okręgu – oznaczamy go przez A.



Zaczynając od punktu A, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu.



Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym.

4. Skonstruuj:

a) trójkąt równoboczny,

b) kwadrat,

c) ośmiokąt foremny,

d) dwunastokąt foremny.

5. Narysuj dowolny kąt. Skonstruuj kąt do niego przystający.

6. Skonstruuj kąt o mierze:

a) $30°$, b) $45°$, c) $75°$, d) $105°$.

Nad wymienionymi poniżej trzema klasycznymi problemami konstrukcyjnymi zastanawiali się już starożytni Grecy. Jak udowodniono później, nie mają one rozwiązania.

- Kwadratura koła – konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła.
- Podwojenie sześcianu – konstrukcja sześcianu o objętości dwa razy większej od objętości danego sześcianu.
- Trysekcja kąta – podział dowolnego kąta na trzy równe części.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wyznacz miary kątów trójkąta, jeśli wiadomo, że ich stosunek jest równy:

a) $1:2:3$, b) $1:3:5$, c) $2:9:13$.

2. Kąty między bokiem trójkąta ostrokątnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 40° i 20°. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?

a) 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32

b) 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5

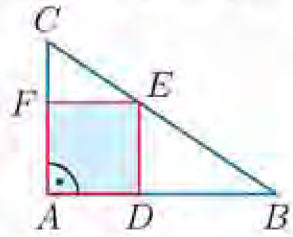
c) 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8

d) 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5

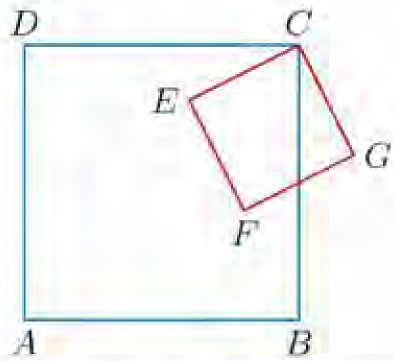
4. Trójkąt T_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta T_2. Oblicz długości boków trójkąta T_2, jeśli:

a) jego obwód jest równy 35 cm, b) jego pole jest równe $4\sqrt{21}$ cm^2.

5. W trójkącie ABC o polu 50 dm^2 bok AB ma długość 20 dm. Punkt P leży na boku AC i $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$. Punkt Q leży na boku BC i $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$. Oblicz długość odcinka PQ i pole trójkąta CPQ.



6. Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu $ADEF$.



7. Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.

D **8.** Punkt C jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów $ABCD$ i $CEFG$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów DEC i CBG są równe.

9. Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości: 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.

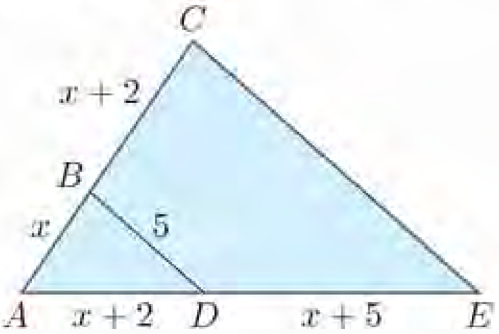
Zestaw II

D **1.** a) Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem α, są podobne.

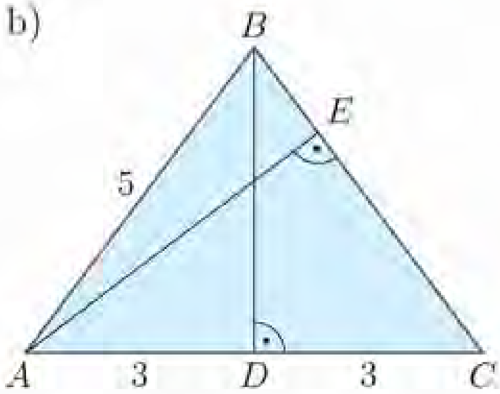
b) Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach x i y jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio $x+1$ i $y+1$, to prostokąty te są kwadratami.

2. Oblicz obwód trójkąta AEC.

a) $BD \parallel CE$



b)



3. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.

4. Figury F_1 i F_2 są podobne w skali $1:2$, a figury F_2 i F_3 są podobne w skali $1:3$. Oblicz pole każdej z tych figur, jeśli suma ich pól jest równa 410 dm^2.

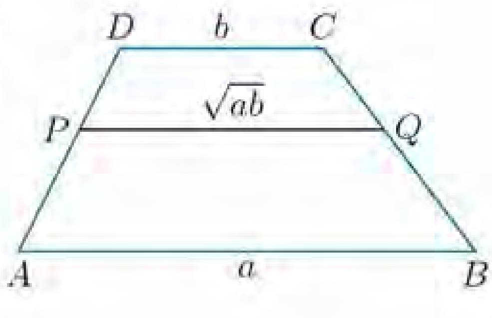
D **5.** Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:

a) ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),

*b) przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.

D **6.** W rombie $ABCD$ połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt $A'B'C'D'$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.

*D **7.** W trapezie $ABCD$ o podstawach a i b (rysunek obok) poprowadzono odcinek PQ o długości $\sqrt{ab}$ równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:



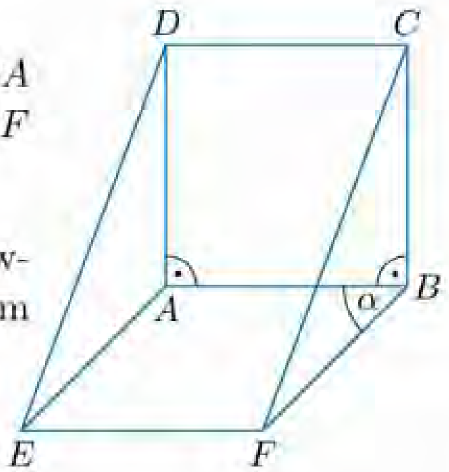
a) $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$,

b) trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.

Przy przedstawianiu dowodu należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak, jak w przykładzie 1, lub w postaci dowodu dwukolumnowego (przykład 2).

Przykład 1

Dany jest kwadrat $ABCD$ i równoległobok $EFBA$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BCF są przystające.



Oznaczmy przez α kąt ostry równoległoboku. Wówczas $\sphericalangle CBF = 90^\circ + \alpha$. Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa 180°, więc:

$$\sphericalangle BAE = 180^\circ - \alpha$$

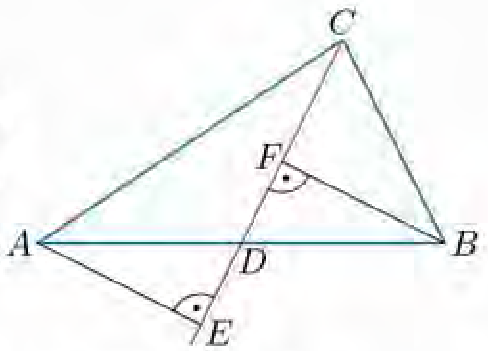
Stąd:

$$\sphericalangle DAE = 360^\circ - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle BAD) = \\ = 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 90^\circ) = 90^\circ + \alpha$$

czyli $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$. Jednocześnie $|AD| = |BC|$ (boki kwadratu) oraz $|AE| = |BF|$ (przeciwległe boki równoległoboku).
Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

Przykład 2

Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D. Punkty E i F leżą na tej środkowej, przy czym $AE \perp CD$ oraz $BF \perp CD$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BDF są przystające.



Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.
W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.

Stwierdzenie	Uzasadnienie
$\|AD\| = \|BD\|$	Punkt D jest środkiem boku AB.
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDF$	Są to kąty wierzchołkowe.
$\sphericalangle AED = \sphericalangle BFD$	Są to kąty proste.
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBF$	Trójkąty ADE i BDF mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe.
$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$	Na podstawie cechy KBK przystawania trójkątów.

Zadania testowe

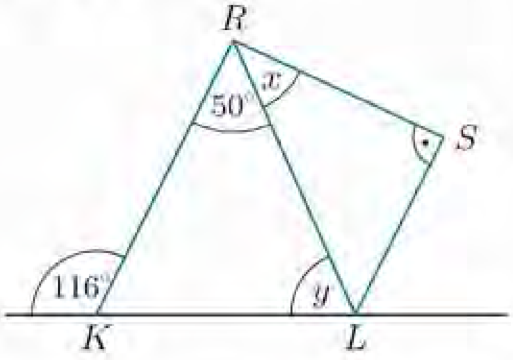
Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa:

A. $22{,}5^\circ$, **C.** $26{,}5^\circ$,
B. $24{,}5^\circ$, **D.** $28{,}5^\circ$.

2. Na rysunku obok $RK \parallel SL$. Suma miar kątów x i y jest równa:

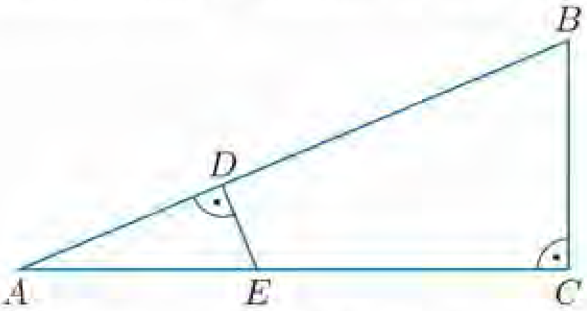
A. 104°, **C.** 106°,
B. 105°, **D.** 110°.



3. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{7}{10}$. Różnica obwodów tych figur jest równa:

A. 60 cm, **B.** 65 cm, **C.** 75 cm, **D.** 80 cm.

4. Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta AED, jeśli jego pole jest równe $4{,}8\ \text{cm}^2$?



A. 6 cm **B.** 8 cm **C.** 10 cm **D.** 12 cm

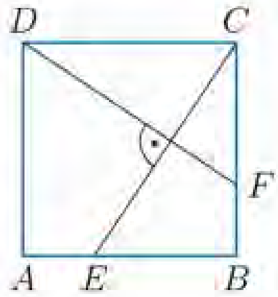
5. Jeżeli prostokąt P_1 o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta P_2 o przekątnej długości 20 cm, to:

A. obwód prostokąta P_2 jest równy 54 cm,
B. pole prostokąta P_2 jest równe $200\ \text{cm}^2$,
C. pole prostokąta P_2 jest o $64\ \text{cm}^2$ większe od pola prostokąta P_1,
D. stosunek pola prostokąta P_1 do pola prostokąta P_2 jest równy $9:16$.

6. Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt P, a na boku AC – punkt Q tak, że $PQ \parallel BC$. Jeśli $|AB| = 4{,}5$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|AQ| = 2$ cm i $|BC| = 3$ cm, to obwód trójkąta APQ jest równy:

A. 5 cm, **B.** 6 cm, **C.** 6,5 cm, **D.** 7 cm.

Zadania krótkiej odpowiedzi



Zadanie 1 (2 pkt)

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że $CE \perp DF$ (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty BCE i CDF są przystające.

Zadanie 2 (2 pkt)

Romb o przekątnych 6 i 10 jest podobny do rombu o polu 270. Oblicz obwód większego rombu.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego dwunastokąta foremnego.

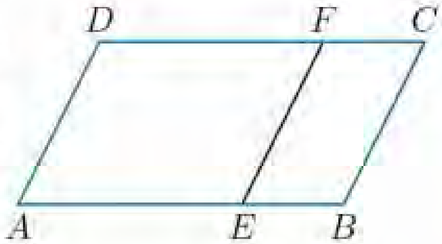
Zadanie 4 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej równej 6. Oblicz odległość jego środka ciężkości od wierzchołka kąta prostego.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 40$ cm i $|CD| = 25$ cm i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta ABP.



Zadanie 6 (4 pkt)

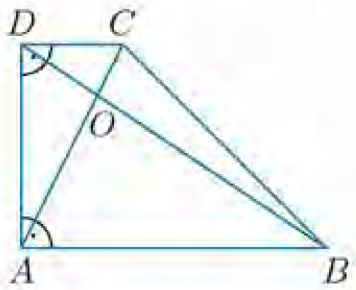
Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Czworokąt $EBCF$ jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że obwód czworokąta $AEFD$ jest równy $\frac{2a^2-2b^2}{a}+2b$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie L jest mniejsza od $\frac{3}{2}L$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym 30°. Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.



Zadanie 9 (4 pkt)

W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw $|AB| = 6$ i $|CD| = 2$ oraz ramienia $|AD| = 4$. Oblicz obwód trójkąta AOB, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu.

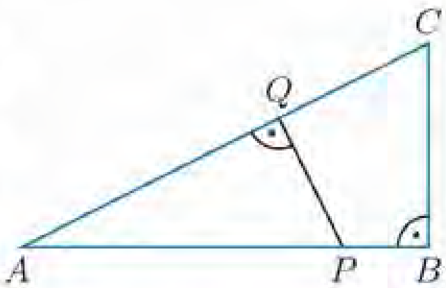
W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|AC| = 8$ i $|BC| = 6$, a kąt prosty znajduje się przy wierzchołku C. Odcinek CP jest wysokością trójkąta ABC, a odcinek PQ jest wysokością trójkąta CPA. Oblicz stosunek pola trójkąta APQ do pola trójkąta ABC. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AB| = 4$ i $|BC| = 2$ (rysunek obok). Odcinek PQ dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz obwód trójkąta APQ. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.



Zadanie 3 (2 pkt)

Dany jest trapez $ABCD$ o dłuższej podstawie AB. Na ramieniu AD wybrano punkt E, a na ramieniu BC punkt F w taki sposób, że odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu oraz $|BF| = 2{,}8$ i $|CF| = 1{,}2$. Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie P takim, że $|PA| = 7{,}8$ i $|PB| = 10{,}4$. Oblicz wartość iloczynu $|PD| \cdot |PE|$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

D Zadanie 4 (4 pkt)

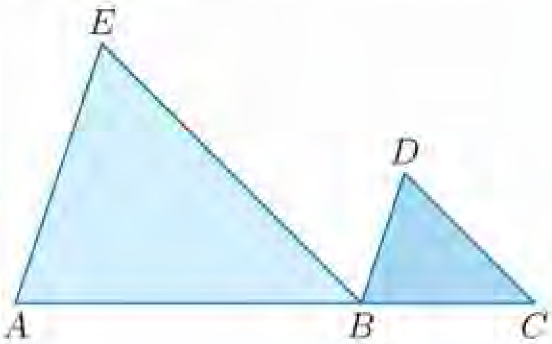
Uzasadnij, że jeśli odcinek łączący środki ramion trapezu dzieli go na dwa trapezy podobne, to trapez ten jest równoległobokiem.

D Zadanie 5 (4 pkt)

Trapez prostokątny o podstawach długości a i $2a$ oraz krótszym ramieniu równym a podzielono odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy podobne. Uzasadnij, że pola tych trapezów są równe $\frac{a^2}{2}$ i a^2.

D Zadanie 6 (6 pkt)

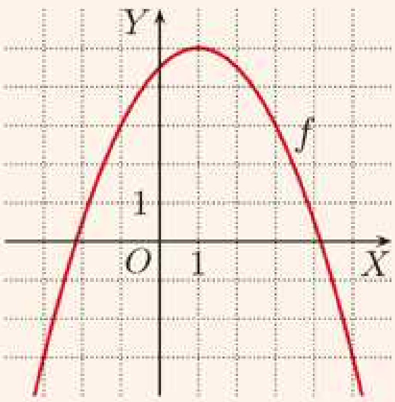
Punkty A, B, C (rysunek obok) są współliniowe oraz $AE \parallel BD$ i $BE \parallel CD$. Pola trójkątów ABE i BCD są równe odpowiednio S_1 i S_2. Udowodnij, że pole trójkąta BDE jest równe $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.



7 Funkcja kwadratowa

Liny podtrzymujące most wiszący mają kształt paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).

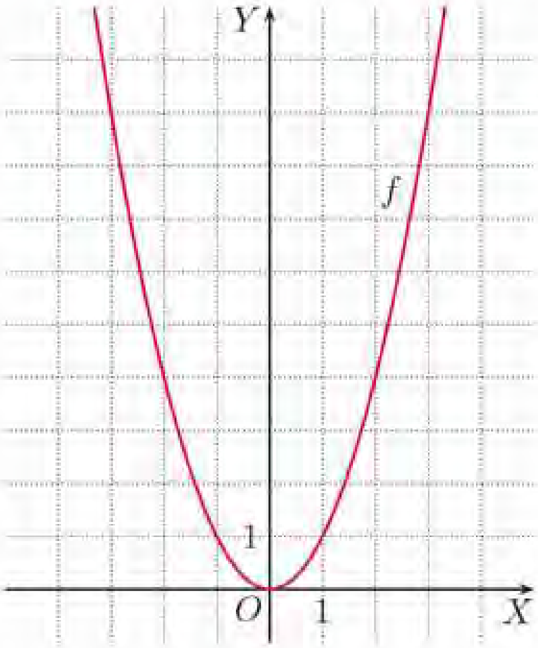
Funkcję postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem $y = ax^2 + bx + c$" lub krótko: „parabola $y = ax^2 + bx + c$".



Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$.

7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $\langle 0; \infty)$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:



a) **ramiona** paraboli są skierowane do góry,

b) oś OY jest **osią symetrii** paraboli,

c) punkt $(0, 0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,

d) funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ i **rosnąca** w przedziale $\langle 0; \infty)$,

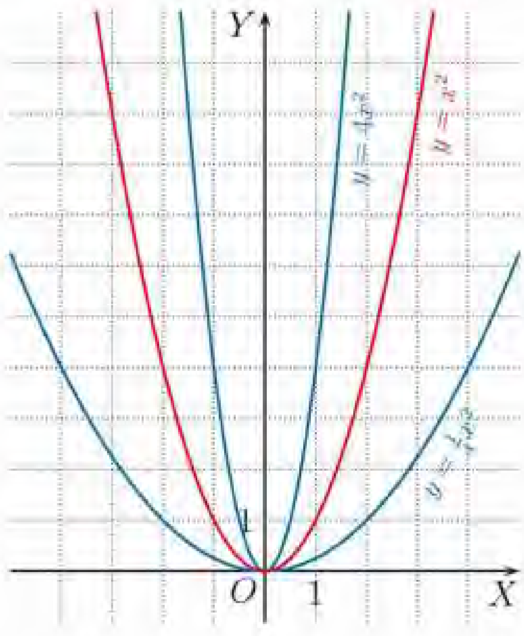
e) dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zeru, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,

f) funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.



Ćwiczenie 2

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$

b) $P(4, 32)$

c) $P(\frac{1}{2}, 1)$

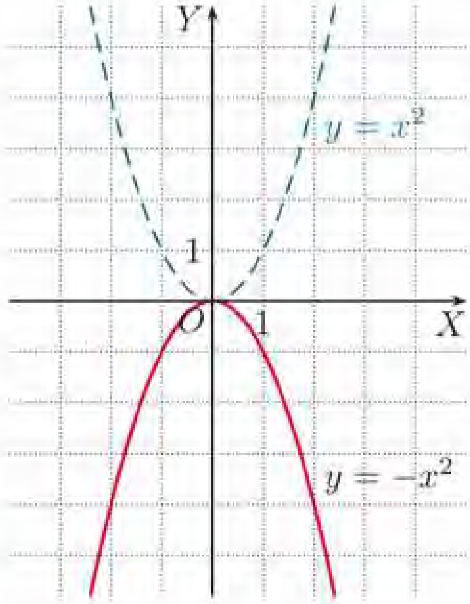
d) $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

a) $Q(1, 6)$ b) $Q(2, 8)$ c) $Q(-4, 8)$ d) $Q(-8, 48)$

Wykres funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = x^2$. Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $y = -x^2$ są skierowane w dół.



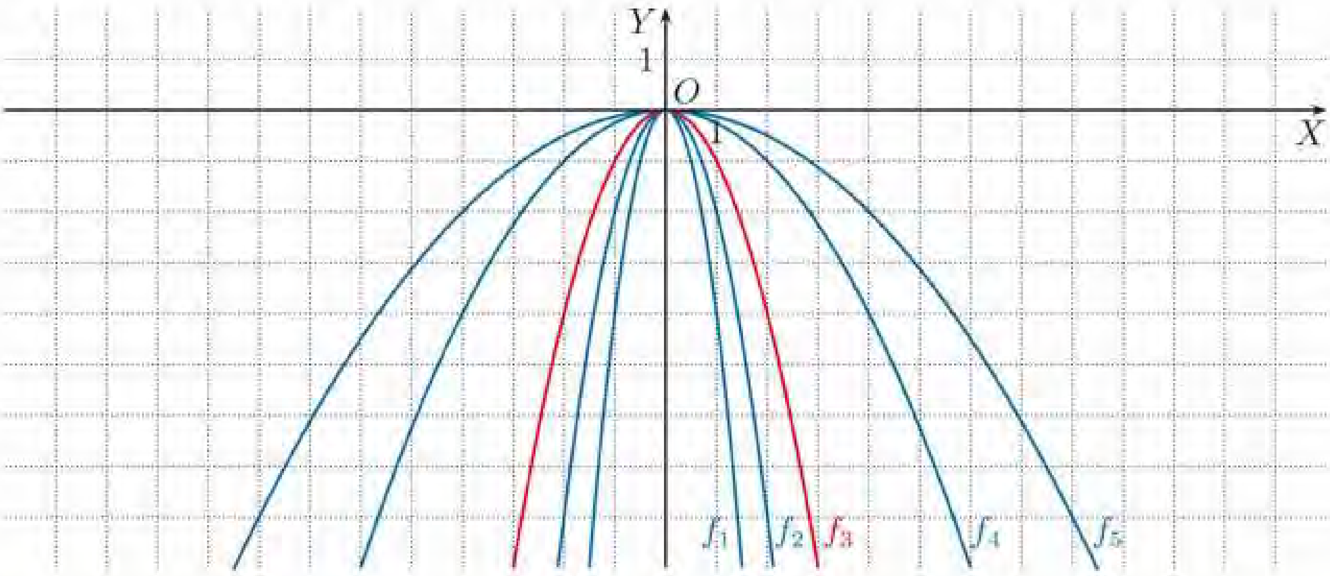
Ćwiczenie 4

a) Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.

b) Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi OX wykresy funkcji $y = \frac{1}{8}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 4x^2$. Podaj wzory funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.



> Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$) czy do dołu (gdy $a < 0$) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P. Podaj pięć punktów należących do wykresu funkcji f, których obie współrzędne są całkowite.

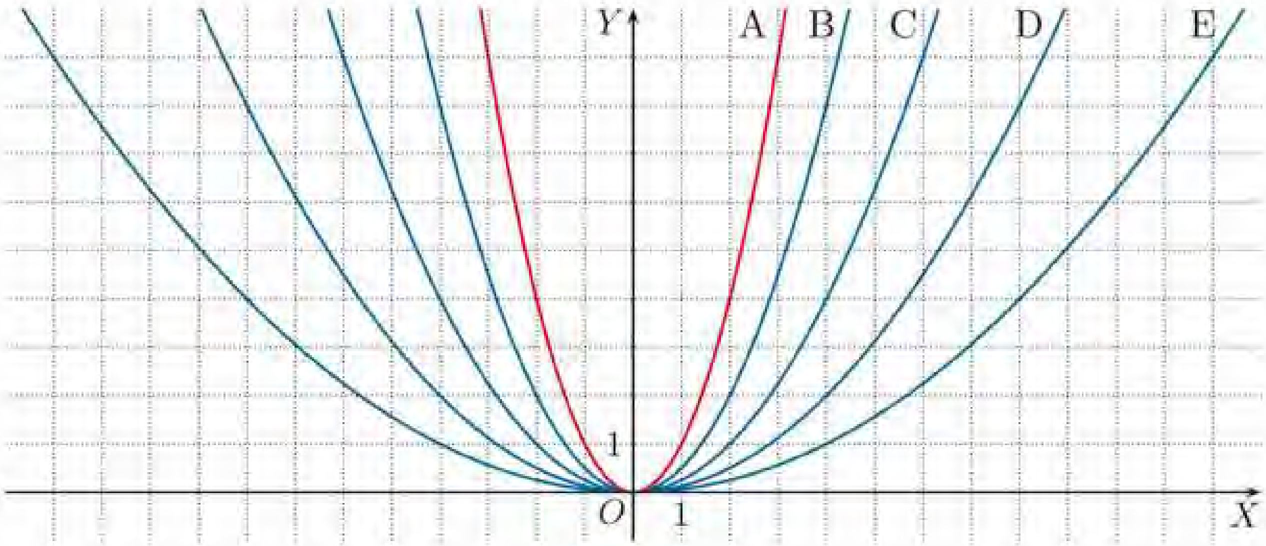
a) $P(2, -4)$ b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ c) $P\left(-\sqrt{2}, -6\right)$ d) $P\left(-2\sqrt{2}, -4\right)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $D = (-2; 4)$
c) $f(x) = 3x^2$, $D = (-1; 2)$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $D = \langle -4; 2 \rangle$
d) $f(x) = -2x^2$, $D = \langle 1; 2 \rangle$

2. Które z poniższych parabol dane są równaniami: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{8}x^2$? Podaj równania pozostałych parabol.



3. Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do jej wykresu jest najmniejsza?

a) $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = -6x^2$
c) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $y = 3x^2$, $y = 2\sqrt{3}x^2$
b) $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = \sqrt{2}x^2$, $y = 2x^2$
d) $y = -3x^2$, $y = \pi x^2$, $y = 3{,}14x^2$

4. Punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Oblicz odległość punktu Q od osi OX, jeśli:

a) $x_1 = 3$, $y_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -2$,
b) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $y_1 = 20$, $x_2 = 2$.

5. Prosta $y = 4$ przecina parabolę $y = ax^2$ w punktach A i B. Oblicz a, jeśli:

a) $|AB| = 2$,
b) $|AB| = 8$,
c) $|AB| = \frac{1}{2}$,
d) $|AB| = 2\sqrt{2}$.

6. Punkty: $O(0, 0)$, $A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Naszkicuj tę parabolę, jeśli pole trójkąta AOB jest równe 12.

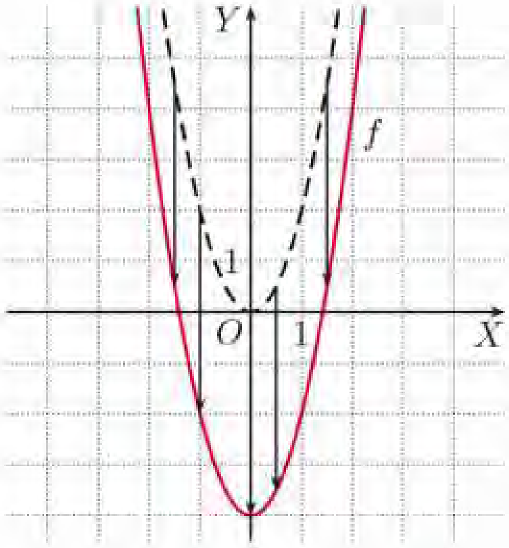
7. a) Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole kwadratowej działki budowlanej w zależności od długości przekątnej x. Naszkicuj jej wykres.

b) Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole prostokątnej działki budowlanej w zależności od długości przekątnej x, jeżeli wiadomo, że działkę można podzielić na dwa kwadraty.

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół, czyli o wektor $\overrightarrow{u} = [0, -4]$ (rysunek obok).



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 - 3$

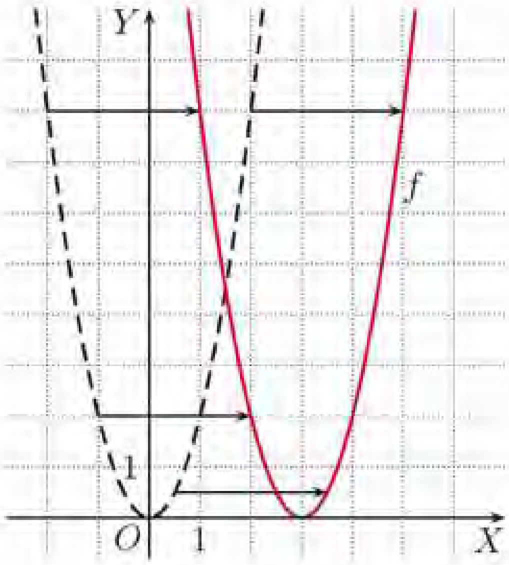
b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = -2x^2 - 4$

d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $\overrightarrow{u} = [3, 0]$ (rysunek obok).



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = (x+3)^2$

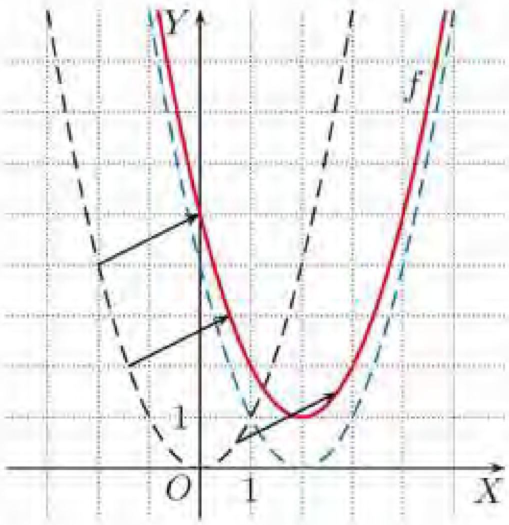
b) $f(x) = (x-1)^2$

c) $f(x) = -2(x+2)^2$

d) $f(x) = -2(x-2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2+1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę, lub bezpośrednio o wektor $\overrightarrow{u} = [2, 1]$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$

b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Wykres funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $[p, q]$.

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt (p, q). Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Ćwiczenie 4

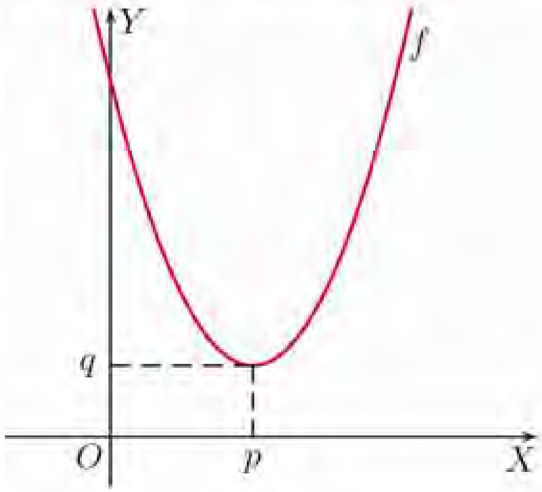
O jaki wektor należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $f(x) = 2(x+6)^2 - 3$,

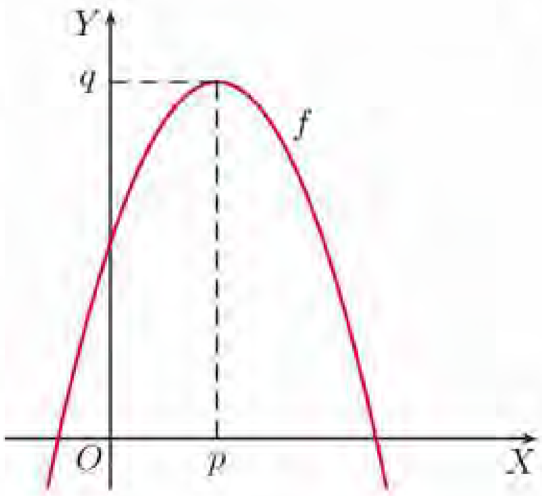
b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$?

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zależą od współczynnika a.

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry
• dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$
• funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p\rangle$
• funkcja rośnie w przedziale $\langle p; \infty)$
• zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół
• dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$
• funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p\rangle$
• funkcja maleje w przedziale $\langle p; \infty)$
• zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q\rangle$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$

c) $f(x) = -(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$

Zadania

1. Wykres funkcji $f(x) = x^2$ przesuń o wektor $\overrightarrow{u}$. Następnie podaj wzór otrzymanej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $\overrightarrow{u} = [1, 2]$ b) $\overrightarrow{u} = [1, -2]$ c) $\overrightarrow{u} = [-3, -2]$ d) $\overrightarrow{u} = [-2, -4]$

2. Naszkicuj parabolę, którą otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor $\overrightarrow{u}$. Podaj współrzędne jej wierzchołka i równanie jej osi symetrii.

a) $\overrightarrow{u} = [-2, 4]$ b) $\overrightarrow{u} = [-3, -1]$ c) $\overrightarrow{u} = [2, 2]$ d) $\overrightarrow{u} = [3, -1]$

3. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$
c) $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 4$

4. Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\overrightarrow{u}$. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Wzór funkcji f	Wektor $\overrightarrow{u}$	Wzór funkcji g
$f(x) = 5x^2 - 3$	$\overrightarrow{u} = [-1, 5]$	?
$f(x) = 4x^2$	?	$g(x) = 4(x+2)^2 + 3$
?	$\overrightarrow{u} = [7, -3]$	$g(x) = \frac{5}{2}(x-7)^2 - 13$
$f(x) = 2(x-5)^2 + 3$	$\overrightarrow{u} = [4, -6]$	?

5. Punkty F i G są wierzchołkami parabol będących wykresami funkcji f i g. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{FG}$ i naszkicuj obie parabole.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
b) $f(x) = 4 - 2(x+1)^2$, $g(x) = 2 - 2(x+3)^2$
c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$, $g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$
d) $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+1)^2$, $g(x) = -1 - \frac{1}{2}(x-3)^2$

6. Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + q$ należy punkt $P(-1, 2)$. Podaj wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że jej zbiorem wartości jest przedział:

a) $\langle 1; \infty)$, b) $\langle 0; \infty)$, c) $(-\infty; 3\rangle$, d) $(-\infty; 6\rangle$.

7. Oblicz wartość współczynnika p i naszkicuj parabolę $y = (x-p)^2 - 1$, jeśli należą do niej punkty A i B.

a) $A(-4, 3)$, $B(0, 3)$
b) $A(-1, 8)$, $B(5, 8)$

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej

Definicja

Postać:
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$
nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:
$$y = a(x-p)^2 + q, \text{ gdzie } a, p, q \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$
nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Uwaga. Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykład w ramce pokazujący, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3(x-4)^2 - 7 =$ — Postać kanoniczna
$= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ — Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$= 3x^2 - 24x + 41$ — Postać ogólna

b) $y = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$ — Postać kanoniczna
$= -4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 1 =$ — Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
$= -4x^2 - 4x$ — Postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x-3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x-5)^2 + 9$

Przejście od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymaga zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 10x + 27 =$ — Postać ogólna
$= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$ — Współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$.
$= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$ — Dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$, czyli uzupełniamy do kwadratu
$= (x-5)^2 - 25 + 27 =$ — Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$= (x-5)^2 + 2$ — Postać kanoniczna

b) $y = x^2 + 5x + 3 =$ — Postać ogólna

$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$ — Współczynnik 5 zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$.

$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 =$ — Dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$ — Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ — Postać kanoniczna

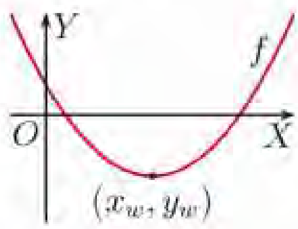
Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $y = x^2 - 8x + 6$
c) $y = x^2 - 6x - 2$
e) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

b) $y = x^2 + 4x + 8$
d) $y = x^2 - 3x + 1$
f) $y = x^2 - x - 2$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q). Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w).



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \tfrac{b}{2a}x\right) + c =$$
$$= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = x^2 + 3x + 1$
c) $y = x^2 - 4x + 4$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

b) $y = 2x^2 + 4x + 1$
d) $y = -2x^2 + 6x - 6$
f) $y = 2x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = 4x^2 + 6x + 3$
b) $y = -2x^2 + 4x + 1$
c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f, to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Przykład 2

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

Współczynniki $a = -2$, $b = 8$, więc $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$.

Współrzędna $y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7$.

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$

d) $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

Zadania

1. Przedstaw trójmian kwadratowy f w postaci ogólnej i oblicz jego wyróżnik.

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - 3$

b) $f(x) = -(x - 4)^2 + 5$

c) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 14$

d) $f(x) = -3(x + 2)^2 + 8$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

f) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 9$

2. Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 - 4x - 2$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$

e) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$

f) $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$

g) $f(x) = x^2 - x$

h) $f(x) = -2x^2 + 6x$

i) $f(x) = 3x^2 - 8$

3. Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = f(x_w)$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$

c) $f(x) = -3x^2 - 6x$

4. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres funkcji f, stosując odpowiednie przesunięcie paraboli $y = x^2$ lub $y = -x^2$.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$

b) $f(x) = -x^2 - 6x - 12$

c) $f(x) = -x^2 + 4x$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Prosta $x = 3$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$. Oblicz współczynnik b.
>
> Osią symetrii jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2a} = 3$, skąd:
> $$b = -6a = -6 \cdot \tfrac{1}{2} = -3$$

Prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Oblicz współczynnik b.

a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l\colon x = 2$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l\colon x = 4$
c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l\colon x = -1$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l\colon x = -6$

6. Oblicz współczynnik a funkcji kwadratowej f, jeśli wiadomo, że wierzchołek paraboli będącej jej wykresem leży na prostej l. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = ax^2 + 4x - 3$, $l\colon x = 2$
b) $f(x) = ax^2 + 6x + 2$, $l\colon x = 1$
c) $f(x) = ax^2 + 2x + 5$, $l\colon x = -4$
d) $f(x) = ax^2 - 6x - 1$, $l\colon x = -\frac{3}{2}$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(3, -2)$.
>
> Ze wzoru $x_w = -\frac{b}{2a}$ otrzymujemy:
> $$-\frac{b}{2\cdot 1} = 3, \text{ skąd } b = -6.$$
> Zatem $f(x) = x^2 - 6x + c$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, -2)$ do wzoru funkcji i otrzymujemy równość:
> $$-2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + c, \text{ skąd } c = 7.$$
> Szukane współczynniki: $b = -6$ i $c = 7$.

Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.

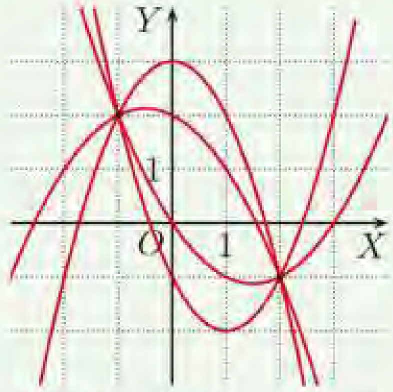
a) $W(2, 4)$ b) $W(-1, -3)$ c) $W\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ d) $W(10, 0)$

8. Wyznacz współczynniki a i c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + 6x + c$, jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem. Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $W(-1, 2)$ b) $W(6, -3)$ c) $W(2, 4)$ d) $W\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

Czy wiesz, że...

Dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny (nieleżących na prostej pionowej) istnieje nieskończenie wiele parabol opisanych za pomocą równania $y = ax^2 + bx + c$ przechodzących przez te punkty (rysunek obok).



Przez trzy niewspółliniowe punkty (z których żadne dwa nie leżą na prostej pionowej) przechodzi dokładnie jedna parabola $y = ax^2 + bx + c$. Mając dane współrzędne tych punktów, możemy obliczyć współczynniki a, b i c. W tym celu rozwiązujemy odpowiedni układ równań.

Na przykład, aby wyznaczyć równanie paraboli $y = ax^2 + bx + c$ przechodzącej przez punkty: $A(-1, 0)$, $B(1, -4)$ i $C(4, 5)$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest trójka liczb: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, zatem szukana parabola jest dana równaniem $y = x^2 - 2x - 3$.

Uwaga. Jeżeli mamy dany wierzchołek paraboli, to do wyznaczenia jej równania wystarczy znajomość jeszcze jednego należącego do niej punktu.

9. Oblicz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P, a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W.

a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$
c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$
d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$
e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

10. Wyznacz równanie paraboli, jeśli wiadomo, że przecina ona osie układu współrzędnych w punktach A, B i C. Naszkicuj tę parabolę.

a) $A(0, 3)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$
b) $A(0, 6)$, $B(-6, 0)$, $C(2, 0)$

11. Wyznacz równanie paraboli przechodzącej przez punkty A, B, C.

a) $A(-3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(1, 1)$
b) $A(-4, 1)$, $B(-3, -2)$, $C(1, -2)$
c) $A(-5, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(1, -3)$
d) $A(-4, 1)$, $B(2, -2)$, $C(6, 5)$

* **12.** O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać parabolę przechodzącą przez punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 4)$?

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$

Warto powtórzyć

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

1. Oblicz wartość wyrażenia dla $x=-2$ i dla $x=-3$.

a) x^2-3x-6 b) $2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ c) $-3x^2+2x-1$

2. Oblicz wartość wyrażenia dla $x=-\frac{1}{2}$ i dla $x=\frac{1}{4}$.

a) $4x^2-2x+3$ b) $-8x^2+4x-1$ c) $-2x^2-6x+\frac{1}{2}$

3. Oblicz wartości funkcji f, g, h dla argumentu $x=-2$ i uporządkuj je w kolejności rosnącej.

a) $f(x)=-x^2+6x+1$, $g(x)=2x^2+10x-5$, $h(x)=-3x^2-\frac{1}{2}x+4$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-7$, $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-8$, $h(x)=-\frac{17}{8}x^2-x-4$

4. Dana jest funkcja $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+c$. Oblicz współczynnik c, jeśli:

a) $f(-2)=9$, b) $f(4)=-2$, c) $f\left(-2\sqrt{2}\right)=-6$.

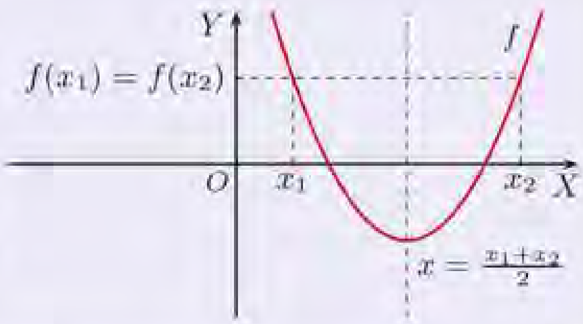
5. Sprawdź, które spośród punktów:

$$A(-1,2-3\sqrt{2}),\ B(-\sqrt{2},10-2\sqrt{2}),\ C(-2,8),$$
$$D(1+\sqrt{2},4+\sqrt{2}),\ E(\sqrt{2},8-2\sqrt{2})$$

nie należą do wykresu funkcji $f(x)=2x^2-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$.

Twierdzenie

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.



6. Sprawdź, czy $f(-3)=f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-1$ b) $f(x)=-2x^2-4x+2$

7. Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

a) $f(x)=x^2-x-2$ c) $f(x)=-2x^2+6x-4$

b) $f(x)=2x^2-6x-2$ d) $f(x)=-6x^2-6x+8$

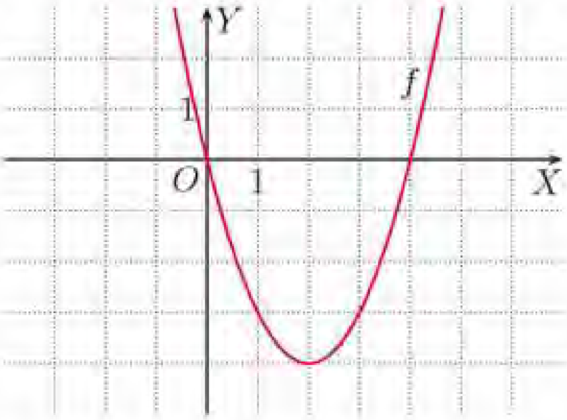
7.4. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x^2 - 4x$

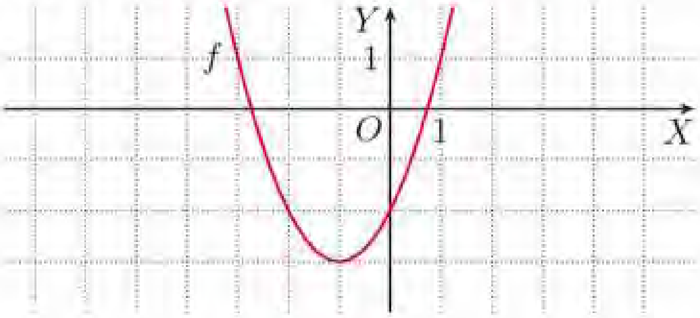
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x-2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 4$.

b) $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x+1)^2 - 3$.

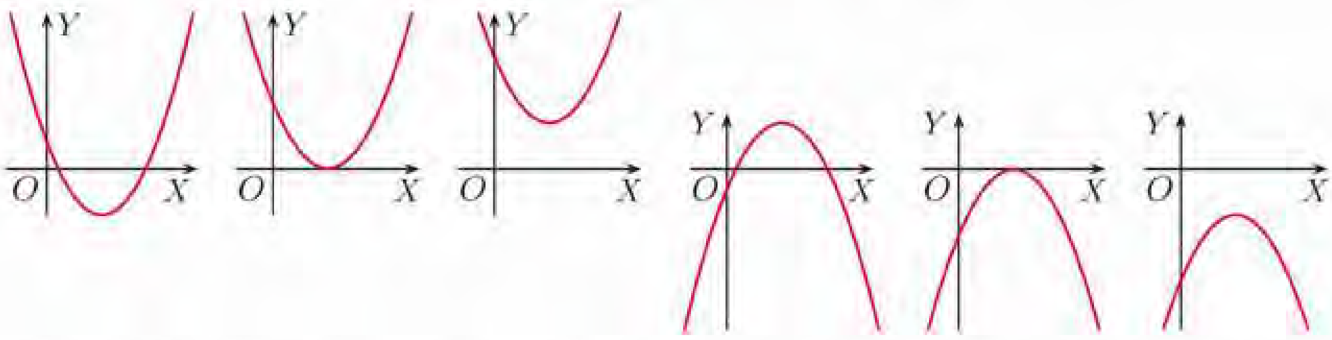


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

> Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX. Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Uwaga. Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x, dla których równanie jest spełnione. Zbiór tych x nazywamy zbiorem rozwiązań równania. Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Przykład 2
Rozwiąż równanie $4x^2 - 8x = 0$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$:
$$a \cdot b = 0$$
wtedy i tylko wtedy, gdy
$$a = 0 \text{ lub } b = 0.$$

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:
$$4x(x-2) = 0$$
czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór: $\{0, 2\}$.

Ćwiczenie 2
Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $7x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 = 5x$ d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3
Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$.
$$(2x+3)(2x-3) = 0$$
$$2x + 3 = 0 \ \text{ lub } \ 2x - 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2} \ \text{ lub } \ x = \tfrac{3}{2}$$

Ćwiczenie 3
Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $4 - 100x^2 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

Przykład 4
Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
$$(x-2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$
Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4
Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$.

$$\frac{11}{3}x^2 = 7 \ / \cdot \frac{3}{11}$$
$$x^2 = \frac{21}{11}$$
$$x = -\sqrt{\frac{21}{11}} \text{ lub } x = \sqrt{\frac{21}{11}}$$

b) Rozwiąż równanie $2x^2 + 9 = 0$.

Zauważmy, że $2x^2 + 9 \geqslant 9$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, więc $2x^2 + 9$ nie może być równe zeru.
Zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $-7x^2 + 42x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$
c) $36x^2 = 6x$
d) $2x + 18x^2 = 0$
e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

a) $100x^2 - 81 = 0$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$
d) $x^2 + 64 = 16x$
e) $24x - x^2 = 144$
f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$
g) $x^2 = (1 - x)(1 + x)$
h) $\frac{1}{2}x(6 - x) = 2 + x$
i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a) $y = 3x^2 - 12x$
b) $y = 3x^2 - 12$
c) $y = 3x^2 + 12$
d) $y = 900x^2 + 4x$
e) $y = 900x^2 + 4$
f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsce zerowe funkcji f i g.

a) $f(x) = x^2 - 4,\ \ g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1,\ \ g(x) = x^2 - 6x + 9$

5. Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $(2x + 3)^2 = (x - 3)^2$
b) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2$
c) $(16x^2 - 8x + 1)(9x^2 - 4) = 0$
d) $\left(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9\right)(1 - 2x^2) = 0$

6. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 1| = 3$ b) $|4x^2 - 3| = 1$ c) $|2x^2 - 6| = 0$ d) $x^2 = |x|$

7.5. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(2x-5)^2 = 0$$
$$2x - 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = \frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...
Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

$$(2x-5)^2 - 25 + 27 = 0$$
$$(2x-5)^2 = -2$$

Zauważ, że: $(2x-5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x$.

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x-5)^2 \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x-5)^2 - 25 + 23 = 0$$
$$(2x-5)^2 = 2$$
$$2x - 5 = -\sqrt{2} \text{ lub } 2x - 5 = \sqrt{2}$$
$$2x = 5 - \sqrt{2} \text{ lub } 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Zauważ, że: $(2x-5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x$.

Równanie ma dwa pierwiastki: $x = \frac{5-\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Postępując tak, jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.
- Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

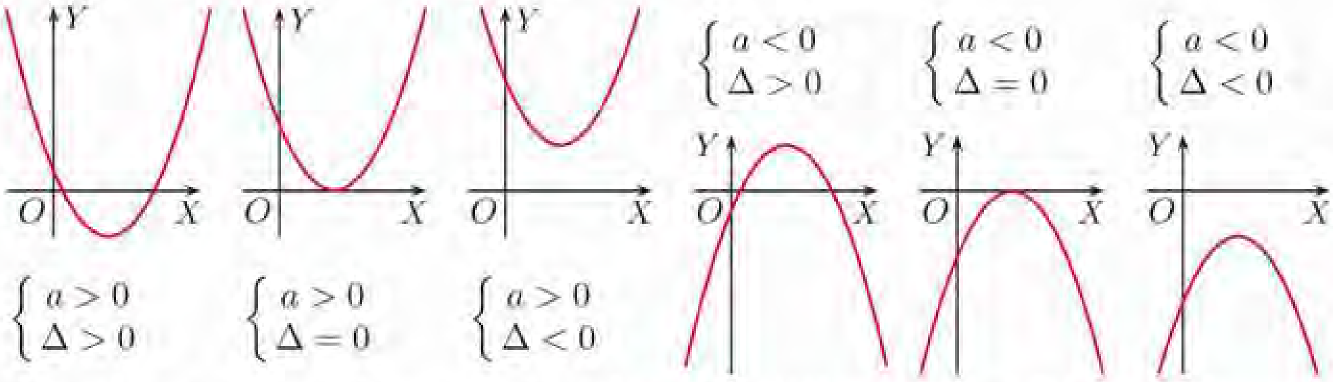
Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$
b) $x^2 - 4x + 6 = 0$
c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$
d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$
f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$
g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$
h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$
i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$

Interpretacja geometryczna

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ.



$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ dwa miejsca zerowe

$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ jedno miejsce zerowe

$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ brak miejsc zerowych

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ dwa miejsca zerowe

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ jedno miejsce zerowe

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ brak miejsc zerowych

W przypadku gdy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, możemy je wyznaczyć, korzystając z podanych poprzednio wzorów.

Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{10}}{6} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
b) $4x^2 - x - 5 = 0$
c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$
e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$
f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$
g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$
h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$
i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$ d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$ g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$

b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$ h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$ f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$ d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$ g) $11(x^2 + 5) = x$

b) $x + 10 = 3x^2$ e) $5x^2 = 2 - 2x$ h) $x^2 + x = 4x + 7$

c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$ f) $5x^2 = 8x - 5$ i) $3x^2 + 1 = 7x$

3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$

4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$

b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$ e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$ f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$ b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$

6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, g i h.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - 8\left(x - \frac{1}{4}\right) + 5$,
$h(x) = 2\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 8\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 5$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$, $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 4\left(x + \frac{7}{2}\right) + 6$,
$h(x) = -\frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{7}\right)^2 + 4\left(x + 2\sqrt{7}\right) + 6$

7. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 2x| = 1$ b) $|x^2 + 4x| = 3$

8. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 + x| = |x^2 - 2|$ c) $|x^2 - 1| = |x^2 + 2x - 3|$

b) $|x^2 - x| = |2x^2 - x|$ d) $|x - 3| = |x^2 + x - 4|$

Warto wiedzieć

Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, można wykorzystać postać kanoniczną funkcji f lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś OY. Jest to punkt $(0, c)$.
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś OX. Są to punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wyznacz wierzchołek paraboli $W\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty krzywą.

Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.
- Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$\Delta = 16$, stąd $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$, $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Parabola przecina oś OX w punktach $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

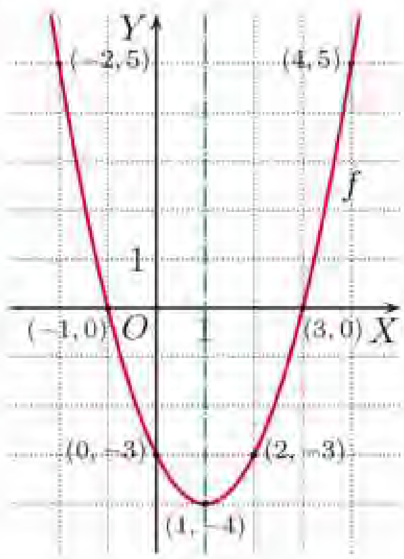
- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$y_w = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -4)$.

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli. $f(-2) = 5$, czyli do paraboli należy punkt $(-2, 5)$. Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty $(4, 5)$ i $(2, -3)$.
- Szkicujemy parabolę.



1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$

7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$y = (3x + 2)(x - 7) =$ Czynniki liniowe: $3x + 2$ i $x - 7$

$= 3(x + \frac{2}{3})(x - 7)$ Czynniki liniowe: $x + \frac{2}{3}$ i $x - 7$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie. Na przykład dla trójmianu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4(x + \frac{1}{2})^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$

b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x+3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = \big(x - (1 - \sqrt{2})\big)\big(x - (1 + \sqrt{2})\big)$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 3

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$
b) $y = x^2 + 3x - 28$
c) $y = 3x^2 - 7x + 2$
d) $y = 12x^2 + 11x + 2$
e) $y = -2x^2 - 2x + 24$
f) $y = -4x^2 + 3x + 1$
g) $y = 2x^2 - 3x + 4$
h) $y = x^2 - 2x - 2$
i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -(x - 3)(x - 13)$
b) $y = 2(x - 2)(x + 5)$
c) $y = \frac{1}{3}(x + 15)(x + 9)$
d) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$
e) $y = -2(x + 1)(x + 1 - \sqrt{2})$
f) $y = (x + 2 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{2})$

2. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 - 3x - 2$ d) $y = 3x^2 - 5x + 1$ g) $y = 10 - 2x^2$

b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = -4x^2 + 2x - 1$ h) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$

c) $y = 4x^2 - x - 3$ f) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ i) $y = 6x^2 + 9$

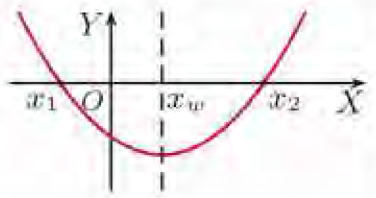
3. Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$ o podanych pierwiastkach.

a) 3 i 5 c) $\frac{1}{3}$ i 7 e) -5 i 0 g) $\sqrt{2}$ i $1 + \sqrt{2}$

b) 4 i -9 d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ f) $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$ h) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

4. Przeczytaj informację w ramce.

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1+x_2}{2}$.



Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

a) $y = x(x-6)$ b) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2)$ c) $y = (2x+1)(2x-3)$

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

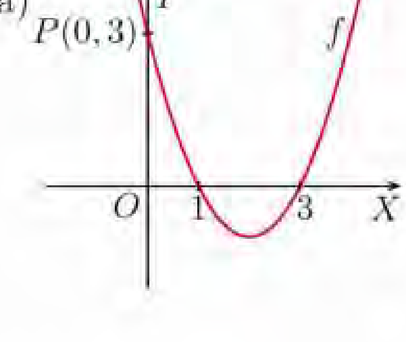
a) $y = -x(x+6)$ b) $y = (x-1)(x-5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$

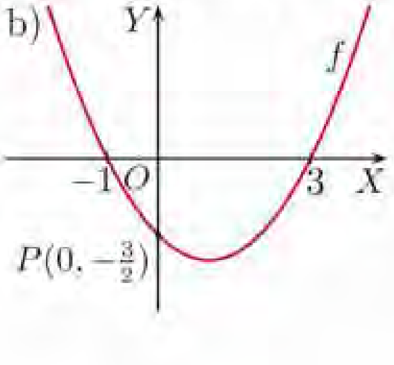
6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości W. Odpowiedź podaj w jednej z wymienionych poniżej postaci.

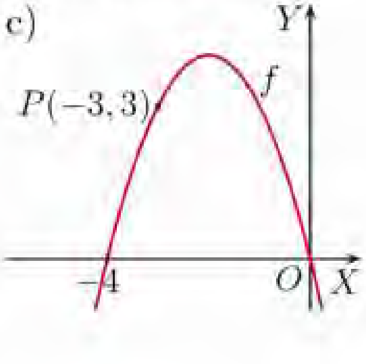
a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $W = \langle -4; \infty)$
b) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $W = (-\infty; 2\rangle$
c) $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, $W = (-\infty; 10\rangle$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $W = \langle -6; \infty)$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
Postać kanoniczna: $y = a(x-p)^2 + q$
Postać iloczynowa: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

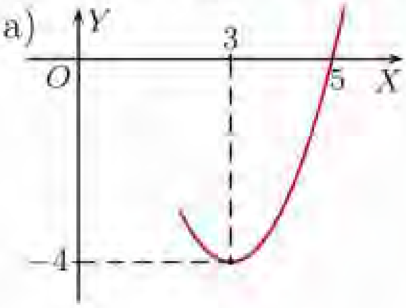
7. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f. Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.

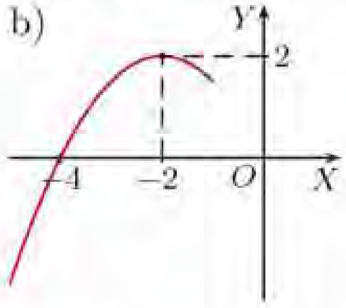
a)


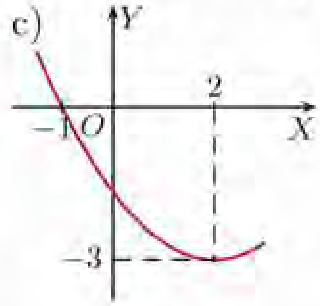
b)


c)


8. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f. Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.

a) 

b) 

c) 

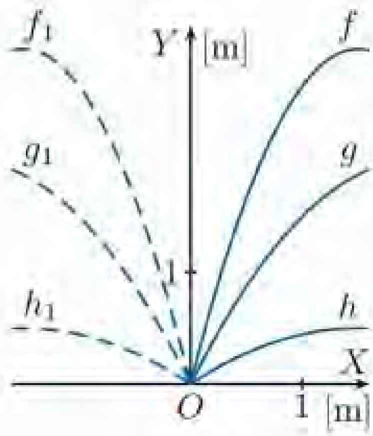
9. a) Jeden pierwiastek trójmianu kwadratowego jest o dwa większy od drugiego. Wyznacz ten trójmian, jeśli wiadomo, że parabola będąca jego wykresem ma wierzchołek w punkcie $(-2, 4)$.

b) Jeden pierwiastek trójmianu kwadratowego jest trzy razy większy od drugiego. Wyznacz ten trójmian, jeśli wiadomo, że parabola będąca jego wykresem ma wierzchołek w punkcie $(4, 2)$.

10. Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torach opisanych za pomocą wzorów:

$$f(x) = -\tfrac{4}{3}x^2 + 4x,\ g(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x$$
$$h(x) = -\tfrac{2}{9}x^2 + \tfrac{2}{3}x$$

Parabole f_1, g_1, h_1 są symetryczne odpowiednio do parabol f, g i h względem osi OY. Podaj równania parabol f_1, g_1, h_1 w postaciach kanonicznej i iloczynowej.



11. Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastki są dwukrotnie większe od pierwiastków trójmianu:

a) $y = x^2 - 4x + 3$, b) $y = x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$, c) $y = x^2 - 4x + 2$.

12. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$, aby otrzymać wykres trójmianu kwadratowego, którego pierwiastkami są liczby:

a) 1 i 5, b) -6 i 2, c) $3 - \sqrt{2}$ i $3 + \sqrt{2}$.

D **13.** Trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$ ma postać kanoniczną:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Wykaż, że jeśli $\Delta \geqslant 0$, to trójmian można zapisać w postaci iloczynowej.

Uwaga. Jest to dowód twierdzenia ze s. 313.

Rzut ukośny

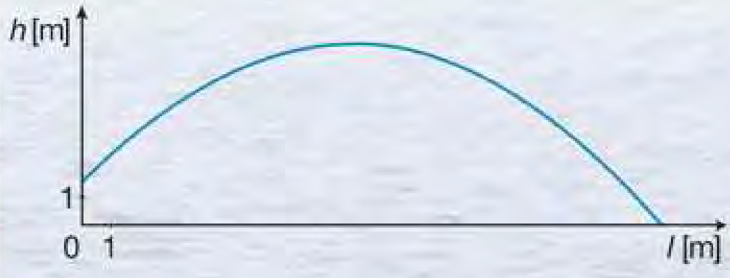
Tory rzuconej piłki, ukośnie skierowanego strumienia wody czy lawy wyrzuconej z wulkanu to fragmenty paraboli (jeżeli pominie się opór powietrza).

Portowa straż pożarna

Ruch wody wystrzeliwanej z armatek statku gaśniczego pod dużym ciśnieniem jest przykładem rzutu ukośnego. Umożliwia to zwalczanie pożarów na jednostkach pływających i na obszarach portowo-stoczniowych z bezpiecznej odległości.

Pchnięcie kulą

Rysunek pokazuje tor lotu kuli pchniętej przez zawodnika podczas zawodów w pchnięciu kulą (h – wysokość, l – odległość). Tor lotu kuli jest fragmentem paraboli $y = ax^2 + bx + c$, której wierzchołek ma współrzędne $\left(10, 6\frac{1}{2}\right)$ i która przechodzi przez punkt $\left(0, 1\frac{1}{2}\right)$.



1 Wyznacz równanie paraboli.

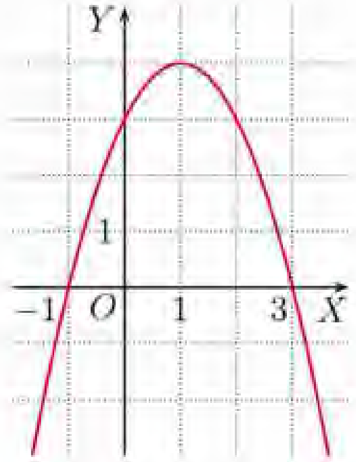
2 Czy zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m?

7.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.



Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę czy w dół.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 6x > 0$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

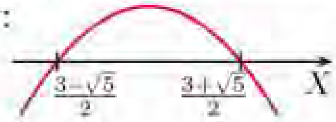
$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$

b) $-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = 9 - 4 = 5$, zatem: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:



$$-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0 \text{ dla } x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$ b) $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$ c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2+2x-1 \geqslant 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2+2x-1=0$, czyli $-(x-1)^2=0$. Zatem $x=1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Ze szkicu wykresu odczytujemy: $-x^2+2x-1 \geqslant 0$ dla $x=1$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2+2x-1 \leqslant 0$ b) $-x^2+2x-1 < 0$ c) $-x^2+2x-1 > 0$

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2-3x+2<0$.

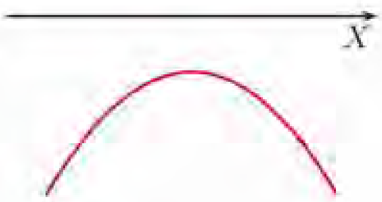
$\Delta = 9-4\cdot 5\cdot 2 = -31 < 0$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2-3x+2=0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX, a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.

b) Rozwiąż nierówność $-3x^2+2x-1<0$.

$\Delta = 4-4\cdot(-3)\cdot(-1) = -8 < 0$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2+2x-1=0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX, a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x, czyli $x \in \mathbf{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2+2x+1>0$ b) $x^2+x+3<0$ c) $-2x^2+\sqrt{2}x-1 \leqslant 0$

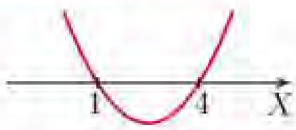
Przykład 5

Rozwiąż nierówność $2(2-x) < -x(x-3)$.

$$4-2x < -x^2+3x$$ Wykonujemy mnożenie.

$$x^2-5x+4<0$$ Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2-5x+4=0$ i otrzymujemy $x=1$ lub $x=4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1;4)$.



Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geqslant 6$ g) $9x + 5 \geqslant 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$

b) $x^2 \leqslant 16$ e) $x^2 - 4 \leqslant 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geqslant \frac{1}{2}x^2$

c) $4x^2 \geqslant 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leqslant x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?

a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geqslant 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leqslant x$ d) $2 - x > x^2$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ c) $x^2 + 2x + 2 > 0$ e) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leqslant 0$

b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leqslant 0$ d) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ f) $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$ d) $(2x - 2)^2 \geqslant (3x - 2)(x - 3)$

b) $(3x - 1)(x + 2) \geqslant (x - 3)(2x - 1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geqslant -(x - 1)^2 - 6$

c) $(4x - 1)(4 - x) \leqslant (2 - 3x)(x + 1)$ f) $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$

6. Dane są zbiory A i B. Zaznacz na osi liczbowej zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 6 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 \leqslant 4x\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x + \frac{1}{4} \leqslant 0\}$

7. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$ d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{9 - 4x^2}$

8. Boki prostokąta mają długości równe $x - 1$ i $2x + 3$. Podaj wzór funkcji P zmiennej x opisującej pole tego prostokąta i określ jej dziedzinę. Dla jakich wartości x pole tego prostokąta jest:

a) mniejsze od 7, b) większe od 18?

9. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4|x| \geqslant 0$ b) $x^2 + 2|x| < 3$ c) $2x^2 - 5|x| \geqslant 3$

7.8. Zagadnienia uzupełniające

Spadek swobodny i ruch pionowy w górę

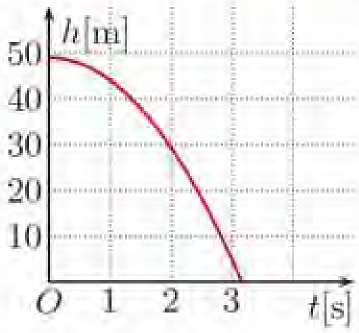
Jeśli pominiemy opór powietrza, to drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało możemy opisać za pomocą wzoru $s = \frac{gt^2}{2}$, gdzie t jest czasem, a g – przyspieszeniem ziemskim. Dla $g \approx 9{,}81$ m/s^2 mamy $s \approx 4{,}9t^2$. Galileusz w *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych...* z 1638 roku analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znane jest jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie, z wysokości 49 metrów, zrzucał metalowe kule.

1. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość h od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu t, można opisać za pomocą wzoru $h(t) = -4{,}9t^2 + 49$.

a) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

t[s]	0	1	2	3
h[m]	49	?	?	?

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji h będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?

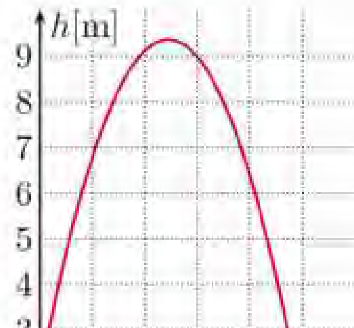


c) Naszkicuj wykres funkcji $k(t) = -4{,}9t^2 + 80$ opisującej odległość k od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m.

2. Wysokość nad ziemią piłki wyrzuconej pionowo w górę z prędkością 12 m/s (ręka osoby rzucającej piłkę była wzniesiona w momencie rzutu 2 m nad ziemię) dana jest wzorem $h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 2$. Wykres funkcji h przedstawiono na rysunku.

a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

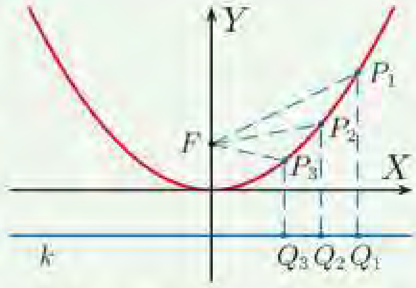
b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili $t = 1$ s czy $t = 2$ s?



Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu F (zwanego **ogniskiem**). Na rysunku obok mamy:

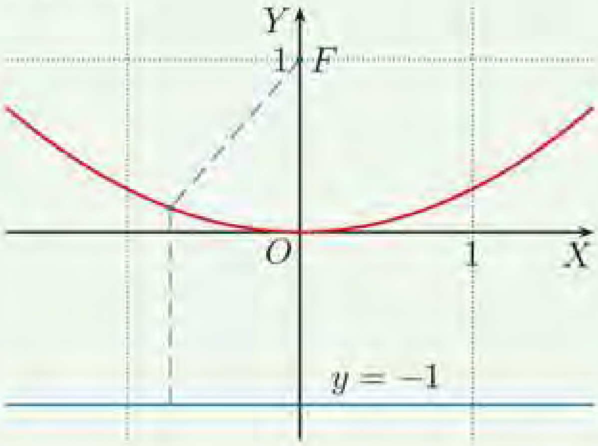
$|P_1F| = |P_1Q_1|$, $|P_2F| = |P_2Q_2|$, $|P_3F| = |P_3Q_3|$



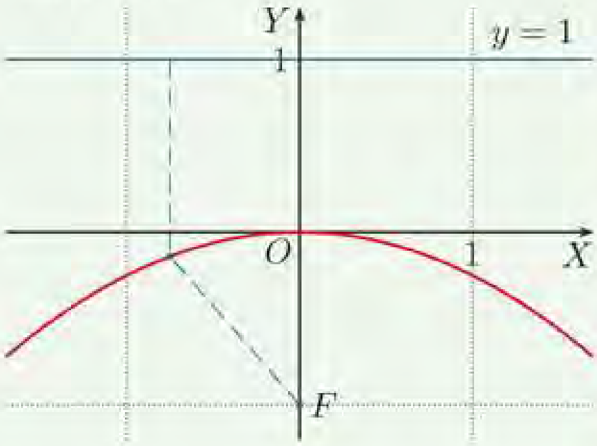
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej $y = -p$ i punktu $F(0, p)$, jest określona za pomocą równania $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Przykład 1

Parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -1$ i ognisko $F(0, 1)$.



Parabola $y = -\frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = 1$ i ognisko $F(0, -1)$.



Parabola $y = x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -\frac{1}{4}$ i ognisko $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

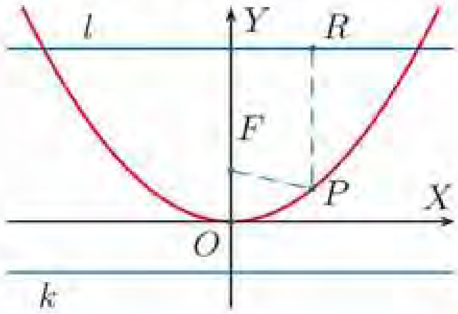
3. Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej k i punktu F.

a) $k\colon y = -\frac{1}{2}$, $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ b) $k\colon y = \frac{1}{2}$, $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ c) $k\colon y = -\frac{1}{6}$, $F\left(0, \frac{1}{6}\right)$

4. Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli:

a) $y = -x^2$, b) $y = 2x^2$, c) $y = -2x^2$, d) $y = \frac{1}{8}x^2$.

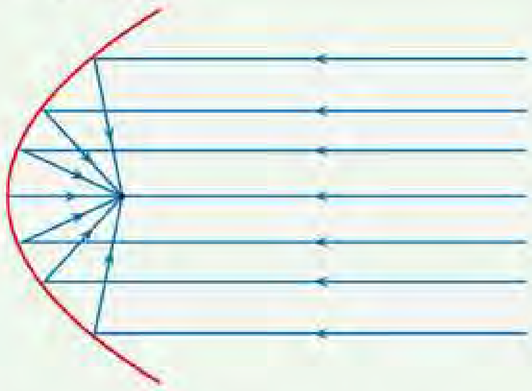
D **5.** Dana jest parabola o ognisku F i kierownicy k. Prosta l jest równoległa do kierownicy i leży powyżej wierzchołka paraboli. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P należącego do paraboli suma odległości tego punktu od ogniska i prostej l jest stała.



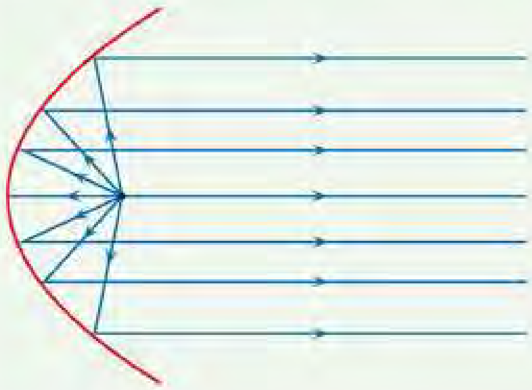
6. Skonstruuj parabolę zgodnie z podanym niżej opisem.
   - Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
   - Na osi symetrii wybierz punkt F – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
   - Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
   - Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie F i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Czy wiesz, że...

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie zwanym ogniskiem paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$ c) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

b) $f(x) = -x^2 + 6x$ d) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x$

2. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = x^2 - 4x$ c) $y = -x^2 + 2x + 8$ e) $y = 2x^2 - 5x + 2$

b) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = x^2 + 6x + 8$ f) $y = -2x^2 + 8x - 6$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ c) $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$ e) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

b) $-6x^2 - 7x + 5 = 0$ d) $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$ f) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $49x^2 + 140x + 100 = 0$ e) $(2x-4)(x-10) = (x+6)(x-10)$

b) $x^2 + 6x + 9 = (2x - 1)^2$ f) $x(3 - x) = (2x + 1)(x + 2) - 1$

c) $3x^2 + 2x + 1 = 3x + 4x^2 - 3$ g) $(x-1)(x+2) = (2x-3)(x+4)$

d) $4 - \frac{1}{4}x^2 - 3x = x^2 + 2x + 9$ h) $(2x - 1)^2 = (3 - x)(x - 6)$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 1 \geqslant 0$ e) $x^2 - 3x(x - 1) \leqslant 2(x - 1)(x + 1) - 4x$

b) $-4x^2 \leqslant 12x$ f) $7 - x(5x + 2) > 3 - x(4 - x)$

c) $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7 < 0$ g) $2x^4 + x^2 - 3 \geqslant (1 - 2x^2)(3 - x^2)$

d) $6x^2 + 3 > 2x$ h) $(2-3x)^2 - 6(3x-1) \leqslant -(1-4x)(2x-1)$

6. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W. Wyznacz współczynniki b i c oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $W(0, 1)$ b) $W(1, 3)$ c) $W(-2, 2)$ d) $W(4, -1)$

7. Wyznacz współczynnik b tak, aby podany przedział był zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + 1$.

a) $\langle -1; \infty)$ b) $\langle 0; \infty)$ c) $\langle 2; \infty)$ d) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$

Zestaw II

1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, jeśli wiadomo, że:

a) przyjmuje ona największą wartość równą 2, a jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3,

b) jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -5; \infty)$, a miejscami zerowymi są liczby -3 i 7,

c) przyjmuje ona najmniejszą wartość równą 0, a do jej wykresu należą punkty $(2,5)$ i $(4,5)$.

2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(2,4)$ przechodząca przez punkt P.

a) $P(4,0)$ b) $P(-1,7)$ c) $P(6,10)$

3. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f. Wyznacz drugie miejsce zerowe funkcji f, jeśli wiadomo, że punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $W(5,4)$ b) $W(-3,-6)$ c) $W(\frac{1}{2},2)$ d) $W(\frac{5}{4},6)$

4. Rozwiąż równanie.

a) $(x-3)^2 = (2x-1)(x-3)$

b) $x^2+4x+4 = (x+2)(3x-4)$

c) $16-(3x-1)^2 = 0$

d) $9x^2-(2x-1)^2 = 0$

e) $4x^2 = (1-x)^2$

f) $(2x+1)^2 = (4x+5)^2$

5. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} (3x+1)(x-2) > 0 \\ 4x^2-1 \leqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(2-3x) \geqslant -3(x+2) \\ 25-9x^2 < 0 \end{cases}$

6. Wyznacz współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego $y = ax^2+bx+c$, jeśli do jego wykresu należą punkty:

a) $A(0,2)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$,

b) $A(0,4)$, $B(1,3)$, $C(2,0)$,

c) $A(3,0)$, $B(2,4)$, $C(4,4)$,

d) $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(4,-4)$.

Przedstaw ten trójmian w postaci iloczynowej.

7. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x,y) spełniających warunki:

a) $x^2 \leqslant x+12$ i $y^2 \leqslant 4$,

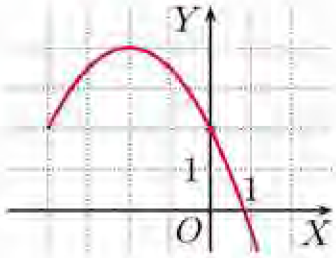
b) $x^2 \leqslant 3x$ i $y^2-y \leqslant 2$,

c) $x^2-2x > 3$ i $y^2 < 2y$,

d) $x^2-x > 6$ i $y^2 \geqslant 3y$.

Jeśli w zadaniu mamy do wyznaczenia wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

Przykład 1



Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(-2, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $f(x) \geqslant \frac{1}{2}x + 2$?

Wzór funkcji f zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 4)$, więc:

$$f(x) = a(x+2)^2 + 4$$

Do wykresu funkcji f należy punkt $(0, 2)$, zatem $2 = a(0+2)^2 + 4$ i stąd $a = -\frac{1}{2}$, czyli $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\tfrac{1}{2}(x+2)^2 + 4 \geqslant \tfrac{1}{2}x + 2 \;/ \cdot (-2)$$
$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leqslant -x - 4$$
$$x^2 + 5x \leqslant 0$$
$$x(x+5) \leqslant 0$$

Zatem $x \in \langle -5; 0 \rangle$, czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$, sześć liczb

D

Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość x. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli prostokąt ten nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez y. Wtedy $2x + 2y = 14$, czyli $y = 7 - x$. Zatem pole tego prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \text{ gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej $x_w = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$.
Rzędna wierzchołka:

$$P\left(\tfrac{7}{2}\right) = -\left(\tfrac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \tfrac{7}{2} = \tfrac{-49}{4} + \tfrac{49}{2} = \tfrac{49}{4} = 12\tfrac{1}{4}$$

Funkcja P przyjmuje wartość $12\frac{1}{4}$ dla $x = y = \frac{7}{2}$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przedział $\langle -10; \infty)$ jest zbiorem wartości funkcji:

A. $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$, **C.** $f(x) = 4x^2 - 12x - 1$,
B. $f(x) = 4x^2 - 12x + 1$, **D.** $f(x) = 4x^2 - 12x - 10$.

2. Prosta $x = \sqrt{2}$ jest osią symetrii wykresu funkcji:

A. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x - 1$, **C.** $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x - 1$,
B. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 1$, **D.** $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + 1$.

3. Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku położonym nad osią OX, gdy:

A. $f(x) = \left(2 - \sqrt{2}\right) x^2 - 6$, **C.** $f(x) = \left(1 - \sqrt{2}\right) x^2 - 6$,
B. $f(x) = \left(2 - \sqrt{2}\right) x^2 - 6x$, **D.** $f(x) = \left(1 - \sqrt{2}\right) x^2 - 6x$.

4. Dwa różne pierwiastki ma równanie:

A. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$, **C.** $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$,
B. $2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$, **D.** $2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{3} = 0$.

5. Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3, zatem:

A. $b = -8$ i $c = -60$, **C.** $b = 2$ i $c = -8$,
B. $b = -2$ i $c = -15$, **D.** $b = 4$ i $c = -30$.

6. Wierzchołkiem paraboli danej równaniem $y = (2x + 8)(3x + 6)$ jest punkt:

A. $(-3, -6)$, **B.** $(-3, 6)$, **C.** $(3, -6)$, **D.** $(3, 6)$.

7. Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności:

A. $5x^2 + 4x \geqslant 0$, **C.** $9x^2 + 30x - 25 \geqslant 0$,
B. $-4x^2 - 1 < 0$, **D.** $-2x^2 + 24x - 48 < 0$.

8. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x^2 > 3$ jest:

A. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, **C.** $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$,
B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$, **D.** $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$.

9. Liczba π należy do zbioru rozwiązań nierówności:

A. $2x^2 - 9x - 11 \geqslant 0$, **C.** $2x^2 - 5x - 7 \geqslant 0$,
B. $2x^2 - 7x - 9 \geqslant 0$, **D.** $2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Rozwiąż równanie $3x(x+3) = (x+3)^2$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $2x^2 + 7x \geqslant 4$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $(x+1)(2x+3) \leqslant (x+1)(5-x)$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -6x + x^2$.

Zadanie 5 (2 pkt)
Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.

Zadanie 6 (2 pkt)
Zapisz w postaci iloczynowej trójmian kwadratowy $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$.

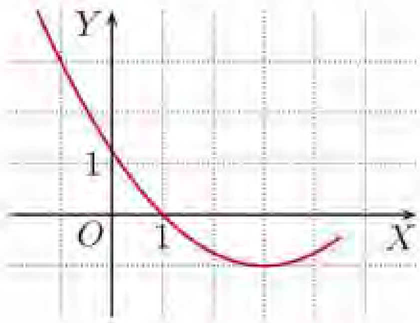
Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)
Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ o trzy jednostki w lewo. Naszkicuj wykres funkcji g i odczytaj z niego najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle -5; 1\rangle$.

Zadanie 8 (4 pkt)
Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie obie nierówności:

$$x^2 + 4x \leqslant 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 4 > 0$$

D **Zadanie 9 (5 pkt)**
Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(3, -1)$. Wyznacz wzór funkcji f i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności $f(x) \leqslant -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.



D **Zadanie 10 (6 pkt)**
Jedna z przekątnych rombu ma długość x, a suma długości obu przekątnych jest równa $10\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od x. Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnej całkowitej wartości x należącej do dziedziny funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $|x_1|$, gdzie x_1 jest najmniejszym pierwiastkiem równania:

$$(x^2 - 11x - 26)(2x^2 + 7x + 4) = 0$$

Zadanie 2 (2 pkt)

Niech S oznacza sumę wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówności $x^2 - 14x - 32 > 0$ i $x^2 - 23x \leqslant 0$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby S.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wykres funkcji f otrzymujemy, przesuwając parabolę $y = x^2 - 4x + 11$ o wektor $\left[\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right]$. Znajdź najmniejszą wartość funkcji f. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku tej liczby.

Zadanie 4 (2 pkt)

Liczba -5 jest jednym z miejsc zerowych funkcji f, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-3, 1)$. Po przesunięciu wykresu f o wektor $[0, p]$ otrzymujemy wykres funkcji g, dla której jednym z miejsc zerowych jest liczba 4. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby p.

Zadanie 5 (4 pkt)

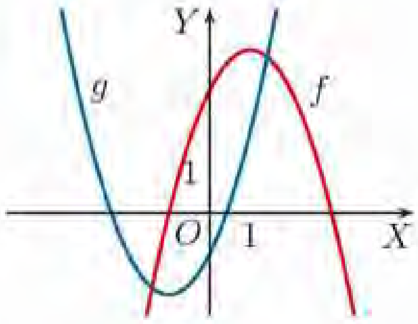
Funkcje $f(x) = 2x^2 - 11x + 15$ i $g(x) = x^2 + bx + c$ mają te same miejsca zerowe. Oblicz wartości współczynników b i c.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant 3$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ i $g(x) = ax^2 + bx - 1$. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie $(-1, -2)$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \cdot g(x) < 0$.



Zadanie 8 (4 pkt)

Dane są funkcje $f(x) = -x^2 + 4|x| + 1$ i $g(x) = x + 1$. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Liczby naturalne

Ć **1.** **a)** 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

2. **a)**, **c)** tak **b)**, **d)** nie

3. **a)** $3 \cdot 8 + 2$ **b)** $3 \cdot 25 + 1$ **c)** $3 \cdot 36$
d) $3 \cdot 42 + 1$ **e)** $3 \cdot 237 + 2$

4. **a)** $4 \cdot 0 + 3$ **b)** $4 \cdot 12 + 1$
c) $4 \cdot 19 + 3$ **d)** $4 \cdot 31 + 2$ **e)** $4 \cdot 123$

5. **a)** 2 **b)** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

6. $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$,
$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,
$1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

7. **a)** $\mathrm{NWD}(18, 30) = 6$,
$\mathrm{NWW}(18, 30) = 90$
b) $\mathrm{NWD}(15, 50) = 5$,
$\mathrm{NWW}(15, 50) = 150$
c) $\mathrm{NWD}(24, 72) = 24$,
$\mathrm{NWW}(24, 72) = 72$
d) $\mathrm{NWD}(144, 192) = 48$,
$\mathrm{NWW}(144, 192) = 576$
e) $\mathrm{NWD}(84, 105) = 21$,
$\mathrm{NWW}(84, 105) = 420$
f) $\mathrm{NWD}(196, 420) = 28$,
$\mathrm{NWW}(196, 420) = 2940$

8. $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$, $\mathrm{NWD}(x, y) = x \cdot y$

Z **1.** **a)** 41 **b)** 26 **c)** 23 **d)** 19

2. **a)** $5 \cdot 7 + 4$ **b)** $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$ **d)** $5 \cdot 55 + 0$

3. **a)** nie **b)** tak, dla $r = 2$
c) tak, dla $r = 3$ **d)** nie

4. **a)** $6n + 9$ **b)** $6n + 3$
c) $6n - 9$ **d)** $12n + 15$

6. **a)** 6 **b)** 150 **c)** 245 **d)** 70

7. **a)** 24 **b)** 120 **c)** 23

Cechy podzielności liczb

1. **a)** 3, 5 **b)** 2, 3, 9 **c)** 2, 5 **d)** 2, 3

2. **a)** 4 – tak, 8 – tak **b)** 4 – tak, 8 – nie
c) 4 – nie, 8 – nie **d)** 4 – tak, 8 – tak

3. **a)** 6, 12 **b)** 6, 15 **c)** przez żadną **d)** 6

4. **a)** $a = 6$ **b)** $a = 0$ lub $a = 6$
c) $a = 2$ lub $a = 6$ **d)** $a = 6$

5. **a)** 15 **b)** 15, 75 **c)** żadna **d)** 15, 45

6. **a)** tak **b)** tak **c)** nie

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne

Ć **1.** **a)** -36 **b)** 16 **c)** 720 **d)** -481
e) -58 **f)** 26

2. **a)**, **b)** $x = y$ **c)** $x \neq y$

3. $\frac{1}{36}$

4. **a)** $-2\frac{13}{24}$ **b)** $\frac{11}{12}$ **c)** $3\frac{13}{18}$ **d)** $2\frac{55}{72}$

5. **a)** $2\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $-2\frac{7}{9}$ **d)** 5

Z **1.** **a)** $A = 10\frac{1}{5}$, $B = 11\frac{4}{5}$, $C = 12\frac{1}{5}$
b) $D = -3\frac{3}{7}$, $E = -1\frac{5}{7}$, $F = \frac{6}{7}$
c) $G = 2\frac{1}{15}$, $H = 6\frac{1}{15}$, $I = 8\frac{11}{15}$
d) $J = -\frac{8}{11}$, $K = \frac{4}{11}$, $L = 2\frac{6}{11}$

2. **a)** $-\frac{17}{30}$ **b)** $6\frac{5}{24}$ **c)** 1 **d)** $-1\frac{5}{12}$ **e)** $3\frac{2}{15}$
f) $-\frac{31}{48}$ **g)** $4\frac{1}{24}$ **h)** $-2\frac{3}{5}$ **i)** $\frac{7}{60}$

3. **a)** 14 **b)** $-2\frac{3}{5}$ **c)** 8

4. **a)** $z < y < x$ **b)** $y < z < x$

5. **a)** $-8\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{8}{15}$ **c)** $-\frac{1}{20}$ **d)** $1\frac{1}{8}$ **e)** $2\frac{3}{5}$
f) -42 **g)** $1\frac{1}{24}$ **h)** $\frac{1}{9}$

7. **a)** $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ **b)** $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
c) $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$

8. $\frac{9}{10}$

9. 60 h

10. 5 h 12 min

1.3. Liczby niewymierne

Ć **1.** **a)** $\sqrt{7}, \sqrt{18}, \sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{25}$

2. **a)**, **b)** jest **c)** nie jest

3. **a)** np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ **b)** np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$

Z **1.** **a)** $\sqrt{164}$ **b)** $\sqrt{125}$ **c)** $\sqrt{286}$

2. **a)** $\sqrt{5}$, nie **b)** $\sqrt{10}$, nie

3. **b)**, **c)**, **e)**, **f)** tak **a)**, **d)** nie

4. **a)**, **c)**, **e)** jest **b)**, **d)**, **f)** nie jest

5. **a)** 11 **b)** 8 **c)** 4

6. **a)** p, q lub p, r **b)** q, r **c)** q, s **d)** q, s

7. sześciokąta

10. **a)** np. $\sqrt{2}$ **b)** np. $0{,}01\sqrt{2}$ **c)** np. $5 + 0{,}001\sqrt{2}$

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ć **1.** **a)** 0,35 **b)** 0,44 **c)** 2,08 **d)** 2,86 **e)** 0,032 **f)** 0,068

2. **a)** dziesiąte miejsce: 2, dwudzieste miejsce: 4 **b)** dziesiąte miejsce: 7, dwudzieste miejsce: 3 **c)** dziesiąte miejsce: 5, dwudzieste miejsce: 4 **d)** dziesiąte miejsce: 0, dwudzieste miejsce: 4

4. **a)** $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$

5. **a)** 21 **b)** 20 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

6. **a)** 3,141 593; z nadmiarem **b)** 3,141 59; z niedomiarem **c)** 3,1416; z nadmiarem **d)** 3,142; z nadmiarem **e)** 3,14; z niedomiarem

7. **a)** 6,78; błąd przybliżenia: 0,0024 **b)** 8,47; błąd przybliżenia: −0,0047 **c)** 7,90; błąd przybliżenia: −0,0049 **d)** 10,00; błąd przybliżenia: −0,0038 **e)** 5,90; błąd przybliżenia: 0,0039

Z **1.** **a)** 0,(7) **b)** 0,01(6) **c)** 0,00(3) **d)** 0,00(5) **e)** 0,3(6) **f)** 0,1(8)

2. **a)** na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 0; 1,046 **b)** na 12. miejscu: 2, na 25. miejscu: 5; 0,325 **c)** na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 7; 7,004 **d)** na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 3; 9,349 **e)** na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 4; 2,863 **f)** na 12. miejscu: 5, na 25. miejscu: 0; 3,124

3. $a = 6$, $b = 3$

4. **a)**, **d)** skończone **b)**, **c)** okresowe

5. **a)** $\frac{4}{11}$ **b)** $\frac{41}{11}$ **c)** $-\frac{206}{33}$ **d)** 1 **e)** $\frac{209}{5}$

6. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{48}{11}$, $x + y = 5\frac{1}{33}$, $x^2 - y = -3\frac{91}{99}$, $x + \frac{1}{y} = \frac{43}{48}$

7. $x = 1$, $y = 6$

8. **a)** 111 110, liczba niewymierna **b)** 0, liczba niewymierna

9. z dokładnością do 0,005: $\frac{60}{37}$, $\frac{97}{60}$, $\frac{157}{97}$

Długość okręgu. Liczba π

1. kwadrat: 1,4142; 2,8284; 8-kąt: 0,7654; 3,0615; 16-kąt: 0,3902; 3,1214; 32-kąt: 0,1960; 3,1365; 64-kąt: 0,0981; 3,1403; dla 32-kąta i 64-kąta

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Ć **1.** **a)** 12 **b)** 15 **c)** 18 **d)** 25 **e)** 50 **f)** 90 **g)** 1,1 **h)** 1,9 **i)** 2,1

2. **a)** 3 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 1,2 **e)** $\sqrt{3}$

3. **a)** 7,2 cm **b)** 128 cm

4. **a)** 18, 3, 5,7 **b)** $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{24}{25}$ **c)** 4, 3, 10 **d)** 3, $\frac{1}{2}$, 2

Z **1.** **a)** 3 **b)** −11 **c)** 4,2 **d)** 0,5 **e)** $-\frac{17}{20}$ **f)** $1\frac{19}{30}$

3. **a)** 2, 3, 4, 5 **b)** 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 **c)** 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

4. **a)** $3\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{6}$ **c)** $4\sqrt{3}$ **d)** $4\sqrt{6}$ **e)** $6\sqrt{3}$ **f)** $6\sqrt{7}$ **g)** $14\sqrt{2}$ **h)** $15\sqrt{2}$

5. **a)** $6\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $10\sqrt{2}$ **d)** $5\sqrt{2}$ **e)** $20\sqrt{2}$ **f)** $22\sqrt{2}$

6. a) $9\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{5}$
e) $4{,}6\sqrt{2}$ f) $-25\sqrt{5}$

7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$

8. a) $4\sqrt{2}+1 \approx 6{,}6$ b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}6$
c) $\frac{5}{4}(1-\sqrt{2}) \approx -0{,}5$

9. a) 6 b) 16 c) 20 d) 30 e) 42 f) 30
g) 120 h) 120

10. a) 30 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$ c) 2,2 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. a) $6+18\sqrt{2}$ b) $12\sqrt{3}-30$
c) $\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{6}$ d) $5\sqrt{2}+4\sqrt{5}-1$

12. a) 15 b) $6\sqrt{2}+8\sqrt{3}$ c) 16

13. a) $Ob = 12\sqrt{2}$, $P = 12$
b) $Ob = 24\sqrt{3}$, $P = 72$
c) $Ob = 5(\sqrt{10}+\sqrt{2})$, $P = 10\sqrt{5}$

1.6. Pierwiastek sześcienny

Ć **1.** a) 1 b) 4 c) 6 d) 20

2. a) 8 b) $\frac{1}{5}$ c) 11 d) $\frac{2}{9}$ e) 1,1 f) $\frac{9}{11}$

3. a) 6 b) 5 c) 14 d) 2 e) $-\frac{1}{12}$ f) $2\frac{1}{3}$

4. a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $2\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

5. a) -3 b) -4 c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{10}$

6. a) 3 b) -2 c) 0,2 d) $-0{,}1$ e) 3
f) -1 g) 2 h) -2 i) 2 j) -2

Z **1.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{4}{3}$
h) $\frac{7}{3}$

2. a) 7 b) 1 c) 13 d) 2 e) 0,6 f) 0,5

3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$ c) $3\sqrt[3]{5}$ d) $5\sqrt[3]{3}$ e) $3\sqrt[3]{4}$

4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{432}$ d) $\sqrt[3]{640}$
e) $\sqrt[3]{1080}$

5. Wszystkie równości są prawdziwe.

6. a) y b) $x = y$ c) y d) x

7. a), b) Większa jest pierwsza liczba.
c) Są równe.

9. a) 8 cm b) 20 cm

10. a) $12\sqrt[3]{2}$ cm b) 15 cm

11. a) $\sqrt[4]{162}$ b) $\sqrt[4]{2500}$ c) $\sqrt[5]{2048}$
d) $\sqrt[6]{10\,000}$ e) $\sqrt[10]{5120}$

12. a) 14 b) 9 c) -10 d) 4 e) 0,6 f) 2,1
g) $1\frac{1}{4}$ h) 12

13. a) 25 b) $\frac{3}{5}$ c) 9 d) $\frac{7}{3}$

14. a) -20 b) $-0{,}1$ c) $-\frac{5}{4}$ d) $-1{,}5$

15. a) 1 b) 0,3 c) $\frac{14}{15}$ d) -1 e) $-2{,}4$ f) 4

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Ć **1.** a) 81, 729, 6561 b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$
c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$

2. $(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 =$
$= 2^4 < 3^4 = (-3)^4$

3. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{27}$ e) 4 f) 32
g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{81}{16}$ i) 25 j) -125

4. a) tak b) tak c) nie

5. a) 27 b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{256}$ e) 25
f) 1024 g) 32 h) 1024 i) $\frac{27}{4}$ j) 400

6. a) x^4, $x \neq 0$ b) x^6, $x \neq 0$
c) $\frac{x}{y}$, $x, y \neq 0$ d) $\frac{x^4}{y^3}$, $x, y \neq 0$

Z **1.** a) $-32, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$ b) $9, -27, 81$
c) $9, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$ d) $8, 8\sqrt{2}, \frac{1}{16}$

2. a) 2^{15} b) 2^{-4} c) 2^{27} d) 2^{20}

3. a) $2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}$
b) $3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}$
c) $10^{-3}, 10^{10}, 10^8, 10^{-6}$
d) $5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}$

4. a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ b) $\frac{4}{81}$ c) $-40\sqrt{5}$ d) 18

5. $a \neq 0$ a) a^2 b) a^3 c) a^2 d) a^{13}
e) a^{-16} f) a^{14}

6. a) x b) y

7. a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 6 d) $3\frac{3}{8}$ e) 0 f) $2\frac{1}{2}$

8. a) 2 b) 16 c) $\frac{2}{5}$ d) 27 e) $13\frac{1}{2}$ f) $\frac{7}{9}$

9. a) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\frac{1}{y^3}$
b) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{1}{a^3bc^2}$
c) $a \neq 0$, $c \neq 0$, $729b^6c^2$

1.8. Notacja wykładnicza

Ć **1.** a) $5{,}02 \cdot 10^{27}$ b) $2{,}99 \cdot 10^{-26}$
c) $9{,}109\,56 \cdot 10^{-31}$

Z **1.** a) $6{,}32 \cdot 10^6$ b) $1{,}09 \cdot 10^8$ c) $4{,}3728 \cdot 10^1$
d) $8{,}7652 \cdot 10^3$ e) $6{,}5 \cdot 10^{-4}$ f) $3{,}02 \cdot 10^{-3}$
g) $1{,}003\,24 \cdot 10^{-1}$ h) $1 \cdot 10^{-6}$

2. a) 86 200 b) 0,000 789
c) 0,000 083 4 d) 6,02

3. a) $1{,}36 \cdot 10^3 = 1360$
b) $1{,}12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
c) $3 \cdot 10^2 = 300$ d) $6 \cdot 10^{-1} = 0{,}6$

4. a) $2{,}73 \cdot 10^8 = 273\,000\,000$ b) $2 \cdot 10^1 = 20$
c) $2{,}42 \cdot 10^{-4} = 0{,}000\,242$
d) $5{,}203 \cdot 10^2 = 520{,}3$

5. a) $2 \cdot 10^4 = 20\,000$
b) $9 \cdot 10^{10} = 90\,000\,000\,000$
c) $3 \cdot 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$
d) $1{,}6 \cdot 10^{11} = 160\,000\,000\,000$

6. a) $9{,}6 \cdot 10^9$ b) $6 \cdot 10^{-13}$ c) $1{,}02 \cdot 10^0$
d) $1{,}2 \cdot 10^0$

7. włos: $0{,}000\,000\,004\,6$ m/s,
ślimak: $1{,}94 \cdot 10^{-3}$ m/s,
sprinter: $1 \cdot 10^1$ m/s,
Ziemia: 29 600 m/s,
światło: $2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

8. rok świetlny: $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km;
kolejno: $3{,}9 \cdot 10^5$, $1{,}5 \cdot 10^8$, $5{,}9 \cdot 10^9$, $4{,}1 \cdot 10^{15}$, $2{,}6 \cdot 10^{17}$, $1{,}4 \cdot 10^{22}$

9. $1{,}017 \cdot 10^{11}$ h

Nazwy wielkich liczb

2. nazewnictwo europejskie:
Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
Merkury – 330,2 tryliardów kg,
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg;
nazewnictwo amerykańskie:
Słońce – 1,989 nonylionów kg,
Merkury – 330,2 sekstylionów kg,
Jowisz – 1,899 oktylionów kg,
Ziemia – 5,974 septylionów kg

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Ć **1.** a) 2 b) 4 c) 9 d) 2 e) 3 f) 3

2. a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 729
f) 32 g) $\frac{1}{25}$ h) 27 i) 32 j) $\frac{9}{4}$

4. a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8 e) 5
f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4

5. a) 4 b) 125 c) 16 d) 32 e) $\sqrt[3]{3}$

6. a) 216 b) 32 c) 12 d) $\frac{9}{4}$ e) 15

7. a) 81 b) 4 c) $\frac{1}{16}$ d) $5\sqrt{5}$ e) $\frac{8}{27}$

8. a) 199,5262 b) 2818,3829
c) 42,1697 d) 0,0200

Z **1.** a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$ e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$
g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$

2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$ e) $7^{-\frac{3}{2}}$
f) $7^{-\frac{3}{5}}$ g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$

3. a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{12}$ f) 8
g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09 d) 125 e) 32
f) 0,008 g) $411\frac{127}{243}$ h) 0,008

5. a) 16 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 64

6. a) $2^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{1}{6}}$ c) $5^{\frac{3}{8}}$ d) $2^{\frac{5}{6}}$ e) $3^{\frac{1}{6}}$ f) $3^{\frac{1}{12}}$
g) $2^{\frac{4}{3}}$ h) $3^{\frac{7}{6}}$ i) $2^{\frac{3}{2}}$ j) 18^1 k) $2^{-\frac{1}{2}}$ l) $3^{\frac{7}{8}}$

7. a) x b) x

1.10. Logarytm i jego własności

Ć **1.** a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e) $\frac{1}{3}$

2. a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e) $\frac{1}{2}$

3. a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -2 f) $\frac{1}{4}$

5. a) 14 b) 7 c) $1\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{3}$ e) $2\frac{1}{4}$

6. a) -7 b) 13 c) $-2\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{2}$ e) $4\frac{3}{4}$

7. a) 20 b) 20 c) 12 d) -16

Z **1.** a) 9 b) 1 c) -5 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

2. a) 0 b) 5 c) -1 d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. a) -1 b) 2 c) 4 d) 3 e) $\frac{1}{2}$

4. a) $2 + 4 = 6$ b) $3 - 2 = 1$ c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

5. a) $3 - 1 = 2$ b) $4 - 2 = 2$ c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

6. a) 2 b) 1 c) 3

8. a) $-1{,}523$, $-0{,}523$, $0{,}477$
b) $-1{,}268$, $-2{,}268$, $0{,}732$ c) $1{,}431$, $0{,}602$

Skala logarytmiczna

1. a) $\log 40 \approx 1{,}6$; $\log 90 \approx 1{,}95$
b) $\log 400 \approx 2{,}6$; $\log 900 \approx 2{,}95$

2. $\log a = 1$, $\log b = 4$, $\log c = 6$,
$\log d = -4$, $\log e = -6$

1.11. Procenty (1)

Ć **1.** czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł,
razem 66 zł

2. cena nart po obniżce: marcowej – 462 zł,
o 50% – 412,5 zł

3. 1380 zł, wzrosła o 38%

4. a) 20 b) 30

5. a) 2,4 b) 30,8 c) 5 d) 5 e) 0,036 f) 0,99

6. firma Y: o 35%, firma Z: o 12,5%

7. a) $y = 50\%x$, $x = 200\%y$
b) $y = 80\%x$, $x = 125\%y$
c) $y = 160\%x$, $x = 62{,}5\%y$

8. cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł

Z 1. a) 160,4 b) 4,5 c) 0,004

2. a) 100% b) 25% c) 56,25%

3. a) 36% b) $55\frac{5}{9}\%$

4. a) 1188 zł b) 1125 zł c) 1080 zł

5. a) 62,5% b) 75%

6. a) I kwartał: 2 500 000 zł,
III kwartał: 3 000 000 zł,
IV kwartał: 2 400 000 zł
b) I kwartał: 1 500 000 zł,
II kwartał: 2 250 000 zł,
III kwartał: 1 800 000 zł

7. a) 2706 zł, podatek stanowi około 18,7% ceny brutto
b) 2600 zł, cena netto stanowi około 81,3% ceny brutto
c) 2583 zł, cena brutto po podniesieniu ceny netto: 2829 zł

1.12. Procenty (2)

Č 1. a) poparcie o 4 punkty procentowe, liczba osób o 25%
b) poparcie o 2 punkty procentowe, liczba osób o 20%

2. W banku A wzrosło o 1,5 punktu procentowego, w banku B zmalało o 1,2 punktu procentowego.

3. a) 5100 zł b) 5175 zł c) 5200 zł

Z 1. 120 zł

2. 1,5 punktu procentowego

3. a) 7800 zł b) 7740 zł

4. nie

5. a) 2322 zł b) 2500 zł

6. 9000 zł

1.13. Zagadnienia uzupełniające

1.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

3. tak: 170, 204, 1020; nie: 200

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) 995 b) 996 c) 994 d) 990

2. a) $4\frac{1}{3}$ b) 8 c) $-\frac{1}{15}$ d) 40,9 e) $-13\frac{1}{3}$
f) $3\frac{1}{2}$

3. a) $1\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{24}{25}$ d) $\frac{11}{16}$

4. a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, 2 b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, 1
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$, 13 d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$, 8

5. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$
e) 2 f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$

6. a) $-\frac{2}{5}$ b) $-1\frac{1}{3}$ c) 0 d) 1
e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{4}{5}$ h) $\frac{5}{6}$

7. a) $-3 + \sqrt{5}$ b) -375 c) $\frac{135}{4}$

8. a) 3 b) 12 c) 5

9. a) $6{,}3 \cdot 10^{-7}$ b) $1{,}2 \cdot 10^{21}$
c) $2{,}1 \cdot 10^{11}$ d) $1{,}28 \cdot 10^{11}$
e) $6 \cdot 10^{-13}$ f) $3{,}2 \cdot 10^{-11}$

10. a) d, b, c, a b) d, a, b, c

11. a) Zmniejszyło się o 36%.
b) Zmniejszyło się o 1%.

12. 150

13. 4

14. a) 100,2 b) 500,8

Zestaw powtórzeniowy II

1. Najwięcej dzielników ma liczba 60, a najmniej liczba 123.

2. a) 4 b) $\frac{1}{3}$ c) $2\frac{17}{32}$ d) $6\frac{1}{4}$ e) 64 f) $\frac{1}{243}$

4. $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{4}{3}$
a) $1\frac{19}{20}$ b) $2\frac{1}{400}$ c) $2\frac{44}{45}$ d) $\frac{19}{144}$

5. a) x^{-8}, $x \neq 0$ b) $36y^4$, $y \neq 0$
c) $8z^4y^6$, $y \neq 0$, $z \neq 0$
d) t, $s \neq 0$, $t \neq 0$, $s \neq t$, $s \neq -t$

6. a) 20 b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) 27 d) 2

7. a) $1\frac{1}{2}m + 6\frac{3}{4}t - 12$, $m \neq 0$, $t \neq 0$
b) $-44x + 24$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

8. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ d) $\frac{20}{3}$

11. $x = 40$ lub $x = 56$ lub $x = 88$

Zadania testowe

1. B 2. B 3. A 4. C 5. D 6. C 7. C 8. C 9. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 15
2. $24\sqrt{3}$
3. 1
4. 150
5. 25 zł
7. 360
8. 12,5%
9. 15 h

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 061 ($\frac{y}{x} = \frac{13}{21}$)
2. 250 (0,25)
3. 187 ($\frac{17}{11}$)
4. 708 ($\frac{17}{24}$)

2.1. Zbiory

Ć 1. a), c), f) jest
b), d), e) nie jest

2. a) tak b) nie

3. a) $B \subset A$ b) $A \subset B$
c) $A \subset B$ i $B \subset A$, czyli $A = B$

Z 1. a) $A \subset B$ b) $A \subset B$ c) $B \subset A$

2. a) tak b) nie c) nie

3. a) tak b) tak

4. a) B b) A

2.2. Działania na zbiorach

Ć 1. a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$
b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
$B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
$A \cap B = \{c, d, e\}$

2. a) $\{0, 6, 12, 18\}$ b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$
c) $\{0, 1, 2, 4, 5\}$

3. a) tak b) nie

4. a) $1, 2, 6, 7, 8, 9, 10$ b) s, t, u, v, w

5. a) $\{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

6. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap C = \{3, 7\}$,
$B \cap C = \{3, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{3\}$

7. a) $A \setminus B = \{7, 9, 11\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4, 6\}$
b) $A \setminus B = \{8, 16, 32, 40\}$,
$B \setminus A = \{6, 12, 18, 30, 36, 42\}$

Z 1. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$,
$A \cap B = \{n, o\}$, $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
$B \setminus A = \{p, q, r, s\}$

2. a) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$A \cap B = \{-1, 1\}$, $A \setminus B = \{-2, 0, 2\}$,
$B \setminus A = \{-3, 3\}$
b) $A \cup B = \{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$,
$A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{\frac{1}{2}, 4\}$,
$B \setminus A = \{0, \sqrt{2}\}$
c) $A \cup B = \mathbf{Z}$, $A \cap B = \mathbf{N}$, $A \setminus B = \emptyset$,
$B \setminus A = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

3. $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$

4. a) $A \cap B = \{m, r, t\}$ b) $A \setminus B = \{k\}$
c) $B \setminus A = \{g\}$ d) $B \cap C = \{g, r\}$
e) $B \setminus C = \{m, t\}$ f) $C \setminus B = \{b, l\}$
g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$

5. a) II b) III c) I

6. W każdym podpunkcie odpowiednie zbiory są równe.

7. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$,
$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$,
$A \setminus C = \{3, 4, 9\}$, $B \setminus C = \{3, 7, 8\}$
b) $A \setminus (B \cap C) = \{3, 4, 9\}$,
$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
c) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$,
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 6\}$

7. d) $A' \cap B' = \{5, 10\}$,
$A' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A' \cup B' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

8. a) 60 b) 170 c) 60

9. 4

10. $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$,
$(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe

2. a) 20 b) 25,5

2.3. Przedziały

Ć 1. a) $-3 < x < 2$ b) $0 < x < 4$
c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ d) $100 < x < 150$

2. a) $-1 \leqslant x \leqslant 4$, 6 liczb całkowitych
b) $\frac{3}{2} \leqslant x < 5$, 3 liczby całkowite
c) $-2 < x \leqslant -\frac{1}{2}$, 1 liczba całkowita
d) $-60 \leqslant x \leqslant 40$, 101 liczb całkowitych

Z 1. a) $\langle -7; 0\rangle$ b) $\langle \frac{1}{4}; \sqrt{2})$
c) $\langle 2\frac{1}{4}; \infty)$ d) $(-\infty; -\frac{1}{3})$

2. a) $(-7; 2\rangle$, $-7 < x \leqslant 2$
b) $\langle -50; 20\rangle$, $-50 \leqslant x \leqslant 20$
c) $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
d) $\langle 3{,}14; \pi)$, $3{,}14 \leqslant x < \pi$
e) $(-\infty; 10)$, $x < 10$
f) $(\sqrt{2}; \infty)$, $x > \sqrt{2}$
g) $\langle -\frac{1}{4}; \infty)$, $x \geqslant -\frac{1}{4}$
h) $(-\infty; 2\pi)$, $x < 2\pi$

3. a) $(0; 4)$ b) $\langle -4; 0)$
c) $(2\frac{1}{2}; \infty)$ d) $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle$

4. a) $(-1; 3)$ b) $(-4; 2)$
c) $\langle 1; 5\rangle$ d) $\langle -\frac{7}{4}; \frac{5}{4})$

5. a) $-1, 0, 1, 2, 3$ b) $1, 2, 3, 4, 5$
c) $0, 1, 2$ d) $-6, -5, -4, -3, -2$

6. a) z b) y

7. a) 4 b) 6 c) 6 d) 8

8. a) $A \subset B$
b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
c) $B \subset A$ d) $A \subset B$

9. a) $\langle -2; 5\rangle$ b) $\langle -3; 5\rangle$
c) $\langle -3; 2\rangle$ d) $\langle -1; 1\rangle$

10. a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) 2

11. $p = -1$ lub $p = 1$

12. a) $x \in \langle 1; 2\rangle$ i $y \in \langle 1; 5\rangle$
b) $x \in \langle -5; -1\rangle$ i $y \in \langle 0; 4\rangle$

13. a) II b) III c) I

2.4. Działania na przedziałach

Ć 1. a) $A \cup B = (1; 6)$, $A \cap B = (2; 4)$,
$A \setminus B = (1; 2\rangle$, $B \setminus A = \langle 4; 6)$
b) $A \cup B = \langle -4; 3)$, $A \cap B = \{1\}$,
$A \setminus B = \langle -4; 1)$, $B \setminus A = (1; 3)$
c) $A \cup B = \langle -5; 3\rangle$, $A \cap B = \langle 1; 3\rangle$,
$A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \langle -5; 1)$
d) $A \cup B = (-3; 2\rangle$, $A \cap B = (-1; 2\rangle$,
$A \setminus B = (-3; -1\rangle$, $B \setminus A = \emptyset$

3. a) $\langle -5; -3\rangle \cup \langle -1; 4\rangle$ b) $\langle -3; 2) \cup \langle \frac{5}{2}; 5)$
c) $\langle -3; -1) \cup \langle 2; \infty)$ d) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Z 1. a) $A \cup B = (-3; 4)$, $A \cap B = \langle -1; 0)$,
$A \setminus B = (-3; -1)$, $B \setminus A = \langle 0; 4)$
b) $A \cup B = (-4; 3)$, $A \cap B = \langle -\frac{1}{2}; 2\rangle$,
$A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$, $B \setminus A = (2; 3)$
c) $A \cup B = (-\infty; 2)$, $A \cap B = \langle 0; 2)$,
$A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$, $B \setminus A = \emptyset$
d) $A \cup B = \langle -1; \infty)$, $A \cap B = \{2\}$,
$A \setminus B = \langle -1; 2)$, $B \setminus A = (2; \infty)$

2. a) 7 b) 5 c) 4

3. a) 10 b) 7 c) 0 d) 3

5. a) $A \cup B = (-3; 6)$, $A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$,
$A \setminus B = (-3; 0\rangle \cup \langle 4; 6)$, $B \setminus A = \langle 1; 3\rangle$
b) $A \cup B = \langle -2; \infty)$, $A \cap B = (0; 1\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$,
$A \setminus B = \langle -2; 0\rangle$, $B \setminus A = (1; 4) \cup (5; \infty)$
c) $A \cup B = (-\infty; 6)$,
$A \cap B = (-1; 0\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$,
$A \setminus B = (-\infty; -1\rangle$, $B \setminus A = (0; 2) \cup (5; 6)$
d) $A \cup B = (-2; 0\rangle \cup \langle 3; 5\rangle$, $A \cap B = \{0\}$,
$A \setminus B = (-2; 0)$, $B \setminus A = \langle 3; 5\rangle$
e) $A \cup B = \langle 0; 7\rangle \cup \langle 8; 9\rangle$, $A \cap B = (1; 3)$,
$A \setminus B = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 3; 7\rangle$, $B \setminus A = \langle 8; 9\rangle$
f) $A \cup B = \langle 1; 9\rangle$, $A \cap B = (1; 2) \cup (6; 9)$,
$A \setminus B = \{1\} \cup \langle 2; 6\rangle \cup \{9\}$, $B \setminus A = \emptyset$

6. a) $A \setminus B = \langle -5; 1) \cup (1; 2)$, $B \setminus A = \emptyset$
b) $A \setminus B = (3; 4) \cup (4; \infty)$, $B \setminus A = \{2\}$
c) $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup (0; 4)$, $B \setminus A = \langle 4; \infty)$
d) $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = (2; 3) \cup (3; \infty)$

7. $A = \langle -4; 0)$, $B = (-1; 3\rangle$, $C = \langle 2; \infty)$
a) $\langle -4; 2)$ b) $\langle -4; -1\rangle \cup (3; \infty)$ c) $(-1; 0)$

8. a) $A' = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; \infty)$,
$B' = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle 3; \infty)$,
$A' \cap B' = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; \frac{1}{2}) \cup \langle 3; \infty)$
b) $A' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty)$,
$B' = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$,
$A' \cap B' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty)$
c) $A' = \langle 1; 3\rangle$, $B' = (-\infty; -4) \cup \langle 4; \infty)$,
$A' \cap B' = \emptyset$
d) $A' = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$,
$B' = (-\infty; -5\rangle \cup \langle -1; \infty)$,
$A' \cap B' = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$

9. a) $x \in \langle -3; -1\rangle \cup (2; 6)$, $y \in \langle 1; 3\rangle$
b) $x \in \langle -3; 6\rangle$, $y \in \langle 1; 2\rangle \cup (3; 4)$

11. a) $\left\langle 0; \frac{1}{9}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right\rangle \cup \left\langle \frac{8}{9}; 1\right\rangle$, $\frac{2}{3}$
b) $\frac{16}{81}$

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Ć 1. a), b) spełnia c), d) nie spełnia

2. a) $x < -36$, nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność
b) $x \geqslant 2\frac{5}{6}$, liczba 3
c) $x \leqslant -5\frac{1}{4}$, nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność
d) $x > 20$, liczba 21

3. a) nie b) tak

4. a) $x \leqslant 9$ b) $x > \frac{16}{9}$
c) $x < -15$ d) $x \geqslant 6$

5. a) $x > -3$ b) $x \geqslant -6$ c) $x \geqslant 4$
d) $x > \frac{7}{8}$ e) $x < 13$ f) $x \geqslant -\frac{1}{7}$

6. a), e) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$
b), c), d) sprzeczna

Z 1. a) $\langle 4; 5)$ b) $(-5; -2\rangle$ c) $\langle -\frac{1}{2}; 1\rangle$

2. a) $(-6; -4)$, -5 b) $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$, 0
c) $\langle -4; 2)$, -4, 1
d) $(-\frac{16}{3}; -3)$, -5, -4

3. a) żadna b) c c) c d) b, c
e) a, b, c f) żadna

4. a) $x > \frac{15}{8}$ b) $x \geqslant 2$ c) $x \leqslant \frac{25}{4}$
d) $x > \frac{28}{33}$ e) $x \geqslant \frac{11}{8}$ f) $x < \frac{19}{3}$

5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $x > 6\sqrt{2}$ c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$

6. a) $n \in \{6, 7, 8\}$ b) $k \in \{-2, -1\}$
c) $m \leqslant 13$ i $m \in \mathbf{N}$

7. a) $k \in \{4, 5\}$ b) $k \in \{2, 3, 4\}$

8. więcej niż 85

9. a) $>$ b) $>$ c) $<$

10. a) nie b) nie

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

1. a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$ b) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$
c) $-2x^4y + x^3y^2$ d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$
e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$ f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$

2. A – III, B – IV, C – II, D – I

3. a) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$ b) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$
c) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$ d) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$
e) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$
f) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Ć 1. a) 400 b) 450 c) 1500
d) 3600 e) 4800 f) 3800

2. a) $5(x + y)$ b) $4(b - 2a)$
c) $9(x - 3y^2)$ d) $-6(x^2 - 3y^2)$
e) $13(3y^2 - 2z)$ f) $-11(a^3 - 2b^2)$
g) $-12(4p - 3q^2)$ h) $25(3xy^3 - 5)$

3. a) $x(4x + y)$ b) $2x(x^2 - 6y)$
c) $xy(3 - z)$ d) $6pq(1 + 3p)$
e) $a^2b(1 + 3b - a)$ f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$

4. a) $4x^2(2x - 9)$ b) $7y^2(1 - 2y^2)$
c) $5x^2(x + 2y)$ d) $5a(4x - 3y)$
e) $4b(2a + 3c)$ f) $2xy(2 + 3x)$
g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$

Z 1. a) 400 b) 4000 c) 5000 d) 3700
e) 1000 f) 300

2. a) $ab(a + b^2)$ b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$ d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$ f) $2x^2y^3(3y + 4x)$

3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$

4. a) $9y^2(3y^2+4y-6)$
b) $3ab(3a+b+2)=9a^2b+3ab^2+6ab$
c) $3t^2(4t^2-3t+1)$

5. a) -45 b) -30 c) 225

6. a) 120 b) 24 c) 4 d) 2

7. a) 525 b) 140

8. I – C, II – A, III – B

2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Ć 1. a) $x^2+7x+12$ b) $p^2-pq+6p-6q$
c) $-2p^2-pq+q^2$ d) $6x^2+20x+6$
e) $3a^2+7ab-6b^2$ f) $8a^2-8ab+\frac{3}{2}b^2$

2. a) x^3-3x+2 b) $2x^3+5x^2+9$
c) $x^2-4x+4y-y^2$
d) $2x^2+6x+5xy+18y-3y^2$
e) $x^2-x+5y-y^2-6$ f) x^4+x^2+1

3. a) $V=x^4-2x^2-8$
b) $V=x^5-2x^4-x+2$

4. a) $2\sqrt{2}-1$ b) $11-5\sqrt{5}$
c) $7-3\sqrt{6}$ d) $16+7\sqrt{10}$
e) $5+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
f) $-5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

6. a) $x=-\frac{10}{3}$ b) $x=\frac{3}{5}$ c) $x=-\frac{2}{5}$
d) $x>-3$ e) $x>-1$ f) $x\geqslant\frac{1}{3}$

Z 1. a) $2a^2-2a+ab-b$
b) $6ab+9a-4b^2-6b$
c) $-12a^2+4a+6ab-2b$
d) $-4a-8ab-6b-3$
e) $2a^2-4ab+ab^2-2b^3$
f) $-3a^3+2a^2b+9ab-6b^2$

2. a) $x^2+x+2xy-4y-6$
b) $4x^2-4x-2xy+3y-3$
c) $x^3+x^2y+2x^2+xy+y^2+2y$
d) $x^3-x^2y-2x^2+2xy+x-y$
e) $2x^2y+6x^2-12xy-4xy^2$
f) $-16x^3+4xy^2$

3. a) $2a^2-24$ b) $12ab+b^2$
c) a^2+2a-3 d) $4y^2-4x^2-3xy$
e) $2x^2+15x$ f) $2x^2-6xy-18y^2$

4. a) $x^2-4x-12$, $-9{,}75$
b) x^3-x^2-6, $-6{,}375$

5. a) $P=a^2+2a$ b) 1

6. a) $3x+7$ b) $a+3$
c) $5x+12$ lub $4x+13$

7. a) -20 b) -6 c) -4 d) 10

9. a) $x=-10$ b) $x=4$ c) $x=-6$
d) $x=-\frac{1}{2}$ e) $x=\frac{1}{2}$ f) $x=\frac{12}{7}$

10. a) $x\geqslant\frac{3}{2}$ b) $x<-\frac{6}{5}$ c) $x\geqslant\frac{5}{8}$
d) $x<\frac{1}{2}$

11. a) 3 b) 10 c) 0 d) 5

12. a) 160 cm i 100 cm b) 57 cm^2 c) 14 cm

13. a) $x^8-2x^6+2x^2-1$ b) $1-x^8$ c) a^6-b^6
d) $a^6-2a^3b^3+b^6$

14. b) $4x^3-160x^2+1600x$

2.8. Wzory skróconego mnożenia

Ć 2. a) x^2+2x+1 b) x^2+4x+4
c) x^2-6x+9 d) $x^2-10x+25$
e) $4x^2+4x+1$ f) $\frac{1}{4}x^2+2x+4$
g) $16x^2-8x+1$ h) $4x^2-2x+\frac{1}{4}$

3. a) $x^2+4xy+4y^2$ b) $4x^2-4xy+y^2$
c) $9x^2+12xy+4y^2$
d) $9x^2+3xy+\frac{1}{4}y^2$
e) $4x^2-xy+\frac{1}{16}y^2$
f) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$

4. a) $8+2\sqrt{7}$ b) $14-6\sqrt{5}$ c) $39-12\sqrt{3}$
d) $5+2\sqrt{6}$ e) $21+6\sqrt{10}$ f) $6\frac{1}{2}-2\sqrt{3}$

6. a) x^2-9 b) x^2-49 c) $4x^2-16$
d) $25x^2-36$ e) $9x^2-16y^2$
f) $9y^2-\frac{1}{4}x^2$

7. a) 18 b) -4 c) $-\frac{25}{18}$ d) -1 e) -1 f) 4,5

Z 1. a) -5 b) -2 c) $-5y^2-12y+13$
d) $-50y^2-10y$ e) $13x^2-5y^2$ f) $8x^2+24y^2$

2. a) 7 b) 16 c) $-7-8\sqrt{2}$

3. a) 6 b) $-3+2\sqrt{3}$ c) $-12\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{2}$ e) 10 f) $12-2\sqrt{30}$
g) $49-20\sqrt{2}$ h) $-31-12\sqrt{2}$

4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2

5. a) $66+36\sqrt{2}$ b) $78-24\sqrt{3}$
c) $48+24\sqrt{3}$

6. a) 14 b) $12-\sqrt{2}+3\sqrt{10}$

7. a) 14 b) $2\sqrt{5}-2$ c) 12 d) $2\sqrt{7}-4$

8. a) $-18\sqrt{10}-42$ b) $16\sqrt{3}$
c) $96-12\sqrt{5}$ d) 0

2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Ć **1.** a) $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$ b) $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$
c) $-4-3\sqrt{2}$ d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$

2. a) $x=3$ b) $x=1$ c) $x=5$

3. a) $x>-1$ b) $x\leqslant-\frac{1}{2}$
c) $x>\frac{1}{9}$ d) $x\leqslant 2$

4. a) $x=-4$ b) $x=3$ c) $x=\frac{1}{2}$
d) $x=-\frac{1}{5}$ e) $x=-\frac{3}{2}$ f) $x=\frac{1}{6}$

5. a) sprzeczne b) tożsamościowe

6. a) tożsamościowa b) sprzeczna

Z **1.** a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
c) $3\sqrt{5}-6$, tak d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
e) $4\sqrt{3}-6$, tak f) $12\sqrt{2}+16$, nie
g) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, nie h) $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$, tak
i) $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$, nie j) $\sqrt{6}-2$, tak
k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak

2. a) $x=\frac{1}{4}$ b) $x=1{,}3$ c) $x\in\mathbf{R}$
d) sprzeczne e) $x=18$ f) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. a) $x\leqslant\frac{9}{4}$ b) $x\in\mathbf{R}$ c) $x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}-1$
d) $x\leqslant\frac{4}{3}$ e) $x\geqslant-\frac{17}{4}$ f) $x<\frac{3}{2}$

4. a) $(0;\frac{3}{2})$ b) $(-5;2\rangle$ c) $\langle\frac{1}{8};\frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2};5\rangle$

5. 9

6. a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$
c) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

Liczby wielokątne

1. 400

3. 51

4. 1, 6, 15, 28, 45

2.10. Wartość bezwzględna

Ć **1.** a) 5 b) 5 c) $\sqrt{3}-1$
d) $3-\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}-4$
f) $5-2\sqrt{5}$

2. a) $x=-2$ lub $x=2$
b) $x=-10$ lub $x=10$
c) $x=0$ d) brak rozwiązań

3. a) x b) y c) x

4. a) $2-\sqrt{3}$
b) $4-2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

5. a) $x\in(-8;8)$ b) $x\in\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$
c) $x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$
d) $x\in(-\infty;-\pi\rangle\cup\langle\pi;\infty)$

6. a) $x\in\mathbf{R}$ b) $x=0$ c) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$
d) sprzeczna

Z **1.** a) $x+|x|=0$, $x-2|x|=-9$
b) $x+|x|=0$, $x-2|x|=12-6\sqrt{6}$
c) $x+|x|=12\sqrt{2}-16$,
$x-2|x|=-6\sqrt{2}+8$
d) $x+|x|=0$, $x-2|x|=3\pi-6\sqrt{3}$

2. a) $x=-4$, $x=4$ b) $x=-14$, $x=14$
c) $x=-6$, $x=6$ d) $x=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{4}$
e) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$ f) $x=-8$, $x=8$
g) $x=-1$, $x=1$ h) $x=-4$, $x=4$

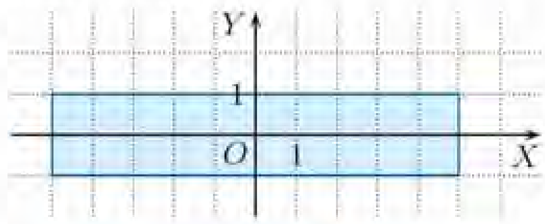
3. a) $|x|>-7$ dla $x\in\mathbf{R}$,
$|x|<-7$ dla $x\in\emptyset$
b) $|x|\geqslant-3$ dla $x\in\mathbf{R}$,
$|x|\leqslant-3$ dla $x\in\emptyset$

4. a) $(-4;-1)\cup(1;4)$, 4
b) $(-6;0)\cup(0;6)$, 10
c) $\langle-5;-2\rangle\cup\langle2;5\rangle$, 8
d) $\langle-\pi;-3\rangle\cup\langle3;\pi\rangle$, 2
e) $(-3;-\frac{1}{2}\rangle\cup\langle\frac{1}{2};3)$, 4
f) $\langle-6;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};6\rangle$, 10
g) $\langle-\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\rangle\cup\langle\frac{5}{2};\frac{9}{2}\rangle$, 4
h) $(-5;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};5)$, 6

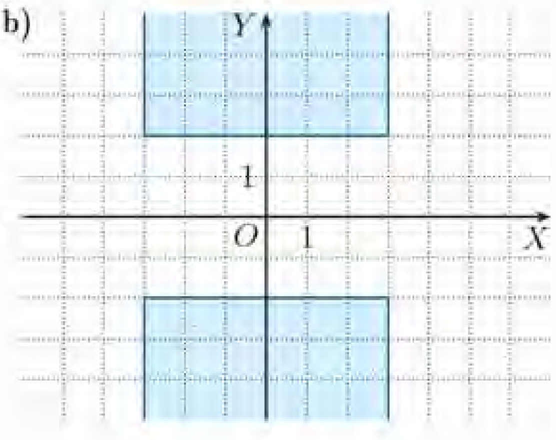
5. a) $5-2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}-1$

7. I – B, II – C, III – A

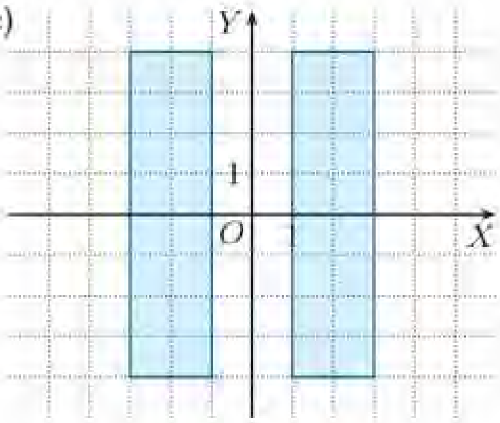
8. a)



b)



8. c)



2.11. Własności wartości bezwzględnej

Č **1. a)** $x = -1$ lub $x = 5$
b) $x = 0{,}5$ lub $x = 7{,}5$
c) $x = -8$ lub $x = -4$
d) $x = 5$ lub $x = 7$
e) $x = -2 - \sqrt{3}$ lub $x = -2 + \sqrt{3}$
f) sprzeczne
g) $x = -\frac{3}{4}$ lub $x = \frac{1}{4}$ **h)** $x = -9$

3. a) $x \in (4; 10)$ **b)** $x \in (-4; 10)$
c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle 0; \infty)$
e) $x \in \langle 2; 16\rangle$
f) $x \in (-\infty; -13) \cup (3; \infty)$
g) $x \in (-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10})$
h) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2\sqrt{7}; \infty)$

4. a) $x \in \langle 4\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\rangle$
b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3\frac{1}{2}; \infty)$

Z **1. a)** $x = 2$, $x = 6$ **b)** $x = -2$, $x = 1$
c) $x = -4$, $x = 8$ **d)** $x = -9$, $x = -3$
e) $x = 6$, $x = 14$ **f)** $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{7}{3}$

2. a) $x \in \langle -6; 2\rangle$ **b)** $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$ **d)** $x \in (3; 9)$
e) $x \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle -2; \infty)$
f) $x \in (-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$ **g)** $x = 2$
h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-11\}$ **i)** $x \in \mathbf{R}$

3. a) $x = -10$, $x = 0$
b) $x = 1$, $x = 5$
c) $x = 0$, $x = 2$ **d)** $x = -2$, $x = 1$
e) $x = -\frac{9}{2}$, $x = \frac{7}{2}$ **f)** $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{3}$

4. a) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$ **b)** $x \in \mathbf{R}$

5. a) $x \geqslant 3$ **b)** $x \leqslant 2$
c) $x \leqslant -\sqrt{2}$ **d)** $x \geqslant 2$

6. a) 0 **b)** 3 **c)** 2

2.12. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $\sim p$: $\sqrt{625} = 25$, $p = 0$, $\sim p = 1$
b) p: *100 jest liczbą parzystą*,
$p = 1$, $\sim p = 0$

2. wartość logiczna koniunkcji:
a) 1 **b)** 0 **c)** 0 **d)** 0

3. a) 1 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 0 **e)** 1 **f)** 0

4. a) 0, 1, 1 **b)** 0, 0, 1 **c)** 1, 1, 1 **d)** 1, 0, 0

5. a) 0, 0, 1 **b)** 1, 0, 0 **c)** 1, 1, 1 **d)** 0, 1, 0

8. Tylko **a)** i **e)** nie są prawami rachunku zdań.

Zestaw powtórzeniowy I

1. 20

2. a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
b) $\{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$ **c)** $\{3\}$
d) $\{1, 4, 8, 10, 14\}$ **e)** $\{1, 5, 13\}$
f) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$

3. a) $A \cap B = (2; 4\rangle$, $A \cup B = \langle -1; 5)$,
$A \setminus B = \langle -1; 2\rangle$, $B \setminus A = (4; 5)$
b) $A \cap B = (3; 5\rangle$, $A \cup B = \langle 2; 7)$,
$A \setminus B = \langle 2; 3\rangle \cup (5; 7)$, $B \setminus A = \emptyset$
c) $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \langle -4; 9)$,
$A \setminus B = \langle -4; 2)$, $B \setminus A = (2; 9)$
d) $A \cap B = \{0\} \cup (1; 2)$, $A \cup B = (-\infty; 4\rangle$,
$A \setminus B = (-\infty; 0)$, $B \setminus A = (0; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
e) $A \cap B = (-2; -1) \cup \langle 3; 4)$,
$A \cup B = (-\infty; 5\rangle$,
$A \setminus B = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$, $B \setminus A = \langle -1; 3)$
f) $A \cap B = \langle 0; 2\rangle$,
$A \cup B = (-1; 5) \cup (5; \infty)$,
$A \setminus B = (-1; 0) \cup (5; \infty)$, $B \setminus A = (2; 5)$

4. a) $a^2 + 2ab + a - 4b - 6$
b) $4a^2 - 8ab + 3b^2 + 2ac - 3bc$
c) $2a^2 + ab - 6b^2 - 6ac + 9bc$
d) $-8x^4 + 20x^2y - 8y^2$
e) $-18x^5 + 24x^3y - 8xy^2$
f) $x^4 - y^4$

5. a) 2 **b)** −3 **c)** 0 **d)** 3

6. a) 8 **b)** 8 **c)** 3 **d)** 5

7. a) $\langle -9; -1) \cup (1; 9\rangle$
b) $\langle 2; 6\rangle$
c) $(-4; -3\rangle \cup \langle 1; 4)$

8. **a)** $\langle 1;7)$ **b)** $(-1;1)$
c) $(-\infty;-5\rangle \cup \langle 7;\infty)$
d) $(-5;-3\rangle \cup (-1;1)$
e) $(-\infty;-3\rangle \cup (-1;1) \cup \langle 3;\infty)$

Zestaw powtórzeniowy II

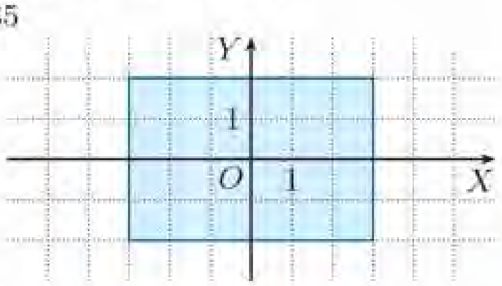
1. **a)** $X = T$ **b)** $X = Y$ **c)** $X = Y$

2. **a)** $A \subset B$ **b)** $B \subset A$ **c)** żadna

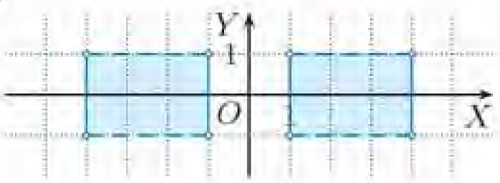
3. **a)** $-2+2\sqrt{3}$ **b)** $8+7\sqrt{6}$
c) $-24+6\sqrt{2}$
d) $-22\sqrt{5}+40$
e) 28 **f)** $24\sqrt{2}$
g) $4+4\sqrt{3}$ **h)** $48-16\sqrt{5}$

4. **a)** $\left(\frac{2}{7};1\right\rangle$ **b)** $\left\langle\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\rangle$
c) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right\rangle$ **d)** $\emptyset$
e) $\left(-\infty;\frac{7}{2}\right)$ **f)** $(-\infty;1)$

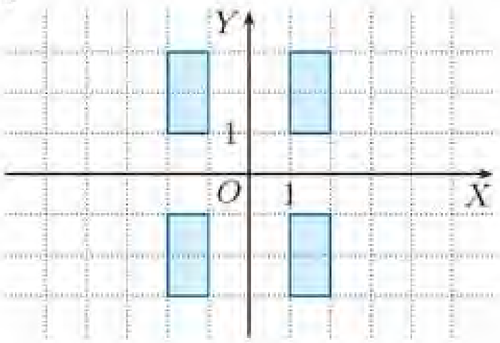
5. **a)** 35



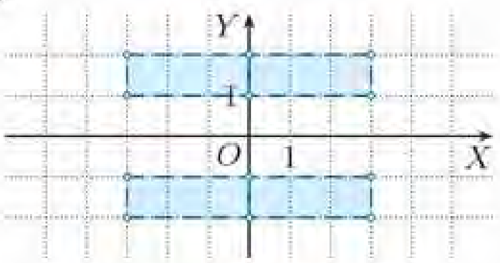
b) 8



c) 24



d) 0



6. **b)** $k=1,\ l=4$ lub $k=2,\ l=3$

Zadania testowe

1. C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** A **6.** A **7.** B
8. A **9.** A **10.** D **11.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $-\sqrt{3}$

2. $\langle 1;\infty)$

5. 10

6. $\left\langle -5; 3+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

8. $x \in (-3;2\rangle$

9. 4

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 242

2. 124

3. 170

4. 738

8. $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

9. $B \setminus A = (2;\infty)$

3.1. Co to jest układ równań

Č **1.** 6

2. C

Z **1.** **a)**, **c)**, **f)** tak **b)**, **d)**, **e)** nie

2. C

3. **a)** $(1,7)$, $(3,4)$, $(5,1)$ **b)** $(3,2)$
c) Nie ma takich liczb.

4. **a)** np. $x+y=3$ **b)** np. $y-x=2$
c) np. $4x+3y=3$ **d)** np. $2x+y=-9$

5. **a)** $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y+8=x \\ 5y=x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=3y \\ \frac{x+y}{2}=10 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3=y \\ x-y=2y \end{cases}$

6. **a)** $\begin{cases} a=0{,}4b \\ 0{,}2a+0{,}6b=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a+b=14 \\ 1{,}2a+0{,}7b=a+b \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}9a=1{,}1b \\ 1{,}15a-0{,}85b=1 \end{cases}$

7. **a)** $m=7,\ n=3$ **b)** $m=4,\ n=6$

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Ċ 1. a) $x = 10$, $y = 1$
b) $x = 19$, $y = 37$
c) $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$
d) $x = 8$, $y = 4$
e) $x = 3$, $y = -1$
f) $x = -3$, $y = -4$

2. a) $x = 5$, $y = 1$
b) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{7}{3}$
c) $x = 1$, $y = 8$

3. a) $x = 11$, $y = -1$
b) $x = 2$, $y = -2$
c) $x = 3$, $y = -7$

4. a) nieoznaczony b) oznaczony
c) sprzeczny

Z 1. a) $x = 2{,}2$, $y = 1{,}6$
b) $x = \frac{1}{7}$, $y = -\frac{2}{7}$
c) $x = 1$, $y = 0$
d) $x = 1{,}7$, $y = 0{,}9$
e) $x = -\frac{1}{6}$, $y = -\frac{2}{3}$
f) $x = 10$, $y = 20$

2. a) $x = 2$, $y = -3$
b) $x = -2{,}8$, $y = -1{,}8$
c) $x = 5$, $y = -1$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $y = 5$
e) $x = 0{,}5$, $y = -1{,}5$
f) $x = 4$, $y = 3$

3. a) tak b), c), d) nie

4. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0

5. a) $x = 1$, $y = 2$
b) $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{13}{3}$

6. a), c) nieoznaczony b) sprzeczny

7. a) np. $6x - 1 = 8y$
b) np. $6x - 4 = 8y$
c) np. $3x - 8y = 2$

8. a) oznaczony dla $m = -2$ lub $m = 0$, nieoznaczony dla $m = 2$
b) oznaczony dla $m = -2$ lub $m = 0$, sprzeczny dla $m = 2$
c) nieoznaczony dla $m = -2$, oznaczony dla $m = 0$, sprzeczny dla $m = 2$

9. $(-2, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(2, 2)$

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Ċ 1. a) $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$
b) $x = 1$, $y = 1$
c) $x = -\frac{14}{5}$, $y = -5$

2. a) $x = 1$, $y = -1$
b) $x = -5$, $y = 2$
c) $x = 1$, $y = \frac{1}{7}$
d) $x = 2$, $y = -3$
e) $x = -3$, $y = 1$
f) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$

3. a) $x = 2$, $y = -2$
b) $x = 7$, $y = -3$
c) $x = 1{,}9$, $y = 0{,}8$

4. a) np. 5 i 3 b) np. 2 i 3 c) np. $\frac{15}{2}$ i -1

5. a), c) sprzeczny b) nieoznaczony

Z 1. a) $x = 5$, $y = 3$
b) $x = 1$, $y = -3$
c) $x = 24{,}5$, $y = 18$
d) $x = 2$, $y = 0{,}5$
e) nieoznaczony: $y = -\frac{2}{3}x + 5$, $x \in \mathbf{R}$
f) sprzeczny

2. a) $x = -8$, $y = 4$
b) $x = -1$, $y = 1$
c) $x = -25$, $y = -5$
d) $x = 0$, $y = 5$
e) $x = -2$, $y = 5$
f) $x = 3$, $y = 5$

3. a) $x = -\frac{10}{9}$, $y = -\frac{55}{18}$
b) $x = 3$, $y = 4$
c) $x = 5$, $y = 2$
d) $x = 1$, $y = -2$
e) $x = -1$, $y = 1$
f) nieoznaczony: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$, $x \in \mathbf{R}$

4. a) nieoznaczony dla $m = 1$ i $n = 3$, sprzeczny dla $m = 1$ i $n = 1$
b) nieoznaczony dla $m = 3$ i $n = 1$, sprzeczny dla $m = 3$ i $n = 3$

Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

1. a) $x = 20$, $y = -5$, $z = -5$
b) $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$
c) $x = \frac{1}{11}$, $y = -\frac{3}{22}$, $z = \frac{2}{11}$

2. a) $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$; tak
b) $x = -1$, $y = 2$, $z = 4$; tak
c) $x = 2$, $y = 1\frac{2}{5}$, $z = -3\frac{1}{5}$; nie
d) $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$; tak

3. a) 13, 11, 12
b) $a = 9$, $b = 7$, $c = 11$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Č 1. 10 i 40

2. a) 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni
b) 1 kg marchwi i 5 kg buraków

3. Tomek 15 lat, siostra 11 lat

4. a) Daria 10 lat, Maria 15 lat
b) Olek 27 lat, Alek 17 lat

Z 1. syn 16 lat, ojciec 51 lat

2. Ania i siostra po 15 lat, brat 21 lat

3. 20 monet 2-złotowych i 10 monet 5-złotowych

4. 7 monet 1-złotowych i 5 monet 5-złotowych

5. 6 monet 1-złotowych, 12 monet 2-złotowych i 14 monet 5-złotowych

6. 7 monet 5-centowych i 4 monety 10-centowe

7. 5 monet 5-centowych, 15 monet 10-centowych i 9 monet 25-centowych

8. 65 cm^2

9. 7 cm i 21 cm lub 3 cm i 25 cm

10. 70 biletów ulgowych i 140 normalnych

11. 10 zł normalny, 7 zł ulgowy

12. 37 i 73

13. $A = 83$, $B = 38$

14. $A = 354$, $B = 34$

15. $x = 844$, $y = 448$

16. 28

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Č 1. a) 15 b) 1 g

2. prędkość własna łodzi – 8 km/h, prędkość prądu – 4 km/h

3. prędkość własna łodzi – 12 km/h, prędkość prądu – 2 km/h

Z 1. 300 dziewcząt, 200 chłopców

2. Bartek 1200 zł, Paweł 1600 zł

3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B

4. 6000 zł w banku X i 14 000 zł w banku Y

5. 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%

6. 40% i 60%

7. 3 h, 60 km

8. 120 km

9. 20 km

10. 270 biletów normalnych, 190 biletów ulgowych, 40 wejściówek

11. 5 cm, 8 cm, 9 cm

3.6. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $x = -5$, $y = 3$
b) $x = 4$, $y = -1$
c) nieoznaczony
d) $x = -2$, $y = 3$
e) sprzeczny
f) $x = 4$, $y = 8$

2. a) oznaczony dla $k \neq 5$, nieoznaczony dla $k = 5$
b) oznaczony dla $k \neq 2$, sprzeczny dla $k = 2$
c) oznaczony dla $k \neq -1$ i $k \neq 1$, nieoznaczony dla $k = -1$, sprzeczny dla $k = 1$
d) oznaczony dla $k \neq -\sqrt{2}$ i $k \neq \sqrt{2}$, sprzeczny dla $k \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
e) oznaczony dla $k \neq -2$ i $k \neq 2$, nieoznaczony dla $k \in \{-2, 2\}$
f) oznaczony dla $k \neq 0$, sprzeczny dla $k = 0$

3. a) $x = 3$, $y = -1$, $z = -2$
b) $x = -5$, $y = 2$, $z = 1$
c) $x = 5$, $y = -3$, $z = 4$
d) $x = 0$, $y = -1$, $z = 4$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $x = 6$, $y = 4$
b) nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}$, $y = 0{,}4x - 1{,}9$
c) $x = 1$, $y = 1$ d) $x = -3$, $y = -2$

2. **a)**, **c)**, **d)** nie **b)** tak

3. **a)**, **d)** nieskończenie wiele **b)** 1 **c)** 0

4. **a)** 49 **b)** $\frac{7}{17}$

5. **a)** 400 g roztworu 5% i 1000 g roztworu 40%
b) 7,5 g roztworu 10% i 2,5 g roztworu 6%

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)** $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nie ma rozwiązań
b) $m = 1$: nieskończenie wiele rozwiązań, $m = -2$: jedno rozwiązanie
c) $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nieskończenie wiele rozwiązań

2. **a)** $m = \frac{11}{17}$, $k = \frac{26}{17}$
b) $m = -1$, $k = \frac{1}{2}$

3. **a)** $x = \frac{3}{2}$, $y = 6$
b) $x = 0$, $y = -1$
c) $x = \frac{3}{22}$, $y = \frac{2}{11}$
d) $x = 1$, $y = -4$
e) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
f) $x = 0$, $y = 0$

4. **a)** $m > 2$ **b)** $m > 3$

5. **a)** $m \in (1; 2)$
b) $m \in (\frac{11}{4}; 5)$

6. **a)** nieskończenie wiele dla $m = -1$, 1 dla $m \in \{1, 2\}$
b) 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \in \{-1, 1\}$
c) 0 dla $m = 1$, 1 dla $m \in \{-1, 2\}$

7. **a)** nieoznaczony dla $m = 5$, sprzeczny dla $m \neq 5$
b) nieoznaczony dla $m = -4$, sprzeczny dla $m \neq -4$
c) nieoznaczony dla $m = -2$, sprzeczny dla $m \neq -2$

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** C **4.** D **5.** C **6.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$

2. 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych, 10 banknotów 50-złotowych

3. $\alpha = 55°$, $\beta = 25°$, $\gamma = 100°$

4. I i III

5. 28

6. po 5 monet 10- i 50-groszowych, 12 monet 1-złotowych, 6 monet 2-złotowych

7. $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 416 ($4\frac{1}{6}$ m/s)

2. 134 ($x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{22}{7}$)

3. 427 ($x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$)

4. 1,5 km/h

4.1. Pojęcie funkcji

Ć **2.** **a)** $f(2) = -1$, $f(4) = 2$
b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$, nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.

3. Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$. Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.

4. **a)** 3 **b)** 0, 1, 5
c) 2 **d)** dla żadnych

5. **a)** nie **b)** tak, 2

6. miejsca zerowe funkcji f:
a) 2 **b)** brak **c)** -1, 1 **d)** 2

Z **1.** miejsca zerowe funkcji f: **a)** 0 **b)** -1

2. **a)**, **b)** wartości nieparzyste dla trzech argumentów

3. **a)** miejsca zerowe: 0, 2
b) brak miejsc zerowych

4. **b)** Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5; 1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.

5. wartości dodatnie dla:
a) jednego argumentu
b) trzech argumentów

6. wartości ujemne dla: $-1, 0, 1$, dwa miejsca zerowe: -2, 2

8. **a)** 45 **b)** 22
c) 18 **d)** 9

9. **a)** $\{n \in \mathbf{N} : 1 \leqslant n \leqslant 18\}$
b) $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$,
$f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

10. **a)** $\{n \in \mathbf{N} : 1 \leqslant n \leqslant 27\}$
b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{101, 110, 200\}$,
$f(x) = 3$ dla
$x \in \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$

11. **a)** 171 **b)** 10

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

Č **3.** **a)** $f(x) = x - 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

5. **a)** np. $(0, 0)$, $(1, 2)$
b) np. $(0, 0)$, $(1, -1)$
c) np. $(0, -1)$, $(1, 0)$
d) np. $(0, 2)$, $(1, 0)$

Z **3.** **a)** $f(x) = x - 4$ **b)** $f(x) = 2x$
c) $f(x) = -x + 4$
d) $f(x) = 2x - 1$

8. dla ośmiu

4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

Č **2.** **a)** $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$

3. **a)** $f(1) = 1$, $f(7) = 4$
b) $f(1) = 3$, $f(7) = -6$

4. **a)** nie należy **b)** należy

Z **1.** **a)**, **c)** nie **b)** tak

3. **a)** Q **b)** P **c)** P

4. **a)** $f(-4) = -1$, $f(4) = 3$
b) $f(-4) = 4$, $f(4) = 8$

5. **a)** $f(1) = 1$, $f(3) = 3$
b) $f(1) = 1$, $f(3) = 3$

4.4. Monotoniczność funkcji

Č **2.** **a)** tak **b)** tak **c)** nie

3. **b)** nie

Z **1.** **a)** maleje w $\langle -3; 2 \rangle$, stała w $\langle 4; 6 \rangle$,
rośnie w $\langle 2; 4 \rangle$
b) maleje w $\langle -2; 0 \rangle$ i w $\langle 2; 3 \rangle$,
rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$ i w $\langle 3; 6 \rangle$

2. Wszystkie zdania są prawdziwe.

4. **a)** maleje w $\langle -2; 2 \rangle$,
rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 2; 5 \rangle$
b) rośnie w $\langle -4; -1 \rangle$ i w $\langle -1; 5 \rangle$

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

Č **1.** **a)** $D = \langle -5; 1 \rangle \cup (2; 6 \rangle$
b) $D = \langle -5; -3) \cup (-3; 5 \rangle$

2. **a)** $f(D) = (1; 4 \rangle$
b) $f(D) = \langle 0; 4)$
c) $f(D) = \langle 0; \infty)$

3. Funkcja f przyjmuje największą wartość 2 dla $x = 4$. Funkcja g nie przyjmuje wartości największej. Funkcja h przyjmuje największą wartość 3 dla $x = 3$.

Z **1.** **a)** $D = \langle -2; 4 \rangle$, $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
$f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,
$f_{\max} = 4$ dla $x = -2$
b) $D = \langle -4; 3)$, $f(D) = (-5; 4 \rangle$,
nie przyjmuje wartości najmniejszej,
$f_{\max} = 4$ dla $x = 0$
c) $D = (-5; 5)$, $f(D) = \langle -4; 2 \rangle$,
$f_{\min} = -4$ dla $x \in (-5; -3 \rangle$,
$f_{\max} = 2$ dla $x \in \langle 0; 5)$
d) $D = (-5; 5)$, $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$,
$f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,
$f_{\max} = 4$ dla $x = 2$
e) $D = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle$,
$f(D) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
$f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,
$f_{\max} = 4$ dla $x = -3$
f) $D = \langle -4; -1 \rangle \cup (1; 4 \rangle$,
$f(D) = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4)$,
$f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,
nie przyjmuje wartości największej

2. **a)** $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$
b) $f(D) = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
c) $f(D) = \langle -1; 1) \cup (2; 3 \rangle$

3. **a)** $f(D) = \langle 1; 6\rangle$
b) $f(D) = \langle 1; 3\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$
c) $f(D) = \langle 1; 2\rangle \cup \langle 5; 6\rangle$

4. **a)** $D = (\frac{1}{2}; 4\rangle$
b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$
c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$
d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$

5. **a)** $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,
$f_{\max} = 2$ dla $x = -4$
b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
nie przyjmuje wartości największej
c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
nie przyjmuje wartości największej

7. **a)** $(0; \frac{1}{2}\rangle$ **b)** $(\frac{1}{2}; 1)$
c) $\langle 2; 3\rangle$ **d)** $\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\rangle$

8. **a)** $\langle 0; 1\rangle$ **b)** $(0; 2)$
c) $\langle -2; 1\rangle$
d) $(-2; \infty)$

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Ć **1.** **a)** $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
$f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
$f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
c) brak miejsc zerowych,
$f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup \langle 2; 4\rangle$

2. **a)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3)$,
$f(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle -3; 6\rangle$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$,
$f(x) > 0$ dla
$x \in \langle -4; -3) \cup (-3; -1) \cup (3; 5)$,
$f(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle \cup \{-3, 5\}$

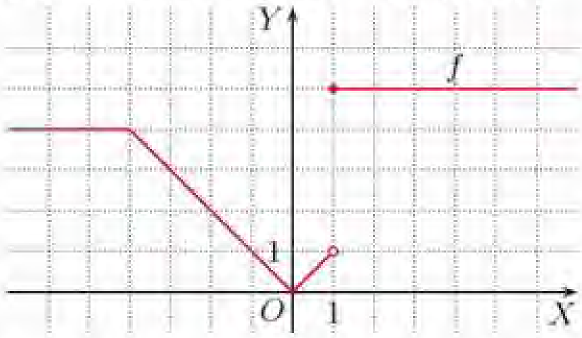
3. **a)** $f(x) = 3$ dla $x = -3$,
$f(x) > 3$ dla $x \in (-\infty; -3)$,
$f(x) = 1$ dla $x \in \{-1, 1\} \cup \langle 3; \infty)$,
$f(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle -1; 1\rangle \cup \langle 3; \infty)$
b) $f(x) = 3$ dla $x \in (1; \infty)$,
nie przyjmuje wartości większych od 3,
$f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{1\}$,
$f(x) \leqslant 1$ dla $x \in (-\infty; 1)$

4. $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty)$

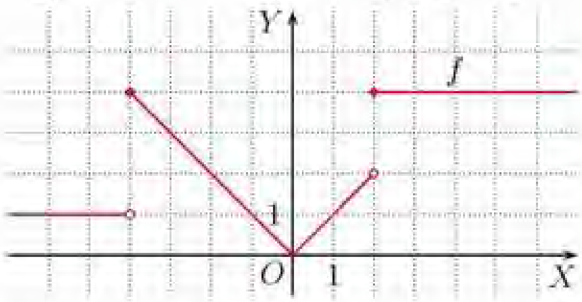
Z **1.** **a)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
$f(x) > 0$ dla
$x \in \langle -4; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; 4\rangle$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle -4; 0\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (2; 3)$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle -4; -2\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$
c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (-2; 0)$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle -4; 0\rangle \cup \{2, 4\}$

2. **a)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 1, 4\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$
b) $f(x) = 2$ dla $x = 2$,
$f(x) \geqslant 2$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{2\}$
c) $f(x) = 3$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle$,
$f(x) \leqslant 3$ dla $x \in \mathbf{R}$

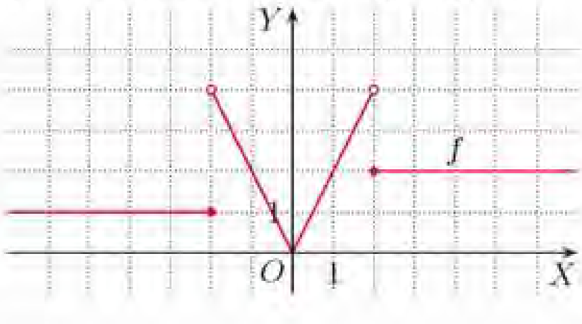
3. **a)** $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$



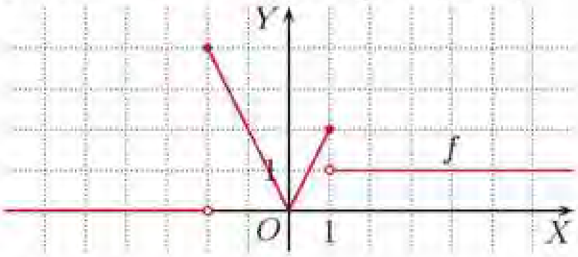
b) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$



c) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty)$

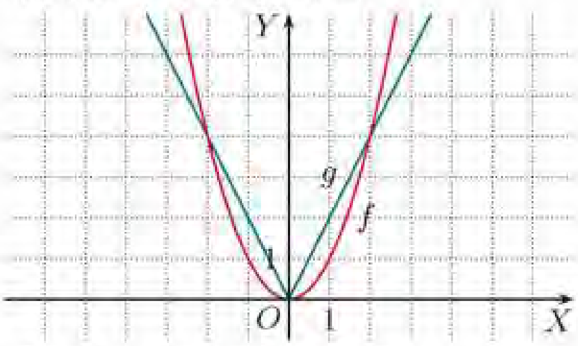


3. **d)** $f(x) = 1$ dla $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup (1; \infty)$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$

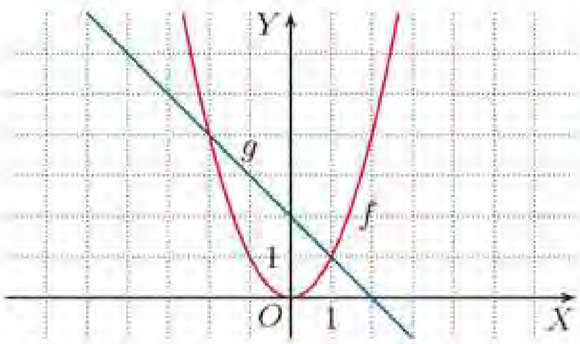


4. **a)** $x \in \{-1, 0, 1\}$
b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
c) $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; \infty)$

5. **a)** $f(x) = x^2$, $g(x) = |2x|$



$x^2 = |2x|$ dla $x \in \{-2, 0, 2\}$,
$x^2 < |2x|$ dla $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$



$x^2 = 2 - x$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
$x^2 \geqslant 2 - x$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

Wykresy jako nośnik informacji finansowych

1. **a)** X: 40 zł, Y: 50 zł
b) X: 50 zł, Y: 10 zł

4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Ċ **1.** **a)** $f(D) = \langle 2; \infty)$
b) $f(D) = \langle -2; \infty)$
c) $f(D) = \langle -3; \infty)$
d) $f(D) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$

Z **1.** **a)** $g(D) = (-\infty; 4\rangle$ **b)** $g(D) = (-\infty; 0\rangle$
c) $g(D) = (-\infty; -1\rangle$

2. **a)** $f(D_f) = \langle 0; 4 \rangle$,
$g(D_g) = \langle 1; 5 \rangle$,
$h(D_h) = \langle -2; 2 \rangle$
b) $f(D_f) = \langle 0; 1 \rangle \cup \{3\}$,
$g(D_g) = \langle 1; 2 \rangle \cup \{4\}$,
$h(D_h) = \langle -2; -1 \rangle \cup \{1\}$

3. **a)** $a = 1$ **b)** $a = -4$

4. **a)** $a = 5$ **b)** $a = -4$

5. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 4$

6. **a)** 0 dla $m < 2$, 1 dla $m = 2$,
2 dla $m > 2$
b) 0 dla $m < -1$, 1 dla $m = -1$,
2 dla $m > -1$
c) 0 dla $m < -3$, 1 dla $m = -3$,
2 dla $m > -3$
d) 0 dla $m < -9$, 1 dla $m = -9$,
2 dla $m > -9$

7. **a)** $a = -2$ **b)** $a = -7$

4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Č **1.** **a)** 1 **b)** -2 **c)** -3 **d)** 4

2. **a)** $D = \langle -2; 6 \rangle$
b) $D = \langle -7; 1 \rangle$
c) $D = \langle -8; 0 \rangle$

Z **1.** **a)** $g(1) = 0$ **b)** $g(-1) = 0$
c) $g(-2) = 0$

3. **a)** $\langle -2; 5 \rangle$ **b)** $\langle -1; 6 \rangle$
c) $\langle -5; 2 \rangle$ **d)** $\langle -6; 1 \rangle$

4. **a)** 1, 3, 5 **b)** -7, -5, -3

5. **a)** $a = -\frac{3}{2}$ **b)** $a = 2$

4.9. Wektory w układzie współrzędnych

Č **2.** **a)** $\overrightarrow{GH} = [3, -3]$ **b)** $\overrightarrow{IJ} = [-4, -5]$
c) $\overrightarrow{MN} = [2, 0]$

3. **a)** $\overrightarrow{BC} = [3, -1]$, $\overrightarrow{BE} = [-5, -6]$
b) $\overrightarrow{AC} = [8, 0]$, $\overrightarrow{AE} = [0, -5]$
c) $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$, $\overrightarrow{BA} = [-5, -1]$
d) $\overrightarrow{BD} = [0, -3]$, $\overrightarrow{DA} = [-5, 2]$

4. **a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [6, 2]$,
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = [-6, -2]$
b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [-3, 3]$,
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = [3, -3]$

5. **a)** $[-1,-6]$ **b)** $[8\frac{3}{4},-8\frac{2}{3}]$

6. **a)** 3 **b)** 3

Z **1.** **a)** $B(6,5)$ **b)** $B(-3,0)$
c) $B(5\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
d) $B(-1\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

2. **a)** $A(-3,0)$ **b)** $A(1,1)$
c) $A(-15,17)$ **d)** $A(23,32)$

3. **a)** $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{CD}$

4. **a)** $[5,1]$

5. **a)** 12 **b)** 3,5

6. $A(-3,-3)$, $B(6,0)$, $D(-7,1)$, $P=32$

4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

Ć **1.** **a)** $[1,-2]$ **b)** $[-3,2]$

2. **a)** $[2,-1]$ **b)** $[-3,-2]$ **c)** $[-1,1]$

Z **1.** **a)** $f(x)=(x-2)^2-2$, $[2,-2]$
b) $f(x)=(x-1)^2+2$, $[1,2]$
c) $f(x)=(x+2)^2-1$, $[-2,-1]$

2. **a)** brak miejsc zerowych, $f(D)=(3;\infty)$
b) $f(x)=0$ dla $x\in\{-1,5\}$, $f(D)=\langle -3;\infty)$
c) $f(x)=0$ dla $x\in\{-3,1\}$, $f(D)=\langle -2;\infty)$

3. **a)** 11 **b)** 6

4. **a)** $D_g=\langle -4;4\rangle$, $g(D_g)=\langle -4;2\rangle$, $g(x)\leqslant 0$ dla $x\in\langle -4;-2\rangle\cup\{0\}\cup\langle 2;4\rangle$
b) $D_g=\langle -1;7\rangle$, $g(D_g)=\langle 0;6\rangle$, $g(x)\leqslant 0$ dla $x=7$
c) $D_g=\langle 0;8\rangle$, $g(D_g)=\langle -6;0\rangle$, $g(x)\leqslant 0$ dla $x\in\langle 0;8\rangle$

5. **a)** $D_g=\langle 1;\infty)$, $g(D_g)=\langle 3;\infty)$
b) $D_g=\langle -4;\infty)$, $g(D_g)=\langle -2;\infty)$
c) $D_g=\langle -1;\infty)$, $g(D_g)=\langle -1;\infty)$

6. **a)** $D_g=\langle -5;1\rangle$, $g(D_g)=\langle 8;11\rangle$
b) $D_g=\langle -10;-4\rangle$, $g(D_g)=\langle 0;3\rangle$
c) $D_g=\left\langle -13\frac{1}{3};-7\frac{1}{3}\right\rangle$, $g(D_g)=\left\langle 18\frac{2}{3};21\frac{2}{3}\right\rangle$

7. **a)** $[5,3]$ **b)** $[2,4]$ **c)** $[-1,-1]$

4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

Ć **1.** $f(D_f)=\langle -1;3\rangle$, $g(D_g)=\langle -3;1\rangle$

2. **a)** $f(D_f)=\langle 0;\infty)$, $g(D_g)=(-\infty;0\rangle$
b) $f(D_f)=\langle 0;\infty)$, $g(D_g)=(-\infty;0\rangle$

3. **a)** $f(D_f)=\langle -1;4\rangle$, $g(D_g)=\langle -4;1\rangle$
b) $f(D_f)=\langle -3;1\rangle$, $g(D_g)=\langle -1;3\rangle$

7. $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in(-\infty;1) \\ 1 & \text{dla } x\in\langle 1;2\rangle \\ -x+3 & \text{dla } x\in(2;\infty)\end{cases}$

Z **1.** **a)** $f(D_f)=\langle -1;3\rangle$, $g(D_g)=\langle -3;1\rangle$
b) $f(D_f)=\langle -2;4\rangle$, $g(D_g)=\langle -4;2\rangle$
c) $f(D_f)=\langle -2;1\rangle\cup(2;4\rangle$, $g(D_g)=\langle -4;-2)\cup\langle -1;2\rangle$

2. **a)** $(-1,0)$, $(1,0)$
b) brak punktów wspólnych **c)** $(2,0)$

3. **a)**, **b)** $D_f=\langle -4;3\rangle$, $D_g=\langle -3;4\rangle$
c) $D_f=\langle -3;4\rangle$, $D_g=\langle -4;3\rangle$

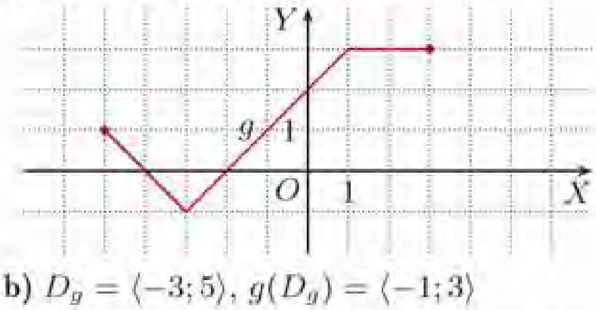
4. **a)** $g(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla } x\in(-\infty;-2) \\ -x & \text{dla } x\in\langle -2;3\rangle \\ -3 & \text{dla } x\in(3;\infty)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} -3 & \text{dla } x\in(-\infty;-3) \\ x & \text{dla } x\in\langle -3;2\rangle \\ 2 & \text{dla } x\in(2;\infty)\end{cases}$

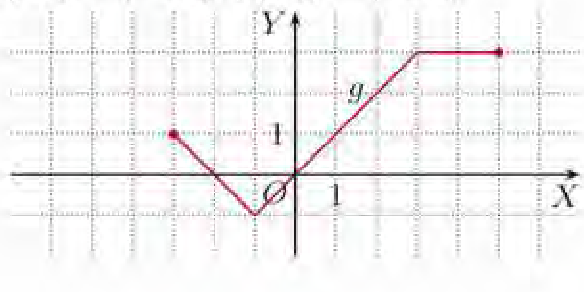
b) $g(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{dla } x\in(-\infty;-1) \\ -|x| & \text{dla } x\in\langle -1;2\rangle \\ -3 & \text{dla } x\in(2;\infty)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} -3 & \text{dla } x\in(-\infty;-2) \\ -|x| & \text{dla } x\in\langle -2;1\rangle \\ x-2 & \text{dla } x\in(1;\infty)\end{cases}$

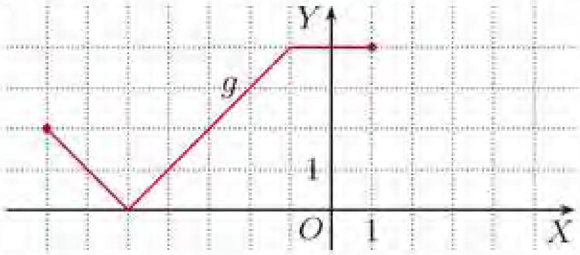
5. **a)** $D_g=\langle -5;3\rangle$, $g(D_g)=\langle -1;3\rangle$



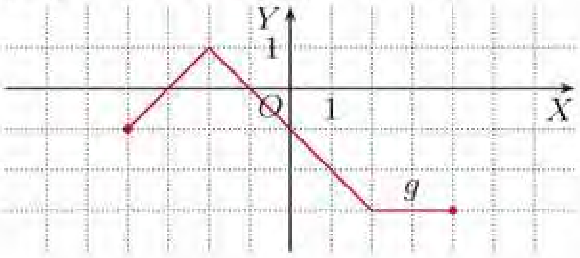
b) $D_g=\langle -3;5\rangle$, $g(D_g)=\langle -1;3\rangle$



5. c) $D_g = \langle -7; 1\rangle$, $g(D_g) = \langle 0; 4\rangle$



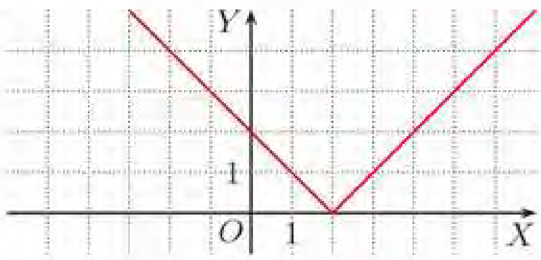
d) $D_g = \langle -4; 4\rangle$, $g(D_g) = \langle -3; 1\rangle$



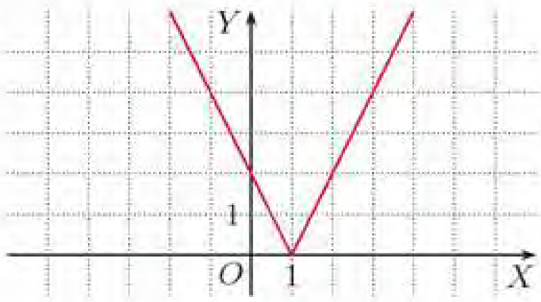
4.12. Inne przekształcenia wykresu

Ċ **1.** wykresy $y = |f(x)|$

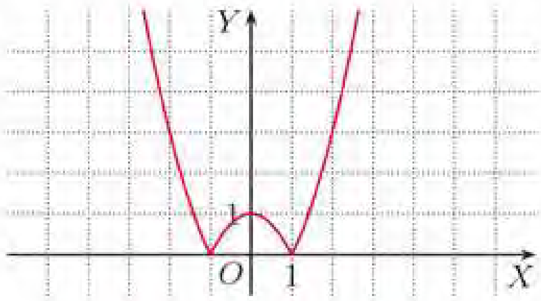
a)



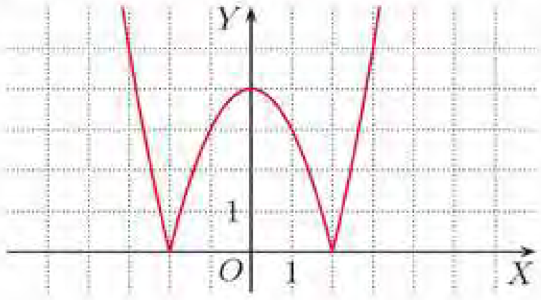
b)



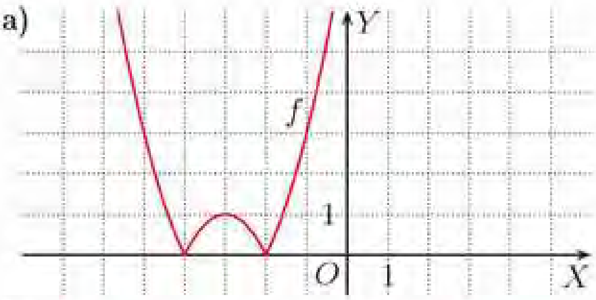
c)



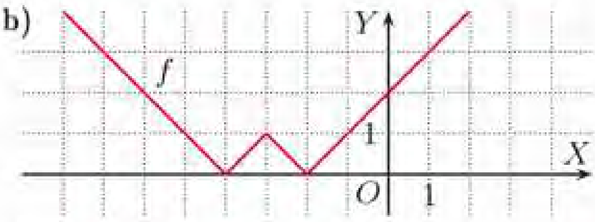
d)



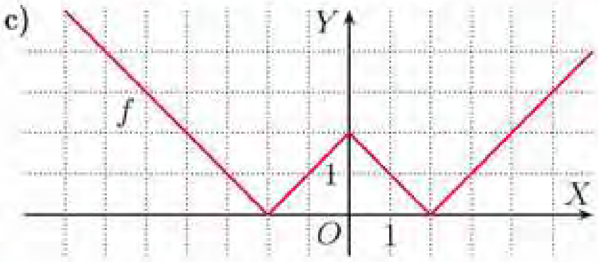
2. a)



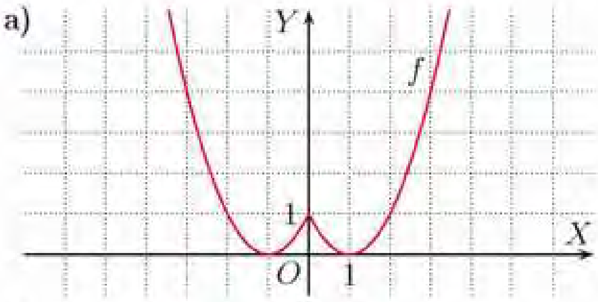
b)



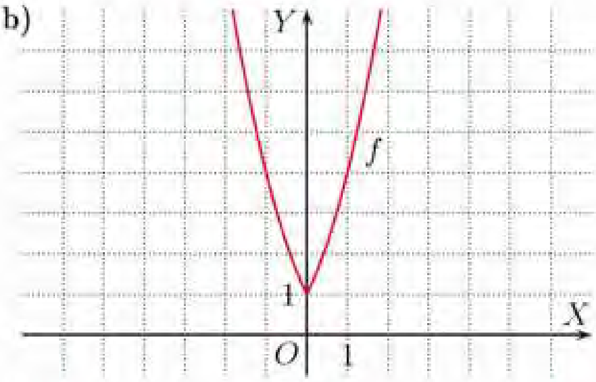
c)



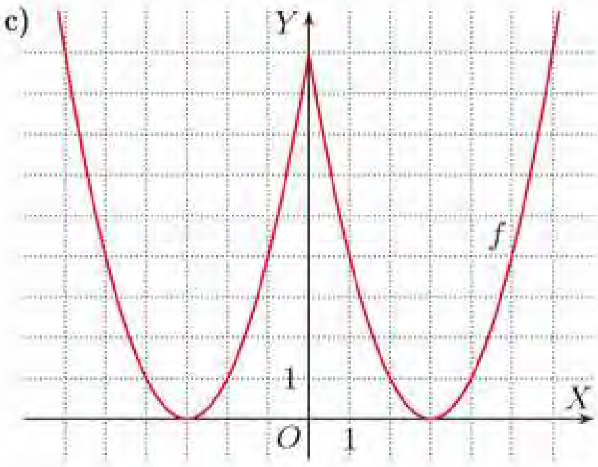
3. a)



b)

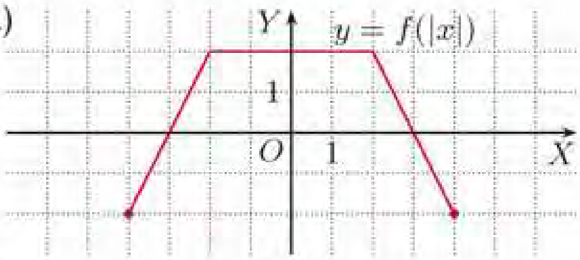


c)

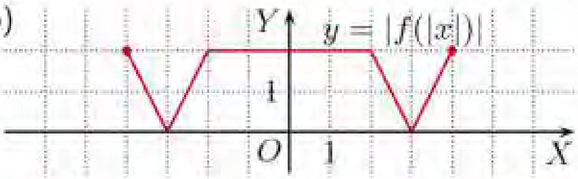


Z **2.** **a)** 10 **b)** 6 **c)** 4

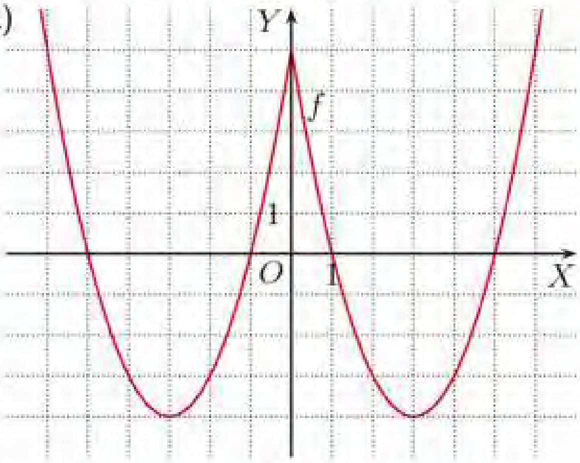
3. **a)**



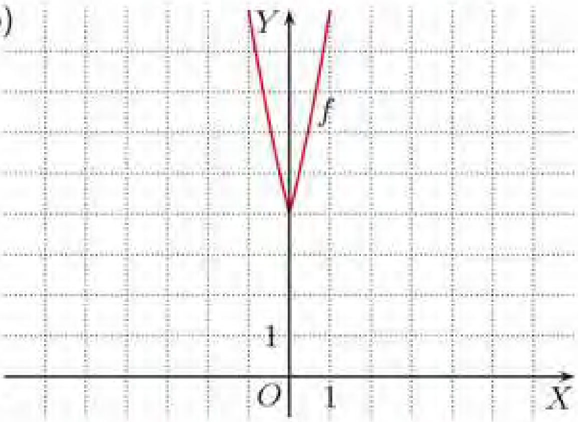
b)



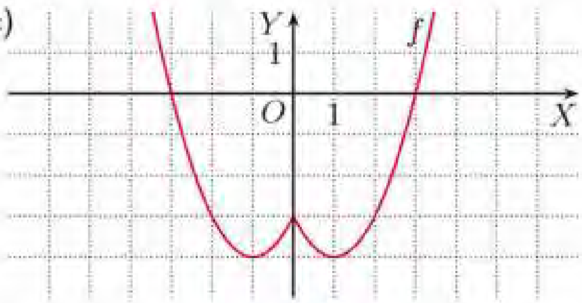
4. **a)**



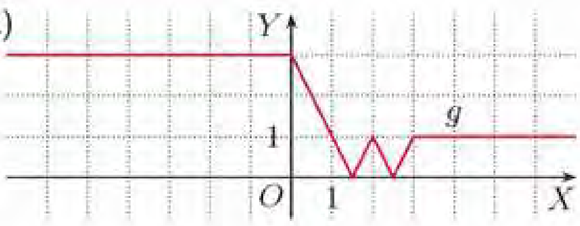
b)



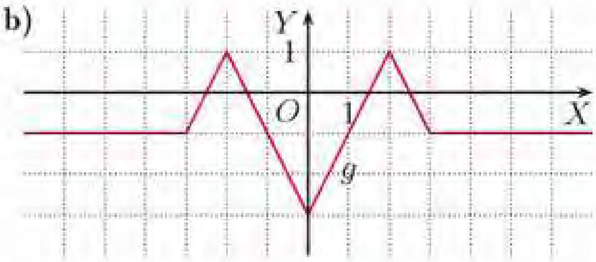
c)



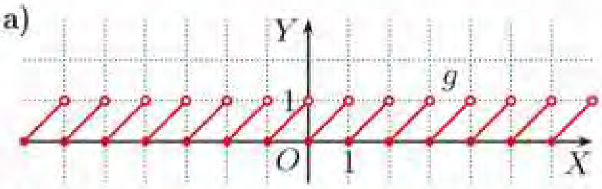
5. **a)**



b)

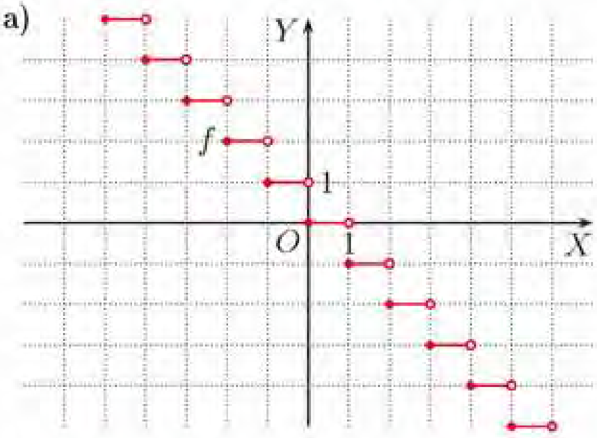


6. **a)**

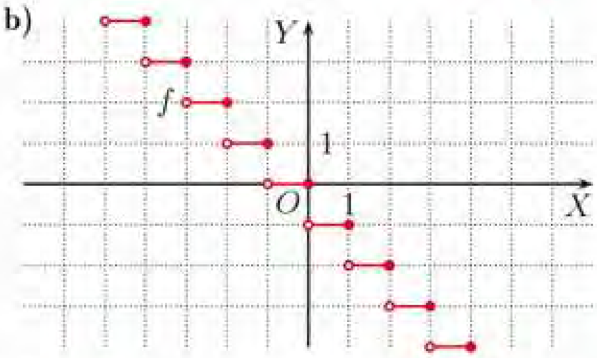


b) $x \in \left\{\frac{1}{2}k : k \in \mathbf{Z}_-\right\} \cup (0; \infty)$

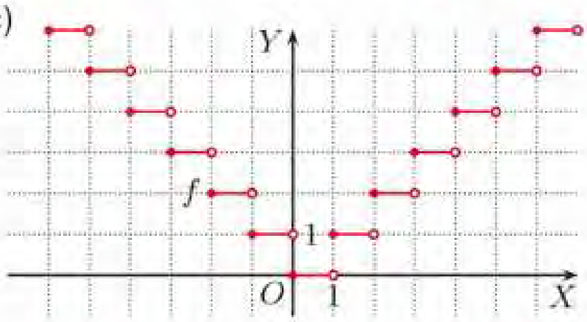
7. **a)**



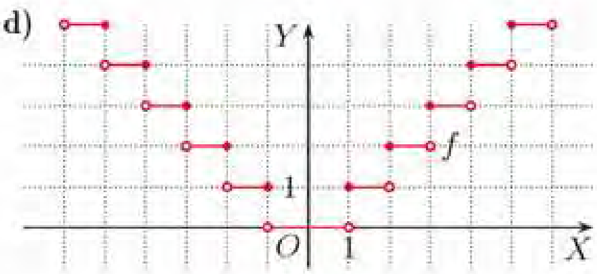
b)



c)



d)



4.13. Proporcjonalność odwrotna

Ć 1. f: $(1,1)$, g: $(1,4)$, $(2,2)$, $(4,1)$,
h: $(1,6)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(6,1)$

2. 6, nie zależy

3. **a)** kolejno uzupełniamy: 6, 4,5, 3, 2

Z **1.** kolejno uzupełniamy:
a) 8, 4, 2, 1,6 **b)** 10, 5, 4, 2
wzór: **a)** $y = \frac{8}{x}$, $x > 0$ **b)** $y = \frac{10}{x}$, $x > 0$

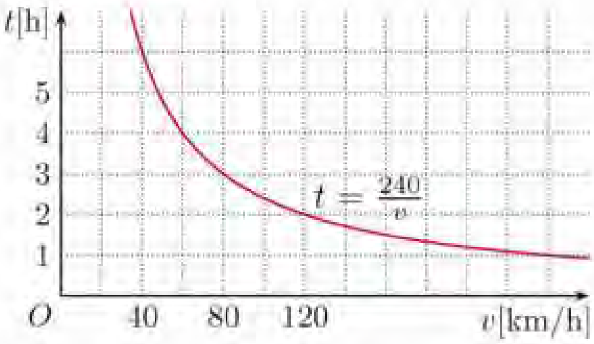
2. **a)** $k = 15$

3. **a)** 2 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6

4. $D = \{n \in \mathbf{N} : 3 \leqslant n \leqslant 12\}$

5. **a)** 4 h **b)** 3 h 20 min **c)** 2,5 h
d) 2 h 24 min

6.



4.14. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** 80 km/h **b)** 60 km/h

2. **a)** 70 km/h **b)** 80 km/h

3. 2 h 20 min

4. kolejno uzupełniamy: 2400, 4800, 9600, 19 200, 38 400, 76 800, 153 600, 307 200

5. $a = \sqrt{2}$, po 12 godzinach

6. **a)** 8 **b)** 16 **c)** 1024 **d)** $\frac{1}{1024}$

8. **a)** $x \in \langle -2; 0\rangle$ **b)** $x \in \langle -1; 1\rangle$

9. **a)** 16 **b)** 32 **c)** 1024 **d)** $\sqrt{2}$

10. $y = \log_2 x$: np. $(1,0)$, $(4,2)$, $(8,3)$, $(16,4)$;
$y = \log_4 x$: np. $(1,0)$, $(16,2)$, $(64,3)$, $(256,4)$

12. **a)** $x > 100$ **b)** $x > 1000$ **c)** $x > 10^6$
d) $x > 10^{10}$

Zestaw powtórzeniowy I

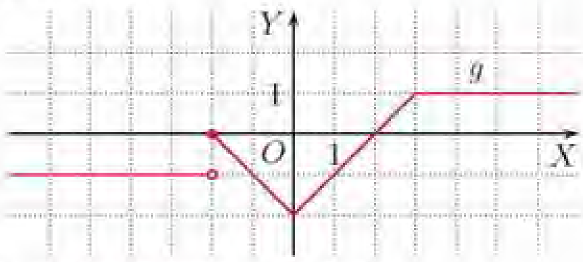
1. **a)** $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 81$ **b)** 12 dla 4 argumentów, 16 dla 3 argumentów **c)** 65

2. **a)** $f(X) = \{-1, 0, 2, 3\}$
b) $f(X) = \langle -1; \infty)$ **c)** $f(X) = \langle 0; 3)$

3. **a)** f rośnie w $\langle -4; -2\rangle$ i w $\langle 0; 4)$,
maleje w $\langle -2; 0\rangle$,
$f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -1) \cup (2; 4)$
b) f rośnie w $(-4; -2\rangle$ i w $\langle 1; 4)$,
maleje w $\langle -2; 1\rangle$,
f nie przyjmuje wartości 0,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup (2; 4)$
c) f rośnie w $\langle -3; -2\rangle$, w $\langle 0; 1\rangle$ i w $\langle 2; 4)$,
maleje w $(-4; -3\rangle$, w $\langle -2; 0\rangle$ i w $\langle 1; 2\rangle$,
$f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup$
$\cup (3; 4)$

5. **a)** 6 **b)** 21

6.



a) $g(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$,
$g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$
b) $g(x) = 1$ dla $x \in \langle 3; \infty)$,
$g(x) \leqslant 1$ dla $x \in \mathbf{R}$
c) $g(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1, 1\}$,
$g(x) \leqslant -1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 1\rangle$

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)** $D_g = (-2; 5\rangle$
b) $D_g = \langle 0; 7)$
c) $D_g = (-7; 0\rangle$
d) $D_g = \langle -1; 6)$

2. **a)** $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -|x| & \text{dla } x \in \langle -1; 3\rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

$g(D_g) = \langle -3; 0\rangle$,
stała w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 3; \infty)$,
rośnie w $\langle -1; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; 3\rangle$

b) $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ 5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

$g(D_g) = \{-2\} \cup \langle 0; 4\rangle \cup \{5\}$,
stała w $(-\infty; -2)$ i w $(1; \infty)$,
rośnie w $\langle 0; 1\rangle$, maleje w $\langle -2; 0\rangle$

3. **a)** $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$,
miejsca zerowe: -3, $\frac{1}{2}$, 1
b) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$,
miejsca zerowe: -2, $-\frac{3}{2}$, 2
c) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$,
miejsca zerowe: -2, $\frac{3}{2}$, 2

4. **a)** -4, 2, 5 **b)** -5, -2, 4

5. **a)** 1 rozwiązanie dla $m = 4$,
3 rozwiązania dla $m \in \{0, 2\}$
b) 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m \in (0; 4)$

6. **a)** 32 **b)** 7

Zadania testowe

1. D **2.** C **3.** B **4.** A **5.** D **6.** A **7.** C **8.** B **9.** C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $\frac{5}{3}$
2. 2
3. $D_g = \langle -6; 3 \rangle$
4. -2, 1
5. 15
6. 8
7. miejsca zerowe: 1, 5, 9
8. stała w $(-\infty; -3\rangle$,
rośnie w $\langle -3; -1 \rangle$ i w $\langle 0; \infty)$,
maleje w $\langle -1; 0 \rangle$,
$g(x) \leqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{0\}$

Przed maturą z matematyki
na poziomie rozszerzonym

1. $648\ (6\sqrt{2} - 2)$
2. $626\ (8 - \sqrt{3})$
3. 323
4. $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \{-1, 3\}$
5. 24
6. $x \in (-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup \langle 2; \infty)$
7. $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty)$

5.1. Wykres funkcji liniowej

[Ć] 2. **a)** np. $(0, -2)$, $(2, 1)$
b) np. $(0, 0)$, $(5, -3)$
c) np. $(0, 2)$, $(-4, -1)$
d) np. $(0, -1)$, $(-7, 3)$

4. $l_2 \parallel l_4 \parallel l_6$, $l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

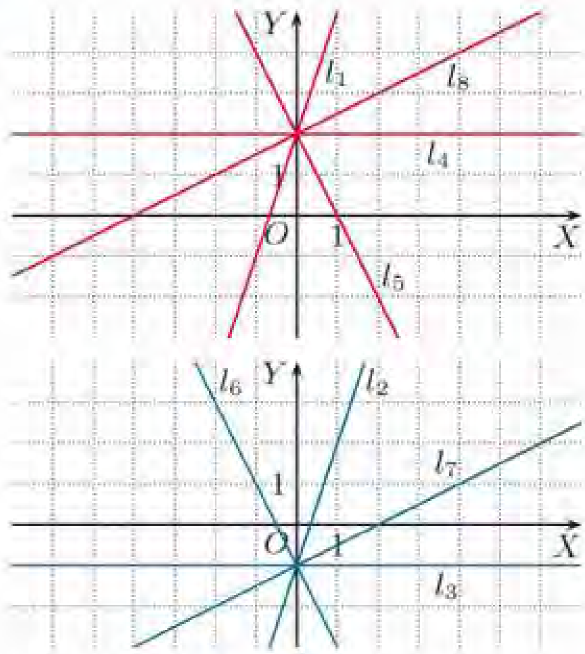
5. **a)** $y = 2x + 1$ **b)** $y = -\frac{2}{3}x - 2$

7. **a)** $y = 3x + 6$ **b)** $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

8. **a)** $f_1(1) = 4$, $f_2(1) = 3$,
$f_3(1) = 2\frac{1}{2}$, $f_4(1) = 6$
b) f_1 – niebieski, f_2 – brązowy,
f_3 – czerwony, f_4 – zielony

9. **a)** $y = -\frac{3}{4}x + 5$, tak **b)** $y = \frac{5}{3}x - 4$, nie

[Z] 1.



2. **a)** $y = 4x + 5$ **b)** $y = -3x + 11$
c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ **d)** $y = \sqrt{3}x$

3. **a)**, **b)** nie należy **c)** należy

4. **a)** $y = x + 4$ **b)** $y = \frac{1}{2}x + 4$
c) $y = -3x + 4$ **d)** $y = -8x + 4$

5. **a)** 15 **b)** 24

5.2. Własności funkcji liniowej

[Ć] 2. **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $-\frac{4}{3}$ **c)** -6 **d)** $\frac{2}{3}$

3. **a)** $a = 0$ i $b \neq 0$ **b)** $a = b = 0$

4. **a)** 4 **b)** 6 **c)** 16 **d)** 7,5

6. **a)**, **c)** rosnąca **b)** malejąca **d)** stała

7. **a)** $a < 0$ i $b > 0$ **b)** $a > 0$ i $b < 0$
c) $a < 0$ i $b < 0$

8. **a)** wprost proporcjonalne, $a = \frac{1}{4}Ob$
b) odwrotnie proporcjonalne, $a = \frac{2P}{b}$
c) wprost proporcjonalne, $Ob = 2\pi r$
d) odwrotnie proporcjonalne, $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

9. **a)** $y = 3x$ **b)** $y = \frac{2}{3}x$ **c)** $y = \frac{5}{7}x$

Z **1.** **a)** I, II, IV **b)** I, II, III **c)** II, III, IV **d)** I, III, IV **e)** I, II, IV **f)** III, IV

2. **a)** malejąca **b)**, **c)** rosnąca

3. **a)** rosnąca dla $m < 5$, stała dla $m = 5$, malejąca dla $m > 5$
b) rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$, stała dla $m = -\frac{1}{5}$, malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
c) rosnąca dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, stała dla $m \in \{-1, 1\}$, malejąca dla $m \in (-1; 1)$

4. **a)** malejąca **b)** rosnąca **c)** malejąca

5. **a)** $y = \frac{2}{3}x + 4$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x - 2$

6. **a)** $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$, $y = \frac{3}{2}x + 3$, $y = -x - 2$
b) $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$, $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$

7. **a)** $y = -x + 3$
b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$

8. **a)** $y = -\frac{3}{4}x - 3$ lub $y = \frac{3}{4}x - 3$
b) $y = -\frac{3}{7}x - 3$ lub $y = \frac{3}{7}x - 3$
c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$ lub $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$

9. **a)** $y = -5\frac{1}{3}x + 8$ lub $y = 5\frac{1}{3}x - 8$
b) $y = -4x + 6$ lub $y = 4x - 6$
c) $y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + 4\sqrt{2}$ lub $y = \frac{8\sqrt{2}}{3}x - 4\sqrt{2}$

5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

Ć **1.** **a)** $y = 2x - 3$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

2. **a)**, **b)** są **c)**, **d)** nie są

3. **a)** $x = -3$, nie jest **b)** $y = -3$, jest
c) $x = 8$, nie jest

5. l, n, p, r

Z **1.** **a)** $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$, nie należą
b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$, $4x + 3y + 8 = 0$, nie należą
c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$, $3x - 4y + 10 = 0$, A należy, B nie należy

2. **a)** $(0, 2)$, $(-1, 0)$ **b)** $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
c) $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$ **d)** $(0, -3)$, $(\frac{9}{2}, 0)$
e) $(0, -4)$, $(16, 0)$ **f)** $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

3. **a)** $AB\colon y + 1 = 0$, $DC\colon y - 2 = 0$, $AD\colon 3x - y + 5 = 0$, $BC\colon 3x - y - 10 = 0$
b) $AB\colon x + 2y + 2 = 0$, $DC\colon x + 2y - 4 = 0$, $AD\colon x + 2 = 0$, $BC\colon x - 2 = 0$
c) $AB\colon x - 3y - 2 = 0$, $DC\colon x - 3y + 6 = 0$, $AD\colon x + y + 2 = 0$, $BC\colon x + y - 6 = 0$

4. **a)** $m = 8$ **b)** $m = -\frac{7}{6}$
c) $m = -\frac{1}{6}$ **d)** $m = -6$
e) $m = \frac{3}{4}$ **f)** $m = -\frac{1}{8}$

6. **a)** $m = -\frac{3}{5}$ **b)** $m = -3$ lub $m = 3$

7. **a)** $m \in \langle -4; 4 \rangle$ **b)** $m \in \langle -10; 2 \rangle$

8. 0 dla $m \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup (2; \infty)$,
1 dla $m \in \left\{\frac{1}{7}, 2\right\}$,
2 dla $m \in \left(\frac{1}{7}; 2\right)$

10. **a)** $(8, 0)$, $(0, 6)$, $y = -\frac{3}{4}x + 6$
b) $(5, 0)$, $(0, -3)$, $y = \frac{3}{5}x - 3$
c) $(-1, 0)$, $(0, 4)$, $y = 4x + 4$

11. **a)** $y = -3x + 9$, malejąca
b) $y = \frac{1}{2}x + 2$, rosnąca
c) $y = \frac{1}{4}x - 2$, rosnąca

12. **a)** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$ **b)** $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$
c) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} = 1$

5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

Ć **1.** **a)** $\frac{5}{6}$ **b)** 1 **c)** $-\frac{5}{3}$

2. **a)**, **c)** jest **b)** nie jest

6. **a)** $y = -\frac{1}{2}x + 7$ **b)** $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Z **1.** AB: $-\frac{1}{3}$, BC: 3, AC: $\frac{1}{2}$

2. AB: $\frac{1}{2}$, BC: -1, CD: $-\frac{1}{5}$, AD: -6

3. **a)** $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ **b)** $y = -2x + 3$
c) $y = -12x + 5$ **d)** $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
e) $y = -6$ **f)** $y = \sqrt{3}x + 1$

4. **a)** AB: $y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$, AD: $y = 2x + 6$, BC: $y = 2x - 6$, CD: $y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
b) AB: $y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$, AD: $y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$, BC: $y = -\frac{5}{3}x + 7$, CD: $y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$

5. **a)** PQ i RS: $\frac{2}{3}$, QR: $-\frac{10}{3}$, PS: $-\frac{4}{3}$
b) PQ: $-\frac{7}{2}$, RS: $\frac{5}{3}$, QR i PS: $-\frac{2}{5}$

6. **a)** $m = 2$ **b)** $m = -\frac{5}{3}$

7. $m = 8$

8. $m = -3$ lub $m = 3$

10. **a)** $y - 1 = 2(x - 2)$
b) $y + 5 = 7(x + 3)$
c) $y + 9 = -\frac{7}{3}(x - 2)$
d) $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$

12. **a)** 60 km/h, 60 km/h **b)** 84

5.5. Warunek prostopadłości prostych

Ć **2.** **a)**, **b)** są **c)** nie są

3. **a)** -5 **b)** $-\frac{1}{9}$ **c)** $\frac{3}{7}$ **d)** $-3\sqrt{2}$

5. **a)** $y = \frac{1}{3}x - 1$ **b)** $y = 10x - 1$
c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$

6. **a)** $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ **b)** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

7. **a)** $x = 6$ **b)** $y = -5$ **c)** $y = -5$

Z **1.** **a)** $y = \frac{1}{3}x - 3$ **b)** $y = -\frac{3}{2}x + 7$
c) $y = \frac{3}{4}x + 1$ **d)** $y = -\frac{2}{7}x$

2. **a)** $AB: y = -x + 6$, $BC: y = x - 2$, $AC: y = 5$, jest
b) $AB: y = -x - 3$, $BC: y = 2x - 3$, $AC: y = x + 1$, jest
c) $AB: y = -2$, $BC: y = -\frac{1}{2}x + 2$, $AC: y = x + 5$, nie jest
d) $AB: y = x + \frac{3}{2}$, $BC: y = -\frac{1}{2}$, $AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest

3. **a)** AC: $y = x - 4$, BD: $y = -x + 2$
b) AC: $y = 3x + 1$, BD: $y = -\frac{1}{3}x + 1$

4. **a)** nie jest **b)** jest

6. $Ob = 4\sqrt{34}$, $P = 34$

7. **a)** $(-1, 7)$ **b)** $(-5, -6)$

8. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$, o 300%

9. **a)** są **b)** nie są

10. **a)** $m = 5$ **b)** $m = -\frac{4}{5}$ lub $m = \frac{4}{5}$

5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

Ć **1.** **a)** $x = -1$, $y = 2$ **b)** $x = 2$, $y = 5$
c) $x = 1$, $y = -2$

2. **a)**, **c)** sprzeczny
b) nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}$, $y = 2x - 6$

3. **a)** sprzeczny **b)** nieoznaczony
c) oznaczony

Z **1.** **a)** $x = 3$, $y = 4$ **b)** $x = 4$, $y = -6$
c) $x = 2$, $y = 1$ **d)** $x = 1$, $y = 6$
e) nieoznaczony, $x \in \mathbf{R}$, $y = \frac{2}{3}x - 2$
f) sprzeczny

2. **a)** $x = 3$, $y = 0$ **b)** $x = 3$, $y = 4$
c) $x = 2$, $y = 0$ **d)** $x = 1$, $y = 4$
e) sprzeczny
f) nieoznaczony, $x \in \mathbf{R}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. **a)** np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$

4. **a)** $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$ **b)** $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne

5. **a)** oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, sprzeczny dla $k = -2$
b) oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = \frac{1}{2}$
c) oznaczony dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, nieoznaczony dla $k = -\frac{1}{2}$, sprzeczny dla $k = \frac{1}{2}$

6. **a)** $A(-1, -3)$, $B(3, -3)$, $C(8, 2)$, $D(4, 2)$
b) $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$
c) $A(-2, -4)$, $B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5})$, $C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5})$, $D(2, 8)$

7. $A(-3, -3)$, $B(6, 0)$, $C(5, 3)$, $D(-1, 1)$

8. **a)** 12 **b)** 27

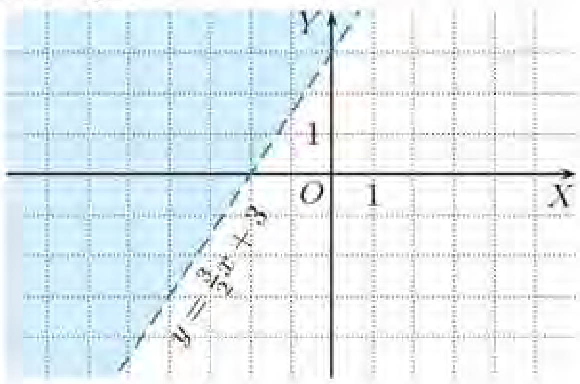
9. $A(-6, -5)$

10. $S(-4, -4)$

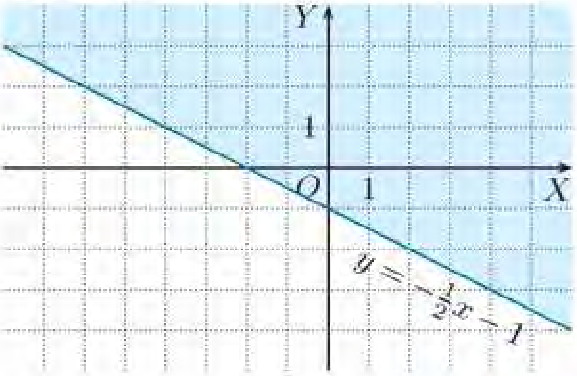
11. **a)** $P = 24$ **b)** $P = 31{,}5$

5.7. Układy nierówności liniowych

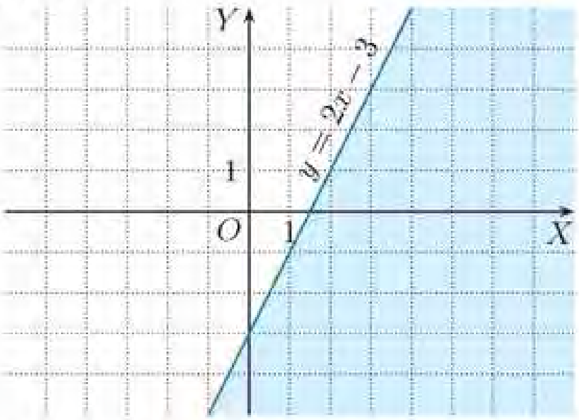
Ć **1.** **a)** $y > \frac{3}{2}x + 3$



1. **b)** $y \geqslant -\frac{1}{2}x - 1$

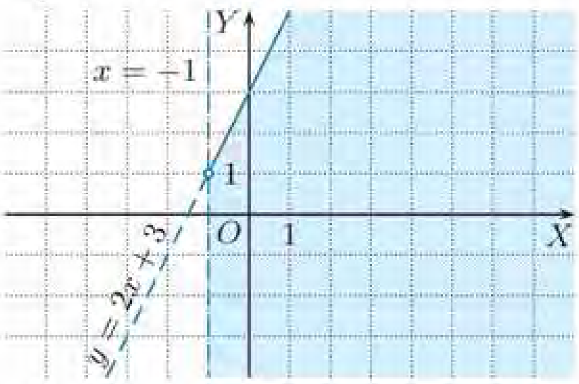


c) $y \leqslant 2x - 3$

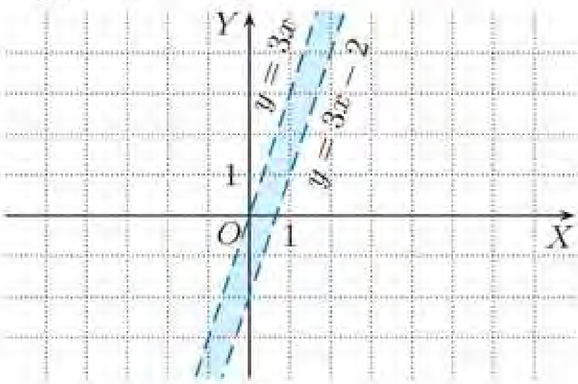


2. **a)** $y < x + 3$ **b)** $y \leqslant -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **c)** $x \leqslant 2$

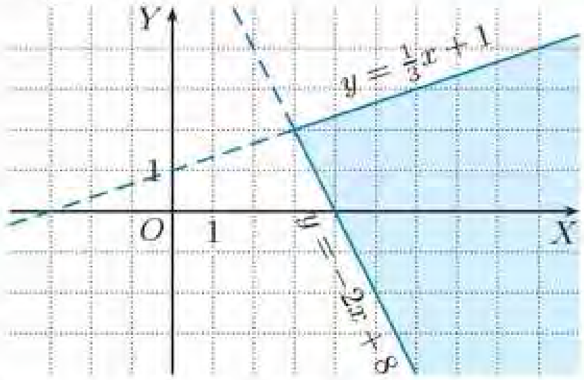
3. **a)** $\begin{cases} y \leqslant 2x + 3 \\ x > -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y < 3x \end{cases}$



c) $\begin{cases} y \leqslant \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geqslant -2x + 8 \end{cases}$



Z **1.** **a)** P, R **b)** żaden **c)** R

2. **a)** $\begin{cases} y \leqslant -x + 4 \\ y \geqslant -4x + 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geqslant -x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$

3. **a)** $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

4. **a)** $(-1,-1)$, $(-1,7)$, $(3,3)$

b) $(-4,-3)$, $(5,-3)$, $(2,6)$

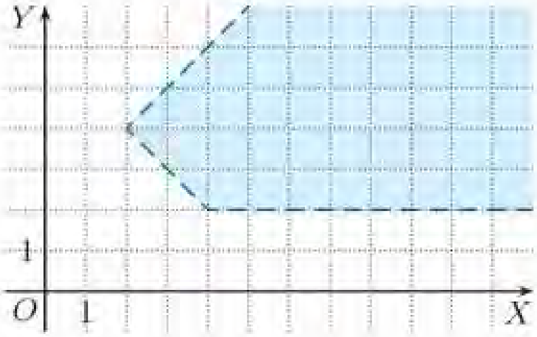
c) $(1,-4)$, $(5,4)$, $(-3,0)$

5. **a)** $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -2 \\ y \leqslant -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} \\ y \geqslant -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \end{cases}$

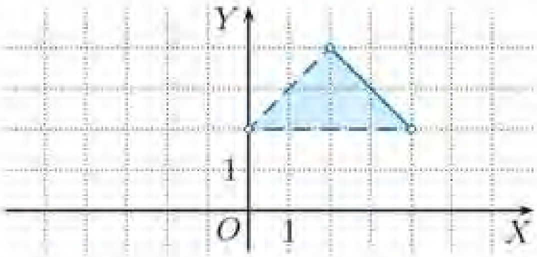
b) $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -3 \\ y \leqslant \frac{1}{3}x + 2 \\ y \geqslant -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leqslant \frac{3}{5}x + \frac{6}{5} \\ y \geqslant \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \\ y \geqslant 3x - 6 \\ y \leqslant 3x + 6 \end{cases}$

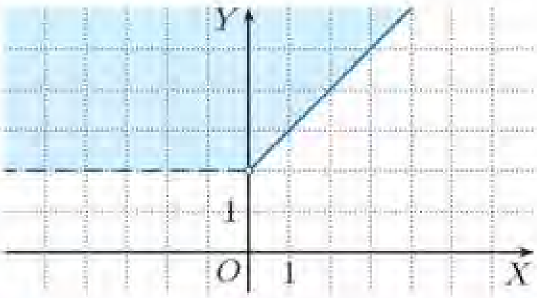
6. a)



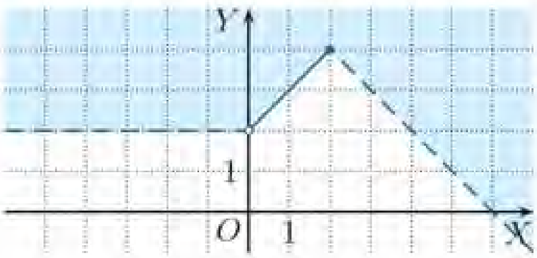
b)



c)



d)



Programowanie liniowe

1. **a)** wartość najmniejsza: -5, wartość największa: 22
b) wartość najmniejsza: -3, wartość największa: 6
c) wartość najmniejsza: -3, wartość największa: 7

5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

Ć **1.** **a)** sprzeczne dla $a = 2$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 2$: $x = \frac{10a}{a-2}$
b) tożsamościowe dla $a = 4$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 4$: $x = 1$
c) tożsamościowe dla $a = \frac{1}{2}$, sprzeczne dla $a = -\frac{1}{2}$, jedno rozwiązanie dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$: $x = \frac{1}{4a+2}$

2. tożsamościowe dla $a = b = 0$, sprzeczne dla $a = 0$ i $b \neq 0$, ma jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$

3. **a)** sprzeczne dla $a = \frac{1}{2}b$, jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{1}{2}b$: $x = \frac{a^2+1}{2a-b}$, dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$
b) sprzeczne dla $a = b = 0$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 0$ lub $b \neq 0$: $x = \frac{b-2}{a^2+b^2}$, dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$
c) tożsamościowe dla $b = 3a$, jedno rozwiązanie dla $b \neq 3a$: $x = -\frac{1}{2}$
d) tożsamościowe dla $a = 2$ i $b = -2$, sprzeczne dla $a = -b$ i $b \neq -2$, jedno rozwiązanie dla $a \neq -b$: $x = \frac{b+2}{a+b}$, dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = 1$
e) tożsamościowe dla $a = -2$ i $b = -3$, sprzeczne dla $a = \frac{2}{3}b$ i $b \neq -3$, jedno rozwiązanie dla $a \neq \frac{2}{3}b$: $x = \frac{3b+9}{3a-2b}$, dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = \frac{3}{4}$
f) tożsamościowe dla $a = b = 0$, sprzeczne dla $a = 3b$ i $a \neq 0$, jedno rozwiązanie dla $a \neq 3b$: $x = \frac{b-a}{a-3b}$, dla $a = 2$ i $b = -1$: $x = -\frac{3}{5}$

4. **a)** $m < 2$ **b)** $m > -\frac{3}{2}$ **c)** $m > 0$ **d)** $m > 3$

5. **a)** $k = 4$ **b)** $k = -3$
c) nie ma takiego k **d)** $k = \frac{5}{2}$

Z **1.** **a)** $m > -\frac{12}{5}$ **b)** $m > 0$ **c)** $m > 2$

2. **a)** 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \neq 2$
b) 0 dla $m = -3$, 1 dla $m \neq -3$
c) 1 dla $m \neq -1$, nieskończenie wiele dla $m = -1$
d) 1 dla $m \neq \frac{1}{2}$, nieskończenie wiele dla $m = \frac{1}{2}$
e) 0 dla $m = 1$, 1 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, nieskończenie wiele dla $m = -1$
f) 0 dla $m = 0$, 1 dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, nieskończenie wiele dla $m = -2$

3. **a)** 0 dla $2p = q$ i $p \neq 4$, 1 dla $2p \neq q$, nieskończenie wiele dla $p = 4$ i $q = 8$
b) 0 dla $p = 3$ i $q \neq 2$, 1 dla $p \neq 3$, nieskończenie wiele dla $p = 3$ i $q = 2$
c) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$

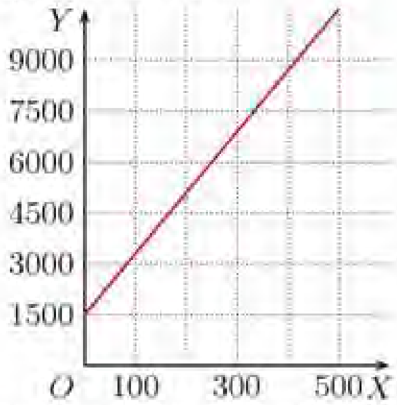
3. **d)** 0 dla $p = -q \neq 0$, 1 dla $p \neq q$ i $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = q$
e) 1 dla $p \neq -q$, nieskończenie wiele dla $p = -q$
f) 0 dla $p \neq 0$ i $p = \frac{1}{2}q$, 1 dla $p \neq \frac{1}{2}q$, nieskończenie wiele dla $p = q = 0$

4. **a)** dla $a = 2$ sprzeczne, dla $a \neq 2$: $x = \frac{4a-1}{a-2}$
b) dla $x = 4$ sprzeczne, dla $x \neq 4$: $a = \frac{2x-1}{x-4}$

5. **a)** $k \in \langle -\frac{5}{6}; \frac{7}{6} \rangle$ **b)** $k \in \langle -8; 0) \cup (0; 8 \rangle$

5.9. Funkcja liniowa – zastosowania

[Č] **1.** **a)** 36 000 zł
b) $y = 18x + 1500$



2. **a)** 400 **b)** 600 **c)** 1100

3. 60

[Z] **1.** **b)** 62 500 km

2. **b)** korzystniej z wypożyczalni Wagabunda dla liczby godzin większej od 4
c) dla liczby godzin większej od 4

3. **b)** po 4 godzinach **c)** o 2,5 km/h

4. **a)** o 11.00 **b)** 20 km **c)** o 12.00

5. 3 h 45 min

6. t – czas [h]
a) $d_1(t) = 16t$, $t \in \langle 0; 2{,}5 \rangle$; $d_2(t) = 40 - 16t$, $t \in \langle 0; 2{,}5 \rangle$
b) $d(t) = |32t - 40|$, $D_d = \langle 0; 2{,}5 \rangle$; po 1 h i po 1,5 h

5.10. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** $(1, 2, 4)$ **b)** $(-2, 5, -1)$

2. **a)** $2x + y + z = 3$ **b)** $3x + 2y - z = 4$

3. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

6. **a)** $t = 4$ **b)** $t = -3$ **c)** $t = \frac{1}{6}$
P i Q nie leżą na prostej l.

7. **a)** tak **b)** nie

8. **a)** Q **b)** R

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** $(9, 0)$, $(0, 3)$, $P = 13{,}5$
b) $(14, 0)$, $(0, -8)$, $P = 56$
c) $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{15}{2})$, $P = 9{,}375$

2. **a)** rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$, malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, stała dla $m = -\frac{1}{2}$
b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$, malejąca dla $m \in (9; \infty)$, stała dla $m = 9$

3. **a)** nie należą **b)** należą

4. **a)** 15 **b)** 12 **c)** 16 **d)** $2\sqrt{3}$

5. **a)** $(0, -3)$, $(6, 0)$ **b)** $(0, -4)$, $(-\frac{12}{5}, 0)$

7. **a)** $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$ **b)** $y = -\frac{5}{3}x - 6$

8. **a)** $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$, jest
b) $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$, $y = \frac{4}{3}x + 8$, $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$, jest

9. AB: $y = \frac{1}{2}x - 2$, BC: $y = -2x + 8$, CD: $y = \frac{1}{2}x + 3$, AD: $y = -2x - 7$

10. **a)** dla $m = 2$ nieskończenie wiele rozwiązań, dla $m \neq 2$ jedno rozwiązanie: $x = 6$
b) dla $m = 3$ sprzeczne, dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{m-3}$, dla $m = -3$ nieskończenie wiele rozwiązań

Zestaw powtórzeniowy II

1. **a)** $t = 6$ **b)** $t = 4$

2. **a)** $k = -1$ **b)** $k = \frac{6}{5}$

3. **a)** $m = 9$ **b)** $m = 1$

4. **a)** $m = -\frac{5}{6}$ **b)** $m = -2$

5. **a)** $x = -3$, $y = 2$
b) $x = 3$, $y = 6$
c) sprzeczny
d) $x = -5$, $y = -1$
e) $x = 8$, $y = 5$
f) $x = -8$, $y = -7$

6. $(-1, -3)$, $(4, -\frac{1}{2})$, $(5, 5)$, $(0, \frac{5}{2})$, $y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}$, $y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$

7. a) wierzchołki: $(-4,-6)$, $(4,0)$, $(1,4)$, spodek wysokości: $(0,2)$
b) wierzchołki: $(-4,1)$, $(4,5)$, $(-1,-5)$, spodek wysokości: $(\frac{4}{5},-\frac{7}{5})$

8. $(4,0)$ lub $(9,0)$

Zadania testowe

1. C 2. A 3. C 4. C 5. A 6. B 7. D 8. A 9. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. -4
2. 9
4. $y=-2x-8$
5. -7
7. $AD\colon y=-2x-5$, $CD\colon y=\frac{1}{4}x+4$
8. 39
9. 38,5
10. $(2,0)$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 742 $(a=-\frac{\sqrt{3}}{3}, b=8)$
2. 466 $(x_0=4\frac{2}{3})$
3. 311
4. 361

6.1. Miary kątów w trójkącie

Ć 1. b) 18°, 72°, 90°

2. a) 15°, 60°, 105° b) $17{,}5^\circ$, 55°, $107{,}5^\circ$

3. 16°, 128°, 36°; 52°, 54°, 74°; 54°, 56°, 70°; 124°, 20°, 36°; 20°, 86°, 74°; 94°, 16°, 70°

Z 1. a) $\alpha=22^\circ$, $\beta=48^\circ$
b) $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$

2. 44°, 66°, 70°

3. a) $\alpha=30^\circ$, $\beta=80^\circ$, $\gamma=50^\circ$
b) $\alpha=52^\circ$, $\beta=52^\circ$, $\gamma=76^\circ$

4. $\sphericalangle AEF=65^\circ$, $\sphericalangle AFB=65^\circ$, $\sphericalangle BCF=26^\circ$, $\sphericalangle EFD=82^\circ$, $\sphericalangle DFC=36^\circ$, $\sphericalangle CDF=74^\circ$

5. 36°, 144°

7. 60°, 140°, 160°

10. a) 540° b) 720° c) $(n-2)\cdot180^\circ$

11. 10

12. 36°, 36°, 108°; 36°, 72°, 72°

6.2. Trójkąty przystające

Ć 1. $|AB|=|DE|$, $|AC|=|DF|$, $|BC|=|EF|$, $\sphericalangle BAC=\sphericalangle EDF$, $\sphericalangle ABC=\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB=\sphericalangle DFE$

2. a), b) nie

3. a) KBK b) BKB c) KBK

6. a), d) tak b), c) nie

7. sześć

6.3. Twierdzenie Talesa

1. a) $\frac{|AC|}{|AE|}=\frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AE|}{|DE|}$ b) 2,4

2. b) $|DE|=3$, $|AD|=6$

3. $|ED|=10{,}5$

4. działka I: 35 m, działka III: 21 m

6. a) np. $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|AC|}{|AE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|BC|}{|DE|}$, $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|CE|}$

Z 1. a) $x=6$, $y=2{,}4$ b) $x=10$, $y=12$

2. $5\frac{1}{3}$ cm, 4 cm, $2\frac{2}{3}$ cm

5. a) k i m b) l i m

6. b) $Ob_{BDE}=3+4\sqrt{3}+\sqrt{57}$, $Ob_{PQR}=\frac{7}{2}(3+\sqrt{3})$

6.4. Wielokąty podobne

Ć 1. a), c) jest b) nie jest

2. a) są b) nie są

3. a) F_1 do F_2: $\frac{3}{2}$, F_2 do F_1: $\frac{2}{3}$
b) F_1 do F_2: $\frac{3}{5}$, F_2 do F_1: $\frac{5}{3}$

4. a) $k=1{,}2$, $|CD|=4{,}5$, $|A'D'|=7{,}8$, $|B'C'|=7{,}2$ b) $k=2{,}5$, $|CD|=5$, $|A'B'|=5$, $|A'D'|=2{,}4$

5. a) 54 cm
b) wysokości równoległoboku $ABCD$: $3\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm, wysokości równoległoboku $A'B'C'D'$: $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm, $9\sqrt{3}$ cm

Z 1. a) $5:8$ b) $1:2$

2. $2:3$

3. a) 120 cm b) 20 cm

5. a) 40, 100 b) $3:2$

6. 3, 6, 7,5, 7,5

7. $h = 7{,}2$ cm, $h' = 7{,}5$ cm,
suma obwodów: 73,5 cm

8. $4\sqrt{2}$

9. 1,25

12. a) $\sqrt{2} : 1$ b) około 297 mm
c) A5: 21 cm × 14,8 cm,
A6: 10,5 cm × 14,8 cm

6.5. Trójkąty podobne

Ć 1. $x = 8$, $y = 3$, $k = 2$

2. a) są b) nie są

5. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z 1. T_1 i T_3, $k_1 = \frac{2}{3}$; T_2 i T_4, $k_2 = \frac{1}{2}$

2. a) $k = 0{,}75$, $Ob = 34\frac{2}{3}$ b) 10, 20, 25

3. a) $x = 2$, $y = 2{,}5$ b) $x = 15$, $y = 13$

4. a) 52,5 b) 18,75

5. a) 20, $2\frac{1}{2}$ b) 224, 28

6. a) $\frac{3}{2}$
b) $\triangle ABC$: $9\sqrt{5} + 15$, $\triangle DEC$: $6\sqrt{5} + 10$

7. a) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle CBD \sim \triangle ACD$ b) 1,8, 3,2

8. 20 cm^2

9. 10,8 m

13. b) 2 cm, $P_{\triangle ABO} = 16$ cm^2,
$P_{\triangle DCO} = 4$ cm^2

14. b) 25 cm^2, 15 cm^2, 15 cm^2, 9 cm^2

6.6. Pola wielokątów podobnych

Ć 1. a) $k = \frac{1}{3}$, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$ b) $k = 2$, $\frac{P_2}{P_1} = 4$

3. a) 0,9 b) 1,5

4. $k = \frac{1}{2}$, $Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5})$ cm,
$Ob_2 = (8 + \sqrt{5})$ cm

5. a) 1 : 800 b) tak c) 576 m^2

6. a) $k = \frac{1}{2}$, $Ob = 30$ cm
b) $k = \frac{1}{3}$, $Ob = 32$ cm
c) $k = \frac{2}{3}$, $Ob = 28$ cm

Z 1. a) $k = 0{,}75$, $P = 81$ cm^2
b) $k = \frac{5}{3}$, $P = 400$ cm^2

2. 200 cm^2

3. a) $(14 + 2\sqrt{29})$ cm
b) $12\sqrt{17}$ cm, $36\sqrt{17}$ cm

4. 100 cm

5. a) 20 dm^2, 320 dm^2
b) $(12 + 6\sqrt{2})$ cm, $(36 + 18\sqrt{2})$ cm

6. 1200 cm^2

7. 2

8. 30 cm × 45 cm

9. 22,5 cm^2, 10 cm^2

10. 625 m^2, 400 m^2

11. $(15 + 9\sqrt{5})$ cm

12. 6, 4

14. a) około 10,82 m b) 7 m^3

Fraktale

1. $\frac{27}{64}$

6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Ć 1. a) $3\frac{14}{17}$, $9\frac{3}{17}$ b) $\sqrt{3} - 1$, $3 - \sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
$4 - 2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 3$ c) 12 d) $\sqrt{2} - 1$

Z 1. a) 1,25, 3,75 b) 4,5, 7,5

2. $\triangle BCP$: $\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$,
$\triangle BAP$: $2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) 30°, 60°, 90° b) 20°, 60°, 100°
c) 15°, 67°30′, 97°30′

2. 50°, 60°, 70°

3. a), b), d) tak c) nie

4. a) 12,5 cm, 12,5 cm, 10 cm
b) $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm

5. $|PQ| = 4$ dm, $P = 2$ dm^2

6. 36

7. 3,2 cm, 4,8 cm; $1\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm;
2 cm, 4 cm

9. $160 - 40\sqrt{2} \approx 103$ [m], $80\sqrt{2} \approx 113$ [m]

Zestaw powtórzeniowy II

2. a) 37,5 b) 14,4

3. 100 cm, 160 cm

4. 10 dm^2, 40 dm^2, 360 dm^2

Zadania testowe

1. A 2. C 3. A 4. D 5. D 6. A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

2. $12\sqrt{34}$

3. 150°

4. 2

5. 96 cm

8. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

9. $6+\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 409 (0,4096)

2. 740 $(\sqrt{10}+3\sqrt{2})$

3. 736 (27,36)

7.1. Wykres funkcji $f(x)=ax^2$

Ć **2.** **a)**, **b)** nie należy **c)**, **d)** należy

3. **a)** 6 **b)** 2 **c)** 0,5 **d)** 0,75

4. **a)** rośnie w $(-\infty;0\rangle$, maleje w $\langle 0;\infty)$
b) oś symetrii: $x=0$, wierzchołek: $(0,0)$

5. $f_1(x)=-4x^2$, $f_2(x)=-2x^2$, $f_3(x)=-x^2$, $f_4(x)=-\frac{1}{4}x^2$, $f_5(x)=-\frac{1}{8}x^2$

Z **1.** **a)** $f(D)=\langle -8;0\rangle$ **b)** $f(D)=\langle 0;4\rangle$
c) $f(D)=\langle 0;12\rangle$ **d)** $f(D)=\langle -8;-2\rangle$

2. A: $y=x^2$, B: $y=\frac{1}{2}x^2$, C: $y=\frac{1}{4}x^2$, D: $y=\frac{1}{8}x^2$, E: $y=\frac{1}{16}x^2$

3. **a)** $y=x^2$ **b)** $y=\sqrt{2}x^2$ **c)** $y=-\frac{1}{3}x^2$
d) $y=-3x^2$

4. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 10

5. **a)** $a=4$ **b)** $a=\frac{1}{4}$ **c)** $a=64$ **d)** $a=2$

6. $a=\frac{3}{16}$

7. **a)** $P(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x>0$
b) $P(x)=\frac{2}{5}x^2$, $x>0$

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=ax^2$ o wektor

Ć **1.** **a)** $\langle -3;\infty)$ **b)** $\langle 1;\infty)$
c) $(-\infty;-4\rangle$ **d)** $(-\infty;2\rangle$

2. **a)** maleje w $(-\infty;-3\rangle$, rośnie w $\langle -3;\infty)$
b) maleje w $(-\infty;1\rangle$, rośnie w $\langle 1;\infty)$
c) rośnie w $(-\infty;-2\rangle$, maleje w $\langle -2;\infty)$
d) rośnie w $(-\infty;2\rangle$, maleje w $\langle 2;\infty)$

4. **a)** $[-6,-3]$ **b)** $[1,0]$

5. **a)** maleje w $(-\infty;3\rangle$, rośnie w $\langle 3;\infty)$, $f(D)=\langle -4;\infty)$, $W(3,-4)$
b) maleje w $(-\infty;-2\rangle$, rośnie w $\langle -2;\infty)$, $f(D)=\langle 2;\infty)$, $W(-2,2)$
c) rośnie w $(-\infty;-4\rangle$, maleje w $\langle -4;\infty)$, $f(D)=(-\infty;-1\rangle$, $W(-4,-1)$
d) rośnie w $(-\infty;1\rangle$, maleje w $\langle 1;\infty)$, $f(D)=(-\infty;3\rangle$, $W(1,3)$

Z **1.** **a)** $y=(x-1)^2+2$, maleje w $(-\infty;1\rangle$, rośnie w $\langle 1;\infty)$
b) $y=(x-1)^2-2$, maleje w $(-\infty;1\rangle$, rośnie w $\langle 1;\infty)$
c) $y=(x+3)^2-2$, maleje w $(-\infty;-3\rangle$, rośnie w $\langle -3;\infty)$
d) $y=(x+2)^2-4$, maleje w $(-\infty;-2\rangle$, rośnie w $\langle -2;\infty)$

2. **a)** $W(-2,4)$, $x=-2$
b) $W(-3,-1)$, $x=-3$
c) $W(2,2)$, $x=2$ **d)** $W(3,-1)$, $x=3$

3. **a)** $f(D)=\langle -4;\infty)$ **b)** $f(D)=\langle 1;\infty)$
c) $f(D)=(-\infty;2\rangle$ **d)** $f(D)=(-\infty;4\rangle$

4. kolejno uzupełniamy: $g(x)=5(x+1)^2+2$, $\vec{u}=[-2,3]$, $f(x)=\frac{5}{2}x^2-10$, $g(x)=2(x-9)^2-3$

5. **a)** $\overrightarrow{FG}=[4,3]$ **b)** $\overrightarrow{FG}=[-2,-2]$
c) $\overrightarrow{FG}=[-3,-5]$ **d)** $\overrightarrow{FG}=[4,-3]$

6. **a)** $f(x)=x^2+1$ **b)** $f(x)=2x^2$
c) $f(x)=-x^2+3$ **d)** $f(x)=-4x^2+6$

7. **a)** $p=-2$ **b)** $p=2$

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej

Ć **1.** **a)** $y=-2x^2+12x-12$
b) $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$
c) $y=3x^2-30x+84$

2. **a)** $y=(x-4)^2-10$, $W(4,-10)$
b) $y=(x+2)^2+4$, $W(-2,4)$
c) $y=(x-3)^2-11$, $W(3,-11)$
d) $y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$, $W(\frac{3}{2},-\frac{5}{4})$
e) $y=(x+\frac{1}{2})^2$, $W(-\frac{1}{2},0)$
f) $y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$, $W(\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$

3. **a)** 5 **b)** 8 **c)** 0 **d)** −12 **e)** 12 **f)** 4

4. a) $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ b) $W(1,3)$ c) $W(1, \frac{1}{2})$

5. a) $W(1,1)$ b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$
c) $W(2,9)$ d) $W(-1,-13)$

Z 1. a) $f(x) = x^2 - x - 2\frac{3}{4}$, $\Delta = 12$
b) $f(x) = -x^2 + 8x - 11$, $\Delta = 20$
c) $f(x) = 2x^2 - 12x + 4$, $\Delta = 112$
d) $f(x) = -3x^2 - 12x - 4$, $\Delta = 96$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $\Delta = 4$
f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 3$, $\Delta = 24$

2. a) $f(x) = (x+1)^2 + 2$, $W(-1,2)$
b) $f(x) = (x-2)^2 - 6$, $W(2,-6)$
c) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$, $W(-1,2)$
d) $f(x) = -4(x-1)^2 + 5$, $W(1,5)$
e) $f(x) = 2(x+2)^2 - 15$, $W(-2,-15)$
f) $f(x) = -2(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{13}{2}$, $W(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$
g) $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
h) $f(x) = -2(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
i) $f(x) = 3x^2 - 8$, $W(0,-8)$

3. a) $W(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2})$ b) $W(1, \frac{7}{2})$ c) $W(-1,3)$

4. a) $f(x) = (x+1)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x+3)^2 - 3$
c) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

5. a) $b = -4$ b) $b = 8$ c) $b = 4$ d) $b = -6$

6. a) $a = -1$, $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
b) $a = -3$, $f(x) = -3(x-1)^2 + 5$
c) $a = \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2 + 1$
d) $a = -2$, $f(x) = -2(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{2}$

7. a) $b = -4$, $c = 8$ b) $b = 2$, $c = -2$
c) $b = -1$, $c = -\frac{3}{4}$ d) $b = -20$, $c = 100$

8. a) $a = 3$, $c = 5$ b) $a = -\frac{1}{2}$, $c = -21$
c) $a = -\frac{3}{2}$, $c = -2$ d) $a = 2$, $c = \frac{7}{2}$

9. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$
b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$
c) $a = -\frac{2}{9}$, $b = 0$, $c = 3$
d) $a = -3$, $b = -6$, $c = 0$
e) $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$
f) $a = -2$, $b = 8$, $c = -4$

10. a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

11. a) $y = -x^2 - 2x + 4$
b) $y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{19}{5}$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}$
d) $y = \frac{9}{40}x^2 - \frac{1}{20}x - \frac{14}{5}$

12. a) $[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}]$ b) $[\frac{1}{2}, \frac{25}{4}]$

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

1. a) 4, 12 b) $4\frac{1}{2}$, 13 c) -17, -34

2. a) 5, $2\frac{3}{4}$ b) -5, $-\frac{1}{2}$ c) 3, $-1\frac{1}{8}$

3. a) $g(-2) = -17$, $f(-2) = -15$, $h(-2) = -7$ b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$, $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$

4. a) $c = 7$ b) $c = 20$ c) $c = -5\sqrt{2}$

5. A, B, E

6. a) $x = -1$, $W(-1, -\frac{3}{2})$
b) $x = -1$, $W(-1, 4)$

7. a) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$
b) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$ c) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$

7.4. Równania kwadratowe (1)

Ć 1. Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

2. a) $\{-2, 0\}$ b) $\{0, \frac{7}{3}\}$
c) $\{0, \frac{5}{2}\}$ d) $\{0, 16\}$

3. a) $x = -\frac{5}{4}$, $x = \frac{5}{4}$
b) $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$
c) $x = -\frac{11}{2}$, $x = \frac{11}{2}$
d) $x = -21$, $x = 21$

4. a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{3}{2}$ e) $x = 2$ f) $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. a) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ d) sprzeczne

Z 1. a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = -\frac{1}{27}$, $x = 0$
c) $x = 0$, $x = \frac{1}{6}$ d) $x = -\frac{1}{9}$, $x = 0$
e) $x = 0$, $x = 2$ f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$

2. a) $x = -\frac{9}{10}$, $x = \frac{9}{10}$ b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$ d) $x = 8$ e) $x = 12$
f) $x = -\frac{1}{3}$ g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$ i) $x = 6$

3. a) $(0,0)$, $(4,0)$
b) $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,-12)$
c) $(0,12)$, nie przecina osi OX
d) $(0,0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0,4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0,-4)$

4. a) 2 b) -4 c) 3

5. a) $\{-6, 0\}$ b) $\{3, 4\}$ c) $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\}$
d) $\{-6, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

6. a) $x=-2$, $x=2$
b) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-1$, $x=1$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$
d) $x=-1$, $x=0$, $x=1$

7.5. Równania kwadratowe (2)

Ć 1. a) $x=\frac{2}{3}$ b) $x=-\frac{4}{5}$ c) $x=\frac{7}{2}$

3. a) $x=-1$, $x=3$ b) $x=-4$, $x=-2$
c) $x=-3-\sqrt{2}$, $x=-3+\sqrt{2}$

4. a) $\Delta=4>0$, 2 rozwiązania
b) $\Delta=-8<0$, 0 rozwiązań
c) $\Delta=35>0$, 2 rozwiązania
d) $\Delta=49>0$, 2 rozwiązania
e) $\Delta=0$, 1 rozwiązanie
f) $\Delta=-12<0$, 0 rozwiązań
g) $\Delta=-2<0$, 0 rozwiązań
h) $\Delta=\frac{25}{4}-4\sqrt{2}>0$, 2 rozwiązania
i) $\Delta=9>0$, 2 rozwiązania

5. a) $x_1=-3$, $x_2=-\frac{1}{2}$ b) $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{4}$
c) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$ d) $x_0=\frac{1}{14}$
e) $x_1=3-\sqrt{10}$, $x_2=3+\sqrt{10}$
f) $x_1=2-\sqrt{6}$, $x_2=2+\sqrt{6}$
g) sprzeczne h) $x_1=\frac{1-\sqrt{7}}{6}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{7}}{6}$
i) sprzeczne

Z 1. a) $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=7$ b) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=3$
c) $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$ d) sprzeczne
e) $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=1$ f) $x_0=-\frac{3}{2}$
g) sprzeczne h) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$
i) $x_0=\frac{2}{3}$

2. a) $x_1=-3$, $x_2=-\frac{1}{2}$
b) $x_1=-\frac{5}{3}$, $x_2=2$ c) $x_0=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
d) $x_1=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$
e) $x_1=\frac{-1-\sqrt{11}}{5}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
f), g) sprzeczne
h) $x_1=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$
i) $x_1=\frac{7-\sqrt{37}}{6}$, $x_2=\frac{7+\sqrt{37}}{6}$

3. a) $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(\frac{1}{3},0)$
b) $(0,3)$, $(-\frac{\sqrt{3}+3}{2},0)$, $(\frac{\sqrt{3}-3}{2},0)$
c) $(0,3)$, $(1,0)$, $(-\frac{3}{4},0)$
d) $(0,12)$, $(-6,0)$ e) $(0,5)$
f) $(0,1)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-2\sqrt{2},0)$

4. a) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$
b) $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{5}$
c) $x_1=5-\sqrt{13}$, $x_2=5+\sqrt{13}$
d) $x_1=6$, $x_2=12$
e) $x_1=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$, $x_2=\frac{7+\sqrt{37}}{2}$
f) sprzeczne

5. a) 2 b) 0

6. a) $f(x)=0$ dla $x=2-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x=2+\frac{\sqrt{6}}{2}$;
$g(x)=0$ dla $x=\frac{9}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x=\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}$;
$h(x)=0$ dla $x=2$, $x=2+\sqrt{6}$
b) $f(x)=0$ dla $x=4-2\sqrt{7}$, $x=4+2\sqrt{7}$;
$g(x)=0$ dla $x=\frac{1}{2}-2\sqrt{7}$, $x=\frac{1}{2}+2\sqrt{7}$;
$h(x)=0$ dla $x=4-4\sqrt{7}$, $x=4$

7. a) $x=1-\sqrt{2}$, $x=1$, $x=1+\sqrt{2}$
b) $x=-2-\sqrt{7}$, $x=-2+\sqrt{7}$, $x=-1$,
$x=-3$

8. a) $x=-2$, $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$
b) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$
c) $x=-2$, $x=1$
d) $x=-1-2\sqrt{2}$, $x=-1+2\sqrt{2}$, $x=-1$,
$x=1$

7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Ć 1. a) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x+9$
b) $y=4x^2-\frac{10}{3}x+\frac{2}{3}$
c) $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x$

2. a) $x_1=3$, $x_2=5$ b) $x_1=-6$, $x_2=2$
c) $x_1=-8$, $x_2=-4$ d) $x_1=0$, $x_2=9$
e) $x_0=2$ f) $x_0=-7$

3. a) $y=(x-3)(x-5)$
b) $y=(x+7)(x-4)$
c) $y=3(x-\frac{1}{3})(x-2)$
d) $y=12(x+\frac{2}{3})(x+\frac{1}{4})$
e) $y=-2(x-3)(x+4)$
f) $y=-4(x+\frac{1}{4})(x-1)$
g) nie ma postaci iloczynowej
h) $y=(x+\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{3}-1)$
i) $y=2\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Z 1. a) $x_1=3$, $x_2=13$ b) $x_1=2$, $x_2=-5$
c) $x_1=-15$, $x_2=-9$
d) $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{3}$
e) $x_1=-1$, $x_2=\sqrt{2}-1$
f) $x_1=\sqrt{3}-2$, $x_2=3-\sqrt{2}$

2. **a)** $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
b) $y = -(x - 3)(x + 2)$
c) $y = 4(x - 1)(x + \frac{3}{4})$
d) $y = 3\left(x - \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$
e) nie ma postaci iloczynowej
f) $y = (x - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$
g) $y = -2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
h) $y = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2})$
i) nie ma postaci iloczynowej

3. **a)** $b = -8$, $c = 15$ **b)** $b = 5$, $c = -36$
c) $b = -7\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$ **d)** $b = \frac{11}{35}$, $c = -\frac{6}{35}$
e) $b = 5$, $c = 0$ **f)** $b = 0$, $c = -3$
g) $b = -(1 + 2\sqrt{2})$, $c = 2 + \sqrt{2}$
h) $b = -2$, $c = -6$

4. **a)** $x = 3$, $W(3, -9)$
b) $x = -2$, $W(-2, -8)$
c) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -4)$

5. **a)** $(0,0)$, $(-6,0)$, $W(-3,9)$
b) $(1,0)$, $(5,0)$, $(0,5)$, $W(3,-4)$
c) $(-3,0)$, $(1,0)$, $(0, \frac{3}{2})$, $W(-1,2)$

6. **a)** $y = (x+1)(x-3)$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x(x+4)$
c) $y = -\frac{2}{5}(x+8)(x-2)$ **d)** $y = \frac{2}{3}x(x-6)$

7. **a)** $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
c) $f(x) = -x(x+4) = -x^2 - 4x$

8. **a)** $x = 1$, $f(x) = (x-1)(x-5)$,
$f(x) = (x-3)^2 - 4$
b) $x = 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$
c) $x = 5$, $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5)$,
$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$

9. **a)** $y = -4(x+3)(x+1)$
b) $y = -\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$

10. $f_1(x) = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{4}{3}x(x+3)$,
$g_1(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
$h_1(x) = -\frac{2}{9}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{2}{9}x(x+3)$

11. **a)** $b = -8$, $c = 12$ **b)** $b = -6\sqrt{2}$, $c = 16$
c) $b = -8$, $c = 8$

12. **a)** $[3, -2]$ **b)** $[-2, -8]$ **c)** $[3, -1]$

Rzut ukośny

1. $y = -\frac{1}{20}x^2 + x + \frac{3}{2}$

2. tak

7.7. Nierówności kwadratowe

Ć **1.** **a)** $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle 1; \infty)$ **b)** $x \in \langle -1; \frac{1}{2}\rangle$
c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

2. **a)** $x \in \mathbf{R}$ **b)** $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ **c)** sprzeczna

3. **a)** $x \in \mathbf{R}$ **b)** sprzeczna **c)** $x \in \mathbf{R}$

Z **1.** **a)** $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$ **b)** $x \in \langle -4; 4\rangle$
c) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}\rangle \cup \langle \frac{3}{2}; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 3; \infty)$
e) $x \in \langle -1; 4\rangle$ **f)** $x \in (-1; 5)$
g) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 5\rangle$ **h)** $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
i) sprzeczna **j)** $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$
k) $x \in \langle -2; 8\rangle$ **l)** sprzeczna

2. **a)** 13 **b)** nieskończenie wiele **c)** 5 **d)** 2

3. **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ **b)** $x \in \mathbf{R}$ **c)** $x \in \mathbf{R}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$ **e)** sprzeczna **f)** $x = \frac{3}{2}$

4. **a)** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$
c) $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

5. **a)** $x \in (-2; 3)$
b) $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}\rangle \cup \langle -6 + \sqrt{41}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}\rangle \cup \langle 9 + 5\sqrt{3}; \infty)$
d) $x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty\right)$
e) $x \in \mathbf{R}$ **f)** $x \in (-1; -\frac{1}{5})$

7. **a)** $D = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 4; \infty)$
b) $D = \langle -\frac{1}{2}; 3\rangle$
c) $D = \langle -2; -1\rangle \cup \langle 1; 2\rangle$
d) $D = \left\langle -\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right\rangle$

8. $P(x) = (x-1)(2x+3)$, $D = (1; \infty)$
a) $x \in (1; 2)$
b) $x \in (3; \infty)$

9. **a)** $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty)$
b) $x \in (-1; 1)$
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

7.8. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** 44,1; 29,4; 4,9; $D_h = \langle 0; \sqrt{10}\rangle$, miejsce zerowe: $\sqrt{10}$ **b)** około 26 m

2. **a)** $h \approx 9{,}3$ m, około 16,6 m **b)** $t = 2$

3. **a)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = \frac{3}{2}x^2$

4. **a)** $y = \frac{1}{4}$, $F(0, -\frac{1}{4})$ **b)** $y = -\frac{1}{8}$, $F(0, \frac{1}{8})$
c) $y = \frac{1}{8}$, $F(0, -\frac{1}{8})$ **d)** $y = -2$, $F(0, 2)$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $f(D) = \langle -\sqrt{2}; \infty)$, maleje w $(-\infty; 0\rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
b) $f(D) = (-\infty; 9\rangle$, rośnie w $(-\infty; 3\rangle$, maleje w $\langle 3; \infty)$
c) $f(D) = \langle -9; \infty)$, maleje w $(-\infty; 4\rangle$, rośnie w $\langle 4; \infty)$
d) $f(D) = (-\infty; 9\rangle$, rośnie w $(-\infty; 2\rangle$, maleje w $\langle 2; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 3\rangle$, rośnie w $(-\infty; 3\rangle$, maleje w $\langle 3; \infty)$
f) $f(D) = \langle -\frac{3}{32}; \infty)$, maleje w $(-\infty; -\frac{3}{4}\rangle$, rośnie w $\langle -\frac{3}{4}; \infty)$

2. a) $(0,0)$, $(4,0)$, $W(2,-4)$
b) $(0,0)$, $(2,0)$, $W(1,1)$
c) $(0,8)$, $(-2,0)$, $(4,0)$, $W(1,9)$
d) $(0,8)$, $(-2,0)$, $(-4,0)$, $W(-3,-1)$
e) $(0,2)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(2,0)$, $W(\frac{5}{4},-\frac{9}{8})$
f) $(0,-6)$, $(3,0)$, $(1,0)$, $W(2,2)$

3. a) $x_1 = -7$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$
c) $x_0 = \frac{8}{3}$ **d)** sprzeczne
e) $x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
f) $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$

4. a) $x_0 = -\frac{10}{7}$ **b)** $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 4$
c) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
d) $x_0 = -2$ **e)** $x_0 = 10$ **f)** sprzeczne
g) $x_1 = -2-\sqrt{14}$, $x_2 = -2+\sqrt{14}$
h) sprzeczne

5. a) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$
b) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; \infty)$
c) $x \in (10 - 6\sqrt{2}; 10 + 6\sqrt{2})$ **d)** $x \in \mathbf{R}$
e) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$
f) $x \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$
g) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$
h) $x \in \langle 12 - 3\sqrt{15}; 12 + 3\sqrt{15}\rangle$

6. a) $b = 0$, $c = 1$, $f(x) = x^2 + 1$
b) $b = -2$, $c = 4$, $f(x) = (x-1)^2 + 3$
c) $b = 4$, $c = 6$, $f(x) = (x+2)^2 + 2$
d) $b = -8$, $c = 15$, $f(x) = (x-4)^2 - 1$

7. a) $b = -4$, $b = 4$ **b)** $b = -2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$
c) nie ma takiego b **d)** $b = -2$, $b = 2$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{21}{5}$
c) $f(x) = 5x^2 - 30x + 45$

2. a) $y = -(x-2)^2 + 4$
b) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 4$
c) $y = \frac{3}{8}(x-2)^2 + 4$

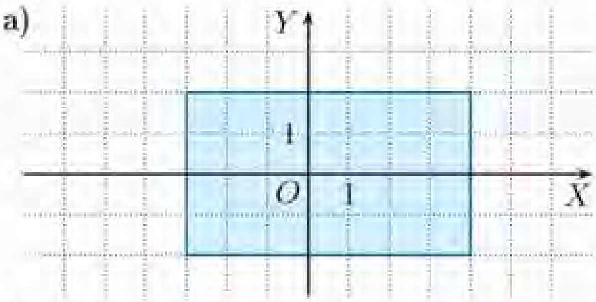
3. a) $x = 7$ **b)** $x = -9$ **c)** $x = -2$
d) $x = -\frac{1}{2}$

4. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ **b)** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
c) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{3}$
d) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{5}$
e) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
f) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$

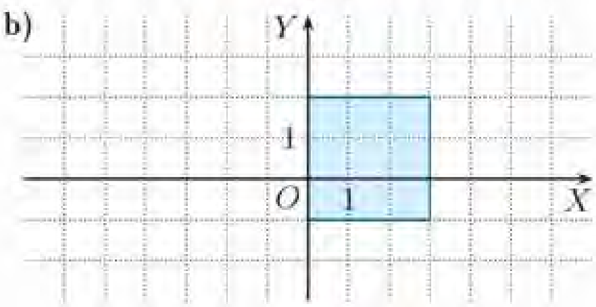
5. a) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$
b) $x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{5+\sqrt{97}}{6}\right\rangle$

6. a) $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$, $y = -2(x-1)(x+1)$
b) $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, $y = -(x-2)(x+2)$
c) $a = 4$, $b = -24$, $c = 36$, $y = 4(x-3)^2$
d) $a = -2$, $b = 8$, $c = -4$, $y = -2(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$

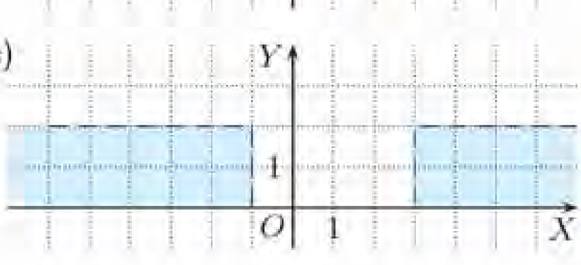
7. a)



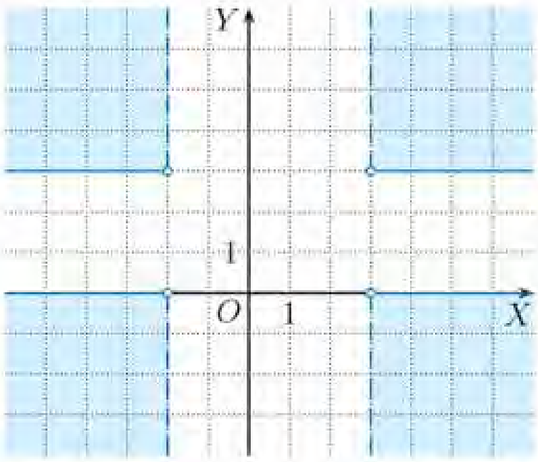
b)



c)



7. d)



Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** D **4.** C **5.** A **6.** A **7.** B
8. C **9.** D

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = -3$, $x = \frac{3}{2}$

2. $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle\frac{1}{2}; \infty)$

3. $x \in \langle -1; \frac{2}{3}\rangle$

4. maleje w $(-\infty; 3\rangle$, rośnie w $\langle 3; \infty)$

5. -32

6. $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$

7. wartość największa: 0,
wartość najmniejsza: -8

8. -4, -3

9. $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$

10. $P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$, $D = (0; 10\frac{1}{2})$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 278 $(-\frac{7+\sqrt{17}}{4})$

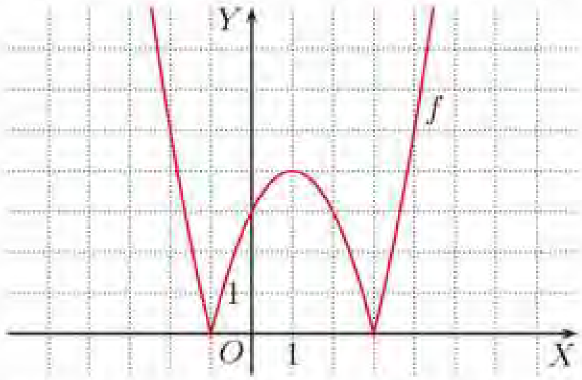
2. 140

3. 353 $(7 - 2\sqrt{3})$

4. 125 $(p = 11{,}25)$

5. $b = -\frac{11}{2}$, $c = \frac{15}{2}$

6. $x \in (-\infty; 1-\sqrt{7}\rangle \cup \langle 0; 2\rangle \cup \langle 1+\sqrt{7}; \infty)$



7. $x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1; -1+\sqrt{2}) \cup$
$\cup (3; \infty)$

8. $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty)$

Indeks

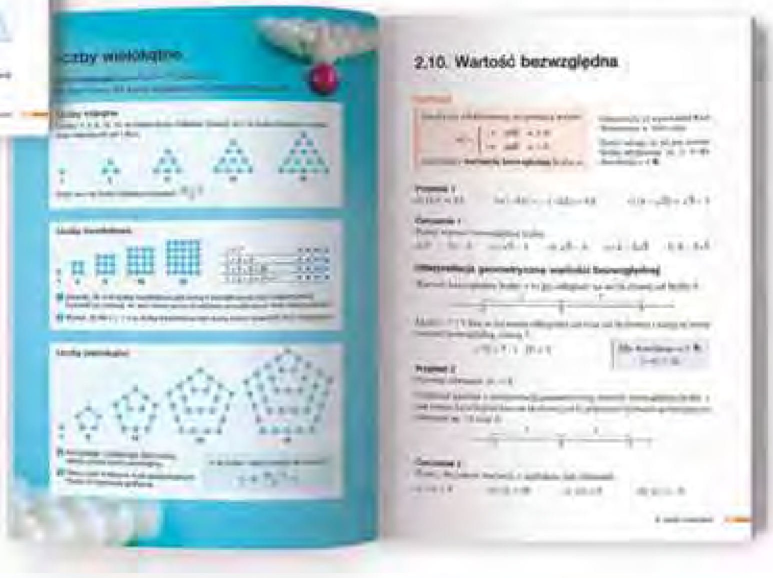
nowa era Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 1* do zakresu podstawowego i rozszerzonego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Umożliwia przeprowadzenie ciekawych lekcji w szkole, jednocześnie pozwalając na efektywną samodzielną naukę w domu.

Czytelny układ

Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, rozwiązane przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu, który ułatwia pracę na lekcjach i w domu.



Pomocne sekcje

Warto powtórzyć pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnych poszukiwań.

WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika *MATeMAtyka 1* kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania* pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3486-1