DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 3

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

nowa era

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Grzegorz Janocha
Jolanta Wesołowska

MATeMAtyka 3

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

nowa era Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

ISBN 978-83-267-4203-3

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska
Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda
Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska, Barbara Sasim-Leciejewska
Redakcja językowa: Paulina Szulim
Korekta językowa: Dorota Rzeszewska
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn
Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Lech Chańko
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar
Ilustracje na infografikach: Krzysztof Mrawiński, Aleksandra Szpunar
Mapa: Zespół Kartograficzny Nowa Era
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:
MATeMAtyka kl. 2 ZP autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMAtyka kl. 3 ZP i MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Fotografia na okładce: Shutterstock/designleo.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 79 (zamek Czocha), Nerthuz s. 42, Witold Skrypczak s. 79 (zamek w Czersku); Getty Images: E+/4x6 s. 36 (gitarzysta), iStock Unreleased/ewg3D s. 79 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus - Andrey Mitrofanov s. 111, Antonio_Diaz s. 36 (dziewczyna), Moment/Troy Harrison s. 171; Shutterstock: Alexey Boldin s. 187 (smartwatch), Dmitry Demkin s. 127 (słoneczniki), Ian 2010 s. 127 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 79 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 187 (bieg), Pecold s. 79 (zamek w Gniewie); Thinkstock/Getty Images: Fuse s. 175; Lech Chańko s. 9, 45, 53.

Spis treści

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skalę logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 36).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz:

a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$, b) 3^n dla $n = 0, 1, \ldots, 6$.

2. Oblicz.

a) $(-3)^4$ b) $(-2)^5$ c) $(-6)^3$ d) $(-5)^0$

Dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ i dla liczby $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

3. Oblicz.

a) 4^{-2} c) 6^{-3} e) $(-4)^{-1}$ g) $(-2)^{-4}$

b) 5^{-4} d) 9^{-3} f) $(-5)^{-2}$ h) $(-3)^{-5}$

4. Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ c) $\left(1\frac{1}{2}\right)^6$ e) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$ g) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ d) $\left(\frac{13}{7}\right)^0$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ h) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-4}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$ c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$

b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$ d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

6. Przedstaw liczbę w postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 2^6$ f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$

b) $4^2 \cdot 2^4$ g) $2^{-4} : 2^{-6}$

c) $2^7 : 2^3$ h) $(2^2)^3 \cdot 2$

d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$ i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$

e) $2^{-3} \cdot 2^5$ j) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$

Dla $m, n \in \mathbf{Z}$ i $a, b \neq 0$:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

7. Przedstaw liczbę w postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$ c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$ e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$

b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$ d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$ f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0{,}01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : \left(64^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)$

b) $125^3 \cdot 0{,}2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \cdot 1{,}5$

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$

b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = 2^4 = 16$

b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3}-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$

c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$ c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$ e) $15^{0,5} \cdot 0{,}36^{0,25}$ g) $\left(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}\right) : 6^{\frac{1}{6}}$

b) $\left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(25\sqrt{5}\right) : 5^{\frac{3}{2}}$ f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2{,}5^{-\frac{1}{3}}$ h) $7 : \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7}\right)$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[4]{125}$

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$

3. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$ g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$

b) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$ f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$

4. Oblicz.

a) $9^{\frac{5}{2}}$ d) $8^{-\frac{2}{3}}$ g) $10\,000^{1,25}$ j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$

b) $125^{\frac{4}{3}}$ e) $27^{-\frac{4}{3}}$ h) $81^{-0,375}$ k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

c) $16^{\frac{3}{4}}$ f) $25^{-\frac{1}{2}}$ i) $144^{-0,5}$ l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$

5. Oblicz.

a) $0{,}09^{\frac{3}{2}}$ c) $0{,}008^{\frac{2}{3}}$ e) $0{,}0625^{-\frac{3}{4}}$ g) $0{,}008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$

b) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$ d) $0{,}0081^{-\frac{3}{4}}$ f) $0{,}00032^{\frac{4}{5}}$ h) $0{,}0256^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

6. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie $a \in \mathbf{N}$.

a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0{,}01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : \left(64^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)$

b) $125^3 \cdot 0{,}2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \cdot 1{,}5^6$

Powtórzenie

7. Oblicz.

a) $\sqrt{16^5}$ b) $\sqrt[3]{27^2}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $\left(\sqrt[6]{125}\right)^2$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie $m \in \mathbf{Q}$.

a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$

b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrafimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x, gdy x jest liczbą niewymierną.

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4{,}655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4{,}706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4{,}727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4{,}728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4{,}728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się" do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się" do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9{,}518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9{,}738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9{,}738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9{,}738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9{,}738517742$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^{π}.

$2^{3,14}$	$\approx 8{,}815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8{,}824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8{,}824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^{π}	$\approx 8{,}824977827$

$\pi = 3{,}14159265\ldots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^{π}.

Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne liczby: a) 3^{π}, b) 5^{π}, c) π^{π}.

Podane na str. 11 wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_{+}$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2^2 = 4$

b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$

c) $6^{\pi} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi} = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^{\pi} = 9^{\pi}$

d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$

c) $\left(5^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$

d) $\left(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$

g) $\dfrac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$

h) $\dfrac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $\left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$

b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$ f) $\left(\sqrt{3}\right)^{\pi} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\pi}$

2. Oblicz.

a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$

b) $5^{\pi+3} : 5^{\pi}$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^{\pi} : 12^{\pi}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}}\sqrt{7}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(6^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$.

a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$

b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $q = 0{,}5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}32199709$
$3^{\sqrt{3}} \approx 6{,}70499185$
$6^{\sqrt{3}} \approx 22{,}2739634$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, \quad y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$

b) $x = 1{,}5^{4-2\sqrt{3}}, \quad y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}, \quad z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$

c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}, \quad y = 25^{2-3\sqrt{5}}, \quad z = 0{,}0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

Powtórzenie

6. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$.

a) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5$ c) $7^{\sqrt{5}+5} : 7^5$ e) $9^{\sqrt{5}+1} : 81^{\frac{1}{2}}$

b) $4^{\sqrt{2}+3} \cdot 4^{-3}$ d) $9^{\sqrt{7}-2} : 9^{-2}$ f) $16^{\sqrt{3}-2} \cdot 4^4$

7. Oblicz.

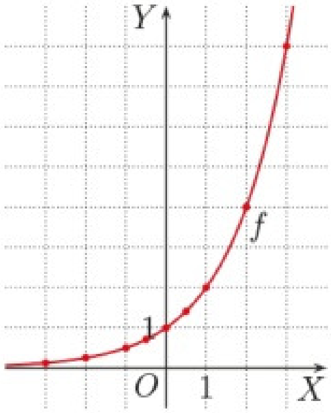
a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ c) $\left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$ e) $3^{\sqrt{27}} : 3^{3\sqrt{3}}$

b) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}$ d) $5^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^{2-\sqrt{5}}$ f) $7^{4+2\sqrt{2}} : 7^{2+\sqrt{8}}$

1.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

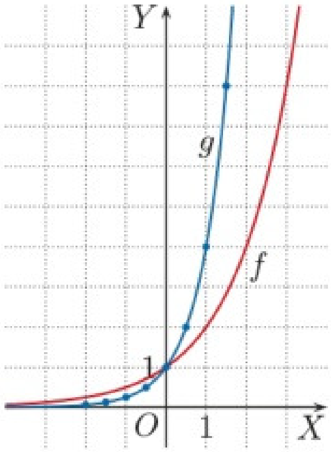


x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.



x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

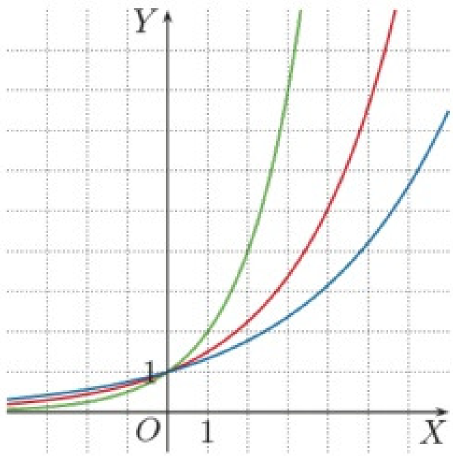
Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbf{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.



a) Dobierz wzór do każdego wykresu.

b) Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g. Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.

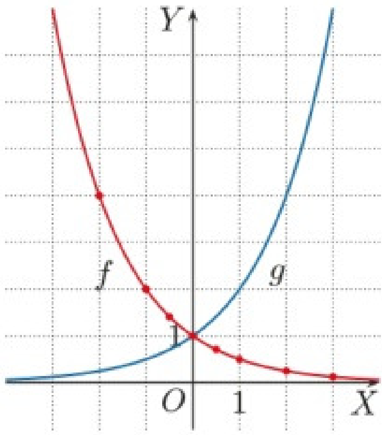
c) Które spośród punktów:

$$A\left(4, 3\tfrac{15}{81}\right),\ B\left(-4, \tfrac{81}{256}\right),\ C\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

należą do wykresu funkcji h?

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.



x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY, ponieważ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = g(-x)$.

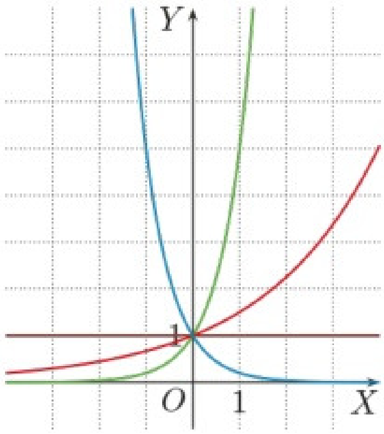
Ćwiczenie 3

a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

b) Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

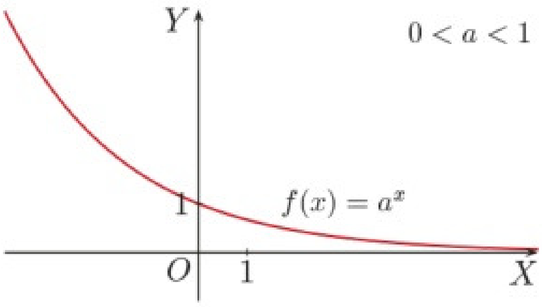
Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0{,}2^x$, $h(x) = 1{,}5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

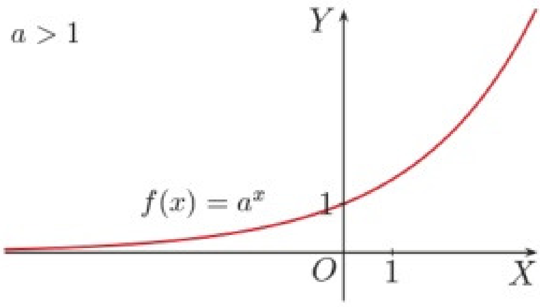


Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a jej zbiorem wartości – przedział $(0;\infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0,1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX, która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, zatem $10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$.

Przykład 5

Zapisz liczby $0{,}9^{\sqrt{3}}$, $0{,}9^{1,7}$, $0{,}9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0{,}9^x$ jest malejąca i $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, zatem:

$$0{,}9^{1,8} < 0{,}9^{\sqrt{3}} < 0{,}9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $5^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{3}}, 5^{0,3}, 5^{0,33}$

b) $7^{3,1}, 7^{3,2}, 7^{\pi}, 7^{\sqrt{5}}$

c) $0{,}6^{\frac{1}{2}}, 0{,}6^{\frac{1}{3}}, 0{,}6^{\frac{3}{7}}, 0{,}6^{\frac{3}{8}}, 0{,}6^{0,35}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 4^x$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f?

a) $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q\left(-3, \frac{1}{16}\right)$ d) $Q\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f?

a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q\left(-8, \frac{1}{16}\right)$

4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M. Naszkicuj ten wykres.

a) $M\left(2, \frac{1}{9}\right)$ b) $M(-3, 8)$ c) $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ d) $M\left(3, 3\frac{3}{8}\right)$

Powtórzenie

5. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 3^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $f(x) = 4^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{7}{5}}, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5, \left(\frac{3}{4}\right)^6, \left(\frac{3}{4}\right)^{2\sqrt{6}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{26}}$

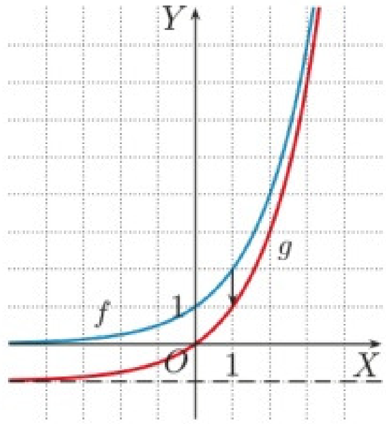
c) $\sqrt[3]{\pi}, \pi^{\frac{1}{2}}, \pi^{\frac{3}{7}}, \pi^{\frac{1}{\pi}}$

d) $9^0, 9^{-2}, 9^{-\sqrt{3}}, 9^{-\sqrt{\pi}}$

1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $g(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 1 jednostkę w dół (rysunek obok). Asymptotą poziomą wykresu funkcji g jest prosta $y = -1$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $g(x) = 3^x - 2$ b) $g(x) = 2^x + 1$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

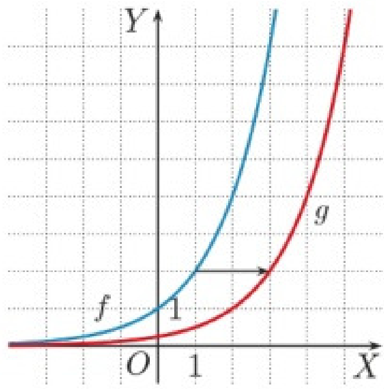
Ćwiczenie 2

Dla jakiego a zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + a$ jest przedział:

a) $(3; \infty)$, b) $(-6; \infty)$, c) $(-\frac{1}{4}; \infty)$?

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj odciętą punktu należącego do wykresu funkcji g, jeśli rzędna tego punktu jest równa 1.

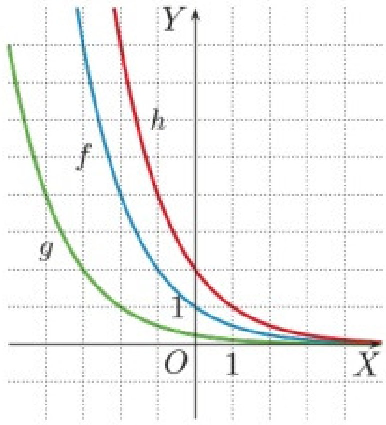
a) $g(x) = 3^{x-1}$ b) $g(x) = 2^{x+2}$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji f, g i h. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Funkcja g dana jest wzorem $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$. Podaj wartość współczynnika a, jeśli do wykresu funkcji g należy punkt $(-3, 2)$.

b) Funkcja h dana jest wzorem $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b}$. Podaj wartość współczynnika b, jeśli do wykresu funkcji h należy punkt $(0, 2)$.

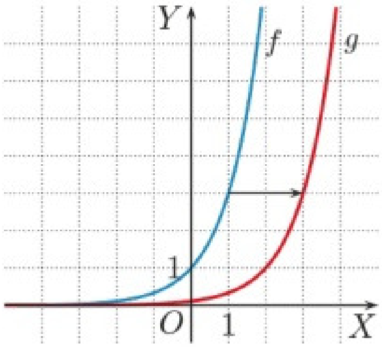


Przykład 3

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{3^x}{9}$.

$$g(x) = \frac{3^x}{9} = \frac{3^x}{3^2} = 3^{x-2}$$

Wykres funkcji f należy przesunąć o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).



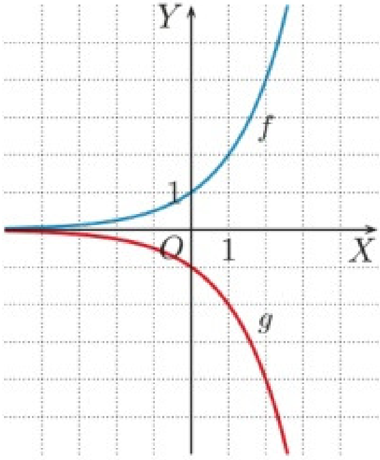
Ćwiczenie 5

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{3^x}{3}$ b) $g(x) = \frac{3^x}{27}$ c) $g(x) = 3 \cdot 3^x$ d) $g(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$

Przykład 4

Wykres funkcji $g(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).



Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

a) $g(x) = -3^x$

b) $g(x) = -4^x$

c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ćwiczenie 7

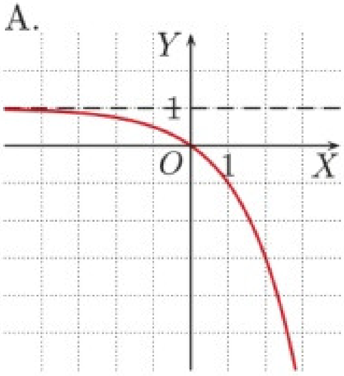
Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -2^{x+1}, \ g(x) = -2^{x-1}, \ h(x) = -2^x + 1$$

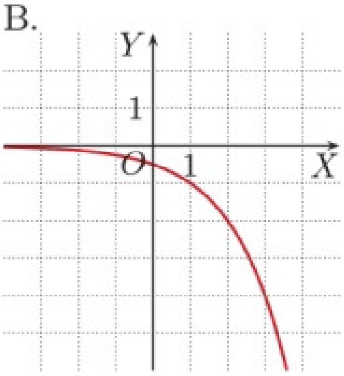
a) Dopasuj wzór funkcji do każdego wykresu.

b) Odczytaj z wykresu każdej funkcji, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości większe od -1.

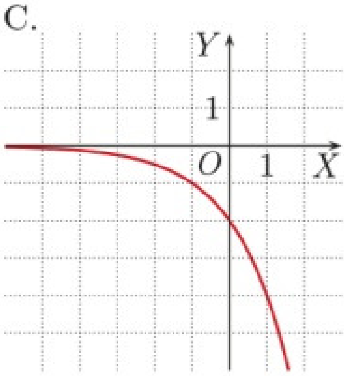
A.



B.



C.



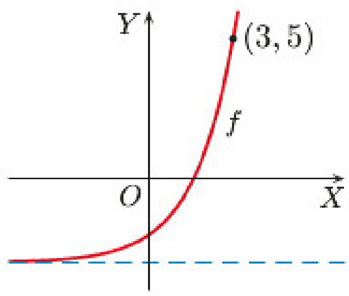
Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x + 2$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ e) $f(x) = 4^{-x} - 4$

b) $f(x) = 3^x - 1$ d) $f(x) = 3^{-x} + 1$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a.



3. Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P. Podaj wartość współczynnika a.

a) $P(0, -3)$ b) $P(2, 7)$ c) $P(4, 0)$

4. Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{2^x}{16}$ b) $g(x) = \frac{2^x}{1024}$ c) $g(x) = 8 \cdot 2^x$ d) $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

5. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 1$.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ c) $f(x) = 4 \cdot 2^x$ e) $f(x) = \frac{27}{3^x}$

b) $f(x) = 2^{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2^x}{8}$ f) $f(x) = \frac{0{,}04}{5^x}$

6. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -1$.

a) $f(x) = -2^{x-2}$ b) $f(x) = -3^{x+1}$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

Powtórzenie

7. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej miejsce zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = 2^x - 4$ c) $f(x) = 2^{x-3}$ e) $f(x) = -2^x + 2$

b) $f(x) = 3^x + 1$ d) $f(x) = 3^{x+2}$ f) $f(x) = -3^x + 1$

8. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj równanie jego asymptoty poziomej.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

9. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g.

a) $f(x) = 2^x - 3$ b) $f(x) = 3^x + 1$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

1.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^x = b$$

Przykład 1

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$

b) $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$

c) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

liczba logarytmowana

$$\log_a b = x$$

logarytm

podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log_2 32$	c) $\log_2 1$	e) $\log_2 \frac{1}{64}$	g) $\log_2 \sqrt{8}$
b) $\log_2 2$	d) $\log_2 \frac{1}{4}$	f) $\log_2 \sqrt{2}$	h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_3 81$	d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	g) $\log_7 7\sqrt{7}$	j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$
b) $\log_3 \frac{1}{9}$	e) $\log_9 3$	h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$	k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$
c) $\log_3 \frac{1}{27}$	f) $\log_9 \frac{1}{27}$	i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$	l) $\log_6 216$

Zwróć uwagę na to, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

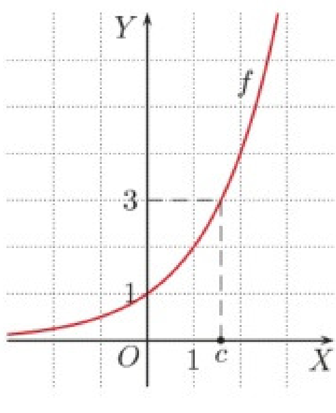
Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.



Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c, że $2^c = 3$.
Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1{,}5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n, takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$.

Zatem $3 = 2^{\frac{m}{n}}$

$3^n = 2^m$ Podnosimy obie strony równości do potęgi n.

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D **Ćwiczenie 3**

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

a) $\log_2 5$ b) $\log_3 5$ c) $\log_2 6$ d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\log_2 2^{100}$ c) $\log_{1,1} 1{,}1^{10}$ e) $2^{\log_2 3}$ g) $0{,}4^{\log_{0,4} 10}$

b) $\log_6 6^{15}$ d) $\log_\pi \pi^{-3}$ f) $3^{\log_3 7}$ h) $5^{\log_5 1}$

Przykład 3

a) Oblicz $\log_3(\log_2 512)$.

$512 = 2^9$, więc $\log_2 512 = 9$, zatem $\log_3(\log_2 512) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

b) Oblicz $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\sqrt{3}} 3)$.

$3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$, więc $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, zatem $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\sqrt{3}} 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

c) Oblicz $\log_6(\log_4(\log_5 625))$.

$625 = 5^4$, więc $\log_5 625 = 4$, zatem:

$$\log_6(\log_4(\log_5 625)) = \log_6(\log_4 4) = \log_6 1 = \log_6 6^0 = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\log_4(\log_6 36)$ c) $\log_8(\log_2 4)$ e) $\log_4(\log_{16}(\log_3 81))$

b) $\log_5(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32})$ d) $\log_2(\log_9(\log_5 125))$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{2}}(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}))$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 64$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ e) $\log_2 0{,}125$ g) $\log_4 8$

b) $\log_2 512$ d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ f) $\log_4 2$ h) $\log_4 \frac{1}{1024}$

2. Zapisz liczbę b w postaci 2^x. Oblicz $\log_2 b$.

a) $b = 4\sqrt{2}$ b) $b = 16\sqrt[3]{2}$ c) $b = \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{32}$

3. Oblicz.

a) $\log_4 \sqrt{2}$ c) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\log_{\sqrt{2}} 4$ g) $\log_3 3\sqrt{3}$

b) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ d) $\log_4 2\sqrt{2}$ f) $\log_{\sqrt{2}} 32$ h) $\log_3 9\sqrt[3]{3}$

4. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ e) $\log_{0,2} 125$ g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

b) $\log_{0,1} 10^6$ d) $\log_{0,25} 16$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$

5. Oblicz.

a) $2^{\log_2 9}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ e) $4^{\log_2 9}$ g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ f) $81^{\log_3 0{,}5}$ h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$

6. Oblicz.

a) $\log_3 81 \cdot \log_3 \sqrt{27}$ b) $\log_5 625 \cdot \log_5 0{,}04$ c) $\log_3 9\sqrt{3} \cdot \log_3 \frac{\sqrt{3}}{81}$

7. Oblicz.

a) $\log_8 64 + \log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log_4 \sqrt[3]{4}$ e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_\pi 1$

b) $\log_5 5^8 - \log_{0,5} 8$ d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ f) $\log_{\frac{2}{3}} 1{,}5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$

8. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_a 0{,}25 = -1$ d) $\log_a 64 = -3$

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{\sqrt{3}} b = 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_{\frac{3}{4}} b = -1$

10. Oblicz.

a) $\log_2(\log_{11} 121)$ c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$ e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$

b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Dane są liczby x i y takie, że $2^x = 16$ i $3^y = 16$. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x, y jest całkowita?
>
> $2^x = 16$, zatem $x = \log_2 16$ oraz $x \in \mathbf{Z}$, gdyż $\log_2 16 = 4$
>
> $3^y = 16$, zatem $y = \log_3 16$ oraz $y \notin \mathbf{Z}$

Liczby x i y spełniają poniższe warunki. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x, y jest całkowita?

a) $2^x = 27,\ \ 3^y = 27$

b) $2^x = 1000,\ \ 10^y = 1000$

c) $6^x = 216,\ \ 8^y = 216$

d) $3^x = \frac{1}{3},\ \ 9^y = \frac{1}{3}$

12. Oblicz a, jeśli spełnione są warunki:

a) $4^x = 64$ i $x = \log_2 a$,

b) $5^x = 5\sqrt{5}$ i $x = \log_8 a$,

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ i $x = \log_4 a$,

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ i $x = \log_2 a$.

13. Rozwiąż równanie.

a) $2^{x-1} = 4$

b) $2^{x+2} = 64$

c) $3^{x-4} = 9$

d) $3^{x+4} = 27$

e) $4^{x-3} = 16$

f) $5^{x+2} = 625$

g) $6^{2x-1} = 216$

h) $8^{3x+4} = 64$

> Rozwiąż równanie $2^{x+1} = 16$.
>
> $$\log_2 2^{x+1} = \log_2 16$$
> $$x + 1 = 4$$
> $$x = 3$$

14. a) Dla jakich wartości x liczba $\log_2 x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

b) Dla jakich wartości x liczba $\log_{\frac{1}{2}} x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

Powtórzenie

15. Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_2 16$

b) $\log_3 9 + \log_3 81$

c) $\log_3 27 - \log_3 1$

d) $\log_4 4 - \log_4 64$

e) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$

f) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \frac{1}{3}$

16. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 27$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \log_2 \sqrt{2}$

d) $\log_3 \sqrt{3} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

e) $\log_4 2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$

f) $\log_6 6\sqrt{6} - \log_{\frac{1}{6}} 36$

17. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 16 = 4$

b) $\log_a 16 = 2$

c) $\log_a 16 = 1$

d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$

e) $\log_a 16 = -1$

f) $\log_a 16 = -2$

1.6. Logarytm dziesiętny

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log 1000$ c) $\log 10^6$ e) $\log \sqrt{10}$

b) $\log 0{,}1$ d) $\log 0{,}0001$ f) $\log 10\sqrt{10}$

Poniżej zamieszczono fragment tablic (str. 230–231), w których znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b+0{,}00$	$b+0{,}01$	$b+0{,}02$	$b+0{,}03$	$b+0{,}04$	$b+0{,}05$	$b+0{,}06$	$b+0{,}07$	$b+0{,}08$	$b+0{,}09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784

Ćwiczenie 2

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

a) $\log 2$, b) $\log 1{,}5$, c) $\log 1{,}78$, d) $\log 2{,}29$.

Przykład 1

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość liczby $10^{0{,}356}$.

Zauważmy, że $\log 10^{0{,}356} = 0{,}356$. Zatem znajdujemy w tablicy liczbę 0,356 i odczytujemy, że $\log 2{,}27 \approx 0{,}356$, czyli $10^{0{,}356} \approx 2{,}27$.

Ćwiczenie 3

Odczytaj z tablicy logarytmów dziesiętnych przybliżoną wartość liczby:

a) $10^{0{,}301}$, b) $10^{0{,}1761}$, c) $10^{0{,}0043}$, d) $10^{0{,}3522}$.

Przed wynalezieniem kalkulatorów tablice logarytmów były wykorzystywane do szybszego wykonywania obliczeń. Dzięki logarytmowaniu mnożenie zastępowano dodawaniem.

Przykład 2

Oblicz $1{,}22 \cdot 1{,}55$, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.

$$1{,}22 \cdot 1{,}55 \approx 10^{0{,}0864} \cdot 10^{0{,}1903} = \\ = 10^{0{,}0864 + 0{,}1903} = 10^{0{,}2767} \approx \\ \approx 1{,}89$$

Z tablicy odczytujemy:
$1{,}22 \approx 10^{0{,}0864}$
$1{,}55 \approx 10^{0{,}1903}$
$10^{0{,}2767} \approx 1{,}89$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log 10^9 - \log 10^8$
b) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{16}$
c) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$
d) $\log \frac{1}{100} + \log \frac{1}{1000}$
e) $\log_8 \frac{1}{64} + \log \sqrt[3]{10}$
f) $\log \sqrt[4]{10} - \log_3 \sqrt[4]{27}$
g) $\log \frac{\sqrt{10}}{10} - \log \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$
h) $\log_{1,5} \frac{27}{8} - \log 1$
i) $\log_{\frac{2}{5}} 2{,}5 - \log \sqrt{10}$

2. Oblicz.

a) $\log_2(\log 10\,000)$
b) $\log_3(\log 1000)$
c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log 1000)$
d) $\log_{\sqrt{2}}(\log 10\,000)$
e) $\log_9(\log_8(\log 100))$
f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log \sqrt{10}))$

3. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \log_2 32$, $y = \log 10^6$
b) $x = \log 0{,}01$, $y = \log_2 \frac{1}{8}$
c) $x = \log_8 2$, $y = \log \sqrt{10}$
d) $x = \log(\log 10)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 2$
e) $x = \log_4(\log_2 16)$, $y = \log 10\sqrt{10}$
f) $x = \log_{\frac{1}{4}}(\log 100)$, $y = \log_{\sqrt{2}} 2$

4. Oblicz przybliżoną wartość sumy, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.

a) $10^{0{,}0792} + 10^{0{,}2553}$
b) $10^{0{,}5132} + 10^{0{,}8293}$
c) $10^{0{,}2989} + 10^{0{,}1732}$

Powtórzenie

5. Czy x jest liczbą całkowitą? Czy jest liczbą wymierną?

a) $x = \log 100$
b) $x = \log \sqrt[3]{10}$
c) $x = \log 10^{\frac{2}{3}}$
d) $x = \log 0{,}01$
e) $x = \log 10\sqrt[3]{10}$
f) $x = \log 10^{\sqrt{2}}$

6. Oblicz.

a) $\log_2(3 + \log 10)$
b) $\log_2(3 - \log 100)$
c) $\log_2(\log \sqrt{10})$
d) $\log_9(\log \sqrt[3]{10})$
e) $\log_2 2^{100} - \log 100^{10}$
f) $\log 10^5 + \log_{0,1} 100$

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech a, x i y będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

$$x \cdot y = a^{p+q}$$ Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a(x \cdot y) = p + q$$ Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$.

$$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$$

b) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

d) $\log 0{,}07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_6 4 + \log_6 9$
c) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}6 - \log_{\frac{1}{2}} 0{,}15$
e) $\log_5 0{,}04 - \log_5 0{,}008$
b) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$
d) $\log 6 - \log 2 - \log 3$
f) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Przykład 3

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$3 + \log_2 7 = \log_2 8 + \log_2 7 =$$

Zapisujemy 3 jako $\log_2 8$.

$$= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie a.

a) $2 + \log_3 5,\ a = 3$
b) $\log_2 10 - 1,\ a = 2$
c) $4 - \log_3 36,\ a = 3$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$
c) $\log 0{,}12 - \log 0{,}3 + \log 25$
b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$
d) $\log_{0{,}2} 0{,}3 - \log_{0{,}2} 0{,}5 - \log_{0{,}2} 15$

2. Wiadomo, że $\log 5 \approx 0{,}7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 50$,
b) $\log 500$,
c) $\log 0{,}05$,
d) $\log \frac{1}{5}$.

3. Wiadomo, że $\log_2 7 \approx 2{,}8$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log_2 14$,
b) $\log_2 28$,
c) $\log_2 3{,}5$,
d) $\log_2 \frac{7}{4}$.

4. Wiadomo, że $\log_5 2 \approx 0{,}43$, $\log_5 7 \approx 1{,}21$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log_5 14$,
b) $\log_5 70$,
c) $\log_5 0{,}4$,
d) $\log_5 0{,}7$.

5. Zapisz liczbę p w postaci $\log_a b$.

a) $p = \log_2 5 + \log_2 6$
b) $p = \log_3 8 - \log_3 2$
c) $p = 1 + \log_4 3$

Powtórzenie

6. Oblicz.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$
c) $\log_{\frac{1}{6}} 3 + \log_{\frac{1}{6}} 2$
e) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$
b) $\log 2 + \log 50$
d) $\log_{0{,}1} 0{,}2 + \log_{0{,}1} 0{,}5$
f) $\log_{20} 100 + \log_{20} 4$

7. Oblicz.

a) $\log_4 12 - \log_4 3$
c) $\log_6 72 - \log_6 2$
e) $\log_{\frac{1}{2}} 3{,}5 - \log_{\frac{1}{2}} 7$
b) $\log 8 + \log 125$
d) $\log_3 54 - \log_3 2$
f) $\log_5 15 - \log_5 75$

1.8. Logarytm potęgi

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbf{R}$:
$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$, zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$
$$x^p = a^{p \cdot q}$$
Korzystamy z własności działań na potęgach.
$$\log_a x^p = p \cdot q$$
Korzystamy z definicji logarytmu.
$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0{,}3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$

$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0{,}3$

Ćwiczenie 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:

a) $\log x^6$, b) $\log \frac{1}{x^3}$, c) $\log \sqrt{x}$, d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

Przykład 2

Przedstaw wyrażenie $3 \log_4 8 - 2$ w postaci logarytmu o podstawie 4.

$3 \log_4 8 - 2 = \log_4 8^3 - \log_4 4^2 =$
$= \log_4 \frac{8^3}{4^2} = \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 8) = \log_4 32$

Zapisujemy 2 jako $\log_4 4^2$.

Ćwiczenie 2

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $3 + \log_2 5$ b) $2 \log_3 4 - 1$ c) $3 \log_{\frac{1}{2}} 3 + 1$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Przykład 3

Wiadomo, że $\log_2 5 \approx 2{,}32$. Oblicz przybliżoną wartość $\log_2 250$.

$\log_2 250 = \log_2 (2 \cdot 125) = \log_2 2 + \log_2 125 = 1 + \log_2 5^3 = 1 + 3 \log_2 5 \approx$
$\approx 1 + 3 \cdot 2{,}32 = 7{,}96$

Ćwiczenie 3

Wiadomo, że $\log_3 2 \approx 0{,}63$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log_3 4$, b) $\log_3 12$, c) $\log_3 96$, d) $\log_3 72$.

Zadania

1. Wiadomo, że $\log 2 \approx 0{,}3$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 4$, b) $\log 16$, c) $\log 0{,}04$, d) $\log 1600$.

2. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0{,}6$ oraz $\log 5 \approx 0{,}7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 25$, b) $\log 64$, c) $\log 0{,}64$, d) $\log 2{,}5$, e) $\log \frac{5}{4}$, f) $\log 20$.

D **3.** Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0{,}4$. Uzasadnij, że:

a) $\log_2 2x^2 = 1{,}8$, b) $\log_2 16x^3 = 5{,}2$, c) $\log_2 \frac{x^4}{2} = 0{,}6$.

4. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:

a) $\log_3 3x^2$, b) $\log_3 9x^8$, c) $\log_3 \frac{x^4}{81}$, d) $\log_3 27x^6$.

D **5.** Niech $p = \log_2 3$ oraz $q = \log_2 5$. Uzasadnij poniższą równość.

a) $\log_2 45 = 2p + q$ b) $\log_2 75 = p + 2q$ c) $\log_2 405 = 4p + q$

6. Wyraź liczbę a za pomocą p, jeśli $p = \log 2$.

a) $a = \log 200$ b) $a = \log 0{,}02$ c) $a = \log 0{,}04$ d) $a = \log 1600$

D **7.** Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

a) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = 0$

b) $\log x^2y^2 = 2\log x + 2\log y$

c) $\log x^2y - \log xy^2 = \log x - \log y$

d) $\log x^3y^4 - \log x^2y^3 = \log x + \log y$

Powtórzenie

8. Dla jakiej liczby a prawdziwa jest poniższa równość?

a) $\log_2 3^5 = a\log_2 3$

b) $\log_5 2^{100} = a\log_5 2$

c) $\log_2 81 = a\log_2 3$

d) $\log_5 32 = a\log_5 2$

e) $\log_7 625 = a\log_7 5$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = a\log_{\frac{1}{2}} 4$

9. Oblicz x.

a) $\log_5 x = 3\log_5 2$

b) $\log_7 x = 2\log_7 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3\log_{\frac{1}{2}} 5$

d) $\log_{\frac{1}{10}} x = 6\log_{\frac{1}{10}} 10$

e) $\log x = 2\log \sqrt{2}$

f) $\log x = 4\log \sqrt{3}$

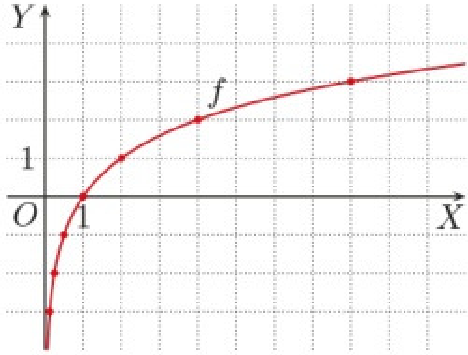
10. Wiadomo, że $\log 3 \approx 0{,}48$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 9$, b) $\log 27$, c) $\log 0{,}9$, d) $\log 0{,}81$.

1.9. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.



x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Definicja

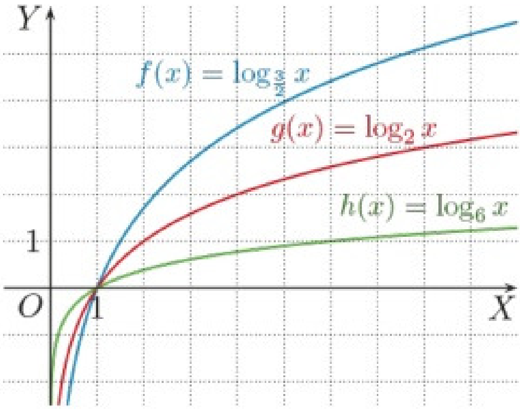
Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_3 x \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.



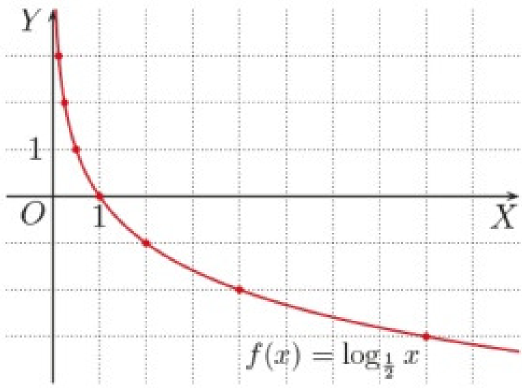
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

a) $(216, 3)$, b) $(2\frac{1}{4}, 2)$, c) $(1024, 10)$?

Przykład 2

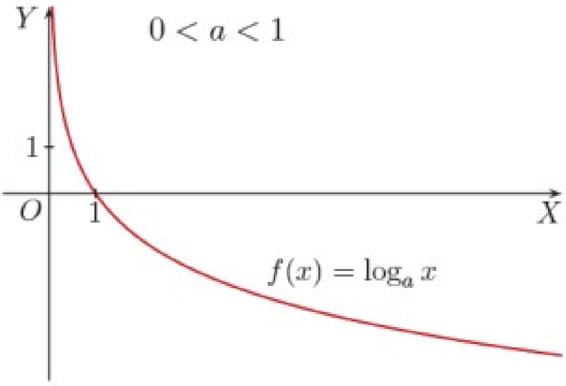
Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.



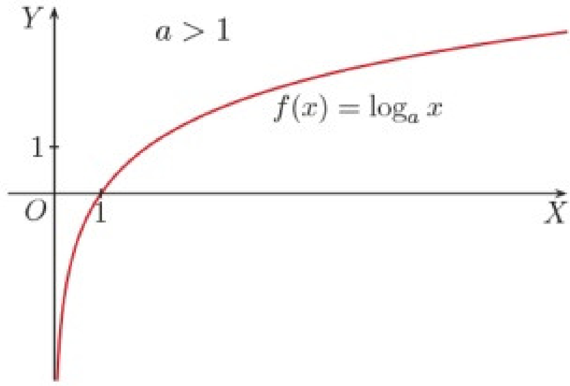
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1,0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX.

Ćwiczenie 4

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne, jeśli wiadomo, że: a) $a \in (1;\infty)$, b) $a \in (0;1)$?

Przykład 3

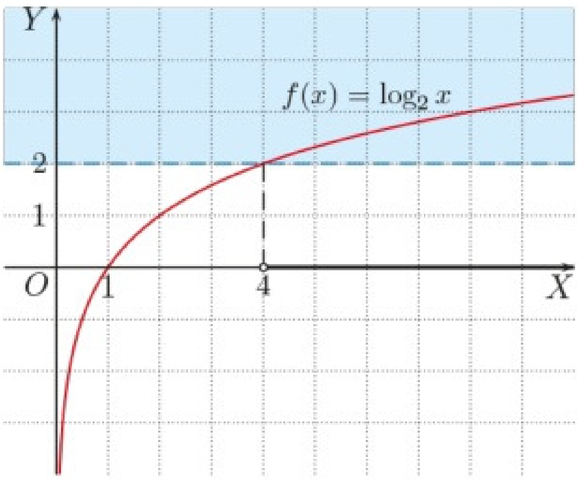
Rozwiąż nierówność $\log_2 x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_2 x > \log_2 4 \qquad 2 = \log_2 4$$

$$x > 4, \text{ czyli } x \in (4;\infty)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca.



Przykład 4

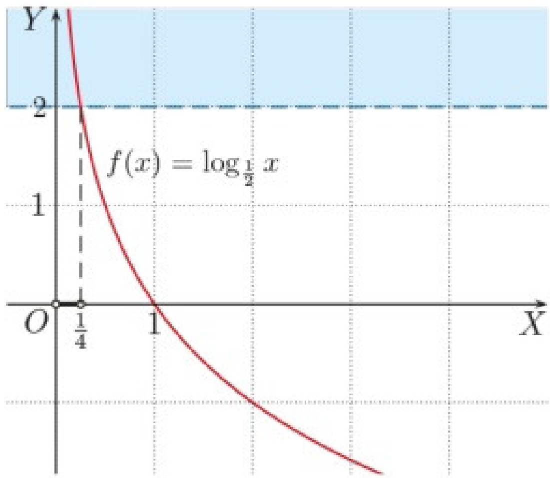
Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4} \qquad 2 = \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4}$$

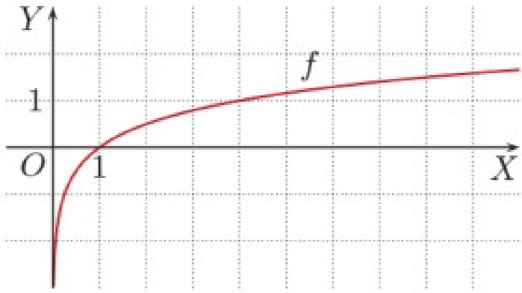
$$x < \tfrac{1}{4}, \text{ czyli } x \in (0;\tfrac{1}{4})$$

Zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.



Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Podaj rozwiązanie nierówności.



a) $\log_4 x \geqslant 1$ c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$

b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leqslant \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 6

Naszkicuj odpowiedni wykres i podaj rozwiązanie nierówności.

a) $\log_3 x > 1$ c) $\log_3 x \geqslant -2$ e) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$

b) $\log_3 x \leqslant 1$ d) $\log_3 x > 2$ f) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$ h) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 2$

Zadania

1. Czy punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ lub $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$?

a) $P\left(\frac{1}{8}, 3\right)$ b) $P\left(\frac{1}{16}, -4\right)$ c) $P\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$ d) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?

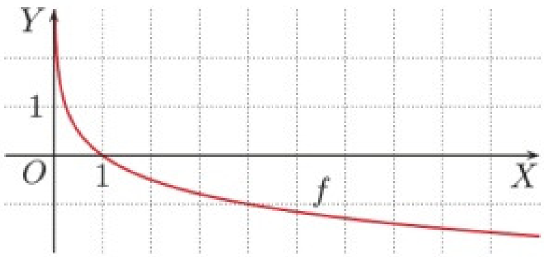
a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$

3. Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f.

a) $f(x) = \log_3 x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{3}; 1 \right\rangle$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{2}; 8 \right\rangle$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{9}; 27 \right\rangle$ d) $f(x) = \log_8 x$, $D_f = \left\langle \frac{1}{2}; \sqrt{2} \right\rangle$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Podaj rozwiązanie nierówności.



a) $\log_{\frac{1}{4}} x \leqslant 1$ c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant -1$

b) $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant 8$ d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\frac{1}{2}$

5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i podaj rozwiązanie nierówności.

a) $-2 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$ b) $-3 < \log_2 x < -1$

6. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i podaj rozwiązanie nierówności.

a) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 2$ b) $-2 \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x < 1$

7. Określ monotoniczność funkcji f.

a) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{5}}{5}} x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{5}-1} x$ c) $f(x) = \log_{\sqrt{2}-1} x$

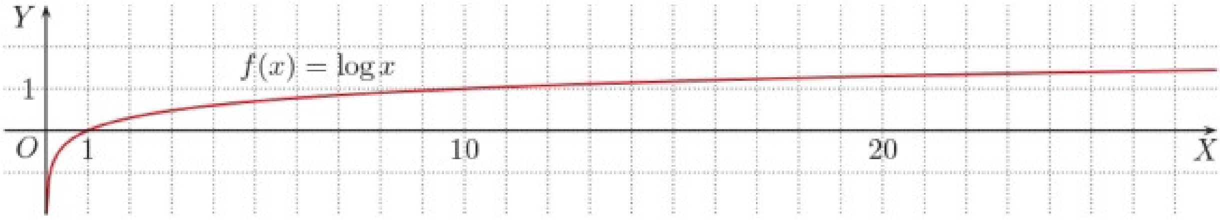
8. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{4}} x$ c) $f(x) = \log_{m+1} x$

9. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = \log_{3m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ c) $f(x) = \log_{m+2} x$

10. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



Dla jakich argumentów x spełniona jest podana nierówność?

a) $\log x > 1$ b) $\log x > 2$ c) $\log x > 3$ d) $\log x > 6$

11. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log x| \leqslant 1$ b) $|\log x| \leqslant 4$ c) $\log^2 x \leqslant 4$ d) $\log^2 x \leqslant 9$

Uwaga. Zamiast $(\log_a x)^2$ piszemy $\log_a^2 x$.

12. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log_4 x| \leqslant 1$ b) $|\log_4 x| > 1$ c) $\log_4^2 x \leqslant 4$ d) $\log_4^2 x \geqslant 4$

Powtórzenie

13. Korzystając z monotoniczności odpowiedniej funkcji logarytmicznej, uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.

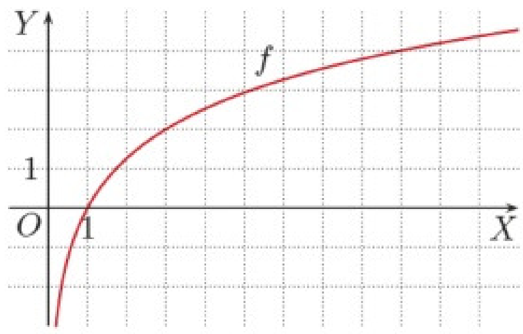
a) $x = 2\log_3 2$, $y = \frac{1}{3}\log_3 27$, $z = \log_3 \frac{7}{2}$

b) $x = \frac{3}{4}\log_{\frac{1}{3}} 16$, $y = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8$, $z = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 80$

14. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f.

a) $D_f = (0;1)$ b) $D_f = \langle 2;\infty)$ c) $D_f = \left\langle \frac{1}{2};8 \right\rangle$ d) $D_f = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2};1024 \right\rangle$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$. Podaj cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu tej funkcji. Rozwiąż nierówność.



a) $\log_{\sqrt{3}} x > 2$ c) $\log_{\sqrt{3}} x < 4$

b) $\log_{\sqrt{3}} x \leqslant 2$ d) $\log_{\sqrt{3}} x \geqslant 4$

Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

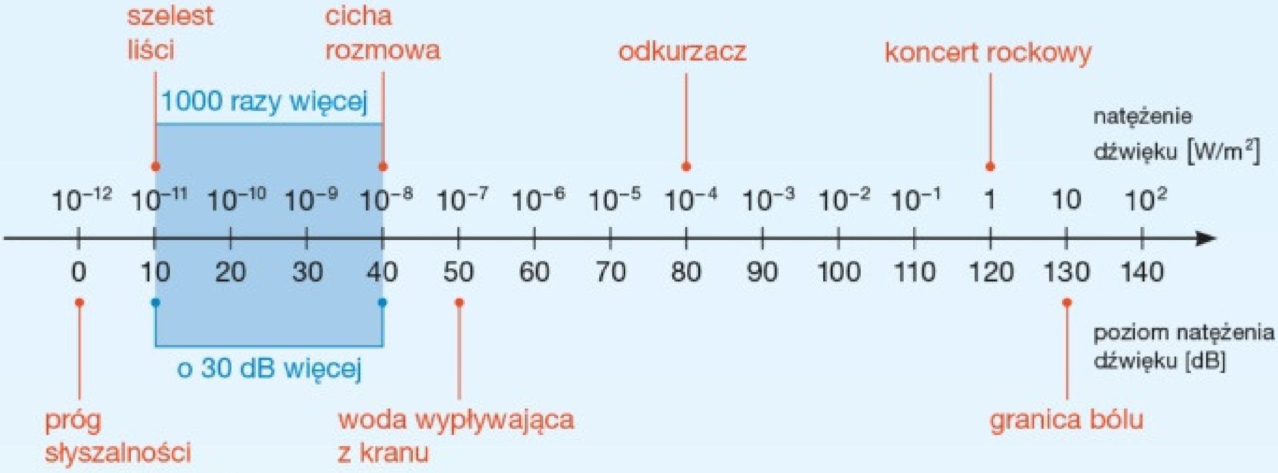
$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:
I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),
$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności dla częstotliwości 1000 Hz),
L – poziom natężenia dźwięku.
Poziom natężenia dźwięku podawany jest w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2, to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$

Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.

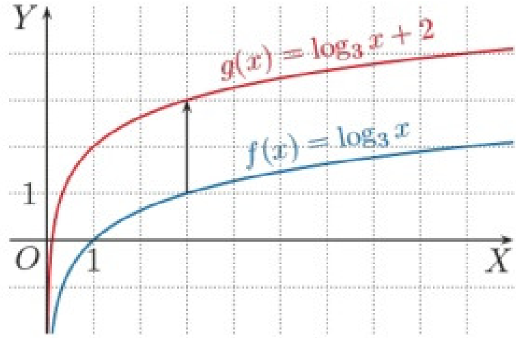


1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_3 x + 2$.



Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_2 x + 1, \quad h(x) = \log_2 x - 3$$

Podaj wartości każdej z tych funkcji dla $x \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$.

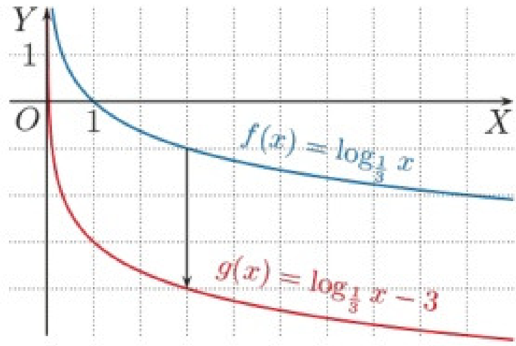
Ćwiczenie 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g.

a) $f(x) = \log_3 x - 1,\ g(x) = \log_3 x + 1$ b) $f(x) = \log_4 x - 3,\ g(x) = \log_4 x + 3$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.



Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Podaj, dla jakich argumentów funkcje te przyjmują wartości nieujemne.

Ćwiczenie 4

Punkt P należy do wykresu funkcji f. Wyznacz współczynnik a i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \log_3 x + a, \quad P(3, 2)$

b) $f(x) = \log_4 x + a, \quad P(4, -1)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + a, \quad P(3, -3)$

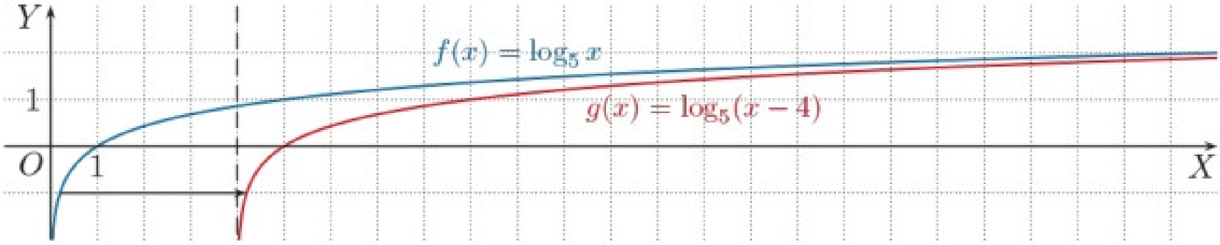
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + a, \quad P(4, 0)$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_5(x-4)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 5.



Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu.

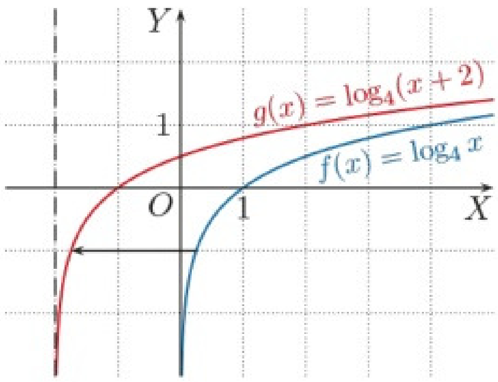
a) $f(x) = \log_2(x-1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ e) $f(x) = \log_3(x-2)$

b) $f(x) = \log_2(x-3)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_4(x+2)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1.



Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 1$.

a) $f(x) = \log_2(x+1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ e) $f(x) = \log_3(x+2)$

b) $f(x) = \log_2(x+2)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

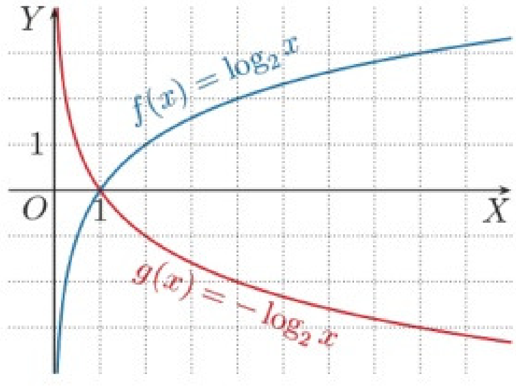
Ćwiczenie 7

Punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x+a)$. Wyznacz a.

a) $P(-5, 0)$ b) $P(-2, 1)$ c) $P\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -\log_2 x$.



Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.
Dziedziną funkcji f i g jest zbiór $(0; \infty)$. Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY. Zwróć uwagę, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

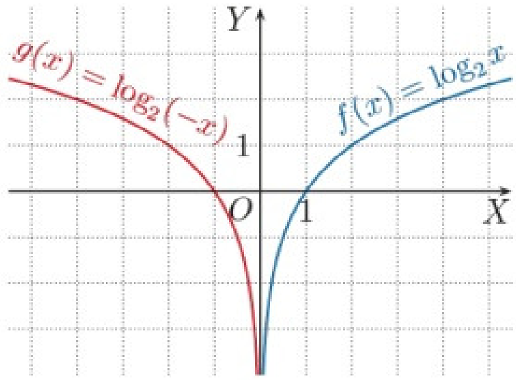
Ćwiczenie 8

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

a) $f(x) = \log_3 x,\ \ g(x) = -\log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x,\ \ g(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x$

Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_2(-x)$.



Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OY wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.
Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a funkcji g – zbiór $D_g = (-\infty; 0)$. Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY.

Ćwiczenie 9

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

a) $f(x) = \log_3 x,\ \ g(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x,\ \ g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2 x - 2$ c) $f(x) = \log_3 x + 1$ e) $f(x) = \log_4 x - 2$

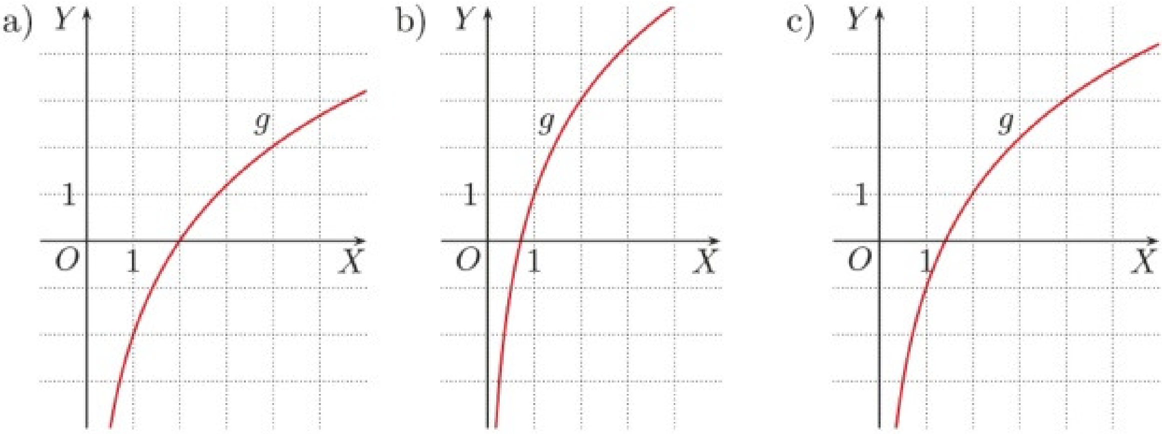
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ d) $f(x) = \log_3 x - 2$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 2$

2. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

a) $f(x) = \log_2(x + 3)$ c) $f(x) = \log_3(x - 1)$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

b) $f(x) = \log_2(x - 4)$ d) $f(x) = \log_3(x + 2)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3)$

3. Przedstawiony na rysunku wykres funkcji g można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ wzdłuż osi OY. Podaj wzór funkcji g i wyznacz jej miejsce zerowe.



4. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = \log_2(x+1) - 2$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1$

c) $f(x) = \log_3(x-2) + 3$

d) $f(x) = \log_3(x+3) - 1$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 1$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 3$

5. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = -\log_3 x - 1$

b) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x + 2$

c) $f(x) = 2 - \log_2 x$

d) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$

6. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2(-x) + 1$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) - 1$

c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$

Powtórzenie

7. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x-2) + 1$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$

c) $f(x) = \log_3(x+2) - 1$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 2$

e) $f(x) = \log_4(x-1) - 3$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 2$

8. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x+1)$ i $h(x) = g(-x)$. Podaj dziedziny tych funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

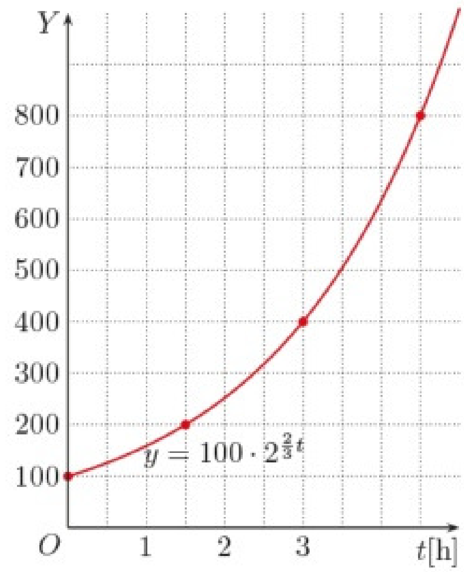
Wzrost wykładniczy

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Stwierdzono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu półtorej godziny. Przyjmuje się, że liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Aby wyznaczyć a, zauważmy, że dla $t = 1{,}5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1{,}5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}588$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

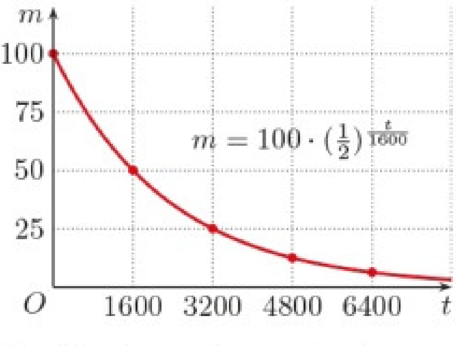
w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

Rozpad promieniotwórczy

Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T, po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Na przykład okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to po upływie t lat masa dana jest za pomocą wzoru:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Uwaga. Czas t powinien być podany w tych samych jednostkach co okres połowicznego rozpadu T (w tym przypadku jest podany w latach).

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226:

a) o masie 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,

b) o masie 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1{,}5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmieniona. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 2

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0{,}66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0{,}66 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$
$$\log 0{,}66 = \log \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$
$$\log 0{,}66 = \tfrac{t}{5700} \log 0{,}5$$
$$t = 5700 \cdot \tfrac{\log 0{,}66}{\log 0{,}5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1{,}875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Zadania

1. W laboratorium obserwowano wzrost liczebności kolonii bakterii, która co pół godziny zwiększała się o 25%. Doświadczenie rozpoczęło się o godzinie 9.00, a o 10.00 populacja liczyła 10^5 organizmów. Wyznacz początkową liczbę bakterii y_0 i współczynnik a, jeśli wzór $y = y_0 \cdot a^t$ opisuje liczbę bakterii y po upływie czasu t. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij (zastosuj notację wykładniczą).

Godzina	9.00	9.30	9.45	10.00	10.30	11.45	12.00
Liczba bakterii	?	?	?	10^5	?	?	?

2. a) Oblicz okres połowicznego rozpadu jodu-131, jeśli wiadomo, że z próbki o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g.
b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.

3. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu, jeśli wiadomo, że po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%.

4. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.

5. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
a) egipskiej mumii mającej 3330 lat, b) kości mającej 17 000 lat.

Powtórzenie

6. W tabeli podano, jaka część masy promieniotwórczego izotopu pozostała po upływie czasu T, $2T$, $3T$, $4T$, $5T$, $6T$, gdzie T to okres połowicznego rozpadu. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Upływ czasu	Ułamek	Procent
T	$\frac{1}{2}$	50
$2T$	$\frac{1}{4}$	?
$3T$	$\frac{1}{8}$	?
$4T$	?	6,25
$5T$	$\frac{1}{32}$	3,125
$6T$	?	?

7. W laboratorium obserwowano szybkość namnażania się pewnej bakterii. Badana kolonia liczyła początkowo 1000 organizmów.
Funkcja $y = 1000 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^t$ opisuje liczbę bakterii po czasie t (w godzinach) od rozpoczęcia obserwacji. Oblicz $y(1)$ i $y(2)$. Po jakim czasie od rozpoczęcia obserwacji liczba bakterii się podwoiła?

1.12. Zagadnienia uzupełniające

Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, $b \neq 1$, to $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \tfrac{1}{9}$$

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

a) $\log_{16} 3$
b) $\log_{0,5} 7$
c) $\log_{\sqrt{2}} 11$
d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$
e) $\log_4 6 + \log_8 6$
f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

2. Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c.

a) $\log_{0,1} 7$, $c = 10$
b) $\log_8 3$, $c = 2$
c) $\log_7 11$, $c = 49$
d) $\log 625$, $c = 0,1$
e) $\log_2 6$, $c = \frac{1}{2}$
f) $\log_{\frac{1}{3}} 12$, $c = 3$

D **3.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$
b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$
c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$
d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

4. Wyraź liczbę a za pomocą p, jeśli $p = \log_3 2$.

a) $a = \log_9 2$
b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$
c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$
d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$
e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$
f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$
g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$
h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

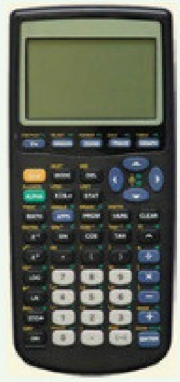
5. Oblicz x.

a) $\log_4 x = \log_{64} 125$
b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$
c) $\log_4 x = \log_8 27$
d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D **6.** Uzasadnij, że jeśli $a > 0$, $b > 0$ oraz $a \neq 1$, $b \neq 1$, to prawdziwy jest wzór:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Większość kalkulatorów naukowych jest wyposażona jedynie w dwa klawisze umożliwiające obliczanie logarytmów: $\boxed{\text{LOG}}$ – dla logarytmu dziesiętnego oraz $\boxed{\text{LN}}$ – dla logarytmu naturalnego (czyli takiego, którego podstawą jest niewymierna liczba e o przybliżonej wartości 2,718281828). Jeśli chcemy użyć kalkulatora do obliczenia logarytmu o innej podstawie, najpierw korzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu.



Przykład 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Korzystamy z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0{,}69897}{0{,}47712} \approx 1{,}465$$

7. Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Skorzystaj z tablic logarytmów dziesiętnych (str. 230–231) lub odpowiedniego kalkulatora.

a) $\log_2 9$ c) $\log_6 3$ e) $\log_{0,5} 9$ g) $\log_3 12$

b) $\log_3 7$ d) $\log_4 5$ f) $\log_{0,4} 6$ h) $\log_4 20$

Skala Richtera

Jednym z przykładów skali logarytmicznej (str. 36) jest **skala Richtera**, opublikowana w 1935 roku przez amerykańskiego geofizyka Charlesa Richtera [czyt. czarlsa richtera] (1900–1985). Służy ona do określania siły trzęsień ziemi. Miarą tej siły jest liczba $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, a $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową (drgania niewyczuwalne przez człowieka). Liczbę R wyraża się w stopniach skali Richtera.

8. a) W Nepalu 25 kwietnia 2015 roku miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

b) W południowych Chinach 20 kwietnia 2013 roku odnotowano trzęsienie ziemi o sile 6,6 stopnia w skali Richtera. Oblicz, ile razy większą amplitudę drgań miało to trzęsienie ziemi od amplitudy najsilniejszego ze wstrząsów wtórnych, który miał siłę 5,1 stopnia.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz.

a) 4^{-3} c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ e) $\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$ g) $\frac{3^6 \cdot 9}{3^5}$

b) 3^{-4} d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ f) $\frac{5^4 \cdot 5^{-2}}{5^3}$ h) $\frac{6^4 \cdot 36^{-1}}{6^{-1}}$

2. Oblicz.

a) $8^{\frac{1}{3}} + 9^{\frac{1}{2}}$ c) $4^{-\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{2}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$ g) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

b) $64^{\frac{1}{6}} - 64^{\frac{1}{2}}$ d) $16^{-\frac{1}{4}} + 16^{-\frac{1}{2}}$ f) $25^{\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}}$ h) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $3^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ c) $81^{\frac{3}{4}} : 81^{\frac{1}{2}}$ e) $2^{\frac{2}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}}$ g) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$

b) $5^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$ d) $9^{\frac{1}{3}} : 9^{-\frac{1}{6}}$ f) $5^{-\frac{2}{7}} : 25^{-\frac{1}{7}}$ h) $9^{\frac{3}{10}} : 27^{-\frac{4}{5}}$

4. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $5\sqrt{5}$ c) $125\sqrt[3]{5}$ e) $16\sqrt{8}$ g) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

b) $49\sqrt{7}$ d) $5\sqrt[3]{25}$ f) $8\sqrt[3]{16}$ h) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}}$

5. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 8^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}, 32^{\frac{\pi}{10}}, 256^{\frac{1}{4}}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{9}\right)^{2,6}, \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{243}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}, \ y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ b) $x = \left(\frac{2^6}{6^3}\right)^{-\frac{2}{3}}, \ y = \left(\sqrt[3]{1,6}\right)^6$

7. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\frac{(4x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{(64x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^2}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

8. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4x + 1$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = x + 4$

b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$

9. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = 5(5^x - 1)$ b) $f(x) = 8(2^{-x} - 1)$ c) $f(x) = 3(3^{x+2} - 1)$

10. Oblicz.

a) $\log_3 27$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$

b) $\log_{27} 3$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$

11. Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_9 81$ c) $\log_3 27 - \log_4 2 - \log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log 0{,}1 + \log 1000 + \log_{0{,}1} 10$ d) $\log_{36} 6 + \log_{16} 4 - \log_8 2$

12. Oblicz.

a) $3^{\log_3 2}$ b) $9^{\log_3 2}$ c) $3^{1-\log_3 2}$ d) $4^{\log_4 0{,}5-2}$

13. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość a.

a) $f(x) = 2^x - 1$, $a = \log_4 64$ c) $f(x) = -3^x$, $a = \log_3 \frac{1}{27}$

b) $f(x) = 2^{x+1}$, $a = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}25$ d) $f(x) = 3^{-x}$, $a = \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$

14. Oblicz.

a) $\log_2 6 + \log_2 8 - \log_2 3$ d) $\log 4 - \log 16 - \log 25$

b) $\log_3 2 + \log_3 27 - \log_3 6$ e) $2\log 5 + \log 4 - \log 10^4$

c) $\log_4 10 - \log_4 5 + \log_4 8$ f) $3\log 2 - \log 80 + 6\log 1$

15. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

a) $\log 0{,}03$, $\log 0{,}3$, $\log 3$,

b) $\log 0{,}054$, $\log 0{,}0054$, $\log 5{,}4$,

c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	−2,000	**0,26**	−0,585	**0,51**	−0,292
0,02	−1,699	**0,27**	−0,569	**0,52**	−0,284
0,03	−1,523	**0,28**	−0,553	**0,53**	−0,276
0,04	−1,398	**0,29**	−0,538	**0,54**	−0,268
0,05	−1,301	**0,30**	−0,523	**0,55**	−0,260
0,06	−1,222	**0,31**	−0,509	**0,56**	−0,252
0,07	−1,155	**0,32**	−0,495	**0,57**	−0,244

D **16.** Wykaż, że dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest poniższa równość.

a) $1 + 2\log_3 x = \log_3(3x^2)$ c) $2 + 3\log_4 x = \log_4(16x^3)$

b) $10\log x - 1 = \log(0{,}1x^{10})$ d) $6 - 2\log x = \log \frac{1\,000\,000}{x^2}$

Zestaw II

1. Oblicz.

a) $(3^{-2})^2$ c) $2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ e) $\dfrac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$ g) $\dfrac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ d) $9^3 \cdot 3^{-5}$ f) $\dfrac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$ h) $\dfrac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$

2. Oblicz.

a) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 625^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$ e) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ g) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$

b) $8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{-\frac{1}{4}}$ d) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$ f) $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$ h) $0{,}001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0{,}09^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ e) $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$

b) $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$ d) $\left(\sqrt[6]{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$ f) $\dfrac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}} \cdot \left(\dfrac{2}{11}\right)^3$

4. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $8\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{27}}{9}$ e) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$

b) $4\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ f) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{8}}$

5. Określ, czy podana liczba jest większa, czy mniejsza od 1. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$

6. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5}$, $125^{\frac{4}{5}}$, $25^{1{,}1}$ c) $9^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{27}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $0{,}5$, $16^{-\frac{1}{3}}$ d) $(4{,}5)^{-2}$, $\sqrt{0{,}4}^{\sqrt{12}}$, $(2{,}5)^{-2{,}4}$, $0{,}064$

7. Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt[10]{10} \approx 1{,}258925$.

a) $10^{1{,}1}$ b) $10^{-0{,}9}$ c) $10^{-1{,}9}$ d) $10^{-2{,}9}$

8. Wykres funkcji wykładniczej $y = a^x$ przechodzi przez punkt P. Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

a) $P(\frac{5}{2}, 32)$ b) $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ c) $P(-6, 729)$

9. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe (jeśli istnieją).

a) $f(x) = 2^x - 2$ c) $f(x) = 2 + 2^{-x}$ e) $f(x) = -3^{-x}$

b) $f(x) = 3^{x-1} + 2$ d) $f(x) = 4 - 2^x$ f) $f(x) = 2^{2x} - 4$

10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

a) $a = \log_3 9$, $b = \log_2 256$

b) $\log_2 a = 5$, $\log_4 b = \frac{1}{2}$

11. Oblicz x.

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$

c) $\log_{81} x^2 = \frac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$

e) $\log_9 |x| = \frac{3}{2}$

f) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$

12. Oblicz x.

a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$

b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$

c) $\log x = 2\log 5 + \log 4$

d) $\log x = \log 80 - 3\log 2$

13. Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

b) $\log_a 8 = 6$

c) $\log_a 32 = -5$

14. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt (x, y)?

a) $x = \log_{\frac{1}{4}} 1024$, $y = \log_{\sqrt{2}} 4$

b) $x = \log_2 \pi$, $y = \log_{\frac{1}{2}} \pi$

15. Oblicz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$, jeśli:

a) $x = 3$,

b) $x = \sqrt{3}$,

c) $x = 81$,

d) $x = 3^8$.

16. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej wzór, jeżeli przekształceniem tym jest:

a) przesunięcie o 2 jednostki w dół,

b) przesunięcie o 1 jednostkę w lewo,

c) symetria względem osi OY,

d) symetria względem osi OX.

17. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g i h. Podaj asymptoty tych wykresów i miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x + 2$, $g(x) = \log_2(x+2)$, $h(x) = \log_2(x+2) + 2$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(x-2)$

18. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a(x-2) + 1$ należy punkt P. Wyznacz a i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $P(4, 2)$

b) $P(6, 2)$

c) $P\left(\frac{7}{3}, 0\right)$

d) $P(4, 3)$

19. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę oraz zbiór argumentów, dla których funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = \log_2(x-3) - 1$

b) $f(x) = -\log_4(x+1) + 1$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x+2)$

d) $f(x) = -\log_3(x+3) + 2$

Sposób na zadanie

D **Przykład 1**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y prawdziwa jest równość:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\tfrac{1}{2} \log y^4$$

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\log xy^2 + \log x = -\log x - \log y^2 + \log x =$$
$$= -\log y^2 = -\log (y^4)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} \log y^4$$

II sposób

Kolejno piszemy równania równoważne z równaniem wyjściowym:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\tfrac{1}{2} \log y^4$$
$$\log x^{-1}y^{-2} - \log x^{-1} = \log (y^4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\log \frac{x^{-1}y^{-2}}{x^{-1}} = \log y^{-2}$$
$$\log y^{-2} = \log y^{-2}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

D **Przykład 2**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z prawdziwa jest równość:

$$\log xy + \log \tfrac{z^2}{y} = \log xyz - \log \tfrac{y}{z}$$

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\log xy + \log \tfrac{z^2}{y} = \log \left(xy \cdot \tfrac{z^2}{y} \right) = \log \left(xyz \cdot \tfrac{z}{y} \right) =$$
$$= \log \left(xyz : \tfrac{y}{z} \right) = \log xyz - \log \tfrac{y}{z}$$

II sposób

Przekształcamy podaną równość w sposób równoważny:

$$\log xy + \log \tfrac{z^2}{y} = \log xyz - \log \tfrac{y}{z}$$
$$\log \left(xy \cdot \tfrac{z^2}{y} \right) = \log \frac{xyz}{\frac{y}{z}}$$
$$\log xz^2 = \log xz^2$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych:

A. $(-1, -4)$, **B.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, **C.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, **D.** $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

2. Wartość funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest liczbą całkowitą dla:

A. $x = \frac{1}{2}$, **B.** $x = -3$, **C.** $x = 2$, **D.** $x = 10$.

3. Wartość funkcji $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ jest liczbą wymierną dla:

A. $x = 1$, **B.** $x = -1$, **C.** $x = -3$, **D.** $x = -6$.

4. Funkcją rosnącą jest funkcja:

A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$,
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$,
C. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
D. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$.

5. Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?

A. $f(x) = 6^x - 6$
B. $g(x) = 4^x + 4$
C. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$
D. $k(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

6. Prawdziwa jest nierówność:

A. $3^{\sqrt{2}} \leqslant 3^{1,5}$,
B. $0{,}5^{\sqrt{2}} \leqslant 0{,}5^{1,5}$,
C. $2^{\pi} \leqslant 2^{3,14}$,
D. $4^{\pi} \leqslant 4^{3,141}$.

7. Prawdziwa jest równość:

A. $16^{\sqrt{2}} \cdot 4^{2\sqrt{2}} = 16^{3\sqrt{2}}$,
B. $8^{2\sqrt{5}} : 2^{6\sqrt{5}-1} = 2$,
C. $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2$,
D. $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}} = 2^5$.

8. Prawdziwa jest nierówność:

A. $\log_2 8 < \log_3 9$,
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$,
C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$,
D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$.

9. Prawdziwa jest równość:

A. $\log_3 12 - 2\log_3 2 = 1$,
B. $\log_3 27 + \log_3 3 = 3$,
C. $\log_3 6 + \log_3 \frac{1}{2} = 3$,
D. $\log_3 75 - \log_3 25 = -1$.

10. Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji:

A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$,
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$,
C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$,
D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Punkt $P(p, 2)$ należy do wykresu funkcji $y = 16^x$. Wyznacz p.

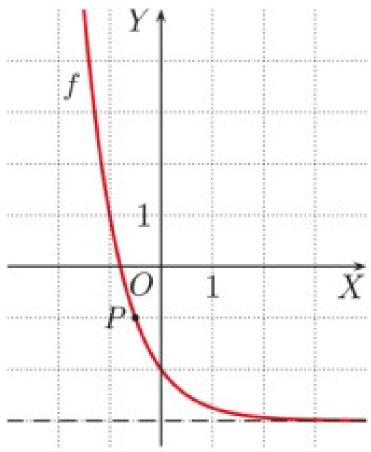
D **Zadanie 3 (2 pkt)**
Uzasadnij równość $4\log_9 3 + 9\log_3 9 = 5\log_3 81$.

D **Zadanie 4 (2 pkt)**
Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

D **Zadanie 5 (2 pkt)**
Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$ prawdziwa jest równość:
$$\log x^2y^3 = \log x + 2\log y + \log xy$$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:
$$f(x) = a^x - 3$$
Oblicz wartość tej funkcji dla $x = -5$, jeśli wiadomo, że punkt $P(-\frac{1}{2}, -1)$ należy do jej wykresu.



Zadanie 7 (4 pkt)
Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta o równaniu $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P, a wykres funkcji g – w punkcie Q. Ile jest równa długość odcinka PQ?

Zadanie 8 (4 pkt)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

D **Zadanie 9 (3 pkt)**
Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ prawdziwa jest równość:
$$2\log\frac{x^3}{y} - 3\log x^2 z = 2\log\left(\frac{y}{z}\right)^{-1} - 5\log z$$

Zadanie 10 (4 pkt)
Punkt $(1, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x - a) + b$, a prosta o równaniu $x = -3$ jest jego asymptotą pionową. Podaj współczynniki a i b oraz naszkicuj wykres funkcji f.