NOWA MATeMAtyka

Nowość EDYCJA 2024

1

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY

ZMIANY W PODSTAWACH 2024

oznaczenia usuniętych treści

WERSJA DEMONSTRACYJNA

nowa era

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

2. Język matematyki

3. Układy równań

4. Funkcje

5. Funkcja liniowa

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane holownika „Stefan” przedstawionego na zdjęciu: długość 28,74 m, szerokość 6,53 m, zanurzenie 2,6 m, prędkość maksymalna 10 węzłów. Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to przybliżona długość łuku południka wyznaczonego przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia):

$$\frac{20\,000 \text{ km}}{180 \cdot 60} \approx 1{,}851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że 1 Mm = 1852 m.

Przypomnij sobie

Cechy podzielności liczb

Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:
- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:

a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?

2. Czy liczba n jest podzielna przez 4?

a) $n = 63\,874$ b) $n = 58\,052$ c) $n = 35\,406$ d) $n = 47\,796$

3. Jaką cyfrę można podstawić za a, aby dana liczba była podzielna przez 4?

a) $684\,56a$ b) $23\,53a$ c) $21\,5a6$ d) $35\,7aa$

4. Jaką cyfrę można podstawić za a, aby dana liczba była podzielna przez 3?

a) $333\,3a4$ b) $64a\,871$ c) $434\,a4a$ d) $5aa\,6a3$

5. Wyszukaj w dostępnych źródłach cechę podzielności liczby naturalnej przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 8.

a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$

6. Przez które z liczb 6, 12, 15 jest podzielna liczba:

a) 775 584, c) 894 665,
b) 868 470, d) 501 474?

Liczba 69 222 jest podzielna przez 2 i przez 3, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem liczba ta jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.

7. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę przy założeniu, że jest ona podzielna przez:

a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.

8. Nie wykonując dzielenia, ustal, przez które spośród liczb 15, 45, 75 jest podzielna liczba:

a) 1155, b) 9825, c) 5165, d) 8235.

1.1. Liczby naturalne

Liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, \ldots$ jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje następna liczba naturalna: $n+1$. Na przykład po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.
Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Definicja

> Niech m i n będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n, to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m.

Zauważ, że:
- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:
- zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

> Niech n będzie liczbą naturalną.
> Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.
> Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, a nieparzystą – w postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 2

Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy też powiedzieć, że liczba 45 **dzieli się** przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

Dzieląc 47 przez $\boxed{3}$, otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : \boxed{3} = 15$ reszta 2

Oznacza to, że liczbę 47 możemy przedstawić w postaci $47 = \boxed{3} \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci $3k$, $3k+1$ lub $3k+2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci $4k$, $4k+1$, $4k+2$ lub $4k+3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

a) parzyste,

b) mniejsze od 20,

c) większe od 20 i mniejsze od 50,

d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest rozkładem na czynniki będące liczbami pierwszymi. Mówimy krótko, że jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$\mathrm{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$

$\mathrm{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\mathrm{NWD}(x, y)$ oraz $\mathrm{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18,\ y = 30$
b) $x = 15,\ y = 50$
c) $x = 24,\ y = 72$
d) $x = 144,\ y = 192$
e) $x = 84,\ y = 105$
f) $x = 196,\ y = 420$

Ćwiczenie 8

Dane są dwie liczby x i y takie, że żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y. Wyznacz $\mathrm{NWD}(x, y)$ i $\mathrm{NWW}(x, y)$.

Zadania

1. Które spośród liczb 2, 3, 4, 6, 9, 12 są dzielnikami podanej liczby?

a) 256 b) 294 c) 405 d) 588 e) 648

2. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:

a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?

3. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4.

a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$

4. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb 1, 2, 3?

a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$

5. Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest podana liczba, a n jest liczbą naturalną.

a) $2n + 1$ b) $2n - 1$, $n > 0$ c) $2n - 5$, $n > 2$ d) $4n + 3$

D **6.** Uzasadnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9,

b) czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8,

c) pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.

D **7.** Uzasadnij, że iloczyn:

a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,

b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48.

Sprawdź się

8. Ile dzielników ma liczba n?

a) $n = 12$ b) $n = 27$ c) $n = 29$ d) $n = 36$ e) $n = 60$

9. Wykonaj dzielenie z resztą.

a) $75 : 8$ b) $75 : 3$ c) $109 : 6$ d) $738 : 4$ e) $3241 : 6$

10. Oblicz $\mathrm{NWD}(x, y)$ oraz $\mathrm{NWW}(x, y)$.

a) $x = 24$, $y = 40$ c) $x = 48$, $y = 72$ e) $x = 112$, $y = 144$

b) $x = 36$, $y = 45$ d) $x = 54$, $y = 96$ f) $x = 105$, $y = 150$

Przypomnij sobie

Działania na liczbach całkowitych i ułamkach

1. Oblicz.

a) $4-\big(6-(12-10)\big)$
b) $6-2\big((8-19)-7\big)$
c) $8-\Big(4+\big(-12-(-4)\big)\Big)$
d) $-9+\big((14-6)-(7-13)\big)$
e) $-6(-2\cdot 9-17)-19$
f) $13(5-19)-3(9-13)$

2. Oblicz.

a) $4\big((13-17)-6(19-11)\big):2$
b) $8\big((15-3):2+32:(-4+12)\big)$
c) $-12:(4-19)-(17-8):(9-12)$
d) $\big(42:(-6-8)\big)\big((-5-17):(5-7)\big)$

3. Zamień liczbę mieszaną na ułamek zwykły.

a) $1\frac{2}{3}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $4\frac{3}{7}$ d) $6\frac{4}{11}$ e) $5\frac{11}{15}$

$$2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$$

4. Zamień ułamek zwykły na liczbę mieszaną.

a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{21}{8}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{49}{25}$

$$\frac{19}{5}=\frac{15+4}{5}=3\frac{4}{5}$$

5. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$
b) $\frac{7}{3}+\frac{4}{3}$
c) $\frac{5}{6}+\frac{11}{6}$
d) $\frac{13}{8}+\frac{23}{8}$
e) $\frac{17}{5}-\frac{3}{5}$
f) $\frac{19}{4}-\frac{3}{4}$
g) $\frac{7}{9}-\frac{23}{9}$
h) $\frac{29}{25}-\frac{61}{25}$

6. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

a) $\frac{13}{4}+\frac{17}{4}-\frac{5}{4}-\frac{9}{4}$
b) $\frac{25}{7}-\frac{19}{7}+\frac{8}{7}-\frac{3}{7}$
c) $\frac{21}{11}-\frac{8}{11}-\frac{13}{11}+\frac{32}{11}$
d) $\frac{8}{15}-\frac{26}{15}+\frac{4}{15}-\frac{2}{15}$

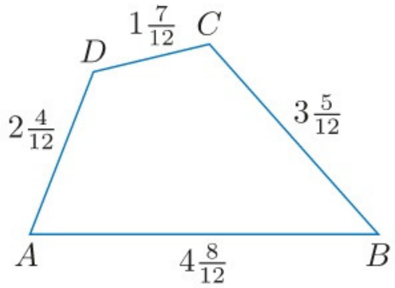
7. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

a) $\frac{3}{5}\cdot 2$
b) $\frac{2}{3}\cdot 5$
c) $\frac{5}{6}\cdot(-8)$
d) $\frac{9}{10}\cdot(-6)$
e) $\frac{5}{6}\cdot 24$
f) $\frac{8}{9}\cdot 45$
g) $1\frac{1}{4}\cdot 6$
h) $3\frac{2}{3}\cdot 9$

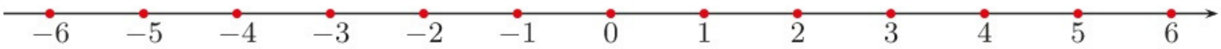
8. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).

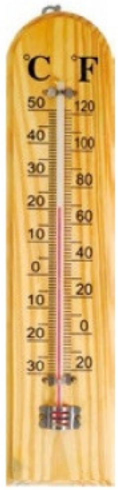
a) Oblicz długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi tego czworokąta.

b) Stosunek długości boków prostokąta jest równy $2:1$, a jego obwód jest równy obwodowi czworokąta $ABCD$. Oblicz pole tego prostokąta.



1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne





Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0.
Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą $\mathbb{Z}$.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach już w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie oś liczbową z zerem i liczbami ujemnymi widzimy np. w termometrze zaokiennym, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a) $42 - 78$

b) $-47 - (-63)$

c) $-240 \cdot (-3)$

d) $-342 + (-139)$

e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$

f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w przypadku dzielenia, gdyż wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą. Na przykład wynik dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.
Zwróć uwagę, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^{\,1}}{48 \cdot \cancel{10}_{\,1}} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^{\,1}}{8 \cdot \cancel{6}_{\,1}} = \frac{3}{8}$$

Ułamek $\frac{3}{8}$ jest nieskracalny.

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej otrzymujemy ułamek, którego licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Ćwiczenie 2
Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

a) $x = \frac{27}{72}$, $y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}$, $y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}$, $y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3
Oblicz różnicę $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik ułamków:

a) iloczyn liczb 12 i 18,

b) $\mathrm{NWW}(12, 18)$.

Działania na liczbach wymiernych

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ $\quad b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\quad b \neq 0,\ d \neq 0$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $\quad b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

Ćwiczenie 4
Oblicz.

a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$

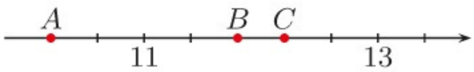
b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

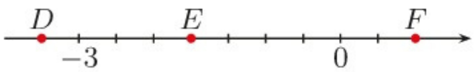
Ćwiczenie 5
Oblicz.

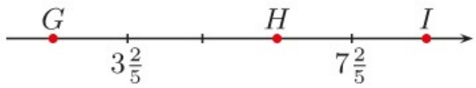
a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

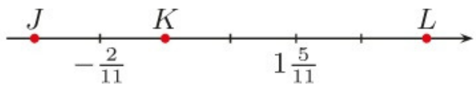
Zadania

1. Podaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Oblicz.

a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$

b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $-\left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz.

a) $-1\frac{2}{25} \cdot \left(-2\frac{1}{12}\right)$ b) $4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{2} : \left(-5\frac{1}{4}\right)$ c) $-2\frac{1}{9} \cdot 1\frac{16}{19} : \frac{7}{5}$

4. Oblicz.

a) $\dfrac{2\frac{1}{6}}{1\frac{4}{9}}$ c) $\dfrac{1\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ e) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}$ g) $\dfrac{2\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{2-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{2}}$ f) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}-1\frac{1}{5}}$ h) $\dfrac{3\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-2}$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x=1\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{4}$, $z=-\frac{3}{8}$.

a) $\dfrac{x-y}{y-z}$ b) $\dfrac{x+y-z}{y+z}$ c) $\dfrac{x-y+2z}{x+y+3z}$

6. Uporządkuj liczby a, b, c w kolejności rosnącej.

$a=\dfrac{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}-\frac{3}{4}}$, $b=1\frac{1}{2}\cdot 4\frac{6}{11}\cdot 3\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$, $c=\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\frac{3}{4}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)$

D **7.** Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z.

a) $x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$, $y=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$, $z=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2$

b) $x=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}$, $y=\dfrac{2\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$, $z=\dfrac{1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$

8. **Ułamek egipski** to ułamek postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Przeczytaj informację obok i przedstaw podany ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

a) $\dfrac{2}{11}$ b) $\dfrac{2}{17}$ c) $\dfrac{2}{31}$

Czy wiesz, że...
Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

dla:

$$a=\frac{n+1}{2},\ b=\frac{n(n+1)}{2}$$

Sprawdź się

9. Podaj liczbę odwrotną do liczby x.

a) $x=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ c) $x=\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$ e) $x=\frac{1}{2}+13-\frac{1}{4}$

b) $x=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}$ d) $x=\frac{8}{15}-\frac{4}{9}$ f) $x=\frac{2}{3}-34+\frac{1}{6}$

10. Oblicz.

a) $\left(1\frac{4}{5}-3\frac{2}{7}\right)\cdot 5\frac{5}{13}$ c) $\left(\frac{2}{5}+1\frac{2}{3}\right)\cdot(-2)^2$ e) $\left(2\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2$

b) $1\frac{4}{5}-3\frac{2}{7}\cdot 5\frac{5}{13}$ d) $\left(2\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}\right)\cdot(-2^2)$ f) $\left(\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2$

11. Oblicz.

a) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}$ b) $\dfrac{\frac{9}{5}:\frac{3}{7}-3\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{7}}$ c) $\dfrac{1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot 1{,}5}{\frac{1}{4}\cdot(-2)^2-3\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{11}}$

Przypomnij sobie

Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny

1. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt{0}$ d) $\sqrt{9}$ g) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt{1}$ e) $\sqrt{49}$ h) $\sqrt{100}$

c) $\sqrt{4}$ f) $\sqrt{64}$ i) $\sqrt{121}$

$\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$.
$\sqrt{144} = 12$, bo $12^2 = 144$.

2. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ e) $\sqrt{\frac{49}{64}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ f) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

$\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$, bo:
$\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$

3. Oblicz wartość pierwiastka. Odpowiedź podaj w postaci liczby mieszanej.

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ e) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

b) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ d) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ f) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$

$\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

4. Oblicz wartość pierwiastka.

a) $\sqrt{0{,}01}$ c) $\sqrt{0{,}36}$ e) $\sqrt{1{,}21}$

b) $\sqrt{0{,}04}$ d) $\sqrt{0{,}81}$ f) $\sqrt{1{,}44}$

$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$, bo:
$0{,}3^2 = 0{,}09$

5. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{0}$ d) $\sqrt[3]{27}$ g) $\sqrt[3]{343}$

b) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[3]{64}$ h) $\sqrt[3]{1000}$

c) $\sqrt[3]{8}$ f) $\sqrt[3]{125}$ i) $\sqrt[3]{27\,000}$

$\sqrt[3]{216} = 6$, bo $6^3 = 216$.
$\sqrt[3]{8000} = 20$, bo:
$20^3 = 8000$

6. Podaj wartość pierwiastka w postaci ułamka zwykłego.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$

$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$, bo $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

7. Oblicz wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{0{,}008}$ b) $\sqrt[3]{0{,}125}$ c) $\sqrt[3]{0{,}216}$

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$, bo:
$(0{,}1)^3 = 0{,}001$

8. Oblicz.

a) $\sqrt{81} - \sqrt{64} + \sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt[3]{125} + \sqrt{25} - \sqrt{100}$

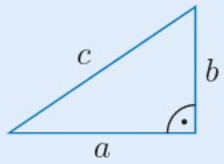
1.3. Liczby niewymierne

W VI w. p.n.e. Grecy sformułowali jedno z najsłynniejszych twierdzeń.

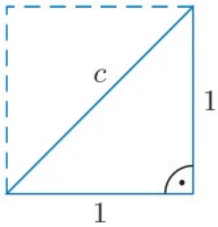
Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 (rysunek obok).
Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).



Dowód tego, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, będzie przestawiony w klasie 4.

Definicja

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{k}$, gdzie m i k są liczbami całkowitymi.
Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{82}$). Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród podanych liczb wskaż liczby niewymierne.

a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$

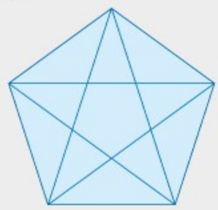
b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$

b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$ d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$ f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 3

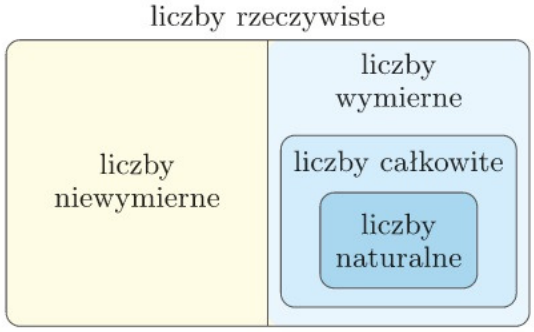
Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π.

Definicja

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych**.



Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami $\mathbb{IQ}$.

Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy liczbę rzeczywistą.

Zadania

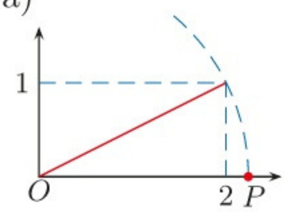
1. Wśród podanych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

a) $\sqrt{4}, \sqrt{64}, \sqrt{164}$ c) $\sqrt{25}, \sqrt{125}, \sqrt{225}$ e) $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{64}$

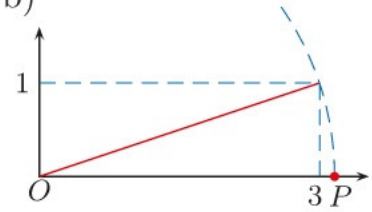
b) $\sqrt{9}, \sqrt{29}, \sqrt{49}$ d) $\sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{286}$ f) $\sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{216}$

2. Wyznacz odciętą punktu P zaznaczonego w układzie współrzędnych. Czy jest to liczba wymierna?

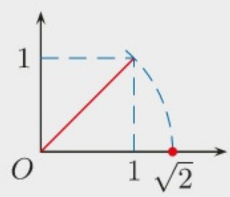
a)



b)



Konstrukcyjne wyznaczenie w układzie współrzędnych punktu o odciętej $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y. Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a) $x = 2, y = 4$ b) $x = 3, y = 4$ c) $x = 6, y = 8$ d) $x = 8, y = 10$

4. Dane są liczby niewymierne:

$$p = 3 - 2\sqrt{3},\ \ q = 2\sqrt{3},\ \ r = 2\sqrt{3} - 7,\ \ s = 7\sqrt{3}$$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

a) ich suma była liczbą wymierną,
b) ich różnica była liczbą wymierną,
c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
d) ich iloraz był liczbą wymierną.

5. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

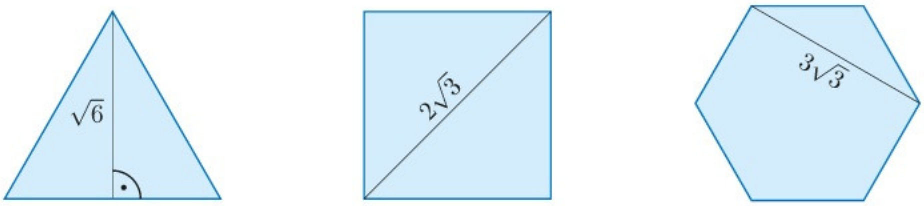
a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$
c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$
d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$
e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$

6. Podaj największą liczbę naturalną n spełniającą nierówność ($\pi \approx 3{,}14$):

a) $n < 2\pi + 5$,
b) $n < \pi^2 - 1$,
c) $n^2 < 10\pi - 7$.

7. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?

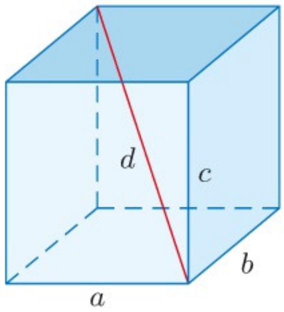


8. Długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Czy długość przekątnej prostopadłościanu o podanych krawędziach jest liczbą niewymierną?

a) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$
b) $a = 3$, $b = 4$, $c = 12$



Sprawdź się

9. Wśród liczb $0{,}1$, -3, 0, $\sqrt{4}$, $-\frac{12}{3}$, $\sqrt[3]{125}$, $-\sqrt{3}$, $121\frac{1}{3}$, $2 - \sqrt{2}$ wskaż liczby:

a) naturalne,
b) całkowite,
c) wymierne,
d) niewymierne.

10. Podaj liczbę naturalną n spełniającą warunek:

a) $n < \sqrt{35} < n + 1$,
b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$,
c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$.

11. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach a, b jest liczbą wymierną?

a) $a = 5$, $b = 12$
b) $a = 6$, $b = 10$
c) $a = 7$, $b = 24$

Przypomnij sobie

Działania na ułamkach dziesiętnych i zwykłych

1. Oblicz.

a) $16{,}29 + 12{,}82$ c) $-0{,}81 + 23{,}5$ e) $-41{,}2 - 9{,}86$

b) $147{,}09 + 14{,}709$ d) $12{,}68 - 10{,}24$ f) $4{,}36 - (-3{,}8)$

2. Oblicz.

a) $24{,}8 \cdot 2{,}1$ c) $5{,}32 \cdot (-5{,}5)$ e) $-(0,07 \cdot 0{,}052)$

b) $10{,}5 \cdot 3{,}2$ d) $(-0{,}34) \cdot (-1{,}5)$ f) $-\big(3{,}2 \cdot (-0{,}05)\big)$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.
>
> a) $\frac{7}{20}$
>
> $$\begin{array}{r} \underline{0{,}35} \\ 7 : 20 \\ \underline{-\ 0} \\ 70 \\ \underline{-\ 60} \\ 100 \\ \underline{-\ 100} \\ 0 \end{array}$$
>
> b) $\frac{19}{4}$
>
> $$\begin{array}{r} \underline{4{,}75} \\ 19 : 4 \\ \underline{-\ 16} \\ 30 \\ \underline{-\ 28} \\ 20 \\ \underline{-\ 20} \\ 0 \end{array}$$

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{21}{8}$ e) $\frac{13}{20}$ f) $\frac{16}{25}$ g) $\frac{49}{50}$ h) $\frac{11}{125}$

4. Oblicz.

a) $1{,}75 : 0{,}25$ c) $8{,}4 : 1{,}5$ e) $0{,}0525 : (-0{,}42)$

b) $0{,}65 : 1{,}3$ d) $3{,}96 : 0{,}06$ f) $0{,}001 : (-0{,}000001)$

5. Oblicz.

a) $\frac{2}{3} + 0{,}5 \cdot 3$ c) $\left(1\frac{6}{7} + 0{,}7\right) \cdot 2$ e) $\frac{30}{25} - (1{,}2 - 2)$

b) $\frac{1}{5} - 4 : 0{,}8$ d) $\left(5\frac{1}{8} + 7{,}125\right) : 2$ f) $3{,}25 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

6. Oblicz.

a) $6{,}4 : 2\frac{2}{15} - 24{,}8 : \frac{4}{5}$ b) $2\frac{1}{2} + 3(6{,}2 + 4{,}8)$ c) $24{,}75 : \frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4}$

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, … (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0{,}15$; $\frac{37}{1000} = 0{,}037$; $5\frac{7}{10} = 5{,}7$.

Zapis po prawej stronie powyższych równości nazywamy **rozwinięciem dziesiętnym** lub **postacią dziesiętną** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3{,}25$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166666666\ldots$$

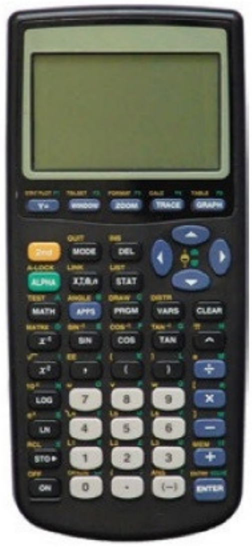
Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\,571428\,571428\ldots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0{,}(571428)$.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Nawias w rozwinięciu dziesiętnym oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką najkrótszą powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**, a rozwinięcie dziesiętne możemy też nazwać **okresowym**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{52}{25}$ e) $\frac{4}{125}$

b) $\frac{11}{25}$ d) $\frac{143}{50}$ f) $\frac{17}{250}$

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 0,(1234) b) 5,(732) c) 2,6(435) d) 0,32(1410)

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie i podaj długość okresu nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego każdej z liczb $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{27}$.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub nieskończonej okresowej.
Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

a) Które z liczb wymiernych $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$ mają rozwinięcia skończone, a które nieskończone?
b) Które z liczb $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

Przybliżenia. Reguła zaokrąglania

Mówimy, że liczba x jest **przybliżeniem** liczby a z dokładnością do d, jeśli liczby a i x różnią się o nie więcej niż d. Na przykład liczba 1,414 jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$

Ćwiczenie 5

Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do:

a) 0,1, b) 0,01, c) 0,0001, d) 0,00001.

Do przybliżenia liczby zapisanej w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami, przy czym:
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do:
- trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987,
- dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99,
- jednego miejsca po przecinku – liczba 7.

Zaokrągleniem liczby nazywamy jej przybliżenie zgodne z regułą zaokrąglania.

Ćwiczenie 6

Zaokrąglij do liczby całkowitej.

a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Ćwiczenie 7

Podaj zaokrąglenia liczb $x = 7{,}89517$, $y = 9{,}99625$ i $z = 5{,}90394$ do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 4$, b) $n = 3$, c) $n = 2$, d) $n = 1$.

Jeżeli przybliżenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Czy wiesz, że...

W 2002 r. Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

```
3,14159265358979323846264338327950 2
```

3,141592653589793238462643383279502
88419716939937510582097494459230781
640628620899862803482534211706798 21
480865132823066470938446095505822 31
725359408128481117450284102701938 52
110555964462294895493038196442881 09
756659334461284756482337867831652 71
201909145648566923460348610454326 64

Ćwiczenie 8

Podaj zaokrąglenie liczby π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Zadania

1. Znajdź postać dziesiętną liczby (nie korzystaj z kalkulatora):

a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{27}{4}$, c) $-\frac{1}{8}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{5}{8}$, f) $\frac{11}{8}$, g) $\frac{3}{80}$, h) $\frac{7}{80}$.

2. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby:

a) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{1}{300}$, e) $\frac{11}{30}$,

b) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{5}{900}$, f) $\frac{17}{90}$.

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\ldots$

$\frac{1}{6} = 0{,}16666666\ldots$

$\frac{1}{9} = 0{,}11111111\ldots$

3. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglij tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345)

4. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?

5. Liczba o rozwinięciu okresowym $7{,}19(1ab693)$ ma na jedenastym miejscu po przecinku cyfrę 3, a na dwudziestym drugim – cyfrę 6. Wyznacz cyfry a i b tego rozwinięcia.

6. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie ułamka jest skończone czy okresowe.

a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

> Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest iloczynem pewnej liczby czynników równych 2 lub 5.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Przedstaw liczbę $0{,}(12)$ w postaci ułamka zwykłego.
>
> $$x = 0{,}121212\ldots$$
> $$100x = 12{,}121212\ldots$$
> Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.
> $$100x = 12 + x$$
> $$99x = 12$$
> $$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) $0{,}(36)$ b) $3{,}(72)$ c) $-6{,}(24)$ d) $0{,}(9)$ e) $41{,}7(9)$ f) $2{,}1(52)$

8. Liczby $x = 0{,}(6)$ i $y = 4{,}(36)$ przedstaw w postaci ułamków zwykłych, a następnie oblicz: a) $x + y$, b) $x^2 - y$, c) $x + \frac{1}{y}$.

Sprawdź się

9. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej (nie korzystaj z kalkulatora):

a) $\frac{19}{4}$, c) $\frac{15}{400}$, e) $\frac{25}{8}$, g) $\frac{7}{3}$, i) $\frac{2}{9}$,

b) $\frac{7}{40}$, d) $-\frac{59}{8}$, f) $\frac{26}{3}$, h) $-\frac{58}{9}$, j) $\frac{5}{80}$.

10. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby (nie korzystaj z kalkulatora)?

a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{19}{60}$ e) $\frac{7}{27}$

11. Podaj przybliżoną wartość $\sqrt{5}$ z dokładnością do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 7$, b) $n = 5$, c) $n = 1$.

> $\sqrt{5} \approx 2{,}23606798$

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (pierwiastkiem drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b, której kwadrat jest równy a.

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geqslant 0$$

Przykład 1

$\sqrt{25} = 5$, ponieważ $5^2 = 25$.

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, ponieważ $0{,}4^2 = 0{,}16$.

$\sqrt{0} = 0$, ponieważ $0^2 = 0$.

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6, chociaż $(-6)^2 = 36$, ponieważ w definicji założyliśmy, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
$20^2 = 400$
$21^2 = 441$
$22^2 = 484$
$23^2 = 529$
$24^2 = 576$
$25^2 = 625$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{625}$ g) $\sqrt{1{,}21}$

b) $\sqrt{225}$ e) $\sqrt{2500}$ h) $\sqrt{3{,}61}$

c) $\sqrt{324}$ f) $\sqrt{8100}$ i) $\sqrt{4{,}41}$

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geqslant 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

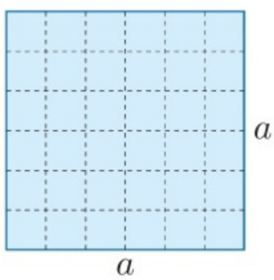
Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$.

Ćwiczenie 2

Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1{,}2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3{,}24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2.

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład 2

a) $\sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt{4 \cdot 81}$, $\sqrt{25 \cdot 0{,}36}$, $\sqrt{0{,}09 \cdot 361}$

b) $\sqrt{\frac{121}{144}}$, $\sqrt{\frac{361}{400}}$, $\sqrt{\frac{576}{625}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$, $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$

b) $\sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$

c) $\sqrt{0{,}25} + \sqrt{1{,}44} + \sqrt{6{,}25}$

d) $\sqrt{3{,}61} - \sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}09}$

e) $\sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$

f) $\sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$

D **2.** Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$, b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$.

3. Podaj wszystkie liczby naturalne leżące na osi między liczbami:

a) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{33}$, b) $\sqrt{10}$ i $\sqrt{140}$, c) $\sqrt{80}$ i $\sqrt{300}$.

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{48}$ e) $\sqrt{108}$ g) $\sqrt{392}$

b) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{96}$ f) $\sqrt{252}$ h) $\sqrt{450}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} =$
$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$.

a) $4\sqrt{2} + \sqrt{8}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{98}$ e) $\sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$

b) $\sqrt{32} - 3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{200} - \sqrt{50}$ f) $\sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$

6. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$.

a) $7\sqrt{5} + \sqrt{20}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ e) $0{,}2\sqrt{50} + 0{,}8\sqrt{72} - 0{,}3\sqrt{32}$

b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ d) $\sqrt{45} - \sqrt{125}$ f) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak jak w przykładzie.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$ d) $\frac{5\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$

b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

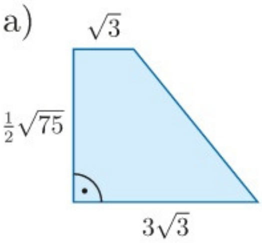
10. Oblicz.

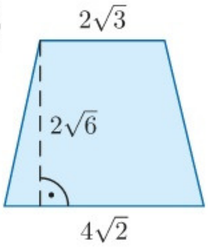
a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

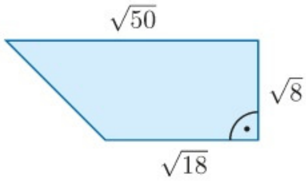
11. Wykonaj działania.

a) $2\sqrt{3}\left(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)$ b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

12. Oblicz pole trapezu.

a)


b)


c)


Sprawdź się

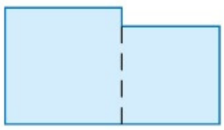
13. Oblicz.

a) $\sqrt{81} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{0{,}49} + \sqrt{0{,}64}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{100}}$

14. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $5\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ f) $1{,}5\sqrt{6}$

15. Figurę przedstawioną na rysunku obok można rozciąć na dwa kwadraty o polach 6,25 i 4,41. Oblicz obwód tej figury.



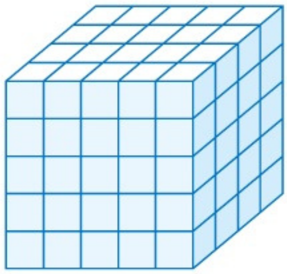
16. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta.

a) $P = 98\ \text{cm}^2$ b) $P = 6{,}48\ \text{cm}^2$ c) $P = \frac{1}{8}\ \text{m}^2$ d) $P = \frac{1}{72}\ \text{m}^2$

1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek *n*-tego stopnia

Pierwiastek sześcienny z liczby nieujemnej

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V. Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm, bo $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (pierwiastkiem trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, ponieważ $2^3 = 8$.

b) $\sqrt[3]{0} = 0$, ponieważ $0^3 = 0$.

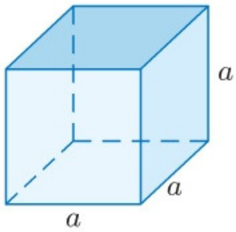
c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, ponieważ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

d) $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$, ponieważ $0{,}6^3 = 0{,}216$.

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3, więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V.

a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych obok.

a) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[3]{1331}$ e) $\sqrt[3]{1{,}331}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$11^3 = 1331$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.
Na przykład $\sqrt[3]{11^3} = 11$ oraz $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3 = 9$.

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego.

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0{,}001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0{,}1 \cdot 7 = 0{,}7$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}} - \sqrt[3]{\dfrac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj przykład w ramce. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.
Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{1000}}$

Pierwiastek *n*-tego stopnia

Ogólnie dla pierwiastka n-tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geqslant 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0{,}0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$

b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

$\sqrt[8]{256} = 2$, bo $2^8 = 256$.
$\sqrt[9]{-512} = -2$, bo $(-2)^9 = 512$.

Zadania

1. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0{,}125} + \sqrt[3]{0{,}001}$

b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{135}$ e) $\sqrt[3]{108}$

b) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{375}$ f) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} =$
$= \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $2\sqrt[3]{3}$ c) $3\sqrt[3]{3}$ e) $4\sqrt[3]{10}$

b) $3\sqrt[3]{2}$ d) $6\sqrt[3]{2}$ f) $6\sqrt[3]{5}$

$3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{6} =$
$= \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$

5. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2{,}25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0{,}08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$

b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}064}}{\sqrt[3]{0{,}125}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{0{,}081}}{\sqrt[3]{0{,}192}}$

7. Objętość prostopadłościanu o wymiarach x cm $\times$ y cm $\times$ z cm jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

a) $x = 4,\ y = 4,\ z = 32$ b) $x = 16,\ y = 20,\ z = 25$

8. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o podanych wymiarach. Oblicz wysokość tej wieży.

a) $4\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ b) $6{,}25\text{ cm} \times 7{,}5\text{ cm} \times 8\text{ cm}$

9. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[4]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0{,}01}$

$$2\sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{5} = \\ = \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120}$$

10. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10\,000}$

c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \dfrac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0{,}001}} - \sqrt[5]{32}$

d) $2\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\dfrac{256}{625}}$

e) $6\sqrt[4]{0{,}0625} - 3\sqrt[4]{0{,}0081}$

f) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$

11. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}001}$ c) $\sqrt[3]{-\dfrac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$

12. Oblicz.

a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$

b) $-\sqrt[3]{\dfrac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0{,}125}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\dfrac{10}{27}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \dfrac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \dfrac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

D **13.** Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16},\ \ y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1},\ \ z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$

b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81},\ \ y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81},\ \ z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

Sprawdź się

14. Oblicz.

a) $-\sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}216} + \sqrt[3]{0{,}064}$ c) $\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[3]{-0{,}008}$

15. Która spośród liczb a, b, c, d jest najmniejsza, a która – największa?

a) $a = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18},\ \ b = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32},\ \ c = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81},\ \ d = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{-27}$

b) $a = \sqrt{\dfrac{27}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \ b = \dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}},\ \ c = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8},\ \ d = \sqrt[3]{-\dfrac{5}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{25}{2}}$

1.7. Potęga o wykładniku naturalnym

Przykład 1

Załóżmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{10 półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

wykładnik potęgi

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}}$$

podstawa potęgi

Przyjmujemy również, że: $\boldsymbol{a^1 = a}$ oraz $\boldsymbol{a^0 = 1}$ dla $a \neq 0$.

Nie definiujemy wartości 0^0.

Przykład 2

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

c) $(-3)^1 = -3$

d) $16^0 = 1$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) 9^2, 9^3, 9^4

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0,\ (-2)^4,\ (-2)^9,\ (-3)^4,\ (-3)^9$$

Twierdzenie

Dla liczb naturalnych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dla $m > n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $2^2 \cdot 2^6$ c) $2^9 : 2^6$ e) $2^6 \cdot 5^6$ g) $6^5 : 3^5$ i) $(2^2)^3$

b) $2^3 \cdot 2^5$ d) $3^9 : 3^5$ f) $4^3 \cdot 5^3$ h) $12^4 : 4^4$ j) $(3^3)^2$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 6^3$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^6$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^8 \cdot (-2)^5$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5^5$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (-2)^3$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-2)^6$

2. Oblicz.

a) $(2^2)^5$ c) $\left((-4)^3\right)^1$ e) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3$ g) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$

b) $(3^2)^2$ d) $\left((-5)^2\right)^2$ f) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2$ h) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right)^2$

3. Porównaj liczby x i y.

a) $x = (-4)^2,\ y = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$ c) $x = \left(-\frac{1}{4}\right)^2,\ y = \left(-\frac{1}{4}\right)^4$

b) $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^5,\ y = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$ d) $x = \left(-\frac{2}{3}\right)^3,\ y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

4. Uporządkuj liczby $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$, 2^4, $(-2)^5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ w kolejności rosnącej.

Sprawdź się

5. Oblicz.

a) $2^5 \cdot 2 \cdot 2^5$ b) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^2$ c) $(4^2 \cdot 4^3) : 4^5$ d) $(5^6 : 5^4) \cdot 5^2$

6. Oblicz.

a) $5^3 - (2^2)^3 - 3^0$ d) $3^3 \cdot 2^3 - 36^3 : 9^3$ g) $2^4 \cdot 5^4 + 10^3 - 10^2$

b) $(4^2)^2 - 4^3 + 4^2$ e) $(-2)^4 + (-2)^3$ h) $(3^5 \cdot 2^5) : 6^4$

c) $11^2 + 2^3 \cdot \frac{1}{2}$ f) $-2^5 + (-3)^4$ i) $(6^6 : 3^6) \cdot 5^6$

1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza

Określenie potęgi o wykładniku naturalnym możemy rozszerzyć na potęgę o wykładniku całkowitym (w szczególności ujemnym).

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 1

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) 4^{-2} c) $(-3)^{-2}$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ i) $0{,}2^{-2}$

b) 4^{-3} d) $(-3)^{-3}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ j) $(-0{,}2)^{-3}$

Ćwiczenie 2

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^{3}$ b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{6}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$ c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{5}$

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują potęgi o wykładnikach całkowitych, możemy wykorzystywać analogiczne prawa działań na potęgach jak dla wykładników naturalnych.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$ c) $(2^5)^{-2}$ e) $5^{-9} : 5^{-11}$ g) $6^5 : 3^5$ i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7$ d) $(0{,}25^{-1})^{-4}$ f) $4 : 4^{-4}$ h) $10^{10} : 5^{10}$ j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

> Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:
> $$\boldsymbol{a = x \cdot 10^{n}}$$
> gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leqslant x < 10$, a n – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 2

a) $3\underbrace{26\,000\,000\,000}_{11\text{ cyfr}} = 3{,}26 \cdot 10^{11}$

b) $0{,}\underbrace{0000009}_{7\text{ cyfr}}7 = 9{,}7 \cdot 10^{-7}$

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $5\,020\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ ton (masa Syriusza)

b) $0{,}00027$ mm (wielkość wirusa ospy)

c) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,029\,9$ kg (masa cząsteczki wody)

d) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,910\,956$ kg (masa elektronu)

Ćwiczenie 5

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $6\,320\,000$ c) $43{,}728$ e) $0{,}00065$ g) $0{,}100324$

b) $109\,000\,000$ d) $8765{,}2$ f) $0{,}00302$ h) $0{,}000001$

Ćwiczenie 6

Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $8{,}62 \cdot 10^{4}$ b) $7{,}89 \cdot 10^{-4}$ c) $8{,}34 \cdot 10^{-5}$ d) $6{,}02 \cdot 10^{0}$

Ćwiczenie 7

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $(3{,}4 \cdot 10^{7}) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$

b) $(1{,}4 \cdot 10^{3}) \cdot (8 \cdot 10^{2})$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{-1}) : (1{,}6 \cdot 10^{-3})$

d) $(7{,}2 \cdot 10^{-3}) : (1{,}2 \cdot 10^{-2})$

> Oblicz.
> $(5{,}2 \cdot 10^{9}) \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-7}) = 5{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{9-7} =$
> $= 2{,}6 \cdot 10^{2} = 260$

Zadania

1. Oblicz.

a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5}

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^4$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-6}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\left(\sqrt{2}\right)^7$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-8}$

2. Zapisz liczbę w postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

a) 16, $\frac{1}{64}$, 8^3, $\left(\sqrt{2}\right)^4$, 1024^2

b) $\frac{1}{81}$, 27, 9^{-2}, $\left(\sqrt{3}\right)^6$, 81^{-5}

c) $0{,}001$, 100^5, $\left(\frac{1}{100}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^{-6}$

d) 25^{-3}, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{125}\right)^4$, 625^{-5}

4. Oblicz.

a) $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$ c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3}$ d) $\left(\left(-3\sqrt{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$

5. Oblicz.

a) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$ c) $8^{-4} \cdot 4^4$ e) $\left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{17}{14}\right)^5$ g) $(-0{,}2)^{-8} : 5^8$

b) $0{,}2^{-5} \cdot 5^{-5}$ d) $18^{-3} : 6^{-3}$ f) $1{,}3^{-2} : 0{,}1^{-2}$ h) $(-1{,}2)^{-5} : \left(\frac{6}{5}\right)^{-5}$

6. Oblicz.

a) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4}$ b) $\left(\frac{2}{21}\right)^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3}$ c) $0{,}4^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 : 4^{-3}$

7. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$ b) $x = \left(2^{-4} : 2^{-6}\right)^{-1}$, $y = \left(2^{-4} \cdot 2^{-3}\right)^{-1}$

8. Oblicz.

a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$ c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$ e) $\left(0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-6} - 2 \cdot 16^4\right) : 7^3$

b) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$ d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2}$ f) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$

9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $a = -\frac{1}{2}$.

a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$ c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$ e) $\left(a^{-1} \cdot a^6\right)^{-2} \cdot \left(a^{-3}\right)^2$

b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$ d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$ f) $\left(a^5 : a^{-4}\right)^2 : \left(a^{-4}\right)^{-1}$

10. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0{,}0125$ c) $0{,}0044 \cdot 0{,}055$ d) $0{,}0605 \cdot 8600$

11. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$

b) $243\,000\,000\,000 : 2{,}7$

c) $51\,000\,000\,000 : 0{,}017$

d) $102\,400\,000\,000 : 0{,}64$

12. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(3{,}2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{4})}{4 \cdot 10^{-18}}$

b) $\frac{(5{,}2 \cdot 10^{8}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})}{1{,}3 \cdot 10^{18}}$

c) $\frac{(3{,}4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-16})}{2{,}5 \cdot 10^{-30}}$

d) $\frac{(4{,}8 \cdot 10^{18}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{16})}$

13. W tabeli podano wybrane prędkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	?	$4{,}6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,00194	?
Ziemia wokół Słońca	?	$2{,}96 \cdot 10^{4}$
Światło w próżni	299 792 458	?

Sprawdź się

14. Oblicz.

a) 8^{-2}, $(-8)^2$, -8^{-2}, $-\left(-\frac{1}{8}\right)^2$

b) 4^3, $(-4)^{-3}$, -4^{-3}, $-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}$, $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

d) $(\sqrt{2})^{-6}$, $(-\sqrt{2})^{6}$, $-(-\sqrt{2})^{-6}$

15. Oblicz.

a) $6^{-3} \cdot 6^5$

b) $4^{-8} \cdot 4^6$

c) $0{,}5^{-4} \cdot 0{,}5^{-1}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

e) $5^{-10} : 5^{-7}$

f) $7^{-4} : 7^{-6}$

g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

h) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{8}{3}\right)^{-8}$

i) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$

j) $(6^{-2})^5 \cdot 6^8$

k) $(4^{-3})^{-4} : 4^9$

l) $(8^4)^{-2} : 8^{-10}$

16. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości x.

a) $(x^{-3})^{-2} + (x^{-1})^{-6}$, $x = -2$

b) $\left((x^4)^{-3}\right)^{-2} : \left((x^2)^{-2}\right)^{-3}$, $x = 1$

c) $\left(\left((x^{-3})^2 : x^{-4}\right) : x^0\right)^{-2}$, $x = 5$

d) $\left((x^3)^6 + (x^{-2})^{-9}\right) : (x^{-5})^{-3}$, $x = \frac{3}{2}$

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion, a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd. z końcowką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	sekstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylion
36	sekstylion	undecylion
39	sekstyliard	duodecylion
42	septylion	tradecylion
45	septyliard	kwatuordecylion
48	oktylion	kwindecylion
51	oktyliard	seksdecylion
54	nonylion	septendecylion

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczającą 10^{100}.

1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

1 Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Słońce i planety

Poniżej podano masy: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.

Słońce
$1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Merkury
$3{,}302 \cdot 10^{23}$ kg

Ziemia
$5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg

Jowisz
$1{,}899 \cdot 10^{27}$ kg

2 Zapisz masy Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęgę o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(\sqrt{10}\right)^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $\left(\sqrt[8]{625}\right)^2$ g) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$ i) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{49}}\right)^3$

b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Dla liczb wymiernych x, y oraz dodatnich liczb rzeczywistych a i b:
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ d) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-2,5}\right)^{-0,6}$ e) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładnikach wymiernych, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$10^{0,3} \approx 1{,}995262315$

$10^{0,45} \approx 2{,}818382931$

$10^{0,625} \approx 4{,}216965034$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0{,}5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.

a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7\sqrt[5]{7}$

3. Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0{,}5}$ g) $10\,000^{0{,}25}$

b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0{,}75}$ h) $81^{-0{,}125}$

4. Oblicz.

a) $0{,}04^{\frac{3}{2}}$ c) $0{,}027^{\frac{2}{3}}$ e) $0{,}0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0{,}0081^{-1{,}25}$

b) $0{,}16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0{,}00032^{\frac{3}{5}}$ h) $0{,}00000256^{0{,}375}$

5. Oblicz.

a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ c) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ e) $0{,}008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ g) $0{,}0256^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

b) $2^4 : 32^{\frac{1}{5}}$ d) $27^{\frac{2}{3}} : 9^{-\frac{3}{2}}$ f) $0{,}04^{\frac{1}{2}} : 64^{\frac{1}{3}}$ h) $0{,}027^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{27^2}$

Sprawdź się

6. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[5]{81}$ g) $3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{3}$ d $\sqrt{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt[3]{243}$ h) $9\sqrt[3]{3}$

7. Oblicz.

a) $25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$ c) $32^{\frac{1}{5}} + 81^{\frac{1}{4}}$ e) $4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ g) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$

b) $49^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$ d) $64^{\frac{1}{6}} - 16^{\frac{1}{4}}$ f) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}$ h) $0{,}008^{-\frac{1}{3}} - 0{,}25^{-\frac{1}{2}}$

8. Oblicz.

a) $16^{\frac{5}{4}}$ b) $64^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{5}{3}}$ d) $25^{-\frac{3}{2}}$ e) $81^{-\frac{3}{4}}$

9. Oblicz.

a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}$ b) $49^{\frac{1}{2}} : 49^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{7^5} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$ d) $9^{-\frac{3}{4}} : 27^{-\frac{3}{2}}$

1.10. Logarytm i jego własności

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$.

b) $\log 0{,}1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0{,}1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Pytanie o wartość $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0{,}01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatrywane są też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z dodatniej liczby b jest taka liczba x, że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$.

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Pytanie o wartość $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.

$$\boldsymbol{\log_a b = x, \ \text{gdy} \ a^x = b}$$

Przykład 3

a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_{25} 625 = 2$, ponieważ $25^2 = 625$.

liczba logarytmowana

$$\log_a b = x$$

logarytm

podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3
Oblicz.

a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D
Ćwiczenie 4
Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Czy wiesz, że...

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on tablice takich logarytmów.

W obliczeniach są wykorzystywane następujące własności logarytmów (ich dokładne omówienie i dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie
Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$ logarytm iloczynu

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$ logarytm ilorazu

$$\log_a b^p = p \log_a b$$ logarytm potęgi

Przykład 4
a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$

b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5
Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5
a) $\log_2 \frac{0{,}25}{32} = \log_2 0{,}25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$

b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6
Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

a) $\log_2 \frac{0{,}5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0{,}125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\log_2 8^5 = 5\log_2 8 = \\ = 5\cdot 3 = \\ = 15$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

4. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a 16 = 1$ c) $\log_a 16 = -1$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 4,\ y = 16$ b) $x = 8,\ y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{8}$

6. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 27,\ y = 3$ b) $x = 81,\ y = 9$ c) $x = 3,\ y = \sqrt{3}$

7. Oblicz.

a) $\log 2 + \log 5$ c) $\log 250 + \log \frac{2}{5}$ e) $\log 1250 - \log \frac{5}{4}$

b) $\log 8 + \log 125$ d) $\log 150 - \log 15$ f) $\log \frac{1}{3} - \log 3\frac{1}{3}$

Sprawdź się

8. Oblicz.

a) $\log_2 1 + \frac{1}{2}\log_2 16$ c) $\log_4 4 - \log_4 64$ e) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}} 3$

b) $\log_3 27 - \log_4 1$ d) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_4 2 + \log_9 3$

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{10} b = 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_8 b = -1$

1.11. Procenty

Obliczanie procentu danej liczby

1 procent (1%) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$1\%w = \frac{1}{100}w = 0{,}01w, \qquad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0{,}15w, \qquad 240\%w = \frac{240}{100}w = 2{,}4w$

Przykład 1

a) Oblicz 4% liczby 300.

$4\% \cdot 300 = \frac{4}{\cancel{100}_1} \cdot \cancel{300}^3 = 12$

b) Oblicz 110% liczby 600.

$110\% \cdot 600 = 1{,}1 \cdot 600 = 660$

Ćwiczenie 1

Oblicz:

a) 1%, 5%, 25%, 75% liczby 600,

b) 2%, 8%, 40%, 120% liczby 250.

Ćwiczenie 2

Oblicz:

a) 20% liczby 500,

b) 40% liczby 800,

c) 15% liczby 400,

d) 80% liczby 15,

e) 150% liczby 48,

f) 210% liczby 20.

Przykład 2

W tabeli podano ceny owoców w pewnym sklepie przed podwyżką i wysokość powyżki. Oblicz, ile po podwyżce trzeba było zapłacić za 2 kg gruszek i 4 kg śliwek w tym sklepie.

Owoce	Cena	Podwyżka
śliwki	8 zł/kg	o 15%
gruszki	6 zł/kg	o 20%

Cena gruszek po podwyżce: $6 \cdot 120\% = 6 \cdot 1{,}2 = 7{,}20$ [zł/kg].

Cena śliwek po podwyżce: $8 \cdot 115\% = 8 \cdot 1{,}15 = 9{,}20$ [zł/kg].

Za 2 kg gruszek i 4 kg śliwek po podwyżce trzeba było zapłacić:

$$2 \cdot 7{,}20 + 4 \cdot 9{,}20 = 14{,}40 + 36{,}80 = 51{,}20 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Karolina kupiła czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki). Oblicz, ile zapłaciła.

Produkt	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Przykład 3

Kurtka kosztowała 400 zł. Jej cenę dwukrotnie obniżono, za każdym razem o 10%. Ile kosztowała kurtka po tych obniżkach? Ile kosztowałaby ta kurtka, gdyby początkową cenę obniżono jednorazowo o 20%?

Cena kurtki po pierwszej obniżce o 10%: $400 \cdot 90\% = 400 \cdot \frac{90}{100} = 360$ [zł].
Cena kurtki po drugiej obniżce o 10%: $360 \cdot 90\% = 360 \cdot \frac{90}{100} = 324$ [zł].

Cena kurtki po jednorazowej obniżce o 20%: $400 \cdot 80\% = 400 \cdot \frac{80}{100} = 320$ [zł].

Ćwiczenie 4

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby te narty, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Przykład 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru, za każdym razem o $p\%$, jego cena spadła o 75%. Oblicz p.

Oznaczmy przez k cenę towaru przed obniżkami. Zauważmy, że cena towaru po obniżkach wynosiła $25\%k$. Zatem:

$$k \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{25}{100} \cdot k$$
$$\left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{25}{100}$$

Stąd $p = 50$. Zatem cenę towaru dwukrotnie obniżono o 50%.

Ćwiczenie 5

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p dla: a) $x = 19$, b) $x = 36$, c) $x = 51$.

Przykład 5

Cenę pewnego towaru obniżono o 20%. O ile procent należy podnieść tę cenę, aby otrzymać cenę początkową?

Oznaczmy przez k cenę początkową. Po obniżce o 20% cena wynosi $0{,}8k$. Cenę tę należy podnieść o $x\%$ tak, aby $(100\% + x\%) \cdot 0{,}8k = 100\%k$, skąd:

$$100\% + x\% = \frac{100\%}{0{,}8} = 125\%$$

Zatem cenę należy podnieść o 25%.

Ćwiczenie 6

Cenę pewnego towaru obniżono o 60%. O ile procent należy podnieść tę cenę, aby otrzymać cenę początkową?

W niektórych zagadnieniach rozpatruje się dziesiątą część procentu, czyli promil.

1 promil (1‰) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 7

Oblicz:

a) 2‰ liczby 300,
c) 50‰ liczby 100,
e) 0,2‰ liczby 1800,
b) 8‰ liczby 1400,
d) 5‰ liczby 1000,
f) 5,5‰ liczby 180.

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 6

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2{,}25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 8

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

Firma	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,30 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 9

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x.

a) $x = 100$, $y = 50$
b) $x = 50$, $y = 40$
c) $x = 10$, $y = 16$

Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 7

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% ceny x:
$\frac{85}{100}x = 272$ i stąd $x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320$ [zł].

Ćwiczenie 10

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli z przykładu 7 przed obniżką.

Zadania

1. Oblicz:

a) 20% liczby 80, c) 11% liczby 40, e) 15‰ liczby 300,

b) 40% liczby 60, d) 401% liczby 40, f) 2‰ liczby 2.

2. Która liczba jest większa:

a) 12% liczby 20 czy 10% liczby 25,

b) 45% liczby 30 czy 6% liczby 250,

c) 55% liczby 200 czy 18% liczby 600,

d) 150% liczby 20 czy 5% liczby 6000?

Czy wiesz, że...
Słowa „procent” i „promil” pochodzą od łacińskich wyrażeń: procent: *per centum* – na sto, promil: *pro mille* – na tysiąc.

3. Oblicz, jakim procentem liczby 600 jest podana liczba.

a) 150 b) 1860 c) 270 d) 450

4. Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b.

a) $a = 80$, $b = 20$ c) $a = 800$, $b = 44$ e) $a = 60$, $b = 90$

b) $a = 160$, $b = 12$ d) $a = 450$, $b = 36$ f) $a = 90$, $b = 342$

5. Oblicz liczbę, której:

a) 15% jest równe 30, c) 45% jest równe 900,

b) 60% jest równe 240, d) 12% jest równe 14,4.

6. Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

7. Cenę sukni ślubnej obniżono o p%. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo, ile przed obniżką?

a) $p = 50$ b) $p = 25$ c) $p = 36$

8. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o p%. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, aby towar ten kosztował tyle, ile na początku?

a) $p = 25$ b) $p = 50$

9. Wycieczka do Londynu kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:

a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,

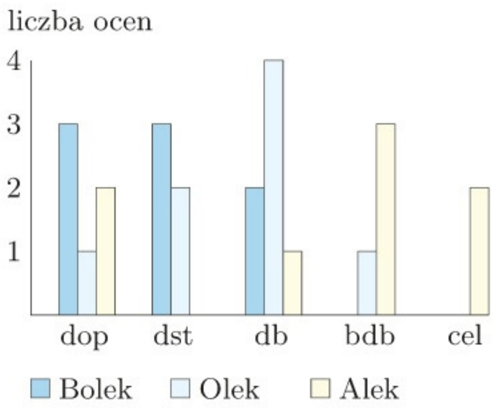
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,

c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?

10. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.

a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?

b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?



11. Oblicz $p\%$ liczby x.

a) $x = 2^3 \cdot 5^2$, $p = 55$ b) $x = \sqrt[4]{16} \cdot 5^2$, $p = 12$ c) $x = \sqrt[3]{64} \cdot 5^4$, $p = 0{,}2$

12. Wyznacz liczbę, której $p\%$ jest równe y.

a) $y = 2^0 \cdot 3^4$, $p = 50$ b) $y = 2^2 \cdot 5^{-2}$, $p = 20$ c) $y = 2^{-1} : 2^2$, $p = 12{,}5$

Sprawdź się

13. Oblicz:

a) 5%, 10%, 20% liczby 200,

b) 2%, 4%, 12% liczby 50,

c) 3%, 6%, 30%, 270% liczby 150,

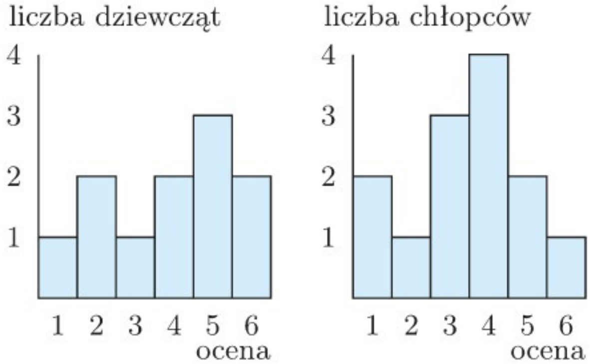
d) 8%, 15%, 45%, 125% liczby 400.

14. Oblicz:

a) 4‰ liczby 600, b) 5‰ liczby 240, c) 16‰ liczby 550.

15. Wyznacz liczbę, której: a) 30% jest równe 45, b) 120% jest równe 90.

16. Na diagramach przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ocenę dobrą, a ile procent – ocenę pozytywną.



17. O ile procent liczba x jest większa od liczby y? O ile procent liczba y jest mniejsza od liczby x?

a) $x = 32$, $y = 20$

b) $x = 60$, $y = 48$

c) $x = 8$, $y = 6$

d) $x = 2{,}4$ $y = 0{,}6$

e) $x = 22$, $y = 4{,}4$

f) $x = 80$, $y = 25$

Powtórzenie

Zestaw I

1. Podaj wszystkie naturalne dzielniki liczby:

a) 18, b) 38, c) 40, d) 58, e) 68.

2. Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:

a) 5, b) 6, c) 7, d) 15, e) 45?

3. Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.

a) $23 : \left(-7\frac{2}{3}\right) - \frac{324}{243}$
c) $\left(-6\frac{2}{3}\right) : \left(-7\frac{1}{7}\right) - \sqrt{\frac{169}{225}}$
e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - \left(-1\frac{1}{6}\right) : \frac{7}{5}$
b) $\left(-2\frac{3}{5}\right) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$
f) $4\frac{3}{4} : \left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$

4. Podaj liczbę przeciwną do liczby x i liczbę odwrotną do liczby y.

a) $x = \left(3\frac{1}{4} - 1{,}5\right) \cdot \left(-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right), \quad y = \left(2{,}25 - 3\frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$

b) $x = \left(1\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) : \left(1\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right), \quad y = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}35 - 1\frac{1}{3} : \left(-1\frac{1}{2}\right)$

c) $x = -48 : 0{,}6 + 1\frac{2}{3} \cdot 54 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}, \quad y = 1\frac{1}{3} \cdot \left(-3\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}\right) \cdot 0{,}5$

d) $x = 0{,}3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) : 0{,}75, \quad y = \left(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot (-0{,}8) + 1{,}44 : 2\frac{2}{5}$

5. Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.

a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3},\ 14 - \sqrt{196},\ 2\sqrt{16} - \sqrt{36}$
c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4},\ \sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}},\ \sqrt{1\frac{4}{25}},\ \sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$
d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49},\ \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$

6. Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$
c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$
e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$
g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$
d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$
f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$
h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$

7. a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ oraz $y = 4 - \sqrt{5}$ i ich różnicy.
b) Oblicz sześcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0{,}(9) - \sqrt[3]{3}$.
c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0{,}(2) \cdot \sqrt{3}$.

D **8.** Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.

a) $\log_3 6 + \log_3 1{,}5$
c) $\log 625 + \log 16$
e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0{,}75$
d) $\log 175 - \log 1\frac{3}{4}$
f) $\log_2 \sqrt{18} - \log_2 3$

9. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, którego:

a) oba boki skrócono o 20%,

b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

10. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Rok temu należało do niego 216 osób. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu?

11. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

a) $\dfrac{\left(3\frac{1}{4}-1{,}5\right)\cdot\left(-2\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)}{\left(2{,}25-3\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\frac{1}{8}}$

b) $\dfrac{\left(1\frac{1}{6}-\frac{7}{9}\right):\left(1\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}35-1\frac{2}{3}:\left(-2\frac{1}{2}\right)}$

c) $\dfrac{-48:0{,}6+1\frac{2}{3}\cdot 45-1\frac{5}{7}:1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3}\cdot\left(-2\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-5\frac{1}{5}\right)\cdot 0{,}5}$

d) $\dfrac{0{,}3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right):0{,}75}{\left(\frac{3}{4}-1\frac{1}{3}\right)\cdot(-0{,}8)+1{,}44:2\frac{2}{5}}$

Zestaw II

1. a) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest o 15 większa od podwojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

b) Suma czterech kolejnych liczb parzystych jest o 20 większa od potrojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

2. Liczby $x = 0{,}(3)$ i $y = 1{,}(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$, c) $\frac{1}{x}+y^2$, d) $x^2-\frac{1}{y^2}$.

3. Oblicz sumę oraz iloczyn liczb x i y.

a) $x=\sqrt{1\frac{9}{16}}$, $y=\sqrt{5\frac{4}{9}}$

b) $x=\sqrt{\frac{28}{63}}$, $y=\sqrt{\frac{75}{48}}$

c) $x=\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, $y=\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

d) $x=\sqrt[3]{-8}$, $y=\sqrt[3]{-\frac{270}{640}}$

4. Wyznacz liczbę a.

a) $\sqrt{3}=\sqrt[3]{a}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt[3]{a}$

c) $\sqrt{1\frac{1}{3}}=\sqrt[4]{a}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt[4]{a}$

e) $2\sqrt{3}=\sqrt[4]{a}$

f) $3\sqrt{2}=\sqrt[4]{a}$

5. Oblicz $x-\frac{1}{x}$.

a) $x=\sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$

b) $x=\sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$

c) $x=\left(\sqrt{169}-\sqrt{196}\right)^2$

d) $x=\left(\left(\sqrt{225}-10\right)^2\right)^2$

e) $x=\sqrt{88+\sqrt{144}}$

f) $x=\sqrt{\sqrt{6{,}25}-0{,}25}$

6. Oblicz wartość wyrażenia $2m - 3n$.

a) $3^m = 81$, $0{,}5^n = 0{,}125$

b) $6^m = 216$, $0{,}4^n = 2{,}5$

c) $0{,}5^m = 64$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3{,}375$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^m = -27$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^n = -15{,}625$

7. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{8}{9}$.

a) $\frac{(ab)^{-1}}{b^{-2}a^{-2}}$

b) $\frac{ab^2 \cdot (ab)^{-3}}{(a^0 b^{-1})^{-1}}$

c) $\frac{(a^{-1}b^2)^{-3}a^{-2}b^5}{a^2 : (ab)^3}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^{12}}{x^9} = 64$

b) $\frac{x^7}{x^{-3}} = 1024$

c) $\frac{x^5 \cdot x^4}{(x^2)^3} = 27$

d) $\frac{x^7 \cdot x^{-3}}{x^{-1}} = 32$

e) $\frac{\left(x^2\right)^{-3} \cdot x}{\left(x^{-2}\right)^2} = \frac{2}{7}$

f) $\frac{x^{-4} \cdot x^{-7}}{\left(x^2\right)^{-4}} = \frac{1}{8}$

9. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{7}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$

b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$

c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$

d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 25^{0,1}}$

10. Uporządkuj liczby a, b, c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$

b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0{,}04$

11. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(2{,}4 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{13})}{(6 \cdot 10^6) \cdot (3{,}5 \cdot 10^4)}$

b) $\frac{(25 \cdot 10^{-2}) \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{(1{,}5 \cdot 10^{11}) \cdot (5 \cdot 10^{-9})}$

c) $2\,500\,000 \cdot 0{,}0015$

d) $420\,000\,000 : 0{,}003$

12. Oblicz 125% liczby x, gdzie x jest rozwiązaniem podanego równania.

a) $9 - \frac{3}{2}x = 6$

b) $3x - 7 = \frac{1}{2}x + 8$

c) $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}$

13. Oblicz:

a) 6‰ liczby 400,

b) 0,5‰ liczby 64,

c) 20,5‰ liczby 8.

14. Wyznacz liczbę:

a) o 2‰ większą od 100,

b) o 1,6‰ większą od 500.

D **15.** Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \neq 0$ oraz $x + y^{-1} - z^{-2} = 0$, to:

a) $x = \frac{y - z^2}{yz^2}$,

b) $y = \frac{z^2}{1 - xz^2}$, $xz^2 \neq 1$,

c) $z^2 = \frac{y}{1 + xy}$, $xy \neq -1$.

D **16.** Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych:

a) jest podzielna przez 3,

b) parzystych jest podzielna przez 6.

Przykład 1

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

• Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.

• Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci $7n+3$, gdzie $1 \leqslant n \leqslant 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

→ **Zadanie 20, str. 60**

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, aby je wszystkie wypisać.

$$1005 = 15 \cdot 67,\ 1020 = 15 \cdot 68,\ 1035 = 15 \cdot 69,\ \ldots,\ 9990 = 15 \cdot 666$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leqslant n \leqslant 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 66 = 600$.

Odpowiedź: 600

→ **Zadanie 21, str. 60**

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, …, 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci $100+5n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, …, 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci $102+6n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci $120+30n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 29$, takich liczb jest więc 30.

Zatem liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180+150-30=300$.

Odpowiedź: 300

→ **Zadanie 22, str. 60**

W zadaniach 1–12 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczbą podzielną przez 15 jest

A. 9 720 279 **B.** 2 220 205 **C.** 22 222 220 **D.** 23 420 340

Zadanie 2 (0–1)

Liczbą odwrotną do $\frac{0{,}25-\sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2:3}$ jest

A. 6 **B.** 4 **C.** -4 **D.** -6

Zadanie 3 (0–1)

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6-2\pi$ jest

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** -2

Zadanie 4 (0–1)

Liczbą wymierną jest

A. $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{16}}{2}$ **B.** $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{\sqrt{25}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{54}}$

Zadanie 5 (0–1)

Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16}\cdot\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy

A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$ **B.** $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$ **C.** -4 **D.** 4

Zadanie 6 (0–1)

Ułamek $\frac{5^5\cdot 3+2\cdot 5^5}{5^6:5^2}$ jest równy

A. 5^6 **B.** $15+2\cdot 5^5$ **C.** 25 **D.** 5^7

Zadanie 7 (0–1)

Liczba $\log_8 4$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Zadanie 8 (0–1)

Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić

A. 84 zł **B.** 100 zł **C.** 360 zł **D.** 36 zł

Zadanie 9 (0–1)

Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło

A. o 20%. **B.** o 25%. **C.** o 40%. **D.** o 75%.

Zadanie 10 (0–1)

Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa

A. 2^{60} **B.** 8^{15} **C.** 2^{18} **D.** 2^{17}

Zadanie 11 (0–1)

Iloczyn liczb $6{,}4 \cdot 10^8$ i $8{,}5 \cdot 10^{-3}$ jest równy

A. $5{,}44 \cdot 10^5$ **B.** $0{,}544 \cdot 10^6$ **C.** $5{,}44 \cdot 10^6$ **D.** $5{,}44 \cdot 10^7$

Zadanie 12 (0–1)

Liczba b jest o 20% mniejsza od liczby a, zaś liczba c jest o 20% większa od liczby b. Zatem

A. $a = \frac{4}{5}c$ **B.** $a = c$ **C.** $a = \frac{13}{12}c$ **D.** $a = 1\frac{1}{24}c$

Zadanie 13 (0–1)

Dana jest liczba $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0{,}625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podana liczba to liczba całkowita ujemna.	**P**	**F**
Podana liczba to liczba wymierna nieujemna.	**P**	**F**

Zadanie 14 (0–2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczbą wymierną jest

A. $\sqrt{6}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$

B. $\sqrt{6}\left(\sqrt{6} + \sqrt{18}\right)$

C. $\sqrt{8}\left(\sqrt{18} + \sqrt{50}\right)$

D. $\sqrt{8}\left(\sqrt{36} + \sqrt{25}\right)$

E. $\sqrt{12}\left(\sqrt{48} + \sqrt{27}\right)$

F. $\sqrt{12}\left(\sqrt{54} + \sqrt{24}\right)$

G. $\sqrt{18}\left(\sqrt{32} + \sqrt{24}\right)$

H. $\sqrt{18}\left(\sqrt{25} + \sqrt{49}\right)$

Zadanie 15 (0–2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Wartość 2 przyjmuje wyrażenie

A. $\log_2 1 + \log_2 1$

B. $\log_2 4 + \log_2 4$

C. $\log_2 4 - \log_2 2$

D. $\log_2 8 - \log_2 2$

E. $\log_4 4 + \log_4 2$

F. $\log_2 8 + \log_4 2$

G. $\log_4 4 - \log_4 2$

H. $\log_4 8 + \log_4 2$

Zadanie 16

Dane są liczby $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{(-17)^3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{169}{9}}$, $\sqrt{(-2)^2}$.

Zadanie 16.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dokładnie dwie spośród podanych liczb są ujemne.	**P**	**F**
Dokładnie dwie spośród podanych liczb są niewymierne.	**P**	**F**

Zadanie 16.2 (0–1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma dwóch najmniejszych liczb spośród podanych jest równa ?.

Zadanie 17 (0–1)

Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < -1$ oraz $x < y < 0$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Iloczyn liczby o 1 większej od x i liczby y jest

A.	dodatni,	ponieważ	**1.**	jeden z czynników jest równy zero.
B.	równy zero,		**2.**	czynniki są różnych znaków.
C.	ujemny,		**3.**	oba czynniki są ujemne.

Zadanie 18

Dane są liczby $a = 6 - 3\sqrt{48}$ i $b = 8 + 2\sqrt{108}$.

Zadanie 18.1 (0–1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3. Suma liczb a i b jest liczbą

A.	wymierną,	ponieważ	**1.**	suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
			2.	suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną.
B.	niewymierną,		**3.**	suma tych liczb jest równa 14.

Zadanie 18.2 (0–1)

Iloczyn liczb a i b jest równy

A. $24(16 + \sqrt{3})$ **B.** $-24(16 + \sqrt{3})$ **C.** $-24(16 - \sqrt{3})$ **D.** $24(16 - \sqrt{3})$

Zadanie 19 (0–2)
Określ znak iloczynu liczb $a = \frac{13}{5} - 2{,}(5)$ oraz $b = \sqrt{2} - 1{,}(4)$.

Zadanie 20 (0–2) → Przykład 1, str. 56
Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 21 (0–3) → Przykład 2, str. 56
Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i przez 4?

Zadanie 22 (0–4) → Przykład 3, str. 56
Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 23
Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 23.1 (0–2)
Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 23.2 (0–2)
Kwadrat o boku a ma pole równe polu tego trójkąta. Oblicz a.

Zadanie 24 (0–2)
Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. Cena kurtki została obniżona i po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki?

Zadanie 25 (0–2)
Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$ i w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki. Wyznacz p.

Zadanie 26 (0–4)
Dane są liczby $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0{,}2\right)$ i $y = (0{,}5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$. O ile procent liczba x jest większa od liczby y?

Zadanie 27 (0–4)
Woda płynąca z kranów A, B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C?

D **Zadanie 28 (0–4)**
Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.