DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 2

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era

MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, prof. dr hab. Anny Cegiały.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
Rok dopuszczenia: 2020
Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

ISBN 978-83-267-3900-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska
Współpraca redakcyjna: Jan Baranowski, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Marcin Minda, Agnieszka Trzpil-Gajek
Opracowanie odpowiedzi: Jan Baranowski, Ewa Kowalik, Agnieszka Trzpil-Gajek
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska
Redakcja językowa: Paulina Szulim
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn
Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Lech Chańko
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar
Ilustracje na infografikach: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:
MATeMAtyka kl. 1 ZPiR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek, MATeMAtyka kl. 2 ZP i MATeMAtyka kl. 2 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Spis treści

3. Funkcje wymierne

4. Trygonometria

Odpowiedzi do pytań i poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

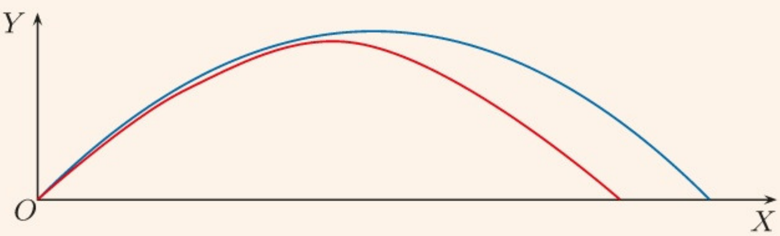
7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Zastosowania funkcji kwadratowej

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub wystrzelonego pod takim kątem pocisku jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak ze względu na opór powietrza tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym).



1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Równanie kwadratowe może mieć dwa pierwiastki, jeden pierwiastek lub może nie mieć pierwiastków.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek podwójny:
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+3}{4} = 3$$

b) Rozwiąż równanie $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}$$

c) Rozwiąż równanie $\frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 4 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny:
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{3}$$

d) Rozwiąż równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 3x - 18 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
e) $x^2 + 3x - 2 = 0$
f) $2x^2 + 4x - 1 = 0$
g) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
h) $3x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
i) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

Aby rozwiązać równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, jego lewą stronę rozkładamy na czynniki.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $-3x^2 + 48x = 0$.

$$-3x(x - 16) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 16 = 0$$

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero.

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 16.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 6x = 0$
b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{12}x = 0$
c) $3x + 4x^2 = 0$
d) $-\frac{2}{3}x - 6x^2 = 0$
e) $5x = 10x^2$
f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}x^2$

Niektóre równania kwadratowe możemy rozwiązać, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $16x^2 - 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$(4x - 1)(4x + 1) = 0$$
$$4x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 4x + 1 = 0$$
$$4x = 1 \quad \text{lub} \quad 4x = -1$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki: $-\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

b) Rozwiąż równanie $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$(2x + 1)^2 = 0$$
$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $4x^2 - 25 = 0$

b) $1 - \frac{9}{4}x^2 = 0$

c) $x^2 + 14x + 49 = 0$

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

e) $25 + x^2 = 10x$

f) $4x^2 + 15 = 20x - 10$

Przypomnijmy, że postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.
Wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ nazywamy **czynnikami liniowymi**.

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej (nie można go rozłożyć na czynniki liniowe).

Przykład 4

Przedstaw trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - x - 3$ w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$, więc trójmian ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$$

Postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego i przedstaw go (jeśli to możliwe) w postaci iloczynowej.

a) $y = 6x^2 + x - 1$

b) $y = 2x^2 - 5x + 2$

c) $y = -x^2 + \frac{10}{3}x - 1$

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$

e) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$

f) $y = -3x^2 + 2x + 2$

g) $y = -9x^2 + 1$

h) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x$

i) $y = 4x^2 - 4x + 2$

Zadania

1. Oblicz wyróżnik równania kwadratowego i określ liczbę jego pierwiastków.

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ g) $8x^2 + 3x = 0$

b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $6x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ h) $5x^2 - 9 = 0$

c) $-3x^2 + 2x + 9 = 0$ f) $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ g) $25x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ f) $-6x^2 + x + 1 = 0$ i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 1 = 5 - 2x^2$ d) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 2$ g) $(1 - x)^2 = \frac{1}{4}$

b) $3(x^2 + 1) = 5$ e) $(x + 1)^2 = (1 - 2x)^2$ h) $(3x + 1)^2 = 9$

c) $(x - 1)^2 = -2x$ f) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)^2$ i) $(2x - 1)^2 = 4$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2-1}{3}$ c) $\frac{(x+2)^2}{2} - 2 = \frac{(x+3)^2}{3}$ e) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{7} - 1$

b) $\frac{x-2}{2} - \frac{x(x-2)}{6} = 0$ d) $\frac{(x+3)^2}{3} = x^2 + \frac{(x+4)^2}{3}$ f) $\frac{(1-3x)^2}{12} - \frac{x^2}{3} = \frac{3-x}{4}$

5. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f. Oblicz $|x_1 - x_2|$.

a) $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ c) $f(x) = \left(x + 2 - \sqrt{5}\right)\left(x + 2 + \sqrt{5}\right)$

b) $f(x) = 4x(x - \sqrt{2})$ d) $f(x) = \left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

6. Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą p.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 13,\ \ p = 8$ c) $f(x) = -4x^2 + 24x,\ \ p = 9$

b) $f(x) = 3x^2 + 11x - 6,\ \ p = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x,\ \ p = -3$

7. Wyznacz argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują równe wartości.

a) $f(x) = x^2 + 12,\ g(x) = -x^2 + 11x$ c) $f(x) = (2x - 1)^2,\ g(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x,\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ d) $f(x) = (3x+2)^2,\ g(x) = (x-4)^2$

8. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 + 2x - 24$ d) $y = -x^2 + 14x - 49$ g) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

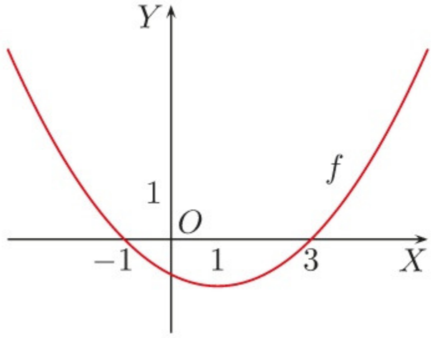
b) $y = 2x^2 - 11x + 15$ e) $y = -4x^2 - 12x - 9$ h) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ f) $y = -3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ i) $y = 3x^2 - 5x + 4$

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3.



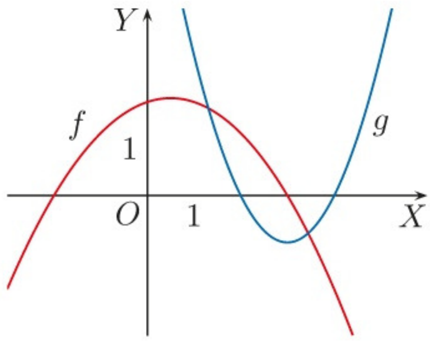
Z wykresu możemy odczytać rozwiązania odpowiednich nierówności, np.:

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$,

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \leqslant 0$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle$.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$. Korzystając z tych wykresów, podaj rozwiązanie nierówności.



a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geqslant 0$

b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leqslant 0$

c) $x^2 - 6x + 8 > 0$

d) $x^2 - 6x + 8 < 0$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 4x - 15 < 0$.

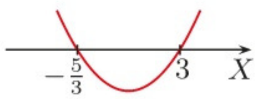
Zaczynamy od rozwiązania równania $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-14}{6} = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+14}{6} = 3$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez punkty $-\frac{5}{3}$ i 3 na osi OX.



Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$3x^2 - 4x - 15 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{5}{3}; 3\right)$$

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 7x - 4 < 0$.

Rozwiązujemy równanie $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49 - 32 = 17, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

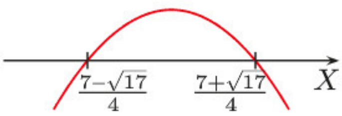
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-\sqrt{17}}{-4} = \frac{7+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+\sqrt{17}}{-4} = \frac{7-\sqrt{17}}{4}$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez punkty $\frac{7-\sqrt{17}}{4}$ i $\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ na osi OX.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$-2x^2 + 7x - 4 < 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$



Zauważ, że zamiast nierówności $-2x^2 + 7x - 4 < 0$ możemy rozwiązać równoważną nierówność $2x^2 - 7x + 4 > 0$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 5x < 0$

b) $-4x^2 + x \leqslant 0$

c) $2x^2 + 7x - 4 > 0$

d) $-3x^2 + 11x - 6 \geqslant 0$

e) $5x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 < 0$

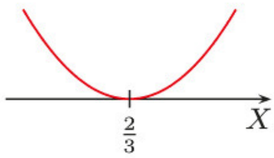
Przykład 4

Rozwiąż nierówność $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

Rozwiązujemy równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.



Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry.
Jedyny punkt wspólny paraboli z osią OX to $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$9x^2 - 12x + 4 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $9x^2 - 12x + 4 \geqslant 0$

b) $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

Ćwiczenie 4

Czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna?

a) $4x^2 + 1 \geqslant 0$

b) $-x^2 - 2 < 0$

c) $9x^2 + 4 \leqslant 0$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$ g) $x^2 + 5x - 5 < 0$

b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ e) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$ h) $-x^2 + 2x + 7 \leqslant 0$

c) $-4x^2 + 5x - 1 < 0$ f) $5x^2 - 3x - 1 > 0$ i) $2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} < 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 > 0$ e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \geqslant 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leqslant 0$ f) $-\sqrt{2}x^2 + 3x - 3\sqrt{2} \geqslant 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 2x \geqslant x + 1$ c) $3x^2 - 2x + 1 < x$ e) $3x - x^2 \leqslant 3 - 3x^2$

b) $5x^2 + 4 \leqslant 10x - 20x^2$ d) $-2x^2 + 5x > 1$ f) $-x(2 - x) > 1 - x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x + 1)^2 + (x - 3)^2 < 10$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

b) $3x - (1 - x)^2 \geqslant (x - 2)(x + 2)$ e) $2 - x^2 \leqslant (2 - x)^2$

c) $(x - 3)^2 - 7 \leqslant (2x - 1)^2$ f) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \geqslant 3x$

5. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x + 1 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 3x - x^2 \geqslant 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 5x + 4 < 0\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 + x + 12 \geqslant 0\}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)} + \sqrt{x}$.
>
> Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jej wzór ma sens. Wyrażenia pod pierwiastkami muszą być nieujemne, czyli muszą jednocześnie zachodzić nierówności:
>
> $$x(x-4) \geqslant 0 \quad \text{i} \quad x \geqslant 0$$
>
> Pierwsza nierówność jest spełniona dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$.
> Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0\} \cup \langle 4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{16 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{1 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 6} - \sqrt{4x - x^2}$

1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2$ (gdzie $t \geqslant 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$
$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$
$$t_1 = \tfrac{10-8}{2} = 1 \geqslant 0, \ t_2 = \tfrac{10+8}{2} = 9 \geqslant 0$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$x^2 = 1 \ \text{ lub } \ x^2 = 9$$
$$x = -1 \ \text{ lub } \ x = 1 \ \text{ lub } \ x = -3 \ \text{ lub } \ x = 3$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$
$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$
$$t_1 = \tfrac{-8-10}{2} = -9 < 0, \ t_2 = \tfrac{-8+10}{2} = 1 \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.
Wracamy do niewiadomej x: $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$
d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$
e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
f) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x^4 - 9x^2 = 0$
b) $x^4 + 9x^2 = 0$
c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$
d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

W poniższych przykładach przedstawiono inne równania, które przy odpowiednim podstawieniu można sprowadzić do równań kwadratowych.

Przykład 3
Rozwiąż równanie $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

Zakładamy, że $x \geqslant 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \text{ zatem } t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \geqslant 0,\ t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \geqslant 0$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$\sqrt{x} = 1 \text{ lub } \sqrt{x} = 2$$
$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiązanie zgodne z założeniem, że $x \geqslant 0$.

Ćwiczenie 3
Rozwiąż równanie.

a) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$

Przykład 4
Rozwiąż równanie $3x + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$.

Zakładamy, że $x - 2 \geqslant 0$, czyli $x \geqslant 2$. Równanie zapisujemy w postaci:

$$3(x-2) + 6 + 8\sqrt{x-2} - 9 = 0$$
$$3(x-2) + 8\sqrt{x-2} - 3 = 0$$

Podstawiamy $t = \sqrt{x-2}$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$
$$\Delta = 64 + 36 = 100,\ \sqrt{\Delta} = 10$$
$$t_1 = \frac{-8-10}{6} = -3 < 0,\ t_2 = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy, gdyż t z założenia nie może być ujemne.
Wracamy do niewiadomej x:

$$\sqrt{x-2} = \frac{1}{3}$$
$$x - 2 = \frac{1}{9}$$
$$x = 2\frac{1}{9}$$

Rozwiązanie zgodne z założeniem, że $x \geqslant 2$.

Ćwiczenie 4
Rozwiąż równanie.

a) $x - 2\sqrt{x-3} = 3$ b) $x - 3\sqrt{x-1} = 1$ c) $\sqrt{x+1} + 26 = 2x$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ d) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ g) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ e) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$ h) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$
c) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$ f) $x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 = 0$ i) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbf{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \ \ t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \ \ t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
b) $x^6 - x^3 - 2 = 0$ d) $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$ f) $x^8 - 4x^4 - 24 = 0$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = |x|$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$x^2 = |x|^2 = t^2$

$$\Delta = 4 + 32 = 36, \ \ \sqrt{\Delta} = 6$$

$$t_1 = \frac{2-6}{2} = -2 < 0, \ \ t_2 = \frac{2+6}{2} = 4 \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.
Wracamy do niewiadomej x:

$$|x| = 4, \text{ czyli } x = -4 \ \text{ lub } \ x = 4$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ b) $x^2 - 7|x| + 10 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$ b) $2x - 5\sqrt{x-2} = 2$ c) $6x + \sqrt{x+1} = -5$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} = 0$ b) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} = 3$ c) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 = 0$

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

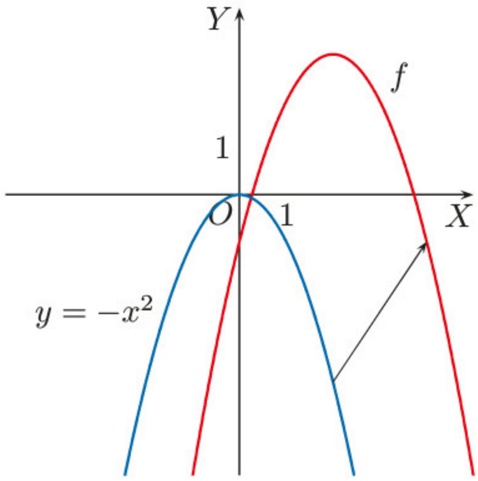
Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$
$$y_w = f(x_w) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 3$$

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $y = a(x-x_w)^2+y_w$, gdzie $a \neq 0$, i otrzymujemy wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

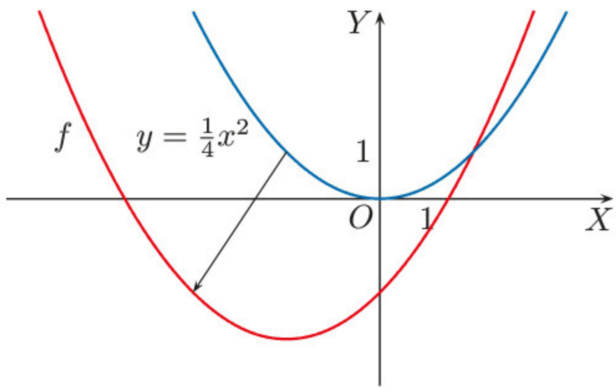
Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$
$$y_w = f(x_w) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 2 = -3$$

Funkcja f ma postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[-2, -3]$.



1. Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji f, a następnie naszkicuj jej wykres.

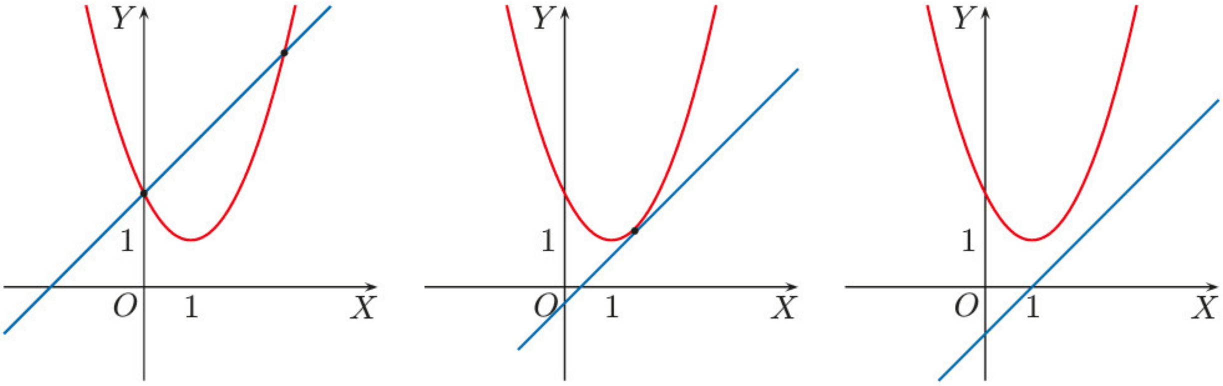
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g?

a) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$
b) $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 4x^2 + 24x$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

1.4. Układy równań (1)

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli:

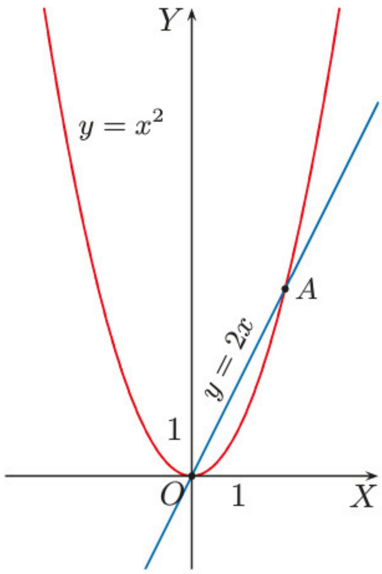
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0,0)$ i $A(2,4)$.

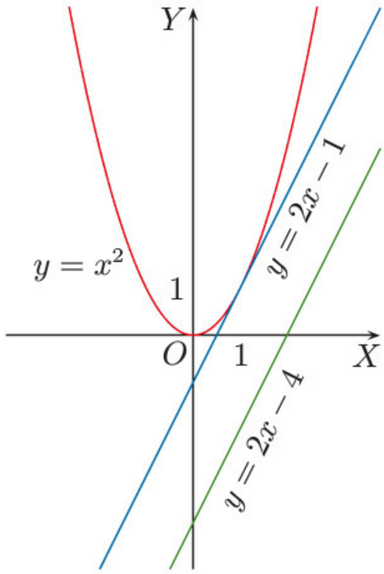
Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.



Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 1 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Prosta $y = 2x - 1$ i parabola $y = x^2$ mają jeden punkt wspólny.

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 4 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = 2x - 4$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 2x - 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Zadania

1. Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?

a) $f(x) = -x + 2,\ \ g(x) = x^2 - 2x$

b) $f(x) = x - 6,\ \ g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = 2x - 4,\ \ g(x) = -2x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x - 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

3. Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

a) $f(x) = x + 1,\ \ g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x + 1,\ \ g(x) = -2x^2 + 3$

c) $f(x) = -2x + 3,\ \ g(x) = x^2$

d) $f(x) = -x-2,\ \ g(x) = \frac{1}{3}x^2-2$

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$

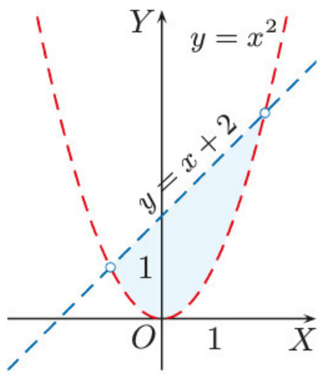
c) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = |x - 2| \end{cases}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej prostej $y = x + 2$.



Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

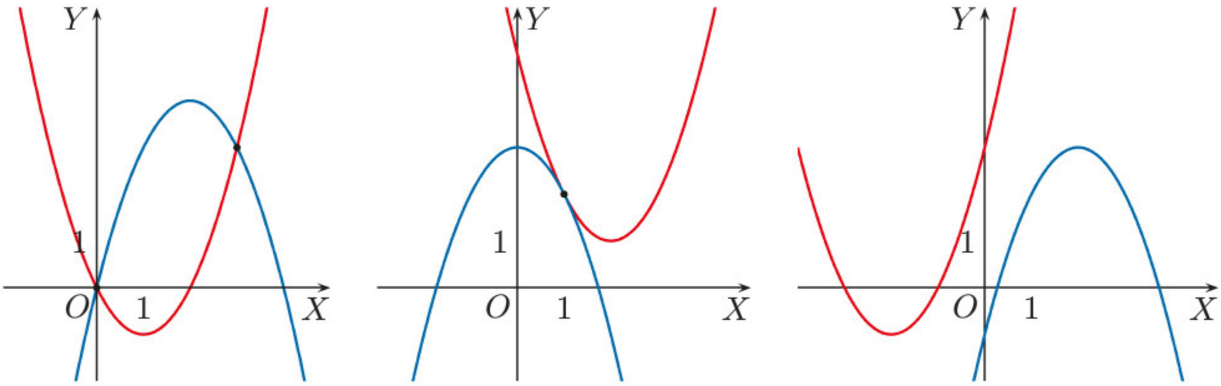
a) $\begin{cases} y > x^2 - 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > x - 1 \\ y \leqslant -x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y \geqslant 0{,}5x^2 - 2 \end{cases}$

*1.5. Układy równań (2)

Dwie różne parabole mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub mogą nie mieć punktów wspólnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj parabole będące wykresami funkcji f i g. Ile punktów wspólnych mają te wykresy?

a) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = -x^2$

b) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = x^2 + 1$

Przykład 1

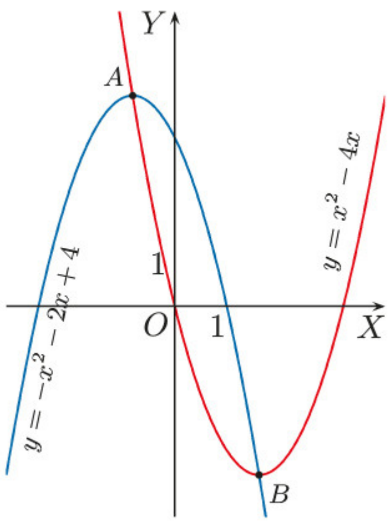
Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 4$, czyli $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $(x+1)(x-2) = 0$, zatem: $x = -1$ lub $x = 2$.

Dla $x = -1$ mamy $y = 5$. Dla $x = 2$ mamy $y = -4$. Układ równań spełniają więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Parabole $y = -x^2 - 2x + 4$ i $y = x^2 - 4x$ przecinają się w punktach $A(-1, 5)$ oraz $B(2, -4)$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

a) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = 2x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ \ g(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - 1,\ \ g(x) = -2x^2 + 2$

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 + 4x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -3x^2 - 12x - 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 \end{cases}$

3. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g?

a) $f(x) = 4x^2 - 6x - 5,\ \ g(x) = 2x^2 - 6x + 3$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2,\ \ g(x) = 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4,\ \ g(x) = 3x^2 + 4x - 3$

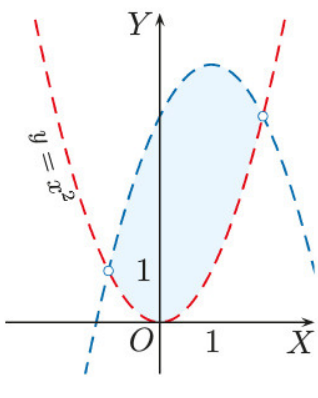
d) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1,\ \ g(x) = 3x^2 - 2x + 2$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < -(x-1)^2 + 5 \end{cases}$$

Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej paraboli $y = -(x-1)^2 + 5$.



Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego obszaru?

a) $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 1 \\ y \leqslant -x^2 + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4 \\ y < \frac{1}{2}x^2 - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y > x^2 + 2x - 2 \\ y \leqslant -x^2 - 4x - 2 \end{cases}$

Warto wiedzieć

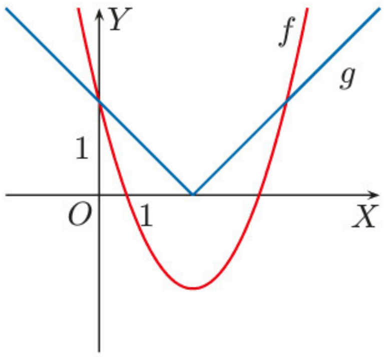
Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Równanie $x^2 - 4x + 2 = |x - 2|$ możemy rozwiązać graficznie, rysując wykresy funkcji:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \text{ i } g(x) = |x - 2|$$

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 4$$



Równanie to możemy też rozwiązać algebraicznie. Rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli $x - 2 \geqslant 0$, czyli $x \in \langle 2; \infty)$, to otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$\Delta = 9$, zatem $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$ – sprzeczność, gdyż $x_1 \notin \langle 2; \infty)$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$$

2° Jeśli $x - 2 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 2)$, to otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 2 = -x + 2$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$

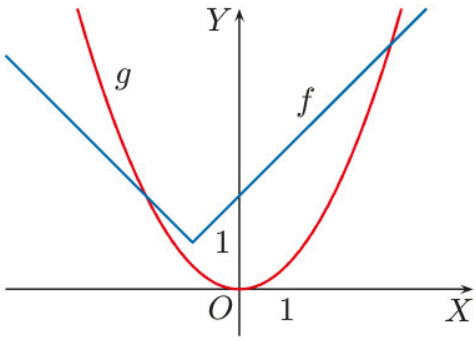
Zatem $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, ale $x_4 \notin (-\infty; 2)$, więc to rozwiązanie odrzucamy.

Po rozpatrzeniu obu przypadków stwierdzamy, że równanie $x^2-4x+2 = |x-2|$ jest spełnione dla $x = 0$ oraz dla $x = 4$.

1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = |x + 1| + 1$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Dla jakich argumentów funkcje:

a) f i g przyjmują te same wartości,

b) f i $h(x) = \frac{1}{4}x^2$ przyjmują te same wartości?



2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2 = |x|$ c) $3 - \frac{1}{8}x^2 = |x - 3|$ e) $-x^2+4x-1 = |2x-4|$

b) $x^2 - 3|x - 1| = 1$ d) $x^2 - 4x + 2 = |x + 2|$ f) $-\frac{1}{2}x^2+4x-4 = |x-4|$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - |x + 2| \geqslant 0$ b) $x^2 - 2|x - 4| < 0$ c) $2x^2-5|x-1| \geqslant 4x-1$

*1.6. Wzory Viète'a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Twierdzenie (wzory Viète'a)

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geqslant 0$.

D **Ćwiczenie 1**

Przeczytaj dowód wzoru na iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

a) Udowodnij wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego.

b) Udowodnij, że jeśli $\Delta = 0$, czyli trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny x_0, to wzory Viète'a mają postać: $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.

$\Delta = 400 - 120 = 280 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki: x_1, x_2.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $x^2 - 9x - 7 = 0$

b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$

c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$

d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$

e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Przykład 2

Określ znaki pierwiastków równania $7x^2 - 9x + 1 = 0$.

$\Delta = 81 - 28 = 53 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2.

Ze wzoru Viète'a obliczamy iloczyn pierwiastków:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{7}$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, liczby x_1, x_2 mają ten sam znak (obie są ujemne lub obie są dodatnie). Ze wzoru Viète'a obliczamy sumę pierwiastków:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{7}$$

Oba pierwiastki mają ten sam znak oraz $x_1 + x_2 > 0$, zatem x_1, x_2 są liczbami dodatnimi.

Zwróć uwagę, że aby określić znaki pierwiastków równania kwadratowego, nie musimy ich wyznaczać. Możemy skorzystać z podanych obok warunków.

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Ćwiczenie 3

Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 25 = 0$

b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

c) $12x^2 - 20x + 5 = 0$

d) $3x^2 + 5x + 4 = 0$

e) $-2x^2 - 15x - 3 = 0$

f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = 0$

Czy wiesz, że…

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III i Henryka IV. Dla tego drugiego w roku 1590 złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.

D **Przykład 3**

Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to suma ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków.

Przykład 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $6x^2 - 9x + 2 = 0$.

Ponieważ $\Delta = 81 - 48 = 33 > 0$, równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 1 = 0$ b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$ c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Zadania

1. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 + x - 1 = 0$ c) $13x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $15x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $13x^2 + 13x + 4 = 0$ f) $-x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

D **2.** Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki, to suma ich odwrotności jest równa $-\frac{b}{c}$.

3. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 3 = 0$ c) $4x^2 + 20x - 6 = 0$

4. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 + 9x + 6 = 0$ b) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

5. Oblicz kwadrat różnicy pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 2 = 0$

D **6.** Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to suma odwrotności ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Wskazówka. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

7. Oblicz sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania.

a) $-x^2 + 10x + 10 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$ c) $-x^2 + 3x + 7 = 0$

8. Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma i iloczyn jego pierwiastków były odpowienio równe: a) 7 i 3, b) 3 i 7?

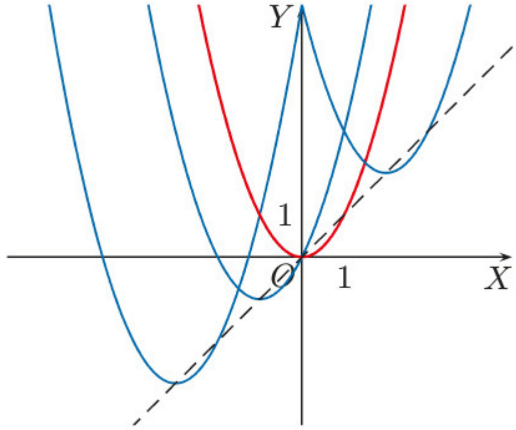
9. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby dwa razy większe od pierwiastków równania:

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$, b) $-x^2 + 6x - 2 = 0$, c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

*1.7. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Przykład 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y=(x-m)^2+m$ ma dwa miejsca zerowe?



Wykresem funkcji $y=(x-m)^2+m$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne (m, m), czyli leży na prostej $y=x$. Z rysunku odczytujemy, że funkcja:

$$y=(x-m)^2+m$$

ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 0)$.

Ćwiczenie 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y=(x-m)^2+m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi?

Przykład 2

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2-mx+2=0$ w zależności od parametru m. Wyznacz te pierwiastki.

$$\Delta=(-m)^2-4\cdot 2\cdot 2=m^2-16$$

• Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta=m^2-16>0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$.

$$x_1=\frac{m-\sqrt{m^2-16}}{4} \quad \text{i} \quad x_2=\frac{m+\sqrt{m^2-16}}{4}$$

• Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta=m^2-16=0$, czyli dla $m=-4$ $(x_0=-1)$ i dla $m=4$ $(x_0=1)$.

• Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta=m^2-16<0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki? Wyznacz te pierwiastki.

a) $-3x^2+2x-m=0$ b) $x^2+(2m+1)x+5=0$ c) $x^2+mx-m=0$

Ćwiczenie 3

Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^2+(m-1)x+2m-5=0$ b) $-2x^2+2mx+2x+m-\frac{1}{2}=0$

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach?

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$; pierwiastki te mają jednakowe znaki, gdy iloczyn tych liczb jest dodatni: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

$$\Delta = k^2 - 4(k-1) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2, \quad \frac{c}{a} = k - 1$$

Otrzymujemy zatem układ nierówności:

$$(k-2)^2 > 0 \ \text{ i } \ k - 1 > 0$$

$$k \neq 2 \ \text{ i } \ k > 1$$

Równanie ma zatem dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru k równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 - (k+2)x + k - 2 = 0$ b) $x^2 + (k-1)x - k = 0$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2 - 4(m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2.

1° Dla $2m + 1 = 0$, czyli dla $m = -\frac{1}{2}$, równanie jest liniowe – ma tylko jeden pierwiastek. Nie są więc spełnione warunki zadania.

2° Dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ równanie jest kwadratowe – ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-4(m-1))^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2m+1) = 16m^2 - 64m$$

$$\Delta > 0, \ \text{gdy} \ 16m^2 - 64m > 0$$

$$16m(m-4) > 0$$

(I) $\qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (4; \infty) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$

Sumę odwrotności pierwiastków wyznaczamy, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{4(m-1)}{4} = m - 1$$

Warunek $m - 1 < 0$ jest spełniony dla:

(II) $\qquad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1) \qquad m \neq -\frac{1}{2}$

Równanie ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest ujemna, gdy warunki (I) i (II) są jednocześnie spełnione, czyli dla:

$$m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$$

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest większa od -6?

a) $(m+3)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$ b) $mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 17?

a) $x^2 + (k-1)x + 4 = 0$ b) $x^2 - (k-2)x + \frac{1}{2}k^2 + 1 = 0$

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m+2)x^2 - 2mx + m \geqslant 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2.

1° Dla $m = -2$ otrzymujemy nierówność liniową $4x - 2 \geqslant 0$. Nie spełnia ona warunków zadania.

2° Dla $m \neq -2$ otrzymujemy nierówność kwadratową.
Jest ona spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy jednocześnie zachodzą dwa warunki:

$$\begin{cases} m+2 > 0 & \text{(I)} \\ \Delta \leqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Warunek (I): $m \in (-2; \infty)$

Warunek (II): $\Delta = (-2m)^2 - 4m(m+2) = 4m^2 - 4m^2 - 8m = -8m$

$\Delta \leqslant 0$, gdy $m \in \langle 0; \infty)$

Zatem nierówność $(m+2)x^2 - 2mx + m \geqslant 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in \langle 0; \infty)$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2 - (k-3)x + 4k \geqslant 0$ b) $(k-1)x^2 - 2kx + k - 1 \leqslant 0$

Zadania

D **1.** Wykaż, że równanie $2x^2 + mx - 3 = 0$ ma rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$.

D **2.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m, dla której równanie $x^2 + (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

3. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek?

a) $x^2 - 6x + 2m = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 - (m-2)x + m - 2 = 0$

c) $mx^2 - 4x + 1 = 0$

d) $(1-m)x^2 - (4m-4)x - 3m + 5 = 0$

4. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 - 2x + k + 3 = 0$

b) $x^2 - (k-4)x - k + 5 = 0$

c) $x^2 + (2k+1)x - 2k + 2 = 0$

d) $x^2 + (1-2k)x + 4 - 4k = 0$

5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami dodatnimi?

a) $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$

b) $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$

c) $x^2 + (2m-5)x + 2m - 6 = 0$

d) $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - m - 6 = 0$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami ujemnymi?

a) $\frac{1}{4}x^2 + x + m^2 - 4m = 0$

b) $-x^2 + \frac{m}{2}x - m + 1 = 0$

7. Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $x^2 + 3x + k > 0$

b) $x^2 + kx + 9 \geqslant 0$

c) $x^2 - kx + k + 3 > 0$

d) $x^2 - kx + k + 1 \geqslant 0$

e) $(k+1)x^2 - 2x - 1 \leqslant 0$

f) $kx^2 + 2(k-1)x + k - 1 > 0$

8. Dla jakich wartości parametru k funkcja f określona jest dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + (k+2)x + 2k + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{(5-k)x^2 + (k-2)x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{(2-k)x^2 - 2x + 2 - k}$

d) $f(x) = \sqrt{(k-4)x^2 + 2kx + 2k}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{kx^2+2kx+2}}$

f) $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{\sqrt{kx^2+(2k-1)x+2k-1}}$

9. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające podany warunek?

a) $x^2 - (a-4)x - 2a = 0, \;\; x_1 + x_2 > 2$

b) $x^2 + (a+1)x + 4 = 0, \;\; x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)$

c) $x^2 + ax + 2a - 3 = 0, \;\; x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 0$

d) $-x^2 + (2a-1)x + a = 0, \;\; (x_1 - x_2)^2 = 5$

10. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 6?

a) $x^2 + (a + 2)x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6(a - 3)x + a - 3 = 0$

11. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 16?

a) $x^2 - 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 + (4 - 2a)x + a^2 + 1 = 0$

12. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + ax + 1 = 0$ jest równa 7?

13. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $-x^2-2x+a^2+a+1 = 0$ przyjmuje największą wartość?

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

a) $x(x^2 - (2m - 4)x + m - 2) = 0$ b) $(x + 3)(x^2 + (m + 3)x + m^2) = 0$

15. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbf{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania.

a) $(m - 1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ b) $(m^2 + 2m)x^2 + 2mx + 3 = 0$

16. Niech $y = f(m)$ będzie funkcją określającą wartość iloczynu dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x + m^2 + 4m + 1 = 0$ w zależności od parametru m. Podaj dziedzinę funkcji f oraz wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich iloczyn był najmniejszy.

17. Funkcja $y = f(m)$ opisuje sumę dwóch różnych pierwiastków równania:

$$\tfrac{1}{m}x^2 + (m + 1)x + \tfrac{m}{64} = 0$$

Wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich suma była największa.

18. Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki?

a) $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ c) $x^4 + mx^2 - m - 6 = 0$

b) $x^4 - x^2 + m = 0$ d) $x^4 + (m - 2)x^2 + 4 - m = 0$

19. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^4 + mx^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + m = 0$ *c) $|x^2 + 2x - 8| = m$

20. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m + 3)x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające nierówność $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$?

1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$p + q = 12$, zatem $q = 12 - p$.

Iloczyn tych liczb: $p \cdot q = p(12 - p) = -p^2 + 12p$.

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p$$

Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest zatem równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

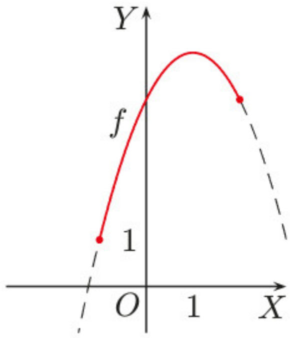
Ćwiczenie 2

Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q.

Przykład 2

Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2+2x+4$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

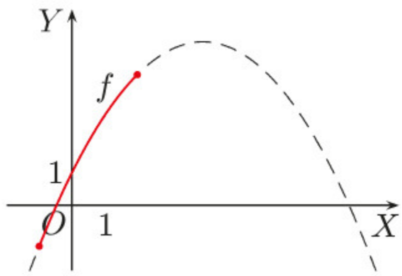
Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.
Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli: $x_w = 1$. Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2 \rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale to: $y_w = f(1) = 5$. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2 \rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $\langle p_1; p_2 \rangle$, to wyznaczamy również y_w, obliczając $f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych trzech wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.



- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2\rangle$

Zatem wartości najmniejsza i największa funkcji f są przyjmowane na końcach przedziału $\langle -1; 2\rangle$.

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1\rangle$

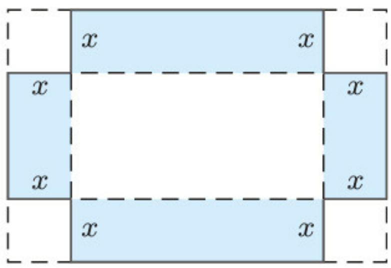
b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 4\rangle$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3\rangle$

d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $\langle -2; 1\rangle$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$. $x > 0,\ 2x < 40,\ 2x < 60$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12{,}5, \ \ y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w.

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2.

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Zadania

1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale:

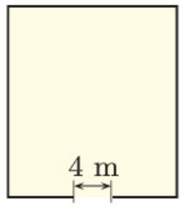
a) $\langle 0; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 0 \rangle$, c) $\langle -4; 6 \rangle$.

2. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.

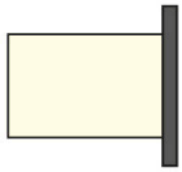
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.

b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.

3. Mamy 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ten ogródek, jeśli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 4 m?



4. Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była jak największa?

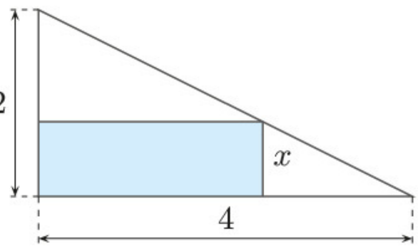


5. Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?

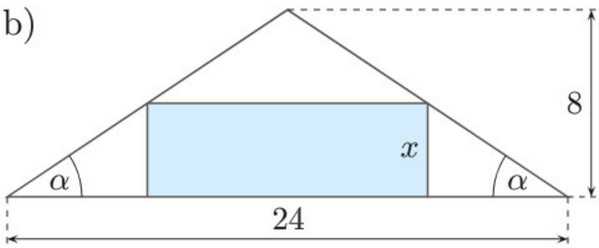
6. Szkielet prostopadłościanu wykonano z 56 cm drutu. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie powinny być długości krawędzi tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?

7. Wyraź pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x. Podaj wymiary prostokąta o największym polu.

a)



b)



8. Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+8}$, $\langle 1; 4 \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$, $\langle 0; 4 \rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2-10x+4}}$, $\langle -2; 0 \rangle$

d) $f(x) = (x^2 - 6x + 3)^2$, $\langle 1; 5 \rangle$

1.9. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ćwiczenie 1

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny x zł za sztukę (tabela poniżej).

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Dane z tabeli spełniają równanie $s = -40x + 3600$.

D a) Uzasadnij, że jeśli koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł, to zysk firmy ze sprzedaży lalek w cenie x zł za sztukę wyraża się wzorem:

$$z(x) = -40x^2 + 4400x - 72\,000$$

b) Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 2

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Przy cenie 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny x zł za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że obniżenie ceny o każde 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy?

Ćwiczenie 4

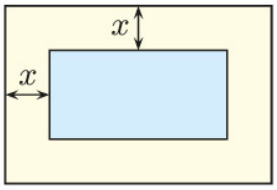
Właściciel kina zauważył, że przy cenie biletu wynoszącej 16 zł na seans przychodzi średnio 100 osób, a każdorazowe podniesienie ceny biletu o złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?

Ćwiczenie 5

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2. Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Ćwiczenie 6

Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafelkami pas o szerokości x (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli ma on powierzchnię 45 m^2?



Zadania

1. Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o x m, a długość o $2x$ m. Oblicz x, jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144 m^2.

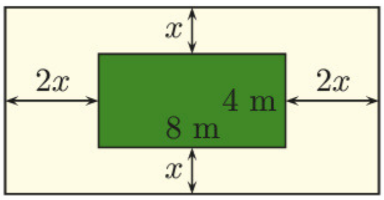
2. Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy.

   a) $P = 2400 \text{ cm}^2$, $x = 80$ cm, $y = 60$ cm

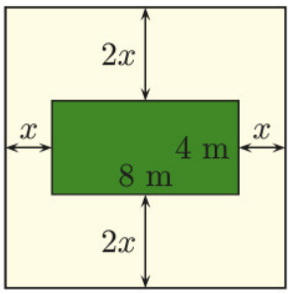
   b) $P = 2700 \text{ cm}^2$, $x = 75$ cm, $y = 55$ cm

3. Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ ma zostać wyłożona kostka. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji wyznacz x.

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2

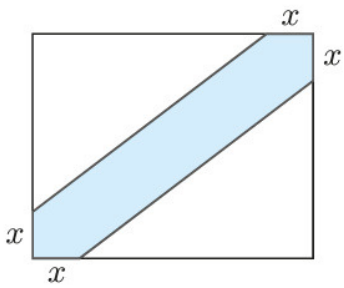


4. Dany jest prostokąt o wymiarach $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o x cm. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm?

5. Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest nie mniejsza niż 6 m i nie większa niż 10 m?

6. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC. Oblicz obwód tego trójkąta.

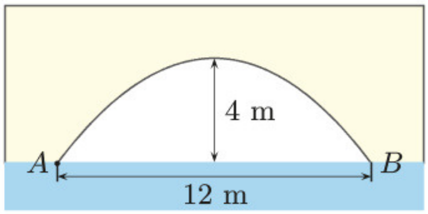
7. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?



D **8.** Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

a) naturalnym, b) parzystym.

9. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:

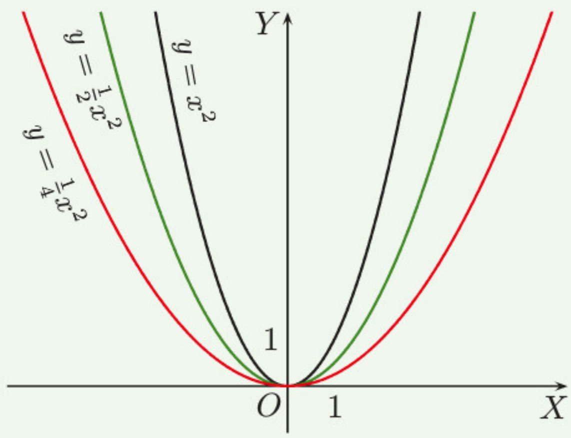


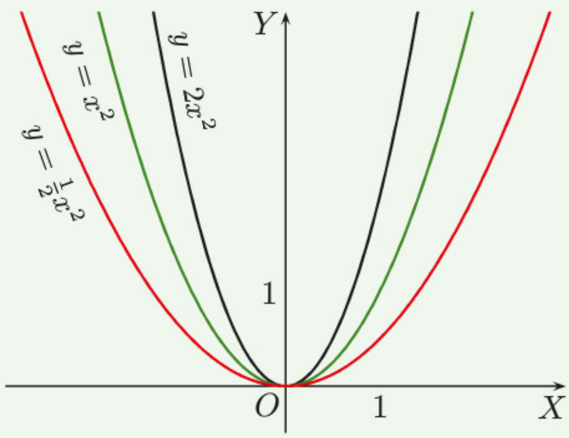
a) w punkcie A, b) w środku odcinka AB.

10. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 9. przepłynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Czy wiesz, że…

Wszystkie parabole są podobne. Aby się o tym przekonać, warto przyjrzeć się poniższym rysunkom (zauważ, że jednostki na osiach na rysunku po prawej są dwukrotnie większe niż na rysunku po lewej). Na przykład parabole narysowane kolorem zielonym (na rysunku po prawej parabola dana wzorem $y = x^2$, a na rysunku po lewej parabola $y = \frac{1}{2}x^2$) są identyczne.

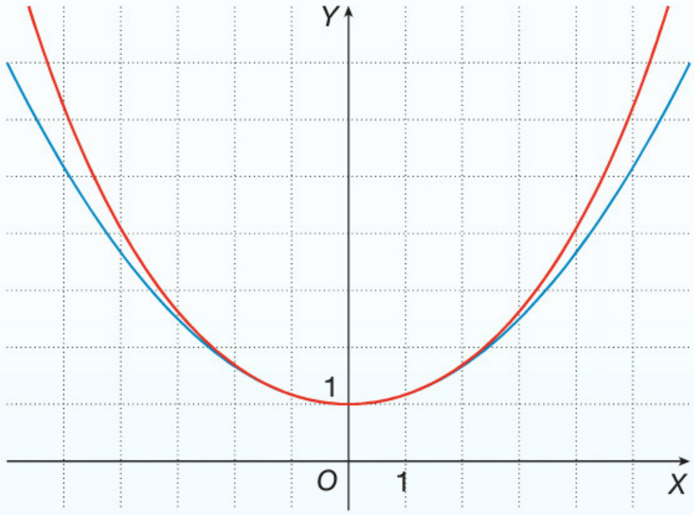




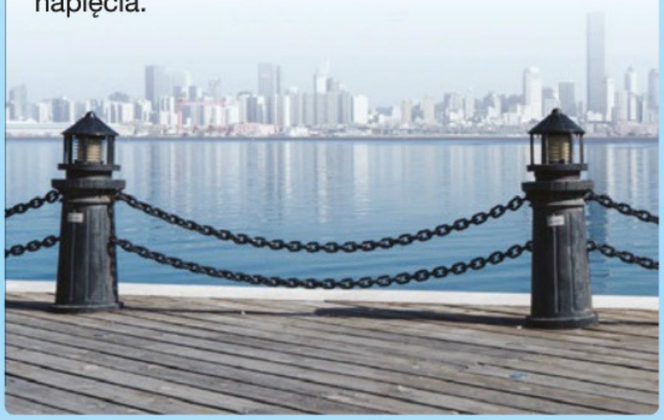
Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* (od łacińskiego słowa *catena* oznaczającego łańcuch).

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



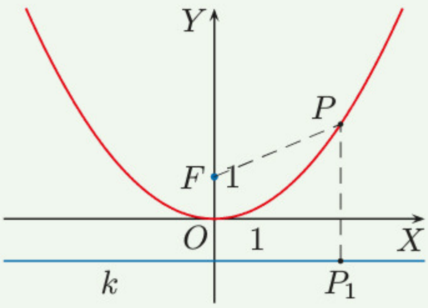
Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych to monument, którego kształt jest inspirowany krzywą łańcuchową.

1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

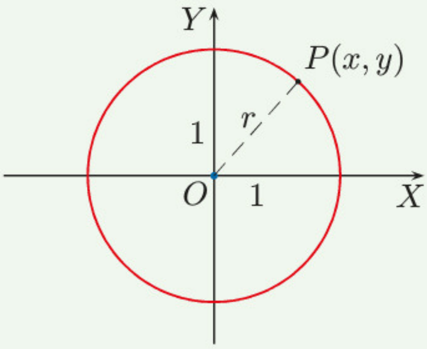
1.10. Zagadnienia uzupełniające

Równania i układy równań drugiego stopnia

Na rysunkach poniżej przedstawiono przykłady krzywych opisanych za pomocą równań drugiego stopnia.

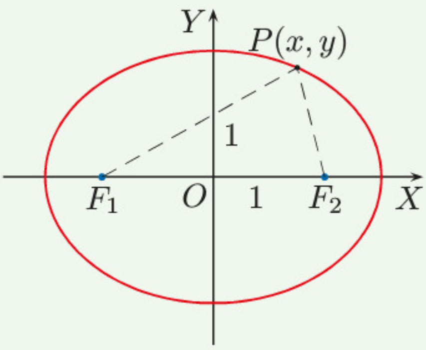


Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (kierownicy paraboli) i ustalonego punktu F (ogniska paraboli). Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$. Jej kierownicą jest prosta $y = -1$, a ogniskiem – punkt $F(0,1)$. Zachodzi równość $|FP| = |PP_1|$.



Okrąg jest zbiorem punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu O (środka okręgu) jest równa promieniowi okręgu. Do okręgu o promieniu r, którego środkiem jest początek układu współrzędnych, należą punkty, których współrzędne (x,y) spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Na rysunku powyżej przedstawiono okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 9$ – jego środkiem jest punkt $O(0,0)$, a promień jest równy 3. Dla dowolnego punktu P należącego do tego okręgu zachodzi równość $|OP| = 3$.

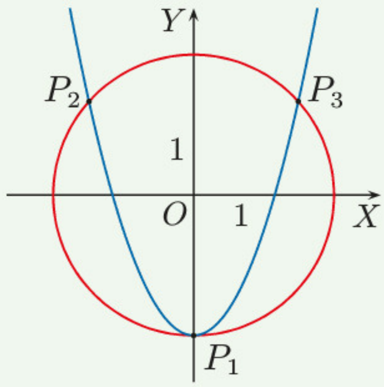


Elipsa jest zbiorem punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 (ognisk elipsy) jest stała. Jeśli osie symetrii elipsy przecinają się w początku układu współrzędnych, to jest ona dana równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$. W przypadku gdy $a = b$, otrzymujemy okrąg ($F_1 = F_2 = O$).

Na rysunku powyżej przedstawiono elipsę daną równaniem $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Przecina ona oś OX w punktach $(-4,0)$ i $(4,0)$, zaś oś OY w punktach $(0,-3)$ i $(0,3)$. Jej ogniskami są punkty $F_1(-\sqrt{7},0)$ i $F_2(\sqrt{7},0)$. Dla dowolnego punktu P należącego do elipsy zachodzi równość $|F_1P| + |F_2P| = 8$.

Przykład 1

Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 9$ i paraboli $y = x^2 - 3$.



Aby wyznaczyć punkty wspólne okręgu i paraboli, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = -y^2 + 9 \\ y = -y^2 + 9 - 3 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x^2 i podstawiamy do drugiego równania.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 + y - 6 = 0$. Jego rozwiązaniami są liczby: $y_1 = -3$ i $y_2 = 2$.

Punkty wspólne okręgu i paraboli: $P_1(0, -3)$, $P_2(-\sqrt{5}, 2)$ i $P_3(\sqrt{5}, 2)$.

1. Narysuj okrąg, którego liczba punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$ jest równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 4.

2. Wyznacz punkty wspólne okręgu i paraboli.

a) $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x^2$

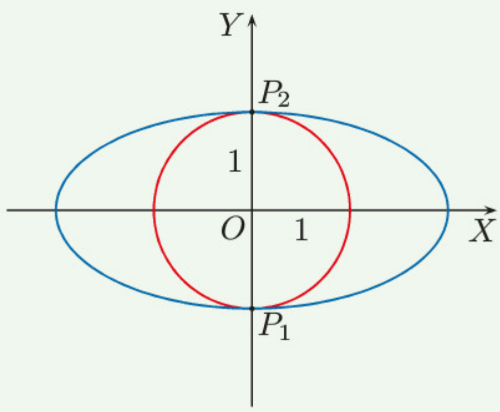
b) $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 + 4$

c) $x^2 + y^2 = 10$, $y = x^2 - 4$

d) $x^2 + y^2 = 25$, $y = -x^2 + 5$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg $x^2 + y^2 = 4$ i elipsę $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Mają one dwa punkty wspólne. Współrzędne tych punktów możemy odczytać z rysunku. Można je też wyznaczyć, rozwiązując układ równań:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

Punkty wspólne okręgu i elipsy: $P_1(0, -2)$ i $P_2(0, 2)$.

3. Ile punktów wspólnych mogą mieć okrąg i elipsa (wykonaj odpowiednie rysunki)?

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - 5x = 0$
b) $x = \sqrt{2}x^2$
c) $25x^2 - 1 = 0$
d) $1 - \frac{81}{16}x^2 = 0$
e) $x(x+2) = -1$
f) $x(x-8) = 4(x-9)$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$
b) $2x^2 + 5x + 1 = 0$
c) $3x^2 - 14x - 5 = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$
e) $7x^2 + 2x = 1$
f) $-3x^2 + x + 1 = 0$
g) $x(x-5) = 2x(x-1)$
h) $2(1-5x) = (1-x)^2$
i) $\frac{1}{5}(x^2+4) = \frac{1}{2}(1-x)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + x - 1 \geqslant 0$
b) $4x^2 + 20x + 25 \leqslant 0$
c) $5x^2 - 5x + 2 < 0$
d) $-3x^2 + 6x > 2$
e) $4x - 3x^2 \leqslant 2 - x^2$
f) $-x(4-x) > 4 - x^2$

4. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x - 1 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \geqslant 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 4x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x - 6 < 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbf{R} : 3x + 18 > x^2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4x \leqslant 3\}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2-4)(x^2+9) = 0$
b) $(9x^2-4)(x^2-3) = 0$
c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
d) $x^4 + 16x^2 = 0$
e) $x^4 - 16x^2 = 0$
f) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

6. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
c) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$
d) $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$
e) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$
f) $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$
g) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
h) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
i) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

7. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

8. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$

9. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $\langle -2; 1 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $\langle 0; 4 \rangle$

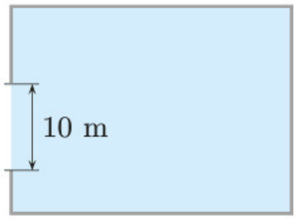
c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $\langle 0; 2 \rangle$

d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $\langle -2; 2 \rangle$

10. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

11. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, jeżeli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 10 metrów?



12. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór tych punktów (x, y), których współrzędne spełniają poniższe warunki.

a) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ y^2 - 4 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leqslant 0 \\ y^2 - 2y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0 \\ 2y^2 + 3y - 2 > 0 \end{cases}$

Zestaw II

1. Dla jakich wartości parametru c funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

a) $f(x) = x^2 + 3x + c$

b) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - c$

c) $f(x) = -x^2 + x + c + 1$

d) $f(x) = x^2 + cx + c$

2. Dla jakich wartości parametru b funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

a) $f(x) = x^2 + bx + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2bx - 1$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = |x^2 + 2x|$ b) $f(x) = x^2 - 3|x|$ c) $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$

4. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

a) $(x^2-2x)^2+5(x^2-2x)+4=0$

b) $(x^2+4x)^2+7(x^2+4x)+12=0$

c) $(x^2-5x)(x^2-5x+2)=24$

d) $(x^2+2x)(x^2+2x-1)=2$

5. Rozwiąż równanie.

a) $x-9\sqrt{x-4}-40=0$

b) $x^2-9|x|+18=0$

6. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązania.

a) $\sqrt{7x-x^2-12}\cdot(x^2-1)=0$

b) $(x^2+2x-15)\cdot\sqrt{x^2-4x}=0$

D **7.** Uzasadnij, że podane równanie ma dwa pierwiastki: x_1, x_2. Nie wyznaczając tych pierwiastków, oblicz wartość wyrażenia $x_1^2+x_2^2-8x_1x_2$.

a) $15x^2-12x-20=0$

b) $(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-1=0$

8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, jeśli:

a) do jej wykresu należy punkt $(0,-2)$, suma jej miejsc zerowych jest równa $\frac{8}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa 4,

b) iloczyn jej miejsc zerowych jest równy 24, a parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(5,2)$.

9. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2+(m-3)x+m=0$

b) $\frac{1}{4}x^2+(m+1)x+1=0$

c) $\frac{1}{4}mx^2+(m^2-1)x+m^3-4m=0$

d) $(3m-2)x^2+mx+1-\frac{3}{2}m=0$

10. Dla jakich wartości parametru m równanie:

a) $2x^2-mx+m+2=0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie,

b) $-x^2+(2m-2)x+m^2-2m=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

11. Dla jakich wartości parametru m nierówność spełniona jest przez dowolną liczbę rzeczywistą x?

a) $mx^2+4x+m-1\leqslant 0$

b) $(m-3)x^2+(3-m)x+m>0$

12. Wyznacz wartości parametru m, dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1;\infty)$.

a) $f(x)=x^2+(2m+2)x-m$

b) $f(x)=(m+1)x^2+(m+1)x+m+3$

13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k,m), dla których równanie $x^2+kx+m=0$:

a) ma jedno rozwiązanie x_0 spełniające warunek $|x_0|\leqslant 2$,

b) ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2+x_2^2=4$.

Przykład

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases}$$

Liczby $x_1 - 2$ i $x_2 - 2$ są ujemne, gdy ich iloczyn jest dodatni, a suma ujemna.

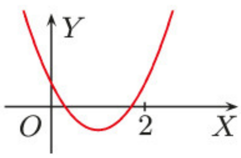
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m-1) = 4m^2 - 4m + 4$
  $\Delta = 4m^2 - 4m + 4 > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$ (sprawdź).
- $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 4 =$
  $= m - 1 - 4m + 4 = -3m + 3$
  Zatem $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -3m + 3 > 0$.
  Nierówność ta jest spełniona dla $m < 1$.
- $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{b}{a} - 4 = 2m - 4$
  Zatem $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0$.
  Nierówność ta jest spełniona dla $m < 2$.

Po uwzględnieniu powyższych warunków otrzymujemy, że $m \in (-\infty; 1)$.

II sposób

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$.
$a > 0$, więc warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



Dwa różne pierwiastki są mniejsze od 2, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w < 2$ oraz $f(2) > 0$ (dlaczego?).

- $\Delta > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$ (sprawdzone tak jak w sposobie wyżej)
- $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = m$
  Zatem $x_w < 2$ dla $m < 2$.
- $f(2) = 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = -3m + 3$
  Nierówność $-3m + 3 > 0$ jest spełniona dla $m < 1$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione dla $m \in (-\infty; 1)$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Liczba pierwiastków równania $8x^4 + 5x^2 - 12 = 0$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

2. Dla jakich liczb rzeczywistych x określone jest wyrażenie $\frac{16x^2-1}{16x^4-8x^2+1}$?

A. $x \in \mathbf{R}$
B. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
C. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$
D. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

3. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 0; 2\rangle$ jest liczbą dodatnią, gdy:

A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$,
B. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$,
C. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$,
D. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$.

4. Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie:

A. $x^2 - 4x + 5 = 0$,
B. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$,
C. $x^2 - 5x + 6 = 0$,
D. $x^2 + 5x - 6 = 0$.

5. Punkt (x_0, y_0) jest punktem wspólnym parabol $y = -x^2 + 8x - 8$ i $y = x^2$. Wówczas $|x_0 - y_0|$ równa się:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

6. Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m > 1{,}125$, **B.** $m > -\frac{9}{2}$, **C.** $m < \frac{9}{8}$, **D.** $m < 2$.

7. Jeżeli równanie $(m - 1)x^2 + 2mx + (m + 2) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to liczba m należy do przedziału:

A. $(-\infty; -2)$, **B.** $\langle 2; \infty)$, **C.** $\langle -2; 0)$, **D.** $\langle 0; 2\rangle$.

8. Nierówność $mx^2 + 4x + 4 < 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m > 0$, **B.** $m < 0$, **C.** $m \geqslant 1$, **D.** $m \leqslant 1$.

9. Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2. Obwód tej działki jest równy:

A. 64 m, **B.** 68 m, **C.** 72 m, **D.** 76 m.

10. Boki prostokąta P_1 o wymiarach 4 cm i 8 cm wydłużono o x cm i otrzymano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2. Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą:

A. $3\sqrt{10}$ cm, **B.** $4\sqrt{10}$ cm, **C.** $3\sqrt{13}$ cm, **D.** $4\sqrt{13}$ cm.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

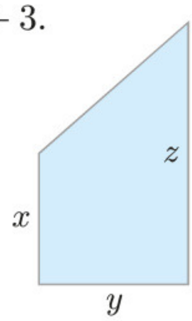
Zadanie 3 (2 pkt)
Suma liczby a i potrojonej liczby b wynosi 12. Oblicz największą wartość iloczynu liczb a i b.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (5 pkt)
Wskaż te rozwiązania równania $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$, które spełniają warunek $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

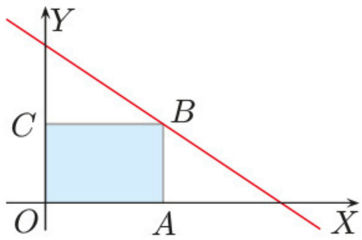
Zadanie 5 (4 pkt)
Dane są proste k: $y = 2x + 2$ oraz l: $y = -2x - 5$. Sprawdź, która z tych prostych ma więcej punktów wspólnych z parabolą $y = x^2 + 4x + 3$.

D **Zadanie 6 (5 pkt)**
Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.



Zadanie 7 (5 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 48 cm. Oblicz największe pole powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu.

Zadanie 8 (5 pkt)
Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz sumę dodatnich pierwiastków równania $36x^4 - 43x^2 + 12 = 0$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

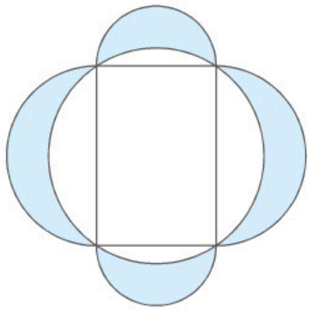
Zadanie 2 (2 pkt)

Punkt (x_1, y_1) leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i jest punktem wspólnym paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ i prostej $y = \frac{1}{2}x + 1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $x_1 \cdot y_1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Niech m_0 będzie największą całkowitą wartością parametru m, dla której równanie $(m-1)x^2 - 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt{3}m_0$.

D **Zadanie 4 (5 pkt)**



Każdy księżyc zbudowany na boku prostokąta jest ograniczony okręgiem opisanym na tym prostokącie oraz okręgiem, którego środkiem jest środek danego boku. Wykaż, że jeśli obwód prostokąta jest równy 8 cm, to pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2.

Zadanie 5 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ i $g(x) = 4 - 2|x - 1|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 = 0$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Zadanie 8 (5 pkt)

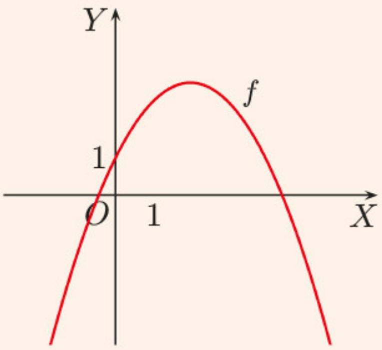
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - \left(3m - \frac{1}{2}\right)x + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 12$?

Zadanie 9 (4 pkt)

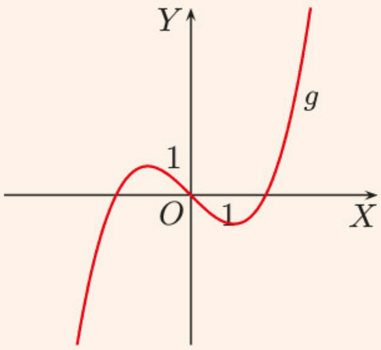
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m), dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + kx + \frac{1}{2}m = 0$ jest równa 2.

2 Wielomiany

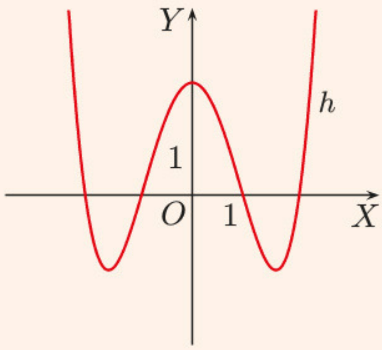
Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością można opisać za pomocą wielomianu. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$



$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$



$h(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 3$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}_+$.
Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.
Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$y = x^3 + 2x$ dwumian trzeciego stopnia
$y = 5x^4 + 1$ dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$y = x^2 + 2x + 1$ trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)
$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$ trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$ wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0,\ n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n.
Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.
Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.
Liczby: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.
Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\mathrm{st}\,(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$

b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$

c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$

d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

$a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\mathrm{st}\,(w) = 4$

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$

$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$

$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w.

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$

b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$

c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$

d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$

b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Zadania

1. Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0{,}1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:

a) stopnia trzeciego, uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0,

b) stopnia piątego, uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę (patrz zadanie 9.).

2. Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ i $x = -3$.

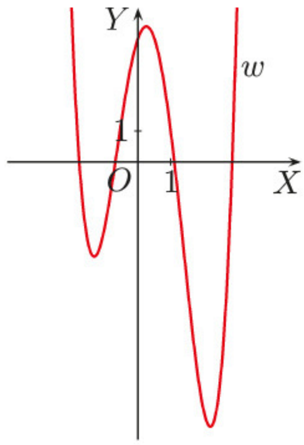
a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$

b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$

c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$

d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

3. Punkty: $P(1,a)$, $Q(-1,b)$, $R(2,c)$, $S(3,d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne: a, b, c i d.



4. Które z punktów: P, Q należą do wykresu wielomianu u?

a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$

b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

5. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$,

b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$,

c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$,

d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$.

6. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$,

b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$.

7. Określ stopień wielomianu w w zależności od parametru m.

a) $w(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^3 + x$

b) $w(x) = (m^2 + 4m)x^6 + mx^4 - x^2$

8. Podaj wielomian stopnia 4., którego współczynniki: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są takimi liczbami, że każda następna jest dwukrotnie większa od poprzedniej, a suma wszystkich jest równa 1.

D **9.** Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$. Oblicz sumę współczynników wielomianu w.

a) $w(x) = (x^3 - 27)(2x^2 + 11x)(x^2 - 1)$

b) $w(x) = (2x^3 - 5x + 2)^{101}$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{i} \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 - 3x^3 + 2x^2 - x = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w. Podaj stopień wielomianu u, wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\operatorname{st}(u) = 4$, $\operatorname{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\operatorname{st}(u + w) = 4$,
b) $\operatorname{st}(u + w) = 3$,
c) $\operatorname{st}(u + w) = 2$,
d) $\operatorname{st}(u + w) = 1$,
e) $\operatorname{st}(u + w) = 0$.

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u, w oraz $u + w$ są niezerowe i $\operatorname{st}(u) \leqslant \operatorname{st}(w)$, to:

$$\operatorname{st}(u + w) \leqslant \operatorname{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w, jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$
\begin{aligned}
u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\
&= 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x = \\
&= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3
\end{aligned}
$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w.

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów: u, w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0{,}75x^6 - 0{,}2x^4 + 0{,}125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \tfrac{3}{2}x) = \\
&= 9x^4 - 6x^3 - x^2 + 3 - 10x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x = \\
&= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3
\end{aligned}
$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2.

Ćwiczenie 5

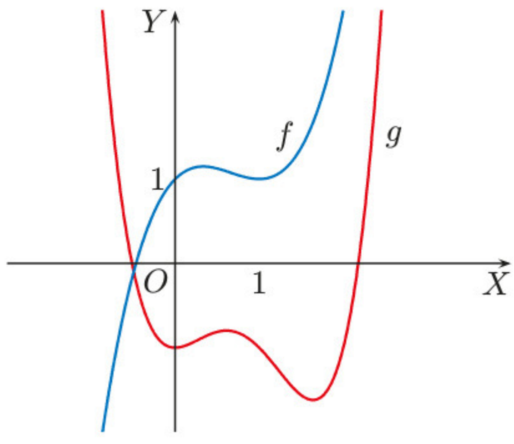
Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1{,}5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.



a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w?

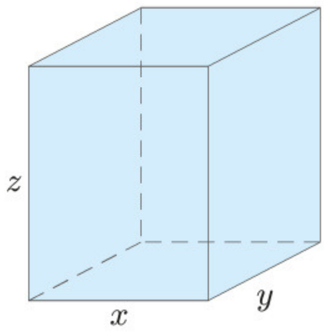
Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x,y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x,y,z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x, y, z (rysunek obok).



$P(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x,y,z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę wielomianów u i w.

$u(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \;\; w(x,y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$

$$u(x,y) + w(x,y) = \underline{3x^2y} + 6xy^2 - \underline{\underline{4xy}} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{\underline{xy}} + 2 =$$
$$= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2$$

b) Wyznacz różnicę wielomianów u i w.

$u(x,y,z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \;\; w(x,y,z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$

$$u(x,y,z) - w(x,y,z) = 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 =$$
$$= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2, \;\; w(x,y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x,y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1, \;\; w(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y,z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3, \;\; w(x,y,z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

b) $u(x,y,z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2, \;\; w(x,y,z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

1. Wyznacz sumę $f+g$ oraz różnicę $f-g$ wielomianów f i g.

a) $f(x)=\frac{3}{4}x^6-2x^4+\frac{5}{4}x^2+4,\;\; g(x)=\frac{1}{4}x^6+2x^4+x^3-\frac{1}{4}x^2-2x+2$

b) $f(x)=-2x^2+4x-x^6+2,\;\; g(x)=-5x+3x^2+x^6-3x^5$

c) $f(x)=3x^4+2x^7-5+4x,\;\; g(x)=-3x+x^5-2x^7+2$

2. Wyznacz wielomiany $w(x)=2f(x)-3g(x)$ oraz $u(x)=\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.

a) $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^2+3,\;\; g(x)=-2x^4+\frac{x^2}{3}+2$

b) $f(x)=3x^5+6x^3-9x,\;\; g(x)=2x^5+4x^3-4x^2$

3. Wiadomo, że $f(x)=u(x)+2w(x)$, $g(x)=2u(x)-3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:

a) $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5)=7$ i $w(5)=-2$,

b) $f(-3)$ i $g(-3)$, gdy $u(-3)=-4$ i $w(-3)=-6$,

c) $u\left(-\frac{1}{2}\right)$ i $w\left(-\frac{1}{2}\right)$, gdy $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-9$ i $g\left(-\frac{1}{2}\right)=13$.

4. Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q, jeśli:

a) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=4$,

b) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=5$,

c) $\mathrm{st}\,(p)=m$, $\mathrm{st}\,(q)=n$?

5. Określ stopień wielomianu $u+w$ w zależności od parametru a.

a) $u(x)=2x^4-3x+6,\;\; w(x)=ax^6+5x^2+4$

b) $u(x)=3x^6-ax^5+2x^2-x,\;\; w(x)=-3x^6-6x^5-2x^2+9$

c) $u(x)=(a+1)x^3-x^2+4x,\;\; w(x)=(a^2-1)x^4+x^2+3$

6. Określ stopień wielomianu $u+w$ w zależności od parametrów a i b.

a) $u(x)=ax^3+x^2-6,\;\; w(x)=bx^5+7x^3+x+2$

b) $u(x)=ax^7+3x^2+4,\;\; w(x)=3x^7-bx^2-5x+6$

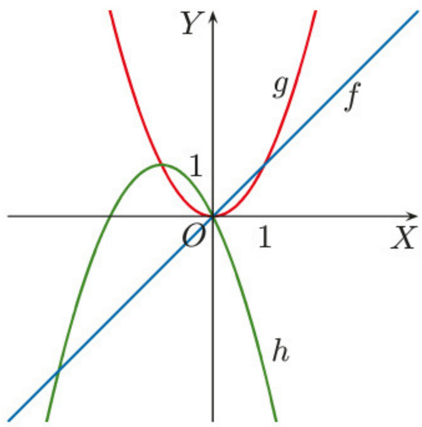
c) $u(x)=(a+1)x^4-bx^3+2x^2+1,$
$w(x)=(-1-b)x^4-4x^3-2x^2+9x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ oraz $h(x)=p\cdot f(x)+q\cdot g(x)$.

a) Oblicz wartości p i q.

b) Naszkicuj wykres wielomianu:

$$k(x)=2h(x)+4g(x)$$



8. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y.

a) $w(x,y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y,\ \ x=-2,\ y=3$

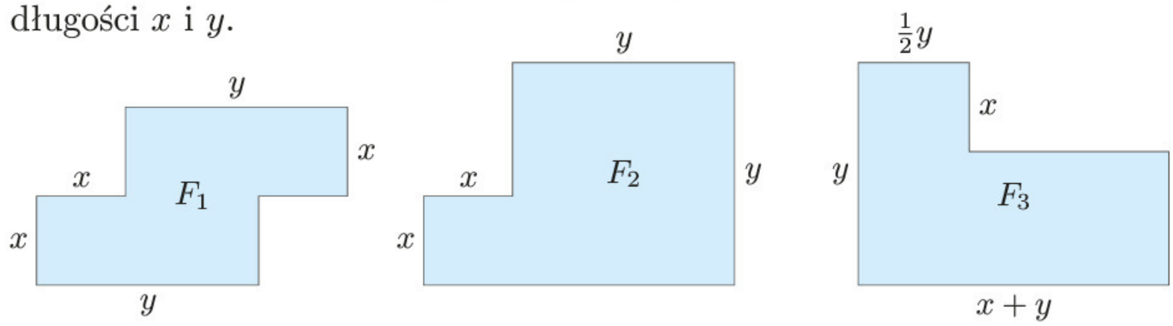
b) $w(x,y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4,\ \ x=2,\ y=-4$

9. Wyznacz sumę $u+w$ oraz różnicę $u-w$ wielomianów u i w. Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x=-2$ i $y=3$.

a) $u(x,y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y,\ \ w(x,y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$

b) $u(x,y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y,\ \ w(x,y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

10. Zapisz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1, F_2 i F_3 w zależności od długości x i y.



11. Dla której trójki liczb, P czy Q, wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x,y,z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$

b) $w(x,y,z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$

c) $w(x,y,z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$$P \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Stopień jednomianu wielu zmiennych jest sumą wykładników zmiennych w nim występujących. Na przykład jednomian x^2y^3 ma stopień równy 5, a jednomian xy^3z^4 ma stopień równy 8.

Stopień wielomianu wielu zmiennych jest równy największemu spośród stopni występujących w nim jednomianów.

Wielomian $u(x,y) = 6x^4y^2 - 8x^3y^2 + 12xy^4 + 3x^5$ jest stopnia 6.

Wielomian $w(x,y,z) = -3xy^3z^5 + 4x^4yz^3 - 2x^6y^2 + 7xz^5$ jest stopnia 9.

12. Wyznacz wielomian $v(x,y,z) = 2u(x,y,z) - 3w(x,y,z)$ oraz określ jego stopień.

a) $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2,\ \ w(x,y,z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$

b) $u(x,y,z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz,\ \ w(x,y,z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

13. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x, y, z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1$, $y+2$, $z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$u(x) \cdot v(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) =$$
$$= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{\underline{4x}} - \underline{3x^2} + \underline{\underline{6x}} - 6 =$$
$$= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\mathrm{st}\,(w \cdot v) = \mathrm{st}\,(w) + \mathrm{st}\,(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w. Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$

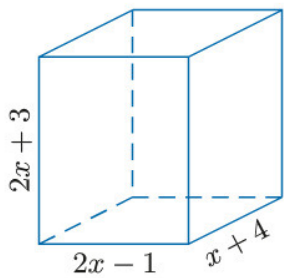
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$

c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$

d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.



Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \tfrac{1}{2}$$

Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$V(x) = (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) =$$
$$= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$

b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$

c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$

d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x,y) = x^2 - 2y$ i $w(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) \cdot w(x,y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\
&= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\
&= 2x^4 + x^2y^2 - \underline{3x^2y} - \underline{4x^2y} - 2y^3 + 6y^2 = \\
&= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2
\end{aligned}
$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x,y) = xy - 2x^2$, $w(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + x$

b) $u(x,y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x,y) = x^2y + 2xy - y$

c) $u(x,y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x,y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x,y,z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x,y,z) = 2xyz - yz$

b) $u(x,y,z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x,y,z) = x^2y - xy^2 + 2z$

c) $u(x,y,z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu.

a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$

b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$

c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$

d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$

e) $\left(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right)$

f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny wielomianu w bez wykonywania mnożenia wielomianów.

a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$
d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x^3-4x^2+3$
b) $w(x) = \sqrt{2}\,x^2+x-2\sqrt{2}$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

a) $u(x) = x^2+3x-1,\ \ w(x) = x^4-6x^3-2x^2$
b) $u(x) = x^4-x^2+1,\ \ w(x) = -6x^3+2x^2-1$
c) $u(x) = x^3-x^2+x+1,\ \ w(x) = 3x^2-2x+1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x+1$, $b = x+2$, $c = 2x-4$
b) $a = x^2+4$, $b = x+2$, $c = x^2-1$

6. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają te same współczynniki przy odpowiednich potęgach?

a) $u(x) = (x^2-3x+1)(x^2+4x),\ \ w(x) = x^4+mx^3+nx^2+4x$
b) $u(x) = (x^2-2x^4)(2x^2-x+1),\ \ w(x) = mx^6+2x^5+nx^4-x^3+x^2$
c) $u(x) = (x^3+2x)(x^2-2x^4),\ \ w(x) = (m+1)x^7+(2n-1)x^5+2x^3$

7. Wyznacz wielomian $v(x,y) = [u(x,y)]^2 - 2w(x,y)$.

a) $u(x,y) = 2x^2-xy,\ \ w(x,y) = 6x^3y^2-3x^2y^2+y^4$
b) $u(x,y) = 3x^2y+2xy^2,\ \ w(x,y) = 2x^4y^4+4x^4y^2+3x^3y^3-xy^4$

8. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^2y+3xy^2)(x-y-4)$
b) $(x+y)(x-2y)(x-xy+y^2)$
c) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)$
d) $\left(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,y\right)\left(2x^2+\sqrt{6}\,xy+3y^2\right)$

9. Wyznacz iloczyn.

a) $(x-2y)(y-2z)(z-2x)$
b) $(x+y+z)(x-y-z)$
c) $(2x-y)(3y+2z)(2x+y)(3y-2z)$
d) $(x+xy+xyz)(1+x-yz)$

10. Wyznacz wielomian zmiennych x, y, z opisujący różnicę objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x+1$, $y+2$, $z+3$ i objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x+1$, $y+1$, $z+1$.

Powierzchnie

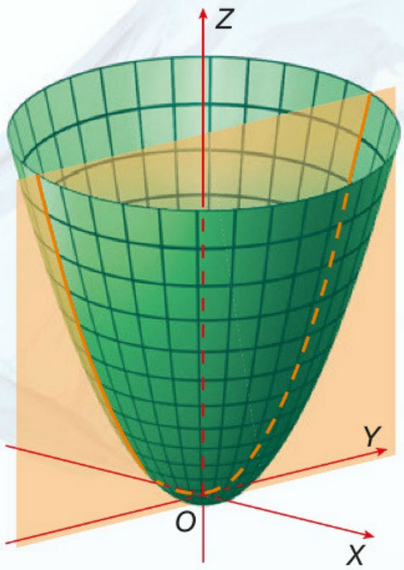
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y), a wartościami – liczby rzeczywiste z. Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

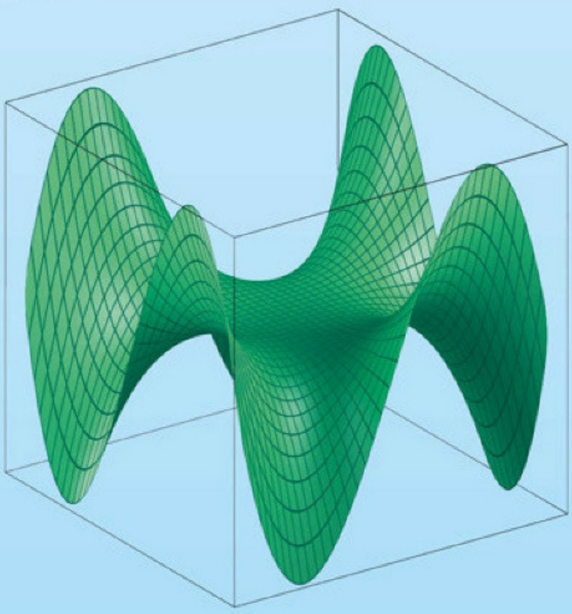
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej**. Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

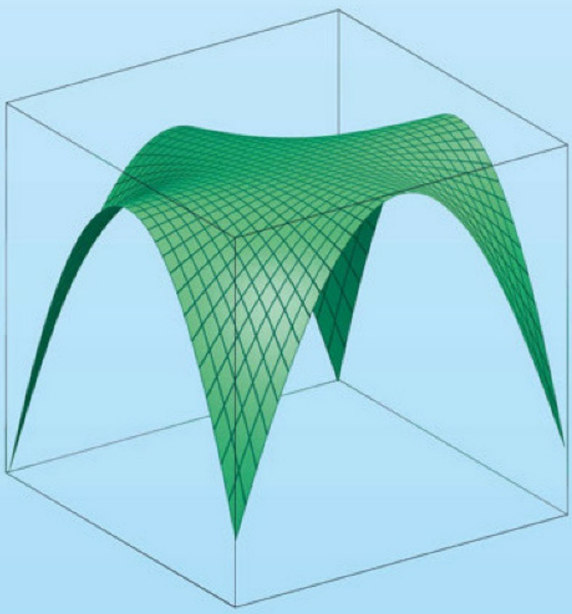


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{sześcian sumy}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad \text{sześcian różnicy}$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

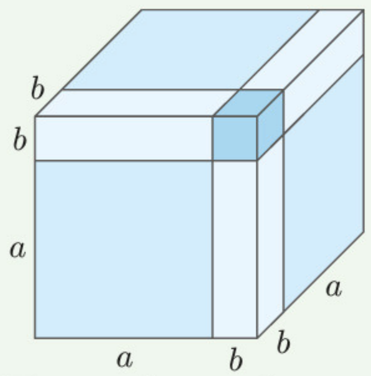
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

D **Ćwiczenie 1**

Wyprowadź wzór na sześcian różnicy, korzystając z tego, że:

a) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$,

b) $(a-b)^3 = (a+(-b))^3$.



Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru na sześcian sumy.

Przykład 1

Zapisz $(x+2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$(\boxed{x}+\boxed{2})^3 =$

$= \boxed{x}^3 + 3\cdot\boxed{x}^2\cdot\boxed{2} + 3\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{2}^2 + \boxed{2}^3 =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^3$ c) $(x+3)^3$ e) $(2x+3)^3$ g) $(3x+1)^3$

b) $(x-1)^3$ d) $(x-4)^3$ f) $(2x-1)^3$ h) $(1-3x)^3$

Przykład 2

Oblicz $(2-\sqrt{3})^3$.

$(2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $(2+\sqrt{2})^3$ c) $(3-\sqrt{3})^3$ e) $(1+2\sqrt{5})^3$ g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

b) $(\sqrt{5}-1)^3$ d) $(\sqrt{2}-4)^3$ f) $(2\sqrt{3}-3)^3$ h) $(\sqrt{3}-\sqrt{6})^3$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad \text{suma sześcianów}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad \text{różnica sześcianów}$$

D **Ćwiczenie 4**

Wyprowadź wzory na sumę sześcianów i różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+2)(x^2-2x+4)$

b) $(x-1)(x^2+x+1)$

c) $(x^2-x+1)(1+x)$

d) $(x^2-6x+36)(x+6)$

e) $(x-8)(x^2+8x+64)$

f) $(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) =$

$= (x^2-4)(x^4+4x^2+16) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

b) $(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)(9x^4+3x^2+1) =$

$= (3x^2-1)(9x^4+3x^2+1) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

b) $(3+x)(3-x)(x^4+9x^2+81)$

c) $((x+2)^2-4x)(x^4-4x^2+16)$

d) $(2x+5)^2(4x^2-20x+25)$

D **Ćwiczenie 7**

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n = 5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbf{R}$ i $n \geqslant 2$:
$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a^2+a+1) = a^n - 1$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-1)(1+x+x^2+x^3)$

b) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$

c) $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1)$

d) $(x^3+x^2+x+1)(x^2-1)(x-1)$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geqslant 2$ różnica n-tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość podanego wyżej wzoru dla:

a) $n = 4$,

b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$

b) $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Zadania

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+4)^3$
b) $(x+5)^3$
c) $(x-2)^3$
d) $(x-3)^3$
e) $(2x+1)^3$
f) $(5x-1)^3$
g) $(x-\sqrt{2})^3$
h) $(x+\sqrt{3})^3$

2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a.

a) $a = \sqrt{2} - 1$
b) $a = 3 + \sqrt{2}$
c) $a = 2\sqrt{5} - 1$
d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

3. Oblicz.

a) $(1+\sqrt{2})^3 + (1-\sqrt{2})^3$
b) $(4+\sqrt{2})^3 - (4-\sqrt{2})^3$
c) $(2\sqrt{3}-1)^3 - (2\sqrt{3}+1)^3$
d) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^3 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})^3$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x+y)^3$
b) $(x-2y)^3$
c) $(3x+2y)^3$
d) $(2x-3y)^3$
e) $\left(x+\frac{1}{3}y\right)^3$
f) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$
g) $(\sqrt{3}x+y)^3$
h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-y\right)^3$

5. a) Oblicz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x+2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x+3y$.

b) Oblicz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x+y$ i sześcianu o krawędzi długości $x+3y$.

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+5)^2(x^2-5x+25)$

b) $(x^2+5x+25)(x-5)^2$

c) $(3x-1)^2(9x^2+3x+1)$

d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)$ dla $x=\sqrt[3]{9}$,

b) $(9x^2-6x+4)(3x+2)$ dla $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,

c) $(x-\sqrt{5})^3-2x(x+5)(x-5)+(x+\sqrt{5})^3$ dla $x=\frac{1}{40}$,

d) $(x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5}x+5)-(\sqrt{5}-x)(x^2+\sqrt{5}x+5)$ dla $x=\sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

a) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+x$

b) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3+8x$

c) $(4x^2+2x+1)(2x-1)=26$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2-x+4\right)\left(\frac{1}{2}x+2\right)=-9$

9. Skróć ułamek.

a) $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$

b) $\frac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}$, $a\neq 1$

D **10.** Uzasadnij prawdziwość wzoru.

a) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

b) $a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

11. Przedstaw wielomian jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

a) a^6-b^6

*b) a^6+b^6

D **12.** Uzasadnij, że dla dowolnego $n\in\mathbf{N}$ liczba:

a) 4^n-1 jest podzielna przez 3,

b) 7^n-1 jest podzielna przez 6.

13. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{9}\right)^2+2\sqrt[3]{9}+2^2}{\left(\sqrt[3]{9}\right)^2+2\sqrt[3]{9}+2^2}=$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

$$=\frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{\left(\sqrt[3]{9}\right)^3-2^3}=\frac{\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4}{9-8}=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4$$

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

b) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{10}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

d) $\frac{11}{3-2\sqrt[3]{2}}$

Warto wiedzieć

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami **wzoru dwumianowego Newtona** (zwanego też **dwumianem Newtona**) pozwalającego wyznaczyć $(a+b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$. Będzie on szczegółowo omówiony w dalszym toku nauki.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$$\begin{array}{ll}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1\quad 1 \\
n=2 & 1\quad 2\quad 1 \\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
n=6 & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\
n=7 & 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1 \\
n=8 & 1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1
\end{array}$$

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. na $n = 8$ mamy: $8 = 1+7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$, $70 = 35 + 35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

1. Podaj wzory na:
a) $(a+b)^7$, b) $(a-b)^7$, c) $(a+b)^8$, d) $(a-b)^8$.

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj wzory na $(a+b)^9$ i $(a+b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:
a) $(\sqrt{2}+1)^4$, b) $(\sqrt{3}-1)^4$, c) $(\sqrt{2}+1)^6$, d) $(\sqrt{3}-1)^6$.

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2)$ Wyłączamy $4x^4$ przed nawias.

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) =$ Wyłączamy x^4 przed nawias.
$= x^4(x - 3)^2$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

b) $w(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) =$ Wyłączamy x przed nawias.
$= x(x^2 - 4)(x^2 + 4) =$
$= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ Dwukrotnie korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

c) $w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1)$ Wyłączamy x^3 przed nawias.

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 7x^3$

b) $w(x) = 18x^3 + 30x^2$

c) $w(x) = -2x^5 - 8x^4$

d) $w(x) = -54x^3 + 36x^2$

e) $w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x$

f) $w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$

g) $w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4$

h) $w(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 + x$

Ćwiczenie 2

D

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

a) $w(x) = 3x^3 + 12x$

b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$

c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$

d) $w(x) = -\sqrt{2}\,x^7 - \sqrt{6}\,x^5$

e) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$

f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$

g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$

h) $w(x) = 3\sqrt{2}\,x^5 - 2\sqrt{3}\,x^4 + \sqrt{6}\,x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1)$$ Wyłączamy x^3 przed nawias.

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójmian ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x+1)(x - \tfrac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x+1)(x - \tfrac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$

c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$

d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$

e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$

f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$

g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$

h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że…

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karl fridriś gałs] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum" [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student, Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrkla i linijki) siedemnastokąta foremnego. Życzył sobie, by został on wyryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wyłącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy otrzymany w nawiasie trójmian kwadratowy można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3, \;\; x^3$

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2, \;\; x^2$

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4, \;\; 2x^4$

d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2, \;\; 6x^2$

e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x, \;\; 6x$

f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3, \;\; \frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$

e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$

f) $w(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{8}{3}x^4 + 3x^3$

g) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

h) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

i) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

j) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

k) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

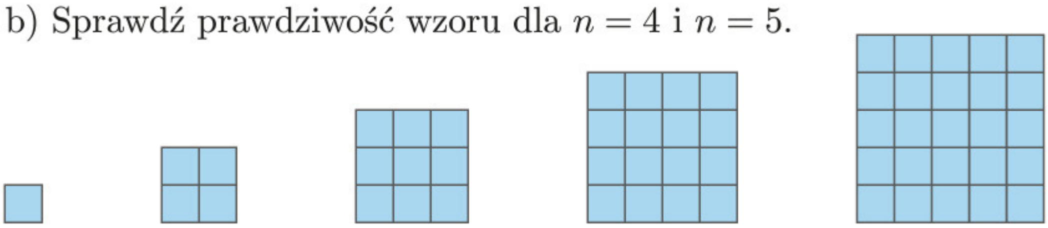
l) $w(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 + 4x + 1)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.

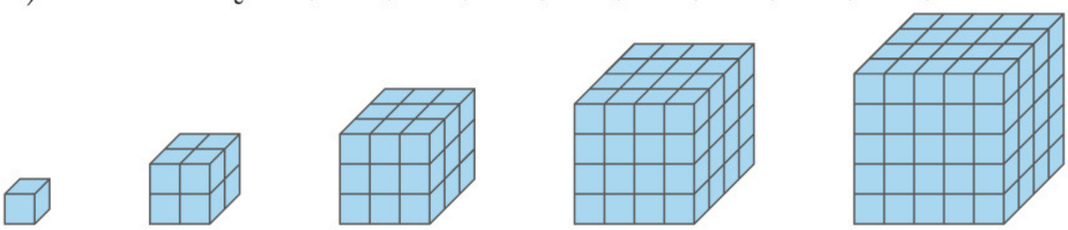


5. Sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ na czynniki.

b) Oblicz sumę $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$.



2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) =$$
$$= x^4(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny na czynniki liniowe, gdyż $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$

b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$

c) $w(x) = 8x^4 - x$

d) $w(x) = x^2 - 0{,}001x^5$

e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$

f) $w(x) = 0{,}054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

$$u(x) = \underbrace{x^3 - 4x^2} + \underbrace{2x - 8} =$$
$$= x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4)$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$u(x) = \underbrace{7x^3 + 2x^2}\underbrace{- 14x - 4} = x^2(7x + 2) - 2(7x + 2) = (x^2 - 2)(7x + 2) =$$
$$= \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(7x + 2)$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$u(x) = \underbrace{4x^5 - 2x^4}\underbrace{- 16x^3 + 8x^2} = 2x^4(2x - 1) - 8x^2(2x - 1) =$$
$$= (2x^4 - 8x^2)(2x - 1) = 2x^2(x^2 - 4)(2x - 1) = 2x^2(x - 2)(x + 2)(2x - 1)$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$

b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$

d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$

e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$

f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$

g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$

h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 + 27x$
b) $w(x) = x^5 - 8x^2$
c) $w(x) = -x^4 - 64x$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2$
e) $w(x) = 27x^6 + 8x^3$
f) $w(x) = 125x^8 - x^5$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$
b) $w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2$
c) $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$
d) $w(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$
e) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1$
f) $w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27$
g) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}\,x - 2$
h) $w(x) = \sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
c) $w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x)$
b) $w(x) = \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2\right)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28)$
c) $w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4)$
d) $w(x) = \left(3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2\right)(x^6 - 1)$

5. Przeczytaj podane w ramce przykłady, a następnie rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 + 1$
b) $w(x) = 4x^4 + 9$
c) $w(x) = 9x^4 + 16$
d) $w(x) = x^4 + 5x^2 + 9$
e) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 1$
f) $w(x) = 4x^4 + 8x^2 + 9$

> Rozłóż wielomian w na czynniki.
>
> a) $w(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 =$
> $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
> $= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$
>
> b) $w(x) = x^4 + 6x^2 + 25 =$
> $= (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + 6x^2 =$
> $= (x^2 + 5)^2 - 4x^2 =$
> $= (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 5)$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$
b) $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3$
c) $w(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$
d) $w(x) = 64x^3 + 12x^2 - 3x - 1$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym**.

Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, tj. takich argumentów x, dla których spełnione jest równanie $w(x) = 0$.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2(x-4) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

> $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$x(x-3)^2 = 0$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $6x^4 + 2x^3 = 0$

b) $-x^5 + 4x^3 = 0$

c) $x^6 + x = x + 2x^4$

d) $\frac{x^4 - 4x^3}{2} = \frac{x^5 - 6x^3}{3}$

e) $\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x = 0$

f) $-4x^4 + 4x^3 - x^2 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5 - 2x^4 - 15x^3 = 0$.

$$x^3(x^2 - 2x - 15) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x - 15 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$
$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3, 0 i 5.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$
c) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$
e) $2x^2 - 3x = x - x^3$
b) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$
d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$
f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Przykład 5

Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX.

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

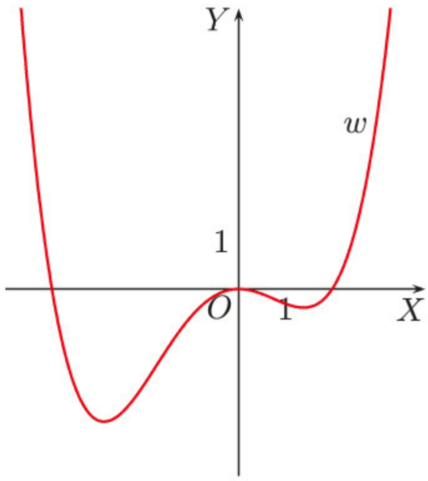
$$\frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.



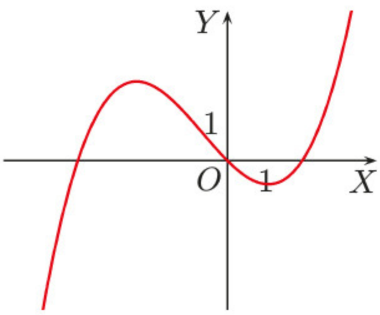
$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

Pierwiastki równania $w(x) = 0$ to miejsca zerowe wielomianu w.

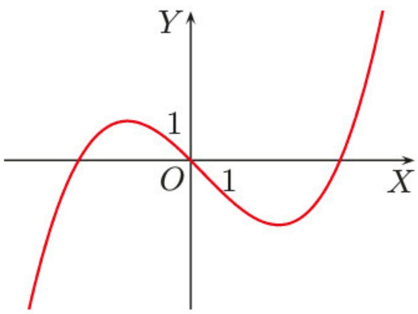
Ćwiczenie 3

Dane są wielomiany: $u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x$ oraz $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$. Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj jeden z poniższych wykresów.

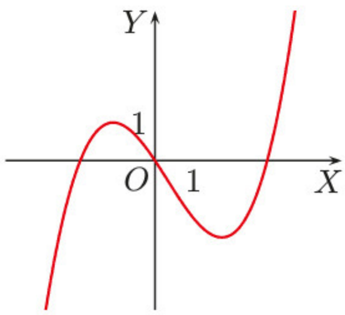
A.



B.



C.



Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x^2-9)(x-1) = \\ = (x-3)(x+3)(x-1)$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu, rozwiązujemy równanie:

$$(x-3)(x+3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ lub } x + 3 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3, 1 i 3.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$

d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$

e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$

f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 = 4x^2$

b) $x^5 = 9x^3$

c) $x^4 = -27x^3$

d) $x^5 = 8x^2$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^6 - 25x^2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$

b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$

d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$

e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$

f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$

g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$

h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$

i) $x^3 + 4x = -5x^2$

j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$

k) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$

l) $\frac{20x^7 + x^3}{8} = \frac{x^7 - 2x^5}{2}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$

b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$

c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$

d) $1 - x^3 = x^2 - x$

e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$

f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$

g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$

i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

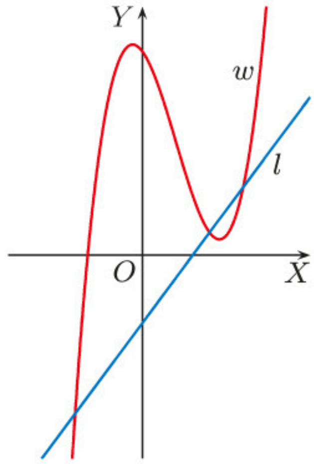
a) $x^3 - 5x - 4 = 0$

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą l: $y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w.



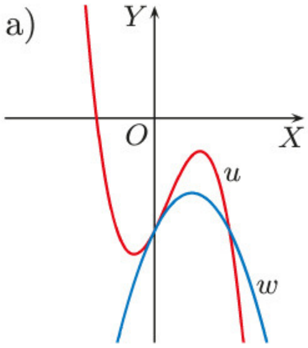
6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l.

a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, l: $y = 4x + 2$

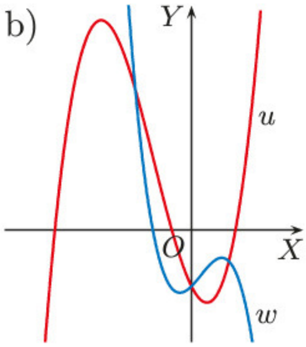
b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, l: $y = 3x + 1$

c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, l: $y = 4x - 3$

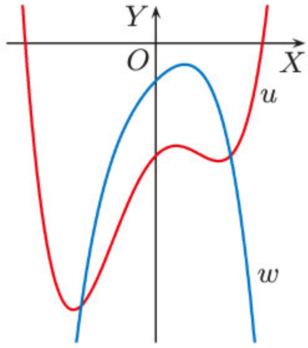
7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w.

a) 

$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$
$w(x) = -x^2 + 2x - 3$

b) 

$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

c) 

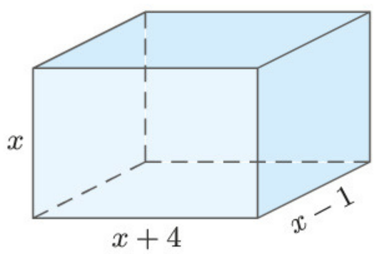
$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1, 2, 3.

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n, którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3, a wyraz wolny jest równy 1.

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 6$

10. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12?



D **11.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm^3. Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości 0,75 m^3. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że $n = k \cdot m$.
Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian niezerowy q ($q \not\equiv 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1
$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r l}
3171 : 7 = 453 & \\
-\,28 & \\
\hline
37 & \\
-\,35 & \\
\hline
21 & \\
-\,21 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Przykład 2
Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{-3x^2 - 3x\phantom{{}-4}} \\
\ -4x - 4 \\
\ \underline{4x + 4} \\
\ 0
\end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\
\underline{-3x^2 - 3x\phantom{{}-4}} \\
\ -4x - 4
\end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\
\underline{-3x^2 - 3x\phantom{{}-4}} \\
\ -4x - 4 \\
\ \underline{4x + 4} \\
\ 0
\end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1
Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$

b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q ($q \not\equiv 0$) nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r l}
752 : 9 = 83 & \\
\underline{-\,72} & \\
32 & \\
\underline{-\,27} & \\
5 &
\end{array}$$

$752 = 83 \cdot 9 + 5$

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r l}
(5x^2 + 13x + 11) & : (x+2) = 5x + 3 \\
\underline{-5x^2 - 10x} & \\
3x + 11 & \\
\underline{-3x - 6} & \\
5 &
\end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r l}
(2x^3 - x^2 - 2x - 5) & : \left(x - \frac{3}{2}\right) = 2x^2 + 2x + 1 \\
\underline{-2x^3 + 3x^2} & \\
2x^2 - 2x - 5 & \\
\underline{-2x^2 + 3x} & \\
x - 5 & \\
\underline{-x + \frac{3}{2}} & \\
-3\frac{1}{2} &
\end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned}
(2x^2 + 2x + 1) \cdot \left(x - \tfrac{3}{2}\right) - 3\tfrac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \tfrac{3}{2} - 3\tfrac{1}{2} = \\
&= 2x^3 - x^2 - 2x - 5
\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$

b) $(4x^2 + 6x + 7) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$

d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Zwróćmy uwagę, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r, która jest funkcją stałą.

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x,\ \ q(x) = x - 2$

b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4,\ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x,\ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1,\ \ q(x) = x + 2$

Wielomian w jest podzielny przez dwumian q, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12,\ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6,\ \ q(x) = x - 3$

d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9,\ \ q(x) = x + 3$

e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x - 1$

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ \ q(x) = x - 4$

b) $w(x) = x^3 + 3x + 7,\ \ q(x) = x + 3$

c) $w(x) = 3x^4 - x^2,\ \ q(x) = x - 1$

d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4,\ \ q(x) = x + 6$

e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2,\ \ q(x) = x + \frac{1}{2}$

f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3,\ \ q(x) = x - \frac{1}{4}$

3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.

a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$

b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$

c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$

d) $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x - \frac{1}{2}) \stackrel{?}{=} 2x^3 - 4x + 8$

4. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9,\ \ q(x) = 2x + 1$

b) $w(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 7,\ \ q(x) = 3x - 1$

c) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1,\ \ q(x) = 3x + 4$

d) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2,\ \ q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Dla dowolnych wielomianów w i q, gdzie q nie jest wielomianem zerowym, możemy wykonać dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Jako iloraz otrzymujemy pewien wielomian p oraz resztę r. Reszta r albo jest wielomianem zerowym, albo zachodzi zależność: $\operatorname{st}(r) < \operatorname{st}(q)$.
Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Dla danych wielomianów w i q, gdzie $q \not\equiv 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w = p \cdot q + r$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\operatorname{st}(r) < \operatorname{st}(q)$.

Przykład

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{l}
\ \ (2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\
\underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x\qquad\quad} \\
\qquad\quad -2x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\quad\ \ \underline{2x^2 + 2x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\ \ 4x + 5
\end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę $r(x) = 4x + 5$, czyli zachodzi następująca równość:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

Zauważmy, że reszta jest wielomianem stopnia pierwszego.

5. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4,\ \ q(x) = x^2 - 4$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2,\ \ q(x) = x^2 + x$

c) $w(x) = x^3 + 6,\ \ q(x) = x^2 + x + 1$

d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3,\ \ q(x) = x^2 - 1$

e) $w(x) = x^4 + 6x^3 - 2,\ \ q(x) = 2x^2 + 1$