

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinaria, Ciudad de México, México.

ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), marzo-abril 2025,

Volumen 9, Número 2.

[https://doi.org/10.37811/cl\\_rcm.v9i2](https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i2)

## **MODELADO DE UN ROBOT HUMANOIDE DE 18 GDL MEDIANTE TÉCNICAS RESURSIVAS**

### **MODELLING OF A 18 DOF HUMANOID ROBOT USING RECURSIVE TECHNIQUES**

**Miguel Angel Ortega-Palacios**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

**Amparo Palomino-Merino**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

**Fernando Reyes-Cortés**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

DOI: [https://doi.org/10.37811/cl\\_rcm.v9i2.17593](https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i2.17593)

## Modelado de un Robot Humanoide de 18 GDL mediante Técnicas Resursivas

**Miguel Angel Ortega-Palacios<sup>1</sup>**

[miguel.ortegap@alumno.buap.mx](mailto:miguel.ortegap@alumno.buap.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-7384-4453>

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
México

**Amparo Palomino-Merino**

[amparo.palomino@correo.buap.mx](mailto:amparo.palomino@correo.buap.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-2150-7762>

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
México

**Fernando Reyes-Cortés**

[fernando.reyes@correo.buap.mx](mailto:fernando.reyes@correo.buap.mx)

<https://orcid.org/0000-0001-5200-7632>

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
México

### RESUMEN

Los robots humanoides han sido ampliamente estudiados en la comunidad científica, con el objetivo de poder comprender y replicar los movimientos que ejecuta el ser humano cuando realiza una tarea específica. Por lo cual, a lo largo de los últimos años se han propuesto diversos métodos y estrategias para analizar y obtener un modelo matemático que permita resolver esta problemática; esto implica analizar y modelar la dinámica de robots humanoides. Entre los métodos más utilizados en la literatura para modelar un robot, son los analíticos, geométricos y mediante la convención de Denavit-Hartenberg. Por lo tanto, en el presente estudio se propone utilizar un método recursivo basado en la mecánica analítica de Euler para resolver el problema de cinemática directa, cinemática diferencial, rapidez lineal y energía cinética de un robot bípedo de 18 grados de libertad (GDL).

**Palabras clave:** robot humanoide, cinemática directa, matriz antisimétrica, recursivo, modelo dinámico

---

<sup>1</sup> Autor principal.

Correspondencia: [miguel.ortegap@alumno.buap.mx](mailto:miguel.ortegap@alumno.buap.mx)

# Modelling of a 18 DOF Humanoid Robot using Recursive Techniques

## ABSTRACT

Humanoid robots have been widely studied in the scientific community, with the goal of understanding and replicating the movements that humans execute when performing a specific task. Therefore, in recent years, various methods and strategies have been proposed to analyze and obtain a mathematical model that allows solving this problem; this involves analyzing and modeling the dynamics of humanoid robots. Among the most widely used methods in the literature for robot modeling are analytical, geometric, and the Denavit-Hartenberg convention. Therefore, in the present study, we propose using a recursive method based on Euler analytical mechanics to solve the problems of forward kinematics, differential kinematics, linear speed, and kinetic energy of a 18-degree-of-freedom (DOF) humanoid robot.

**Keywords:** humanoid robot, forward kinematics, antisymmetric matrix, recursive, dynamics model

*Artículo recibido 13 marzo 2025  
Aceptado para publicación: 19 abril 2025*



## INTRODUCCIÓN

El problema de estudio relacionado con la dinámica de los robots bípedos ha sido ampliamente estudiado en la comunidad científica. En la literatura se han encontrado varias limitaciones en los modelos de robots bípedos, esto impulsa la necesidad de aplicar un modelo diferente, basado en la mecánica analítica de Euler. El cual permitirá resolver el problema de cinemática y dinámica mediante un análisis recursivo, esto es importante en el área computacional, ya que en un futuro se pretende desarrollar un algoritmo recursivo que permita obtener el modelo dinámico de cualquier robot bípedo empleando esta metodología.

Cuando se analiza el modelo dinámico de un robot bípedo en la literatura, generalmente se plantea el desarrollo y la solución del modelo del tren inferior en robots bípedos, la mayoría de estos emplean la metodología de Denavit-Hartenberg. Debido al alto número de grados de libertad y la complejidad involucrada en el cálculo de las ecuaciones, la mayoría de los autores tienen el objetivo de modelar sólo el tren inferior de los robots, ya sea utilizando robots comerciales como Nao con 12 GDL (Fierro, Pámanes, Santibanez, Ruiz, & Ollervides, 2014), HYDROiD con 8 GDL en cada pierna (Bertrand, Bruneau, Ouezdou, & Alfayad, 2012), Scout (Ruiz, 2014) y NWPUBR-1 (Zhang, y otros, 2020) con 12 GDL y Ostrich Bionic con 13 GDL (Che, Pan, Yan, & Yu, Kinematics Analysis of Leg Configuration of An Ostrich Bionic Biped Robot, 2021), Cassie con 20 GDL (Gong, y otros, 2019). También se han modelado robots bípedos con diseño propio del autor, con 12 GDL (Che, 2022; Hu, 2021; Yilmazlar, 2021), 10 GDL (Huy, 2013; Bharadwaj, 2019; Cherfouh, 2022), 9 GDL (Vivas, 2009), 5 GDL (Tang, y otros, 2023). Todos estos trabajos de investigación solo modelan el tren inferior, tomando uno de los pies del robot como referencia.

En otros trabajos es posible obtener la solución de cinemática directa tanto para piernas como para brazos, utilizando el robot HRP-2 con 12 GDL en las piernas (Kajita, Hirukawa, Harada, & Yokoi, 2014), DARwIn-OP con 6 GDL en cada pierna (Franco & Guerrero, 2018), AXIS con 12 GDL en piernas (Williams, 2012), NAO con 21 GDL (Kofinas, Orfanoudakis, & Lagoudakis, 2013), robot Digit con 20 GDL (Castillo, Weng, Zhang, & Hereid, 2021), robot AZAD-16 con 16 GDL (Khan & Mandava, 2023) y robot L04 con 17 GDL (Mou, y otros, 2024); estos modelos proponen el torso o la pelvis del robot como referencia, pero lo hacen mediante los métodos tradicionales, tales como el modelado de



Euler-Lagrange.

El robot Bioloid también ha sido utilizado por la comunidad científica para realizar varios estudios relacionados con cinemática, dinámica y control. La mayoría de los trabajos obtienen el modelo cinemático de las piernas, teniendo en cuenta un solo pie como marco de referencia inicial. (Meggiolaro, 2016; Reyes, 2018; Krishnan, 2014; Cerritos-Jasso, 2013; Chiang, 2011; Domínguez, 2017; Arias, Olvera, J. A., & Núñez, 2014); mientras que en (Montenegro, 2016) se toma el torso como referencia. Por otro lado (Nunez, Briseno, Rodriguez, Ibarra, & Rodriguez, 2012) obtienen el modelo cinemático de las piernas y brazos del robot, pero toman el torso y la pelvis como referencia. En (Gonçalves, Ribeiro, Ribeiro, Lopes, & Flores, 2022) se emplea un algoritmo recursivo basado en los ángulos de Euler para resolver la cinemática directa del robot antropomórfico móvil CHARMIE.

A partir de este análisis, se propone como objetivo de estudio el robot Bioloid Premium con 18 GDL. La principal motivación de este artículo es desarrollar una metodología basada en la mecánica analítica de Euler, para que en un futuro trabajo se obtenga el modelo dinámico de un robot bípedo siguiendo esta metodología. Esto será atractivo desde el punto de vista computacional, para desarrollar un algoritmo recursivo que pueda tener mejor desempeño.

En el presente trabajo se propone dar solución al problema de cinemática directa, cinemática diferencial, rapidez lineal, y energía cinética del robot Bioloid Premium, considerando una metodología recursiva para modelar sus cuatro extremidades, tomando la pelvis como sistema de referencia inicial del robot. El documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 1 se exponen del desarrollo de la metodología analítica de Euler para obtener el modelo de cinemática directa del robot. Las cinemáticas diferencial recursiva del robot se expone en la sección 2. El cálculo de la rapidez lineal recursiva se propone en la sección 3. La sección 4 presenta la metodología para obtener la matriz de inercia de forma recursiva. Finalmente las conclusiones y trabajo a futuro se presentan en la sección 5.

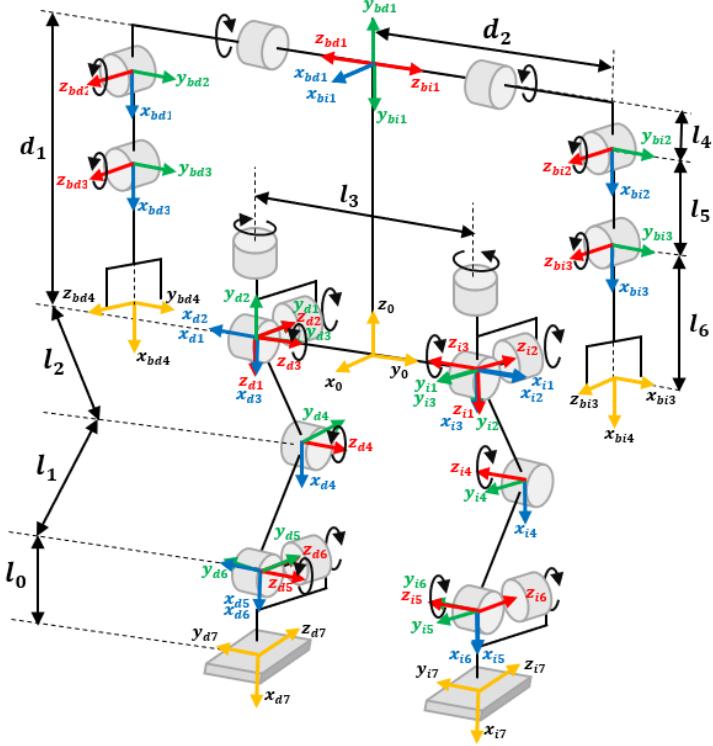
### **Cinemática directa recursiva del robot bioloid premium**

Se propone generar cuatro cadenas cinemáticas abiertas para describir la posición y orientación de cada uno de los eslabones del robot Bioloid Premium, considerando la pelvis del robot como sistema de referencia inicial  $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ . A partir del sistema inicial, la primera cadena cinemática considera como sistema de referencia final el pie derecho  $\Sigma_{d7}(x_{d7}, y_{d7}, z_{d7})$ , la segunda cadena cinemática toma



como sistema de referencia final la pierna izquierda  $\Sigma_{i7}(x_{i7}, y_{i7}, z_{i7})$ , la tercera cadena tiene a  $\Sigma_{bd4}(x_{bd4}, y_{bd4}, z_{bd4})$  como sistema de referencia final, que corresponde al brazo derecho, y la cuarta cadena  $\Sigma_{bi4}(x_{bi4}, y_{bi4}, z_{bi4})$  pertenece al brazo izquierdo. En la figura 1 se representan los sistemas de referencia asignados a cada una de las articulaciones del robot.

**Figura 1.** Sistemas de referencia asignados a las articulaciones del robot Bioloid.



Las medidas del robot son las siguientes:  $l_0 = 33 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 118 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 73 \text{ mm}$ ,  $l_1 = l_2 = 76 \text{ mm}$ ,  $l_3 = 77 \text{ mm}$ ,  $l_4 = l_6 = 108 \text{ mm}$ ,  $l_5 = 66 \text{ mm}$ .

Empleando la convención de Denavit-Hartenberg y la transformación de coordenadas correspondiente (Siciliano, Sciavicco, Villani, & Oriolo, 2009), se toma  $\mathbf{p}_{i-1}$  y  $\mathbf{p}_i$  como los vectores de posición de los sistemas de referencia  $i - 1$  e  $i$ , respectivamente;  $R_{z_{i-1}}$  y  $R_{x_{i-1}}$  denotan las matrices de rotación de cada eslabón, y  $d_{i-1}$  el vector de desplazamiento que tiene coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ). Para obtener los vectores de cinemática directa de cada eslabón del robot, se propone la ecuación recursiva (1):

$$p_{i-1} = R_{z_{i-1}}(\phi)[d_{i-1} + R_{x_{i-1}}(\theta)p_i] \quad (1)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . El número de eslabones está denotado por  $n$ . Siguiendo como ejemplo los parámetros de las tablas 1 y 2, se obtiene las cinemáticas directa de cada eslabón del robot. Dependiendo de la configuración del robot, es importante tomar en cuenta los centros de masa en el parámetro  $d_i$ , cuando sea necesario. Es importante señalar que los parámetros de  $p_0$  corresponden a la transformación de coordenadas que va desde la pelvis hacia el primer eslabón de cada extremidad del robot.

**Tabla 1.** Parámetros para calcular la cinemática directa de cada eslabón de la pierna derecha.

Posición $p_{i-1}$	Matriz $R_{xi-1}(\theta)$	Matriz $R_{zi-1}(\phi)$	Desplazamiento $d_{i-1}$
$p_0$	$R_{x0} = R_{x0}(\pi)$	$R_{z0} = R_{z0}(-\pi/2)$	$d_0 = [l_3/2 \ 0 \ 0]^T$
$p_1$	$R_{x1} = R_{x1}(-\pi/2)$	$R_{z1} = R_{z1}(q_{d1})$	$d_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$
$p_2$	$R_{x2} = R_{x2}(\pi/2)$	$R_{z2} = R_{z2}(q_{d2})$	$d_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$
$p_3$	$R_{x3} = R_{x3}(0)$	$R_{z3} = R_{z3}(q_{d3})$	$d_3 = [l_2 \ 0 \ 0]^T$
$p_4$	$R_{x4} = R_{x4}(0)$	$R_{z4} = R_{z4}(q_{d4})$	$d_4 = [l_1 \ 0 \ 0]^T$
$p_5$	$R_{x5} = R_{x5}(-\pi/2)$	$R_{z5} = R_{z5}(q_{d5})$	$d_5 = [0 \ 0 \ 0]^T$
$p_6$	$R_{x6} = R_{x6}(0)$	$R_{z6} = R_{z6}(q_{d6})$	$d_6 = [l_0 \ 0 \ 0]^T$

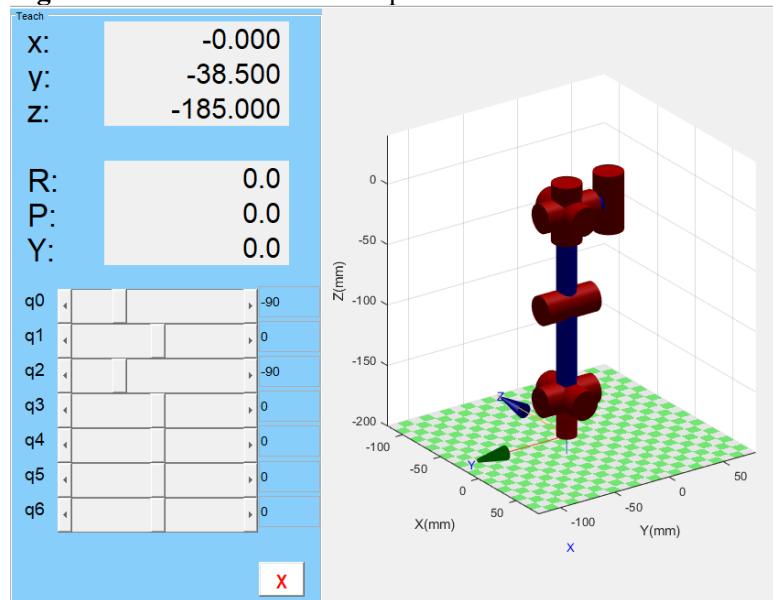
**Tabla 2.** Parámetros para calcular la cinemática directa de cada eslabón del brazo derecho.

Posición $p_{i-1}$	Matriz $R_{xi-1}(\theta)$	Matriz $R_{zi-1}(\phi)$	Desplazamiento $d_{i-1}$
$p_0$	$R_{x0} = R_{x0}(\pi/2)$	$R_{z0} = R_{z0}(0)$	$d_0 = [0 \ 0 \ d_1]^T$
$p_1$	$R_{x1} = R_{x1}(-\pi/2)$	$R_{z1} = R_{z1}(q_{d7})$	$d_1 = [l_4 \ 0 \ d_2]^T$
$p_2$	$R_{x2} = R_{x2}(0)$	$R_{z2} = R_{z2}(q_{d8})$	$d_2 = [l_5 \ 0 \ 0]^T$
$p_3$	$R_{x3} = R_{x3}(0)$	$R_{z3} = R_{z3}(q_{d9})$	$d_3 = [l_6 \ 0 \ 0]^T$

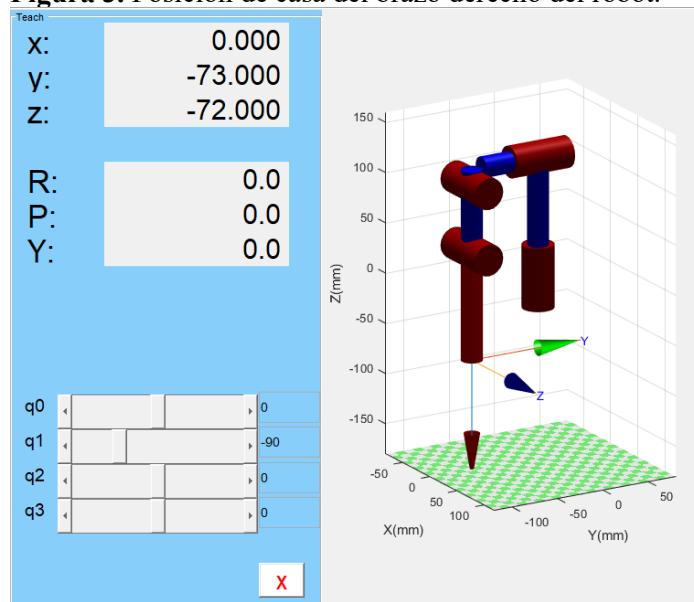
Para calcular la cinemática directa de la pierna izquierda, se cambia el signo de los parámetros  $R_{z0}, R_{x1}, R_{x2}$  y  $R_{x5}$ . En el caso del brazo izquierdo, se cambia el signo de  $R_{x0}$  y  $R_{x1}$ . Con el objetivo de validar las ecuaciones de cinemática directa, se propusieron dos ejemplos para ubicar las extremidades del robot en diferentes posturas. Por lo cual, se empleó la librería *Robotics Toolbox* de MATLAB para comprobar los resultados mediante un modelo 3D del robot. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y 3 se presenta los modelos 3D de la pierna y brazo derechos del robot, respectivamente. Los valores articulares asignados a cada  $q_i$  que se muestran en la parte izquierda de las imágenes corresponden a las posiciones de casa del robot;  $q_0$  es un parámetro fijo que se incluye en el desplazamiento de  $p_0$  a  $p_1$ ; los valores de  $x, y, z$  denotan las coordenadas espaciales del extremo final de cada extremidad del robot.



**Figura 2** Posición de casa de la pierna derecha del robot.



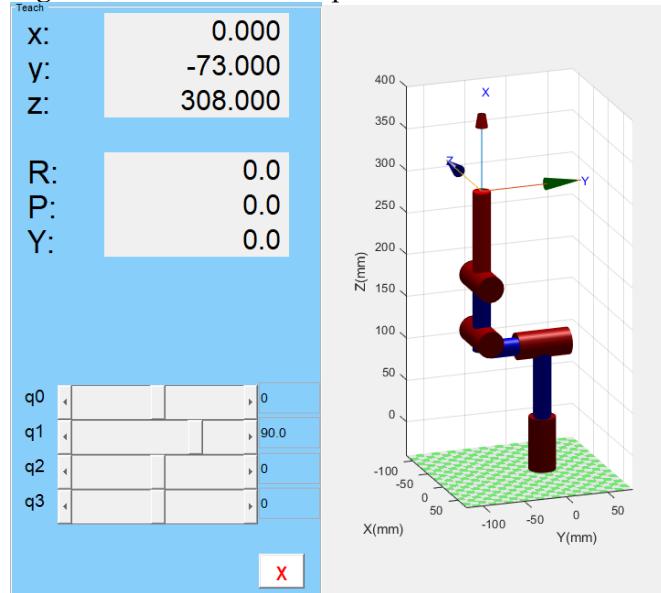
**Figura 3.** Posición de casa del brazo derecho del robot.



Posteriormente se propone llevar el brazo derecho a una postura donde alcance su altura máxima, tal como se aprecia en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, donde se cambia el valor de  $q_1$  a  $90^\circ$ , de esta forma el valor de la coordenada z alcanza un valor de 308 mm, sin tener cambio en las coordenadas x e y.

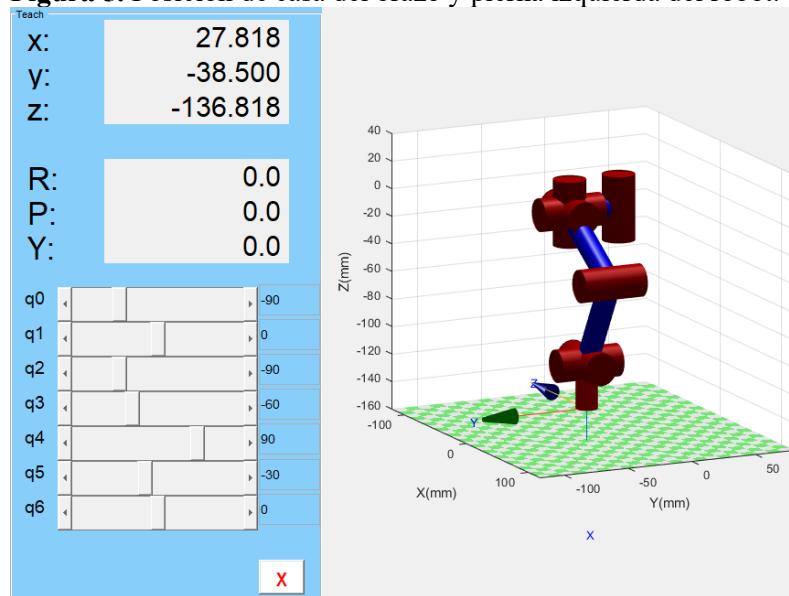


**Figura 4** Postura del robot para llevar el brazo derecho a su altura máxima.



En la figura se propone otra postura para la pierna derecha, donde solo se cambian los valores:  $q_3 = -60^\circ$ ,  $q_4 = 90^\circ$ ,  $q_5 = -30^\circ$ , de esta forma el extremo final obtiene las siguientes coordenadas espaciales:  $x = 27.818$  mm,  $z = -136.818$  mm, sin tener cambios en la coordenada  $y$ .

**Figura 5.** Posición de casa del brazo y pierna izquierda del robot.



Como se pudo ver en la representación de los modelos virtuales, las coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) muestran la ubicación del extremo final de cada extremidad del robot, de esta forma es posible validar las ecuaciones de cinemática directa del robot mediante el método recursivo.

## Cinemática diferencial recursiva

La cinemática diferencial del robot se obtiene al derivar  $\mathbf{p}_i$ , para ello se emplea la matriz  $S(k) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la cual es una matriz antisimétrica (Siciliano, Sciavicco, Villani, & Oriolo, 2009). Entonces la primera derivada de una matriz de rotación con respecto al tiempo se denota en (2):

$$\dot{\mathbf{R}}_i = S(k_i)\mathbf{R}_i \quad (2)$$

Considerando la relación entre  $S(k_i)$  y  $R_{zi}$  es posible calcular  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i$ , por lo cual se considera la ecuación (3) para obtener las velocidades recursivas de cada eslabón:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \prod_{k=1}^i R_{z_{k-1}} R_{x_{k-1}} S(k_i) \mathbf{p}_i \dot{q}_i \quad (3)$$

donde:

- $\mathbf{v}_i$  es la velocidad del  $i$ -ésimo eslabón.
- $\mathbf{v}_{i-1}$  es la velocidad lineal del eslabón  $i - 1$ .
- $\mathbf{R}_{zi-1}$  es la matriz de rotación alrededor del eje  $z$  del eslabón  $i - 1$ .
- $\mathbf{R}_{xi-1}$  es la matriz de rotación alrededor del eje  $x$  del eslabón  $i - 1$ .
- $S(k)$  es la matriz de antisimétrica.
- $\mathbf{p}_i$  es el vector de posición entre el eslabón  $i - 1$  y el  $i$ , considerando los desplazamientos  $\mathbf{d}_i$ .

Con condición inicial:  $\mathbf{v}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$

## Rapidez lineal recursiva

Para determinar la rapidez lineal de cada eslabón del robot se procede a obtener el vector transpuesto de la ecuación (3). La rapidez lineal se obtiene elevando al cuadrado cada una de las velocidades  $\|\mathbf{v}_i\|^2 = (\mathbf{v}_i)^T(\mathbf{v}_i)$ , desarrollando este término se tiene la expresión (4):

$$\mathbf{v}_i^2 = (\mathbf{v}_{i-1})^2 + \mathbf{p}_i^T S^T S \mathbf{p}_i \dot{q}_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \mathbf{p}_j^T S^T \left( \prod_{m=j}^{i-1} [R_{z_m} R_{x_m}] \right) S \mathbf{p}_i \dot{q}_i \dot{q}_j \right] \quad (4)$$



## Matriz de inercia recursiva

La energía cinética se determina empleando la ecuación (5):

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + \frac{1}{2} I_i \boldsymbol{\omega}_i^2 \right) \quad (5)$$

donde:

$\mathbf{v}_i$  es la velocidad lineal de la i-ésima articulación.

$\boldsymbol{\omega}_i$  es la velocidad angular de la i-ésima articulación.

$I_i$  es el tensor de inercia de la i-ésima articulación.

$m_i$  es la masa de la i-ésima articulación.

$n$  es el número de articulaciones del robot.

La cual puede ser expresada con una estructura matemática de forma cuadrática, tal como en (6).

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

donde:

$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{18}$  – Vector de velocidades articulares.

$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.

Para calcular la matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  del robot, en la ecuación (6), primero se determinan los  $i$ -ésimos jacobianos  $J_{\nu_0}^i \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ , donde  $n$  es el número de eslabones del robot,  $i$  toma valores desde 1 hasta  $n$ . Para esto, es importante determinar una expresión general, donde se emplean las matrices de rotación  $R_{z_i}(\phi)$  y  $R_{x_i}(\theta)$ , el vector de desplazamiento  $d_i$  y la matriz  $S(k_i)$ . Cada  $J_{\nu_0}^i$  se puede expresar con la ecuación (8).

$$J_{\nu_0}^i = \begin{bmatrix} J_{\nu_0}^i_{(1:3,1)} & J_{\nu_0}^i_{(1:3,2)} & \dots & J_{\nu_0}^i_{(1:3,n)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$



donde  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{3 \times (n-i)}$  puede ser una matriz o un vector de ceros, según sea el caso, que se emplea para que todos los jacobianos  $J_{v_0}^i$  sean del mismo tamaño. Cada término  $J_{v_0(1:3,j)}^i$  se puede calcular como se presenta en (9):

$$J_{v_0}^i = J_{v_0}^{i-1} + T_i \quad (8)$$

Donde  $T_i \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  es una matriz que suma términos a cada columna de  $J_{v_0}^{i-1}$ , donde la columna  $j$  de  $T_i$  se denota como (9):

$$T_{i(1:3,j)} = \prod_{k=0}^{j-1} (R_{z_k} R_{x_k}) S \prod_{k=j}^{i-1} (R_{z_k} R_{x_k}) p_i \quad (9)$$

Además, si  $k \geq i - 1$ , entonces el término  $\prod_{k=j}^{i-1} (R_{z_k} R_{x_k})$  es la matriz identidad.

Por lo tanto:

$$J_{v_0(1:3,j)}^i = J_{v_0}^{i-1} + T_{i(1:3,j)} \quad (10)$$

Al multiplicar el jacobiano de velocidad lineal transpuesto por el mismo jacobiano  $(J_{v_0}^i)^T (J_{v_0}^i) \in \mathbb{R}^{nxn}$ , se obtiene la ecuación (11):

$$(J_{v_0}^i)^T (J_{v_0}^i) = (J_{v_0}^i)^T J_{v_0}^{i-1} + J_{v_0}^{i-1} T_i + T_i^T J_{v_0}^{i-1} + T_i^T T_i \quad (11)$$

Posteriormente se procede a obtener los jacobianos de velocidad angular de cada eslabón del robot, pero primero es necesario tomar en cuenta las matrices rotacionales  $R_0^i$  que contienen los elementos de las velocidades angulares, por lo cual se emplea la ecuación (12):

$$R_0^i = \prod_{j=0}^i [R_{z_j}(\phi) R_{x_j}(\theta)] \text{ para } i = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$



donde  $R_0^i \in \mathbb{R}^{3x3}$  y  $n$  indica el número eslabones del robot. Después se procede a extraer las velocidades angulares  $\omega_z^i$  que se presentan alrededor del eje  $\mathbf{z}_0$ , multiplicando la matriz resultante  $R_0^i$  por el vector  $\mathbf{z}(k) = [0 \ 0 \ 1]^T$ . De esta manera se determinan los vectores de velocidad angular de cada eslabón con respecto al eje  $\mathbf{z}_0$ , esta expresión se visualiza en (13).

$$\omega_z^i = R_0^i \mathbf{z}(k) \quad (13)$$

donde  $\omega_z^i \in \mathbb{R}^{3x1}$ . Luego se consideran cada uno de los vectores  $\omega_z^i$  obtenidos para construir los jacobianos de velocidad angular  $J_{\omega}^i$  para cada eslabón. Entonces la expresión (14) denota la matriz de jacobiano de velocidad angular:

$$J_{\omega}^i = [\omega_z^1 \ \omega_z^2 \ \dots \ \omega_z^i \ \mathbf{0}] \quad (14)$$

donde  $J_{\omega}^i \in \mathbb{R}^{3xn}$ . Para establecer matrices  $J_{\omega}^i$  del mismo tamaño, se define un elemento  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3x(n-i)}$ , el cual puede ser matriz o vector, dependiendo del  $i$  –ésimo jacobiano angular a calcular, esto garantiza que todas las matrices sean del mismo tamaño y puedan sumarse para obtener el jacobiano total.

La posición de cada eslabón depende de la configuración del robot, por lo cual el tensor de inercia también depende de este parámetro. Se considera  $I_0^i$  como el tensor de inercia del  $i$  –ésimo eslabón con respecto al sistema de referencia inicial, donde  $I_i$  es el tensor de inercia con respecto al centro de masa del eslabón, el cual está en un sistema local, por lo cual es necesario transformarlo a un sistema global a partir de la expresión (15):

$$I_0^i = (R_0^i) I_i (R_0^i)^T \quad (15)$$

Empleando las ecuaciones (7), (14) y (15) se define la expresión (16) para determinar la matriz de inercia del robot.



$$M(q) = \sum_{i=1}^n \left[ m_i (J_{v_0}^i)^T (J_{v_0}^i) + (J_{\omega_0}^i)^T I_0^i (J_{\omega_0}^i) \right] \quad (16)$$

donde  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo eslabón;  $J_{v_0}^i \in \mathbb{R}^{3xn}$  es la matriz que incluye los parámetros de velocidad lineal;  $J_{\omega_0}^i \in \mathbb{R}^{3xn}$  es la matriz que tiene los parámetros de velocidad angular;  $I_0^i$  es el tensor de inercia con respecto al sistema de referencia inicial. Además, la matriz  $M(q) \in \mathbb{R}^{nxn}$ , es simétrica y definida positiva.

## CONCLUSIONES

El método analítico de Euler permitió resolver el problema de cinemática directa, cinemática diferencial, raíz lineal y energía del robot Bioloid Premium, de manera recursiva; esta metodología tiene la ventaja de reducir la complejidad de los cálculos computacionales para obtener dichos modelos. De esta manera, no es necesario emplear derivadas analíticas a las ecuaciones de cinemática directa, ya que las propiedades de la matriz  $S(k)$  ayudan a calcular la cinemática diferencial del robot, por lo tanto, es posible conocer la relación entre las velocidades articulares, las velocidades lineales de movimiento y las velocidades angulares de los eslabones del robot para obtener un método recursivo para modelar la matriz de inercia del robot. Es importante mencionar que esta metodología puede extenderse a otros robots bípedos, además, tiene gran importancia en el área computacional, debido a que se emplean ecuaciones recursivas para obtener dichos modelos matemáticos, esto puede ser un aporte significativo para que en un trabajo futuro puedan desarrollarse algoritmos recursivos que reduzcan el costo computacional para el modelado de robots humanoides.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arias, L. E., Olvera, L. I., J. A., P., & Núñez, J. V. (2014). Patrón de marcha 3D de tipo cicloidal para humanoides y su aplicación al robot Bioloid. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, 18(1), 3.
- Bertrand, S., Bruneau, O., Ouezdou, F. B., & Alfayad, S. (2012). Closed-form solutions of inverse kinematic models for the control of a biped robot with 8 active degrees of freedom per leg. Mechanism and Machine Theory, 49, 117-140.



- Bharadwaj, D., & Prateek, M. (2019). Kinematics and dynamics of lower body of autonomous humanoid biped robot. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE), 8(4), 141-146.
- Castillo, G. A., Weng, B., Zhang, W., & Hereid, A. (2021). Robust feedback motion policy design using reinforcement learning on a 3D digit bipedal robot. International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 5136-5143.
- Cerritos-Jasso, J. R., Camarillo-Gómez, K. A., Monsiváis-Medina, J. A., Castillo-Alfaro, G., Pérez-Soto, G. I., & Pámanes-García, J. A. (2013). Kinematic Modeling of a Humanoid Soccer-Player: Applied to BIOLOID Premium Type A Robot. In FIRA RoboWorld Congress, Springer, Berlin, Heidelberg, 49-63.
- Che, J., Pan, Y., Yan, W., & Yu, J. (2021). Kinematics Analysis of Leg Configuration of An Ostrich Bionic Biped Robot. International Conference on Robotics and Control Engineering, 19-22.
- Che, J., Pan, Y., Yan, W., & Yu, J. (2022). Leg Configuration Analysis and Prototype Design of Biped Robot Based on Spring Mass Model. In Actuators, 11(3), 75.
- Cherfouh, K., Gu, J., Farooq, U., Asad, M. U., Dey, R., & Balas, V. E. (2022). Bilateral Teleoperation Control of a Bipedal Robot Gait Using a Manipulator. IFAC-PapersOnLine, 55(1), 765-770.
- Chiang, H. D., & Tsai, C. S. (2011). Kinematics Analysis of a Biped Robot. In Proceeding of International Conference on Service and Interactive Robots.
- Domínguez, C. A., & Sánchez, E. M. (2017). Análisis estático y dinámico de un robot bípedo durante la fase de soporte simple de un ciclo de marcha. In Memorias del XXIII Congreso Internacional Anual de la SOMIM.
- Fierro, J., Pámanes, J. A., Santibanez, V., Ruiz, G., & Ollervides, J. (2014). Condiciones para una marcha elemental del robot NAO. AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications(4(1)), 13-18.
- Franco, E. H., & Guerrero, R. V. (2018). Diseño Mecánico y Análisis Cinemático del Robot Humanoide AXIS. Pistas Educativas(35(108)).
- Gonçalves, F., Ribeiro, T., Ribeiro, A. F., Lopes, G., & Flores, P. (2022). A Recursive Algorithm for the Forward Kinematic Analysis of Robotic Systems Using Euler Angles. Robotics, 20.



- Gong, Y., Hartley, R., Da, X., Hereid, A., Harib, O., Huang, J. K., & Grizzle, J. (2019). Feedback control of a cassie bipedal robot: Walking, standing, and riding a segway. In 2019 American Control Conference (ACC), 4559-4566.
- Hu, Y., Wu, X., Ding, H., Li, K., Li, J., & Pang, J. (2021). Study of Series-parallel Mechanism Used in Legs of Biped Robot. 7th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR), 97-102.
- Huy, T. D., Cuong, N. C., & Phuong, N. T. (2013). Control of biped robot with stable walking. American Journal of Engineering Research (AJER), 2, 129-150.
- Kajita, S., Hirukawa, H., Harada, K., & Yokoi, K. (2014). Kinematics. In Introduction to humanoid robotics (pp. 19-67). Springer Berlin Heidelberg.
- Khan, M. S., & Mandava, R. K. (2023). Design of Dynamically Balanced Gait for the Biped Robot While Crossing the Ditch. Acta Polytechnica Hungarica, 20.
- Kofinas, N., Orfanoudakis, E., & Lagoudakis, M. G. (2013). Complete analytical inverse kinematics for NAO. In 2013 13th International Conference on Autonomous Robot Systems, 1-6.
- Krishnan, A. B., Aswath, S., & Udupa, G. (2014). Real Time Vision Based Soccer Playing Humanoid Robotic Platform. In Proceedings of the 2014 International Conference on Interdisciplinary Advances in Applied Computing, 1-8.
- Meggiolaro, M. A., Neto, M. S., & Figueiroa, A. L. (2016). Modeling and Optimization with Genetic Algorithms of Quasi-Static Gait Patterns in Planar Biped Robots. In Congreso Internacional de Ingeniería Mecatrónica y Automatización (CIIMA 2016), 1-10.
- Montenegro, D. A. (2016). Generación de Trayectorias para un Robot Bípedo basadas en Captura de Movimiento Humano.
- Mou, H., Tang, J., Liu, J., Xu, W., Hou, Y., & Zhang, J. (2024). High Dynamic Bipedal Robot with Underactuated Telescopic Straight Legs. Mathematics, 23.
- Nunez, J. V., Briseno, A., Rodriguez, D. A., Ibarra, J. M., & Rodriguez, V. M. (2012). Explicit analytic solution for inverse kinematics of bioloid humanoid robot. In 2012 Brazilian Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium, 33-38.
- Reyes, G., Pamanes, J. A., Fierro, J. E., & Nunez, V. (2018). Optimum Walking of the Bioloid



Humanoid Robot on a Rectilinear Path. In Computational Kinematics. Springer, Cham, 143-151.

Ruiz, O. (2014). Análisis cinemático y dinámico de un robot bípedo de 12 GDL internos utilizando la formulación Newton-Euler. Universidad Nacional Autónoma de México, México: MS Thesis.

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer.

Tang, J., Zhu, Y., Gan, W., Mou, H., Leng, J., Li, Q., . . . Zhang, J. (2023). Design, Control, and Validation of a Symmetrical Hip and Straight-Legged Vertically-Compliant Bipedal Robot. *Biomimetics*, 22.

Vivas, D. A. (2009). Modelado y control de un robot bípedo de nueve grados de libertad. In VIII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática.

Williams, R. L. (2012). DARwin-OP humanoid robot kinematics. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, 45035, 1187-1196.

Yılmazlar, E., & Kuşçu, H. (2021). Walking pattern generation and control for a bipedal robot. *Machines. Technologies. Materials*, 15(3), 99-102.

Zhang, J., Yuan, Z., Dong, S., Sadiq, M. T., Zhang, F., & Li, J. (2020). Structural design and kinematics simulation of hydraulic biped robot. *Applied Sciences*, 10(18), 6377.

