

1. 第 1 题, 求 $\int_0^{\sqrt{8}} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

2. 求积分 $\int_C (2+y)dx + xdy$, 积分曲线先从原点沿直线到 (1,0), 再沿圆弧到 (0,1)

3. 求积分 $\int_0^1 \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}} dx$

4. 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{(1+e^{ax})(1+e^{bx})} dx$

5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+\frac{1}{x})}{f(3)} \right)^x$, 已知 $f(3) = 5$, $f'(3) = 2$

6. 求 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2}$ 是否存在, 存在的话是多少?

7. 第 66 题, 求满足一个积分的微分方程, 积分表达式 $u(x) = \int_0^x \sin(x-w)w^2 dw$, 问 $u(x)$ 满足的二阶微分方程。

8. $A(r)$ 是 $[0,r]$ 上曲线 $(x, \frac{x^4}{4})$ 的长度, 求 $A(2)$

9. 求 $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $x + z = 4$ 所围的体积。

10. 已知 $y' = y - x$, $y(0) = y'(0) = 1$, 求 $y(x)$ 的 Taylor 级数的前 5 项系数。

11. p 是负数, 做 $y = x^p$ 在 $x = c$ 处的切线, 求使得该切线与坐标轴所截三角形面积与 c 无关的 p 的值。

12. 已知 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调上升的正项数列, 问下列哪个级数肯定收敛? 一个是 $\frac{1}{a_n^2}$, 一个是 $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, 一个是

$$e^{-a_n}$$

13. 已知参数方程 $x(t) = 2t^2 + 2$, $y(t) = 3t^4 + 4t^3$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 在 (8,80) 的值?

14. 已知 $f(0) > g(0)$, $f'(0) > g'(0)$, $f'(x) > g'(x)$ 对任意 $x \in R$, 问下列哪些说法是正确的?

I. 在 0 的某一个邻域内, $f(x) > g(x)$

II. $f(x) > g(x), x \geq 0$

III. $f(x) > g(x), x \leq 0$

15. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in Q \\ -5x^2 & x \notin Q \end{cases}$ 判断 $f(x)$ 的连续性与可导性.

16. 有一根长为 9 的竿斜靠在墙上，然后下面的端点以 2 米每秒的速度向外走，问上面端点的速度，此时上面端点距离地面 3 米。

17. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!}$

18. $z = x + iy$, $x > 0, y > 0$, $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求 $z^3 + 2z + 1$

19. 一个 3×3 的上三角复矩阵，主对角线元素分别为 $1-x$, $1+x$, x^2-1 , 求有多少个 x 使得该方阵为奇异方阵

20. 问 2,3,和 5 是不是一个矩阵的特征值

21. 求平面 $2x + y + 3z = 3$ 上到原点最小距离的点

22. f, g 都是从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的 bijection, 问下列哪个是 one-to-one(injection)从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$, 选项有

$f+g, f-g, f * g, \frac{1}{2}(f^2 + g^2), f \circ g$

23. 求与 $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ 相等的数

24. 两个服从正态分布的变量 X 与 Y 独立, X 的均值为 52, 标准差 6, Y 的均值为 49, 标准差 8, 求 $Z = X + Y$ 的标准差?

25. 已知 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Z 的一列子集, 问下列哪个集合可能是不可数无穷子集? 前三个选项为 A_1 , $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 第四个选项为从 A_1 到 $\{0,1\}$ 的函数族, 第五个选项为从 $\{0,1\}$ 到 A_1 的函数族

26. 求 4^{578} 被 7 除的余数

27. 关于 field, integral domain, ring 的说法错误的是?

A. 有限的 integral domain 都是 field

B. field 都是 integral domain

C. 若一个 ring 中元素均满足 $x^2 = x$ ，则该 ring 交换

D. 一个 integral domain，若存在一个正整数 m 满足，integral domain 中所有元素均满足 $mx = 0$ ，则该 integral domain 有限

E. 含有乘法单位元的且至少含有两个元素的，并满足消去律的 commutative ring 一定是 integral domain

28. 一个边长为 1 的等边三角形，把各边中点连接起来形成一个小等边三角形，问小等边三角形的面积。

29. 满足到 $(5,0)$ 的距离是到 $x = -5$ 距离的一半的点的轨迹的类型。

30. 一个老师分给 12 个学生 4 种玩具，每人一个。玩具有 4 个 toys，5 个小狗，2 个小猫，1 个其他的，求分配的种数。

31. 到三条两两相交的直线距离相等的点有几个？

32. 从 SUMMER 里面取两个字母 (without replacement)，求至少有一个 M 的概率

33. 求互相不同构的 $3^2 11^4 17$ 阶 Abel 群的个数

34. 问在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 中下面哪一个是 $X^2 + X + 1$ 与 $X^3 + X + 1$ 的公因子：

I. $X + 1$; II. $X + 2$; III. $X^2 + X + 1$

35. 已知二次函数 $p(x)$ 与 $y = \sin x$ 在 $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 处相交，求 $p(\pi)$

36. A^B 表示从 B 到 A 的函数个数，问从 C 到 A^B 的函数个数与下列哪一个相等？

选项有从 $B \times C$ 到 A 的函数个数，从 $B \cup C$ 到 A 的函数个数，从 A 到 $B \times C$ 的函数个数，从 A 到 $B \cup C$ 的函数个数，从 C 到 B 的函数个数乘以从 B 到 C 的函数个数。

37. 设 a_n 表示从 n 元有限集到其自身的不含不动点的双射的个数，已知 $a_1 = 0$ ， $a_2 = 1$ ， $a_3 = 2$ ， $a_4 = 9$ ，求 a_5

38. 求正六边形表示为 $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ 的 2 维流形类型（原题画的图，问它与什么同胚？）

39. 一个圆的外切正 n 变形与内接正 n 变形的周长之比是多少？

40. 函数 $f'(x)$ 的图像如右，比较 $f(0), f(2), f(4)$ 的大小

41. 在一个集合上，关系 R 满足交换律和传递律，问下面两个条件是否是该关系成为等价关系的充分条件。

I. 对于每个元素 x ，存在 y ，使得 xRy ；

II. 存在 x ，使得 xRx

42. $y = \log x$ 与 $y = cx^4$ 只有一个交点，求 c 的值。

43. 维数为 7 的线性空间里，两个维数为 4 的子空间的交的维数不可能是多少？

44. 已知算子 $T = x \frac{d}{dx}$ ，由 $1, x, \ln x, x \ln x$ 构成一组基，求 T 在这组基下的 Jordan 标准型由几个 Jordan block 组成的，每一个的阶数是多少？

45. f 为 $[0,1] \rightarrow [-1,1]$ 的连续函数，且满足 $|f(x)| \leq x$ 在 $[0,1]$ 上，求 $\left| \int_0^1 (f(x))^2 - f(x) dx \right|$ 的最大值。

46. 已知 $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

47. 已知 $h(x) = x^2 f(x)$ ， f 的图像如下，问以下哪些描述是正确的？

I. $h(x) > 2xf(x)$ II. $\int_0^1 h(x) < \frac{2}{3}$

III. $\exists c \in [0,1], \int_0^1 h(x) = \frac{f(c)}{3}$

48. 求 $\frac{d}{dx} \int_{x^3}^{x^4} e^{t^2} dt$

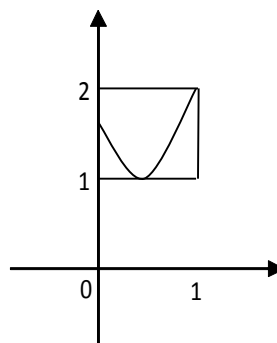
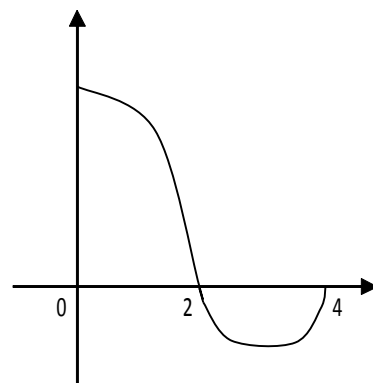
49. $g(x) = e^{2x+1}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(g(x)) - g(e)}{x}$

50. 设 M 为 2 阶方阵构成的线性空间，问当 x 为多少时， $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+b+c+d=x \right\}$ 构成 M 的子空间。

51. 以下哪一项不是群，选项有整数加法，非零整数乘法，复数加法，非零复数乘法等。

52. A, B 为 5×5 可逆矩阵，以下哪些描述是正确的？

I. AB^T 可逆



II. $B^T x = Ax$ 只有零解

III. A 的列向量空间与 B 的列向量空间维数相同

53. 考查线性齐次方程的解空间 (该方程的解空间维数为 2), 各选项有线性方程有无穷多组解, 任两个解的线性组合仍是解, 方程有组特解 $(5, -1, 1, 0)$, 方程的解都是 $(5, -1, 1, 0)$ 乘以一个常数。(特解我记得并不清楚, 大概是这个)

54. 仍然考虑齐次方程 (其中系数含有参数 λ), 问有多少不同的 λ 值时该方程有非零解。

55. 同余方程组的解。

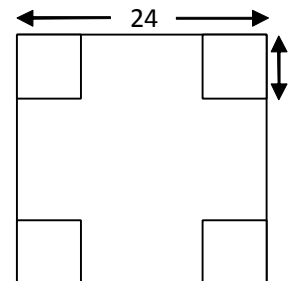
56. $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2a_n}$, $a_0 = 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

57. 问方程 $x^4 - x^3 \sin x - x^2 \cos x = 0$ 有几个根。

58. $f(x)$ 为取值为正实数的实值函数, 且当 $x \rightarrow \alpha$ 时有有限的极限, 问以下哪项不一定保证当 $x \rightarrow \alpha$ 时有有限的极限, 选项有 $\sqrt{f(x)}$, $\log f(x)$, $e^{-f(x)}$ 等。

59. 如图用正方形做一个无盖的盒子, 问 h 为多少时, 盒子的体积最大?

60. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的图像



答案

1.4

2.0

3. $2\sqrt{e} - \frac{2}{\sqrt{e}}$

4. $\frac{a-b}{ab} \log 2$

5. $e^{\frac{2}{5}}$

6.不存在

7. $u' + u = x^2$

8. $\sqrt{65}$

9. 36π

10. $1 - \frac{1}{2!} + 0 - \frac{1}{4!}$

11.-1

12.None

13.4

14.I、 II

15.在仅在 0 点连续，也仅在 0 点可导

16. $4\sqrt{2}$

17.0

18. $1 + \sqrt{3}i$

19.2

20.2 和 5

21. $(\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, \frac{9}{14})$

22. $f \circ g$

23. $1+2\sqrt{2}$

24. 10

25. 从 A 到 $\{0,1\}$ 的函数族

26. 2

27. D

28. $\frac{\sqrt{3}}{16}$

29. 椭圆

30. $\frac{12!}{4!5!2!!}$

31. 4

32. $\frac{3}{5}$

33. 10

34. 仅有 II

35. $6-4\sqrt{2}$

36. 有从 $B \times C$ 到 A 的函数个数

37. 44

38. 环面

39. $\sec\left(\frac{\pi}{n}\right)$

40. $f(0) < f(4) < f(2)$

41. I 是充分的, II 是不充分的

42. $\frac{1}{4e}$

43.0

44.2 个 2 阶 Jordan block

45. $\frac{5}{6}$

46. $\frac{x+y}{x-y}$

47.II 和 III

48. $x^2 e^{x^6} (4x e^{x^8 - x^6} - 3)$

49. $4e^{2e+2}$

50.0

51.非零整数乘法

52.I 和 III

53.方程的解都是 (5,-1,1,0) 乘以一个常数

54. $\lambda = 1, 2$ 共 2 个

55.

56. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

57.3 (不要忘记 0)

58. $\log f(x)$

59.4

60.0 非极点, 1 为极小点