от непрерывной функции. Следовательно,

$$\overline{r} = \frac{1}{N^2}\left(\int\limits_0^1 (\varphi'(t))^3 \frac{F(\varphi(t))}{12} dt\right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим задачу минимизации первого, главного члена выражения (4). Для удобство решения уравнения Эйлера примем за независимую переменную функцию φ. Тогда коэффициент при $\dfrac{1}{N^2}$ в главном члене погрешности запишется в виде

$$\int\limits_0^1 (t'(\varphi))^{-2} \frac{F(\varphi)}{12} d\varphi.$$

Уравнение Эйлера для функции, минимизирующей функционал

$$\int\limits_0^1 G(\varphi, t, t')\, d\varphi,$$

имеет вид

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial G}{\partial t'}\right) - \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

В рассматриваемом случае $\dfrac{\partial G}{\partial t} = 0$, и поэтому из (5) следует $\dfrac{\partial G}{\partial t'} = const$. Подставляя конкретное значение функции G, получим

$$(t'(\varphi))^{-3} \frac{F(\varphi)}{6} = const$$

или

$$F(\varphi)(\varphi'(t))^3 = C_1. \tag{6}$$

Общее решения этого уравнения завистит от C_1 и еще и некоторой постоянной C_2. Значения этих постоянныя можно определить из граничных условий $\varphi(0) = (0), \varphi(1) = 1$. Решение рассмотренной вариационной постановки может практически испльзоваться различными способами. Например, существуют программы, осуществляющие численное интегрирование (6) на сетке с шагом, существенно большим $\dfrac{1}{N}$, и затем распределяющие узлы в соответствии с полученным решением.

Из соотношения (6) можно сделать тот же вывод о равенстве оценок погрешностей на элементарных отрезках интегрирования при оптимальном распределении узлов. В самом деле, умножим (6) на $\dfrac{1}{12N^3}$, положим $t = \dfrac{q}{N}$ и заменим $F\left(\varphi\left(\dfrac{q}{N}\right)\right)$ и

$\frac{1}{N}\varphi'\left(\frac{q}{N}\right)$, соответственно, эквивалентными велечинами $\max\limits_{[a_{q-1},\, a_q]} F\left(x\right), a_q - a_{q-1}$. В результате получим

$$(\max_{[a_{q-1},\, a_q]} F\left(x\right))\frac{\left(a_q - a_{q-1}\right)^3}{12} \approx \frac{C_1}{12N^3}. \tag{7}$$

Еще один путь практического истользования управления (6) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить большую серию интегралов с одиноковым характерным поведением подынтегральных функций. Выделим простейшую, модельную функцию, для которой задача оптимизация узлов может быть решена в явном виде, и далее будем производить интегрирование с распределением узлов, соответствующим этой функции. Если характер измерения функции рассматриваемой серии зависит от некоторого параметра, то этот параметр следует учесть при выборе модельной функции; естественно, что модельная функция не обязательно относится к рассматриваему классу. Чем большее число задач предъявляется для решения, тем более могут быть оправданы затраты, связанные с удачным выбором и рассмотрением модельной задачи.

§10. Примеры оптимизации распределения узлов

Рассмотрим пример решения уравнения (9.6) для конкретных задач.

П р и м е р 1. Пусть вычисляется серия интегралов

$$I\left(b\right) = \int\limits_0^1 f\left(b, x\right) dx,$$

b —- параметр серии, $f\left(b, x\right) = x^b g\left(b, x\right)$, —- $1 < b < 2$, $g\left(b, x\right)$ —- гладкая, $g\left(b, 0\right) \neq 0$. Если $b \neq 0, 1$, то вторая производная $f_{xx}\left(b, x\right)$ не ограниена в окрестности точки 0; при выборе модельной задачи следует учесть эту специфику поведения подынтегральной функции. В окрестности $x = 0$ имеем

$$f_{xx}\left(b, x\right) = b\left(b-1\right)x^{b-2}g\left(b, 0\right) + O\left(x^{b-1}\right)$$

Таким образом, в окрестности точки $x = 0$ вторая производная f_{xx} пропорциональна второй производной функции x^b, поэтому функцию x^b естественно расматривать в качестве модельной. Примем за $F(x)$ велечину $\left|b\left(b-1\right)\right| x^{b-2}$, тогда уравнение (9.6) запишется в виде

$$\left|b\left(b-1\right)\right| \varphi^{b-2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 = C_1.$$