

от непрерывной функции. Следовательно,

$$\bar{r} = \frac{1}{N^2} \left( \int_0^1 (\varphi'(t))^3 \frac{F(\varphi(t))}{12} dt \right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (4)$$

Рассмотрим задачу минимизации первого, главного члена выражения (4). Для удобства решения уравнения Эйлера примем за независимую переменную функцию  $\varphi$ . Тогда коэффициент при  $\frac{1}{N^2}$  в главном члене погрешности запишется в виде

$$\int_0^1 (t'(\varphi))^{-2} \frac{F(\varphi)}{12} d\varphi.$$

Уравнение Эйлера для функции, минимизирующей функционал

$$\int_0^1 G(\varphi, t, t') d\varphi,$$

имеет вид

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial G}{\partial t'} \right) - \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

В рассматриваемом случае  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ , и поэтому из (5) следует  $\frac{\partial G}{\partial t'} = \text{const}$ . Подставляя конкретное значение функции  $G$ , получим

$$(t'(\varphi))^{-3} \frac{F(\varphi)}{6} = \text{const}$$

или

$$F(\varphi) (\varphi'(t))^3 = C_1. \quad (6)$$

Общее решение этого уравнения зависит от  $C_1$  и еще и некоторой постоянной  $C_2$ . Значения этих постоянных можно определить из граничных условий  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ . Решение рассмотренной вариационной постановки может практически использоваться различными способами. Например, существуют программы, осуществляющие численное интегрирование (6) на сетке с шагом, существенно большим  $\frac{1}{N}$ , и затем распределяющие узлы в соответствии с полученным решением.

Из соотношения (6) можно сделать тот же вывод о равенстве оценок погрешностей на элементарных отрезках интегрирования при оптимальном распределении узлов. В самом деле, умножим (6) на  $\frac{1}{12N^3}$ , положим  $t = \frac{q}{N}$  и заменим  $F\left(\varphi\left(\frac{q}{N}\right)\right)$  и

$\frac{1}{N}\varphi'\left(\frac{q}{N}\right)$ , соответственно, эквивалентными величинами

$\max_{[a_{q-1}, a_q]} F(x), a_q - a_{q-1}$ . В результате получим

$$\left(\max_{[a_{q-1}, a_q]} F(x)\right) \frac{(a_q - a_{q-1})^3}{12} \approx \frac{C_1}{12N^3}. \quad (7)$$

Еще один путь практического использования управления (6) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить большую серию интегралов с одиноковым характерным поведением подынтегральных функций. Выделим простейшую, модельную функцию, для которой задача оптимизации узлов может быть решена в явном виде, и далее будем производить интегрирование с распределением узлов, соответствующим этой функции. Если характер измерения функции рассматриваемой серии зависит от некоторого параметра, то этот параметр следует учесть при выборе модельной функции; естественно, что модельная функция не обязательно относится к рассматриваемому классу. Чем большее число задач предъявляется для решения, тем более могут быть оправданы затраты, связанные с удачным выбором и рассмотрением модельной задачи.

## §10. Примеры оптимизации распределения узлов

Рассмотрим пример решения уравнения (9.6) для конкретных задач.

Пример 1. Пусть вычисляется серия интегралов

$$I(b) = \int_0^1 f(b, x) dx,$$

$b$  — параметр серии,  $f(b, x) = x^b g(b, x)$ ,  $-1 < b < 2$ ,  $g(b, x)$  — гладкая,  $g(b, 0) \neq 0$ . Если  $b \neq 0, 1$ , то вторая производная  $f_{xx}(b, x)$  не ограничена в окрестности точки 0; при выборе модельной задачи следует учесть эту специфику поведения подынтегральной функции. В окрестности  $x = 0$  имеем

$$f_{xx}(b, x) = b(b-1)x^{b-2}g(b, 0) + O(x^{b-1})$$

Таким образом, в окрестности точки  $x = 0$  вторая производная  $f_{xx}$  пропорциональна второй производной функции  $x^b$ , поэтому функцию  $x^b$  естественно рассматривать в качестве модельной. Примем за  $F(x)$  величину  $|b(b-1)|x^{b-2}$ , тогда уравнение (9.6) запишется в виде

$$|b(b-1)|\varphi^{b-2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 = C_1.$$