```latex
\documentclass[twoside]{article}
\usepackage[14pt]{extsizes}
\usepackage[T1,T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[english, russian]{babel}
\usepackage[a4paper, left=25mm, right=35mm, top=20mm, bottom=30mm]{geometry}
\usepackage{lipsum}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{fancyhdr}

\newcommand{\RNumb}[1]{\uppercase\expandafter{\romannumeral #1\relax}}

\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\renewcommand{\footrulewidth}{0pt}
\setlength{\headheight}{14pt}
\fontdimen2\font=1.4ex
\linespread{0.8}
\sloppy

\setcounter{page}{152}

\fancyhf{}
\fancyhead[LE,RO]{\thepage}
\fancyhead[LO]{\S 10}
\fancyhead[RE]{ГЛ. \RNumb{3}}
\fancyhead[CE]{ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ}
\fancyhead[CO]{ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВ}


\setlength{\parindent}{10mm}
\makeatletter
% Переопределение команды секции
\renewcommand{\section}{\@startsection{section}{1}%
{\parindent}{3.25ex plus 1ex minus .2ex}%
{1.5ex plus .2ex}{\bfseries\large}}

% Переопределение команды подсекции
\renewcommand{\subsection}{\@startsection{subsection}{2}%
{\parindent}{3.25ex plus 1ex minus .2ex}%
{1.5ex plus .2ex}{\bfseries}}
\makeatother

\begin{document}
\pagestyle{fancy}


\noindent от непрерывной функции. Следовательно,
$$
\overline {r}=\dfrac {1}{N^{2}}\left( \int ^{1}_{0}\left( \varphi '\left( t\right) \right) ^{3}\dfrac
{F\left( \varphi \left( t\right) \right) }{12}dt\right) +o\left( \dfrac {1}{N^{2}}\right).\eqno(4)\
$$
```

Рассмотрим задачу минимизации первого, главного члена выражения (4). Для удобство решения уравнения Эйлера примем за независимую переменную функцию φ. Тогда коэффициент при $\dfrac {1}{N^{2}}$ в главном члене погрешности запишется в виде
$$
\int ^{1}_{0}\left(t'\left(\varphi \right) \right) ^{-2}\dfrac {F\left(\varphi \right) }{12}d\varphi .
$$
Уравнение Эйлера для функции, минимизирующей функционал
$$
\int ^{1}_{0}G\left(\varphi ,t,t'\right) d\varphi ,
$$
имеет вид
$$
\dfrac {d}{d\varphi }\left(\dfrac {\partial G}{\partial t'}\right) -\dfrac {\partial G}{\partial t}=0.\eqno(5)
$$
В рассматриваемом случае $\dfrac {\partial G}{\partial t}=0$, и поэтому из (5) следует $\dfrac {\partial G}{\partial t'}=const.$
Подставляя конкретное значение функции $G,$ получим
$$
\left(t'\left(\varphi \right) \right) ^{-3}\dfrac {F\left(\varphi \right) }{6}=const
$$
или
$$
F\left(\varphi \right) \left(\varphi '\left(t\right) \right) ^{3}=C_{1} \eqno(6)
$$
Общее решения этого уравнения завистит от C_{1} и еще и некоторой постоянной C_{2}. Значения этих постоянныя можно определить из граничных условий $\varphi \left(0\right) =\left(0\right) ,\phi \left(1\right) =1.$
Решение рассмотренной вариационной постановки может практически испльзоваться различными способами. Например, существуют программы, осуществляющие с=численное интегрирование (6) на сетке с шагом, существенно юлдбшим $\dfrac {1}{N},$ и затем распределяющие узлы в соответствии с полученным решением.

Из соотношения (6) можно сделать тот же вывод о равенстве оценок погрешностей на элементарных отрезках интегрирования при оптимальном распределении узлов. В самом деле, умножим (6) на $\dfrac {1}{12N^3},$ положим $t=\dfrac {q}{N}$ и заменим $F\left(\varphi \left(\dfrac {q}{N}\right) \right)$ и $\dfrac {1}{N}\varphi '\left(\dfrac {q}{N}\right) ,$ соответственно, эквивалентными велечинами
\\ $\max _{\left[a_{q-1},a_{q}\right] }F\left(x\right) ,a_{q}-a_{q-1}.$ В результате получим
$$
\left(\max _{\left[a_{q-1},a_{q}\right] }F\left(x\right) \right) \dfrac {\left(a_{q}-a_{q-1}\right) ^{3}}{12}\approx \dfrac {C_{1}}{12N^{3}}. \eqno(7)
$$

Еще один путь практического истользования управления (6) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить большую серию интегралов с одиноковым характерным

поведением подынтыгральных функций. Выделим простейшую, модельную функцию, для которой задача
оптимизация узлов может быть решена в явном виде, и далее будем производить интегрирование с распределением узлов, соответствующим этой функции.
Если характер измерения функции рассматриваемой серии зависит от некоторого параметра, то этот параметр следует учесть при выборе модельной функции; естественно, что модельная функция не обязательно относится к рассматриваему классу. Чем большее число задач предъявляется для решения, тем более могут быть оправданы затраты, связанные с удвчным выбором и расмотрением модельной задачи.

\subsection*{\S 10. Примеры оптимизации распределения узлов}
Рассмотрим пример решения уравнения (9.6) для конкретных задач.

П\hspace{3pt}р\hspace{3pt}и\hspace{3pt}м\hspace{3pt}е\hspace{3pt}р 1. Пусть вычисляется серия интегралов
$$
I\left(b\right) =\int ^{1}_{0}f\left(b,x\right) dx,
$$
b --- параметр серии, $f\left(b,x\right) =x^{b}g\left(b,x\right) ,$ --- $1 <b <2, g\left(b,x\right)$ ---
гладкая, $g\left(b,0\right) \neq 0.$ Если $b\neq 0,1,$ то вторая производная $f_{xx}
\left(b,x\right)$ не огранияена в окрестности точки 0; при выборе модельной
задачи следует учесть эту специфику поведения подынтегральной функции. В окрестности $x=0$ имеем
$$
f_{xx}\left(b,x\right) =b\left(b-1\right) x^{b-2}g\left(b,0\right) +O\left(x^{b-1}\right)
$$
Таким образом, в окрестности точки $x=0$ вторая производная f_{xx} пропорциональна второй производной функции $x^b,$
поэтому функцию x^b естественно расматривать в качестве модельной. Примим за $F(x)$ велечину
$\left| b\left(b-1\right) \right| x^{b-2},$ тогда уравнение (9.6) запишется в виде
$$
\left| b\left(b-1\right) \right| \varphi ^{b-2}\left(\dfrac {d\varphi }{dt}\right) ^{3}=C_{1}.
$$

\end{document}