HOJA DE EJERCICIOS 2
Análisis Matemático.
CURSO 2013-2014.

Problema 1. Analícese en cada uno de los ejemplos siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ y la continuidad en $(0,0)$ de las derivadas parciales.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Problema 2. Considérese la función, definida en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0,0)$ de forma que f sea continua en este punto? Calcular la matriz de la diferencial $Df(x,y)$, respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$, en cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Para cada (x,y), localizar en el plano su transformado $f(x,y)$. ¿Es f inyectiva en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$? Hallar la función inversa de f.

Problema 3. Sean $g_1,g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y)=\int_0^x g_1(t,0)\,dt+\int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=g_2(x,y)\,.$$

b) Hallar una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=y\,.$$

c) Hallar una función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2\,xy\,, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=x^2-2\,y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=e^z\,.$$

Problema 4. Sean $f:A\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ continua y A abierto. Supongamos que existen todas las derivadas direccionales de f en $x_0\in A$. ¿Se puede asegurar que f sea diferenciable en x_0? *Indicación:* Considérese la siguiente función y estúdiese su comportamiento para $y=x^2$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Problema 5. Sea $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que Df es constante. Probar que f es una función afín y que la parte lineal de f es el valor constante de Df.

Problema 6. Se dice que una función $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx)=t^m\,f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$ y $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si f es diferenciable y homogénea de grado $m\neq 0$, probar que

$$\langle\nabla f(x),x\rangle = m\,f(x) \qquad \text{en cada } x\in\mathbb{R}^N\,.$$

Problema 7. Consideremos $F:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y)=\langle x,y\rangle\,,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a,b)$.

b) Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define por $h(t)=F(f(t),g(t))$, calcular la derivada de h.

c) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

Problema 8. *a)* Calcular las diferenciales de $f_1(x)=||x||^4$, $f_2(x)=\langle a,x\rangle$, $f_3(x)=\langle x,L(x)\rangle$ y $f_4(x,y)=\langle x,L(y)\rangle$, donde $a\in\mathbb{R}^N$ es fijo, $x,y\in\mathbb{R}^N$ son variables y $L:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $DB(x,y)$.

c) Considérese la aplicación $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida

$$f(x,y)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Hallar la aplicación lineal $Df(x,y)$.

Problema 9. Se supone $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua. Hallar la diferencial de f en (x,y), $Df(x,y)$, en los casos siguientes

$$a)\quad f(x,y)=\int_a^{x+y} g(s)\,ds\,, \qquad\qquad b)\quad f(x,y)=\int_a^{xy} g(s)\,ds\,.$$

Problema 10. Usar la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $F(x,y,z)=f(h(x),g(x,y),z)$,

b) $G(x,y,z)=h(f(x,y,z)g(x,y))$,

c) $H(x,y,z)=g(f(x,y,h(x)),g(z,y))$,

d) $I(x,y,z)=(x,F(x,y,z),z)$.

Problema 11. Sean $S \subset \mathbb{R}^N$ abierto y convexo y $f : S \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 en S. Demostrar que si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x \in S \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\,,$$

entonces f es inyectiva en S.
Indicación: fijos $x, y \in S$, estudiar $g(t) =< f(tx + (1-t)y), x - y >$, $t \in [0,1]$.

Problema 12. El determinante Hessiano debe su nombre a O. Hesse quien lo introdujo para estudiar curvas algebraicas. Probar el resultado de Hesse que afirma que si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ una matriz con determinante 1 y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función C^2, entonces el determinante Hessiano de $g(x) = f(Ax)$ en el origen coincide con el de f.

Problema 13. Calcular los extremos (máximos y mínimos) relativos de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2\,x^2\,y^2 - 2\,x^2 + 2\,y^2\,,$$

indicando su carácter.

Problema 14. Considérese la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 6\,x^2\,y^2 + 8\,x^3.$$

a) Estudiando el comportamiento de $h(x) = f(x,x)$, probar que f no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo en el origen.

b) Hallar los extremos relativos de f indicando su carácter.
