Curso Análisis Matemático
Nombre y apellido:

<u>Problema</u>: Formas diferenciales, producto exterior y pullback de formas diferenciales

Sea A una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, $A(q) = A_1(q)dq^1 + A_2(q)dq^2 + A_3(q)dq^3$, donde $q = (q^1, q^2, q^3)$ denota un elemento de $\mathbb{R}^3$ y sea $t_A : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ definida como

$$t_A(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) = (q^1, q^2, q^3, p_1 + A_1, p_2 + A_2, p_3 + A_3).$$

Sea Θ una 1-forma en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\Theta = p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + p_3 dq^3$ y $\pi_{\mathbb{R}^3} : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ la proyeccion sobre la primer copia de $\mathbb{R}^3$.

a) Probar que $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ t_A = \pi_{\mathbb{R}^3}$ y calcular la 2-forma exacta Ω dada por $\Omega = -d\Theta$.

Resolución:
$\pi_{\mathbb{R}^3} \circ t_A(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) = \pi_{\mathbb{R}^3}(q^1, q^2, q^3, p_1 + A_1, p_2 + A_2, p_3 + A_3) = (q^1, q^2, q^3) = \pi_{\mathbb{R}^3}(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)$. Con lo cual, $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ t_A = \pi_{\mathbb{R}^3}$.

Además, claramente un simple cálculo muestra que $d\Theta = dp_1 \wedge dq^1 + dp_2 \wedge dq^2 + dp_3 \wedge dq^3$ y por lo tanto, usando la antisimetía del producto exterior, $-d\Theta = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 + dq^3 \wedge dp_3 =: \Omega$.

b) Calcular $\pi^*_{\mathbb{R}^3} A$ y probar que $t^*_A \Theta = \Theta + \pi^*_{\mathbb{R}^3} A$.

Resolución:
Usando la definicion de pullback (y la definicion de proyeccion), $\pi^*_{\mathbb{R}^3} A = A_1 dq^1 + A_2 dq^2 + A_3 dq^3$. Luego, usando que la imagen por t_A de $(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)$ es $(q^1, q^2, q^3, p_1 + A_1, p_2 + A_2, p_3 + A_3)$ se tiene que

$t^*_A \Theta = t^*_A(p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + p_3 dq^3) = (p_1 + A_1)dq^1 + (p_2 + A_2)dq^2 + (p_3 + A_3)dq^3 = p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + p_3 dq^3 + A_1 dq^1 + A_2 dq^2 + A_3 dq^3 = \Theta + \pi^*_{\mathbb{R}^3} A$, dado que para calcular $t^*_A(p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + p_3 dq^3)$ sustituimos p_i por $p_i + A_i$ en Θ, $i = 1, 2, 3$.

c) (i) Sea $\Omega = -d\Theta$ la dos forma del punto (a), probar que $t^*_A \Omega = \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} dA$. (Ayuda: usar que el pullback de formas conmuta con el diferencial).

Resolución
$t^*\Omega = t^*_A(-d\Theta) = -d(t^*_A \Theta) = -d\Theta - d(\pi^*_{\mathbb{R}^3} A)$ por (b) y usando que el diferencial conmuta con el pullback. Entonces, $t^*_A \Omega = -d\Theta - d(\pi^*_{\mathbb{R}^3} A) = \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} dA$ ya que (de nuevo) el diferencial conmuta con el pullback.

(ii) Una transformación lineal $t_A : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ se llama *transformación canónica* cuando $t^*_A \Omega = \Omega$ para una 2-forma Ω. ¿Cuál es una condición suficiente para que t_A sea una transformación canónica?

Resolución:
$t^*_A \Omega = \Omega$ si y sólo si $dA = 0$ ya que la proyeccion de $\overrightarrow{0}$ da $\overrightarrow{0}$ (y con lo cual pedir que $dA = 0$ es menos que pedir que $\pi^*_{\mathbb{R}^3} dA = 0$).

d)<u>(OPTATIVO) *Términos magnéticos:*</u> Sean B y $\widetilde{B}$ 2-formas exactas en $\mathbb{R}^3$ y asumimos que $B - \widetilde{B} = dA$. Probar que la aplicación t^*_A transforma $\Omega_{\widetilde{B}} := \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} \widetilde{B}$ en $\Omega_B := \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} B$; esto es, $t^*_A \Omega_{\widetilde{B}} = \Omega_B$. (Ayuda: Usar los apartados (c) y (a)). El término $\pi^*_{\mathbb{R}^3} B$ es usualmente llamado *término magnético.*

Resolución:
Por (c) $t^*_A \Omega = \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} dA = \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3}(B - B') = \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} B + \pi^*_{\mathbb{R}^3} B'$. Entonces, $t^*_A \Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} B' = \underbrace{\Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} B}_{\Omega_B}$, y luego, por (a) y usando la propiedad de composicion de funciones por el pullback (esto es, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$), se tiene que $t^*_A \underbrace{(\Omega - \pi^*_{\mathbb{R}^3} B')}_{\Omega_{B'}} = \Omega_B$. Por lo tanto, $t^*_A \Omega_{B'} = \Omega_B$.