

# Geometría y Topología

---

## Resumen

Estos son los apuntes del curso de Geometría y Topología, del profesor Fernando Chamizo.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Álgebra Tensorial y Geometría Diferencial</b>	<b>2</b>
I.1	Tensores en $\mathbb{R}^n$	2
I.1.1	Definiciones y ejemplos	2
I.1.2	Convenio de Einstein	6
I.2	Repaso (intuitivo) de Geometría Diferencial	8
I.3	Tensores en el espacio tangente	11
<b>II</b>	<b>Geometría Riemanniana</b>	<b>15</b>
II.1	Cálculo de variaciones y mecánica	15
II.2	Geodésicas en variedades	18
II.2.1	Relatividad General	22
II.3	Conexiones afines. Derivada covariante	23
II.3.1	Curvatura	25
<b>III</b>	<b>Formas Diferenciales y Topología</b>	<b>29</b>
III.1	Formas Diferenciales	29
<b>A</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>32</b>
A.1	Hoja 1	32
A.2	Hoja 2	41
A.3	Hoja 3	45
A.4	Hoja 4	50
<b>B</b>	<b>Exámenes</b>	<b>55</b>
B.1	Parcial 1 - 28/02/2017	55
B.1.1	Criterios y errores frecuentes	56
B.2	Parcial 2 - 4/04/2017	57
B.3	Parcial 3 - 11/05/2017	58
	<b>Índice alfabético</b>	<b>59</b>

## Capítulo I

# Álgebra Tensorial y Geometría Diferencial

### I.1. Tensores en $\mathbb{R}^n$

#### I.1.1. Definiciones y ejemplos

Estudiar los tensores en  $\mathbb{R}^n$  es en realidad estudiar el Álgebra Lineal pero en varias variables. En primer curso (Álgebra I) estudiamos las aplicaciones, las cuales eran de la forma:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \bar{x} &\longmapsto [\bar{y} = A \cdot \bar{x}]\end{aligned}$$

Aplicación  
lineal

**Definición I.1 Aplicación lineal.** Sea  $f$  una aplicación entre dos espacios vectoriales  $V$ ,  $W$  sobre el mismo cuerpo  $K$ . Decimos que  $f$  es una **aplicación lineal** si se cumplen las siguientes propiedades ( $\lambda \in K$ ):

- a.  $f(\lambda \bar{x}) = \lambda \cdot f(\bar{x})$ .
- b.  $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$

Aplicación  
bilineal

**Definición I.2 Aplicación bilineal.** Sea

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \bar{x}, \bar{y} &\longmapsto f(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

una aplicación, decimos que es **bilineal** si es una aplicación lineal en cada una de las dos variables, es decir:

- a.  $f(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda \cdot f(\bar{x}, \bar{y})$ ;  $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = f(\bar{x}_1, \bar{y}) + f(\bar{x}_2, \bar{y})$
- b.  $f(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda \cdot f(\bar{x}, \bar{y})$ ;  $f(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = f(\bar{x}, \bar{y}_1) + f(\bar{x}, \bar{y}_2)$

**Observación:** todas las aplicaciones bilineales entre dos espacios se pueden escribir de la siguiente manera:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T A \bar{y}$$

con  $A$  una matriz  $n \times n$ .

Aplicación  
multilineal

**Definición I.3 Aplicación multilineal.** Decimos que una aplicación es **multilineal** si es lineal en cada una de sus variables.

Tensor  
 $n$  veces  
covariante

**Definición I.4 Tensor  $n$  veces covariante.** Es cualquier aplicación multilineal  $T : \times_{i=1}^n V \mapsto \mathbb{R}$ , siendo  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  (que como sabemos de otros cursos son isomorfos a  $\mathbb{R}^n$ ).

**Ejemplo:** Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 \cdot y_3$$

es obvio que  $T$  es multilineal, luego  $T$  es un tensor 2 veces covariante en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo:** Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 \cdot x_3$$

se ve rápidamente que no es una aplicación lineal respecto de la variable  $\bar{x}$ .

**Ejemplo:** Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

la propiedad de linealidad del producto por un escalar es obvia por las propiedades de los determinantes. La propiedad de linealidad que conserva la adición se demuestra fácilmente desarrollando el determinante por adjuntos en la primera columna. Luego  $T$  es un tensor 3 veces covariante.

En Álgebra Lineal estudiamos no sólo las aplicaciones  $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , sino también las de la forma  $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ . Ahora bien, estas últimas pueden convertirse al primer tipo mediante un elemento del **espacio dual**.

Espacio  
dual

**Definición I.5 Espacio dual.** Sea  $V$  un espacio vectorial entonces se define el espacio dual y se denota con  $V^*$  de la siguiente manera:

$$V^* = \{f : V \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$$

Con la definición anterior, un truco para pasar de unas aplicaciones a otras es que consideramos un elemento del espacio dual ( $\phi \in \mathbb{R}^m$ ) y uno del espacio vectorial original ( $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ) y entonces tenemos una aplicación

$$\hat{f}(\phi, \bar{x}) = \phi(f(\bar{x})) \in \mathbb{R}$$

De la misma manera, en lugar de considerar "tensores vectoriales" (esta expresión no es correcta, pero se da para ilustrar), los cuales serían aplicaciones multilineales  $T : \times_1^s V \mapsto \times_1^r V$ , es más conveniente pensar en que el tensor va a depender también de los elementos del espacio dual. Luego vamos a considerar tensores de la forma

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ veces}} \mapsto \mathbb{R}$$

que sean multilineales.

Tensor  $r$  ve-  
ces contra-  
variante y  $s$   
veces cova-  
riante

**Definición I.6 Tensor  $r$  veces contravariante y  $s$  veces covariante.** Es cualquier aplicación multilineal de la forma:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ veces}} \mapsto \mathbb{R}$$

siendo  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  (isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) y  $V^*$  su espacio dual. Diremos análogamente que  $T$  es un tensor de tipo  $(r,s)$ .

Como ya sabemos, si  $V$  es un espacio vectorial y tenemos una base de  $V$  (llamémosla  $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ), entonces existe una base natural de  $V^*$  llamada **base dual** (denotada por  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \dots, \tilde{\phi}^n\}$ ) y que está determinada por la propiedad:

$$\tilde{\phi}^i(\bar{v}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

**Ejemplo:** Daremos un ejemplo casi absurdo para ilustrar. Dar la base dual es muy fácil cuando tenemos una base ortonormal, por ejemplo la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En este caso obtenemos la base dual solamente girando los elementos de la base canónica, obteniendo:

$$\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Ejemplo:** Imaginemos que estamos en  $\mathbb{R}^2$  pero en esta ocasión tenemos una cualquiera de sus bases  $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ . Ahora consideramos la matriz  $A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$ , y entonces tenemos

que  $\begin{cases} \bar{v}_1 = A \cdot \bar{e}_1 \\ \bar{v}_2 = A \cdot \bar{e}_2 \end{cases}$ . Construimos entonces la base dual  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2\}$  de esta manera con la

matriz de cambio de base:  $\begin{cases} \tilde{\phi}^1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \bar{x} \\ \tilde{\phi}^2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \bar{x} \end{cases}$

**Ejemplo:** Si  $f$  es un endomorfismo, digamos  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , se corresponde de manera unívoca con un tensor de tipo  $(1,1)$ :

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ T(\tilde{\phi}, \bar{x}) &\mapsto \tilde{\phi}(f(\bar{x})) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Cualquier vector de un espacio vectorial ( $\bar{v} \in V$ ) se puede hacer corresponder con un tensor  $(1,0)$  que se alimenta de elementos del dual y devuelve reales definido como:

$$\begin{aligned} T_{\bar{v}} : V^* &\mapsto \mathbb{R} \\ T_{\bar{v}}(\tilde{\phi}) &\mapsto \tilde{\phi}(\bar{v}) \end{aligned}$$

Vamos a introducir notación para las definiciones y resultados venideros, y hay que hacerla nuestra ya que es el infierno de casi todos los estudiantes al abrir un libro de cálculo tensorial. De aquí en adelante (aunque se venga haciendo desde el inicio) se usarán **subíndices** para numerar vectores ( $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ ) y **superíndices** para numerar elementos del espacio dual, aunque también sean vectores ( $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ ).

Componentes  
de un tensor

**Definición 1.7 Componentes de un tensor.** Sea un tensor  $T$  de tipo  $(r,s)$  y sean  $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \dots, \tilde{\phi}^n\}$  las bases de  $V$  y  $V^*$  respectivamente, se definen las componentes de  $T$  en la base  $\mathcal{B}$  como la siguiente colección de números:

$$T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = T(\tilde{\phi}^{i_1}, \tilde{\phi}^{i_2}, \dots, \tilde{\phi}^{i_r}, \bar{v}_{j_1}, \bar{v}_{j_2}, \dots, \bar{v}_{j_s})(**)$$

**Ejemplo:** Calcular las componentes del tensor:

$$D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$D\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Lo primero que hacemos es coger una base (cogemos la canónica porque será lo más usual este curso). Como es un tensor  $(0,2)$ , no habrá superíndices en las componentes, sólo subíndices. Las componentes son:

$$D_{j_1 j_2} = \begin{cases} D_{11} = D(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{12} = D(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1 \\ D_{21} = -1 \\ D_{22} = 0 \end{cases}$$

### I.1.2. Convenio de Einstein

Se usa para ahorrar en escritura cuando se habla del álgebra tensorial. En resumen consiste en que cuando se repite un índice arriba y abajo entonces hay que suponer que sumamos en él.

**Ejemplo:** En primer curso, la combinación lineal se escribía como:  $\lambda_1 \cdot \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \bar{v}_n$ . Si usamos el convenio esto se escribiría simplemente como  $\lambda^i \cdot \bar{v}_i$

**Ejemplo:** Sea una aplicación lineal  $f(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$ , se corresponde unívocamente con un tensor  $(1,1)$ :

$$T : (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

$$T(\tilde{\phi}, \bar{v}) \mapsto \tilde{\phi}(\bar{v})$$

Las componentes (en la base canónica) son las  $a_j^i$ , donde  $i$  son las filas y  $j$  las columnas.

$$f(\bar{x}) = a_j^i \cdot x^j; \bar{x} = x^j \cdot \bar{e}_j$$

$$\text{Las componentes } T_j^i \equiv T(\tilde{\phi}^i, \bar{e}_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_j^i$$

**Ejemplo:** Un tensor  $(1,3)$  muy importante es el llamado tensor de Riemann  $T : R = V^* \times V \times V \times V \mapsto \mathbb{R}$ . En relatividad  $\dim V = 4$  y tiene  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$  componentes y, para aplicarlo a un elemento del dual, digamos con componentes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , y a tres vectores, con coordenadas  $(b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4), (d_1, d_2, d_3, d_4)$ , debemos escribir:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 R_{jkl}^i a_i b^j c^k d^l$$

Esta expresión tiene demasiados sumatorios, si la reescribimos con el criterio de Einstein queda  $R_{jkl}^i a_i b^j c^k d^l$

**Definición I.8 Producto tensorial.** Sea  $T$  un tensor de tipo  $(r,s)$  y sea  $S$  otro tensor de

Producto  
tensorial

tipo  $(u,v)$ , de define su producto tensorial  $T \otimes S$  como un nuevo tensor de tipo  $(r+u, s+v)$ :

$$T \otimes S(\tilde{\phi}^1, \dots, \phi^{\tilde{r}+u}) = T(\tilde{\phi}^1, \dots, \tilde{\phi}^r, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s) \cdot S(\phi^{\tilde{r}+1}, \dots, \phi^{\tilde{r}+u}, \bar{v}_{s+1}, \dots, \bar{v}_{s+v})$$

**Ejemplo:** Tomaremos estos dos tensores de tipo  $(0,1)$  en  $\mathbb{R}^2$ :

$$T(\bar{x}) = 2 \cdot x^1 + x^2; S(\bar{x}) = 5 \cdot x^1$$

y hallaremos ahora las componentes de  $T \otimes S$ , que será por definición un nuevo tensor de tipo  $(0,2)$ , de la forma  $T \otimes S : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , y le llamaremos  $P$  a partir de ahora. Entonces tenemos que:

$$\begin{cases} P_{11} = P(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 10 \\ P_{12} = 0 \\ P_{21} = P(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 5 \\ P_{22} = 0 \end{cases}$$

**Ejemplo:** En física e ingeniería se consideran muchos tensores importantes. Por ejemplo, el **tensor de inercia** es un tensor de tipo  $(0,2)$  que mide (entre otras cosas) lo difícil que es girar un sólido rígido respecto a un eje dado (en términos físicos es difícil si necesito un gran trabajo para girarlo).



Por ejemplo, en la figura, suponiendo que es una esfera que pesa toneladas, la intuición nos dice sin hacer cálculos que costará menos rotar la esfera respecto al primer eje que rotarla respecto al segundo (y estamos en lo cierto).

**Ejemplo:** Los tensores también aparecen en el **entrelazamiento cuántico**, dentro del campo de la mecánica cuántica. Una partícula se corresponde con un vector, que como sabemos se corresponde con un tensor  $(1,0)$ . Pues si tenemos dos partículas  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$ , entonces el sistema formado por ambas partículas es  $\bar{v} \otimes \bar{w}$ .



## I.2. Repaso (intuitivo) de Geometría Diferencial

Empezaremos con el objeto matemático al que llamamos **variedad**. Como idea, una variedad es un objeto geométrico que se puede parametrizar por abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , pero el gran salto con respecto de la geometría de la asignatura de GCS, es que la variedad no está inmersa en  $\mathbb{R}^n$ , sino que está ahí (como el universo), sin preocuparnos lo que sea que la rodea.

La idea de variedad diferenciable  $n$ -dimensional es, por tanto, la de un objeto geométrico compuesto por parches que son similares a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Partimos de un espacio topológico  $M$  al que exigimos que tenga la propiedad de Hausdorff y una base numerable (segundo axioma de numerabilidad). La primera propiedad es natural si queremos poder tratar separadamente los puntos, y la segunda va también en este sentido, porque permite asegurar la existencia de particiones de la unidad, que son totalmente necesarias para hacer el análisis local típico de la geometría diferencial. Una carta nos dice la manera de allanar un parche de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  (es la inversa de la parametrización en ese abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).



El número de parámetros que la parametrización requiere es llamado en geometría **dimensión** de la variedad (mientras en mecánica lo llamaríamos **grados de libertad**). Si llamamos  $\phi$  a la inversa de la parametrización (la carta), entonces tendremos (mirar figura superior) algo como  $\phi(x^1, \dots, x^n)$ , que nos lleva a  $\mathbb{R}^n$  y donde  $x^i$  son lo que llamamos **funciones coordenadas**. Vamos a formalizarlo rápidamente para no empezar a divagar.

Carta  $n$ -  
dimensional

**Definición I.9 Carta  $n$ -dimensional.** Una carta  $n$ -dimensional de  $M$  es un par  $(\mathcal{U}, \phi)$  donde  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $M$  y  $\phi$  es una función  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es homeomorfismo sobre su imagen.

Como un punto puede estar tapado por varios parches, diferentes abiertos de cartas, debemos asegurarnos de que el análisis no se estropea bajando por una  $\phi$  o por otra. Una de las cosas que se suelen pedir en Geometría Diferencial es que si existe otra parametrización  $\psi$ , entonces tanto  $\psi \circ \phi$  como  $\phi \circ \psi$  han de ser de clase  $C^\infty$  (En el abierto intersección de  $\mathbb{R}^n$ ), y en ese caso se dice que las cartas son **compatibles**.

Derivada  
parcial  
 $i$ -ésima  
en una  
variedad

**Definición I.10 Derivada parcial  $i$ -ésima en una variedad.** Se dice que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  si para cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  la función  $f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  lo es, y se define para cada  $p \in \mathcal{U}$  la derivada parcial  $i$ -ésima en la variedad como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = D_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))$$

donde  $D_i$  denota la derivada parcial usual respecto de la variable  $i$ -ésima.

No daremos la definición rigurosa, pero sí diremos que a las funciones  $C^\infty$  entre dos variedades  $M$  y  $N$  que tienen inversa  $C^\infty$  se llaman **difeomorfismos**.

Un problema técnicamente más complejo es la definición del **espacio tangente**, que en el caso de subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  es muy fácil. No es una mera adaptación porque allí los vectores tangentes eran “pelos” orientados que se salían de la subvariedad, mientras que ahora concebimos las variedades como una entidad única, sin referencia a un posible “exterior”. Hay varias maneras de superar este obstáculo. Aquí mencionaremos las definiciones matemáticas que corresponden a ver los vectores tangentes como velocidades de curvas y como derivadas direccionales. La segunda es más abstracta, se hace introduciendo implícitamente el concepto de derivación.

Espacio  
tangente  
de una  
variedad

**Definición I.11 Espacio tangente de una variedad.** Se llama espacio tangente de una variedad  $M$  en un punto  $p$  al conjunto cociente  $T_p(M) = K_p(M)/\sim$  donde  $K_p(M) = \{\text{Funciones } c : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto M \text{ con } c(0) = p\}$  y  $\sim$  identifica las funciones curvas tales que  $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$  con  $(\mathcal{U}, \phi)$  una carta. Se llama **vector tangente** de  $M$  en  $p$  a cualquiera de sus elementos.

Vector  
tangente  
en una  
variedad

**Definición I.12 Vector tangente en una variedad.** Se llama vector tangente de  $M$  en  $p$  a cualquier operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $v : E_p(M) \mapsto \mathbb{R}$  que satisface  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$  para todo  $f, g \in E_p(M)$ , donde  $E_p(M)$  es el anillo de funciones  $M \mapsto \mathbb{R}$  definidas en un entorno suficientemente pequeño de  $p$ . Se llama espacio tangente de  $M$  en un punto  $p$  al conjunto formado por todos los vectores tangentes.

A partir de las curvas que corresponden a los ejes coordenados (una vez que bajamos a  $\mathbb{R}^n$  por la carta) se obtienen unos vectores tangentes que denotaremos con el extraño nombre  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ . Para ser rigurosos, si  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  es la base canónica, fijada una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  con la primera definición se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = [c_i] \quad \text{con} \quad c_i(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t\bar{e}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Denominar a estos vectores con el mismo símbolo que el de las derivadas parciales no es casual, pues con la segunda definición no son más que las derivadas parciales  $i$ -ésimas en la variedad, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \quad (I.1)$$

Por razones obvias se les suele denotar con la notación abreviada  $\partial_i|_p$ , o incluso  $\partial_i$  si el punto no se indica.

**Proposición I.1.** El espacio tangente  $T_p(M)$  tiene una estructura natural de espacio vectorial cuya dimensión es la de la variedad diferenciable  $M$ .

**Proposición I.2.** Para cada punto  $p$  de una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $M$ , el conjunto  $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_n|_p\}$  es una base de  $T_p(M)$ .

Hasta aquí, si aún no nos hemos quitado la vida con la notación, podemos proceder.

Con  $f : M \mapsto N$  podemos pasar curvas en curvas lo cual induce una aplicación  $T_p(M) \mapsto T_{f(p)}(N)$ . Aunque ésta es la idea intuitiva, es más sintético proceder tomando en cuenta la segunda definición de espacio tangente.

Aplicación  
tangente

**Definición I.13 Aplicación tangente.** Sea  $f : M \mapsto N$ . Se llama aplicación tangente de  $f$  en  $p$  y se denota con  $\frac{d}{df}|_p$ , a la aplicación lineal  $T_p(M) \mapsto T_{f(p)}(N)$  que aplica un elemento de  $T_p(M)$  (considerado con la segunda definición), digamos  $v(\cdot)$  en  $v(\cdot \circ f)$

**Proposición I.3.** Sea  $f : M \mapsto N$  y sean  $(\mathcal{U}(p), \phi)$  y  $(\mathcal{V}(f(p)), \psi)$  cartas de  $M$  y  $N$  respectivamente en los puntos indicados. La matriz de la aplicación tangente  $df|_p$  en las bases  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$  y  $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_{f(p)}\}$  correspondientes a estas cartas es la matriz jacobiana de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  en  $\phi(p)$ .

Dada una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$  tiene sentido considerar las aplicaciones tangentes de las funciones coordenadas  $dx^i|_p$  como funciones de  $M$  en  $\mathbb{R}$  con la estructura de variedad obvia. Usando las definiciones de vector tangente se puede probar que

$$dx^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \delta_j^i$$

o dicho de otra forma

$$\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\} \quad \text{es la base dual de} \quad \{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$$

Espacio co-  
tangente

**Definición I.14 Espacio cotangente.** Dada una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , al espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  generado por  $\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\}$  se denomina espacio cotangente de  $M$  en  $p$  y se denota con  $T_p^*(M)$ , por ser el dual de  $T_p(M)$ .

Uno forma

**Definición I.15 Uno forma.** Los elementos de  $T_p^*(M)$  se llaman uno formas (o covectores).

Como cabía esperar, en lo sucesivo descargaremos la notación para las aplicaciones tangentes y las bases introducidas de  $T_p(M)$  y  $T_p^*(M)$  omitiendo el punto cuando no sea relevante. Por ejemplo, escribiremos  $dx^1$  en lugar de  $dx^1|_p$ .

Una vez más insistimos en que todos los espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  son lo mismo, y una vez fijadas las bases las operaciones se realizan coordenada a coordenada como nos enseñaron en primero cuando casi todo era con vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Los elementos del dual no albergan nada nuevo y siguen funcionando como se indicó en la sección anterior (y en el curso de primero) por mucho que pongamos  $d$  y  $\partial$  por todos los lados. En un ejemplo:

$$(2dx^1 + 3dx^2)(2\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2}) = 1 \quad \text{porque} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$$

### I.3. Tensores en el espacio tangente

Ya hemos visto tensores en  $\mathbb{R}^n$ , veamos que pasa cuando consideramos los tensores en las variedades en general. Podemos considerar tensores cuyo espacio vectorial subyacente sea el espacio tangente de la variedad en cada punto, y cuyo dual es el cotangente:

$$V = T_p(M) \quad V^* = (T_p(M))^*$$

Será conveniente permitir variar el punto y tener entonces un **campo de tensores** (un tensor definido en cada punto de la variedad) y queremos que sea diferenciable (en algún sentido).

Para hacer la teoría más sintética, es conveniente introducir el **fibrado**, tanto tangente como cotangente:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M) \quad T^*M = \bigcup_{p \in M} (T_p(M))^*$$

con cierta estructura de variedad. En física a esto se le llama **espacio de fases** (partículas elementales).

Tensor  
en una  
variedad

**Definición I.16 Tensor en una variedad.** Sea  $M$  una variedad. Un tensor (en rigor, campo tensorial)  $C^\infty$  de tipo  $(r,s)$  en  $M$  es una aplicación que a cada punto  $p$  le asigna un tensor de tipo  $(r,s)$  con  $V = T_p(M)$  y  $V^* = (T_p(M))^*$  y tal que en cada carta las componentes sean funciones  $C^\infty$ .

Métrica

**Definición I.17 Métrica.** Una métrica en una variedad es un tensor de tipo  $(0,2)$  en dicha variedad tal que si en una carta  $(g_{ij})$  es la matriz de componentes, entonces esta matriz es simétrica y no singular.

**Ejemplo:** En  $\mathbb{R}^2$  con la carta identidad tenemos  $G = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ . Tomemos  $\bar{v} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  y  $\bar{w} = b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , ambos en  $\mathbb{R}^2$ , y entonces con la métrica  $G$ :

$$G(\bar{v}, \bar{w}) = dx(\bar{v}) \cdot dx(\bar{w}) + dy(\bar{v}) \cdot dy(\bar{w}) = a^1 + b^1 \cdot a^2 + b^2$$

que es el producto escalar usual.

**Ejemplo: (Métrica de Poincaré)** En  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  se define la métrica:  $G = y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ . Sea  $\bar{v} = 3 \frac{\partial}{\partial x}|_p + 4 \frac{\partial}{\partial y}|_p$ ; para  $p = (0,1)$ ; entonces  $G(\bar{v}, \bar{v}) = 3^2 + 4^2 = 25$ . Y si  $\bar{w} = 3 \frac{\partial}{\partial x}|_q + 4 \frac{\partial}{\partial y}|_q$ ; para  $q = (0,5)$ ; entonces  $G(\bar{w}, \bar{w}) = 1$ .

**Ejemplo: (Métrica alrededor de un agujero negro)** Se define como

$$G = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr$$

donde  $r$  es la distancia al centro,  $t$  es el tiempo y  $r_0$  una constante.

**Ejemplo:** (Componentes de la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ ) Tenemos la métrica usual del producto escalar con componentes:

$$\begin{cases} g_{11} = 1 & g_{12} = 0 \\ g_{21} = 0 & g_{22} = 1 \end{cases}$$

En general, una métrica es de la forma  $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . En la matriz de componentes de la métrica usual nos encontramos con la identidad (simétrica y no singular).

**Ejemplo:** (Componentes de la métrica de Poincaré) Se tienen las componentes:

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix}$$

Lo mas importante de los tensores en variedades es saber como se comportan sus componentes por cambios de carta.

Si tenemos un tensor  $T$  en una variedad  $M$  para cierta carta, el tensor no depende de la carta pero las componentes si:

$$\tilde{T}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}} \cdot T_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}, \quad \text{para } \psi = (y^1, \dots, y^n)$$

Esto se deduce por la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i;$$

Por definición tendríamos que  $\tilde{T}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T(dy^{i_1}, \dots, dy^{i_r}, \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{j_s}})$ . Si recordamos la definición de métrica como tensor  $(0, 2)$  en una variedad cuya matriz de componentes es simétrica y no singular nos preguntamos si podemos pasar los tensores de una variedad  $M$  a tensores en una variedad  $N$  por medio de una aplicación. Y la respuesta es que no es tan trivial como parece.

*Pull-back*

**Definición I.18 Pull-back.** Sea un tensor  $T$  de tipo  $(0, s)$  en la variedad  $N$ , se llama pull-back (o en español menos popularmente imagen recíproca) al tensor de tipo  $(0, s)$  en  $M$  definido por la siguiente expresión:

$$f^*T(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s) = T(df(\bar{v}_1), \dots, df(\bar{v}_s))$$

El pull-back será muy interesante cuando estudiemos las formas diferenciables. Para los tensores  $(r, s)$  no está bien definida por no saber como tratar con los elementos del dual, y para los de tipo  $(r, 0)$  hay otra cosa definida que se llama push-forward.

Métrica inducida

**Definición I.19 Métrica inducida.** Sea  $i$  una inclusión, y sea  $T = G$  una métrica, se dice que  $i^*G$  es la métrica inducida.

**Ejemplo:** Sean  $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2$   
 $\downarrow \phi = \text{ang.} \quad \downarrow \psi = \text{id}$  y la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ :  $G = dx \otimes dx + dy \otimes dy$   
 $\theta \quad (x, y)$

En lugar de seguir la fórmula de la definición de pull-back recordamos que la aplicación tangente usa las derivadas parciales (el jacobiano). Tenemos pues:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \mapsto \begin{cases} dx = -\sin(\theta) \\ dy = \cos(\theta) \end{cases}$$

Cabe decir que la llave izquierda no es un cambio de carta, es la inclusión  $\psi \circ i \circ \phi^{-1}$ . Concluyendo, tenemos la métrica inducida por la usual en  $\mathbb{S}^1$ :

$$i^*G = (-\sin(\theta))^2 d\theta \otimes d\theta + (\cos^2(\theta)) d\theta \otimes d\theta = d\theta \otimes d\theta$$

**Ejemplo:** (Típico de GCS: Superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ )

Llamamos  $(u, v)$  a los parámetros de la superficie, que en la foto aparecen como  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} x = f^1(u, v) \\ y = f^2(u, v) \\ z = f^3(u, v) \end{cases} \begin{cases} dx = \frac{\partial f^1}{\partial u} du + \frac{\partial f^1}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial f^2}{\partial u} du + \frac{\partial f^2}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial f^3}{\partial u} du + \frac{\partial f^3}{\partial v} dv \end{cases}$$

La métrica inducida por la usual (que para confundirnos aún más recibe también el nombre de usual) es la siguiente:

$$i^*(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) =$$

$$\left( \frac{\partial f^1}{\partial u} du + \frac{\partial f^1}{\partial v} dv \right) \otimes \left( \frac{\partial f^1}{\partial u} du + \frac{\partial f^1}{\partial v} dv \right) + \dots =$$

$$\left( \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \right)^2 du \otimes du + \dots$$

Como se ha visto en los ejemplos, en la práctica es mucho más cómodo aplicar las siguientes fórmulas que la ley general de transformación de tensores:  $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \end{cases}$



**Figura I.1:** Superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$

**Ejemplo:** Vamos a cambiar la métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  a polares (y como venimos haciendo, pasamos de la fórmula del pull-back). Tenemos la métrica  $G = dx \otimes dx + dy \otimes dy$  y el cambio

$$\text{de carta } \begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \mapsto \begin{cases} dx = \cos(\theta)dr - \sin(\theta)d\theta \\ dy = \sin(\theta)dr + \cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

Si sustituímos en la métrica usual tenemos:

$$\cos^2(\theta)dr \otimes dr + r^2 \sin^2(\theta)d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)dr \otimes dr + r^2 \cos^2(\theta)d\theta \otimes d\theta = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$$

## Capítulo II

# Geometría Riemanniana

### II.1. Cálculo de variaciones y mecánica

El cálculo de variaciones se dedica a hallar máximos y mínimos de **funcionales** (entendiendo esta palabra como aplicación que va de un espacio de funciones a  $\mathbb{R}$ ). Lo más común es el ejercicio en el que hay que minimizar una integral (como hallar el "tobogán" más rápido entre dos puntos dados), aunque hay otros como intentar hallar el área máxima que podemos encerrar con una cuerda de longitud 1 (Demostrar que la solución es una circunferencia no es trivial sin el cálculo de variaciones).

**Observación:** Durante este capítulo, se usará la notación  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$

#### Ejemplo: (Problema de la Braquistócrona I)

Una curva braquistócrona, o curva del descenso más rápido, es la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo (el "tobogán" del que hablábamos antes), por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción.



**Figura II.1:** Curva Braquistócrona

Supongamos que dicha curva es la gráfica de una función  $y = f(x)$  en  $\mathbb{R}^2$  y entonces el problema consiste en minimizar el tiempo que se tarda en ir de A a B. Dicho tiempo (llamémosle  $T$ ) se corresponde con la integral:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{f}(x))^2}{2g \cdot f(x)}} dx; \quad \text{donde } g \text{ es la constante gravitacional.}$$

A continuación se enuncia la proposición básica del cálculo de variaciones.



**Proposición II.1.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $\bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n$  y un conjunto de funciones

$$\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) : F(a) = \bar{c}, F(b) = \bar{d}\}$$

Supongamos además que tenemos la integral

$$\int_a^b L dt; \quad \text{con } L = L(t, F(t), \dot{F}(t))$$

y que esta alcanza un máximo o un mínimo en  $\mathcal{C}$ , entonces dicha  $F$  es solución de la versión discreta (la que se usa en mecánica clásica) de **Euler-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II.1})$$

**Demostración.** Sea  $f(\epsilon) = \int_a^b L(t, F_0(t) + \epsilon \alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon \dot{\alpha}(t)) dt$ ; siendo  $F_0$  la función para la que se alcanza el extremo y siendo  $\alpha : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$  arbitraria con  $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$ ;  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  alcanza un extremo en  $\epsilon = 0$ , por tanto:

$$\dot{f}(0) = 0 \longrightarrow 0 = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \alpha^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\alpha}^i \right) dt = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \dot{\alpha}^i dt$$

que implica las ecuaciones de Euler-Lagrange. □

**Ejemplo:**

$$I = \int_1^2 (1 + t^2(\dot{q}(t))^2) dt; \quad q(1) = 2, q(2) = 3$$

Hay que encontrar la  $q = q(t)$  que minimiza  $I$ . ¿Cuál es? Pues atendiendo a la proposición llamamos  $L$  al integrando y tenemos siguiendo la fórmula:

$$L = 1 + t^2 \dot{q}^2 \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2t^2 \dot{q}; \\ \frac{\partial L}{\partial q} = 0; \end{cases} \longrightarrow \frac{d}{dt} (2t^2 \dot{q}) = 0;$$

Luego nos queda la EDO  $4t\dot{q} + 2t^2\ddot{q} = 0$  y solo hay que resolverla. Tenemos que  $t^2\dot{q} = \text{cte} \rightarrow \dot{q}(t) = \frac{\text{cte}}{t^2}$ . Luego ya podemos integrar para hallar la función deseada:

$$q(t) = K_1 + \frac{K_2}{t} \xrightarrow{q(1)=2, q(2)=3} q(t) = 4 - \frac{2}{t}$$

Con esta  $q$  tenemos que  $I=3$ . Por ejemplo, si hubieramos cogido  $q(t) = t + 1$ , entonces tendríamos  $I = \frac{10}{3} > 3$ .

Volvamos ahora al ejemplo de la Braquistócrona.

**Ejemplo: (Problema de la Braquistócrona II)**

Teníamos que:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{f}(x))^2}{2g \cdot f(x)}} dx; \quad f(0) = 1, f(1) = 0$$

Luego tenemos que nuestro integrando, al que venimos llamando  $L$ , es:

$$L = \sqrt{\frac{1 + (\dot{q}(x))^2}{2g \cdot q(x)}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{\sqrt{2gq}} \frac{\dot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = \sqrt{\frac{1+(\dot{q}(x))^2}{2g}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot q^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Y si ahora usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange nos sale una EDO bastante complicada. Para ayudar damos una proposición nueva

**Proposición II.2. (Ley de conservación de la energía)** Supongamos que  $L$  no depende explícitamente de  $t$ . Por tanto,  $L(t, q, \dot{q}) = L(q, \dot{q})$  y entonces a lo largo de cualquier solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange se cumple que:

$$\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \text{cte} \quad (\text{II.2})$$

**Demostración.**  $\frac{d}{dt} \left( \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) = \ddot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  Por terminar... □

#### HASTA AQUÍ EL PRIMER EXAMEN PARCIAL

¿Por qué pueden interesarnos estos resultados del cálculo de variaciones en geometría de variedades? Imaginemos que tenemos el problema anterior, en el que intentábamos minimizar  $\int_1^2 (1 + t^2(\dot{q}(t))^2) dt$ , donde  $L = 1 + t^2\dot{q}^2$  y el mínimo era 3. Ahora, si cambiamos de nombre la función incógnita  $q$ , el mínimo debería seguir siendo el mismo. Entonces yo podría considerar (por ejemplo, yo, porque quiero) llamar a la  $q = h^2$  (suponiendo que esto funciona bien: como  $q$  es positiva se puede escribir como un cuadrado...) y el mínimo debería ser el mismo y alcanzarse para la misma función. El nuevo  $\tilde{L} = 1 + t^2(2h\dot{h})^2$  y el mínimo debe salir el mismo salvo el cambio de nombre. Si antes  $q(t) = 4 - \frac{2}{t}$  ahora  $h(t) = \sqrt{4 - \frac{2}{t}}$ . Esto es sorprendente porque si cambio las coordenadas en las ecuaciones de Euler-Lagrange el problema parece complicarse, pero funciona perfectamente:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{h}} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial h}$$

Luego es lícito hacer este cambio

$$L \mapsto \tilde{L}$$

$$q \mapsto h$$

De alguna manera, que las ecuaciones de Euler-Lagrange sean invariantes por cambios de coordenadas es atractivo, porque quiere decir que en los problemas de Geometría puedo cambiar la carta (las coordenadas) y haciendo el cambio de variable pertinente todo funcionará de lujo.

Esto tiene una aplicación en mecánica (s.XVIII y S.XIX) que es fantástica. En estos siglos surgió la idea de dejar de aplicar  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  en cada punto por resolver un problema de cálculo de variaciones:

**Proposición II.3. (Principio de mínima acción o de acción estacionaria)**

En mecánica se usa este lagrangiano siempre  $L = E_c - E_p$  que es la diferencia entre energía cinética (energía que aportan las partículas, que es igual a  $E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i \left\| \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right\|^2$ ) y energía potencial (la energía que las partículas toman del campo donde se encuentren, como el gravitatorio donde vale  $E_p = \sum_{i=1} m_i g h_i$ ) y existe el **principio de mínima acción**, que dice que los sistemas mecánicos evolucionan entre dos tiempos de modo que  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  es mínima (aunque en rigor es estacionaria).

**Ejemplo:** Supongamos que queremos ver el movimiento de un péndulo. En lugar de imaginar fuerzas y tensiones ficticias, veámoslo matemáticamente. El punto extremo del péndulo tiene coordenadas  $(x, y)$  y entonces  $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ . Si nos fijamos,  $(x, y)$  no son buenas coordenadas para este problema. Cojamos mejor la coordenada  $\theta = \text{ángulo}$ . Entonces

$$\begin{cases} x = l \cdot \sin(\theta) \\ y = -l \cdot \cos(\theta) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = l \cdot \cos(\theta) d\theta \\ dy = -l \cdot \sin(\theta) d\theta \end{cases}$$

y entonces  $L = \frac{1}{2} m \cdot l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cdot \cos(\theta)$ .

Ahora aplicando II.1 tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = -mgl \cdot \sin(\theta) \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

que es la ecuación del péndulo de toda la vida.



**Figura II.2:** Péndulo en  $\mathbb{R}^n$

**Observación:** Este resultado de invarianza ante cambios de coordenadas nos llevará como veremos a calcular geodésicas en variedades muy rápidamente si lo vemos como un problema del cálculo de variaciones minimizando las métricas en dicha variedad.

## II.2. Geodésicas en variedades

Variedad  
semiríe-  
manniana

**Definición II.1 Variedad semiriemanniana.** Una variedad semiriemanniana es una variedad dotada de una métrica.

Variedad  
riemanniana

**Definición II.2 Variedad riemanniana.** Una variedad riemanniana es una variedad semiriemanniana cuya métrica es definida positiva.

Recuérdese que la condición de no degeneración que se pedía a una métrica  $G$  es que su matriz de componentes  $(g_{ij})$  fuera no singular. Esto no impide que ocurran cosas raras como  $G(\partial_1, \partial_1) = 0$  o  $G(\partial_1, \partial_1) < 0$ . Tal comportamiento estafalario (¿vectores con longitudes nulas o imaginarias?) es conveniente en relatividad pero extraño a nuestras ideas geométricas, por ello es natural dar una denominación específica a las variedades con métricas definidas positivas, es decir, con matriz  $(g_{ij})$  definida positiva en todo

punto.

Si en una carta  $U, \varphi = (x^1, \dots, x^n)$  una métrica tiene componentes  $g_{ij}$ , para cada par de campos de vectores  $X = X^i \partial_i, Y = Y^i \partial_i$  se tiene, por definición  $G(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$ . Si queremos referirnos a la métrica  $G$  sin mencionar las componentes de los vectores a los que se aplica, en pura ortodoxia notacional se escribe  $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  ya que  $dx^i(X) = X^i$  y  $dx^i(Y) = Y^i$ , como covectores, y  $\otimes$  significa el producto del resultado de aplicar dos tensores. Esta operación se define en general para cualquier par de tensores.

**Ejemplo:** En  $\mathbb{R}^n$  con la carta trivial la métrica que corresponde al producto escalar usual es  $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  con  $g_{ij} = 1$  si  $i = j$  y 0 en otro caso. Ésta es la métrica usual y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir  $\mathbb{R}^n$  en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$  se escribiría  $dx^2 + dy^2$  y la métrica  $dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 10 dy \otimes dy$  sería  $dx^2 + 2dx dy + 10dy^2$ . También es habitual el nombre común  $ds^2$  en vez de  $G$ , incluso si la métrica no es definida positiva.

Al igual que el lagrangiano  $L = T$  (energía cinética) determina las ecuaciones de movimiento intrínsecamente, sin estar forzados a emplear un sistema de coordenadas externo; también una métrica determina unas curvas destacadas en una variedad riemanniana. En ambos casos, lo que se obtiene es una generalización de las rectas. En el primer caso por analogía con el principio de inercia (en ausencia de fuerzas el movimiento es rectilíneo y uniforme) y en el segundo por la propiedad minimizante de la distancia que estudiaremos mas adelante.

Geodésica

**Definición II.3 Geodésica.** Dada una variedad semiriemanniana  $M$ , se dice que una curva parametrizada  $c : I \rightarrow M$  es una geodésica si en cada carta  $(U, \varphi)$  con  $\text{Im}(c) \cap U \neq \emptyset$ , las funciones  $(\varphi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1) para  $L = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$  con  $g_{ij}$  las componentes de la métrica de  $M$ .

**Ejemplo:** Sea  $G$  la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $L = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  con  $q^1 = x, q^2 = y$ . Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1) son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{x}) = 2\ddot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con  $y$ . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como  $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$ . Esto concuerda con el principio de inercia. En coordenadas polares, un cálculo prueba  $L = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$  y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 \quad r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} = 0$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que  $r(t) = \frac{1}{\sin(\theta(t))}$  con  $\cot(\theta(t)) = t$ , correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

Lo último que habíamos visto es que si teníamos una geodésica entonces estaba parametrizada por arco cumpliendo  $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \text{cte}$ . Los símbolos de Christoffel son algo que aparece de manera natural al estudiar la geometría de superficies de

forma extrínseca (fijándose en el entorno). La curvatura se suele calcular usando el producto de curvaturas principales (extrínsecamente) o con formas diferenciables (intrínsecamente).

Sobre los símbolos de Christoffel: Si la matriz  $(g_{ij})$  era definida positiva yo puedo reparametrizar la curva:

$x^i(t) \rightarrow x^i(kt)$ ; luego tenemos que  $\frac{d}{dt}(x^i(kt)) = k\dot{x}^i(kt)$  y por tanto:

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = cte \rightarrow k^2 g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = cte$$

Tomando  $k^2 = cte$  conseguiría  $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$ . Esto es porque la constante es positiva (porque la matriz es definida positiva), en otro caso no puedo parametrizar por longitud de arco todas las geodésicas (no sería igual a 1).

**Observación:** Recordemos que para poder parametrizar por longitud de arco tenemos que tener  $G(\bar{v}, \bar{v}) = 1$ , que es lo mismo que se ve en GCS.

Vamos a atar algunos cambios sueltos, como que no está claro que estén "bien" definidas las geodésicas. Sabemos que funcionan con cambio de carta (aunque no lo hemos visto con todo rigor), pero ¿funcionan como en GCS que dado un valor inicial y un vector inicial ya tengo definida una sola geodésica? ¿Nos salen las mismas geodésicas que en segundo? ¿minimizan las geodésicas la longitud en pequeños entornos?.

Sabemos que algunas EDO tienen más de una solución así que **no está claro** que estén bien definidas (especialmente en los casos que no hay unicidad o existencia de la EDO asociada).

Desde el punto de vista de la física la primera y la última pregunta se contestan fácil: Por ejemplo, dada una partícula si le pones una posición inicial y un vector inicial está definida si miramos el momento y el espacio donde está, luego la respuesta sería que sí, que está bien definida (por tramposo que parezca el razonamiento). Por otro lado, por el principio de mínima acción también nos haría intuir una respuesta afirmativa.

Vamos a dar demostraciones matemáticas para dejar de intuir. En Geometría de Curvas y Superficies, se trabaja con el siguiente sistema de referencia:  $\{\bar{\Phi}_u, \bar{\Phi}_v, \bar{N}\}$ .

Con este criterio cada vector de  $\mathbb{R}^3$  tendrá unas componentes en esta base. Si no sabemos que la superficie está en  $\mathbb{R}^3$  se usan los símbolos de Christoffel, dando las componentes en  $\bar{\Phi}_u, \bar{\Phi}_v$  de sus derivadas.

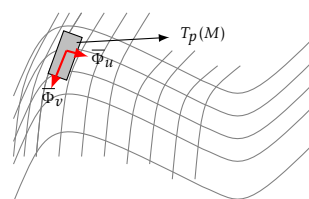
Cuando uno calcula la aceleración de una partícula en  $\bar{\Phi}_u$  tenemos

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial u^2} = \bar{\Phi}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \bar{\Phi}_u + \Gamma_{11}^2 \bar{\Phi}_v + e\bar{N}$$

, donde  $e$  es el primer coeficiente de la 2ª forma fundamental. Lo mismo con las otras derivadas  $\bar{\Phi}_{uv}$  y  $\bar{\Phi}_{vv}$ . Los símbolos de Christoffel son las  $\Gamma$ . Estos símbolos se usan porque las curvaturas en realidad sólo dependen de las métricas: la curvatura de Gauss se puede dar en función de  $e, f, g$  (coeficientes de la IIF), pero haciendo magia negra podemos dejarla en función sólo de los símbolos de Christoffel, convirtiéndose esta en un invariante intrínseco de la variedad (**theorem egregium** de Gauss).

**Proposición II.4.** Las ecuaciones de Euler-Lagrange que definen las geodésicas son equivalentes a estas con una pinta más amable

$$\dot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (\text{II.3})$$



donde los  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel dados por esta difícil expresión

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (\text{II.4})$$

con  $(g^{ij})$  la matriz inversa de  $(g_{ij})$ . En particular, existe una única geodésica una vez escogidos punto y vector inicial  $x^i(0)$  y  $\dot{x}^i(0)$ . Si  $(g_{ij})$  es una métrica como es no singular se puede calcular la inversa, y como las funciones serán  $C^\infty$  todo se podrá calcular.

**Observación:** Esta proposición se usa para calcular los símbolos de Christoffel en casos sencillos (pocas dimensiones y métricas sencillas) sin usar la fórmula, simplemente hallando las ecuaciones diferenciales de las geodésicas y comparar coeficientes.

**Ejemplo:** Hallaremos los símbolos de Christoffel para  $\mathbb{S}^2$  con la métrica inducida y la carta  $(\theta, \phi)$ . Sabíamos que la métrica es  $G = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ , habíamos hallado las ecuaciones de Euler-Lagrange de las geodésicas y teníamos, con lagrangiano  $L = \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \longrightarrow \ddot{\theta} = 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 \longrightarrow \ddot{\theta} - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 = 0 \longrightarrow \ddot{x}^1 + \Gamma_{ij}^1 \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

y el resto son 0. Por otro lado:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \longrightarrow \frac{d}{dt} (2\sin^2(\theta)\dot{\phi}) = 0 \longrightarrow 4\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\sin^2(\theta)\ddot{\phi} = 0;$$

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \longrightarrow \ddot{x}^2 + \Gamma_{ij}^2 \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \longrightarrow \begin{cases} \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{ij}^2 = 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

**Proposición II.5.** Las geodésicas en una variedad satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (\text{II.5})$$

donde  $\Gamma_{jk}^i$  son los símbolos de Christoffel.

**Demostración.** A partir de la  $k$ -ésima ecuación de Euler-Lagrange tenemos:

$$\frac{d}{dt} (2g_{kj}\dot{x}^j) = 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j;$$

$$2g_{kj}\ddot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = -2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j = \left( -\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j;$$

$$g_{kj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0;$$

Sabemos que  $g_{kj}\ddot{x}^j$  se corresponde a coger la  $k$ -ésima coordenada del producto

matricial  $\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \vdots \\ \ddot{x}^n \end{pmatrix}$  Si ahora multiplicamos por la matriz inversa se tiene  $g^{lk}g_{kj}\ddot{x}^j = \delta_j^l \ddot{x}^j = \ddot{x}^l$  y ya sale la fórmula con los símbolos de Christoffel  $\square$

En las variedades no se tiene en cuenta el vector normal  $\bar{N}$ , de hecho para dimensiones grandes no existe la segunda forma fundamental, mientras que los símbolos de Christoffel existen en cualquier variedad.

### II.2.1. Relatividad General

La teoría de la relatividad general, postulada por Albert Einstein, es en realidad bastante geométrica. Einstein postuló (a grandes rasgos) que el potencial gravitatorio (o fuerza de la gravedad) no existía (es decir, que toda la energía de las partículas era energía cinética), y a cambio de esto, la energía cinética viene reemplazada por una métrica (que él no calculó). Einstein sólo sabía de dicha métrica las condiciones complicadísimas que debía cumplir, (esencialmente que la curvatura fuese nula en algún sentido), pero no la formuló.

Con esta filosofía, las trayectorias de las partículas materiales serán las geodésicas parametrizadas por longitud de arco ( $G(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ ), siendo el parámetro de las geodésicas el tiempo medido por un observador en la partícula. Para las trayectorias de las partículas de luz tenemos que serán las geodésicas que cumplen ( $G(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ ).

**Ejemplo:** Para movimientos radiales (como la caída de una piedra al centro de la tierra) bajo el efecto de una masa  $m$  con simetría esférica que no esté rotando (estática), la métrica fuera de ella es la **Métrica de Schwarzschild (radial)** (que ya apareció antes en estas notas como la métrica alrededor de un agujero negro):

$$G = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - c^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $r$  es la distancia al centro y  $r_0$  una constante dada por  $r_0 = \frac{2gm}{c^2}$  donde  $g$  es la constante de gravitación y  $m$  como ya dijimos la masa.

En  $r = r_0$  la matriz de la métrica se vuelve singular (aparecen un coeficiente 0 en la coordenada temporal y un  $\infty$  en la espacial) y el asunto se pone feo (aparece una especie de potencial gravitatorio infinito).

En el caso de los planetas, estrellas, etc. el valor de  $r_0$  es muy pequeño con respecto al radio del cuerpo en cuestión (en el caso de La Tierra tenemos  $r_0 \approx 8\text{mm}$ ). Existen sin embargo objetos llamados agujeros negros, que son unas "estrellas raras" con radio menor que  $r_0$ , es decir, que la singularidad queda fuera.

Vamos a calcular ahora las geodésicas más sencillas (correspondientes a un rayo de luz) para esta métrica. Para ello recordemos que se tenía que cumplir  $G(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$  y vamos a ver como solo usando II.2 podemos ver la forma de las geodésicas:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - c^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \quad \begin{cases} t = t(\lambda); & \begin{cases} \dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}; & \dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} \\ r = r(\lambda); & \dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}; & \dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} \end{cases} \end{cases}$$

Por la conservación de la energía, si la métrica es 0 en el instante inicial entonces es 0 siempre.

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = c^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-2} \xrightarrow{\text{quitamos } \sqrt{\phantom{x}}} \frac{dt}{dr} = \pm c^{-1} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}$$

Ya tenemos la EDO que satisfacen las geodésicas, que encima es de variables separadas, así que tomando  $\int_{r_0}^r$ :

$$t = \pm c^{-1} (r + r_0 \log(r - r_0)) \Big|_{R_0}^R;$$



$$\pm ct = r - R_0 + r_0 \log\left(\frac{r - r_0}{R_0 - r_0}\right);$$

Luego si el rayo se acerca al agujero negro tenemos  $R = R_0$  sale un  $\infty$  (esto significa que, visto desde fuera, cuando el rayo de luz va acercándose al agujero negro, tarda un "tiempo infinito" en atravesarlo, es decir, lo vemos parado).

### II.3. Conexiones afines. Derivada covariante

Nuestro objetivo en esta sección es derivar campos de vectores (y tensores, en general) en variedades.

**Ejemplo:** Sea la variedad  $\mathbb{R}^2$ . Consideramos una base que varía con el tiempo  $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$  (supongamos por ejemplo que van girando). Supongamos ahora que tenemos un vector  $\bar{v} = (a(t), b(t))$  con coordenadas en la base  $\mathcal{B}$ , es decir  $\bar{v} = a(t)\bar{u}_1(t) + b(t)\bar{u}_2(t)$  y por tanto:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = a'(t)\bar{u}_1(t) + b'(t)\bar{u}_2(t) + a(t)\bar{u}'_1(t) + b(t)\bar{u}'_2(t)$$

Definiremos:

$$\begin{cases} \bar{u}'_1(t) = \Gamma_1^1 \bar{u}_1(t) + \Gamma_1^2 \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}'_2(t) = \Gamma_2^1 \bar{u}_1(t) + \Gamma_2^2 \bar{u}_2(t) \end{cases}$$

Entonces  $\frac{d\bar{v}}{dt}$  tiene coordenadas  $(a', b') + (a\Gamma_1^1 + b\Gamma_2^1, a\Gamma_1^2 + b\Gamma_2^2)$ . El primer sumando es la **variación de las coordenadas** y el segundo sumando es la **variación del sistema de referencia**.

El análogo en variedades sería que la derivada de un campo de vectores  $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  en la dirección  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  debería ser algo con coordenada i-ésima:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k$$

**Observación:** En principio no está claro qué condiciones deben satisfacer las  $\Gamma_{jk}^i$  para que no den contradicciones al cambiar de carta. En lugar de buscar estas condiciones se suele dar una definición a través de conexiones.

Conexión  
afín

**Definición II.4 Conexión afín.** Una conexión afín en una variedad  $M$  es una aplicación que asigna a cada par de campos de vectores  $X$  e  $Y$  un tercero  $\nabla_X Y$  tal que:

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ .
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  arbitrarias.

**Proposición II.6.** Si  $\nabla$  es una conexión afín, entonces

$$\nabla_X V = \left( \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k V^j \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^k};$$

donde  $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  y  $\Gamma_{ij}^k$  es la componente  $k$ -ésima de  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ .



**Demostración.**  $\nabla_X V = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ , aplicando la propiedad 1 de conexión afín (ya que  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ). Ahora aplicamos la propiedad 3 y tenemos que

$$\nabla_X V = X^i \left( V^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right);$$

que reordenando y sacando factor común se convierte en lo que queremos.  $\square$

Sea  $\nabla$  una conexión afín y  $V$  un campo de vectores fijado, entonces  $X \mapsto \nabla_X V$  es lineal y bien definida en el espacio tangente. Es lineal en el sentido de que va de  $T_p(M)$  a  $T_p(M)$  y nos da un tensor  $(1, 1)$ . En este sentido, una conexión afín asigna a un tensor  $(1, 0)$  un tensor  $(1, 1)$ . Se puede extender (no es obvio) a una manera de asignar a un tensor  $(r, s)$  un tensor  $(r, s + 1)$ . En este sentido, una conexión afín define una "derivada covariante".

Derivada  
covariante

**Definición II.5 Derivada covariante.** Sea  $V = V^i \partial_i$  y  $\nabla_X V = \left( \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k V^j \right) X^i \partial_k$ . La derivada covariante de  $V$  sería el tensor de tipo  $(1, 1)$  con componentes  $T_i^k$  dadas por  $\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k V^j$ .

En muchos textos se reserva el nombre de derivada covariante a la particularización en los vectores tangentes de una curva. Sea  $c(t)$  la curva,  $x^i(t) = (x^i \circ c)(t)$  y  $V(t) = V$  en el punto  $c(t)$  que corresponde a  $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ . En lugar de  $X$  queremos poner  $\dot{x}^i(t) \partial_i$ . Sustituyendo la coordenada  $k$ -ésima es:

$$\frac{dV}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^j \frac{dx^i}{dt}$$

Es decir, la derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c(t)$  es

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^j \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Lo ultimo que habíamos visto es que si  $\nabla$  es una conexión razonable (que satisficiera las dos hipótesis) entonces los  $\Gamma_{jk}^i$  eran los símbolos de Christoffel. Ahora bien, estas funciones no está claro que con un cambio de carta den lugar a una conexión bien definida. Lo que hay que ver por tanto es que no lleguemos a contradicciones tras un cambio de carta. Vamos a ver la existencia. Vamos a comprobar que el candidato que tenemos con los  $\Gamma_{jk}^i$  da lugar a una conexión. Hay dos pruebas, una "sin cartas" (más sintética) y otra con cartas.

**Demostración. Demostración con cartas** Usamos que sabemos las fórmulas de los símbolos de Christoffel y sabemos cómo se transforman los símbolos de Christoffel. Hay que probar que si yo hago la derivada covariante en una carta  $(y^1, \dots, y^n)$  puedo pasar a otra carta  $(x^1, \dots, x^n)$  tensorialmente (si no fuese así no tendríamos una conexión bien definida).

$$\underbrace{\nabla_j V^i}_{\text{carta } (y^1, \dots, y^n)} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \underbrace{\nabla_m V^k}_{\text{carta } (x^1, \dots, x^n)} \quad (*)$$

Por la forma que tiene esta expresión está claro que se cumplen las propiedades de conexión. La única diferencia es que la fórmula que nos garantiza que se cumplan

era dada fijada una carta ( $\nabla_j V^i$  no es intrínseco, depende de la base, ver la analogía abajo en la observación). Lo primero que hacemos para salvar esto sería:

$$\frac{\partial V'^i}{\partial y^j} \Gamma_{jk}^{i'} V'^k \quad \Gamma', V' \text{ son los de la otra carta;}$$

$$\frac{\partial V'^i}{\partial y^j} \Gamma_{jk}^{i'} V'^k = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \left( \frac{\partial V^k}{\partial x^m} + \Gamma_{ml}^k V^l \right)$$

$$V'^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} V^k$$

si yo aquí derivo (y sabiendo  $\frac{\partial V^k}{\partial y^j} = \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial V^k}{\partial x^m}$ ):

$$\frac{\partial V'^i}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^j} \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) V^k + \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial V^k}{\partial y^j} = \underbrace{\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} V^k}_{\text{lo que debería desaparecer cuando se acumula con los símbolos de Christoffel}} + \underbrace{\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial V^k}{\partial x^m}}_{\text{lo que necesito}}$$

Para que las partes con  $V^r$  se cancelen se necesita  $\Gamma_{kj}^{i'} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} = \Gamma_{lm}^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial y^j}$  y esto es el problema número 9 de la hoja 3, luego... hemos terminado.  $\square$

**Observación:** [Analogía con Álgebra lineal] Imaginemos que tenemos  $Y = AX$ , donde  $A$  es una matriz. Ahora voy a cambiar de base  $CY = \tilde{A}CX$ , y entonces la primera ecuación ya no se satisface, ahora tenemos que  $A = C^{-1}\tilde{A}C$ . El análogo en la ecuación es que  $\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^j}$  son el  $C$  y el  $C^{-1}$  O por ejemplo si nos dicen "imaginemos los vectores con coordenada primera igual a 7", eso no está bien definido porque la coordenada de un mismo vector varía con las bases).

### II.3.1. Curvatura

A partir de ahora sólo usaremos la conexión de Levi-Civita. La curvatura de una variedad Riemanniana se expresa a través del **tensor de Riemann** que habitualmente se considera de tipo  $(1, 3)$  (FALTA DEFINIR  $\nabla_k$  (tensor tipo  $(1, 1)$ ) y lo haremos el martes)

*Definición II.6 .[Tensor!de Riemann] Se llama tensor de Riemann al tensor de tipo  $(1, 3)$  con componentes  $R_{jkl}^i$  tales que para cualquier campo de vectores sea el conmutador de la derivada covariante, es decir:*

$$\nabla_k \nabla_l V^i - \nabla_l \nabla_k V^i = R_{jkl}^i V^j$$

La derivada covariante tenía la derivada de la  $V$ , así que algo tiene que pasar para que desaparezcan y esto tenga sentido.

**Observación:** ¿Por qué no aparecen derivadas de los  $V^i$ ?

$$\nabla_l V^i = \partial_l V^i + \Gamma_{lr}^i V^r;$$

$$\nabla_k \nabla_l V^i \longrightarrow \partial_k \partial_l V^i \quad \text{con las simetrías se cancela}$$

Los términos con derivada primera vienen de derivar los términos  $\Gamma_{lr}^i V^r$

$$\nabla_k \nabla_l V^i \longrightarrow \Gamma_{lr}^i \partial_k V^r$$

Al margen de lo difícil que puede llegar a ser comprender qué tiene que ver esto con una curvatura geoméricamente, se presentan varios problemas en la definición:

1. ¿Qué significa  $\nabla_k \nabla_l V^i$ ? Sólo sabemos aplicar  $\nabla$  a campos vectoriales y  $\nabla_l V^i$  no es un campo vectorial. Aunque parezca que podemos intuir cómo se calcula seguramente nos equivocariamos, ya que hay que tener en cuenta ciertos detalles (como que en otras variedades distintas de  $\mathbb{R}^n$  alguna de las coordenadas no tiene por qué tener dirección constante).
2. ¿Por qué depende linealmente de  $V^i$ ? ¿Dónde están las derivadas de  $V^i$  que deberían aparecer?
3. ¿Por qué es tensorial? Es decir, ¿por qué esto está bien definido tras cambios de carta?

Para responder a la primera pregunta vamos a extender el concepto de derivada covariante para tensores en general. Queremos extender el significado de la derivada covariante  $\nabla_X$  (basta extender  $\nabla_j$ ). Para vectores (tensores  $(1,0)$ ) queremos que salga la derivada usual

$$\nabla_j V^k = \partial_j V^k + \Gamma_{jl}^k V^l$$

Para funciones (tensores  $(0,0)$ ), por otro lado, queremos obtener la derivada parcial, que utilizábamos para generalizar  $\partial_j f$ :

$$\nabla_j f = \partial_j f$$

Y además queremos que respete contracciones:

$$\nabla_l \left( T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} S_{k_1 \dots k_t}^{j_1 \dots j_s} \right) = \left( \nabla_l T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \right) \left( S_{k_1 \dots k_t}^{j_1 \dots j_s} \right) + \left( T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \right) \left( \nabla_l S_{k_1 \dots k_t}^{j_1 \dots j_s} \right)$$

Veamos que estas propiedades determinan la derivada covariante de las uno-formas (tensores de tipo  $(0,1)$ ) de la forma  $\omega = \omega_i dx^i$ . Nosotros sabemos derivar campos de vectores  $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , pero como uno es el dual del otro, sea  $f = \omega_i V^i$  (pasamos de un tensor  $(0,1)$  y un tensor  $(1,0)$  a otro  $(0,0)$ ). Si hacemos su derivada covariante con respecto a  $j$ :

$$\begin{aligned} \partial_j f &= (\nabla_j) f = (\partial_j \omega_i) V^i + \omega_i (\partial_j V^i); \\ \underbrace{\partial_j f}_{\text{lo conozco}} &= (\nabla_j) f = (\partial_j \omega_i) V^i + \underbrace{\omega_i (\nabla_j V^i)}_{\text{lo conozco}}; \\ (\nabla_j \omega_i) V^i &= \underbrace{\partial_j \omega_i V^i + \omega_i \partial_j V^i}_{\nabla_j f = \partial_j f} - \underbrace{\omega_i (\partial_j V^i + \Gamma_{jk}^i V^k)}_{\nabla_j V^i}; \end{aligned}$$

**Observación:** Ahora podemos renombrar  $\omega_i \Gamma_{jk}^i V^k$  a  $\omega_k \Gamma_{ji}^k V^i$  y esto me permite sacar factor común.

$$(\nabla_j \omega_i) V^i = (\partial_j \omega_i - \Gamma_{ji}^k \omega_k) V^i \longrightarrow \nabla_j \omega_i = \partial_j \omega_i - \Gamma_{ji}^k \omega_k$$

En general, si uno supiera derivar todos los tensores de tipo  $(r, s)$  con  $r + s \leq d$ , podría definir de forma única la derivada covariante de otro tensor tipo  $(r, s + 1)$  o  $(r + 1, s)$ , luego por inducción puedo derivar cualquiera del mismo modo que hemos visto (considerando  $\nabla(T_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_r} V^{j_{s+1}})$  que sí sabemos derivar y despejando).

**Proposición II.7. Regla para tensores en general** Cada superíndice se deriva con  $+\Gamma$  y cada subíndice se deriva con  $-\Gamma$

**Ejemplo:**

$$\nabla_j T^{ik} = \partial_j T^{ik} + \underbrace{\Gamma_{jl}^i T^{lk}}_{\text{derivamos "i" ahora "k"}} + \underbrace{\Gamma_{jl}^k T^{il}}_{\text{derivamos "i" ahora "k"}}$$

(el superíndice de la  $\Gamma$  es siempre lo que derivamos, luego se cuadran los índices restantes para mantener los sumatorios)

**Ejemplo:**

$$\nabla_j T_k^i = \partial_j T_k^i + \Gamma_{jl}^i T_k^l - \Gamma_{jk}^l T_l^i$$

(\*\*\*HASTA AQUI EL SEGUNDO PARCIAL\*\*\*)

En un ejercicio vimos que  $\nabla_j g_{ik} = 0$ . Esto permite subir y bajar índices con el tensor métrico y su inverso y eso conmuta con las derivadas covariantes

$$\nabla_j \omega_i = T_{ij}$$

entonces

$$g^{ik} \nabla_j \omega_i = g^{ik} T_{ij}$$

usando que  $\nabla_j g^{ik} = 0$  tenemos que

$$\nabla_j (g^{ik} \omega_i) = g^{ik} T_{ij} \rightarrow \nabla_j \omega^k = T_j^k$$

Recordemos el Tensor de Riemann (o de curvatura) (II.6):

$$\nabla_k \nabla_l V^i - \nabla_l \nabla_k V^i = R_{jkl}^i V^j$$

Como habíamos visto en un ejercicio:

$$T(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X$$

es f-lineal en cada argumento. Sea  $Y = \partial_k$  y  $Z = \partial_l$ , entonces

$$T(X, \partial_k, \partial_l) = \nabla_k \nabla_l X - \nabla_l \nabla_k X$$

ya que  $[\partial_k, \partial_l] = 0$ . Como es f-lineal en  $X$ , no pueden aparecer derivadas de sus componentes, que llamaremos  $R_{jkl}^i V^j$ . Entonces tenemos que

$$T : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \mapsto T_p(M)$$

y entonces las  $R_{jkl}^i$  se transforman como un tensor. Los cálculos para hallar las  $R_{jkl}^i$  son muy largos. Está claro que  $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$ .

Definimos, según lo anterior, el tensor de Riemann de tipo  $(0, 4)$ . Entonces:

$$R_{ijkl} = g_{ir} R_{jkl}^r$$

Con esta notación se cumple  $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij}$ .

Tensor de Ricci

**Definición II.7 Tensor de Ricci.** Se llama **Tensor de Ricci** al tensor de tipo  $(0, 2)$  cuyas componentes son

$$R_{jl} = R_{jkl}^k$$

Este tensor es simétrico  $R_{jl} = R_{lj}$ . El tensor de Ricci es mucho más "accesible" por cálculos:

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \left( \sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k \right) - \partial_i \partial_j \log \left( \sqrt{|g|} \right) - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l$$

siendo  $|g| = |\det(g_{ij})|$ .

Repasemos lo último que vimos sobre el tensor de curvatura:

Sea  $V$  un campo, entonces  $V \mapsto [\nabla_k, \nabla_l]V$  y habíamos visto que la coordenada  $i$ -ésima de esto era  $R_{jkl}^i V^j$ , que es lineal en  $V$  (esto no es nada evidente).  $R_{jkl}^i$  reciben el nombre de componentes del tensor de Riemann (II.6). Luego teníamos el tensor de Ricci, cuyas componentes eran  $R_{jl} = R_{jil}^i$ .

Curvatura escalar

**Definición II.8 Curvatura escalar.** Se define la **curvatura escalar** como

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Se puede probar que para superficies en  $S \subset \mathbb{R}^3$  se tiene  $R = 2$  (curvatura de Gauss). Tenemos aún unos cuantos cabos sueltos:

- ¿En qué sentido es un tensor de "curvatura"?
- ¿Hay algún análogo natural de las propiedades de curvatura de Gauss?

## Capítulo III

# Formas Diferenciales y Topología

### III.1. Formas Diferenciales

*K-forma diferencial*

**Definición III.1 K-forma diferencial.** Una  $k$ -forma diferencial en una variedad  $M$  es un tensor de tipo  $(0,k)$  de la forma

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

donde  $(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \det(\text{filas } i_1, \dots, i_k \text{ de la matriz de coordenadas de los vectores } (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k))$

**Observación:** Como notación usaremos  $\Omega^k(M)$  para denotar a los conjuntos de  $k$ -formas en  $M$ . Por tanto,  $\Omega^k(M)$  denota al conjunto de los tensores de tipo  $(0,k)$  antisimétricos en cada par de argumentos.

Está totalmente claro que si algún  $i_r$  coincide con algún  $i_s$  entonces  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0$

*Producto exterior*

**Definición III.2 Producto exterior.** Sean dos formas  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega^l(M)$  se define su producto exterior como  $\omega \wedge \eta$  y consiste en concatenar los  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  y multiplicar los coeficientes (propiedad distributiva). Entonces  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$

La motivación de introducir formas diferenciales es que se pueden integrar en cualquier carta sin introducir jacobianos.

*Derivada exterior*

**Definición III.3 Derivada exterior.** Sea  $\omega \in \Omega^k(M)$  con  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  se define su derivada exterior como

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^{k+1}(M)$$

**Ejemplo:** Sea  $\Omega^0(M) = \text{funciones en la variedad}$ . Sea  $M = \mathbb{R}^3$  con la carta trivial  $(x, y, z)$ . Sea  $f \in \Omega^0(M)$  con  $f = f(x, y, z)$ , entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

**Ejemplo:** Sea  $\omega \in \Omega^1(M)$  tal que  $\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ . Entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f_x}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_x}{\partial z} dz \wedge dx + \dots = \\ &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Sea  $\omega \in \Omega^2(M)$  tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial f_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

### Propiedades de la derivada exterior

- Está bien definida. No depende de la carta que se elija.
- Si  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ , entonces  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- $d(d\omega) = 0$
- Si  $f : M \rightarrow N$  entonces  $d(f^* \omega) = f^*(d\omega)$

**Ejemplo:** Sea  $\omega = dx \wedge dy$  en  $\mathbb{R}^2$  hallemos  $\omega$  en polares. Entonces tenemos  $\omega = d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) = r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta$

**Ejemplo:** Comprobemos que  $f(d\omega) = d(f^* \omega)$  para  $\omega = -y dx + x dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  siendo  $f$  el cambio a polares.

Entonces,  $f^*(d\omega) = f^*(-dy \wedge dx + dx \wedge dy) = f^*(2dx \wedge dy) = 2r dr \wedge d\theta$

Por otro lado  $d(f^* \omega) = d(-r \sin \theta d(r \cos \theta) + r \cos \theta d(r \sin \theta)) = d(r^2 d\theta) = 2r dr \wedge d\theta$

**Ejemplo:** Calcular  $i^*(dz)$  donde  $i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$\text{Tenemos que } \begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad y \text{ entonces } i^* dz = d \cos \theta = -\sin \theta d\theta$$

**Observación:**  $d(i^* dz) = 0$

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y digamos que tiene soporte compacto. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

tiene sentido. Pero no se pueden cambiar las coordenadas sin introducir algo más: el **jacobiano**. Es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Sea  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  y supongamos que tiene soporte compacto. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f$$

En otra carta que suponemos global (nos basta una):

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int f \circ g \det(g)$$

donde  $g$  es el cambio de coordenadas y  $\det(g)$  aparece por la tensorialidad del "determinante"  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ .

Si en  $\mathbb{R}^n$  nos limitamos a cartas con cambios de carta de determinante positivo, entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega$  está bien definida independientemente de las coordenadas (cartas). Cuando uno se limita a estos cambios, se dice que se ha especificado **una orientación**.

Sea  $M$  una variedad con borde que denotaremos  $\partial M$ . Si  $M$  es orientable con dimensión  $n$ , entonces  $\partial M$  es orientable con dimensión  $n - 1$ . La restricción de cartas induce una orientación.

**Proposición III.1. (Teorema de Stokes)** Sea  $M$  una variedad con borde orientable y dimensión  $n$ . Sea  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  (de soporte compacto). Entonces:

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega$$

donde  $i : \partial M \hookrightarrow M$  es la inclusión.

**Proposición III.2.** Sea  $M$  una variedad con borde y compacta. Supongamos que  $\omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$  con  $\int_{\partial M} \omega \neq 0$ . Entonces, no existe  $f : M \hookrightarrow \partial M$  tal que deje fijos los puntos del borde.

**Demostración.** Si existiera  $f \circ i|_{\partial M} = Id$  con  $i : \partial M \hookrightarrow M$  y tenemos  $0 \neq \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} Id^* \omega = \int_{\partial M} (f \circ i)^* \omega = \int_{\partial M} i^* f^* \omega$ . Aplicamos el Teorema de Stokes

$$\int_M d(f^* \omega) = \int_M f^* d\omega = 0$$

ya que  $d\omega$  tendría dimensión  $n$  en una variedad de dimensión  $n - 1$  □

**Proposición III.3. (Punto fijo de Brower)** Sea  $\overline{B_1}(0)$  la bola unidad cerrada, entonces  $f : \overline{B_1}(0) \hookrightarrow \overline{B_1}(0)$  tiene algún punto fijo.

**Demostración.** Digamos que existe  $g$  sin puntos fijos. Supongamos (en dimensión 2) un punto  $x$  en la bola unidad y el punto  $g(x)$  y consideramos la semirrecta que parte de  $g(x)$  y pasa por  $x$  y llamamos a esa semirrecta  $r$ . Entonces  $r \cap \mathbb{S}^{n-1}$  es un punto. Consideramos  $f : x \mapsto \text{punto } r \cap \mathbb{S}^{n-1}$ . Los puntos de la frontera quedan fijos con esta función y contradice el teorema 3. □



## Apéndice A

### Ejercicios

#### A.1. Hoja 1

**Ejercicio 1.1:** Responde brevemente a las siguientes preguntas:

- a) Si  $T = T(\bar{x}, \bar{y})$  y  $S = S(\bar{x}, \bar{y})$  son tensores, ¿lo es  $T(\bar{x}, \bar{y}) \cdot S(\bar{x}, \bar{y})$ ? ¿y  $T(\bar{x}, \bar{y}) + S(\bar{x}, \bar{y})$ ?
- b) ¿Es  $T(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}$  una aplicación bilineal?
- c) ¿Cuántas componentes tiene un tensor  $(r, s)$  con  $V = \mathbb{R}^m$ ?
- d) ¿Es un tensor la aplicación que dados dos vectores de  $\mathbb{R}^3$  les asigna la primera coordenada de su producto vectorial?
- e) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores de  $\mathbb{R}^2$  con la base canónica les asigna el área del paralelogramo que determinan?

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

APARTADO A)

Tenemos

$$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}; \quad S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}; \quad \text{ambos multilineales}$$

Es fácil observar que  $T \cdot S(\bar{x}, \bar{y}) = T(\bar{x}, \bar{y}) \cdot S(\bar{x}, \bar{y})$  no es multilineal, ya que

$$T \cdot S(\alpha \cdot \bar{x}, \bar{y}) = \alpha^2 \cdot T \cdot S(\bar{x}, \bar{y})$$

luego no es tensor.

Si ahora nos fijamos en  $T + S(\bar{x}, \bar{y}) = T(\bar{x}, \bar{y}) + S(\bar{x}, \bar{y})$  es inmediato comprobar que es un tensor 2 veces covariante:

$$T + S(\alpha \cdot \bar{x}, \bar{y}) = T(\alpha \bar{x}, \bar{y}) + S(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha \cdot (T + S(\bar{x}, \bar{y}))$$

$$T + S(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = T(\bar{x}_1, \bar{y}) + S(\bar{x}_1, \bar{y}) + T(\bar{x}_2, \bar{y}) + S(\bar{x}_2, \bar{y}) = (T + S(\bar{x}_1, \bar{y})) + (T + S(\bar{x}_2, \bar{y}))$$

APARTADO B)

Es inmediato comprobar que no es bilineal multiplicando una variable por un escalar:

$$T(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \bar{y} \neq \alpha(\bar{x} + \bar{y})$$

APARTADO C)

$$T : \underbrace{(\mathbb{R}^m)^* \times \cdots \times (\mathbb{R}^m)^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{s \text{ veces}} \mapsto \mathbb{R}$$

luego habrá  $m^{r+s}$  componentes.

APARTADO D)

Hay dos formas, una es considerar:

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2$$

y comprobar que efectivamente se cumplen las condiciones de multilinealidad.

La segunda es considerar:

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

y como vimos que el determinante es multilineal, pues ya está demostrado porque es un determinante.

APARTADO E)

$$T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$T(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto A = \text{área}$$

El área siempre es  $\geq 0$ , luego si multiplico por  $\lambda = -1$  tenemos  $T(\lambda \bar{x}, \bar{y}) \neq \lambda T(\bar{x}, \bar{y})$

**Ejercicio 1.2:** Demuestra que, fijada una base, todo tensor dos veces covariante es de la forma  $T(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T A \bar{y}$  con  $A$  una matriz cuadrada.

Tenemos una base cualquiera, luego si llamamos  $\bar{e}_i$  a los vectores de dicha base tenemos que  $\bar{x}, \bar{y}$  son de la forma  $\begin{cases} \bar{x} = x^i \bar{e}_i \\ \bar{y} = y^j \bar{e}_j \end{cases}$  y por tanto tenemos:

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = x^i y^j \underbrace{T(\bar{e}_i, \bar{e}_j)}_{a_{ij}} = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \quad \square$$

**Ejercicio 1.3:** Halla cuántas componentes nulas y cuántas componentes no nulas tiene el tensor determinante en  $\mathbb{R}^n$ . Estudia cuántas son positivas.

*Hecho por Jose, se aceptan correcciones*

Sea el tensor  $n$  veces covariante en  $\mathbb{R}^n$  y la base canónica  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ :

$$D : \underbrace{(\mathbb{R}^n) \times \dots \times (\mathbb{R}^n)}_{n \text{ veces}} \mapsto \mathbb{R}$$

$$D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mapsto \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \end{vmatrix}$$

El tensor tienen  $n^n$  componentes:

$$D_{11\dots 1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

En cuanto el determinante contenga a dos  $\bar{e}_i$  que tengan la misma  $i$  ya da 0 (por ser determinante de elementos linealmente dependientes). Luego para que no sea nulo ha de tener todas los índices distintos. Esto nos dice que el número de componentes no nulas son las permutaciones de  $n$  elementos ( $n!$ ), y las nulas serían entonces  $n^n - n!$ .

Ahora, de las que no son nulas vamos a ver cuales son positivas. Probando descubrimos que con esta base hay dos valores posibles del determinante que son 1 y  $-1$ . Las componentes positivas son aquellas que valen 1 y esto ocurre cuando hay un número par de  $\bar{e}_i$  cambiadas de posición (recordemos que todas las  $i$  son ahora distintas porque estamos en el caso no nulo).

La conclusión es que la cantidad de las que valen 1 es la cantidad de permutaciones pares de  $n$  elementos, que es  $\frac{n!}{2}$ .

**Ejercicio 1.4:**

**a)** Si multiplicamos tensorialmente unos cuantos elementos de  $\mathcal{B}$  y otros de  $\mathcal{B}^*$ , halla cuántas componentes no nulas tiene el tensor resultante. Explica por qué todo tensor se puede escribir como combinación lineal de estos productos tensoriales y

**b)** hazlo para el tensor que corresponde a la rotación de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  escogiendo  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2\}$  siendo los  $\bar{e}_i$  los vectores canónicos habituales.

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

APARTADO A)

Sean  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  y  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \dots, \tilde{\phi}^n\}$  donde los  $\bar{e}_i$  son tensores de tipo (1,0) y los  $\tilde{\phi}^i$  son tensores de tipo (0,1). Tenemos. por la propiedad de la base dual, que

$$\bar{e}_i(\tilde{\phi}^j) = \tilde{\phi}^j(\bar{e}_i) = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Si cogemos ahora  $m$  de esos tensores (1,0) y  $k$  de esos tensores (0,1) y los multiplicamos tensorialmente, por definición nos queda un tensor de tipo  $(m,k)$  cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_m} \otimes \tilde{\phi}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\phi}^{j_k}(\phi^{s_1}, \dots, \phi^{s_m}, \bar{e}_{r_1}, \dots, \bar{e}_{r_k}) &= \bar{e}_{i_1}(\phi^{s_1}) \dots \bar{e}_{i_m}(\phi^{s_m}) \cdot \tilde{\phi}^{j_1}(\bar{e}_{r_1}) \dots \tilde{\phi}^{j_k}(\bar{e}_{r_k}) = \\ &= \delta_{i_1}^{s_1} \dots \delta_{i_m}^{s_m} \cdot \delta_{j_1}^{r_1} \dots \delta_{j_k}^{r_k} = \begin{cases} 1 & \text{si los } \delta_B^A \text{ valen todos 1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

La descomposición es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) &= T(x_{i_1}^1 \phi^{i_1}, \dots, x_{i_m}^m \phi^{i_m}, \bar{y}_1^{j_1} \bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{y}_k^{j_k} \bar{e}_{j_k}) = x_{i_1}^1 \dots x_{i_m}^m y_1^{j_1} \dots y_k^{j_k}; \\ T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_m} &= x_{h_1}^1 \delta_{i_1}^{h_1} \dots x_{h_m}^m \delta_{i_m}^{h_m} y_1^{h_1} \delta_{j_1}^{h_1} \dots y_k^{h_k} \delta_{j_k}^{h_k}; \end{aligned}$$

APARTADO B)

Tenemos una aplicación lineal, luego se corresponde unívocamente con un tensor  $G$  de tipo (1,1), y siendo  $f(\bar{x})$  la aplicación lineal con matriz  $A$  en dicha base aplicada a  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} G: (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ G(\tilde{\phi}, \bar{x}) &\mapsto \tilde{\phi}(f(\bar{x})) = \tilde{\phi}(A(\bar{x})) \end{aligned}$$

Tenemos la base  $\mathcal{B}_R = \{\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , busquemos su base dual y tenemos

$$\mathcal{B}_R^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora, aplicando a los elementos de la base por el giro sabemos que  $A \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$  y que  $A \cdot \bar{e}_2 = -\bar{e}_1$  y calculamos las componentes:

$$\begin{cases} T(\tilde{\phi}^1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \tilde{\phi}^1(A \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)) = -1 \\ T(\tilde{\phi}^1, \bar{e}_2) = -1 \\ T(\tilde{\phi}^2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 2 \\ T(\tilde{\phi}^2, \bar{e}_2) = 1 \end{cases}$$

Ahora sabemos que como es un tensor tipo  $(1,1)$  se puede escribir como producto tensorial de un tensor  $(1,0)$  (fijando un vector  $\bar{v}_1$ ) y otro  $(0,1)$  (fijando un elemento del dual  $\tilde{\phi}^1$ ):

$$\begin{aligned} T : V^* &\mapsto \mathbb{R} & S : V &\mapsto \mathbb{R} \\ T(\tilde{\phi}) &\mapsto \tilde{\phi}(\bar{v}_1) & S(\bar{v}) &\mapsto \tilde{\phi}^1(\bar{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \otimes S : V^* \times V &\mapsto \mathbb{R} \\ T \otimes S(\tilde{\phi}, \bar{v}) &\mapsto \tilde{\phi}(\bar{v}_1) \cdot \tilde{\phi}^1(\bar{v}) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.5:** Para  $V = \mathbb{R}^3$  consideremos un tensor de tipo  $(0,3)$ , otro de tipo  $(1,2)$  y otro de tipo  $(2,1)$ , cuyas componentes, digamos  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon_{jk}^i$  y  $\epsilon_k^{ij}$  en la base canónica son: 0 si  $i, j, k$  no es una reordenación de  $1, 2, 3$ ; 1 si  $i, j, k$  es una permutación par de  $1, 2, 3$  y -1 si  $i, j, k$  es una permutación impar de  $1, 2, 3$ . Dados  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$  y  $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$ , explica qué objetos matemáticos bien reconocidos representan las siguientes cantidades:  $\epsilon_k^{ij} \frac{\partial F^k}{\partial x^j}$ ,  $\epsilon_{jk}^i v^j w^k$  y  $\epsilon_{ijk} u^i v^j w^k$

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

TIPO	i	j	k	VALOR
par	1	2	3	1
impar	1	3	2	-1
par	2	3	1	1
impar	2	1	3	-1
par	3	2	1	1
impar	3	1	2	-1

En primer lugar vemos que los tensores tienen  $3^3 = 27$  componentes, pero de ellas solo tenemos que no son nulas las reordenaciones de  $(1,2,3)$ , que son  $3! = 6$  componentes no nulas con valores dependiendo de la permutación como se ve en la tabla. Conociendo ahora los valores de cada componente y recordando el criterio de Einstein vamos a ver caso a caso de qué pueden tratar esas expresiones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \epsilon_k^{ij} \frac{\partial F^k}{\partial x^j} &= \left( \frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \overline{\text{rot}}(\bar{F}) \\ \blacksquare \epsilon_{jk}^i v^j w^k &= (v^2 w^3 - v^3 w^2, v^3 w^1 - v^1 w^3, v^1 w^2 - v^2 w^1) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \bar{v} \times \bar{w} \\ \blacksquare \epsilon_{ijk} u^i v^j w^k &= u^1(v^2 w^3 - v^3 w^2) - u^2(v^1 w^3 - v^3 w^1) + u^3(v^1 w^2 - v^2 w^1) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.6:** Demuestra que el "tensor identidad"  $T_{id} : (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  que tiene componentes  $\delta_j^i$  en la base canónica conserva las componentes en cualquier otra base.

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

Estamos en  $(\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2$ . Tenemos las bases canónicas  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2\}$  y el tensor definido como:

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ T(\tilde{\phi}, \bar{x}) &\mapsto \tilde{\phi}f(\bar{x}) = \tilde{\phi}A\bar{x} \end{aligned}$$

donde en este caso, como  $f$  es la identidad, tenemos que  $A$  es la matriz identidad y nos queda:

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ T(\tilde{\phi}, \bar{x}) &\mapsto \tilde{\phi}\bar{x} \end{aligned}$$

Es claro comprobar que las componentes de  $T$  se corresponden con las  $\delta_j^i$  (recordar la propiedad de la base dual). Si cambiamos de bases, digamos a otras  $\tilde{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}^* = \{\tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2\}$ , estas siguen cumpliendo la propiedad  $v_j\psi^i = \delta_j^i$ , luego las componentes del "nuevo tensor"  $\tilde{T}$  se mantienen igual debido a que es el tensor identidad:

$$\tilde{T}_j^i = \tilde{T}(\tilde{\psi}^i, \bar{v}_j) = \tilde{\psi}^i\bar{v}_j = \delta_j^i = T(\tilde{\phi}^i, \bar{e}_j) = T_j^i$$

**Ejercicio 1.7:** El "tensor de Minkowski"  $M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  tiene componentes  $-M_{11} = M_{22} = 1; M_{12} = M_{21} = 0$  en la base canónica. Encuentra un cambio de base no trivial (que no consista en cambios de signo) que deje invariantes todas las componentes.

Sabemos por el ejercicio 2 que todo tensor dos veces covariante puede escribirse como:

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T A \bar{y}$$

Ahora hallamos la matriz  $A$  que se corresponde con este tensor.

$$\begin{cases} T_{11} = \bar{e}_1^T A \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a = -1 \\ T_{22} = \bar{e}_2^T A \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d = 1; \\ b = c = 0; \end{cases}$$

Buscamos ahora  $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$  tales que  $\mathcal{B} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\mu}\}$  es una base y se conservan las  $M_{ij}$ , luego tenemos el sistema:

$$\begin{cases} M(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -1 \longrightarrow -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -1 \\ M(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}) = 1 \longrightarrow -\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1 \\ M(\tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) = 0 \longrightarrow -\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 = 0 \\ M(\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}) = 0 \longrightarrow -\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

y ya solo hay que coger una solución (no hay una única), como por ejemplo  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Ejercicio 1.9:** El espín de un electrón es una especie de imán asociado a él y se representa con un vector unitario  $a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 \in \mathbb{C}^2$  donde  $|a|^2$  y  $|b|^2$  indican las probabilidades de que al hacer un experimento notemos el polo norte arriba o abajo, respectivamente. Para dos electrones se representa como un tensor  $(2,0)$  complejo  $a^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  donde  $|a^{ij}|^2$  son las probabilidades de cada medición (por ejemplo  $|a^{12}|^2$  es arriba-abajo). Si  $a^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \bar{v} \otimes \bar{w}$  los electrones son de alguna manera independientes y se dice que no están entrelazados. Prueba que esto ocurre si y sólo si  $\det(a^{ij}) \neq 0$ . Nota: Para tres electrones el tensor es tipo  $(3,0)$  y no existe una caracterización sencilla.

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

El espín es un vector  $\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$  para  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ . Queremos demostrar:

$$\text{Independencia} \iff \det(a^{ij}) \neq 0$$

( $\rightarrow$ ) Cuando  $T$  es un tensor de tipo  $(0,2)$  es igual a  $\bar{v} \otimes \bar{w}$  para dos  $\bar{v} = b^i\bar{e}_i, \bar{w} = c^i\bar{e}_i$  de tipo  $(1,0)$ . Entonces tenemos  $\bar{v} \otimes \bar{w} = b^i c^i \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$

$$\begin{vmatrix} b^1 c^1 & b^1 c^2 \\ b^2 c^1 & b^2 c^2 \end{vmatrix} = b^1 b^2 c^1 c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

( $\leftarrow$ ) Partimos de las hipótesis  $T = a^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ ;  $\begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ;  $\sum_{i,j=1}^{(2,2)} |a^{ij}|^2 = 1$ , luego

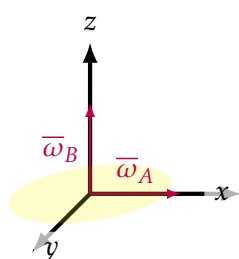
$$\begin{cases} a^{12} = \lambda a^{11}; \\ a^{22} = \lambda a^{21}; \\ \lambda = \frac{a^{12}}{a^{11}} \end{cases} \quad \text{Ahora vamos a escribir el tensor como un producto tensorial:}$$

$$T = a^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = a^{11}\bar{e}_1 \otimes (\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2) + a^{21}(\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2) \otimes (\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2) = \underbrace{(a^{11}\bar{e}_1 + a^{21}\bar{e}_2)}_{\bar{v}} \otimes \underbrace{(\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2)}_{\bar{w}} \quad \square$$

Queda para el lector comprobar que al normalizar  $\bar{v}$ , se normaliza automáticamente  $\bar{w}$ , aunque no se pide.

**Ejercicio 1.10:** Dado un sólido  $V \subset \mathbb{R}^3$  de densidad  $\rho$  se define su tensor de inercia  $I$  como un tensor  $(0, 2)$  cuyas componentes son  $I_{ij} = \rho \int_V (\delta_{ij}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i x_j)$  donde  $x_1, x_2, x_3$  son las variables  $x, y, z$ . En física, se prueba que el trabajo que cuesta girar  $V$  alrededor del origen es  $\frac{1}{2}I(\bar{\omega}, \bar{\omega})$ , con  $\bar{\omega}$  la velocidad angular: el vector que tiene como dirección la del eje de giro y como longitud el número de radianes por segundo. Considera el disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  con un grosor muy pequeño, ¿qué es más fácil, girarlo por el eje X o girarlo por el eje Z?

Hecho por Jose, se aceptan correcciones



Fijando nuestros objetivos, queremos hallar  $\frac{1}{2}I(\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_A)$ ,  $\frac{1}{2}I(\bar{\omega}_B, \bar{\omega}_B)$ , que son los trabajos respectivos que cuesta girar  $V$  con respecto al eje X y con respecto al eje Z, y el que salga menor será el más "fácil". El valor de la velocidad angular nos da igual, es una constante que multiplica al vector y lo que nos interesa es su dirección. Si llamamos a esta constante  $\omega$  (escalar, sin barra), tenemos:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_A = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \omega \bar{u}_x \\ \bar{\omega}_B = \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \omega \bar{u}_z \end{cases}$$

Como tenemos un tensor  $(0, 2)$ , sabemos que se aplica a los vectores de esta forma:

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ I(\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \bar{x}^T M_I \bar{y} \end{aligned}$$

donde  $M_I$  es la matriz de componentes del tensor, cuya expresión se nos indica en el enunciado. Si seguimos el convenio de Einstein, escribimos la matriz de la siguiente manera:

$$M_I = (I_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho \int_V (y^2 + z^2) & \rho \int_V -yx & \rho \int_V -xz \\ \rho \int_V -xy & \rho \int_V (x^2 + z^2) & \rho \int_V -yz \\ \rho \int_V -xz & \rho \int_V -yz & \rho \int_V (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Ya tenemos todo lo que necesitamos así que procedemos (las constantes como  $\frac{1}{2}, \rho, \omega^2 \dots$  se irán acumulando en el producto de constantes  $K$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I(\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_A) &= K \cdot I(\bar{u}_x, \bar{u}_x) = K \cdot \bar{u}_x^T M_I \bar{u}_x = K \int_V (y^2 + z^2) dx dy dz \xrightarrow{z=0 \text{ en } V} \frac{K\pi}{4} \\ \frac{1}{2}I(\bar{\omega}_B, \bar{\omega}_B) &= K \cdot I(\bar{u}_z, \bar{u}_z) = K \cdot \bar{u}_z^T M_I \bar{u}_z = K \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{K\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego concluyendo, es más fácil girar respecto al eje X, y esto tiene sentido si nos fijamos, ya que si giramos con respecto al eje Z sólo queda una partícula del sólido sin trasladarse con el giro (la partícula donde intersecan el eje y el disco, que es el origen), mientras que de la otra manera nos evitamos trasladar todo un segmento de partículas (las que se corresponden con la intersección del disco con el eje X), luego nos costará menos este último giro.



**Ejercicio 1.14:** Consideramos en  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares.

a) Expresa  $\frac{\partial}{\partial x}$  y  $\frac{\partial}{\partial y}$  en términos de  $\frac{\partial}{\partial r}$  y  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

b) Deduce de las relaciones  $dx(\frac{\partial}{\partial x}) = 1$ ,  $dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0$  fórmulas para  $dx(\frac{\partial}{\partial r})$  y  $dx(\frac{\partial}{\partial \theta})$

c) y de ahí una expresión para  $dx$  en términos de  $dr$ ,  $d\theta$ .

d) ¿Se te ocurre como podías haber llegado al resultado final sin hacer apenas cálculos?

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

En primer lugar escribimos las coordenadas que tenemos:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \mapsto \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

APARTADO A)

Vamos a escribir  $\frac{\partial}{\partial y}$  en función de los términos que se pide mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

Análogamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

APARTADO B)

Partiendo de la definición de base dual (esas son las relaciones de las que habla el enunciado) tenemos:

$$\begin{cases} dx(\frac{\partial}{\partial x}) = 1 \\ dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} 1 = \cos(\theta) dx(\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\sin(\theta)}{r} dx(\frac{\partial}{\partial \theta}) \\ 0 = \sin(\theta) dx(\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\cos(\theta)}{r} dx(\frac{\partial}{\partial \theta}) \end{cases} \mapsto \begin{cases} dx(\frac{\partial}{\partial r}) = \cos(\theta) \\ dx(\frac{\partial}{\partial \theta}) = -r \sin(\theta) \end{cases}$$

APARTADO C)

Por el apartado anterior y por la dualidad  $\begin{cases} dr(\frac{\partial}{\partial r}) = 1 \\ dr(\frac{\partial}{\partial \theta}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$  tenemos:

$$dx = A dr + B d\theta = \dots = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta$$

APARTADO D)

Si hubiésemos considerado la aplicación tangente de la coordenada x:

$$x = r \cos(\theta) \xrightarrow{df} dx = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta$$

## A.2. Hoja 2

**Ejercicio 2.8:** Al estudiar la gravitación Newtoniana el lagrangiano es  $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + GMm(x^2 + y^2)^{-1/2}$ . Pásalo a polares y después escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1) correspondientes para obtener que  $r^2\dot{\theta}$  es constante. Explica por qué se deduce de ello la segunda ley de Kepler: el vector  $(x(t), y(t))$  barre áreas iguales en tiempos iguales. Indicación: Recuerda o busca la fórmula para el área dentro de una curva definida en polares.

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

Pasar a polares es tan sencillo como sustituir en el Lagrangiano las igualdades que ya conocemos:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta); \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta)\dot{r} - r\sin(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = \sin(\theta)\dot{r} + r\cos(\theta)\dot{\theta}; \end{cases}$$

obteniendo ahora el Lagrangiano

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$$

Aplicando (II.1) con respecto a la coordenada  $\theta$  obtenemos

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

luego  $r^2\dot{\theta}$  tiene que ser constante.

Ahora recordando esta proposición se obtiene el último resultado:

**Proposición A.1.** Sea  $r = r(\theta)$  la ecuación en coordenadas polares de una curva y supongamos que  $r(\theta)$  es continua en el intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$ . Se define el área de la región limitada por la curva y las semirrectas de ecuaciones  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$  como la integral

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\theta))^2 d\theta$$

**Ejercicio 2.9:** Prueba que la métrica usual de  $\mathbb{S}^2$  en esféricas es  $d\theta \otimes d\theta + (\sin^2 \theta) d\varphi \otimes d\varphi$ . Calcula también sus componentes cuando se emplea como carta la proyección estereográfica.

Hecho por Jose, se aceptan correcciones

Análogamente a como se ha procedido en el ejercicio anterior, tenemos que la métrica usual es  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  y sabemos que:

$$\begin{cases} x = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = \cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - \sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi \\ dy = \cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + \sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \\ dz = -\sin(\theta)d\theta; \end{cases}$$

Sustituimos en la métrica usual y obtenemos

$$G = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$$

**Ejercicio 2.10:** Demuestra que  $r = (\cos \theta + \sen \theta)^{-1}$  con  $\theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{2}-t}$  define una geodésica en  $\mathbb{R}^2$  con la métrica en polares  $dr^2 + r^2 d\theta^2$ . Indicación: No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas, la métrica es una bien conocida de  $\mathbb{R}^2$ .

*Hecho por Fernando Chamizo, ¿se aceptan correcciones?*

Se tiene  $r \cos \theta + r \sen \theta = 1$  y  $\tan \theta = t/(\sqrt{2}-t)$  que en cartesianas se escribe como  $x + y = 1$ ,  $y/x = t/(\sqrt{2}-t)$ . Despejando,  $(x(t), y(t)) = (1 - t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})$  que es una recta en  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por longitud de arco, así pues una geodésica con la métrica usual y, como vimos en clase,  $dr^2 + r^2 d\theta^2$  es la métrica usual en la carta en polares.

**Ejercicio 2.11:** Con lo que has aprendido este curso, explica por qué la generatriz de una superficie de revolución (parametrizada por longitud de arco) es una geodésica.

*Hecho en clase, se aceptan correcciones*

Sea la generatriz  $\sigma(u) = (r(u), 0, h(u))$ , por tanto la superficie es:

$$\Phi(u, v) = (r(u) \cos(v), r(u) \sen(v), h(u))$$

Viendo los coeficientes de la métrica con la primera forma fundamental llegamos a que:

$$\begin{cases} g_{11} = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = r'(u)^2 + h'(u)^2 = 1; & (\|\sigma(u)\| = 1 \text{ por ser parametrización por longitud de arco}) \\ g_{12} = g_{21} = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0; \\ g_{22} = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = (r(u))^2; \end{cases}$$

Elijiendo como carta  $\phi = \Phi^{-1}(x^1, x^2)$  se tiene para cada generatriz que  $x^2 = cte$ . Por tanto, mirando las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1) tenemos el lagrangiano  $L = ((x^1)')^2 + r^2(x^1)((x^2)')^2$  y que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (2(x^1)') = 2r(x^1)r'(x^1)((x^2)')^2 \\ \frac{d}{dt} (r(x^1)2(x^2)') = 0 \end{cases}$$

Aplicando  $x^2 = cte$  tenemos que  $(x^1)' = cte \rightarrow x^1 = Ct + D$ . La D la podemos tomar como 0 porque nos da igual en que punto comenzamos, y como está parametrizada por longitud de arco tomamos que  $C = 1 \rightarrow x^1 = t \rightarrow \phi = (t, 0) \rightarrow \Phi(t, 0) = (r(t), 0, h(t))$ , que es la generatriz.  $\square$

**Ejercicio 2.12:** Calcula los símbolos de Christoffel para la métrica  $dr^2 + 4\senh^2 r d\theta^2$  y halla alguna de las geodésicas.

*Hecho por Jose y en clase, se aceptan correcciones*

Utilizando la definición de geodésica de estas notas tenemos el Lagrangiano  $L = \dot{r}^2 + 4\senh^2(r)\dot{\theta}^2$ . Luego tenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1):

$$\begin{cases} \ddot{r} - 2\senh(2r)\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} + \frac{\senh(2r)}{\senh^2(r)}\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \xrightarrow{\text{por (II.3) equivalen a}} \ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -2\sinh(2r) \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\sinh(2r)}{\sinh^2(r)} = \frac{2\cosh(r)}{\sinh(r)} \end{cases}$$

Usando una de las EDO tenemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{2\cosh(r)}{\sinh(r)} \dot{r} \dot{\theta} = 0.$$

Ahora si elegimos  $\theta(t) = cte \rightarrow r(t) + At = B$  y este caso cuando podemos resolver con  $\dot{\theta} = 0$  recibe el nombre de métrica semigeodésica

**Ejercicio 2.13:** *Calcula los símbolos de Christoffel y las fórmulas para las geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  cuando se le dota con la métrica  $du^2 + 4vdudv + 8v^2dv^2$ .*

*Hecho en clase, se aceptan correcciones*

La métrica que se considera es  $du^2 + 4vdvdv + 8v^2dv^2$ . Tenemos entonces que el Lagrangiano es  $L = \dot{u}^2 + 4v\dot{u}\dot{v} + 8v^2\dot{v}^2$  y por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= 2\dot{u} + 4v\dot{v} \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= 0 \\ 0 &= 2\ddot{u} + 4\dot{v}^2 + 4v\ddot{v} \\ &\vdots \\ 0 &= \ddot{u} + 4\dot{v}^2 + 4v\ddot{v} \end{aligned}$$

No se leen directamente los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ . Para poder verlos tenemos que despejar en una de ellas  $\ddot{v}$  o  $\ddot{u}$  y despejar en la otra. En este caso, nuestras ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes al sistema:

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ \ddot{v} + \frac{\dot{v}^2}{v} = 0 \end{cases}$$

Dividimos por  $\dot{v}$  para resolver la segunda ecuación y nos queda

$$\frac{\ddot{v}}{\dot{v}} + \frac{\dot{v}}{v} = 0$$

Integramos y tenemos que

$$\begin{cases} \dot{v}v = cte \rightarrow v^2 = At + B \rightarrow v = \pm\sqrt{At + B} \\ u = Ct + D \end{cases}$$

**Ejercicio 2.14:** *En  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  tomamos la métrica  $(x+y)dx^2 + (x+y)dy^2$ :*

**a)** *Demuestra que a lo largo de cualquier geodésica,  $(\dot{x} - \dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  es constante.*

**b)** *Prueba que es posible parametrizar la (semi)recta  $\{y = x\}$  de forma que sea una geodésica y que esto es imposible para  $\{y = 2x\}$*

Hecho en clase, se aceptan correcciones

APARTADO A)

Queremos ver que  $\frac{\dot{x}-\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$  es constante a lo largo de las geodésicas. Por ser longitud de arco tenemos que  $(x+y)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = cte$  y ahora despejando  $(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$  y sustituyendo en la primera expresión tenemos que  $(\dot{x}-\dot{y})(x+y) = cte$ . Si tomamos derivadas en ambos extremos llegamos a que  $(\ddot{x}-\ddot{y})(x+y) + (\dot{x}-\dot{y})(\dot{x}+\dot{y}) = 0 \rightarrow -(\ddot{x}-\ddot{y}) = \frac{\dot{x}^2-\dot{y}^2}{x+y} (*)$

Ahora, por las ecuaciones de Euler-Lagrange (II.1) tenemos que:

$$2\ddot{x}(x+y) + 2\dot{x} + 2\dot{x}(\dot{x}+\dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

y por simetría sería igual en  $y$ . Por tanto:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2}{2(x+y)} = 0$$

y los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{cases} \Gamma^x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2(x+y)} \\ \Gamma^y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2(x+y)} \end{cases}$$

Por último, haciendo la operación (\*) llegamos a lo buscado.

APARTADO B)

Sea  $\{y = x\}$  por tanto, necesitamos que  $(x+y)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = 1$ . Parametrizamos de tal modo que  $\phi(t) = (x(t), x(t))$  y la métrica nos queda  $4x\dot{x}^2 = 1$ . Resolvemos la EDO y queda

$$4x\dot{x}^2 = dt^2 \rightarrow 2\sqrt{x}\dot{x} = dt \rightarrow 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = t \rightarrow x(t) = \left(\frac{3t}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange calculadas antes vemos que efectivamente es una geodésica.  $\square$

**Ejercicio 2.16:** Se llama **semiplano de Poincaré** a  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  dotado de la métrica  $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$  donde  $(x, y)$  es la carta dada por la parte real y la parte imaginaria de  $z$ .

a) Calcula los símbolos de Christoffel.

b) Prueba que las rectas verticales  $x = x_0$  convenientemente parametrizadas son geodésicas.

c) Demuestra que la transformación  $z \mapsto -1/z$  deja invariante la métrica.

Hecho en clase, se aceptan correcciones

APARTADO A)

APARTADO B)

APARTADO C)

Vamos a ver dos formas de hacer el ejercicio. La primera:

$$\frac{-1}{z} = \frac{-1}{x+iy} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{iy}{x^2+y^2}$$

y la nueva métrica sería:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right)^{-2} \left( \left( \frac{(x^2-y^2)dx - 2xydy}{(x^2+y^2)^2} \right)^2 + \text{lo mismo cambiando } x \text{ por } y \right) = \\ & = y^{-2}(x^2+y^2)^{-2} \left( [(x^2-y^2) + 4y^2x^2]dx^2 + [(x^2-y^2)^2 + 4y^2x^2]dy^2 \right) = y^{-2}(dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

□

La segunda:

Sabiendo que  $Im\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{Im(z)}{|z|^2}$ ; reescribiendo la métrica con notación compleja tenemos:

$$y^{-2}(dx^2 + dy^2) = (Im(z))^{-2} dz d\bar{z}$$

Haciendo la transformación y usando lo primero que hemos apuntado llegamos a que:

$$(Im(\frac{-1}{z}))^{-2} d\left(\frac{-1}{z}\right) d\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right) = \left(\frac{Im(z)}{|z|^2}\right)^{-2} \frac{dz}{z^2} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}$$

□

### A.3. Hoja 3

En esta hoja la conexión es siempre la de Levi-Civita y se abrevia  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  por  $\partial_i$  y  $\nabla_{\partial_j}$  por  $\nabla_j$ .

**Ejercicio 3.1:** Recuerda (o aprende) que el corchete de Lie de dos campos de vectores  $X = X^i \partial_i$  e  $Y = Y^j \partial_j$ , es el campo vectores  $[X, Y] = X(Y^j) \partial_j - Y(X^i) \partial_i$ . Muestra con un cálculo que  $[X, Y] = X^i \nabla_i Y - Y^j \nabla_j X$ .

Hecho en clase, se aceptan correcciones

$$[X, Y] = X^i \nabla_i Y - Y^j \nabla_j X = X^i (\partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^j Y^k) \partial_j - Y^j (\partial_j X^i + \Gamma_{jk}^i X^k) \partial_i = X^i \partial_i Y^j \partial_j - Y^j \partial_j X^i \partial_i$$

**Ejercicio 3.3:** Halla todas las métricas en  $\mathbb{R}$  para las que  $\Gamma_{11}^1 = 1$  y caracteriza todos los campos de vectores y todas las 1-formas con derivada covariante nula.

Hecho en clase, se aceptan correcciones

Sea  $G = a(x)dx^2 \rightarrow L = a(x)\dot{x}^2 \rightarrow 2\ddot{x}a + 2\dot{x}^2\dot{a} = \dot{a}\dot{x}^2 \rightarrow \ddot{x} + \frac{\dot{a}}{2a}\dot{x}^2 = 0 \rightarrow \Gamma_{11}^1 = \frac{\dot{a}}{2a} = 1 \rightarrow a(x) = Ke^{2x}$ . Un campo tiene la forma  $V = V(x)\partial_x$  y las 1-formas  $w = f(x)dx$ . Entonces, teniendo en cuenta que solo hay una dirección:

$$\nabla_1 V^1 = \partial_1 V^1 + \Gamma_{11}^1 V^1, \nabla_1 \omega_1 = \partial_1 \omega_1 - \Gamma_{11}^1 \omega_1 \rightarrow$$

$$\nabla_1 V^1 = V' + V = 0 \longrightarrow V(x) = Ke^{-x}$$

$$\nabla_1 \omega_1 = f' - f = 0 \longrightarrow f(x) = Ke^x$$

**Ejercicio 3.5:** Consideremos el semiplano de Poincaré con su métrica  $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . Por un ejercicio anterior, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -y^{-1}$ . Calcula la derivada covariante de  $V = f(y)\partial_1$  y halla  $f \neq 0$  de modo que sea un transporte paralelo cuando se restringe a la curva  $c(t) = (0, 1+t)$ . ¿Sabrías deducir que  $h(x, y)(\partial_1 + y\partial_2)$  con  $h \neq 0$  no es un transporte paralelo a lo largo de  $c$  sin repetir las cuentas? **Indicación:** Recuerda que  $G(V, V)$  y  $G(V, W)$  son constantes por transportes paralelos.

Hecho en clase, se aceptan correcciones

Tenemos la métrica  $G = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$  con  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -y^{-1}$ . Sea  $V = f(y)\partial_1$ . Entonces:

$$\nabla_k V^1 = \partial_k V^1 + \Gamma_{kl}^1 V^l \longrightarrow$$

Para  $k = 1$ :

$$\nabla_1 V^1 = \partial_1 f(y) + \Gamma_{11}^1 f(y) = 0$$

Para  $k = 2$ :

$$\nabla_2 V^1 = \partial_2 f(y) + \Gamma_{21}^1 f(y) = f' - \frac{f}{y}$$

Veamos ahora  $\nabla_k V^2$ , entonces si  $k = 1$ :

$$\nabla_1 V^2 = 0 + \Gamma_{11}^2 V^1 = \frac{f}{y}$$

Para  $k = 2$ :

$$\nabla_2 V^2 = 0 + \Gamma_{22}^2 V^2 = 0$$

Por tanto,  $\frac{dV}{dt} = \nabla_k V \frac{dx^k}{dt} = \nabla_2 V = (f' - y^{-1}f) = 0$ . Si ahora resolvemos la EDO tenemos  $f(y) = ky$ . Si  $W = h(\partial_1 + y\partial_2)$  fuera un transporte paralelo, entonces  $G(W, W) = cte$ . Si  $V = ky\partial_1$ , como sabemos que es transporte paralelo tenemos que  $G(V, W) = cte$ . Entonces:

$$cte = G(W, W) = h^2 y^{-2} (1 + y^2) = h^2 (t+1)^{-2} (1 + (t+1)^2)$$

**Ejercicio 3.6:** Comprueba que si  $V$  y  $W$  son campos de vectores  $\nabla(V \otimes W) = (\nabla V) \otimes W + V \otimes \nabla W$ .

Hecho por Fernando

Las componentes de  $T = V \otimes W$  son  $T^{ij} = V^i W^j$ . Utilizando la fórmula para la derivada covariante de un tensor de tipo  $(2, 0)$ :

$$\begin{aligned} \nabla_k T^{ij} &= \partial_k (V^i W^j) + \Gamma_{kl}^i V^l W^j + \Gamma_{kl}^j V^i W^l \\ &= \left( \partial_k V^i + \Gamma_{kl}^i V^l \right) W^j + V^i \left( \partial_k W^j + \Gamma_{kl}^j W^l \right) \\ &= \left( \nabla_k V^i \right) W^j + V^i \left( \nabla_k W^j \right) \end{aligned}$$

y la última expresión son las componentes de  $(\nabla V) \otimes W + V \otimes \nabla W$ .  $\square$

**Ejercicio 3.7:** Si  $C$  es la matriz  $(\nabla_j V^i)$  con  $V$  un campo en  $\mathbb{R}^2$  (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y  $P$  es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demuestra que  $P = J^{-1} C J$  donde  $J$  es la matriz jacobiana de  $x = x(r, \theta)$ ,  $y = y(r, \theta)$ .

*Hecho por Fernando*

Llamemos  $c_j^i$  y  $p_j^i$  a los elementos de  $C$  y  $P$ , y escribamos  $(x^1, x^2) = (x, y)$ ,  $(z^1, z^2) = (r, \theta)$ . Por la tensorialidad de  $\nabla V$ , al cambiar de coordenadas (carta) se tiene

$$p_j^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} c_l^k = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} c_l^k \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Como  $\partial x^l / \partial z^j$  son los elementos de la matriz jacobiana y  $\partial z^i / \partial x^k$  los de su inversa, basta recordar que el producto de matrices  $ABC$  se podía escribir en componentes como  $a_k^i b_l^k c_j^l$ .  $\square$

**Ejercicio 3.8:** En los textos básicos de geometría de superficies en  $\mathbb{R}^3$  se trabaja con parametrizaciones  $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se definen los símbolos de Christoffel como las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  tales que  $\Gamma_{ij}^k \partial_k \Phi$  es la proyección de  $\partial_i \partial_j \Phi$  en el plano tangente  $\Pi$  y se definen las componentes de la derivada covariante de un campo  $V(t)$  a lo largo de una curva como  $c^i$  con  $c^i \partial_i \Phi$  la proyección de  $V'(t)$  sobre  $\Pi$ . Explica con detalle por qué esto es coherente con lo visto en este curso.

*Hecho por Fernando*

La base del plano tangente es  $\{\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi\}$ , por tanto los campos de vectores son de la forma  $V = V^i \partial_i \Phi$ . Si particularizamos en una curva, por la regla de la cadena

$$V'(t) = \left( \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \partial_i \Phi + V^i \partial_j \partial_i \Phi \right) \frac{dx^j}{dt}.$$

Por la definición del enunciado,  $\partial_j \partial_i \Phi = \Gamma_{ij}^k \partial_k \Phi$  + un vector normal, así pues la proyección de  $V'(t)$  sobre  $\Pi$  es

$$\left( \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \partial_i \Phi + V^i \Gamma_{ij}^k \partial_k \Phi \right) \frac{dx^j}{dt} = \frac{dV^k}{dt} \partial_k \Phi + \Gamma_{ij}^k V^i \frac{dx^j}{dt} \partial_k \Phi$$

y en este curso usamos  $\partial_k$  en vez de  $\partial_k \Phi$ , por tanto la definición de derivada covariante es equivalente.

Los símbolos de Christoffel del curso también coinciden con los de los cursos de geometría de superficies porque la definición dada en estos,  $\partial_j \partial_i \Phi = \Gamma_{ij}^k \partial_k \Phi$  + un vector normal, implica

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jl} = \partial_i \langle \partial_j \Phi, \partial_l \Phi \rangle &= \langle \partial_i \partial_j \Phi, \partial_l \Phi \rangle + \langle \partial_j \Phi, \partial_i \partial_l \Phi \rangle \\ &= \langle \Gamma_{ij}^k \partial_k \Phi, \partial_l \Phi \rangle + \langle \partial_j \Phi, \Gamma_{il}^k \partial_k \Phi \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{il}^k g_{kj} \end{aligned}$$

y esta es la relación de la que en este curso obtuvimos la fórmula para  $\Gamma_{ij}^k$  en términos de la métrica (II.4).



**Ejercicio 3.9:** Explica por qué

$$\frac{\partial g'_{bc}}{\partial y^a} = \left( \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a \partial y^b} \frac{\partial x^k}{\partial y^c} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a \partial y^c} \frac{\partial x^k}{\partial y^b} \right) g_{jk} + \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \frac{\partial x^k}{\partial y^c} \frac{\partial x^l}{\partial y^a} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}$$

se sigue de la tensorialidad, donde  $g_{bc}$  y  $g'_{bc}$  son las componentes de la métrica con las coordenadas  $x^i$  e  $y^i$  respectivamente. Permutando índices deduce que la ley de transformación de  $[ab, c] = g_{cl} \Gamma_{ab}^l$ , a veces llamados símbolos de Christoffel de primera especie, es  $[ab, c]' = [ij, k] \partial_a x^i \partial_b x^j \partial_c x^k + g_{jk} \partial_c x^k \partial_a \partial_b x^j$  donde las  $\partial_i$  son derivadas con respecto a  $y^i$ . Concluye finalmente la ley de transformación de los símbolos de Christoffel habituales:

$$\Gamma'^c_{ab} = \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}.$$

Hecho por Fernando

Derivando con respecto a  $y^a$  la relación

$$g'_{bc} = \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \frac{\partial x^k}{\partial y^c} g_{jk} \quad \text{y sustituyendo} \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^a} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial y^a}$$

se sigue la primera fórmula del enunciado.

Por la expresión de  $\Gamma_{ab}^l$  en términos de las componentes de la métrica se deduce

$$[ab, c]' = g_{cl} \Gamma_{ab}^l = \frac{1}{2} (\partial_b g'_{ca} + \partial_a g'_{bc} - \partial_c g'_{ab}).$$

Empleando la primera fórmula del enunciado, el paréntesis con derivadas segundas para  $\partial_b g'_{ca}$  es  $\partial_a \partial_b x^j \partial_c x^k + \partial_a x^j \partial_b \partial_c x^k$ . Permutando índices para  $\partial_a g'_{bc}$  y para  $-\partial_c g'_{ab}$  se obtienen respectivamente  $\partial_b \partial_a x^j \partial_c x^k + \partial_b x^j \partial_a \partial_c x^k$  y  $-\partial_b \partial_c x^j \partial_a x^k - \partial_b x^j \partial_c \partial_a x^k$ . Al sumar los resultados se sigue

$$[ab, c]' = [lj, k] \partial_b x^j \partial_c x^k \partial_a x^l + g_{jk} \partial_c x^k \partial_a \partial_b x^j,$$

que es lo que afirma el enunciado. Ahora basta multiplicar en ambos miembros por

$$g'^{cl} = \frac{\partial y^c}{\partial x^r} \frac{\partial y^l}{\partial x^m} g^{rm} \quad \text{y usar} \quad \frac{\partial x^k}{\partial y^c} \frac{\partial y^c}{\partial x^r} = \delta_r^k$$

para conseguir la fórmula final.

**Ejercicio 3.10:** Un campo de vectores en una variedad riemanniana se dice que es un **campo de Killing** si verifica  $V^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i V^k + g_{ik} \partial_j V^k = 0$  (en un problema especial veremos la motivación para esta extraña definición). Demuestra que esto es equivalente a  $\nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j = 0$  donde  $\xi_k = g_{km} V^m$ . Indicación: Usa  $\nabla_k g_{mn} = 0$  y que  $g_{ik} \Gamma_{jr}^k + g_{jk} \Gamma_{ir}^k$  se simplifica mucho.

Hecho por Fernando.

La derivada covariante de la métrica es nula, por tanto

$$\begin{aligned} \nabla_j (g_{im} V^m) + \nabla_i (g_{jm} V^m) &= g_{im} \nabla_j V^m + g_{jm} \nabla_i V^m \quad (\text{porque } \nabla_l g_{ij} = 0) \\ &= g_{im} (\partial_j V^m + \Gamma_{jl}^m V^l) + g_{jm} (\partial_i V^m + \Gamma_{il}^m V^l) \\ &= g_{im} \partial_j V^m + g_{jm} \partial_i V^m + (g_{im} \Gamma_{jl}^m + g_{jm} \Gamma_{il}^m) V^l. \end{aligned}$$

Queda demostrar que  $g_{im}\Gamma_{jl}^m + g_{jm}\Gamma_{il}^m = \partial_l g_{ij}$ . Esto es lo mismo que demostrar la indicación  $\nabla_l g_{ij} = 0$ . No se pide demostrar (por eso se da como indicación) pero lo hacemos:

Por la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica,

$$g_{im}\Gamma_{jl}^m = \frac{1}{2}g_{im}g^{mr}(\partial_l g_{rj} + \partial_j g_{lr} - \partial_r g_{jl}) = \frac{1}{2}(\partial_l g_{ij} + \partial_j g_{li} - \partial_i g_{jl})$$

Cambiando Indices, se obtiene la formula similar para  $g_{jk}\Gamma_{ir}^k$  y de ahí  $g_{im}\Gamma_{jl}^m + g_{jm}\Gamma_{il}^m = \partial_l g_{ij}$ .  $\square$

**Ejercicio 3.11:** Prueba que si en  $\mathbb{R}^2$  tenemos una métrica riemanniana de la forma  $A(x)dx^2 + B(y)dy^2$  entonces el tensor de Ricci es nulo. Indicación: Se puede resolver en dos líneas. Busca una carta mejor.

*Hecho en clase.*

Consideremos  $A(x)dx^2 = du^2$ , entonces  $\sqrt{A(x)}dx = du$  y también definimos  $B(y)dy^2 = dv^2 \Rightarrow \sqrt{B(y)}dy = dv$ . Esto se puede decir porque  $u' = \frac{du}{dx} = \sqrt{A(x)}$  y lo mismo con  $v' = \frac{dv}{dy} = \sqrt{B(y)}$ .

Al hacer el cambio de carta tenemos  $du^2 + dv^2$ , que tiene todos los símbolos de Christoffel nulos y el tensor de Ricci también

**Ejercicio 3.12:** Si en una variedad consideramos las métricas  $g_{ij}dx^i dx^j$  y  $\lambda g_{ij}dx^i dx^j$  con  $\lambda$  una constante, encuentra qué relación existe entre las componentes de los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas. Estudia también el problema para las curvaturas escalares.

*Hecho en clase.*

Tenemos  $G_1 = g_{ij}dx^i dx^j$  y  $G_2 = \lambda g_{ij}dx^i dx^j$ . Vamos a considerar por ejemplo la métrica usual de  $\mathbb{S}^2$  que es  $d\theta + \sin^2\theta d\phi^2$  y la métrica de una superficie esférica de radio R que sería  $R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\phi^2$ . Consideramos los lagrangianos  $L_1 = g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j$  y  $L_2 = \lambda g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j$ , y tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L_1}{\partial x^i} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \lambda L_1}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial \lambda L_1}{\partial x^i}$$

los símbolos de Christoffel coinciden y los tensores de Riemann coinciden, entonces los tensores de Ricci coinciden.

En el caso de la curvatura escalar,  $R = g^{ij}\mathcal{R}_{ij}$ , no ocurre lo mismo. Entonces  $R_1 = g^{ij}\mathcal{R}_{ij}$  y  $R_2 = \lambda^{-1}g^{ij}\mathcal{R}_{ij}$

**Ejercicio 3.13:** Usando las simetrías del tensor de Riemann, demuestra que en dimensión 2 si usamos una carta tal que la métrica es diagonal, esto es  $g_{12} = g_{21} = 0$ , entonces el tensor de Ricci también es diagonal, esto es,  $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$ .

Hecho en clase.

Tenemos que  $\mathcal{R}_{12} = R_{1k2}^k = g^{km} R_{m1k2} = g^{11} R_{1112} + g^{22} R_{2122}$ . Por la antisimetría de 11 tenemos que  $R_{1112} = 0$  y por la antisimetría en 22 tenemos que  $R_{2122} = 0$ . Por simetría,  $R_{12} = R_{21}$ . Por otro lado,  $R^{12} = g^{1i} g^{2j} \mathcal{R}_{ij} = g^{11} g^{22} R_{12} = 0 = R^{21}$ .

**Ejercicio 3.14:** Halla todas las componentes del tensor de Ricci y la curvatura escalar para el semiplano de Poincaré que tiene por métrica  $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . Indicación: Los símbolos de Christoffel ya se han mencionado antes. Gracias al ejercicio anterior, es suficiente calcular  $R_{11}$  y  $R_{22}$ .

Hecho en clase.

Usar la carta  $\begin{cases} x = i\theta \\ y = \frac{1}{2}\phi \end{cases}$

## A.4. Hoja 4

**Ejercicio 4.1:** Se define el volumen de una variedad riemanniana orientable (con o sin borde) de dimensión  $n$  como la integral (si existe) de  $\omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$  con  $g$  el determinante de las componentes de la métrica en la carta elegida. Usando la métrica inducida por la usual, calcula el volumen de:

a) El "cilindro"  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1 \leq t \leq 1\}$

b) La superficie toroidal  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1\}$ .

Hecho por Jose

APARTADO A)

Comenzamos con el "cilindro". Usamos esta carta:

$$\begin{cases} x = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \cos(\theta) \\ t = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = \cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - \sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi \\ dy = \cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + \sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \\ dz = -\sin(\theta)d\theta \\ dt = dt; \end{cases}$$

Luego tenemos una variedad 3-dimensional con métrica inducida por la usual (en  $\mathbb{R}^4$  es  $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$ ) como sigue:

$$i^*G = d\theta + \sin^2\theta d\varphi^2 + dt^2 \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |g| = \sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{|g|} = \sin\theta$$

Luego tenemos una variedad cuyo elemento de volumen  $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \wedge dt$ , y si lo integramos obtenemos el volumen:

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi dt = 8\pi$$

APARTADO B)

En este caso utilizamos la siguiente parametrización como carta:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta + \cos\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta + \sin\theta\cos\varphi \\ z = \sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = (-2\sin\theta - \sin\theta\cos\varphi)d\theta - \cos\theta\sin\varphi d\varphi; \\ dy = (2\cos\theta + \cos\theta\cos\varphi)d\theta - \sin\theta\sin\varphi d\varphi; \\ dz = \cos(\varphi)d\varphi; \end{cases}$$

Hallamos la métrica inducida por la usual, que después de sustituir y simplificar queda:

$$i^*G = (\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4)d\theta^2 + d\varphi^2 \Rightarrow G = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$|g| = \cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4 \Rightarrow \sqrt{|g|} = \sqrt{\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4} = \cos(\varphi) + 2$$

Luego tenemos una variedad 2-dimensional con elemento de volumen  $\omega = (\sqrt{\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 4})d\theta \wedge d\varphi$ , e integrando:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\varphi) + 2)d\theta d\varphi = 8\pi^2$$

Si comprobamos con la fórmula tradicional  $V = 2\pi^2 r R^2$  vemos que es correcto.

**Ejercicio 4.2:** Demuestra que en el caso de  $\mathbb{S}^2$  la forma  $\omega$  del ejercicio anterior coincide con  $i^*\eta$  donde  $i: \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión y  $\eta = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ .

Hecho en clase por Fernando Chamizo.

Primero calculamos la forma del ejercicio anterior  $\omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2$  con  $g$  el determinante de las componentes de la métrica en la carta elegida. Como en el ejercicio (2.9) tenemos que la métrica usual es  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  y cogiendo la carta de coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = \cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - \sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi \\ dy = \cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + \sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \\ dz = -\sin(\theta)d\theta; \end{cases}$$

Sustituimos en la métrica usual y obtenemos

$$i^*G = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$$

Luego tenemos

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \rightarrow |g| = \sin^2(\theta) \rightarrow \sqrt{|g|} = \sin(\theta) \rightarrow \omega = \sin(\theta)d\theta \wedge d\varphi$$

Ahora vamos a hallar  $i^*\eta$  con la misma carta sustituimos ahora en la expresión  $x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$  teniendo:

$$\begin{cases} dy \wedge dz = (\cos\theta \sin\varphi d\theta + \sin\theta \cos\varphi d\varphi) \wedge (-\sin\theta d\theta) = -\sin^2\theta \cos\varphi d\varphi \wedge d\theta \\ dz \wedge dx = (-\sin\theta d\theta) \wedge (\cos\theta \cos\varphi d\theta - \sin\theta \sin\varphi d\varphi) = \sin^2\theta \sin\varphi d\theta \wedge d\varphi \\ dx \wedge dy = (\cos\theta \cos\varphi d\theta - \sin\theta \sin\varphi d\varphi) \wedge (\cos\theta \sin\varphi d\theta + \sin\theta \cos\varphi d\varphi) = \dots \\ \dots = \sin\theta \cos\theta \cos^2\varphi d\theta \wedge d\varphi - \sin\theta \cos^2\varphi d\varphi \wedge d\theta \end{cases}$$

Ahora recordando la antisimetría ( $d\theta \wedge d\varphi = -d\varphi \wedge d\theta$ ) y haciendo las operaciones restantes obtenemos:

$$i^*\eta = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi = \omega$$

□

**Ejercicio 4.3:** Consideremos el paraboloide  $P = \{z = x^2 + y^2\}$  como subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f$  la función que aplica cada punto  $(x, y, z) \in P$  en  $(x + y, x - y, 5z) \in \mathbb{R}^3$  y  $\omega = xdx + dz$ . Comprueba que se cumple la relación  $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ .

Hecho por Jose

Tenemos que:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \\ z = 5z' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = dx' + dy' \\ dy = dx' - dy' \\ dz = 5dz' \end{cases}$$

Ahora si hacemos el pull-back tenemos:

$$f^*\omega = (x' + y')dx' + (x' + y')dy' + 5dz'$$

Ahora aplicamos derivada exterior y simplificamos teniendo en cuenta la antisimetría:

$$d(f^*\omega) = dx' \wedge dy' + dy' \wedge dx' + 0 = 0$$

Es obvio que  $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ , dado que  $d\omega = d(xdx + dz) = 0$ , y por tanto  $f^*d\omega = 0$

**Ejercicio 4.7:** Dadas  $M$  y  $N$  variedades compactas orientables de la misma dimensión, se conoce que para cada  $f : M \rightarrow N$  existe un entero  $n(f)$  tal que  $\int_M f^*\omega = n(f) \int_N \omega$  para cualquier  $\omega$ .

a) Halla el grado de la aplicación en  $\mathbb{S}^2$  que pasa cada punto a sus antípodas empleando la forma de volumen  $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$ .

b) La invariancia de  $n(f)$  por homotopía impide que exista  $F : [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$  y  $F(1, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ . Prueba que sin embargo tal homotopía existe en  $\mathbb{S}^3$ .

Hecho en clase por Fernando Chamizo.  
(Solucion por pasar a limpio)

**Ejercicio 4.8:** Halla una función  $f$  tal que la 1-forma  $\omega = -yf(x^2+y^2) dx + xf(x^2+y^2)dy$  verifique  $d\omega + \omega \wedge \omega = (1+x^2+y^2)^{-2} dx \wedge dy$ . Nota: Este cálculo tiene que ver con el llamado monopolo de Dirac en coordenadas estereográficas.

Hecho en clase por Fernando Chamizo  
(Solucion por pasar a limpio)

**Ejercicio 4.9:** Prueba que si  $\Gamma$  es una matriz de uno formas, entonces  $\Omega = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$  implica  $d\Omega = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega$ . Nota: Ésta es la base para una relación entre derivadas covariantes del tensor de Riemann llamada identidad de Bianchi que es relevante en relatividad general.

Hecho en clase por Fernando Chamizo  
Como comentario inicial, lo que nos dice el enunciado permite probar ciertas simetrias de las derivadas del tensor de Riemann. A esa simetría se le llama identidad de Bianchi.

Resolvemos:

$$d\Omega = 0 + d\Gamma \wedge \Gamma$$

Recordamos  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$  luego:

$$d\Omega = 0 + d\Gamma \wedge \Gamma - \Gamma \wedge d\Gamma$$

Sustituyendo  $d\Omega$ :

$$= (\Omega - \Gamma \wedge \Gamma) \wedge \Gamma - \Gamma \wedge (\Omega - \Gamma \wedge \Gamma) = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega$$

**Ejercicio 4.10:** Con cambios de carta adecuados la métrica (supuesta definida positiva) de una variedad riemanniana de dimensión 2 se puede escribir como  $e^{2v}(dx^2 + dy^2)$  para cierta  $v = v(x, y)$ . En ese caso las matrices de símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_1 = (\Gamma_{j1}^i) = \begin{pmatrix} \partial_1 v & \partial_2 v \\ -\partial_2 v & \partial_1 v \end{pmatrix} \quad y \quad \Gamma_2 = (\Gamma_{j2}^i) = \begin{pmatrix} \partial_2 v & -\partial_1 v \\ \partial_1 v & \partial_2 v \end{pmatrix}$$

Además  $\Gamma = \Gamma_1 dx + \Gamma_2 dy$  cumple  $\Gamma \wedge \Gamma = 0$  (todo esto son cálculos tediosos pero sencillos que daremos por supuestos). Con esta información, calcula todas las componentes  $R_{jkl}^i$  del tensor de Riemann y comprueba que la curvatura escalar es  $R = -2e^{-2v} \Delta v$  con  $\Delta v$  el laplaciano.

Hecho en clase por Fernando Chamizo  
Veamos que el tensor de Riemann es sencillo en este caso. Como nos dicen, los cálculos prueban que

$$\Gamma_1 = (\Gamma_{j1}^i) = \begin{pmatrix} \partial_1 v & \partial_2 v \\ -\partial_2 v & \partial_1 v \end{pmatrix} \quad y \quad \Gamma_2 = (\Gamma_{j2}^i) = \begin{pmatrix} \partial_2 v & -\partial_1 v \\ \partial_1 v & \partial_2 v \end{pmatrix}$$

y que  $\Gamma = \Gamma_m dx^m$ ,  $\Gamma \wedge \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora bien :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{R}_{kl} dx^k \wedge dx^l &= d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = d\Gamma \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} \partial_1 v dx + \partial_2 v dy & \partial_2 v dx - \partial_1 v dy \\ -\partial_2 v dx + \partial_1 v dy & \partial_1 v dx + \partial_2 v dy \end{pmatrix} \\ d\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & -(\partial_2 \partial_2 v + \partial_1 \partial_1 v) dx \wedge dy \\ (\partial_2 \partial_2 v + \partial_1 \partial_1 v) dx \wedge dy & 0 \end{pmatrix} \\ d\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & -\nabla v \\ \nabla v & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \\ \frac{1}{2} \mathcal{R}_{12} dx \wedge dy + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{21} dy \wedge dx &= \mathcal{R}_{12} dx \wedge dy \end{aligned}$$

Luego:

$$R_{j12}^i \Rightarrow \begin{cases} R_{212}^1 = -\Delta v \text{ (Laplaciano de } v) \\ R_{112}^2 = \Delta v \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} -\mathcal{R}_{21} dx \wedge dy \rightarrow R_{221}^1 = \Delta v \\ \mathcal{R}_{21} dy \wedge dx \rightarrow R_{121}^2 = -\Delta v \end{cases}$$

Tenemos las componentes del tensor de Ricci:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{11} = R_{1i1}^i = -\Delta v \\ \mathcal{R}_{22} = R_{2i2}^i = -\Delta v \\ \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21} = 0 \end{cases}$$

Y entonces hallamos la curvatura escalar sabiendo que  $R = g^{ij} \mathcal{R}_{ij}$ :

$$R = e^{-2v} (\mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{22}) = -2e^{-2v} \Delta v$$

## Apéndice B

## Exámenes

### B.1. Parcial 1 - 28/02/2017

**Ejercicio 1.1:** [3 puntos] Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una pequeña explicación:

a) Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano  $L = L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}Kq^2$  con  $m, K \in \mathbb{R}^+$ , equivalen a  $\ddot{q} + \frac{K}{m}q = 0$ .

b) En  $\mathbb{R}^2$  con la carta trivial (coordenadas cartesianas), se cumple  $dx \otimes dy = dy \otimes dx$ .

c) Si  $f : M \rightarrow N$  es una función  $C^\infty$  entre variedades y  $f$  es inyectiva, la aplicación tangente  $T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  es inyectiva para cada  $p \in M$ .

APARTADO A)

Verdadero

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \Leftrightarrow m\ddot{q} = -Kq \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{K}{m}q = 0.$$

APARTADO B)

Falso

$$dx \otimes dy \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = dx \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) dy \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = 1 \cdot 1,$$

$$dy \otimes dx \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = dy \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) dx \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 \cdot 0.$$

APARTADO C)

Falso. Uno de los contraejemplos más sencillos es  $M = N = \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^3$ . En el origen la derivada, y por tanto la aplicación tangente, es nula.



**Ejercicio 1.2:** [3 puntos] Expresa el campo de vectores tangentes  $(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}$  de  $\mathbb{R}^2$  (con las coordenadas cartesianas) en la carta en coordenadas polares.

Usando las fórmulas  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$  y las reglas de transformación de los vectores, que son tensores de tipo  $(1, 0)$ , se tiene:

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} = r^2 \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = r^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = r^2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

**Ejercicio 1.3:** [3 puntos] Si  $T$  es un tensor de tipo  $(1, 1)$  en una variedad, se define su traza en cada punto como  $T_i^i$ . Demuestra que no depende de la carta elegida.

Por las reglas de transformación de los tensores, sabemos que si  $T_j^i$  y  $\tilde{T}_j^i$  son las componentes en dos cartas con funciones coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  y  $(y^1, \dots, y^n)$ , respectivamente,

$$T_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{T}_l^k \Rightarrow T_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \tilde{T}_l^k \Rightarrow T_i^i = \frac{\partial y^l}{\partial y^k} \tilde{T}_l^k = \delta_k^l \tilde{T}_l^k = \tilde{T}_k^k.$$

Para la primera implicación se toma  $i = j$  (se suma en  $i = j$ ). La segunda es la regla de la cadena.

**Ejercicio 1.4:** [1 punto] ¿Qué dimensión tiene la variedad (subvariedad de  $\mathbb{R}^9$ ) formada por las matrices simétricas reales  $3 \times 3$  con polinomio característico  $\lambda^2(\lambda - 1)$ ? Puedes razonar intuitivamente.

Cada matriz  $A$  de la variedad diagonaliza en base ortonormal  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  con  $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$  y  $A\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$  para  $j = 1, 2$ . Por tanto, la aplicación lineal  $L$  que corresponde a  $A$  es  $L(\mathbf{x}) = \text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$  que está biunívocamente determinada por la dirección de  $\mathbf{u}$ , lo que da dimensión dos (un punto en  $S^2$  identificando opuestos).

### B.1.1. Criterios y errores frecuentes

- Decir verdadero o falso no cuenta nada si no va acompañado de una explicación.
  - b) Algunos confunden  $dx \otimes dy$  con la forma diferencial  $dx \wedge dy$  que todavía no ha aparecido en el curso.
  - c) Algunos creen que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva implica  $Dg : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva y les parece que se deduce del teorema del rango o algo similar pero eso no es cierto.
- Cosas como  $\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^{-1}$  además de falsas son muy, muy feas. El teorema de la función inversa dice que la matriz jacobiana de la inversa es la inversa de la jacobiana pero una matriz no se invierte tomando el inverso de cada elemento.

- Aquí hay un error que después de recapacitar no he penalizado pero que es importante tener claro. Lo ilustro primero con un ejemplo. Si multiplicamos  $\sum_i a_i x^i$  por  $\sum_i b_i y^i$  el resultado es  $\sum_{i,j} a_i b_j x^i y^j$  que es bien distinto de  $\sum_i a_i b_i x^i y^i$ . El convenio de sumación nos debería proteger de este error porque  $a_i b_i x^i y^i$  no tiene un sentido definido, debo sumar en subíndices y superíndices iguales ¿pero cómo los agrupo? Si uno lo “define” como sumar en todos al tiempo, al multiplicar  $a_i x^i$  por  $b_i y^i$  no se obtiene  $a_i b_i x^i y^i$ . Volviendo al problema, varios escriben  $\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \widetilde{T}_k^k$  en lugar de  $\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \widetilde{T}_l^k$ .
- Más o menos ha habido dos enfoques del problema, uno con proyecciones y autovectores (como en la solución anterior) y otro con las ecuaciones correspondientes a los coeficientes del polinomio característico. Todos menos una persona se han equivocado pero como considero que los del primer enfoque se quedan cerca de la solución tienen un 0.75. Con el segundo era bastante más difícil obtener el resultado. Algunos llegan a las ecuaciones correctas pero no se dan cuenta de que restringen más de lo que parece, tienen 0.5. Típicamente una ecuación quita un grado de libertad pero cosas como  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  pasan de tres variables a ninguna.

## B.2. Parcial 2 - 4/04/2017

**Ejercicio 2.1:** Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una breve explicación.

**a)** (1 punto) Si todos los símbolos de Christoffel se anulan, entonces  $\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^j) \partial_j$ .

**b)** (1 punto) Si  $V(t) \neq 0$  es un transporte paralelo a lo largo de una curva, entonces  $e^t V(t)$  no es transporte paralelo.

APARTADO A)

Verdadero. Es consecuencia de la igualdad general

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y = X^i \nabla_i Y = X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{il}^k Y^l) \partial_k.$$

APARTADO B)

Verdadero. Se tiene

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D(e^t V(t))}{dt} \stackrel{(*)}{=} \frac{de^t}{dt} V(t) + e^t \frac{DV}{dt} = e^t V(t) \neq 0.$$

La justificación detallada de (\*) es  $\frac{d(e^t V)}{dt} = \Gamma_{ij}^k e^t V^i \frac{dx^j}{dt} = \frac{de^t}{dt} V(t) + e^t \left( \frac{dV}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^i \frac{dx^j}{dt} \right)$ .

**Ejercicio 2.2:** En  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  se considera la métrica  $x^{-2}dx^2 + x^{-1}dy^2$ .

**a)** (3 puntos) Calcula el símbolo de Christoffel  $\Gamma_{11}^1$ .

**b)** (2 puntos) Sabiendo que hay una geodésica horizontal con punto inicial  $p = (1, 1)$  y vector inicial  $2\partial_1$ , halla su ecuación explícita. Nota: No se pide demostrar la existencia de tal geodésica, se puede dar por supuesta.

APARTADO A)

El lagrangiano es  $L = x^{-2}\dot{x}^2 + x^{-1}\dot{y}^2$ . Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x^{-3}\dot{x}^2 - x^{-2}\dot{y}^2 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(2x^{-2}\dot{x}) = -4x^{-3}\dot{x}^2 + 2x^{-2}\ddot{x}.$$

Igualando, se sigue  $\ddot{x} - x^{-1}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = 0$ . El símbolo  $\Gamma_{11}^1$  es el coeficiente de  $\dot{x}^2$ , esto es,  $-x^{-1}$ .

APARTADO B)

Por la conservación de la energía el lagrangiano es constante a lo largo de las geodésicas:  $x^{-2}\dot{x}^2 = \text{cte}$ , de aquí  $x^{-1}\dot{x} = \text{cte}$  que implica  $x(t) = Ae^{Bt}$ . De las condiciones iniciales  $x(0) = 1$  y  $\dot{x}(0) = 2$  se sigue  $A = 1$  y  $B = 2$ . En definitiva  $(x(t), y(t)) = (e^{2t}, 1)$ .

**Ejercicio 2.3:** Sea  $F : M \longrightarrow N$  con  $dF|_p : T_p(M) \longrightarrow T_{F(p)}(N)$  inyectiva para cada  $p \in M$  y  $G$  una métrica definida positiva en  $N$ .

**a)** (2 puntos) Prueba que el pullback  $F^*G$  es una métrica en  $M$ . Nota: Recuerda la definición de pullback  $F^*G(V, W) = G(dF(V), dF(W))$ .

**b)** (1 punto) ¿Es cierto en general que  $F$  transforma geodésicas de  $M$  en geodésicas de  $N$ ?

APARTADO A)

Como  $G(X, Y) = G(Y, X)$ , la simetría de  $F^*G$  está asegurada. Si la matriz de componentes de  $F^*G$  fuera singular en  $p$ , existiría  $V \in T_p(M)$  tal que  $F^*G(V, V) = 0$  (escogiéndolo del núcleo) y entonces  $X = dF|_p(V) \in T_{F(p)}(N)$  sería un vector no nulo (por la inyectividad) tal que  $G(X, X) = G(dF|_p(V), dF|_p(V)) = 0$ , lo que contradice que la métrica sea definida positiva.

APARTADO B)

No, por ejemplo la inclusión  $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  tiene como imagen una circunferencia y los arcos de circunferencia no son geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  (con ninguna parametrización) pero sí lo son en  $\mathbb{S}^1$  con la métrica usual.

### B.3. Parcial 3 - 11/05/2017

# Índice alfabético

## Aplicación

- bilineal, 2
- lineal, 2
- multilineal, 3
- tangente, 10

## Carta

- n-dimensional, 8

## Componentes

- de un tensor, 6

## Conexión

- afín, 23

## Curvatura

- escalar, 28

## Derivada

- covariante, 24
- exterior, 29

## Derivada parcial i-ésima en una variedad, 8

## Espacio

- cotangente, 10
- dual, 4
- tangente de una variedad, 9

## Geodésica, 19

## K-forma diferencial, 29

## Métrica, 11

- inducida, 13

## Producto

- exterior, 29
- tensorial, 7

## Pull-back, 12

## Tensor

- de Ricci, 28
- en una variedad, 11
- n veces covariante, 3
- r veces contravariante y s veces  
covariante, 4

## Uno forma, 10

## Variedad

- riemanniana, 18
- semiriemanniana, 18

## Vector

- tangente en una variedad, 9