**ESTADÍSTICA I (2013-2014)**
**Grado en Matemáticas / Doble grado Ing. Informática/Matemáticas**
**Examen final, 18 de enero de 2014. SOLUCIONES**

**1. a)** Se supone que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ independientes, con $\sigma_1 \neq \sigma_2$. El contraste es $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ frente a $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. La región de rechazo de este contraste es

$$R = \left\{ |\bar{x} - \bar{y}| > t_{f;\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right\} = \{|t| > t_{f;\alpha/2}\},$$

donde

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = -8.759$$

es el estadístico del contraste y $f = 5$ es el entero más próximo a 5.263 (los grados de libertad, `df`). Según la salida de R, el p-valor del contraste es 0.0002473. Por tanto, es razonable rechazar la hipótesis nula. Concluimos que la concentración esperada de tiol es distinta en el grupo normal y en el grupo con artritis reumatoide.

**b)** Bajo las mismas hipótesis que en (1a), el intervalo pedido es

$$\text{IC}_{95\,\%}(\mu_1 - \mu_2) = \left( \bar{x} - \bar{y} \mp t_{5,0.025} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right).$$

Como $\bar{x} = 1.921429$, $\bar{y} = 3.486667$ y $t = -8.759$, tenemos que $\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{t} = 0.1787$. Por tanto,

$$\text{IC}_{95\,\%}(\mu_1 - \mu_2) = (-1.565238 \mp 2.571 \cdot 0.1787) = (-2.024676, -1.105800).$$

El intervalo no contiene al 0, luego rechazamos la hipótesis nula simple $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ al nivel $\alpha = 0.05$, pues la región de rechazo $R$ de (a) equivale a rechazar $H_0$ cuando $0 \notin \text{IC}_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2)$.

**2. a)** Por el lema de Neyman-Pearson, el test más potente es el que tiene región de rechazo

$$R = \left\{ \frac{f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta = 2)}{f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta = 1)} > k_\alpha \right\},$$

donde $k_\alpha$ se elige de tal manera que $\mathbb{P}_{\theta=1}(R) = \alpha$ y $f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$, si $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$, es la función de verosimilitud de la muestra. Como

$$\frac{f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta = 2)}{f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta = 1)} = 2^n \prod_{i=1}^n x_i,$$

tenemos que $R = \{2^n \prod_{i=1}^n x_i > k_\alpha\}$. Si $n = 1$, entonces $R = \{2X_1 > k_\alpha\} = \{-\log X_1 < c_\alpha\}$, donde $c_\alpha$ es una constante tal que

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=1}(R) = 1 - \frac{k_\alpha}{2}. \tag{1}$$

En la última igualdad de (1) se ha utilizado que, si $\theta = 1$, $X_1$ sigue una distribución uniforme en [0,1]. Despejando en (1) obtenemos $k_\alpha = 2(1 - \alpha)$ (también se podía utilizar la indicación del enunciado para obtener $c = -\log(1 - \alpha)$). Por tanto, si $n = 1$, $R = \{X_1 > 1 - \alpha\}$.

Si $\alpha = 0.05$, entonces $R = \{X_1 > 0.95\}$. La función de potencia es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula: $\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta\{-\log X_1 < -\log 0.95\} = 1 - 0.95^\theta$. Si $\theta = 1$, obviamente $\beta(1) = 0.05$. Si $\theta = 2$, $\beta(2) = 0.0975$.

**b)** El estadístico del contraste de razón de verosimilitudes para el contraste propuesto es

$$\Lambda_n = \frac{f_n(X_1,\ldots,X_n;\theta=1)}{f_n(X_1,\ldots,X_n;\hat{\theta})} = \frac{1}{\hat{\theta}^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1-\hat{\theta}},$$

siendo $\hat{\theta} = -n/\sum_{i=1}^n \log X_i$ el estimador de máxima verosimilitud (e.m.v.) de $\theta$. La región de rechazo de un test con nivel aproximado $\alpha$ es $R = \{-2\log\Lambda_n > \chi^2_{1;\alpha}\}$. Es sencillo comprobar que $-2\log\Lambda_n = 2n(\log\hat{\theta} + \frac{1}{\hat{\theta}} - 1)$. Si $\alpha = 0.05$, $n = 50$ y $\sum_{i=1}^{50}\log(x_i) = -19.342$, entonces $\hat{\theta} = 2.59$, $-2\log\Lambda_n = 33.66$ y $\chi^2_{1;0.05} = 3.84$, luego rechazamos la hipótesis nula.

**3. a)** El estimador de los momentos

$$\tilde{\theta} = \left(\frac{1}{\bar{X}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^{\beta}$$

se obtiene igualando los momentos poblacionales y muestrales de orden 1:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\theta^{1/\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = \bar{X}.$$

**b)** Función de verosimilitud: $L(\theta;x_1,\ldots,x_n) = \theta^n\beta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\beta-1} e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i^\beta}$

Función de logverosimilitud: $\log L(\theta) = n\log\theta + \log\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\beta-1}\right) - \theta\sum_{i=1}^n x_i^\beta$

Para hallar el punto de máximo de la logverosimilitud:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^\beta = 0,$$

de donde obtenemos que $\hat{\theta} = \text{e.m.v.}(\theta) = n/\sum_{i=1}^n X_i^\beta$.

**c)**

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(f(X;\theta))\right)^2 = -\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\log(f(X;\theta))\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

**d)** Observemos que $\hat{\theta} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^\beta} = \dfrac{1}{\bar{Y}}$, donde $Y_1,\ldots,Y_n$ es una muestra de la v.a. $Y = X^\beta$.

Por la ley fuerte de los grandes números, sabemos que $\bar{Y} \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^\beta) = \dfrac{1}{\theta}$. Sea $g(x) = 1/x$. Por el teorema de la aplicación continua, $\hat{\theta} = g(\bar{Y}) \xrightarrow{\text{c.s.}} g(\mathbb{E}(Y)) = \theta$. Por lo tanto, el e.m.v. de $\theta$ es consistente c.s.

Para demostrar la normalidad asintótica de $\hat{\theta}$ utilizamos el método delta:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{Y}} - \frac{1}{\mathbb{E}Y}\right) = \sqrt{n}(g(\bar{Y}) - g(\mathbb{E}Y)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d}} N(0, |g'(\mathbb{E}Y)|\sqrt{\mathbb{V}(Y)}) = N(0,\theta).$$

En la última igualdad hemos utilizado que $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(X^{2\beta}) - \mathbb{E}^2(X^\beta) = 1/\theta^2$.

**e)** Un estimador $T_n$ de $\theta$ es eficiente si es insesgado ($\mathbb{E}(T_n) = \hat{\theta}$) y su varianza alcanza la cota de Fréchet-Cramer-Rao: $\mathbb{V}(T_n) = \dfrac{1}{nI(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n}$. El e.m.v. de $\theta$ no es necesariamente insesgado ($\mathbb{E}(1/X)\neq 1/\mathbb{E}(X)$) y, por tanto, no podemos decir si es eficiente, pero sí es asintóticamente eficiente porque $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d}} N(0, 1/\sqrt{I(\theta)})$.