

Análisis Matemático

Víctor de Juan Sanz

13/14 C1

Índice

1	Contenido de la asignatura	2
1.1	Preliminares	2
1.2	Teorema función inversa, implícita y rango	2
1.3	Mínimos y máximos condicionados	2
1.4	Subvariedades diferenciales	2
1.5	Integración en subvariedades diferenciales	2
1.6	Teorema de Stokes	2
2	Preliminares del análisis matemático	3
2.1	Producto escalar, norma y distancia	3
2.2	Relación norma - producto escalar	7
2.3	Equivalencia de normas	7
3	Topología	10
3.1	Conexión	12
4	Funciones continuas, abiertos y cerrados	13
4.1	Aplicaciones lineales	14
4.2	Norma de matrices	14
5	Límite	15
6	Diferenciación	17
7	Convergencia y continuidad	19

Datos de interés:
Jesus Garcia Azorero
Despacho: 17-608
Correo: jesus.azorero@uam.es

1. Contenido de la asignatura

1.1. Preliminares

Repaso de contenidos de Cálculo II como conjuntos abiertos y cerrados, gradiente . . .

1.2. Teorema funcion inversa, implicita y rango

Aplicación a funciones no lineales de los teoremas fundamentales de cálculo II

1.3. Mínimos y máximos condicionados

Multiplicadores de Lagrange

1.4. Subvariedades diferenciales

Objetos de dimensión n en espacios de dimensión m ($n < m$).

1.5. Integración en subvariedades diferenciales

1.6. Teorema de Stokes

Demostración del teorema con lenguaje de las formas diferenciales.

2. Preliminares del análisis matemático

A lo largo del curso vamos a trabajar en $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$ $x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$

2.1. Producto escalar, norma y distancia

Durante todo el año denotaremos al vector (x_1, x_2, \dots, x_n) como \bar{x} por comodidad.

Definición 2.1 **Producto escalar euclídeo.**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Propiedades:

- $\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$
- $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$
- $\langle g\bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Las tres primeras son la consecuencia de que el producto escalar tiene que ser bilineal.

Definición 2.2 **Norma euclídea.**

$$\|\bar{x}\| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \dots = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades:

- $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
- Homogeneidad: $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$
- $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Definición 2.3 **Norma.** Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una **norma**.

Lema 2.4. $\|\bar{x}\| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$ para cualquier producto escalar $*$.

Definición 2.5 Norma p . Las normas p $||\cdot||_p$ se definen todas de la misma forma:

$$||\bar{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay dos casos particulares, la norma uno

$$||\bar{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

y la norma infinito

$$||\bar{x}||_\infty = \text{máx} \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$$

Vamos a demostrar que la norma p cumple las 3 propiedades de una norma. Para ello, nos apoyaremos en dos teoremas previos:

Teorema 2.6 (Desigualdad de Young). Sea $p > 1$ y tomamos p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (exponente conjugado). Entonces:

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \cdot |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'}$$

Demostración. Se utiliza la idea de la función logaritmo, que es cóncava¹ y creciente. Tomando 2 puntos A y B tenemos la condición de concavidad

$$t \log A + (1 - t) \log B \leq \log(tA + (1 - t) \cdot B)$$

. Utilizando la derivada hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y tomamos un punto que dista t de A y $(1 - t)$ de B . Como la función es cóncava sabemos que ese valor será menor que el valor del logaritmo en un punto t entre A y B .

Tomando $A = |a|^p$, $B = |b|^{p'}$ y $t = \frac{1}{p} \rightarrow 1 - t = \frac{1}{p'}$ tenemos que

$$\frac{1}{p} \cdot \log |a|^p + \frac{1}{p'} \cdot \log |b|^{p'} \leq \log \left(\frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'} \right)$$

$$\log |a| + \log |b| \leq \log \left(\frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'} \right)$$

$$\log |ab| \leq \log \left(\frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'} \right)$$

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'}$$

□

Teorema 2.7 (Desigualdad de Hölder). *Se trata de una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ocurre en el caso $p = 2$*

$$\sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \|\bar{x}\|_p \|y\|_p$$

Demostración. Tomamos

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|\bar{x}\|_p}$$

$$b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_p}$$

Tenemos que

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{p'} b_i^{p'}$$

Sustituimos:

$$\frac{|x_i|}{\|\bar{x}\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_p} \leq \frac{|x_i|^p}{p \cdot \|\bar{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p' \cdot \|y\|_p^{p'}}$$

Tomamos sumatorios y, teniendo en cuenta que $\|\bar{x}\|_p^p = \sum |x_i|^p$, nos queda

$$\frac{1}{\|\bar{x}\|_p \|y\|_p} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \frac{1}{p \|\bar{x}\|_p^p} \sum |x_i|^p + \frac{1}{p' \|y\|_p^{p'}} \sum |y_i|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Una vez probadas las dos desigualdades anteriores, pasamos a probar la desigualdad triangular:

Demostración. El objetivo es demostrar que

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p$$

y vamos a hacerlo en varios pasos.

Para evitarnos las raíces empezamos con $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^N |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^N |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} = \\ &= \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^N |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (2.7) tenemos:

$$||\bar{x} + \bar{y}||_p^p \leq \sum (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i + y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_* + \sum (|y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i + y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_*$$

Por ser p y p' exponentes conjugados es fácil comprobar que $1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$
 Sacamos factor común y pasamos al otro lado obteniendo (PASO INTERMEDIO?)

$$\left(\sum_1^N |x_i + y_i|^p \right)^{\overbrace{\left(1 - \frac{1}{p'} \right)}^p} = ||\bar{x} + \bar{y}||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

Guille: esta demostración es muy, muy rara. □

EJERCICIO PROPUESTO: Tomamos en el plano el conjunto de los puntos cuya norma es 1. Tomando en la norma $p=2$ sale la circunferencia. ¿Y en $p=3$?

Observación: Estos argumentos se pueden utilizar para demostrar

$$\int |f \cdot g| \, dx \leq \left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

COMPLETAR.

Definición 2.8 Distancia euclídea.

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = ||\bar{y} - \bar{x}||$$

Propiedades:

- La distancia es siempre positiva: $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
- $d(\bar{x}, \bar{x}) = 0$
- Simetría: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$
- Desigualdad triangular $d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$. La distancia entre 2 puntos es menor o igual en línea recta que pasando por un punto intermedio.

Definición 2.9 Distancia. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una distancia.

Recapitulando Con un producto escalar puedo definir una norma y con esa norma puedo definir una distancia. Pero... ¿Podemos definir una norma que no venga de un producto escalar y/o alguna distancia que no provenga de una norma? Sí, por ejemplo

$$\tilde{d}(\bar{x}, \bar{y}) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$$

No cuesta mucho comprobar que cumple las 3 propiedades de una distancia. Además, distancia es cuanto menos curiosa porque nunca será mayor de π .

Podemos comprobar que si existiera una norma que midiese esta distancia tendríamos

$$||\tilde{x}|| = \tilde{d}(\bar{x}, \bar{0}) = |\arctan(x)|$$

pero esto no cumple la propiedad: $||\tilde{\lambda x}|| = |\arctan \lambda x| \neq |\lambda| |\arctan x| = |\lambda x| ||\tilde{x}||$ ya que ninguna distancia puede ser mayor que π y tomando un $\lambda > \pi$ se produciría la contradicción.

2.2. Relación norma - producto escalar

Teorema 2.10. *Supongamos que tengo un producto escalar $*$ y una norma asociada*

$$||\bar{x}|| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$$

. Entonces

$$||\bar{x} + \bar{y}||^2 = ||\bar{x}||^2 + ||\bar{y}||^2 + 2(\bar{x} * \bar{y})$$

Demostración.

$$||\bar{x} + \bar{y}||^2 = (\bar{x} + \bar{y}) * (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} * \bar{x} + \bar{x} * \bar{y} + \bar{y} * \bar{x} + \bar{y} * \bar{y} = ||\bar{x}||^2 + ||\bar{y}||^2 + 2(\bar{x} * \bar{y})$$

□

Esa norma asociada al producto escalar tiene dos propiedades importantes:

- Paralelogramo: $||\bar{x} + \bar{y}||^2 + ||\bar{x} - \bar{y}||^2 = 2(||\bar{x}||^2 + ||\bar{y}||^2)$
- Polarización: $||\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||\bar{x} - \bar{y}||^2 = 4(\bar{x} * \bar{y})$

2.3. Equivalencia de normas

Sea $||\cdot||$ una norma en \mathbb{R}^N . Si intento calcular la norma de un vector \bar{x}

$$||\bar{x}|| = \left\| \sum_{i=1}^N x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N ||x_i e_i|| = \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot ||e_i||$$

Tenemos: $||\bar{x}|| \leq \sum_{i=1}^N c_i |x_i|$ siendo $c_i = ||e_i||$. Aplicando Cauchy-Schwarz nos queda

$$\sum_{i=1}^N (c_i^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^N (|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, puedo controlar cualquier norma con una constante y la norma euclídea:

$$|||\bar{x}||| \leq C ||x||_2$$

En particular, $0 \leq |||\bar{x}_n - \bar{x}||| \leq c ||\bar{x}_n - \bar{x}||$.

Observación: Aplicar Holder en vez de Cauchy, sale la igualdad con la norma p y no con la euclídea.

Aplicación: Sea $F(\bar{x}) = |||\bar{x}|||$ y $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| = |||\bar{x} - \bar{y}||| = ||\bar{x} - \bar{y}|| \leq C ||\bar{x} - \bar{y}||$$

Utilizando: $|||\bar{a} - \bar{b}||| \geq |||\bar{a}||| - |||\bar{b}|||$ ²

Interpretación del resultado: Cualquier norma en \mathbb{R}^n es CONTINUA respecto de la norma euclídea.³

Teorema 2.11 (Relación norma \leftrightarrow producto escalar). $||\cdot||$ una norma cualquiera de \mathbb{R}^N proviene de un producto escalar si y sólo si la norma satisface la identidad del paralelogramo.

Demostración. En el apartado anterior (2.2) demostramos la implicación hacia la derecha. Vamos a demostrar la recíproca: Suponemos que la norma satisface la identidad del paralelogramo:

$$||\bar{a} + \bar{b}||^2 + ||\bar{a} - \bar{b}||^2 = 2 ||\bar{a}||^2 + 2 ||\bar{b}||^2 \quad (1)$$

Queremos probar que existe un producto escalar $*$ tal que $||\bar{x}|| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$, así que definimos uno utilizando la identidad de polarización:

$$\bar{x} * \bar{y} = \frac{1}{4} (||\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||\bar{x} - \bar{y}||^2)$$

Queremos probar que, efectivamente, $*$ es un producto escalar, así que tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

1. $\bar{x} * \bar{y} = \bar{y} * \bar{x}$.
2. $\bar{x} * \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x}$
3. $(\bar{x} * \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
4. $(\lambda \bar{x}) * \bar{y} = \lambda (\bar{x} * \bar{y})$
5. $(\bar{x} + \bar{y}) * \bar{z} = \bar{x} * \bar{z} + \bar{y} * \bar{z}$

Las propiedades 1, 2 y 3 son triviales. Vamos con 4 y 5

²(la desigualdad triangular con restas, que se saca con un simple cambio de variable)

³Continua si la tomas como una función de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}

Demostración de la 4ª propiedad Demostraremos que se cumple por inducción cuando $\lambda \in \mathbb{N}$. Primero probamos para $\lambda = 2$.

$$\begin{aligned}
 (2\bar{x}) * \bar{y} &= \frac{1}{4} (|||2\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||2\bar{x} - \bar{y}|||^2) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(||| \underbrace{\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} + \bar{y}}_b |||^2 - ||| \underbrace{\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} - \bar{y}}_{-b} |||^2 \right) = \text{usando (1)} \\
 &= \frac{1}{4} (2|||\bar{x}|||^2 + 2|||\bar{x} + \bar{y}|||^2) = \\
 &= 2\frac{1}{4} (|||\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||\bar{x} - \bar{y}|||^2) = 2(\bar{x} * \bar{y})
 \end{aligned}$$

Conclusión: si $\lambda = 2$ vemos que sale fuera.

Paso 2: $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{N}$

Inducción completa: suponemos el resultado cierto para $1, \dots, n-1$. Queremos probar el resultado para n .

$$\begin{aligned}
 (n\bar{x}) * \bar{y} &= \frac{1}{4} (|||n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||n\bar{x} - \bar{y}|||^2) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(|||(n-1)\bar{x} + \underbrace{\bar{x} + \bar{y}}_b |||^2 - ||| \underbrace{(n-1)\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} - \bar{y}}_b |||^2 \right) = \\
 &= \dots = 2(\bar{x} * \bar{y}) + (n-2)(\bar{x} * \bar{y}) = n(\bar{x} * \bar{y})
 \end{aligned}$$

Paso 3: $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{Z}$

Utilizaremos $(-\bar{x}) * \bar{y} = -(\bar{x} * \bar{y})$ y se acaba saliendo.

Paso 4: $\lambda = n$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left(\frac{p}{q}\bar{x}\right) * \bar{y} = q \left(\left(\frac{p}{q}\bar{x}\right) * \bar{y} \right) = (q \cdot \frac{p}{q}\bar{x}) * \bar{y} = (p\bar{x} * \bar{y}) = p(\bar{x} * \bar{y})$$

Multiplicamos por q y lo metemos, simplifica con el denominador y la p si puede salir.

Paso 5: $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha = \liminf n r_n$. Utilizaremos el resultado previo de que cualquier norma es continua. \bar{x}, \bar{y} fijos.

Revisar: Los $|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2$ y $|||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2$ son continuos.

$$\begin{aligned}
 \alpha\bar{x} * \bar{y} &= \frac{1}{4} (|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2) = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} (|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n\bar{x} * \bar{y}) = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\bar{x} * \bar{y}) &= \alpha(\bar{x} * \bar{y})
 \end{aligned}$$

Demostración de la 4 propiedad:

$$\begin{aligned}
 A &= (\bar{x} + \bar{y}) * \bar{z} = \frac{1}{4} (|||\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}|||^2 - |||\bar{x} + \bar{y} - \bar{z}|||^2) \\
 B &= \bar{x} * \bar{z} = \frac{1}{4} (|||\bar{x} + \bar{z}|||^2 - |||\bar{x} - \bar{z}|||^2)
 \end{aligned}$$

$$C = \bar{y} * \bar{z} = \frac{1}{4} (||\bar{y} + \bar{z}||^2 - ||\bar{y} - \bar{z}||^2)$$

Demostraremos que $A - B - C = 0$

COMPLETAR la comprobación. □

Observación: $d(\bar{x}, \bar{y}) = ||\bar{x} - \bar{y}||$ para alguna norma $||\cdot|| \Leftrightarrow (d(\bar{x} + \bar{z}) + d(\bar{y} + \bar{z}) = d(\bar{x}, \bar{y}) \wedge d(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = |\lambda| d(\bar{x}, \bar{y}))$

3. Topología

Definición:

$$B_R(\bar{x}_0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^N \text{ } / \underbrace{d(\bar{x}, \bar{x}_0)}_{||\bar{x} - \bar{x}_0||} < R$$

Para evitar jaleos, al tratar la distancia vamos a tomar la norma euclídea

$$A \subset \mathbb{R}^N \text{abierto} \Leftrightarrow \forall \bar{a} \in A, \exists \varepsilon(\bar{a}) > 0 \text{ } / \text{ } B_\varepsilon(\bar{a}) \subset A.$$

$$B \subset \mathbb{R}^N \text{cerrado} \Leftrightarrow B^c (= \mathbb{R}^N - B) \text{abierto}.$$

Teorema 3.1 (Caracterización de cerrados en términos de sucesiones).

$$B \subset \mathbb{R}^N \text{cerrado} \Leftrightarrow \text{para cualquier sucesión convergente } X_n \subset B \text{ entonces } \lim X_n \in B$$

Teorema 3.2. *Suponemos conjuntos de dimensión finita:*

- Unión arbitraria de abiertos \rightarrow abierto
- Intersección finita de abiertos \rightarrow abierto
- Unión finita de cerrados \rightarrow cerrado
- Intersección arbitraria de cerrados \rightarrow cerrado

Definición: Punto de acumulación

La idea intuitiva es aquellos puntos a los que puedo llegar en el límite, es decir, puntos que a su alrededor a una distancia arbitrariamente pequeña existen otros puntos del conjunto.

$$A \subset \mathbb{R}^N \text{ } a \in A \subset (A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(a) - a) \cap A \neq \emptyset$$

Siendo $A \subset (A)$ es el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición: Frontera

La frontera son aquellos puntos que en su entorno (para cualquier ε) hay puntos

$$A \subset \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$$

Definición: Interior

Es el conjunto abierto más grande subconjunto del conjunto total.

Definición: Cierre

El conjunto cerrado más pequeño en el que está contenido el conjunto total.

Observación: Cierre e interior no los vamos a definir formalmente porque se dan por supuesto.

Teorema 3.3 (Conjunto cerrado y acotado). Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Son equivalentes:

- K cerrado y acotado.
- Para cualquier sucesión $X_n \subset K$, podemos encontrar una subsucesión convergente $X_{n_j} \subset X_n$.
- Dado cualquier recubrimiento A_i abierto de modo que $K \subset \cup A_i$ puedo encontrar un recubrimiento finito $A_j, j = 1, \dots, M$ / $K \subset \cup_{i=1}^M A_i$

Definición: Conjunto compacto

Un conjunto que cumpla cualquiera de las 3 propiedades anteriores.

Teorema 3.4. En \mathbb{R}^N se cumple que las 3 propiedades anteriores son equivalentes $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

Demostración.

Demostración. $2 \Rightarrow 1$)

Si no estuviera acotado entonces no sería posible encontrar una subsucesión convergente en la sucesión de elementos de norma 1, norma 2, norma 3... lo que contradice 2.

Y si no fuera cerrado, lo que pasaría sería: ... que contradice 2

□

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$

Sea $K \subset \mathbb{R}^N$, cerrado y acotado. Sea $X_n \subset K$ Vamos a utilizar que: sea $\overline{X_n} = (X_n^i)$ tenemos

$$\overline{X_n} \subset K \subset B_R(\bar{0}) \Rightarrow \|X_n\| \leq R, \forall n \Rightarrow |X_n^j| \leq R$$

Ahora vamos a aplicar el argumento de bisección ⁴ para seleccionar la sucesión que nos interesa.

Para ello recordamos el criterio de Cauchy:

$$A_N \subset \mathbb{R} \text{ convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ } / \text{ } n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Con el criterio de bisección podemos encontrar una subsucesión convergente de la siguiente manera: definimos una subsucesión que converja a la primera coordenada, después con el mismo criterio podemos arreglar la sucesión para que converja a la segunda coordena.

□

□

Teorema 3.5. $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en K , $\exists x_m, x_M \in K \text{ } / \text{ } f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in K$, es decir, f alcanza su máximo y su mínimo.

Demostración.

Paso 1.1) Vamos a demostrar que el conjunto está acotado superiormente:

Por reducción al absurdo, se puede encontrar una subsucesión convergente que por ser compacto tiene que ser convergente a un elemento perteneciente al conjunto, pero esa sucesión por ser no acotada tenemos: $\exists x_n \in K \text{ } / \text{ } f(x_n) \geq n$

Paso 1.2) De manera totalmente análoga.

Paso 2) Vamos a demostrar la existencia de X_M : Por ser un conjunto acotado, tenemos un supremo en ese conjunto. ¿Ese supremo pertenecerá al conjunto?. Si no perteneciera, podríamos encontrar una subsucesión convergente al supremo lo que contradice la condición de acotado.

□

Aplicación: $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$ una norma (que ya sabemos que es continua):

Conclusión: $m \|x\| \leq \|\bar{x}\| \leq C \|x\|$

Teorema 3.6. En \mathbb{R}^N TODAS las normas son equivalentes.

3.1. Conexión

Definición: Conexión por caminos

Dados $a, b \in C$ podemos encontrar una aplicación continua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b, \varphi(t) \in C, \forall t \in [0, 1]$$

Definición: Conexión

Para cualquier par de abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^N$ / $C \subset A \cup B$ si $A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Observación: Es curioso comprobar que estas 2 definiciones no son equivalentes. Si tomamos el conjunto

$$\{(x, 0), x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y), y \in (0, 1]\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, y \right), y \in [0, 1] \right\}$$

Podemos razonar que sí es conexo por caminos, pero no según la otra definición.

4. Funciones continuas, abiertos y cerrados

Sea F continua:

- 1) A abierto $\nRightarrow F(A)$ abierto.
- 2) B cerrado $\nRightarrow F(B)$ cerrado.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Definimos

$$F^{-1}(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N / F(\bar{x}) \in A\}$$

Teorema 4.1 (Función inversa). ■ F continua $\wedge A$ abierto $\Rightarrow F^{-1}(A)$ abierto.
 ■ F continua $\wedge B$ cerrado $\Rightarrow F^{-1}(B)$ cerrado.

Aplicación:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + \cos(x|y|) - e^z < 1\}$$

$$F(x, y, z) = x^2 + \cos(x|y|) - e^z < 1$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

COMPLETAR

Demostración. 1)

$$\bar{x} \in F^{-1}(A) \text{ Queremos hallar } R > 0 / B_R(\bar{x}) \subset F^{-1}(A)$$

$$\bar{x} \in F^{-1}(A) \Leftrightarrow F(\bar{x}) \in A$$

$$\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(F(\bar{x})) \subset A$$

$$\text{es decir: si } \|\bar{z} - F(\bar{x})\| < \varepsilon \Rightarrow \bar{z} \in A$$

$$F \text{ continua} \Rightarrow \exists \delta > 0 \wedge \underbrace{\|\bar{x} - \bar{s}\|}_{\bar{s} \in B_R(\bar{x})} < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|F(\bar{x}) - F(\bar{s})\| < \varepsilon. \text{ en particular, } F(\bar{s}) \in A; s \in F^{-1}(A)$$

Conclusión: Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $s \in B_R(\bar{x}) \Rightarrow s \in F^{-1}(A)$. □

4.1. Aplicaciones lineales

Sea: $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

L es lineal $\Leftrightarrow L(\lambda \bar{x}) = \lambda L(\bar{x}) \wedge L(\bar{x} + \bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y})$

Además, toda aplicación lineal se puede escribir en forma de matriz.

$$L(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2. $L \text{ lineal} \Rightarrow L \text{ continua.}$

Demostración.

$$L(\bar{x}) = \begin{pmatrix} A_1 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

COMPLETAR

□

4.2. Norma de matrices

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \mapsto F(\bar{x}) = \underbrace{\|A\bar{x}\|}_{L(\bar{x})}$$

F es continua.

Sabemos que existe $c > 0$ tal que $\|A\bar{x}\| \leq C\|\bar{x}\|$, es decir, $\|A\bar{x}\| \leq C$ si $\|\bar{x}\| = 1$.

$$M = \{\|A\bar{x}\| \mid \|\bar{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

⁵ La mejor constante C es la cota superior mínima (supremo) que vamos a llamar α .
 $\alpha \in M$

α se alcanza en M , porque F es continua y M es compacto.

⁵Conjunto esfera unidad

Definición:

$$|||A||| = \alpha = \max ||A\bar{x}|| / ||\bar{x}|| = 1$$

Ejercicio propuesto: demostrar que $||| \cdot |||$ es una norma.

Demostración de la 4ª propiedad:

$$|||A + B||| = \max ||(A + B)\bar{x}|| = ||(A + B)\bar{x}_{A,B}|| = ||A\bar{x}_{AB} + B\bar{x}_{AB}|| \leq$$

$$\underbrace{||A\bar{x}_{AB}||}_{\leq \max ||A\bar{x}|| = |||A|||} + \underbrace{||B\bar{x}_{AB}||}_{|||B|||}$$

Ejemplo: COMPLETAR Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular su norma. Resolución: Acabamos

teniendo que maximizar (sabiendo que $|x| + |y| = 1$: $|x + 2y| + |-3x + y| + |2x| \leq |x| + |2y| + |3x| + |y| + 2|x| = 6|x| + 3|y| \leq 6(|x| + |y|) = 6$ ¿Podemos encontrar un vector (x_0, y_0) tal que $||A(x_0, y_0)^T||_1 = 6$?

Tomando $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$ lo encontramos.

Obsevación: Coincide con la suma de los valores absolutos de las columnas y escoger el más grande.

Aplicando lo mismo con la norma infinito: COMPLETAR COMPLETAR

Lema 4.3. Sea A una matriz, $A^T A$ es simétrica.

Lema 4.4. $\underbrace{\langle \bar{x}, A\bar{y} \rangle}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{\langle A^T \bar{x}, \bar{y} \rangle}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^M}$

$A^T A$ diagonalizable ($N \times N$). Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$.

Desarrollamos en B : $\bar{x} = \sum \alpha_i \bar{v}_i$. Con $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ con $i \neq j$.

Calculamos $||\bar{x}|| = \sum \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle$

$$A^T A \bar{x} = (A^T A) \left(\sum \alpha_i v_i \right) = \sum (\alpha_i \lambda_i \bar{v}_i)$$

Queremos hallar el máximo de $||A\bar{x}||$ cuando $||\bar{x}|| = 1$.

$$||A\bar{x}||^2 = \langle A\bar{x}, A\bar{x} \rangle = \langle A^T A \bar{x}, \bar{x} \rangle = \underbrace{\langle \sum \lambda_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i \rangle}_{\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ con } i \neq j.}$$

$$= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{\max} \left(\sum \alpha_i^2 \right) = \lambda_{\max}$$

Hemos demostrado que:

$$\max ||A\bar{x}|| \underbrace{\leq}_{=} (\lambda_{\max})^{\frac{1}{2}}$$

Este máximo se puede alcanzar tomando x como el autovector asociado, por lo que el \leq se convierte en un $=$.

5. Limite

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Definición: Limite

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|F(\vec{x}) - \vec{L}\| < \varepsilon$$

Importante el detalle de $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\|$, no es un \leq , porque no se necesita que la función esté si quiera definida en el punto \vec{a} .

Teorema 5.1. Sean $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ y $\vec{L} = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^N$.

$$x_n \rightarrow \vec{L} \Leftrightarrow (x_1 \rightarrow L_1) \wedge (x_2 \rightarrow L_2) \wedge \dots \wedge (x_n \rightarrow L_n)$$

Idea para el cálculo de límites:

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(x) = \lim_{\vec{y} \rightarrow 0} F(\vec{y} + \vec{a})$.
- Límite a lo largo de rectas. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(\vec{x}) \sim \lim F(t\vec{v})$

Si $\lim F(t\vec{v})$ toma valores distintos dependiendo de $\vec{v} \Leftrightarrow \nexists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(\vec{x})$

Pero, si $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(t\vec{v}) = L \Rightarrow \vec{L}$ es el candidato a ser el límite (no tiene porque serlo). El siguiente paso sería demostrar con argumentos de comparación (Sandwich) u otros que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(\vec{x}) = L$.

El contraejemplo es $f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}$. Veamos por que:

Nos acercamos al límite por medio de rectas:

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x \cdot (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x^3}{(1 + x^2 m^4) x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x, mx)) \rightarrow 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Pero si nos acercamos al límite por medio de $x = y^2$ tenemos:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y)) \neq 0$$

Teorema 5.2. F continua \Leftrightarrow para cualquier abierto A , $F^{-1}(A)$ es abierto.

Obsevación: Si $F : \omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M \Leftrightarrow$ para cualquier abierto A , $F^{-1}(A) = \omega \cup V$, con V abierto.

Demostración. \Rightarrow De este teorema ya teníamos demostrada la implicación \Rightarrow .
 \Leftarrow Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta \Rightarrow \underbrace{\|F(\bar{x}) - F(\bar{a})\|}_{F(\bar{x}) \in B_\varepsilon(F(\bar{a}))} < \delta$$

Tomamos

$$A = B_\varepsilon(F(\bar{a})) \rightarrow F(\bar{a}) \in A \Rightarrow \bar{a} \in F^{-1}(A)$$

Por hipótesis, $F^{-1}(A)$ abierto $\wedge \bar{a} \in F^{-1}(A)$

$\exists B_\delta(\bar{a}) \subset F^{-1}(A)$. Es decir, $\bar{s} \in B_\delta(\bar{a}) \subset F^{-1}(A), s \in F^{-1}(A) \Rightarrow F(s) \in A = B_\varepsilon(F(\bar{a}))$

□

Observación: Este teorema también se cumple para cerrados.

6. Diferenciación

Definición: F diferenciable en \bar{a}

$$\begin{aligned} \exists \text{ aplicación lineal } L \text{ tal que } & \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{a}) - L(\bar{x} - \bar{a})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} 0 \\ & = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} \end{aligned}$$

Observación:

- Si existe, L es única.

Demostración. Supongamos que existen L_1, L_2 .

$$0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_1\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_2\bar{h}}{\|\bar{h}\|}$$

$$\text{Sumando: } 0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_1\bar{h}\| + \|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_2\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|}$$

Observación: $\|A - B\| = \|A + (-B)\| \leq \|A\| + \|B\|$
 Completar la contradicción.

□

Notación: (Diferencia de F en \bar{a})

$$L \equiv DF(\bar{a})$$

Proposición:

F diferenciable en $\bar{a} \Rightarrow F$ continua en \bar{a}

Demostración.

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Esta es la definición de diferenciable. Para que este límite sea 0, el numerador tiene que tender a 0, por lo que $F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) \rightarrow 0$ \square

Obsevación: F diferenciable en \bar{a} .

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Sabemos:

$$0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{\|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} = 0$$

En particular (tomando $h = t\bar{e}_1$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \underbrace{\frac{1}{t} F(\bar{a} + t\bar{e}_1) - F(\bar{a}) - L\bar{e}_1}_{\bar{W}(t) \in \mathbb{R}^N} \right\|$$

Tomando la componente k-esima

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} F\left(\frac{F_k(a + te_i) - F_k(a)}{t} - L_{ki}\right)$$
$$L_{ki} = \lim_{t \rightarrow 0} F\left(\frac{F_k(a + te_i) - F_k(a)}{t}\right) = \frac{dF_k}{dx_i}(\bar{a})$$

Nomenclatura: Aproximación lineal \sim Diferencial.

Matriz jacobiana \sim Jacobiana.

Teorema 6.1. Matriz asociada a $DF(\bar{a}) \equiv$ Matriz de las derivadas parciales de F .

Teorema 6.2. F diferencialbe en $\bar{a} \Rightarrow \exists \frac{dF_k}{dx_i}(\bar{a}), i = 1, 2, \dots, N \wedge k = 1, 2, \dots, M$

El contraejemplo para demostrar \nRightarrow es el mismo que en los límites a lo largo de rectas.

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x+y^2}, (x, y) = (0, 0) \wedge 0, (x, y) = (0, 0)$$

Comentarios sobre notación:

WTF DONDE VA \mathbb{R}^N

7. Convergencia y continuidad

Al tener definida una norma podemos definir convergencia y continuidad:

- *Convergencia:* $\overline{x_n} \rightarrow \overline{x} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \Rightarrow \|\overline{x} - \overline{x_n}\| < \varepsilon$.
- *Continuidad:* Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|\overline{x} - \overline{a}\|_a < \delta \Rightarrow \|F(\overline{x}) - F(\overline{a})\|_b < \varepsilon$

Observación: Es interesante ver que se puede hablar de continuidad tomando una norma en \mathbb{R}^N y otra distinta en \mathbb{R}^M sin por ello variar la definición de continuidad. Más adelante veremos que en \mathbb{R}^N todas las normas son equivalentes y qué significa que las normas sean equivalentes. (Esto no sucederá en espacios de dimensión infinita) ??????????????????