ESTADÍSTICA I (2013-2014)
Grado en Matemáticas / Doble grado Ing. Informática/Matemáticas
Examen final, 18 de enero de 2014

Nombre: ____

Grupo: ____________________________

1. Se desea comparar la concentración observada de tiol (mM) en el lisado sanguíneo de dos grupos de voluntarios, siendo el primer grupo "normal" (X) y padeciendo el segundo grupo de artritis reumatoide (Y). Para ello se analizan los datos con R de la siguiente manera

```
> X = c(1.84, 1.92, 1.94, 1.92, 1.85, 1.91, 2.07)
> Y = c(2.81, 4.06, 3.62, 3.27, 3.40, 3.76)
> t.test(X,Y,alternative="two.sided",mu=0,paired=FALSE,var.equal=FALSE)

Welch Two Sample t-test

data:  X and Y
t = -8.759, df = 5.263, p-value = 0.0002473
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
sample estimates:
mean of x mean of y
 1.921429  3.486667
```

a) **(1 punto)** ¿Qué contraste se está haciendo? Especificar las hipótesis necesarias para garantizar la validez del método empleado. ¿Qué conclusiones se obtienen acerca del contraste?

b) **(1 punto)** Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de concentraciones medias de tiol entre los dos grupos. ¿Qué relación hay entre este intervalo y el contraste de (a)?

2. Sea
$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0,$$
la función de densidad de una v.a. X con distribución beta de parámetros θ y 1.

a) **(1.5 puntos)** Consideremos el contraste de hipótesis
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = 1 \\ H_1 &: \quad \theta = 2. \end{aligned}$$
Dada una muestra X_1 de tamaño $n = 1$ de X, determina la región de rechazo del test más potente con nivel de significación α. Para $\alpha = 0.05$ calcula la función de potencia de ese test. Indicación: si $X \sim \text{beta}(\theta, 1)$, entonces $Y = -\log(X)$ sigue una distribución exponencial de parámetro θ, es decir, la densidad de Y es $g(y) = \theta e^{-\theta y}$, $y > 0$.

b) **(1.5 puntos)** A nivel de significación α, ¿cuál sería la región de rechazo del test de razón de verosimilitudes para el siguiente contraste?:
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = 1 \\ H_1 &: \quad \theta \neq 1 \end{aligned}$$
Empleando la tabla de la χ^2, ¿hay evidencia para rechazar H_0 a nivel $\alpha = 0.05$ si, para una muestra de tamaño $n = 50$, hemos obtenido $\sum_{i=1}^{50} \log(x_i) = -19.342$?

3. Sea $\beta > 0$ un número conocido. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una muestra de una variable aleatoria X con distribución Weibull de función de densidad

$$f(x;\theta) = \theta\,\beta\,x^{\beta-1}e^{-\theta\,x^{\beta}}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

a) (0.5 puntos) Calcular el estimador de θ por el método de los momentos.

b) (1 punto) Calcular el estimador de máxima verosimilitud (e.m.v.) de θ.

c) (1 punto) Determinar la cantidad de información de Fisher $I(\theta)$.

d) (2 puntos) Estudiar la consistencia y la normalidad asintótica del e.m.v. determinado en (b).

e) (0.5 puntos) Define el concepto de estimador eficiente. Estudia la eficiencia del e.m.v. de θ determinado en (b).

Indicación: Para cualquier entero positivo m, $\mathbb{E}(X^m) = \dfrac{1}{\theta^{m/\beta}}\Gamma\left(1+\dfrac{m}{\beta}\right)$, donde $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ es la función gamma, y $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n es un entero positivo.