Ejemplo. Ecuación de Burgers no homogénea.
Problema A.

$$uu_x + u_y = 1,\ u(\frac{s^2}{4}, s) = \frac{s}{2}.$$

Con la notación usual:

$$a(x,y,z) = z,\ b(x,y,z) = 1,\ c(x,y,z) = 1;$$
$$\alpha(s) = \frac{s^2}{4},\ \beta(s) = s,\ \gamma(s) = \frac{s}{2}.$$

Comprobamos la condición de **transversalidad**:

$$\det\begin{pmatrix} a(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)) & b(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)) \\ \alpha'(s) & \beta'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s/2 & 1 \\ s/2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall s.$$

Por tanto, todos los puntos de la curva dato son **puntos característicos.**

Comprobamos la **condición de rango** para la posible existencia de solución C^1:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} s/2 & 1 & 1 \\ s/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 2.$$

Como el rango es distinto de 1, no puede haber solución de clase C^1.

En este caso concreto, podemos hacer los cálculos explícitos, para ver dónde está el problema:

Resolución del **sistema característico:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= z \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 1 \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= 1 \end{aligned}$$

con dato $(x,y,z)|_{t=0} = (s^2/4, s, s/2)$, tiene por solución

$$\phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (\frac{s^2}{4} + \frac{s}{2}t + \frac{t^2}{2}, s+t, \frac{s}{2} + t).$$

Del análisis de los menores no nulos de la matriz diferencial $D\phi(s,0)$, se deduce que en la expresión anterior se puede despejar $x = x(y,z)$. De hecho, los cálculos se pueden hacer explícitamente:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& s+t \\ z &=& s/2+t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} s &=& 2(y-z) \\ t &=& 2z-y \end{array}\right.$$

de manera que

$$x = \cdots = \frac{1}{2}\{2z^2 + y^2 - 2yz\}$$

Es decir, podemos expresar la superficie solución como el conjunto de nivel 0 de la función de tres variables

$$F(x,y,z) = 2x - 2z^2 - y^2 + 2yz,$$

cuyo vector gradiente nos dará el vector normal en cada punto de la superficie:

$$\vec{n} = \nabla F = (2, -2y + 2z, -4z + 2y).$$

En particular, sobre la curva dato $x = s^2/4$, $y = s$, $z = s/2$, tenemos que el vector normal es $\vec{n} = (2, -s, 0)$. Es decir, el vector normal es horizontal, y por lo tanto el plano tangente es vertical; por tanto, la superficie no puede escribirse como la gráfica de una función $u(x,y) \in C^1$ en ningún entorno de la curva dato.

Además, podemos comprobar que

$$x = \frac{1}{2}\{z^2 + (y-z)^2 = (y/2 - z)^2 + y^2/4 \geq y^2/4,$$

de manera que la proyección sobre el plano XY de la superficie parametrizada está a un lado de la proyección de la curva dato $x = y^2/4$. Esto confirma que la superficie presenta un doblez a lo largo del dato, de manera que no puede expresarse como la gráfica de una función $z = u(x, y)$.

Problema B.
Consideramos el mismo problema, pero cambiando la curva dato:

$$uu_x + u_y = 1,\ u(\frac{s^2}{2}, s) = s.$$

En este caso, repitiendo cálculos análogos a los del problema anterior, podemos comprobar:

- La condición de transversalidad NO se cumple sobre ningún punto de la curva dato.
- La condición de rango
$$\text{Rango}\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 1$$
en este caso no contradice la existencia de solución C^1.
- Al resolver el sistema característico, obtenemos
$$\phi(s,t) = (\frac{1}{2}(s+t)^2, (s+t), (s+t)),$$
de manera que si llamamos $s + t = \xi$, lo que obtenemos es una parametrización de la curva dato. Es decir, a partir de las curvas características ensambladas sobre la curva dato, no obtenemos ninguna superficie. Dicho de otra manera, toda la curva dato es una característica.

En este caso, podemos plantearnos un **problema distinto,** con una curva dato que corte transversalmente al dato original.
Por ejemplo, puesto que $(\frac{s^2}{2}, s, s)|_{s=0} = (0,0,0)$, y su proyección en el plano XY es una parábola cuyo eje es OX, podemos considerar como curva transversal $(s, 0, \gamma(s))$ (con $\gamma(0) = 0$, de modo que las dos curvas se cortan en $(0,0,0)$). Para simplificar aún más, podemos tomar $\gamma(s) = Cs$, con lo que en realidad tenemos una familia uniparamétrica de curvas, dependientes del parámetro C.

Para cualquiera de estas curvas, al resolver el sistema característico con dato $(x, y, z)|_{t=0} = (0,0,0)$, el teorema de existencia y unicidad para EDO nos dice que vamos a obtener como solución la curva inicial $(\frac{t^2}{2}, t, t)$; es decir, todas estas superficies solución pasan por la curva dato inicial, de modo que el problema original va a tener **infinitas soluciones**.
En particular, podemos resolver explícitamente, llegando a la siguiente expresión para la solución:

$$z = u(x,y) = \frac{x - y^2/2}{y + 1/C} + y$$

Para cada valor fijo del parámetro C, la solución está definida en un entorno de la curva $(\frac{t^2}{2}, t, t)$, y este entorno se podrá extender como máximo hasta $y > -1/C$.
Esto podría haberse observado a priori estudiando la proyección de las características en el plano XY, que viene dada por la familia de curvas

$$x - \frac{y^2}{2} = Csy + s.$$

Es inmediato comprobar que todas estas curvas se cortan en el punto $(x, y) = (1/2C^2, -1/C)$, lo que justifica el carácter local de la solución.

Ejemplo. Características que cortan dos veces a la curva dato.

Consideramos el problema

$$u_x + u_y = 1 - u,\ \ u(x, x + x^2) = \text{sen } x,\ \ \text{con } x > 0.$$

En este caso, tenemos:

$$a(x, y, z) = 1,\ b(x, y, z) = 1,\ c(x, y, z) = 1 - z;\ \ \alpha(s) = s,\ \beta(s) = s + s^2,\ \gamma(s) = \text{sen } s.$$

Comprobamos la **condición de transversalidad:**

$$\det \begin{pmatrix} a(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) & b(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) \\ \alpha'(s) & \beta'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2s \end{pmatrix} = 2s \neq 0 \text{ para } s > 0.$$

Resolvemos el **sistema característico :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 1 \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= 1 - z \end{aligned}$$

con dato $(x, y, z)|_{t=0} = (s, s + s^2, \text{sen } s)$, obteniendo la solución:

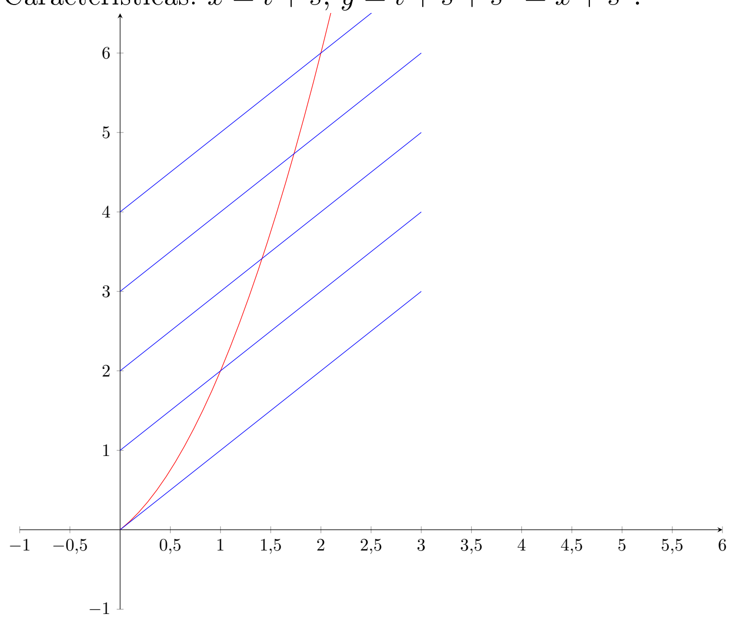
$$\phi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = (t + s, t + s + s^2, 1 - (1 - \text{sen } s)e^{-t}).$$

Podemos despejar explícitamente:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{y - x} \\ t &= x - \sqrt{y - x} \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir una fórmula explícita para la solución $z = u(x, y)$.

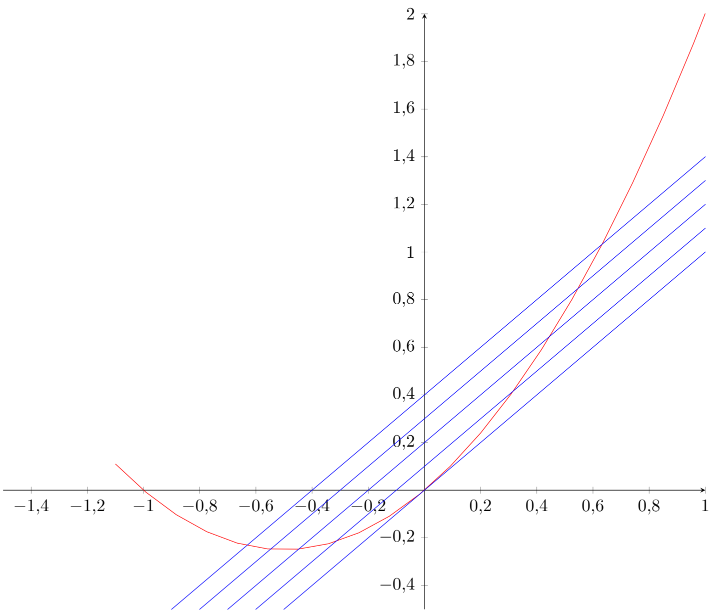
Es importante señalar que las expresiones anteriores nos dice que necesariamente debe ser $y \geq x$, lo que nos plantea un problema si en algún momento queremos que la solución esté definida en un entorno del origen, algo que era previsible a la vista de que la condición de transversalidad deja de cumplirse en ese punto.
Si representamos la proyección del dato y las características en el plano XY, obtenemos:
Dato: $(s, s + s^2)$ con $s > 0$; es decir, $y = x + x^2$ con $x > 0$.
Características: $x = t + s$, $y = t + s + s^2 = x + s^2$.



Observar que la región por debajo de la recta $y = x$ no se cubre con las características que parten de la curva dato, lo que coincide con el hecho destacado previamente de que la solución está definida para $y \geq x$. Observar también que esta recta $y = x$ es tangente en $(0, 0)$ al dato $y = x + x^2$.

Comportamiento en el entorno del origen.

Supongamos ahora que eliminamos la restricción $s > 0$ en la curva dato. Entonces, perdemos la condición de transversalidad en el origen, pero es inmediato comprobar que se satisface la condición de rango 1 que permite la posibilidad de que exista solución.
En este caso, si dibujamos la proyección XY sin la restricción $x > 0$, observamos lo siguiente:



Es decir, cada característica corta en dos puntos a la curva dato. esto impone una condición de compatibilidad en el dato. Consideremos la característica $y = x + s^2$, que se corta con la curva dato $y = x + x^2$ en los puntos de abscisa $x = s$, $x = -s$ y veamos el comportamiento de la solución a lo largo de esta recta. Es decir, estudiamos la función

$$g(x) = u(x, x + s^2).$$

Podemos comprobar que $g'(x) = u_x(x, x + s^2) + u_y(x, x + s^2) = 1 - u(x, x + s^2) = 1 - g(x)$. Por otro lado, al pasar por la curva dato la solución u toma los valores prescritos; es decir:
$u(s, s + s^2) = \operatorname{sen} s,\ u(-s, -s + s^2) = \operatorname{sen}(-s)$. Por lo tanto:

$$g'(x) = 1 - g(x),\ g(s) = \operatorname{sen} s,\ g(-s) = \operatorname{sen}(-s).$$

Es inmediato comprobar que no hay ninguna solución de la EDO que cumpla a la vez con las dos restricciones, de manera que no puede haber ninguna solución, con el dato anterior, que esté definida en un entorno del origen.

Observación: Podría darse el caso de que para un dato distinto $(s, s + s^2, \gamma(s))$, una elección adecuada de γ nos diera un problema compatible, en el que la función g considerada anteriormente estuviera bien definida (probar con un dato del tipo $\gamma(s) = 1 - e^{-s}$, creo).