7. Ejercicios

7.1. Hoja 1

Ejercicio ?:

$\overline{A} = x \in \mathbb{R}^N; \forall V_x \diagup V_x \cup A \neq \emptyset$, *siendo* V_x *un entorno abierto de x.* $\overline{A} = A\cap$

Teorema 7.1. $A \subset \mathbb{R}^N$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \#1 \subset (A) \subset A$

Demostración.

$$A\text{es cerrado} \Rightarrow A^c \text{ es abierto} \Rightarrow$$
$$\forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0 \diagup B(x,\varepsilon) \subset A^c \Rightarrow$$
$$A \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset \Rightarrow x \nexists \#1 \subset (()A)$$

□

Falta la recíproca.

Ejercicio 3:

a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$$

Es cerrado, porque $= [-1,0]$ *Demostración: (hay que demostrar las inclusiones* $\subseteq$ *y* $\supseteq$*)*

b) No es ni cerrado ni abierto.

Obsevación: $\mathbb{R}$ *es el cierre de* $\mathbb{Q}$.

c)

7.2. Hoja 2

Ejercicio ?:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \textit{Continuidad:}$$

$$0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2+7y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| \leq |x| \to 0 \Rightarrow$$

Continua en 0.

Derivadas parciales en $(0,0)$

$$\lim_{h\to\overline{0}} F(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}) = \lim_{h\to\overline{0}} F(\frac{h^3/h^2}{h}) = 1$$

$$\lim_{h\to\overline{0}} F(\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}) = \lim_{h\to\overline{0}} F(\frac{0}{0+7h^2}) = 0$$

7.3. 5

b) $C_{D_4}(b)$. Basta con comprobar la conmutación con a^j y con a^jb siendo $j = 0,1,2,3$, ya que con eso podemos ver la conmutación con todos los elementos. Se puede demostrar la conmutatividad multiplicando a derecha e iezquierda por b y b^{-1} y si nos queda $= 1$, es conmutativo.

$$\begin{cases} b(a^j)b^{-1} = a^{-j}, a^j \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \\ b(a^jb)b^{-1} = a^{-j} = a^{-j}b, a^jb \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \end{cases}$$

7.4. 9

a)

b)

$$f(x,y) = \int_a^x yg(s)ds$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo $\left(f \text{ continua } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(xy)\underbrace{\frac{\partial xy}{\partial x}}_{=y} - \underbrace{g(a)\frac{\partial a}{\partial x}}_{=0} = g(xy)y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots = g(xy)x$$

7.5. Ejercicio de examen:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $g(1) = 4$.

Sea $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{x^2ye^z} g(t)dt$.

Demostrar que f es diferenciable y calcular $\nabla f(1, 1, 0)$.

8. Hoja 3

Ejercicio 3:

a) Probar que si la derivada de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe y no se anula entonces f es inyectiva.

b) Probar que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x cos(y) + 2e^x sen(y), -e^x cos(y))$ cumple que el determinante de su Jacobiano es siempre positivo pero sin embargo no tiene f no es inyectiva.

a)

Me parece demasiado intuitivo...

b)

$$J = \begin{pmatrix} e^x cos(y) + 2e^x sen(y) & e^x cos(y) + 2e^x sen(y) \\ -e^x cos(y) & e^x sen(y) \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$det(J) = (e^x cos(y) + 2e^x sen(y)) + e^x sen(y) + e^x cos(y) sen(y)(-e^x sen(y) + 2e^x cos(y)) =$$

$$= ... = 2e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Aunque el jacobiano sea siempre positivo, f no es inyectiva porque si tomamos $f(0, 0) = (1, -1) = f(0, 2\pi)$.

Ejercicio inventado: Sea $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Encontrar los puntos en los que la siguiente aplicación es localmente inversible de clase C^1.

- *1) $F \in C^1$ por ser F_1, F_2 polinomios.*
- *2)$det(J) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

  En este caso:

  $$det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

- *3) Por el teorema de la funcion inversa, existe una inversa local de F, C^1 en todo entorno de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y) \neq (0, 0)$.*

  Está la posibilidad de que exista la función inversa, pero no podemos deducir nada del teorema. Para verlo, recurrimos a la definición de inyectividad, y en este caso, no *es inyectiva porque es una función par.*

Ejercicio 5:

a) $f \in C^1(\mathbb{R}), f' \neq 0$. No tiene sentido...

$$\begin{cases} u(x,y) = f(x) \\ v(x,y) = -y + f(x) \end{cases}$$

Probar que tiene inversa global.

b) Si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, hallar las derivadas parciales de dicha inversa en el origen.

Mismos pasos que en el ejercicio anterior:

- *1)* $F \in C^1$ *por ser* F_1, F_2 *, porque* $f \in C^1$.
- *2)*$det(J) > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$det(J) = det \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ f(x) + xf'(x) & -1 \end{pmatrix} = -f'(x) \neq 0 \textit{ por hipótesis}$$

b) *Como nos piden calcular las derivadas parciales de la función inversa. (La inversa de la matriz jacobiana, es la jacobiana de la matriz inversa)*

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} f'(0) & 0 \\ f(0) & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que buscamos en la matriz inversa, que en este caso es ella misma.

El teorema solo nos demuestra la existencia de la inversa local (contraejemplo:(8)). Hay que ver la inyectividad para hablar de inversa global.

$$F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$
$$\textit{Condición: } F(x_1,y_1) = F(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$
$$u(x_1,y_1) = u(x_2,y_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$
$$f' \textit{ no se anula } \Rightarrow \textit{f es inyectiva} \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$v(x_1,y_1) = v(x_2,y_2) - y_1 + x_1 f(x_1) = -y_2 + x_2 f(x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{x_1=x_2}$$
$$y_1 = y_2$$

Hemos demostrado que F es inyectiva y por lo tanto admite inversa global.

Ejercicio 6: Estudiar si se puede despejar (x, y, z) en términos de (u, v, w)

$$F(x,y,z) = \begin{cases} u = 2x + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xyz \\ v = x + y + 2xy + 2x^2 \\ w = 4x + y + z + 3y^2 + 3z^2 + 6yz \end{cases}$$

- $u, v, w \in C^1$ *por se suma de polinomios.*
-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 1$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,0) = 4$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(0,0) = 1$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}(0,0) = 1$$

$det(J) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists$ *inversa local de clase* C^1 *en un entonrno de cualquier punto, en concreto en un entorno del origen.*

8.1. 8:

a)

$$det(J) = det \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -rsen(\varphi) & 0 \\ sen(\varphi) & rcos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rcos^2(\varphi) + rsen^2(\varphi) = r$$

Por tanto, por el teorema de la función inversa, existe una inversa de clase $C^1, \forall(r, h, \varphi) \Leftrightarrow r \neq 0$.

8.2. 9:

b: Calcular la inversa en (2,-2$\sqrt{3}$) Resolver:

$$\begin{cases} 2 = rcos(\varphi) \\ -2\sqrt{3} = rsen(\varphi) \end{cases}$$

Hay que hallar la inversa de:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

8.3. 13

$$det(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$$

Esto es aplicando la primera ecuación de Cauchy-Riemman. Obteniendo una condición

Aplicando la otra condición en el jacobiano llegamos a $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \neq (0,0)$

c) Queremos ver que $g(x,y) = (f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2, 2f_1(x,y)f_2(x,y))$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemman. Facilito.