

Análisis Matemático

Víctor de Juan Sanz

13/14 C1

Índice

1	Contenido de la asignatura	2
1.1	Preliminares	2
1.2	Teorema función inversa, implícita y rango	2
1.3	Mínimos y máximos condicionados	2
1.4	Subvariedades diferenciales	2
1.5	Integración en subvariedades diferenciales	2
1.6	Teorema de Stokes	2
2	Preliminares del análisis matemático	3
2.1	Producto escalar, norma y distancia	3
2.2	Relación norma - producto escalar	7
2.3	Equivalencia de normas	8
3	Topología	11
3.1	Conexión	14
4	Funciones continuas, abiertos y cerrados	14
4.1	Aplicaciones lineales	16
4.2	Norma de matrices	16
5	Límite	18
6	Diferenciación	19
6.1	Regla de la cadena:	21
6.2	Extensiones del teorema del Valor Medio	22
6.3	Derivada direccional:	24
6.4	Derivadas iteradas:	26
6.5	Máximos y mínimos	26
6.5.1	Resultados de álgebra lineal	27
6.5.2	Ejemplos	28
6.6	Máximos y mínimos absolutos	29
6.6.1	Ejemplos	30
6.7	Desarrollo de Taylor	30
7	Teoremas de la función implícita y la función inversa	31
8	Ejercicios	36
8.1	Hoja 1	36
8.2	Hoja 2	37
8.3	37
9	Convergencia y continuidad	38

Datos de interés:
Jesus García Azorero
Despacho: 17-608
Correo: jesus.azorero@uam.es

1. Contenido de la asignatura

1.1. Preliminares

Repaso de contenidos de Cálculo II como conjuntos abiertos y cerrados, gradiente ...

1.2. Teorema funcion inversa, implicita y rango

Aplicación a funciones no lineales de los teoremas fundamentales de cálculo II

1.3. Mínimos y máximos condicionados

Multiplicadores de Lagrange

1.4. Subvariedades diferenciales

Objetos de dimensión n en espacios de dimensión m ($n < m$).

1.5. Integración en subvariedades diferenciales

1.6. Teorema de Stokes

Demostración del teorema con lenguaje de las formas diferenciales.

2. Preliminares del análisis matemático

A lo largo del curso vamos a trabajar en $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$ $x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$

2.1. Producto escalar, norma y distancia

Durante todo el año denotaremos al vector (x_1, x_2, \dots, x_n) como \bar{x} por comodidad.

Definición 2.1 Producto escalar euclídeo.

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Propiedades:

- $\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$
- $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$
- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Las tres primeras son la consecuencia de que el producto escalar tiene que ser bilineal.

En general, un producto escalar es una matriz definida positiva y se opera de la siguiente manera:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x_1, x_2, \dots, x_N) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Definición 2.2 Norma euclídea.

$$\|\bar{x}\| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \dots = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades:

- $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
- Homogeneidad: $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$
- Desigualdad triangular: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Lema 2.3. $||\bar{x}|| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$ para cualquier producto escalar $*$.

Definición 2.4 Norma. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una norma.

En general se tiene $||\cdot||_p, p \in \mathbb{N}$ y se definen todas de la misma forma:

$$||\bar{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay tres casos particulares, la norma uno

$$||\bar{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

La norma 2, que es la norma euclídea

y la norma infinito

$$||\bar{x}||_{\infty} = \text{máx} \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$$

Vamos a demostrar que la norma p cumple las 3 propiedades de una norma. Para ello, nos apoyaremos en dos teoremas previos:

Teorema 2.5 (Desigualdad de Young). Sea $p > 1$ y tomamos p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (exponente conjugado). Entonces:

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \cdot |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'}$$

Demostración. Se utiliza la idea de la función logaritmo, que es cóncava¹ y creciente. Tomando 2 puntos A y B tenemos la condición de concavidad

$$t \log A + (1 - t) \log B \leq \log(tA + (1 - t) \cdot B)$$

. Utilizando la derivada hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y tomamos un punto que dista t de A y $(1 - t)$ de B . Como la función es cóncava sabemos que ese valor será menor que el valor del logaritmo en un punto t entre A y B .

Tomando $A = |a|^p$, $B = |b|^{p'}$ y $t = \frac{1}{p} \rightarrow 1 - t = \frac{1}{p'}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \cdot \log|a|^p + \frac{1}{p'} \cdot \log|b|^{p'} &\leq \log \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \\
\log|a| + \log|b| &\leq \log \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \\
\log|ab| &\leq \log \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \\
|ab| &\leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.6 (Desigualdad de Hölder). *Se trata de una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ocurre en el caso $p = 2$*

$$\sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \|\bar{x}\|_p \|y_i\|_p$$

Demostración. Tomamos

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{|x_i|}{\|\bar{x}\|_p} \\
b_i &= \frac{|y_i|}{\|\bar{y}\|_{p'}}
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{p'} b_i^{p'}$$

Sustituimos:

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}} \leq \frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p' \cdot \|y\|_{p'}^{p'}}$$

Tomamos sumatorios y, teniendo en cuenta que $\|x\|_p^p = \sum |x_i|^p$, nos queda

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum |x_i|^p + \frac{1}{p' \|y\|_{p'}^{p'}} \sum |y_i|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Una vez probadas las dos desigualdades anteriores, pasamos a probar la desigualdad triangular:

Demostración. El objetivo es demostrar que

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p$$

y vamos a hacerlo en varios pasos.

Para evitarnos las raíces empezamos con $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p &= \sum_1^N |x_i + y_i|^p = \sum_1^N |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} = \\ &= \sum_1^N |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_1^N |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (2.6) tenemos:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p \leq \sum (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i + y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_* + \sum (|y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i + y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_*$$

Por ser p y p' exponentes conjugados es fácil comprobar que $1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$
Sacamos factor común y pasamos al otro lado obteniendo (PASO INTERMEDIO?)

$$\left(\sum_1^N |x_i + y_i|^p \right)^{\overbrace{\left(1 - \frac{1}{p'} \right)}^p} = \|\bar{x} + \bar{y}\|_p^p \leq \|\bar{x}\|_p^p + \|\bar{y}\|_p^p$$

Guille: esta demostración es muy, muy rara.

□

EJERCICIO PROPUESTO: Tomamos en el plano el conjunto de los puntos cuya norma es 1. Tomando en la norma $p=2$ sale la circunferencia. ¿Y en $p=3$?

Observación: Estos argumentos se pueden utilizar para demostrar

$$\int |f \cdot g| \, dx \leq \left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Definición 2.7 Distancia euclídea.

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{y} - \bar{x}\|$$

Propiedades:

- La distancia es siempre positiva: $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
- $d(\bar{x}, \bar{x}) = 0$
- Simetría: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$
- Desigualdad triangular $d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$. La distancia entre 2 puntos es menor o igual en línea recta que pasando por un punto intermedio.

Definición 2.8 Distancia. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una distancia.

Recapitulando Con un producto escalar puedo definir una norma y con esa norma puedo definir una distancia. Pero... ¿Podemos definir una norma que no venga de un producto escalar y/o alguna distancia que no provenga de una norma? Sí, por ejemplo

$$\tilde{d}(\bar{x}, \bar{y}) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$$

No cuesta mucho comprobar que cumple las 3 propiedades de una distancia. Además, esta distancia es cuanto menos curiosa porque nunca será mayor de π .

Podemos comprobar que si existiera una norma que midiese esta distancia tendríamos

$$\|\tilde{x}\| = \tilde{d}(\bar{x}, \bar{0}) = |\arctan(x)|$$

pero esto no cumple la propiedad: $\|\lambda \tilde{x}\| = |\arctan(\lambda x)| \neq |\lambda| |\arctan(x)| = |\lambda x| \|\tilde{x}\|$ ya que ninguna distancia puede ser mayor que π y tomando un $\lambda > \pi$ se produciría la contradicción.

2.2. Relación norma - producto escalar

Teorema 2.9. Supongamos que tengo un producto escalar $*$ y una norma asociada

$$\|\bar{x}\| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$$

. Entonces

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2(\bar{x} * \bar{y})$$

Demostración.

$$||\bar{x} + \bar{y}||^2 = (\bar{x} + \bar{y}) * (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} * \bar{x} + \bar{x} * \bar{y} + \bar{y} * \bar{x} + \bar{y} * \bar{y} = ||\bar{x}||^2 + ||\bar{y}||^2 + 2(\bar{x} * \bar{y})$$

□

Esa norma asociada al producto escalar tiene dos propiedades importantes:

- Paralelogramo: $||\bar{x} + \bar{y}||^2 + ||\bar{x} - \bar{y}||^2 = 2(||\bar{x}||^2 + ||\bar{y}||^2)$
- Polarización: $||\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||\bar{x} - \bar{y}||^2 = 4(\bar{x} * \bar{y})$

2.3. Equivalencia de normas

Sea $||\cdot||$ una norma en \mathbb{R}^N . Si intento calcular la norma de un vector \bar{x}

$$||\bar{x}|| = \left\| \sum_{i=1}^N x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N ||x_i e_i|| = \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot ||e_i||$$

Tenemos: $||\bar{x}|| \leq \sum_{i=1}^N c_i |x_i|$ siendo $c_i = ||e_i||$. Aplicando Cauchy-Schwarz nos queda

$$\sum_{i=1}^N (c_i^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^N (|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, puedo controlar cualquier norma con una constante y la norma euclídea:

$$|||\bar{x}||| \leq C ||x||_2$$

En particular, $0 \leq |||\bar{x}_n - \bar{x}||| \leq c ||\bar{x}_n - \bar{x}||$.

Observación: Si aplicamos Holder en vez de Cauchy, sale la igualdad con la norma p y no con la euclídea.

Aplicación: Sea $F(\bar{x}) = |||\bar{x}|||$ y $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| = |||\bar{x} - \bar{y}||| = ||\bar{x} - \bar{y}|| \leq C ||\bar{x} - \bar{y}||$$

Utilizando: $|||\bar{a} - \bar{b}||| \geq |||\bar{a}||| - |||\bar{b}|||$ ²

Es decir, cualquier norma en \mathbb{R}^n es **continua** respecto de la norma euclídea. ³

Teorema 2.10 (Relación norma \leftrightarrow producto escalar). $||\cdot||$ una norma cualquiera de \mathbb{R}^N proviene de un producto escalar si y sólo si la norma satisface la identidad del paralelogramo.

²(la desigualdad triangular con restas, que se saca con un simple cambio de variable)

³Continua si la tomas como una función de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}

Demostración. En el apartado anterior (2.2) demostramos la implicación hacia la derecha. Vamos a demostrar la recíproca: Suponemos que la norma satisface la identidad del paralelogramo:

$$||\bar{a} + \bar{b}||^2 + ||\bar{a} - \bar{b}||^2 = 2 ||\bar{a}||^2 + 2 ||\bar{b}||^2 \quad (2.3.1)$$

Queremos probar que existe un producto escalar $*$ tal que $||\bar{x}|| = (\bar{x} * \bar{x})^{\frac{1}{2}}$, así que definimos uno utilizando la identidad de polarización:

$$\bar{x} * \bar{y} = \frac{1}{4} (||\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||\bar{x} - \bar{y}||^2) \quad (2.3.2)$$

Queremos probar que, efectivamente, $*$ es un producto escalar, así que tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

1. $\bar{x} * \bar{y} = \bar{y} * \bar{x}$.
2. $\bar{x} * \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x}$
3. $(\bar{x} * \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
4. $(\lambda \bar{x}) * \bar{y} = \lambda (\bar{x} * \bar{y})$
5. $(\bar{x} + \bar{y}) * \bar{z} = \bar{x} * \bar{z} + \bar{y} * \bar{z}$

Las propiedades 1, 2 y 3 son triviales. Vamos con 4 y 5

Demostración de la 4ª propiedad Demostraremos que se cumple por inducción cuando $\lambda \in \mathbb{N}$. Primero probamos para $\lambda = 2$.

$$\begin{aligned} (2\bar{x}) * \bar{y} &= \text{usando (2.3.2)} \\ &= \frac{1}{4} (||2\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||2\bar{x} - \bar{y}||^2) = \\ &= \frac{1}{4} \left(||\underbrace{\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} + \bar{y}}_b||^2 - ||\underbrace{\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} - \bar{y}}_{-b}||^2 \right) = \text{usando (2.3.1)} \\ &= \frac{1}{4} (2||\bar{x}||^2 + 2||\bar{x} + \bar{y}||^2) = \\ &= 2\frac{1}{4} (||\bar{x} + \bar{y}||^2 - ||\bar{x} - \bar{y}||^2) = 2(\bar{x} * \bar{y}) \end{aligned}$$

Conclusión: si $\lambda = 2$ vemos que sale fuera y por lo tanto se cumple.

Paso 2 de la inducción: buscamos demostrar la propiedad con $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& (n\bar{x}) * \bar{y} = \text{usando (2.3.2)} \\
& = \frac{1}{4} (|||n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||n\bar{x} - \bar{y}|||^2) = \\
& = \frac{1}{4} \left(||| \underbrace{(n-1)\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} + \bar{y}}_b |||^2 - ||| \underbrace{(n-1)\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} - \bar{y}}_b |||^2 \right) = \text{usando (2.3.1)} \\
& = \dots = 2(\bar{x} * \bar{y}) + (n-2)(\bar{x} * \bar{y}) = \text{usando hip. de inducción} \\
& = n(\bar{x} * \bar{y})
\end{aligned}$$

Queda demostrado por lo tanto para $\lambda \in \mathbb{N}$. Falta ahora demostrarlo para el resto de conjuntos de números.

Para $\lambda \in \mathbb{Z}$ utilizaremos $(-\bar{x}) * \bar{y} = -(\bar{x} * \bar{y})$ y podremos usar la demostración de los naturales.

Para $\lambda = n \in \mathbb{Q}$ con $n = \frac{p}{q}$, siendo p y q primos entre sí, vemos que

$$\left(\frac{p}{q}\bar{x}\right) * \bar{y} = \frac{q \left(\left(\frac{p}{q}\bar{x}\right) * \bar{y} \right)}{q} = \frac{\left(q \cdot \frac{p}{q}\bar{x}\right) * \bar{y}}{q} = \frac{(p\bar{x} * \bar{y})}{q}$$

que tal y como habíamos demostrado antes es igual a $\frac{p(\bar{x} * \bar{y})}{q}$, con lo que queda demostrado también para los racionales.

Por último, queremos demostrarlo cuando $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda = \liminf nr_n$. Utilizaremos el resultado previo de que cualquier norma es continua.

\bar{x}, \bar{y} fijos.

Revisar: Los $|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2$ y $|||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2$ son continuos.

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{x} * \bar{y} &= \frac{1}{4} (|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2) = \\
\lim_{n \rightarrow \infty} (|||r_n\bar{x} + \bar{y}|||^2 - |||r_n\bar{x} - \bar{y}|||^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n\bar{x} * \bar{y}) = \\
\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\bar{x} * \bar{y}) &= \alpha(\bar{x} * \bar{y})
\end{aligned}$$

WTF es esto.

Demostración de la 4 propiedad:

$$\begin{aligned}
A &= (\bar{x} + \bar{y}) * \bar{z} = \frac{1}{4} (|||\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}|||^2 - |||\bar{x} + \bar{y} - \bar{z}|||^2) \\
B &= \bar{x} * \bar{z} = \frac{1}{4} (|||\bar{x} + \bar{z}|||^2 - |||\bar{x} - \bar{z}|||^2) \\
C &= \bar{y} * \bar{z} = \frac{1}{4} (|||\bar{y} + \bar{z}|||^2 - |||\bar{y} - \bar{z}|||^2)
\end{aligned}$$

Demostraremos que $A - B - C = 0$

COMPLETAR la comprobación.

□

Observación: $d(\bar{x}, \bar{y}) = |||\bar{x} - \bar{y}|||$ para alguna norma $||| \cdot ||| \Leftrightarrow (d(\bar{x} + \bar{z}) + d(\bar{y} + \bar{z}) = d(\bar{x}, \bar{y}) \wedge d(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = |\lambda| d(\bar{x}, \bar{y}))$

3. Topología

Definición 3.1 Bola. Se define la bola de radio R centrada en el punto \bar{x}_0 como

$$B_R(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N \mid \underbrace{d(\bar{x}, \bar{x}_0)}_{=||\bar{x}-\bar{x}_0||} < R\}$$

Para evitar jaleos, al tratar la distancia vamos a tomar la norma euclídea. Como todas las normas son equivalentes, nos da igual tomar una que otra.

Definición 3.2 Conjunto abierto. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es abierto si y sólo si $\forall \bar{a} \in A \exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(\bar{a}) \subset A$

Definición 3.3 Conjunto cerrado. Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si su complementario $B^c = \mathbb{R}^N - B$ es abierto.

Teorema 3.4 (Caracterización de cerrados en términos de sucesiones). *Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si para cualquier sucesión convergente $\{x_n\} \subset B$ se cumple que $\lim x_n \in B$.*

Teorema 3.5 (Operaciones con conjuntos abiertos y cerrados). *Suponemos conjuntos de dimensión finita:*

- Unión arbitraria de abiertos \rightarrow abierto
- Intersección finita de abiertos \rightarrow abierto
- Unión finita de cerrados \rightarrow cerrado
- Intersección arbitraria de cerrados \rightarrow cerrado

Definición 3.6 Punto de acumulación. La idea intuitiva es aquellos puntos a los que puedo llegar en el límite, es decir, puntos que a su alrededor a una distancia arbitrariamente pequeña existen otros puntos del conjunto.

$$A \subset \mathbb{R}^N, a \in (A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Siendo (A) es el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 3.7 Frontera. La frontera ∂A de un conjunto A son aquellos puntos para los que en su entorno (para cualquier ε) hay puntos tanto del conjunto como puntos de fuera del conjunto.

$$a \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$$

Definición 3.8 Interior. El interior es el conjunto abierto más grande que está contenido en el conjunto A .

Definición 3.9 Cierre. El cierre de un conjunto AA es el conjunto cerrado más pequeño en el que está contenido A .

Observación: Cierre e interior no los vamos a definir formalmente porque se dan por supuesto.

Definición 3.10 Conjunto compacto. Un conjunto que cumpla cualquiera de las 3 propiedades siguientes.

Teorema 3.11 (Conjunto cerrado y acotado). Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Son equivalentes:

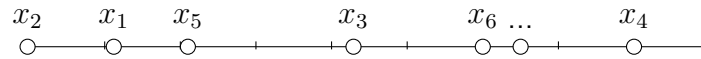
1. K cerrado y acotado.
2. Para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset K$, podemos encontrar una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ con $\lim x_{n_j} \in K$.
3. Dado cualquier recubrimiento $\{A_i\}$ abierto de modo que $K \subset \cup \{A_i\}$ puedo encontrar un recubrimiento finito $\{A_j\}, j = 1, \dots, M \quad K \subset \bigcup_{i=1}^M A_i$

Demostración.

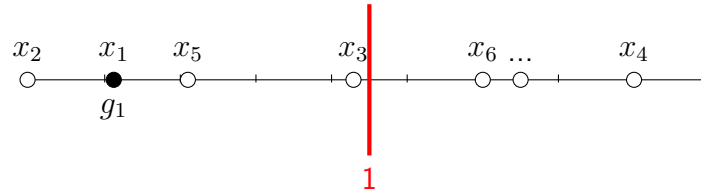
2 implica 1 Supongamos que K no estuviera acotado (negamos la propiedad 1). Consideremos una sucesión de vectores $\{x_n\}$ de tal forma que $\|x_n\| = n$, creciente y no acotada, pero con todos los elementos en K . Es imposible encontrar una subsucesión convergente, lo que contradice 2.

Si, por otra parte, K no fuera cerrado, tendríamos que la frontera está fuera del conjunto, y podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ con $\lim x_n \in \partial K$, lo que contradice 2.

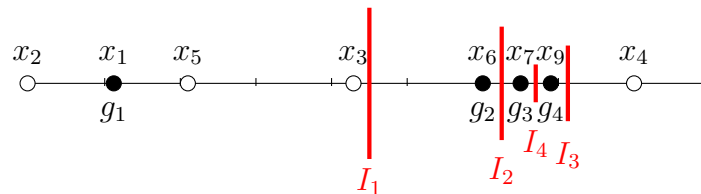
1 implica 2 Empecemos por el caso sencillo, explorando una sucesión cualquiera $\{\bar{x}_n\} \subset K \subset \mathbb{R}$, donde K es, como decíamos en el enunciado, cerrado y acotado. Para encontrar una subsucesión convergente, usaremos el criterio de bisección.



Escogemos el primer elemento g_1 de nuestra subsubcesión, y dividimos por la mitad el segmento.



En al menos una de las dos mitades del segmento habrá infinitos términos: cogemos esa mitad y repetimos los mismos pasos. Finalmente, llegaremos a una subsucesión de este estilo:



Nuestra subsucesión $\{g_x\}$ es igualmente infinita. Tal y como la hemos definido, tenemos que cada g_i está en un intervalo (I_i, I_{i-1}) que cada vez se hace más pequeño. Es decir, que la subsucesión $\{g_x\}$ es de Cauchy y, por lo tanto convergente.

Ahora sólo queda ver cómo podríamos obtener esa subsucesión cuando estamos en espacios que no sean \mathbb{R}^N . La idea es sencilla: primero, buscamos una subsucesión que converja en la primera coordenada. Dentro de esa subsucesión, buscamos otra subsucesión que converja además en la segunda, y así con las N coordenadas. \square

Teorema 3.12. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Entonces, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en K existen $x_m, x_M \in K$ / $F(x_m) \leq F(x) \leq F(x_M) \forall x \in K$.

Es decir, si F es continua en K alcanza su máximo y su mínimo en el conjunto.

Aplicación: $F(\bar{x}) = ||\bar{x}||$ una norma (que ya sabemos que es continua):

Conclusión: $m ||x|| \leq ||\bar{x}|| \leq C ||\bar{x}||$

Teorema 3.13. En \mathbb{R}^N TODAS las normas son equivalentes.

3.1. Conexión

Definición 3.14 Conexión por caminos. Dados $a, b \in C$ podemos encontrar una aplicación continua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = b$ con $\varphi(t) \in C \forall t \in [0, 1]$.

Es decir, C es conexo por caminos si podemos encontrar una "línea", un camino que una dos puntos cualquiera del conjunto y que además no se salga del conjunto.

Definición 3.15 Conexión por abiertos. C es conexo por conjuntos si para cualquier par de abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^N / C \subset A \cup B$ se cumple que, si $A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Esto es equivalente a decir que C no puede ser expresado como unión de dos conjuntos disjuntos.

Observación:



Figura 1: Conjunto peine

Es curioso comprobar que estas 2 definiciones no son equivalentes. Tomemos el conjunto peine (figura 3.1)

$$\{(x, 0), x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y), y \in (0, 1]\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, y \right), y \in [0, 1] \right\}$$

Es un conjunto conexo por abiertos porque no podemos separarlo en dos conjuntos disjuntos. Sin embargo, no es conexo por caminos porque, si queremos ir del punto $(0, 1)$ al $(0, 0.5)$ no podemos hacerlo ya que el único camino pasaría por el punto $(0, 0)$, que no está en el conjunto.

4. Funciones continuas, abiertos y cerrados

Sea F continua. Contrario a lo que podríamos intuir,

1) A abierto $\nRightarrow F(A)$ abierto. 2) B cerrado $\nRightarrow F(B)$ cerrado.

Definición 4.1 Función inversa. Dada

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

, definimos su inversa como

$$F^{-1}(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N \mid F(\bar{x}) \in A\}$$

Teorema 4.2 (Función inversa).

- $F \text{ continua} \wedge A \text{ abierto} \Rightarrow F^{-1}(A) \text{ abierto.}$
- $F \text{ continua} \wedge B \text{ cerrado} \Rightarrow F^{-1}(A) \text{ cerrado.}$

Este teorema nos sirve para decir fácilmente si un conjunto es abierto o cerrado. Por ejemplo, consideremos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \cos(x|y|) - e^z < 1\}$$

Podemos definir ahí la función F como

$$F(x, y, z) = x^2 + \cos(x|y|) - e^z$$

que va de \mathbb{R}^3 a cierto conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 1\}$. Podemos reescribir M como

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) \in A\}$$

o, de otra forma, $M = F^{-1}(A)$. Según el teorema (4.2), como A es abierto entonces M también es abierto.

Demostración. 1) Dado un $\bar{x} \in F^{-1}(A)$ queremos hallar un $R > 0$ tal que $B_R(\bar{x}) \subset F^{-1}(A)$. Partimos de

$$\bar{x} \in F^{-1}(A) \Leftrightarrow F(\bar{x}) \in A$$

Como F es continua, $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(F(\bar{x})) \subset A$. Esto es equivalente a decir que, para cualquier \bar{z}

$$\|\bar{z} - F(\bar{x})\| < \varepsilon \Rightarrow \bar{z} \in A$$

Por la definición de continuidad, dado un $\bar{s} \in B_R(\bar{x})$

$$\exists \delta > 0 \mid \|\bar{x} - \bar{s}\| < \delta \Rightarrow \|F(\bar{x}) - F(\bar{s})\| < \varepsilon$$

y por lo tanto $F(\bar{s}) \in A$ y $\bar{s} \in F^{-1}(A)$. Conclusión: Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $s \in B_R(\bar{x}) \Rightarrow s \in F^{-1}(A)$.

Pofale. Yo no lo pillo.

□

4.1. Aplicaciones lineales

Sea: $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

L es lineal $\Leftrightarrow L(\lambda \bar{x}) = \lambda L(\bar{x}) \wedge L(\bar{x} + \bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y})$

Además, toda aplicación lineal se puede escribir en forma de matriz.

$$L(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.3. L lineal $\Rightarrow L$ continua.

Demostración.

$$L(\bar{x}) = \begin{pmatrix} A_1 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

COMPLETAR

□

4.2. Norma de matrices

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \rightarrow F(\bar{x}) = \underbrace{\|A\bar{x}\|}_{L(\bar{x})}$$

F es continua.

Sabemos que existe $c > 0$ tal que $\|A\bar{x}\| \leq C\|\bar{x}\|$, es decir, $\|A\bar{x}\| \leq C$ si $\|\bar{x}\| = 1$.

$$M = \{\|A\bar{x}\| \mid \|\bar{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

⁴ La mejor constante C es la cota superior mínima (supremo) que vamos a llamar α .
 $\alpha \in M$

α se alcanza en M , porque F es continua y M es compacto.

Definición 4.4 Norma de una matriz.

$$\|A\| = \alpha = \max\{\|A\bar{x}\| \mid \|\bar{x}\| = 1\}$$

Ejercicio propuesto: demostrar que $\|\cdot\|$ es una norma. Demostración de la 4ª propiedad:

⁴Conjunto esfera unidad

$$\|A + B\| = \max \| (A + B)\bar{x} \| = \| (A + B)\bar{x}_{A,B} \| = \| A\bar{x}_{AB} + B\bar{x}_{AB} \| \leq$$

$$\underbrace{\|A\bar{x}_{AB}\|}_{\leq \max \|A\bar{x}\| = \|A\|} + \underbrace{\|B\bar{x}_{AB}\|}_{\|B\|}$$

Ejemplo: COMPLETAR Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular su norma. Resolución: Acabamos teniendo que maximizar (sabiendo que $|x| + |y| = 1$: $|x + 2y| + |-3x + y| + |2x| \leq |x| + |2y| + |3x| + |y| + 2|x| = 6|x| + 3|y| \leq 6(|x| + |y|) = 6$ ¿Podemos encontrar un vector (x_0, y_0) tal que $\|A(x_0, y_0)^T\|_1 = 6$? Tomando $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$ lo encontramos.

Obsevación: Coincide con la suma de los valores absolutos de las columnas y escoger el más grande.

Aplicando lo mismo con la norma infinito: COMPLETAR COMPLETAR

Lema 4.5. Sea A una matriz, $A^T A$ es simétrica.

Lema 4.6. $\underbrace{\langle \bar{x}, A\bar{y} \rangle}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{\langle A^T \bar{x}, \bar{y} \rangle}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^M}$

$A^T A$ diagonalizable ($N \times N$). Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$.

Desarrollamos en B : $\bar{x} = \sum \alpha_i \bar{v}_i$. Con $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ con $i \neq j$.

Calculamos $\|\bar{x}\| = \sum \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle$

$$A^T A \bar{x} = (A^T A) \left(\sum \alpha_i v_i \right) = \sum (\alpha_i \lambda_i \bar{v}_i)$$

Queremos hallar el máximo de $\|A\bar{x}\|$ cuando $\|\bar{x}\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|A\bar{x}\|^2 &= \langle A\bar{x}, A\bar{x} \rangle = \langle A^T A \bar{x}, \bar{x} \rangle = \underbrace{\left\langle \sum \lambda_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i \right\rangle}_{\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ con } i \neq j} \\ &= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{\max} \left(\sum \alpha_i^2 \right) = \lambda_{\max} \end{aligned}$$

Conclusión: Hemos demostrado que:

$$\max \|A\bar{x}\| \underbrace{\leq}_{= (\lambda_{\max})^{\frac{1}{2}}}$$

Este máximo se puede alcanzar tomando x como el autovector asociado, por lo que el \leq se convierte en un $=$.

5. Limite

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Definición 5.1 Límite.

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} F(\bar{x}) = \bar{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta \Rightarrow \|F(\bar{x}) - \bar{L}\| < \varepsilon$$

Importante el detalle de $0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|$, no es un \leq , porque no se necesita que la función esté si quiera definida en el punto \bar{a} .

Teorema 5.2. Sean $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ y $\bar{L} = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^N$.

$$x_n \rightarrow \bar{L} \Leftrightarrow (x_1 \rightarrow L_1) \wedge (x_2 \rightarrow L_2) \wedge \dots \wedge (x_n \rightarrow L_n)$$

Idea para el cálculo de límites:

- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} F(\bar{x}) = \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{0}} F(\bar{y} + \bar{a})$.
- Límite a lo largo de rectas. $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} F(\bar{x}) \sim \lim F(t\bar{v})$

Si $\lim F(t\bar{v})$ toma valores distintos dependiendo de $\bar{v} \Leftrightarrow \nexists \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} F(\bar{x})$

Pero, si $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} F(t\bar{v}) = L \Rightarrow \bar{L}$ es el candidato a ser el límite (no tiene porque serlo). El siguiente paso sería demostrar con argumentos de comparación (Sandwich) u otros que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} F(\bar{x}) = L$.

El contraejemplo es $f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}$. Veamos por que:

Nos acercamos al límite por medio de rectas:

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x \cdot (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x^3}{(1 + x^2 m^4) x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x, mx)) \rightarrow 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Pero si nos acercamos al límite por medio de $x = y^2$ tenemos:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y)) \neq 0$$

Teorema 5.3. F continua \Leftrightarrow para cualquier abierto A , $F^{-1}(A)$ es abierto.

Obsevación: Si $F : \omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M \Leftrightarrow$ para cualquier abierto A , $F^{-1}(A) = \omega \cup V$, con V abierto.

Demostración. \Rightarrow De este teorema ya teníamos demostrada la implicación \Rightarrow .

\Leftarrow Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|\bar{x} - \bar{a}\| < \delta \Rightarrow \underbrace{\|F(\bar{x}) - F(\bar{a})\|}_{F(\bar{x}) \in B_\varepsilon(F(\bar{a}))} < \varepsilon$$

Tomamos

$$A = B_\varepsilon(F(\bar{a})) \rightarrow F(\bar{a}) \in A \Rightarrow \bar{a} \in F^{-1}(A)$$

Por hipótesis, $F^{-1}(A)$ abierto $\wedge \bar{a} \in F^{-1}(A)$

$$\exists B_\delta(\bar{a}) \subset F^{-1}(A). \text{ Es decir, } \bar{s} \in B_\delta(\bar{a}) \subset F^{-1}(A), s \in F^{-1}(A) \Rightarrow F(s) \in A = B_\varepsilon(F(\bar{a}))$$

□

Observación: Este teorema también se cumple para cerrados.

6. Diferenciación

Definición 6.1 . F diferenciable en \bar{a} si

$$\begin{aligned} \exists \text{ aplicación lineal } L \text{ tal que } \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{a}) - L(\bar{x} - \bar{a})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} &\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} 0 \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{a}} \frac{\|F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}\|}{\|\bar{h}\|} \end{aligned}$$

Obsevación:

- Si existe, L es única.

Demostración. Supongamos que existen L_1, L_2 .

$$0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_1\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_2\bar{h}}{\|\bar{h}\|}$$

$$\text{Sumando: } 0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{||F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_1 \bar{h}|| + ||F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L_2 \bar{h}||}{||\bar{h}||}$$

Obsevación: $||A - B|| = ||A + (-B)|| \leq ||A|| + ||B||$

$$\leq \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (||F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a})|| + ||L_1 \bar{h}|| + ||L_2 \bar{h}||)}{||\bar{h}||}$$

Completar la contradicción. □

Notación: (Diferencia de F en \bar{a})

$$L \equiv DF(\bar{a})$$

Proposición:

$$F \text{ diferenciable en } \bar{a} \Rightarrow F \text{ continua en } \bar{a}$$

Demostración.

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{||F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}||}{||\bar{h}||} = 0$$

Esta es la definición de diferenciable. Para que este límite sea 0, el numerador tiene que tender a 0, por lo que $F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) \rightarrow 0$ □

Obsevación: F diferenciable en \bar{a} .

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Sabemos:

$$0 = \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{||F(\bar{a} + \bar{h}) - F(\bar{a}) - L\bar{h}||}{||\bar{h}||} = 0$$

En particular (tomando $h = t\bar{e}_1$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \lim_{t \rightarrow 0} || \underbrace{\frac{1}{t} F(\bar{a} + t\bar{e}_1) - F(\bar{a}) - L\bar{e}_1}_{\bar{W}(t) \in \mathbb{R}^N} ||$$

Tomando la componente k-esima

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} F\left(\frac{F_k(a + te_i) - F_k(a)}{t} - L_{ki}\right)$$

$$L_{ki} = \lim_{t \rightarrow 0} F\left(\frac{F_k(a + te_i) - F_k(a)}{t}\right) = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\bar{a})$$

Nomenclatura: Aproximación lineal \sim Diferencial.

Matriz jacobiana \sim Jacobiana.

Teorema 6.2. Matriz asociada a $DF(\bar{a}) \equiv$ Matriz de las derivadas parciales de F .

$$DF(\bar{a}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.3. F diferenciable en $\bar{a} \Rightarrow \exists \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\bar{a}), i = 1, 2, \dots, N \wedge k = 1, 2, \dots, M$

El contraejemplo para demostrar \Leftarrow es el mismo que en los límites a lo largo de rectas.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comentarios sobre notación:

- $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Utilizamos notación vectorial en vez de matricial (porque tendríamos una matriz columna).
Ejemplo: la velocidad (en un instante de tiempo, un punto en el espacio).
- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ (función escalar):
COMPLETAR Se suele llamar vector gradiente.
-

6.1. Regla de la cadena:

Derivada de una composición:

COMPLETAR DIBUJITO

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M.$$

$$G : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^K.$$

$$H = G \circ F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K.$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^N, \bar{y} \in \mathbb{R}^M$$

F diferenciable en \bar{a} , G diferenciable en $F(\bar{a})$. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en \bar{a} . Además la expresión matricial es:

$$\underbrace{DH(\bar{a})}_{K \times N} = \underbrace{DG(F(\bar{a}))}_{K \times M} \cdot \underbrace{DF(\bar{a})}_{M \times N}$$

Obsevación:

Notación de Leibniz: Para calcular 1 único elemento de la matriz diferencial (el de la fila i , columna j):

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^M \frac{\partial G_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Con cuidado de $\frac{\partial G_i}{\partial y_k}$ evaluado en $F(\bar{a})$ y $\frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ evaluado en \bar{a} .

Aplicaciones y ejemplos:

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Sea $g \equiv F \circ \sigma \equiv$ Comportamiento de F a lo largo de la curva $\sigma, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$g'(t_0) = DF(\sigma(t_0))D\sigma(t_0) = \underbrace{\quad \dots \quad}_{\text{Notación matricial}} = \underbrace{\langle \nabla F(\sigma(t_0)) \rangle \sigma'(t_0)}_{\text{Notación vectorial}}$$

- $\sigma(t) = t\bar{b} + (1-t)\bar{a}$

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

$$F \circ \sigma(t) \equiv g(t)$$

COMPLETAR

6.2. Extensiones del teorema del Valor Medio

- Original: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ para algún } c \in [a, b]$$

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma(t) = t\bar{b} + (1-t)\bar{a}$$

$$g = F \circ \sigma \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\bar{b} - \bar{a}) = g(1) - g(0) = g'(s) \text{ para algún } s \in [0, 1]$$

Peeeeero...

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(\bar{b}) - F(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(\bar{c}_1), \bar{b} - \bar{a} \rangle \\ \langle \nabla F_2(\bar{c}_2), \bar{b} - \bar{a} \rangle \end{pmatrix}$$

Tenemos 2 c distintos, uno para cada f , por lo que este teorema pierde sentido.

- Versión para funciones matriciales:

Teorema 6.4 (Extensión del valor medio). Sea $f \in C^1$ en un abierto que contenga $[a, b]$.

$$||F(\bar{b} - \bar{a})|| \leq |||DF(\bar{c})||| \cdot ||\bar{b} - \bar{a}||$$

Siendo c un punto del segmento que une \bar{a} y \bar{b} en el que $|||DF(tb + (1 - t)a)|||$ alcanza su máximo.

Demostración. i)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds \text{ con } g(t) = f(tb + (1 - t)a)$$

ii)

$$h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(\bar{b}) - h(\bar{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = \int_0^1 \langle \nabla h(s\bar{a} + (1 - s)\bar{b}), (\bar{b} - \bar{a}) \rangle$$

$$g(t) = h(tb + (1 - t)a)$$

iii)

$$\bar{G} = (G_1, \dots, G_M), G_i = \int_0^1 H_i(t)dt$$

$$\text{Con } \bar{H} = (H_1(t), \dots, H_M(t))$$

$$||\bar{G}||^2 = \langle \bar{G}, \bar{G} \rangle = \sum_{i=1}^M \left(\int_0^1 H_i(t)dt \right) \underbrace{\left(\int_0^1 H_i(s)ds \right)}_{G_i}$$

$$||\bar{G}||^2 = \int_0^1 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^M G_i H_i(t)}_{\langle \bar{G}, \bar{H}(t) \rangle \leq ||\bar{G}|| \cdot ||\bar{H}(t)||} \right) dt$$

Conclusión:

$$||\bar{G}||^2 \leq \int_0^1 ||\bar{G}|| \cdot ||\bar{H}(t)|| dt$$

$$\text{iv) } F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

$$F_i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{F_i(\bar{b}) - F_i(\bar{a})}_{G_i} = \int_0^1 \underbrace{\langle \nabla F_i(s\bar{b} + (1 - s)\bar{a}), (\bar{b} - \bar{a}) \rangle}_{H_i(t)} dt$$

Por el apartado iii tenemos que:

$$\bar{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(tb + (1-t)a), b - a \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla F_M(tb + (1-t)a), b - a \rangle \end{pmatrix} = (DF(\dots)) \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_M - a_M \end{pmatrix}$$

$$\|H(t)\| = \|DF(\dots)(\bar{b} - \bar{a})\| \leq \|DF\| \cdot \|\bar{b} - \bar{a}\|$$

$$\|F(\bar{b}) - F(\bar{a})\| \leq \int_0^1 \|\nabla DF_i(tb + (1-t)a), b - a\| dt$$

Aplicando: $A\bar{v} \leq \|A\| \cdot \|\bar{v}\|$

$$\begin{aligned} \|F(\bar{b}) - F(\bar{a})\| &\leq \int_0^1 \|DF(*)\| \cdot \|\bar{b} - \bar{a}\| dt \\ &= \|\bar{b} - \bar{a}\| \int_0^1 \|DF(tb + (1-t)a)\| dt \leq \|DF(\bar{c})\| \cdot \|\bar{b} - \bar{a}\| \end{aligned}$$

Siendo c un punto del segmento que une \bar{a} y \bar{b} en el que $\|DF(tb + (1-t)a)\|$ alcanza su máximo.

Conclusión:

$$\|F(\bar{b}) - F(\bar{a})\| \leq \|DF\| \cdot \|\bar{b} - \bar{a}\|$$

□

Aplicación:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M, F \in C^1$, definida en un conjunto abierto y conexo.

$DF(\bar{x}) \equiv 0, \forall \Rightarrow F \equiv \text{cte.}$

6.3. Derivada direccional:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ (escalar)

$\bar{a} \sim$ Recta que pasa por \bar{a} con dirección \bar{v} .

$r(t) = \bar{a} + t\bar{v}$.

Obsevación: Como una recta tiene infinitos vectores directores (dependiendo de la longitud), siempre tomaremos vectores directores unitarios, con $\|\bar{v}\| = 1$.

Vamos a estudiar: $g(t) = F(\bar{a} + t\bar{v}) = F \circ r(t)$.

$t \sim 0 \Leftrightarrow \bar{a} + t\bar{v} \sim \bar{a}$

Definición 6.5 Regla de la cadena.

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\bar{a} + h\bar{v}) - F(\bar{a})}{h} \equiv D_{\bar{v}}F(\bar{a})$$

Obsevación: La existencia de $D_{\bar{v}}F(\bar{a}), \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N$ NO garantiza que F sea derivable.

Si sabemos que F SÍ es diferenciable podemos usar la regla de la cadena obteniendo:

$$D_{\bar{v}}F(\bar{a}) = g'(0) = D(F \circ r)(0) = \dots = \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

Aplicación:

- Dirección de máximo crecimiento:

$$D_{\bar{v}}F(\bar{a}) = \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \rangle \leq \|\nabla F(\bar{a})\| \cdot \underbrace{\|\bar{v}\|}_{\equiv 1}$$

Conclusión:

$$D_{\bar{v}}F(\bar{a}) \leq \|\nabla F(\bar{a})\|$$

↑

$$\text{El } \bar{v} \text{ se obtiene cuando } \bar{v} = \frac{\nabla F(\bar{a})}{\|\nabla F(\bar{a})\|}.$$

- Vector perpendicular a los conjuntos de nivel

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N \mid F(\bar{x}) = 0\} \text{ (Conjunto de nivel)}$$

$$\bar{a} \in S$$

$$\text{Entonces: } \nabla F(\bar{a}) \perp S$$

Teorema 6.6 (Derivadas parciales continuas implican función diferenciable). Si existen todas las derivadas parciales y son continuas $\Rightarrow F$ diferenciable en \bar{a} .

Contraejemplo de la no reciprocidad: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Demostración. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\left| F(a + a, b + k) - F(a, b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)k \right|}{\|(h, k)\|} \longrightarrow 0?$$

Sumamos y restamos al numerador $F(a, b + k)$.

$$\left| \frac{\left(\underbrace{F(a+h, b+k) - F(a, b+k)}_{\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h}, b+k) \text{ para algún } 0 \leq \tilde{h} \leq h} - \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)h \right) + \left(\underbrace{F(a, b+k) - F(a, b)}_{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b+\tilde{k}) \text{ si } 0 \leq \tilde{k} \leq k} - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)k \right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|$$

$$0 \leq \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h}, b+k) - \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \right| \cdot |h| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(a, b+\tilde{k}) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right| \cdot |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = (*)$$

Aquí es donde aplicamos que las derivadas parciales son continuas: como h y k son pequeños (por lo tanto $\tilde{h} < h$ también lo será) los puntos (a, b) y $(a+h, b+k)$ también están cerca, por lo que sus imágenes por la derivada estarán también cerca, es decir, $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h}, b+k) \right| \rightarrow 0$ y lo mismo con la otra.

Conclusión:

$$0 \leq (*) \leq \varepsilon \frac{|h| + |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq C\varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } \bar{h}, \bar{k} \rightarrow \bar{0}$$

↑

El numerador es la norma 1 y el denominador la norma 2.

En \mathbb{R}^N todas las normas son equivalentes.

□

6.4. Derivadas iteradas:

Notación: $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Teorema 6.7 (Euler (orden de las derivadas)). *Si las derivadas segundas son continuas, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

6.5. Máximos y mínimos

Definición 6.8 Máximo/mínimo local. Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de máximo local si $\exists \varepsilon > 0 \wedge F(\vec{x}_0) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$

La definición es análoga para el mínimo

Observación: Por las propiedades del gradiente, si F es diferenciable y \vec{x}_0 es un máximo o mínimo local, entonces debe ser $\nabla F(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definición 6.9 Punto crítico. $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ es un punto crítico de F si y sólo si $\nabla F(\vec{y}) = \vec{0}$

No todos los puntos críticos son máximos o mínimos, así que tenemos que clasificarlos de alguna forma. Para ello, usamos el polinomio de Taylor de orden 2, de forma que

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon$$

Simplificando nos queda que:

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)^T + \varepsilon$$

Dado que el gradiente es 0, el punto clave es el signo de $\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)^T$. Para ello, usamos las siguientes definiciones del álgebra lineal.

6.5.1. Resultados de álgebra lineal

Definición 6.10 Matriz semidefinida y definida positiva y negativa.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \leq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T < 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 6.11. Si una matriz es simétrica, existe una base en la cual la matriz es diagonal.

Sea A una matriz $N \times N$. Entonces diremos que un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Dado que podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, entonces tenemos que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ si y sólo si

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Es decir, la autorrecta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una solución no trivial del sistema anterior. Sin embargo, para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$ debe ser 0.

Por lo tanto, los autovalores son las soluciones de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad.

Teorema 6.12. *Si un conjunto de autovectores es una base, entonces la matriz A expresada respecto a esa base pasa a ser diagonal, y los elementos de la diagonal son los autovalores.*

Si dos autovalores son distintos, los autovectores asociados son distintos.

Si A es simétrica, entonces el conjunto de autovectores es una base.

Volvemos ahora al cálculo.

Teorema 6.13 (Clasificación de puntos críticos). *Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$ (con dos derivadas continuas), y sea \vec{x}_0 un punto crítico. Entonces*

1. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **mayores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida positiva y \vec{x}_0 es un **mínimo local**.*
2. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **menores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida negativa y \vec{x}_0 es un **máximo local**.*
3. *Si **algunos** autovalores son **mayores que cero** y otros son **menores que cero**, entonces \vec{x}_0 es un **punto de silla**.*
4. *Si **algún** autovalor es **0**, y el resto son mayores o menores que cero, entonces \vec{x}_0 es un **punto crítico degenerado**.*

6.5.2. Ejemplos

Tomamos $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Obtenemos los puntos críticos, es decir, los puntos en los que $\nabla F(x, y) = (0, 0)$. El punto resultante es $(0, 0)$. Estudiamos el tipo de punto crítico. Para ello, calculamos la matriz hessiana en ese punto:

$$D^2F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son las soluciones de

$$0 = \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

Por lo tanto, λ es 3 o 1. Dado que ambos autovalores son mayores que 0, entonces D^2F es definida positiva y $(0,0)$ es un mínimo local.

6.6. Máximos y mínimos absolutos

Definición 6.14 Máximo y mínimo absoluto. Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. \vec{x}_m es un máximo absoluto de F en A si y sólo si $F(\vec{x}_m) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in A$. La definición es análoga para el mínimo.

Teorema 6.15 (Teorema de compacidad). *Tenemos un conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto (cerrado y acotado). Supongamos la sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$. Entonces podemos encontrar al menos una subsucesión $\{\vec{x}_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\vec{x}_{n_j}\}$ es convergente.*

Demostración. Trabajamos en dimensión 2, pero la demostración es análoga. Como K es compacto, podemos encontrar un cuadrado Q_0 de lado L que encierre completamente a K . Divido Q_0 en 2^2 cuadrados de lado $L/2$. En alguno de ellos hay infinitos términos de la sucesión: lo llamamos Q_1 y me quedo con uno de los términos de la sucesión, al que llamamos x_1 . Volvemos a dividir este cuadrado en cuatro cuadrados, elegimos uno que tenga infinitos términos de la sucesión y seleccionamos un elemento de la sucesión dentro al que llamamos x_2 . Repetimos esto muchas veces, de forma que cada término x_n está encerrado en el cuadrado Q_n de lado $\frac{L}{2^n}$.

Si $k, l > n$, entonces es claro que $\|\vec{x}_k - \vec{x}_l\|$ es menor o igual que la diagonal de Q_n , que es $\frac{L}{2^n} \sqrt{2}$, que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Por el criterio de Cauchy, entonces esta sucesión es convergente, y como K es cerrado el límite pertenece a K . \square

Teorema 6.16. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, continua en K . Entonces, F alcanza su máximo y mínimo absolutos en K .*

Demostración.

Como F es acotada, existe $\alpha = \sup\{F(x) \mid x \in K\}$. Existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ tal que si $n \rightarrow \infty$ entonces $F(x_n) \rightarrow \alpha$. Sabemos que existe $\{x_n\} \subset K$, por lo que existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ convergente tal que $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in K$.

Como F es continua, $F(x_{n_k}) \rightarrow F(x_0)$, es decir $F(x_{n_j}) \rightarrow \alpha$, por lo tanto el supremo es el máximo. \square

6.6.1. Ejemplos

La función a estudiar es $F(x, y) = x^2 - y^2$ en la bola $\omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Es diferenciable en todo \mathbb{R} porque es un polinomio.

Calculamos el diferencial y vemos qué ocurre cuando es 0

$$\nabla F = (2x, -2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Operando, vemos que el punto $(0, 0)$ es un punto de silla. Ahora sólo queda ver el comportamiento en la frontera C , cuando $x^2 + y^2 = 1$. F restringida a C quedaría de la siguiente forma:

$$F(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

El coseno tiene máximos cuando $t = 0$ y $t = \pi$, y mínimos cuando $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$. Es decir, tiene máximos absolutos en los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y mínimos absolutos en $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Teorema 6.17 (Multiplicadores de Lagrange). *Tenemos una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y una restricción $G(x_1, \dots, x_n) = k$, resolvemos el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}\nabla F &= \lambda \nabla G \\ G &= k\end{aligned}$$

6.7. Desarrollo de Taylor

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, F \in C^k.$$

Queremos desarrollar F alrededor de $\bar{a} \in \mathbb{R}^N$.

$$\text{Dimensión 1)} \quad g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underbrace{\text{error}}_{\frac{g^{(k+1)}(s)}{(k+1)!}x^{(k+1)}}$$

$$F(\bar{a} + \bar{h}) = F(\bar{a}) + \dots$$

Más dimensiones)

Tomamos $g(t) \equiv F(t(\bar{a} + \bar{h}) + (1-t)\bar{a})$. Así hemos reducido el cálculo a dimensión 1.

$$g'(t) = \langle \nabla F(a + th), h \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + th) \cdot h_i$$

$$g'(0) = \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{h} \rangle$$

⁵F es k veces derivable

$$g''(t) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} (\bar{a} + \bar{h}) \cdot h_j \right) h_i = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{a} + t\bar{h}) h_i h_j$$

Iterando:

$$\frac{g^{(s)}(0)}{s!} = \frac{1}{s!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^N \frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_s}}$$

El hesiano aparece en:

$$g''(t) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} (\bar{a} + \bar{h}) \cdot h_j \right) h_i = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{a} + t\bar{h}) h_i h_j = \dots =$$

$$\frac{1}{2} (h_1, \dots, h_N) \cdot (D^2 F(\bar{a})) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$$

Desarrollo de Taylor en general:

$$F(\bar{a} + \bar{h}) = F(\bar{a}) + \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{h} \rangle + \frac{1}{2} \bar{h}^T D^2 F(\bar{a}) \bar{h} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} (\bar{a}) h_k h_j h_i +$$

Teorema 6.18.

$$\frac{|F(\bar{a} + \bar{h}) - P_{s,a}(\bar{h})|}{\|\bar{h}\|^s} \rightarrow 0, \text{ Cuando } \bar{h} \rightarrow 0$$

Además $P_{s,a}(\bar{h})$ es el único polinomio de orden S que hace que el límite sea 0).

Con estos conocimientos son posibles de realizar todos los ejercicios de la hoja de problemas 2.

7. Teoremas de la función implícita y la función inversa

En el mundo lineal tenemos:

■ $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ y $L(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \text{matriz } NxN$

«««< HEAD Si queremos resolver el sistema: $A\bar{x} = \bar{y}$. Este sistema tiene solución $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (porque $\exists A^{-1}$).

===== Si queremos resolver el sistema: $A\bar{x} = \bar{y}$ sabiendo que $A\bar{0} = \bar{0}$. Este sistema tiene solución $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (porque $\exists A^{-1}$).

- $F : \mathbb{R}^{N+M} \longrightarrow \mathbb{R}^N$
 $L(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \text{matriz } Nx(N+M)$

Para resolver el sistema $A\bar{x} = \bar{y}$. Se resolvía parametrizando M variables.

- En el mundo NO lineal: $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

Suponemos que $\exists F(\bar{a}) = F(\bar{b})$

$$\left. \begin{array}{l} F(x_1, \dots, x_N) = y_1 \\ F(x_1, \dots, x_N) = y_2 \\ \vdots \\ F(x_1, \dots, x_N) = y_N \end{array} \right\} F(\bar{x}) = \bar{y}$$

Vamos a intentar resolver este problema utilizando Taylor para aproximar al orden lineal, pero tenemos que pagar un precio: para que Taylor funcione tenemos que trabajar cerca del punto. Esto significa que el resultado va a ser local.

Teorema 7.1 (Teorema de la aplicación contractiva). Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ o
 Sea $F : C \longrightarrow C$, $C \in \mathbb{R}^N$, cerrado, o
 Sea $F : K \longrightarrow K$, $K \in \mathbb{R}^N$, compacto.

Supongamos que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad \forall x, y \in \begin{cases} \mathbb{R}^N \\ C \\ K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in \begin{cases} \mathbb{R}^N \\ C \\ K \end{cases} \text{ tal que } F(x_0) = x_0 \text{ (Punto fijo)}$$

Demostración. Primero llevamos los casos de C y \mathbb{R}^n a un conjunto compacto K . Partimos de

$$\|F(\bar{x}) - F(\bar{a})\| \leq \alpha \|\bar{x} - \bar{a}\| \quad (7.0.1)$$

y veamos qué ocurre para un vector general \bar{x} :

$$\|F(\bar{x})\| = \|(F(\bar{x}) - F(\bar{a}) + F(\bar{a}))\| \leq \|F(\bar{x}) - F(\bar{a})\| + \|F(\bar{a})\|$$

Aplicando (7.0.1) tenemos que

$$\|F(\bar{x})\| \leq \alpha \|\bar{x} - \bar{a}\| + \|F(\bar{a})\|$$

Si tomamos $\bar{a} = 0$ (en el caso $0 \notin C$ solo haría falta una pequeña traslación), y suponemos $\|x\| < R$, tenemos entonces que

$$\|F(\bar{x})\| \leq \alpha R + \|F(\bar{0})\| < R$$

Es decir, F toma un compacto y lo lleva en sí mismo: $F : B_R(0) \longrightarrow B_R(0)$. Podemos seguir la demostración ahora suponiendo que estamos trabajando siempre sobre un compacto.

El siguiente paso es llevar a cabo un **proceso iterativo**. Tenemos

$$F : K \longrightarrow K$$

con $K \subset \mathbb{R}^N$ conjunto compacto. Definimos entonces la sucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, construido de forma iterativa con $x_n = F(x_{n-1})$. Vamos a demostrar que esa sucesión es de Cauchy, lo que implicaría que es convergente.

Para ello, dado $\varepsilon > 0$ hay que hallar n_0 tal que si $n, m > n_0$ entonces $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Pongamos, para facilitar la demostración, que $n > m$.

Entonces, sumamos y restamos a ese módulo cada uno de los x_i entre n y m :

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_{m+1} - x_m\| \leq \sum_{i=m}^n \|x_i - x_{i-1}\| \quad (7.0.2)$$

Operamos ahora con cada uno de esos sumandos. Por ejemplo, con $i = n$, vemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n-1}\| &= \|F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\| \leq \alpha \|x_{n-1} - x_{n-2}\| = \\ &= \alpha \|F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})\| \leq \alpha^2 \|x_{n-2} - x_{n-3}\| \end{aligned}$$

Si seguimos operando, llegaremos a que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha^{n-2} \|x_2 - x_1\|$. Generalizando, tenemos que

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq \alpha^{i-2} \|x_2 - x_1\|$$

Aplicando esta fórmula en (7.0.2)

$$\|x_n - x_m\| \leq (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} + \cdots + \alpha^{m-1}) \|x_2 - x_1\|$$

Esa suma de α 's es la suma de una sucesión geométrica de razón α . Por lo tanto, la podemos simplificar como

$$\sum_{k=m-1}^{n-2} \alpha^k = \alpha^{m-1} \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha^{m-1}}{1 - \alpha}$$

, y la ecuación nos queda de la forma

$$\frac{\alpha^{m-1}}{1 - \alpha} \|x_2 - x_1\|$$

. Dado que $\frac{\alpha^{m-1}}{1 - \alpha} \xrightarrow{n_0 \rightarrow \infty} 0$, tendremos que tomando un n_0 suficientemente grande se cumple que

$$\frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha} \|x_2 - x_1\| < \varepsilon$$

para un ε arbitrariamente pequeño. Con esto **demostramos que la sucesión de x_n es de Cauchy** y por lo tanto es convergente a un cierto límite x_0 .

Tal y como habíamos construido la sucesión, tenemos que

$$x_n = F(x_{n-1}) \quad (7.0.3)$$

x_n converge a x_0 cuando $n \rightarrow \infty$. De la misma forma, como x_{n-1} también converge a x_0 , está claro que $F(x_{n-1})$ convergerá a $F(x_0)$. Sustituyendo estos dos resultados en (7.0.3), tenemos que

$$x_0 = F(x_0)$$

Hemos demostrado por lo tanto que el límite de esa sucesión que hemos construido es **un punto fijo** de la función.

Nos queda **demostrar ahora que ese punto es único**, y lo haremos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos puntos fijos:

$$a = F(a)$$

$$b = F(b)$$

Entonces tendríamos que

$$\|a - b\| = \|F(a) - F(b)\| \leq \alpha \|a - b\|$$

pero como α es menor estricto que 1, entonces tendríamos que

$$\|a - b\| < \|a - b\|$$

, lo que es una contradicción. □

El teorema de la aplicación contractiva nos sirve, por ejemplo, para comprobar si hay una solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

$$\left. \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

Podemos definir:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds \equiv T(y_1) \\ &\dots \\ y_n &= T(y_{n-1}) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \end{aligned}$$

$$T(y) = y?$$

Aquí es donde entraría la diferencia entre trabajar en \mathbb{R}^N y un espacio de funciones.

Ejercicio propuesto: Aplicar este argumento a iterativo

$$\left. \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \equiv y_0 \end{array} \right\}$$

Comentarios previos al teorema de la función inversa:

■ Teorema de cálculo 1:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1, f'(a) \neq 0 \Rightarrow f$ es invertible en un entorno de $f(a)$. La inversa es diferenciable en ese entorno, y además $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Resultado local: $\left\{ \begin{array}{l} \exists f^{-1} \\ \text{es diferenciable} \\ \text{fórmula} \end{array} \right.$

■ Dimensión N:

$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y supongamos que en algún abierto $\exists F^{-1}$ y $F, F^{-1} \in C^1$.

Entonces:

$$(F \circ F^{-1})(y) = y \rightarrow DF(F^{-1}(y))DF^{-1}(y) = Id$$

$$(F^{-1} \circ F)(y) = y \rightarrow DF^{-1}(F(y))DF(y) = Id$$

Con $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ queremos probar que existe

$$G : V \rightarrow U \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} G \circ F(\bar{x}) = \bar{x}, \forall \bar{x} \in U \subset \Omega \\ F \circ G(\bar{y}) = \bar{y}, \forall \bar{y} \in V \\ G \text{ diferenciable} \end{array} \right.$$

Teorema 7.2 (Teorema de la función inversa). Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ con $F \in C^1(\Omega)$.

Supongamos $DF(\bar{a})$ invertible, $\bar{a} \in \Omega$.

Entonces existe un abierto V tal que $F(\bar{a}) \in V$, un abierto U tal que $\bar{a} \in U$ y una inversa local $G : V \rightarrow U$.

Además, G es diferenciable en U y $DG(y) = [DF(F^{-1}(y))]^{-1}, \forall y \in U$.

Demostración.

1) Simplificar la notación: Queremos invertir $F(x) = y, \bar{y} \sim F(\bar{a}), \bar{x} \sim \bar{a}$.

Llamamos:

$$\blacksquare y = F(\bar{a}) + \bar{z}; \bar{z} \sim \bar{0}$$

$$\blacksquare y = \bar{a} + \bar{s}; \bar{s} \sim \bar{0}$$

$$F(\bar{a} + \bar{s}) = F(\bar{a}) + \bar{z}.$$

$$\text{Definimos: } \tilde{F}(\bar{s}) \equiv F(\bar{a} + \bar{s}) - F(\bar{a}) = \bar{z} \Rightarrow \tilde{F}(\bar{0}) = \bar{0}$$

Esta es la traslación que hay que realizar para suponer que $F(\bar{0}) = \bar{0}$.

$$\text{Tenemos: } \det DF(\bar{0}) \neq 0$$

Resolver para $F \Leftrightarrow$ Resolver para $CF(\bar{x}) = \bar{y}$, donde C es una matriz invertible.

Tomamos $\tilde{F} = [DF(\bar{0})]^{-1}F$. ¿Qué hemos ganado?

$$D\tilde{F}(\bar{0}) = Id.$$

Paso 2: Formulación como punto fijo. Partimos de $F(\bar{0}) = \bar{0} DF(\bar{0}) = Id$.

$$\text{Definimos } f(\bar{x}) = \bar{x} - F(\bar{x}) + \bar{y}$$

Resolver $F(\bar{x}) = \bar{y} \equiv$ encontrar $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Objetivo: probar que f es contractiva.

Paso 3: Estimaciones de f .

$$Df(\bar{x}) = Id - DF(\bar{x}) \rightarrow Df(\bar{0}) = Id - DF(0) = Id - Id = \text{matriz nula.}$$

■ Estimación 1)

$$\text{Tenemos: } DF(\bar{0}) = Id \Rightarrow \det(DF(\bar{0})) = 1.$$

$$F \in C^1 \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tal que } \|\bar{x}\| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow \det(DF(\bar{0})) > 0$$

Es decir, en un entorno del $\bar{0}$, el determinante sigue siendo positivo.

■ Estimación 2)

$$F \in C^1 \Rightarrow f \in C^1, f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$Df(\bar{0}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{0}) \rightarrow \\ \vdots \\ Df_N(\bar{0}) \rightarrow \end{pmatrix}. \text{ (Todas las filas son 0)}$$

$$\text{Por tanto } \|Df_i(\bar{0})\| = 0.$$

$$\text{Por continuidad } \exists \varepsilon_i > 0 \text{ tal que } \|x\| \leq \varepsilon_i \Rightarrow \|Df_i(\bar{x})\| < \frac{1}{2N}$$

Conclusión: Fijamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}, i = 0, \dots, N$.

Si $\|x\| \leq \varepsilon$ tenemos que:

- $\det(DF(\bar{x})) > 0$
- $\|Df_i(\bar{x})\| = \|\nabla f_i(\bar{x})\| < \frac{1}{2N}, i = 1, 2, \dots, N$

Obsevación: ε NO depende de \bar{y} .

Conclusión: Tomaremos $\bar{x} \in \overline{B_\varepsilon(\bar{0})}$ ($A \subset \mathbb{R}^N, \bar{A} =$ cierre de A)

Paso 4: demostrar que f es contractiva Primero hay que demostrar que lleva un cerrado en sí mismo, es decir $f : \overline{B_\varepsilon(\bar{0})} \rightarrow \overline{B_\varepsilon(\bar{0})}$.

Teniendo $\|x\| \leq \varepsilon$ queremos probar $\|f(\bar{x})\| \leq \varepsilon$.

$$\|f(s)\| = \|f(s) - f(0) + f(0)\| \leq \|f(s) - f(0)\| + \underbrace{\|f(0)\|}_{f(0)=\bar{0}+F(\bar{0})+\bar{y}=y}$$

$$\|f(s) - f(0)\|^2 = \sum_{i=1}^N (f_i(s) - f_i(0))^2$$

Aplicando el teorema del valor medio con un punto $0 < \tilde{s} < s$:

$$\sum (Df_i(\tilde{s}) \cdot \bar{s})^2 \text{ (este cuadrado en los pautes de elena no esta) } =$$

$$\sum_{i=1}^N (\langle \nabla f_i(\tilde{s}), \tilde{s} \rangle)^2 \leq \sum_{i=1}^N \|\nabla f_i(\bar{s})\|^2 \|\tilde{s}\|^2 \leq N \cdot \frac{1}{4N^2} \|\bar{s}\|^2$$

$$\|f(\bar{s}) - f(\bar{0})\|^2 \leq \frac{N}{4N^2} \|\bar{s}\|^2$$

$$\Rightarrow \|f(s)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \|\bar{s}\| + \|\bar{y}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \varepsilon + \|\bar{y}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|y\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta última acotación es por la que es un teorema local.

Paso 5: f contractiva en $B_\varepsilon(\bar{0})$ $\bar{r}, \bar{s} \in B_\varepsilon(\bar{0})$

$$\|f(\bar{r}) - f(\bar{s})\| = \left(\sum (f_i(\bar{r}) - f_i(\bar{s}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando el teorema del valor medio

$$\left(\sum_{i=1}^N \langle Df_i(z_i), (\bar{r} - \bar{s})^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}, z_i \in B_\varepsilon(0)$$

La misma cuenta de antes:

$$\|f(\bar{r}) - f(\bar{s})\| \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \|\bar{r} - \bar{s}\|$$

Acabamos de encontrar el α que aparecía en la aplicación contractiva: $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{N}}$.

Ahora ya podemos aplicar el teorema de la aplicación contractiva y ya tenemos el punto fijo.

Aplicación contractiva \Rightarrow punto fijo $f \Rightarrow$ Sol. $F(x) = y \rightarrow x = G(y)$, con lo que $G : B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \rightarrow \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$. \square

8. Ejercicios

8.1. Hoja 1

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^N; \forall V_x \text{ } V_x \cap A \neq \emptyset\}$, siendo V_x un entorno abierto de x . $\bar{A} = A \cup A'$

Teorema 8.1. $A \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado $\Leftrightarrow A' \subset A$

Demostración.

$A \text{ es cerrado} \Rightarrow A' \subset A \Rightarrow$
 $\forall x \in A', \exists \varepsilon > 0 \text{ } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$
 $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A$

□

Falta la recíproca.

a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$$

Es cerrado, porque $= [-1, 0]$ Demostración: (hay que demostrar las inclusiones \subseteq y \supseteq)

b) No es ni cerrado ni abierto.

Observación: \mathbb{R} es el cierre de \mathbb{Q} .

c)

8.2. Hoja 2

8.3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 7y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Continuidad:}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + 7y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

Continua en 0.

Derivadas parciales en $(0, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{h^3/h^2}{h}\right) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{0}{0 + 7h^2}\right) = 0$$

WTF DONDE VAiiiiii

9. Convergencia y continuidad

Al tener definida una norma podemos definir convergencia y continuidad:

- *Convergencia:* $\overline{x}_n \rightarrow \overline{x} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \Rightarrow ||\overline{x} - \overline{x}_n|| < \varepsilon$.
- *Continuidad:* Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $||\overline{x} - \overline{a}||_a < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{a})||_b < \varepsilon$

Observación: Es interesante ver que se puede hablar de continuidad tomando una norma en \mathbb{R}^N y otra distinta en \mathbb{R}^M sin por ello variar la definición de continuidad. Más adelante veremos que en \mathbb{R}^N todas las normas son equivalentes y qué significa que las normas sean equivalentes. (Esto no sucederá en espacios de dimensión infinita) ???????????????????

Índice alfabético

- Autovalor, 27
- Autovector, 27
- Bola, 11
- Caracterización
 - por cerrados, 11
- Cierre, 12
- Clasificación de puntos críticos, 28
- Conexión
 - por abiertos, 14
 - por caminos, 14
- Conjunto
 - abierto, 11
 - cerrado, 11
 - cerrado y acotado, 12
 - compacto, 12
- Derivadas parciales continuas implican
 - función diferenciable, 25
- Desigualdad
 - de Hölder, 5
 - de Young, 4
- Distancia, 7
 - euclídea, 7
- Euler (orden de las derivadas), 26
- Extensión del valor medio, 22
- Frontera, 12
- Función
 - inversa, 14, 15
- Interior, 12
- Límite, 18
- Máximo y mínimo absoluto, 29
- Máximo/mínimo
 - absoluto, 29
 - local, 26, 28
- Máximo/mínimo local, 26
- Matriz
 - definida positiva/negativa, 27
 - semidefinida positiva/negativa, 27
- Matriz semidefinida y definida positiva y negativa, 27
- Multiplicadores de Lagrange, 30
- Norma, 4
 - euclídea, 3
 - infinito, 4
 - uno, 4
- Norma de una matriz, 16
- Producto escalar euclídeo, 3
- Punto
 - crítico, 27
 - crítico degenerado, 28
 - de acumulación, 11
 - de silla, 28
- Punto crítico, 27
- Regla de la cadena, 24
- Relación norma \leftrightarrow producto escalar, 8
- Teorema
 - de la aplicación contractiva, 32
- Teorema de compacidad, 29
- Teorema de la función inversa, 35