Apuntes de Economía y Finanzas Matemáticas

Lara Olmos Camarena

25 de mayo de 2017

Referencias

[1] Apuntes del curso de *Economía y Finanzas Matemáticas II*, 2016-2017, UAM. Profesor: Rafael Orive.

[2] *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne. Enlace

[3] Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas (UCM).

¡OJO! Estos apuntes no están libres de errores. Para cualquier corrección contactar:
lara.olmos@estudiante.uam.es

Índice

1. Tipos de interés, préstamos y rentas 7
1.1. Tiempo . . . 7
1.2. Intereses . . . 7
1.2.1. Tipos . . . 8
1.3. Préstamos . . . 8
1.4. Valorar inversiones . . . 9
1.5. Bonos . . . 9
1.5.1. Bono cupón cero . . . 9
1.5.2. Bono a la par . . . 10
1.5.3. Curvas de interés . . . 10
1.5.4. Duración . . . 11
2. Derivados 12
2.1. Swaps . . . 12
2.1.1. Swap de tipo de interés . . . 12
2.1.2. Swap de divisas . . . 13
2.2. Arbitraje . . . 13
2.3. Contrato a plazos (forward) . . . 13
2.3.1. Valoración dinámica de un contrato . . . 14
2.3.2. Valoración neutral de riesgo . . . 14
2.3.3. Vender a corto . . . 14
2.4. Futuros . . . 15
2.4.1. Coste de almacenamiento . . . 15
2.4.2. Arbitraje en futuros . . . 15
2.4.3. Tasa de conveniencia . . . 15
2.4.4. Coste de mantenimiento . . . 16
2.4.5. Futuros sobre bonos del Tesoro (CBOT) . . . 16
2.4.6. Precio de cotización de un futuro . . . 16
2.4.7. Futuros sobre índices . . . 18
2.4.8. Futuro sobre bono . . . 18
2.4.9. Coberturas y duración . . . 18
2.5. Opciones . . . 19
2.5.1. Tipos de opciones . . . 19
2.5.2. Posibilidades para el comprador de la opción (europea) . . . 19
2.5.3. Opciones sobre acciones . . . 20
2.5.4. Paridad Put-Call . . . 21
3. Mercados Financieros Finitos 23
3.1. Situación . . . 23
3.2. Teoría de las carteras . . . 23
3.2.1. Hipótesis para el mercado y las carteras . . . 23
3.2.2. Arbitraje . . . 24
3.2.3. Rendimientos relativos . . . 24
3.3. Prima de riesgo . . . 25
3.4. Modelo de un periodo . . . 25
3.4.1. Activo contingente y economía completa . . . 25
3.5. Modelo matricial . . . 26
3.5.1. Resultados . . . 26
3.5.2. Activos de Arrow-Debreu . . . 27

4. Modelo binomial 28
4.1. Resultados 29
4.2. Martingala 29
4.3. Carteras autofinanciadas 29
4.4. Valor de una opción de compra europea 30
4.4.1. Derivación de las fórmulas del modelo de 1 paso (cartera réplica) 30
4.5. Arbitraje 31
4.6. Ajustes del árbol a datos del mercado 31
4.7. Fórmula de Cox-Rubinstein 31

Introducción

Economía

El objeto de la economía es estudiar la distribución de los bienes económicos. Considera procesos de producción, comercialización, distribución y consumo para satisfacer las necesidades. Abarca estudio y análisis de:

- Forma en que se fijan los precios de bienes y factores productivos.
- Comportamiento mercados financieros y asignación del capital en la sociedad.
- Consecuencias de la intervención del Estado en la sociedad e influencia en el mercado.
- Distribución de la renta. Crecimiento riqueza.
- Influencia del gasto público, impuestos, déficit presupuestario Estado en el crecimiento estatal.
- Ciclos económicos, causas, oscilaciones desempleo y producción.
- Comercio internacional.

Finanzas

Rama de la economía y administración de empresas que estudia el intercambio de distintos bienes de capital entre individuos, empresas o Estados y la incertidumbre y riesgos que estas actividades conllevan.

Estudia la **obtención de capital para la inversión** en bienes productivos y de las decisiones de inversión de los ahorradores. También **la obtención y gestión** de fondos de capital que necesita una compañía, individuo o Estado para cumplir sus objetivos, y los criterios con que dispone sus activos.

Activos financieros

Es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor. Es decir, es un derecho sobre los activos reales del emisor y el efectivo que generen.

Un activo financiero obtiene su valor de un **derecho contractual**. Las monedas y billetes, por ejemplo, son títulos de deuda emitidos por el Banco Central del país.

Características

- **Rentabilidad**. Cuanto más interés aporta el activo, mayor es su rentabilidad.
- **Riesgo**. Probabilidad de que el emisor no cumpla sus compromisos. Hay riesgo de crédito, operacional y de mercado.
- **Liquidez**. Capacidad de convertir el activo en dinero sin sufrir pérdidas.

Activos primarios

Los principales o primarios son: acciones de sociedades, depósitos monetarios a plazo fijo, préstamo de una institución, bonos, pagarés, letras y obligaciones, fondos de inversión, participaciones preferentes, deuda subordinada (redimible o no, convertible en acciones).

Clasificación según su liquidez

- **Dinero en curso legal**. Monedas y billetes.
- **Dinero en los bancos**. Depósitos a la vista, depósitos de ahorro y de plazo.
- **Deuda pública a corto plazo**. Letras del Tesoro.
- **Pagarés de empresa**. Activos emitidos por empresas privadas.
- **Deuda pública a largo plazo**. Bonos y obligaciones del Tesoro.
- **Renta fija**. Deuda emitida por las empresas privadas.
- **Renta variable**. Acciones, derivados.

Derivados

Estos activos financieros dependen de otro activo primario, denominado **subyacente**. Surgen de la necesidad de eliminar el factor de riesgo de algunas actividades productivas.

- Opciones
- Forwards
- Futuros
- Swaps
- Warrants
- Combinaciones

Mercados financieros

Lugares, mecanismos, procedimientos donde se intercambian productos, activos o productos financieros y se fijan sus precios. Existe mercados de:

- acciones. Bolsa.
- dinero.
- divisa.
- materias primas.
- metales preciosos.
- deuda pública.
- cuentas bancarias.
- derivados.

Conceptos empleados:

- **Cartera**. Conjunto de productos adquiridos por un inversor.
- **Volatilidad**. Velocidad de cambio de los precios de los productos que se negocian.
- **Apalancamiento**. Actividad financiera en la que se utiliza el endeudamiento para financiar una inversión.
- **Especulación**. Intento de obtener ganancias por parte de un inversor a partir de su capacidad para predecir un movimiento en los precios no aticipado por el mercado.

1. Tipos de interés, préstamos y rentas

1.1. Tiempo

Productos financieros toman el tiempo como una variable de valor añadido. Unidad fundamental: **año**. En muchos productos el primer día del plazo comienza a mediodía, el último termina a mediodía.

Reglas para contabilizar días:

- $30/360$, bonos mun. y corp. USA.
- *real/real*, bonos del Tesoro en USA.
- *real*/360, letras del Tesoro en USA.

Ejemplo 1. $01/03/2017$-$01/09/2017$. 184.

- $30/360$: 6 meses, $180/360 = 0.5$.
- *real/real*. $184/365 = 0.504$
- *real/360*. $184/360 = 0.51$.

1.2. Intereses

Sea un préstamo de K_0 de duración de t periodos. Denotamos el capital final K_f y los intereses $I = K_f - K_0$. Definimos:

- **Interés bruto** o rendimiento: $R = \frac{I}{K} = \frac{K_f - K_0}{K_0}$.
- **Interés simple**: r_s %, que cumple $I = KR = \frac{Kr_s}{100}$.

  Interés simple (anual). r_s %. La cantidad a devolver resulta:

  $$K_t = K_0 + t\frac{K_0 r_s}{100}$$

- **Interés compuesto**, r por cada periodo, la cantidad a devolver es $K_t = K_0 * (1+r)^t$. El tipo equivalente para t periodos, **tipo compuesto**, r_t, tal que:

  $$r_t = (1+r)^t - 1 = \frac{I_t}{K_0}$$

  Interés compuesto m veces anualmente. La capitalización en t años es:

  $$K_t = K_0 * (1 + \frac{R_m}{m})^{mt}$$

- **Tipo anual equivalente**, **TAE**. Expresa el rendimiento actual sea cual sea su periodo. Permite comparar rendimientos de diferentes activos.

Corolario. r_1 y r_2 para periodos τ_1 y τ_2, respectivamente, son equivalentes si: $(1+r_1)^{\frac{1}{\tau_1}} = (1+r_2)^{\frac{1}{\tau_2}}$

Ejemplo 2. TAE de un producto con interés 20 % en dos años es:

$$1 + TAE = (1+0,2)^{1/2} \Rightarrow TAE = 9,54\,\%$$

Ejemplo 3. Interés compuesto m veces anualmente.

- R anual, composición trimestral: $TAE = (1 + R/4)^4 - 1$.
- R anual, composición mensual: $TAE = (1 + R/12)^{12} - 1$.
- R semestral, composición trimestral: $TAE = (1 + R/2)^4 - 1$.
- R mensual, composición diaria: $TAE = (1 + R/30)^{360} - 1$.

LIBOR (London InterBank Offered Rate) es una tasa de referencia diaria basada en las tasas de interés a la cual los bancos ofrecen fondos no asegurados a otros bancos (sin riesgo) en el mercado monetario mayorista.

EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) es un índice que indica el tipo de interés promedio del mercado interbancario del euro.

1.2.1. Tipos

- **Tipo continuo**, r_c. La capitalización en t años es: $K_t = K_0 e^{tr_c}$.

  Tipo para composición anual o TAE: $1 + TAE = e^{r_c} \Leftrightarrow r_c = \ln(1 + TAE)$
- **Tipo implícito**. r_1 es el tipo hasta T_1, r_2 hasta $T_1 + T_2$. Entonces el tipo $r_{1,2}$ desde el tiempo T_1 hasta el $T_1 + T_2$ es:

$$r_{1,2} = \frac{r_2(T_1+T_2)-r_1T_1}{T_2}$$

1.3. Préstamos

Amortizaciones de préstamos. A la deuda inicial hay que sumar los intereses generados con un rendimiento R en cada período y restar la cantidad devuelta o cuota.

$$I_t = K_{t-1} * R$$
$$K_t = K_{t-1} + I_t - C_t$$

Suponemos que la cuota de amortización es constante (sistema de amortización francés). La cuota C que anula el capital en la amortización es, dado N en años:

$$C = \frac{RK_0}{1-(1+R)^{-N}}$$

Dado interés anual R, con composición y amortización **mensual**:

- El interés anual R se sustituye por interés mensual: $R/12$.
- El contador de períodos se mide en meses, de N años a $12*$N meses.

$$C = \frac{K_0*R/12}{1-(1+R/12)^{-12N}}$$

1.4. Valorar inversiones

Queremos determinar el valor a partir de los pagos y costes en fechas futuras dependiendo de unos intereses.

- **Valor actual** de un pago C que tendrá lugar en una fecha futura, **t años**, con **R el tipo libre de riesgo anual** para el vencimiento.

$$VA = \frac{C}{(1+R)^t} = PV \text{ (present value)}$$

- Dados unos flujos $F_1, ..., F_n$ en las fechas $t_1, ..., t_n$ en años, el valor actual es:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+R)^{t_i}}$$

- Sea C_0 el coste inicial de la inversión. El **valor neto actual** es $NPV = PV - C_0$.

Sea una inversión inicial C_0 y unos flujos $F_1, ..., F_n$ en las fechas $t_1, ..., t_n$. La **tasa interna de rendimiento** o TIR al tipo R^* que anula el valor neto actual, es:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+R^*)^{t_i}} = C_0$$

Sea una inversión inicial P que da lugar a unos ingresos E hasta T. Definimos:

- **Rendimiento bruto** o **ROI**$= E/P$. Si es un activo variable, $P = P_0$ y el precio inicial $E = P_T - P_0 + I$, donde P_T es el precio final e I son los ingresos o dividendos aportados.
- **Tiempo de retorno** o **TOR**$= 1/ROI$.
- **Razón precio-beneficio** o **PER** de una acción al cociente. $PER = P/BPA$, donde P es el precio por el que se adquiere o cotiza la acción y BPA es el beneficio por acción, el dividendo de cada acción después de impuestos.

1.5. Bonos

Un **bono** es un título de deuda, definido por los parámetros: nominal (N), vencimiento (T), cupones C_i a pagar en fechas t_i (**t expresado en años**).

Dado un bono de precio P, la **TIR del bono** (rendimiento o interés) cumple:

$$P = \frac{N}{(1+TIR)^T} + \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+TIR)^{t_i}}$$

Modelo **interés continuo**:

$$P = \sum_{t=1}^{T-1} C_i e^{-yt} + (C_T + N)e^{-yT}$$

1.5.1. Bono cupón cero

Título que no paga cupones ni intereses durante su vida, lo hace íntegramente en el momento en el que se amortiza (cuando el importe del bono es devuelto).

$$VA = \frac{N}{(1+r)^t} \qquad P = \frac{N}{(1+r)^t} \qquad (r = TIR)$$

Rendimiento de un bono cupón cero se obtiene (de precio P, nominal N y TIR r_T): $P = \frac{N}{(1+r_T)^T}$

1.5.2. Bono a la par

Dado un determinado vencimiento, el **rendimiento a la par** es la tasa de cupón que igualaría el precio del bono con su valor nominal. Llamamos **bono a la par**, aquel cuya tasa cupón viene dada por el rendimiento a la par.

1.5.3. Curvas de interés

La estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), o curvas de rendimientos, representa la relación existente en un momento dado entre el rendimiento de un conjunto de bonos (con el mismo riesgo) y el tiempo que resta hasta el vencimiento.

Se representa mediante una sucesión de puntos y su interpolación donde cada punto muestra el interés a un periodo fijo hasta su vencimiento y el plazo de tiempo hasta el mismo.

Tenemos tres tipos de curvas: rentabilidad a vencimiento o TIR (**curva de rentabilidad**), contado o spot (**curva cupón cero**) o a plazos implícitos o forward.

1.5.3.1 Curva cupón cero

El valor de cualquier activo (bonos en este caso) viene dado por el valor actual de los flujos de caja que promete generar a lo largo de su vida. Se puede contemplar también como una cartera de valores formada por tantos bonos cupón-cero como cupones prometa generar.

Para obtener el valor actual del activo basta conocer el valor de los cupones cero en que se descompone, y con ellos obtener los *tipos al contado* de la **curva de rendimientos cupón-cero**.

Las curvas de cupón cero de valores $(R_1, R_2, ...)$ para las anualidades $1, 2, ...$, facilitan la obtención del precio de un bono de anualidades de nominal N y de cupones C_i.

$$P_n = \frac{C_n+N}{(1+R_n)^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+R_i)^i}$$

Ejemplo 4.

Bono	0	1	2	3
A	111,41	10	110	0
B	102,82	5	5	105
C	88,9	0	0	100

$$\begin{cases} 111,41 = 10x + 110y \\ 102,82 = 5x + 5y + 105z \\ 88,9 = 100z \end{cases}$$

Con $x = \frac{1}{1+r_1}$, $y = \frac{1}{(1+r_2)^2}$ y $z = \frac{1}{(1+r_3)^3}$

1.5.3.2 Curva tiempo implícito

La fórmula que nos da el interés a plazo implícito a un año a partir de la curva cupón cero es:

$$R_{i,i+1} = R_{i,1} = \frac{(1+R_{i+1})^{i+1}}{(1+R_i)^i} - 1$$

Si la curva es plana, los intereses no varían en el futuro, si crece/decrece tipos anuales más altos/bajos.

1.5.4. Duración

Es una media ponderada de los vencimientos de los pagos por el valor actual relativo de los mismos.

Tipo de interés	Precio	Duración
Continuo	$P = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-rt_i} + Ne^{-rt_n}$	$D = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-rt_i} + N\, t_n e^{-rt_n}$
Compuesto	$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+R)^{t_i}} + \frac{N}{(1+R)^{t_n}}$	$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i c_i}{P(1+R)^{t_i}} + \frac{N}{P(1+R)^{t_n}}$

Observación. La duración de un bono cambia a lo largo de su vida. Para un bono cupón cero no.

La duración mide la vulnerabilidad a cambios de los intereses. Para tipo continuo:

$$D = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr}$$

1.5.4.1 Sensibilidad

Derivada del precio del bono con respecto a cambios en la TIR. Resulta:

$$\Delta P = -DP\Delta r$$

2. Derivados

2.1. Swaps

Un **swap** es un contrato entre dos partes que intercambian intereses sobre un cierto nominal hasta un cierto plazo: una parte paga intereses con un **tipo fijo**, la otra parte paga intereses según un tipo **variable** (Euríbor). En principio, **no hay intercambio de nominales**. No se negocia en mercados regulados. Tipos:

- Tipo de intereses (fijo o variable).
- Divisas
- Renta variable (equity swap)

2.1.1. Swap de tipo de interés

Transforma los tipos de interés para mejorar las ofertas recibidas de tipos o reducir el riesgo de las operaciones. Puede ser fijo o variable (flotante).

Tienen como parámetros: **nominal** (N), **fechas** $(t_1, ..., t_n)$, tipo de interés (R para fijo, LIBOR para variable).

2.1.1.1 Valoración

Depende en signo de a quien va dirigido. **Consideremos el caso de quien paga interés fijo y recibe el flotante**:

$$V_{swap} = B_{fl} - B_{fix}$$
$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} ke^{-r_i t_i} + Ne^{-r_n t_n}$$
$$B_{fl} = (k^* + N)e^{-r_1 t_1}$$

donde k es el pago de tipo fijo, k^* es el pago de tipo flotante y r_i son los tipos de interés relevantes a los vencimientos t_i.

Si un **swap** se firma en la media de las cotizaciones de oferta y demanda tendrá **valor** 0, es decir, $B_{fl} = B_{fix}$ y:

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} ke^{-r_i t_i} + Ne^{-r_n t_n}$$
$$B_{fl} = (k^* + N)e^{-r_1 t_1} = N$$

siendo y_n el tipo TIR asociado a la curva cupón cero de tipos continuos $r_1, ..., r_n$:

$$k = N(e^{y_n t_1 - 1})$$

El tipo fijo del swap sería el TIR_n si lo consideramos como interés compuesto anual.

Al vencimiento es cero.

2.1.2. Swap de divisas

Implica intercambios de pagos de principal e intereses de tipo fijo o flotante sobre un préstamo en una divisa, por pagos de principal e intereses de tipo fijo o flotante sobre otro préstamo en otra divisa.

Parámetros: N_1, N_2 nominales, $t_1, ..., t_n$ fechas, R_1, R_2 tipos de interés (fijos) para cada divisa.

2.1.2.1 Valoración

Depende en signo de a quien va dirigido. **Consideremos el caso de quien paga interés fijo y recibe el flotante**:

$$V_{swap}(t) = B_1(t) - X_{1/2}(t)B_2(t)$$

donde B_i es el valor de la divisa i, $X_{1/2}$ es el valor del cambio de la divisa 1 con respecto a la 2.

El valor inicial de un swap de divisas no tiene por qué ser 0.

2.2. Arbitraje

Es la práctica de obtener ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados: realizar una combinación de transacciones complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios. La utilidad se logra debido a la diferencia de precios de los mercados.

Ante una posibilidad de arbitraje se producen una combinación de transacciones complementarias que resulta el equilibrio de mercado.

Si los precios de mercado no permiten la ejecución de arbitraje rentable, entonces los precios están en **equilibrio de arbitraje** o el mercado es **libre de arbitraje**.

2.3. Contrato a plazos (forward)

Es un acuerdo privado para intercambiar un activo por dinero (u otro activo) en una fecha futura determinada. En él participa:

- **Posición larga**, quien **compra** el activo. A tiempo T paga F_0 por el producto financiero.
- **Posición corta**, quien **vende** el activo. A tiempo T recibe F_0 por el producto financiero que entrega.

Parámetros:

- T tiempo de la firma del contrato hasta finalización,
- S_t valor del subyacente en $t \in [0, T]$,
- F_t el precio a plazo en t que vence en T
- $r = r(t, T)$ el tipo continuo libre de riesgo

No se negocian en mercados. Es vinculante. Se liquida por entrega o diferencia. Se **fija el precio del activo en el contrato**. Los flujos finales son funciones lineales del subyacente. Se usa en coberturas, especulación.

Se establecen de tal forma que su valor inicial sea cero, no cuesta nada tener posición corta o larga.

El precio actual de un forward es el precio de entrega que se aplicaría si el contrato se negociara hoy. El precio de entrega es el precio a plazo de cuando se firma.

Teorema. Supongamos precios en equilibrio de arbitraje. Entonces el precio de la entrega en T de una unidad de subyacente es: $F_0 = S_0 e^{rT}$

Con dividendos conocidos. El subyacente paga dividendos cuyo valor actual es D_0. Entonces:

$$F_0 = (S_0 - D_0)e^{rT}$$

Rendimiento anual medio, q. Entonces: $F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$

2.3.1. Valoración dinámica de un contrato

Refleja la diferencia entre lo que se contrató y el valor de hacer el contrato en ese momento. Es decir, queremos calcular el valor de un contrato f_t en el tiempo $t \in (0, T)$ para un contrato realizado en 0 y que finaliza en T.

En $t = 0 \Rightarrow f_0 = 0$ En t: $f_t = (F_t - F_0)e^{-r(T-t)} = S_t - F_0 e^{-r(T-t)}$

En el caso de dividendos o rendimientos conocidos:
$f_t = S_t - I_t - F_0 e^{-r(T-t)}$ o $f_t = S_t e^{-q(T-t)} - F_0 e^{-r(T-t)}$
donde I_t es el valor actual de los ingresos o q es el rendimiento anual medio.

2.3.2. Valoración neutral de riesgo

Cualquier activo dependiente de otros activos puede valorarse sobre el supuesto de que los inversores son neutrales al riesgo. Se mantienen dos resultados:

1. La rentabilidad esperada en todos los activos es el tipo de interés libre de riesgo.
2. El tipo de interés libre de riesgo es el tipo de descuento apropiado a aplicar a cualquier futuro flujo de caja

2.3.3. Vender a corto

Es una estrategia de arbitraje o especulación. Implica vender activos que no se tienen.

Ejemplo 5.

1. Inversor I vende a corto 500 acciones. Su agente A toma prestadas 500 acciones y las vende en el mercado.
2. I mantiene la posición mientras pueda.
3. I liquida la posición comprando 500 acciones. A devuelve el préstamo.

Conclusión: si baja la acción hay beneficios. Si sube, pérdidas. El agente exige una garantía o depósito inicial a los clientes a corto.

2.4. Futuros

Es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en una fecha futura y a un precio previamente pactado (se pacta en el presente pero se liquida en el futuro). Su origen es la necesidad de cubrir el mercado de materias primas ante riesgos (cobertura).

A diferencia de los *forward*, los contratos de futuros son estandarizados y se operan en un mercado organizado o bolsa de productos derivados (las dos partes no se conocen necesariamente). Se ajusta diariamente en el mercado.

Fijan la cantidad, calidad del subyacente, último día de negociación y la entrega.

Si el activo es objeto de inversión para inversores (futuros sobre índices, divisas, oro y plata) el precio a plazo de un futuro y su valoración es igual que en un *forward* siempre que el interés sea constante o función conocida en el tiempo.

2.4.1. Coste de almacenamiento

El valor del contrato se incrementa: $K = F_0 = (S_0 + U_0)e^{rT}$, $F_0 = S_0 e^{(r+u)T}$, donde U_0 es el valor actual del coste de almacenamiento (o de una proporción u del producto).

2.4.2. Arbitraje en futuros

- Caso $F_0 > (S_0 + U)e^{rT}$.
  1. Pedir un préstamo por $S_0 + U$.
  2. Compramos el activo y pagamos el almacenaje.
  3. Ponernos a corto. Vendemos un futuro a precio de entrega F_0.
  4. En $t = T$ entregamos el futuro y recibimos F_0.
  5. Pagamos el préstamo.
  6. **Beneficio final**: $F_0 - (S_0 + U_0)e^{rT}$.
- Caso $F_0 < (S_0 + U)e^{rT}$.
  1. Tenemos el producto S_0 almacenado.
  2. Vendemos el producto S_0 y el almacenamiento.
  3. Posición larga, compramos un futuro F_0.
  4. **Beneficio final**: $(S_0 + V_0)e^{rT} - F_0$.

2.4.3. Tasa de conveniencia

El disponer de la mercancía presenta ventajas a quien la mantiene y produce descuento en el precio de entrega. Estos beneficios son **rendimientos de conveniencia**, y:

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U_0)e^{rT}, \quad F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}$$

Refleja las expectativas del mercado concernientes a la disponibilidad futura del producto.

2.4.4. Coste de mantenimiento

Mide el coste de almacenamiento más el interés que se paga para financiar el activo y menos el ingreso generado por el mismo. Definido como c:

$$F = Se^{cT} \text{ (activo de inversión)}, \quad F = Se^{(c-y)T} \text{ (de consumo)}$$

(y es la tasa de conveniencia)

2.4.5. Futuros sobre bonos del Tesoro (CBOT)

Puede ser entregado:

- Bono del estado con más de 10 años para su vencimiento.
- Sin amortización anticipada antes de 10 años.
- Hay futuros para vencimientos de 2, 5 años.

Los precios se cotizan en dólares y treintaidosavos de dólar. Precio de la cotización de un bono es: *P. bono en metálico = P. cotización B + Interés devengado*

Para la posición **corta** se ha de determinar: el **factor de conversión** (f_c) para definir el precio y el bono a entregar (el más barato).

*A recibir p.c. = Cotización F ** f_c *+ Interés acumulado*

2.4.5.1 Factor de conversión bono

- Es igual al precio del bono al primer día del mes de entrega.
- a un TIR anual compuesto semestral.
- Vencimiento y pagos de cupón en trimestres por defecto.

2.4.6. Precio de cotización de un futuro

1. Determinar que una obligación aceptada sea la más barata.
2. Calcular factor de conversión de la obligación.
3. Calcular precio en efectivo del bono, S.
4. Calcular el precio del futuro $F = (S - I)e^{rT}$, donde I es el valor actual de los cupones a pagar antes de la entrega.
5. Calcular la cotización del futuro a partir de la tesorería de la posición corta.

$$Cotizacin(F) = \frac{F - Intersacumulado}{f_c}$$

2.4.6.1 Coberturas con futuros

- **Cobertura corta**. Tiene un producto o sabe que lo va a tener. Se quiere compensar una posición larga (venta futuro).
- **Cobertura larga**. Va a necesitar el producto. Compensar una posición corta. (Pueden usarse opciones).

Observación: no tienen por qué ser los mismos activos subyacentes. A lo mejor no se conoce la fecha, previo a la liquidación. Consecuencia: **Riesgo de base**.

Base = Precio de contado activo cubierto - Precio del futuro utilizado

2.4.6.2 Ratio de cobertura

Es el cociente entre el tamaño de la posición tomada en contratos de futuros sobre el tamaño del activo expuesto.

- ΔS. Cambio en el precio de contado, S.
- ΔF. Cambio en el precio del futuro, F.
- σ_S. Desviación estándar de ΔS.
- σ_F. Desviación estándar de ΔF.
- ρ. Coeficiente de correlación entre ΔS y ΔF.

Recordatorio: $\sigma_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

El **ratio de cobertura de varianza mínima**, h^* es:

$$Var(\Delta S - h^*\Delta F) = min\{Var(\Delta S - h\Delta F), h \in \mathbb{R}^+\}$$

Minimiza el riesgo de la cartera resultante de la cobertura,

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

Número óptimo de contratos de futuros para cubrir un activo A.

- N_A. Número de unidades de A que esperamos vender en el tiempo T.
- N_F. Número de unidades de A que contratamos como futuro a T.
- Q_F. Tamaño en unidades del contrato de futuro F.

Entonces el ratio de cobertura es:

$$h^* = \frac{N_F}{N_A}$$

y el **número óptimo de contratos de futuros**, N^* es:

$$N^* = \frac{N_F}{Q_F} = h^*\frac{N_A}{Q_F}$$

2.4.7. Futuros sobre índices

Precio de entrega viene dado: $F = Se^{(r-q)T}$ donde r es el tipo libre de riesgo y q es la tasa continua de rendimientos por dividendos. También se puede obtener a partir de la cantidad de dividendos D.

$$F = (S - D)e^{rT}$$

Hacer cobertura sobre una cartera de acciones del índice:

Sea P el precio de la cartera de acciones que vamos a cubrir, M el valor del índice del mercado, A el valor actual de las acciones subyacentes al índice, N^* el número de futuros de índice de mercado.

Entonces $N^* = \beta \frac{P}{A}$ donde el parámetro β es: $\beta = \frac{cov(P,M)}{\sigma_M^2}$

β nos da la relación entre la rentabilidad de la cartera de acciones P y la rentabilidad del mercado según el modelo de variación de activos financieros.

2.4.8. Futuro sobre bono

Dado el tipo libre de riesgo r (suponemos constante) y $t_1, ..., t_n$ pasos de los cupones. El precio del bono es:

$$P = \sum_i c_i e^{-r_i t_i} + N e^{-r_n t_n}$$

$D = \frac{-1}{P}\frac{dP}{dr} \Rightarrow \Delta P = -DP\Delta r$

Dados dos bonos con sus duraciones D_1, D_2 y sus precios a_1, a_2, tenemos:
$D = \frac{a_1}{a_1+a_2}D_1 + \frac{a_2}{a_1+a_2}D_2$

$\Delta F = -D_F F \Delta r$

2.4.9. Coberturas y duración

Sea F el precio del contrato de futuros, D_F la duración del subyacente al futuro, P el precio actual de la cartera, D_P duración de la cartera al vencimiento de la cobertura.

El número de contratos de futuros para cubrirse frente a un movimiento paralelo de la curva de interés es:

$$N^* = \frac{PD_P}{FD_F}$$

2.5. Opciones

Contrato que permite vender o adquirir un subyacente a un precio prefijado en un momento determinado (**opción europea**) o hasta un momento dado (**opción americana**).

- El momento dado es la **fecha de vencimiento** (T).
- Para suscribir el contrato de opciones se debe pagar un **precio de adquisición** de la opción.
- El precio prescrito del subyacente es el **precio de ejercicio**, **strike** o de cierre.
- **Valor intrínseco** de una opción es el máximo entre 0 y el valor que tendría si fuera ejercida en ese momento.

Tienen dos usos: especulación y cobertura. Se pueden realizar opciones con subyacentes como divisas, futuros, índices, acciones. Hay distintas posiciones:

- Posiciones **largas**. **Compradores de opciones** de compra o de venta.
- Posiciones **cortas**. **Vendedores de opciones** de compra o de venta.

El emisor (*writer* o vendedor) de la opción y el comprador (o *holder*) tienen como intermediarios la *Cámara de Compensación* (*clearing house*), los *brokers* y creadores de mercado (*market makers*).

2.5.1. Tipos de opciones

- **Opción de compra (call)** da a su propietario el **derecho a comprar** un activo a cierto precio. La otra parte tiene obligación de vender el subyacente si se ejerce el derecho.
- **Opción de venta (put)** da a su propietario el **derecho a vender** un activo a un cierto precio. Obliga a la otra parte a comprar el subyacente si se ejerce el derecho.

Observación: Derecho para el comprador de la opción, obligación para el emisor de la opción. El comprador de una opción, para asegurarse que el vendedor puede entregarle el subyacente, exige (a través de intermediarios) que el vendedor proporcione una **garantía** (por ejemplo depósito de x % del valor de mercado del título).

2.5.2. Posibilidades para el comprador de la opción (europea)

1. Ejercer el derecho comprando o vendiendo los títulos que la opción le permite.
2. Dejar pasar la fecha de vencimiento sin ejercer su opción.
3. Venderla antes de su vencimiento en el mercado secundario de opciones.

Ejemplo 6. A fecha de 28 de abril, firmamos la opción de compra para el 28 de octubre para comprar un subyacente a precio de ejercicio de 250 euros. El coste de la opción de compra es 10 euros. Hay dos posibles situaciones dadas por el precio del subyacente en la fecha de expiración (28 de octubre).

1. Si el precio del subyacente es 270 euros el 28 de octubre, podremos comprar el subyacente solo por 250 euros. Obtenemos un beneficio de 10 euros porque podemos revenderlo inmediatamente en el mercado a 270 euros (hay que restar el precio de la opción).
2. Si el precio del subyacente es 230 euros el 28 de octubre, entonces, ¿para qué comprar a 250 euros, estando en el mercado a 230?

2.5.3. Opciones sobre acciones

Los factores que determinan los precios de las opciones sobre acciones (europea, americana) de compra (c, C) o venta (p, P) son: el **precio actual de las acciones** S, **precio de ejercicio** X, tiempo de expiración T, volatilidad del precio de las acciones σ, el **tipo libre de riesgo** r, **dividendos** esperados durante la vida de la opción, de valor actual D. Los precios de las opciones tienen un límite máximo y mínimo, sino hay oportunidades de arbitraje.

2.5.3.1 Opción de compra

La opción no puede tener más valor que la acción: $c, C \leqslant S$.
Sobre las acciones que **no distribuyen dividendos** se satisface: $c \geqslant max(S - Xe^{-rT}, 0)$

- **Punto de vista del comprador**. Paga el precio de adquisición de la opción. Al adquirir una opción de compra, se puede beneficiar de un aumento en el precio del activo subyacente sin haberlo comprado. El poseedor de la opción de compra sobre una acción (tiene posición larga en opciones de compra, pero posición corta en las acciones porque no las tiene) puede decidir si ejercer o no la opción, dependerá del precio de cotización de la acción.
- **Punto de vista del vendedor**. Recibe el precio de adquisición de la opción. Si el precio de cotización de la acción asciende, al tener la obligación de vender la acción tendrá pérdidas.

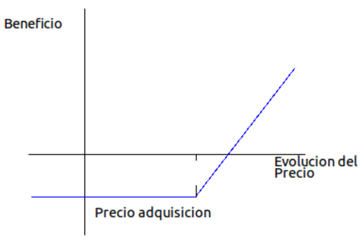


Figura 1: Punto de vista del comprador en t = T

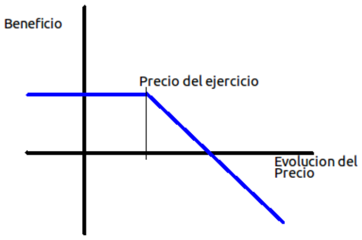


Figura 2: Punto de vista del vendedor en t = T

2.5.3.2 Opción de venta

La opción de venta no puede tener más valor que el strike: $p, P \leqslant X$.
En la opción europea a vender en T, $p \leqslant Xe^{-rT}$.
La opción europea sobre acciones que **no distribuyen dividendos** satisface: $p \geqslant max(Xe^{-rT} - S, 0)$

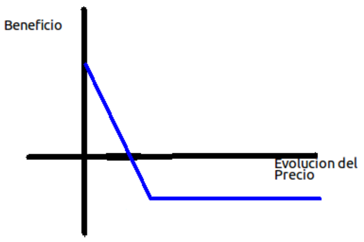


Figura 3: Punto de vista del comprador en t = T

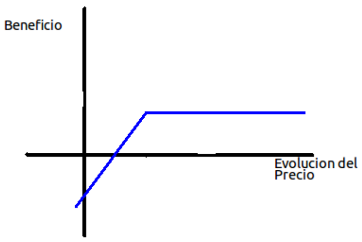


Figura 4: Punto de vista del vendedor en t = T

2.5.4. Paridad Put-Call

La paridad Put/Call es una relación entre las opciones call, las opciones put y el propio precio del subyacente, de forma que en todo momento debe existir un equilibrio entre los precios. Si se desajusta aparecen oportunidades de arbitraje.

2.5.4.1 Opciones europeas sin dividendos

Dados los siguientes datos (en el instante de tiempo t):

- c_t precio del call europeo.
- X_t precio del ejercicio o strike.
- r_t tipo libre de riesgo.
- T tiempo en el que se tiene derecho a la opción.
- p_t precio de opción venta europea.
- S_t precio del subyacente.

Tenemos que en cualquier instante t,

$$c_t + X_t e^{-r_t(T-t)} = p_t + S_t$$

Derivación:

Dadas dos carteras, para $t = 0$:

- A compra un call y tiene una cantidad de efectivo Xe^{-rT}, es decir, $V_0(A) = c + Xe^{-rT}$.
- E compra un put y tiene una acción. $V_0(B) = p + S$.

En $t = T$, tenemos que:

- A: Si $S_T > X$ ejecutamos la opción y obtenemos S_T. Si $S_T < X$ no ejecutamos la opción y mantenemos X. Por tanto, $V_T(A) = max(X, S_T)$.
- E: Si $S_T > X$ no ejecutamos la opción de venta S, $V_T(E) = S_T$. Si $S_T < X$ ejecutamos el put, $V_T = X$. Por tanto, $V_T(E) = max(X, S_T)$.

2.5.4.2 Opciones americanas sin dividendos

Para **opciones americanas** tenemos $P > p$ y $C = c$ en ausencia de dividendos. Entonces,

$$C - P < S - Xe^{-rT}$$

Derivación: Dada una cartera F con una opción americana de venta y una acción, y una cartera G con una opción de compra y cantidad de efectivo X:

$$S - X < C - P < S - Xe^{-rT}$$

2.5.4.3 Efecto de los dividendos

El valor actual de los dividendos de una acción D es un valor deducible durante la vida de una opción cotizable. Los datos X, S, D son valores actuales del mercado, dependen de T.

Tenemos una cartera H con una opción europea de compra y efectivo de $D + Xe^{-rT}$. Otra cartera B, con una acción, $c > max(S - D - Xe^{-rT}, 0)$.

Otra cartera E con una opción europea de venta y una acción. Por último, la cartera I con efectivo de $D + Xe^{-rT}$, con $p > max(D + Xe^{-rT} - S, 0)$.

$$D_0 = de^{-rt_0}$$
$$D_T = de^{r(T-t_0)}$$

Usando la cartera E y H tenemos la **paridad put-call**:

$$c + D + Xe^{-rT} = p + S$$

Para una cartera J con opción europea de compra y efectivo de $D + X$ y otra cartera F con una opción americana de venta y una acción, concluímos:

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-rT}$$

3. Mercados Financieros Finitos

3.1. Situación

- Consideramos un número finito de tiempos. (0 actualidad, 1 una unidad en el futuro).
- Tenemos d posibles activos. $S := (S^1, ..., S^d)$ vector de **variables aleatorias** de los elementos del mercado (M). Cada S^i_t es el **valor en t del activo** S^i es una variable que toma un número finito de valores.
- **Subyacente sintético**: combinación de dos o más activos.
- Λ representa el conjunto de inversores.
- $F_1 = \sigma(S_1, ..., S_d)$ es la información del mercado, filtración.
- Cada $\alpha \in \Lambda$ tiene definida en F_1 una probabilidad P_α.
- **Hipótesis:** $\forall \alpha$, $\beta \in \Lambda$, $P_\alpha \sim P_\beta$.

3.2. Teoría de las carteras

- **Cartera (portafolio)**. Conjunto de todas las posiciones en todos los activos (largos o cortos) que tiene un individuo o institución.
- **Estrategia**, φ, consiste en la decisión de invertir en tiempo o en el activo S_i comprando φ_i unidades y esperar hasta el instante 1. (**Modelo de un periodo**).
- **Valor de la cartera** en $t = 0, 1$ es la variable aleatoria:
$$V_t = \sum_1^d \varphi_i S^i_t = \varphi S_t$$
- **Función de precio** $\Pi : M \Rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo elemento del mercado nos da su precio actual. $\Pi(S^i_1) = S^i_0$.

3.2.1. Hipótesis para el mercado y las carteras

- No existen fricciones en la economía: no hay costes de transacción, no hay impuestos, no hay restricciones a posiciones cortas.
- La competencia es perfecta, los subyacentes disponibles son precio-aceptantes.
- Suponemos subyacentes divisibles.

3.2.2. Arbitraje

Un **arbitraje** es una estrategia de cartera con un número finito de subyacentes donde la posibilidad de ganar sin arriesgar es real. Existirán oportunidad de arbitraje en los siguientes casos. Si existe una estrategia $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$ tal que:

Precio	$\exists \alpha \in \Lambda$ tal que
$\Pi(\varphi S_1) \leqslant 0$	$P_\alpha(\varphi S_1 \geqslant 0) = 1$ y $P_\alpha(\varphi S_1 > 0) > 0$
$\Pi(\varphi S_1) \geqslant 0$	$P_\alpha(\varphi S_1 \leqslant 0) = 1$ y $P_\alpha(\varphi S_1 < 0) > 0$
$\Pi(\varphi S_1) \neq 0$	$P_\alpha(\varphi S_1 = 0) = 1$
$\Pi(\sum_1^d \varphi_j S^j) \neq \sum_1^d \varphi_j \Pi(S^j)$	

En nuestra economía consideraremos ausencia de arbitrajes.

Consecuencia. En ausencia de arbitraje, $\forall S \in M$ tal que $\exists \alpha \in \Lambda$ con:

$$P_\alpha(S_1 \geqslant 0) = 1 \text{ y } P_\alpha(S_1 > 0) > 0$$

verifica necesariamente $S_0 = \Pi(S_1) > 0$.

3.2.3. Rendimientos relativos

Son las variables aleatorias:

- **Rendimientos relativos** (rate of return):

$$R_i = \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}$$

- **Rendimientos** (total return):

$$\hat{R}_i = \frac{S_0^i}{S_0^i}$$

Así tenemos

$$V_1 = \sum_1^d \varphi_i S_1^i = \sum_1^d \varphi_i S_0^i (1 + R_i) = \sum_1^d \varphi_i S_0^i \hat{R}_i$$

3.2.3.1 Teorema de valoración en ausencia de arbitraje

El rendimiento (respectivamente para rendimiento relativo) de una cartera es igual a la media ponderada de los rendimientos (resp. rendimientos relativos) de los subyacentes que lo componen.

$$\hat{R} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{\sum \varphi_i S_0^i \hat{R}_i}{\sum \varphi_i S_0^i} = \sum w_i \hat{R}_i$$

donde $w_i = \frac{\varphi_i S_0^i}{\sum \varphi_i S_0^i}$ es el peso del i-ésimo activo en la cartera.

Análogamente,

$$R = \frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \sum w_i R_i$$

3.3. Prima de riesgo

Activo sin riesgo: S^0 tal que $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = 1 + r_f$ donde r_f es su rendimiento, conocido.

Prima de riesgo del activo $S \in M$ con respecto al inversor $\alpha \in \Lambda$:

$$E_\alpha[R_S] - r_f$$

Proposición. La prima de riesgo de una cartera es la media ponderada de las primas de riesgo de los activos que lo componen.

$$E_\alpha[R] - r_f = \sum w_j (E_\alpha[R_j] - r_j)$$

3.4. Modelo de un periodo

- Nuestra economía tiene m posibles estados a vencimiento, con sus probabilidades: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, $P(\omega_i) = p_i$, $i = 1, ..., m$.
- Tenemos $N + 1$ subyacentes, $S = (S^0, ..., S^N)$ y su proceso de precios: $S_t = (S_t^0, ..., S_t^N)$ con $t = 0, 1$.
- Suponemos que los rendimientos de los subyacentes son linealmente independientes.
- $N + 1 \leqslant m$, m dimensión del espacio vectorial de las variables aleatorias.
- S^0 es el subyacente sin riesgo, **cuenta bancaria**.
  $S_0^0 = 1$ (hipótesis de normalización).
  $S_1^0 > 0$, en general, $S_1^0 \geqslant 1$.
  Rendimiento del activo sin riesgo $r = S_1^0 - 1$ (tipo de interés).
- Proceso de **precios descontados**:

$$\tilde{S}_t = (\tilde{S}_t^0, ..., \tilde{S}_t^N), \tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0} \forall i, t$$

- **Valor descontado** de una cartera:

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{S_t^0}$$

- El subyacente asociado a los valores descontados actúa como **numerario**. (Elegir un numerario es determinar la unidad de trabajo del mercado).

3.4.1. Activo contingente y economía completa

Un producto financiero X_1 v.a. en Ω es un **activo contingente** o **replicable** si $\exists \varphi$ estrategia de cartera tal que $X_1 = \varphi S_1$.

Economía completa $\Leftrightarrow$ todos los activos son replicables.
Economía viable $\Leftrightarrow$ no existen oportunidades de arbitraje.

Proposición. Si X es replicable $X = \varphi S_1$ admite solución. Si la economía es **viable** dicha solución es única.

3.5. Modelo matricial

Modelo matricial. Tenemos m estados en 1 y $N+1$ subyacentes. Determinar que un activo es replicalbe es resolver un sistema de m ecuaciones con $N+1$ incógnitas. S_1 tiene $N+1$ filas y m columnas.

3.5.1. Resultados

Proposición. Es replicable si los rangos de S_1 y $(X_1 S_1)$ son iguales. La economía es completa si el rango de S_1 es m. Entonces $m = N+1$.

Proposición. Supongamos que $\exists q = (q_1, ..., q_m)$ $q_j > 0$ tal que $\forall \varphi$ del mercado se verifique:

$$\tilde{V}_0(\varphi) = \sum_j q_j \tilde{V}_1(\varphi)(w_j)$$

Entonces la economía es **viable**.

Proposición. Bajo la suposición anterior, $Q : \Omega \leftarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(w_i) = q_i \forall i$. Entonces Q define una probabilidad en Ω, conocida como **probabilidad de descuento** o **probabilidad de riesgo neutro**.

Consecuencias. La condición suficiente de viabilidad se escribe como:

- **Propiedad de martingala con respecto de Q**: $\tilde{V}_0(\varphi) = E_Q[\tilde{V}_1(\varphi)]$.
- **Propiedad de riesgo neutro**. El numerario es la cuenta bancaria y $V_0(\varphi) = \frac{E_Q[V_1(\varphi)]}{1+r}$

Teorema. La economía es completa y viable $\Leftrightarrow$ $\exists!$ probabilidad de riesgo neutro (o prob. martingala) Q tal que

$$\tilde{V}_0(\varphi) = E_Q[\tilde{V}_1(\varphi)] \; \forall \varphi$$

Proposición. Sea P la probabilidad subjetiva de un inversor y Q la probabilidad de riesgo neutro. En una economía **viable**:

$$\tilde{S}_0 = E_Q[\tilde{S}_1] = E_P[Z\tilde{S}_1] \text{ siendo } Z(w_j) = \frac{Q(w_j)}{P(w_j)}$$

Esta es la relación que nos define el precio en ausencia de arbitraje con una probabilidad subjetiva. Z es la **densidad o vector de estados de los precios**.

$$\text{Si } Q \sim P \Rightarrow Z = \frac{dQ}{dP}$$

Proposición. Sea S^n subyacente tal que $S_1^n(w_j) \neq 0 \; \forall w_j \in \Omega$. Entonces S^n es un numerario.

Teorema. Sea una economía **completa y viable**. Sean S^n y S^m dos numerarios, Q_n, Q_m las probabilideades martingalas asociadas. Entonces:

$$S_0^n E_{Q_n}[S_1^i / S_i^n] = S_0^m E_{Q_m}[S_1^i / S_i^m] \; \forall i = 0, ..., N$$

3.5.2. Activos de Arrow-Debreu

Sea una economía completa y viable. Los **activos de Arrow-Debreu** A_T^i para $i = 1, ..., m$ se definen como:

$$A_T^i(w_j) = \delta_{ij} \text{ para } j = 1, ..., m$$

Proposición. Sean A_0^i el valor en 0 de los activos Arrow-Debreu. Entonces para cualquier subyacente:

$$S_0 = \sum_1^m S_T(w_i) A_0^i$$

Proposición. Sea S un activo numerario. Entonces, la probabilidad martingala asociada a S es:

$$Q_S(w_i) = \frac{S_T(w_i) A_0^i}{S_0}$$

Esto permite calcular los A_0^i, la probabilidad martingala Q, las densidades entre probabilidades martingalas:

$$Q_n, Q_m \text{ probabilidades } Z_{nm}(w_j) = \frac{Q_n(w_j)}{Q_m(w_j)}$$

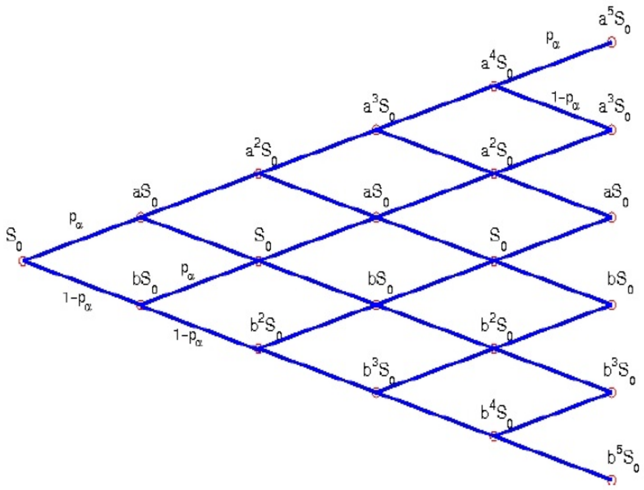
4. Modelo binomial

El **modelo binomial** es un modelo discreto que permite observar el comportamiento de un activo (por ejemplo, acción) a través del tiempo. El precio de la acción puede comportarse de **dos** formas: subir o bajar en cada unidad de tiempo. Denotamos:

- **Precios** (consideramos modelo multiplicativo). En particular, para el modelo de un paso tenemos S_0, precio actual de la acción, $S_1 = aS_0$, precio de la acción en el caso de subida y $S_1 = bS_0$, precio de la acción en el caso de bajada. Consideramos (teóricamente) que $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ y $\mathbf{ab} = \mathbf{1}$. En general, tenemos $N+1$ precios, dados por:

$$S_{n+1} = \begin{cases} aS_n \text{ alza} \\ bS_n \text{ baja} \end{cases}$$

- **Probabilidades**. p_α de subida y $1 - p_\alpha$ de bajada. Se considera para un inversor $\alpha \in \Lambda$.



- ω camino aleatorio del árbol. Hay 2^N trayectorias posibles, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{2^N}\}$
- **Número de subidas** hasta n, $Z_n(\omega)$, es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial $B(n, p_\alpha)$. $Z_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ donde $Z_i = \begin{cases} 1 \text{ si hay subida en } t_i \\ 0 \text{ si hay bajada en } t_i \end{cases}$
- $S_n(\omega)$ para $n = 0, ..., N$, precio del camino.

$$\mathbf{S_n(\omega) = S_0 a^{Z_n(\omega)} b^{n - Z_n(\omega)}}$$

- La probabilidad de cada camino es:

$$P_\alpha(\omega) = p_\alpha^{Z_N(\omega)}(1 - p_\alpha)^{N - Z_N(\omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$$

- **Filtración**. $F_n = \sigma(S_1, S_2, ..., S_n)$. Es una sigma-álgebra del conjunto de posibles trayectorias, Ω, (conjunto de subconjuntos de Ω, cerrado por complementación, por uniones arbitrarias e intersecciones finitas). Representa también los precios posibles para los caminos aleatorios de un árbol de n pasos. Cumplen que $F_i \subseteq F_{i+1} \forall i = 0, ..., N$. Por ejemplo, $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
$F_1 = \{\emptyset, \Omega, A, B\}$ donde A denota el suceso $\{S_1 = aS_0\}$ y B denota $\{S_1 = bS_0\}$.
$F_2 = \{\emptyset, \Omega, A, B, AA, BB, AB, BA, BB\}$.

- Los inversores coinciden en N-periodos y fechas de transacción.
- Se pueden fraccionar los activos.
- No se pagan dividendos, no hay costes de transacción ni impuestos.
- Se permiten descubiertos ilimitados en t.

4.1. Resultados

- Un **activo replicable** es una variable aleatoria F_n-medible.
- La dinámica del **activo sin riesgo** está caracterizada por su rendimiento.

$$S_n^0 = (1+r)S_{n-1}^0 \ \forall n = 1, ..., N, S_0^0 = 1$$

- La **probabilidad de riesgo neutro** en un periodo es:

$$q = \frac{1+r-b}{a-b}, \quad 1-q = \frac{a-1-r}{a-b}$$

- La probabilidad de riesgo neutro del modelo binomial es:

$$Q(\omega) = q^{Z_N(\omega)}(1-q)^{N-Z_N(\omega)} \ \forall \omega \in \Omega$$

- Los precios descontados son una martingala.

$$\frac{S_m}{(1+r)^m} = E_Q[\frac{S_n}{(1+r)^n}|F_m] \ \forall 0 \leqslant m < n \leqslant N$$

- En particular, el **precio de un activo**:

$$S_0 = E_Q[\frac{S_N}{(1+r)^N}]$$

- **Teorema**. La economía descrita por el modelo binomial es **completa**.

4.2. Martingala

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito, $F_0, F_1, ..., F_N$ álgebras de subconjuntos de F tal que: $F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_N$ = F, es filtración de F.

Una sucesión de variables aleatorias $S_1, ..., S_n$ sobre (Ω, F, P) se llama **martingala** respecto a $F_0, F_1, ..., F_N$ si S_n es F_n-medible y $E[X_{n+1}|F_n] = S_n$.

4.3. Carteras autofinanciadas

El inversor rebalancea su cartera en función de la economía en ese momento. Cada **estrategia** es un proceso estocástico: $\varphi_n(\omega) = (\varphi_n^0(\omega), \varphi_n^1(\omega))$, donde $\varphi_n^i(\omega)$ es el número de unidades del activo i durante $(n, n+1]$. La redistribución viene dada por: $\varphi_{n+1} S_{n+1} = \varphi_n S_{n+1}$.

Dada una estrategia φ, $V_n(\varphi)$ es el valor de la cartera en n, $n \leqslant N$ y verifica

$$V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) = \varphi_n(S_{n+1} - S_n) \quad V_{n+1}(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(S_{j+1} - S_j)$$

Sin arbitraje, el **valor de una cartera** cuyo flujo en N es $\varphi(S_N)$ viene dado por:

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[\varphi(S_N)]$$

4.4. Valor de una opción de compra europea

Una opción europea c de strike K con $aS_0 < K < bS_0$ tiene como precio y estrategia:

- Para el modelo de 1 paso:

$$c_0 = \frac{(aS_0-K)(1+r-b)}{(1+r)(a-b)} \text{ y } \varphi_0^1 = \frac{aS_0-K}{(a-b)S_0}$$

- En general, dado una opción con flujo final $X = (S_N - K)^+, X(\omega) = max(S_N(\omega) \setminus K, 0)$, el valor es:

$$c_0 = V_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[(S_N - K)^+] =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} (S_0 a^n b^{N-n} - K)^+$$

La ausencia de arbitraje nos da la **paridad call-put**:

$$c_n - p_n = S_n - K(1+r)^{n-N}$$

También podemos calcular el valor de un put, a partir del call.

4.4.1. Derivación de las fórmulas del modelo de 1 paso (cartera réplica)

Vamos a valorar una opción de compra europea formando una **cartera réplica** a partir del derivado y un activo libre de riesgo (cuenta bancaria), es decir, creando un activo gemelo que genere los mismos flujos de caja que el activo a valorar.

La cartera se compone de h acciones y de un préstamo de B euros a un tipo de interés libre de riesgo r_f (no tiene riesgo porque en todo momento habrá dinero para devolver el préstamo). Por tanto, dentro de un período los flujos de caja de dicha cartera son, dados los siguientes precios:

	Actual	Subida	Bajada
Acción	S_0	$S_a = aS_0$	$S_b = bS_0$
Call	c_0	$c_a = max(S_a - K, 0)$	$c_b = max(S_b - K, 0)$
Flujos cartera	$S_0 h - B$	$S_a h - (1+r_f)B$	$S_b h - (1+r_f)B$

Para que no haya **oportunidades de arbitraje**, el modelo considera: $c_0 = S_0 h - B$. Tenemos: $c_a = S_a h - (1+r_f)B \quad c_b = S_b h - (1+r_f)B$

Restando ambas ecuaciones se obtiene el ratio de cobertura, $h = \frac{c_u - c_d}{S_0}(a-b)$.
Tenemos que $B = \frac{S_a h - c_a}{1+r_f}$.

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación de c_0 y considerando las **probabilidades neutrales de riesgo**: $q = \frac{1+r-b}{a-b}$, $1-q = \frac{a-1-r}{a-b}$, se llega a que el precio teórico de la opción de compra es igual al valor actual de la media ponderada de los flujos de caja que proporciona:

$$c = \frac{c_a q + c_b(1-q)}{1+r_f}$$

Observación. Las ***probabilidades* neutrales al riesgo** no son probabilidades formalmente, son los precios tiempo-estado de los posibles estados (subida-bajada) multiplicados por $1+r_f$. Pero ambas suman 1, son positivas y se emplean para estimar el rendimiento esperado de un activo con riesgo que hacen que la prima de riesgo desaparezca.

4.5. Arbitraje

El modelo binomial es libre de arbitraje (la economía es viable) si $0 < p_\alpha < 1$ y $b < 1 + r < a$.

4.6. Ajustes del árbol a datos del mercado

Sea T tiempo hasta vencimiento, Δt tiempo entre dos nodos y r_c el tipo libre de riesgo anual (con composición continua). Tenemos:

$$e^{r_c} = 1 + r \Rightarrow r \approx r_c \Delta t$$

La **probabilidad de riesgo neutro** verifica: $q = \frac{e^{r_c \Delta t} - b}{a - b}$.

La **volatilidad** de un activo, σ, verifica que, para un Δt pequeño, la desviación típica de sus rendimientos es $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

El marco natural para el rendimiento relativo $\hat{R} = S_{n+1}/S_n$. Se verifica:

$$e^{r_c \Delta t} = E_Q[\hat{R}] = aq + b(1-q)$$
$$\sigma^2 \Delta t = V_Q[\hat{R}] = a^2 q + b^2(1-q) - e^{2r_c \Delta t}$$

Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas (a, b, q). Existen distintas aproximaciones:

- **Cox-Russ-Rubinstein**. Para $ab = 1$, $a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $b = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.
- **Jarrod-Rudd**, $q = 0.5$. $a = e^{(r_c - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $b = e^{(r_c - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.
- **Tian**. Añadimos la ecuación de los momentos de orden 3 que hace coincidir el modelo binomial con el modelo continuo: $a^3 q + b^3(1-q) = e^{3r_c \Delta t} e^{3\sigma^2 \Delta t}$. Entonces,

$$q = \frac{(e^{r_c \Delta t} - b)}{(a - b)}$$
$$a = \frac{e^{(r_c + \sigma^2)\Delta t}}{2}[e^{\sigma^2 \Delta t} + 1 + \sqrt{e^{2\sigma^2 \Delta t} + 2e^{\sigma^2 \Delta t} - 3}]$$
$$b = \frac{e^{(r_c + \sigma^2)\Delta t}}{2}[e^{\sigma^2 \Delta t} + 1 - \sqrt{e^{2\sigma^2 \Delta t} + 2e^{\sigma^2 \Delta t} - 3}]$$

4.7. Fórmula de Cox-Rubinstein

Valor de un call es:

$$c_0 = S_0 \phi(n_0, N, q') - \frac{K}{(1+r)^N} \phi(n_0, N, q)$$

donde

$$\varphi(n_0, N, q) = P(X \geqslant n_0) \text{ donde } X \sim B(N, q)$$

y $n_t = [\frac{\ln(K/(Sb^N))}{\ln(a/b)}] + 1$ y $q' = \frac{aq}{1+r}$.