Convergencia del método de Adams-Bashforth,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\right),$$

para el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(x) =& f(x, y(x)) \quad \text{en } [a, b] \\ y(a) =& y_a, \end{aligned}$$

donde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : R^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sea $y(x)$ solución del problema. Definimos el residuo R_n mediante la expresión

$$R_n = y(x_{n+1}) - y(x_{n+1}) - \frac{3h}{2} f(x_{n+1}, y(x_{n+1}) - \frac{h}{2} f(x_n, y(x_n).$$

Entonces podemos escribir que

$$\begin{aligned} y(x_{n+2}) - y_{n+2} =& y(x_{n+1}) - y_{n+1} + \frac{3h}{2}(f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, y_{n+1})) \\ & - \frac{h}{2}(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)). \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos y utilizando la condición Lipschitz de la función f obtenemos la estimación

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+2}| \le \left(1 + \frac{3hL}{2}\right)|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| + \frac{Lh}{2}|y(x_n) - y_n| + |R_n|.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} e_n =& |y(x_n) - y_n| \\ r_1 =& 1 + \frac{3hL}{2} \\ r_0 =& \frac{h}{2} \\ K =& \max_n |R_n| \end{aligned}$$

tenemos que

$$e_{n+1} \le r_1 e_{n+1} + r_2 e_n + K.$$

Para resolver esta desigualdad vamos a considerar la recurrencia

(1) $$a_{n+2} = r_1 a_{n+1} + r_0 a_n + K$$

que en terminos del vector $b_n = (a_{n+1}, a_n)^T$ puede ser escrita en la forma

$$b_{n+1} = A b_n + K_v$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & r_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y Kv el vector

$$K_v = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora es fácil ver que

$$b_n = A^n b_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^j K_v.$$

Para calcular las potencias de A diagonalizaremos la matriz A. Los autovalores vendrán dados por

$$\lambda_\pm = \frac{r_1 \pm \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2}$$

y los autovalores por

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\pm^2}} \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = B^T A B$$

donde la matriz ortonormal B está dada por $B = (v_+, v_-)$. De manera que

$$b_n = BD^n B^T b_0 + B \left(\sum_{j=0}^{n-1} D^j \right) B^T K_v.$$

La suma la podemos hacer obteniendo que

$$D_{sum} \equiv \sum_{j=0}^{n-1} D^j = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+^n - 1}{\lambda_+ - 1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_-^n - 1}{\lambda_- - 1} \end{pmatrix}$$

Ahora podemos obtener a_n calculando la primera componente de b_n (lo llamo estrategia 1). Aquí vamos a hacer otra cosa (estrategia 2), vamos a acotar $|b_n|$. Como B es una matriz ortonormal y $|\lambda_+| \geq |\lambda_-|$ tenemos que

$$|b_n| \leq \lambda_+^n |b_0| + \frac{\lambda_+^n - 1}{\lambda_+ - 1} K \tag{2}$$

Por tanto

$$|a_n| \leq \lambda_+^n |b_0| + \frac{\lambda_+^n - 1}{\lambda_+ - 1} K$$

Hasta ahora no hemos hecho nada más que estudiar la recurrencia (1). Lo que hemos obtenido para ella nos va a servir para proponer una estimación para nuestro error e_n. Vamos a intentar probar que

$$e_n \leq \lambda_+^n \sqrt{e_1^2 + e_0^2} + \frac{\lambda_+^n - 1}{\lambda_+ - 1} K. \tag{3}$$

Es decir, que sólo hemos estudiado la recurrencia (1) para conseguir una intuición sobre el comportamiento de e_n. La prueba de que (3) es cierta viene ahora.

Comentario: Si en lugar de (2) nos quedamos con la estrategia 1 entonces intentariamos probar que los e_n satisfacen lo que hemos obtenido para a_n pero cambiando el igual por un menor o igual.

A $\sqrt{e_1^2+e_0^2}$ lo llamo c_0. Procederemos por inducción. La desigualdad es cierta para $n=0$ y para $n=1$ (nótese que $\lambda_+ \geq r_1 > 1$). Suponemos la desigualdad cierta para e_{n+1} y para e_n y la probamos para e_{n+2}.

$$\begin{aligned} e_{n+2} \leq & r_1 e_{n+1} + r_0 e_n + K \\ & \leq r_1\lambda_+^{n+1} c_0 + r_0 \lambda_+^n c_0 + r_1 \frac{\lambda_+^{n+1}-1}{\lambda_+-1}K + r_2\frac{\lambda_+^n-1}{\lambda_+-1}K + K \\ & \quad = \lambda_+^n c_0(r_1\lambda_+ + r_2) + \frac{\lambda_+^n(r_1\lambda_+ + r_2)}{\lambda_+-1}K - \frac{r_1+r_2-1+\lambda_+}{\lambda_+-1}K. \end{aligned}$$

Mirando a la ecuación de los autovalores de A vemos que $\lambda_+^2 = r_1\lambda_+ + r_2$, por tanto

$$e_{n+2} \leq \lambda_+^{n+2}c_0 + \frac{\lambda_+^{n+2}}{\lambda_+-1}K - \frac{r_1+r_2+1-\lambda_+}{\lambda_+-1}K.$$

Además $r_1+r_2+1-\lambda_+ \geq 1$ y por lo tanto

$$e_{n+2} \leq \lambda_+^{n+2}c_0 + \frac{\lambda_+^{n+2}-1}{\lambda_+-1}K,$$

como queriamos demostrar.

Una vez que hemos probado (3), utilizamos que $\lambda_+ \geq r_1$ para concluir que

$$e_n \leq \lambda_+^n c_0 + \frac{2K}{3Lh}(\lambda_+^n - 1).$$

Para demostrar convergencia basta acotar λ_+^n y aplicar consistencia que la vamos a dar por supuesto. Recordamos que

$$\lambda_+ = \frac{r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}}{2} = r_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right).$$

En clase hemos visto varias veces que r_1^n está acotado. Para acotar

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right)^n$$

razonamos de la siguiente manera,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right)^N$$

y el limite

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right)^N$$

existe (calcularlo es un ejercicio). Entonces ya sea creciente o decreciente la sucesión

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{r_2}{r_1^2}}\right)^N$$

está acotada N. Finalmente concluimos que existe una constante C tal que

$$e_n \leq C(c_0 + \frac{K}{h}).$$