Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guillermo Ruiz Álvarez

Curso 2013 - 2014
Universidad Autónoma de Madrid

Índice

1. Introducción

En este curso vamos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias. Comenzemos el curso definiendo su significado:

Definición: **Ecuación diferencial ordinaria.** Una ecuación diferencial ordinaria (**EDO**) es aquella que contiene una función de **una** variable y sus derivadas respecto de dicha variable.

Formalmente, dada una función

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

desonocida, la ecuación

$$F(x, y\prime, y\prime\prime, \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

donde $y^{(n)}$ representa la derivada n-ésima de la función y, es una ecuación diferencial ordinaria de **orden** n.

Para entender mejor las ecuaciones diferenciales ordinarias y su utilidad, veamos los siguientes ejemplos: **Ejemplo (Problema de la Tractriz):**

Tratemos el problema de la tractriz: supongamos que estamos situados en el origen de coordenadas, desde el cual arrastramos, en el sentido positivo del eje de ordenadas, una barra rígida de acero de longitud L cuyo otro extremo se encuentra inicialmente en el punto $(0, L)$. El problema de la tractriz trata de encontrar una expresión para la curva que describe dicho extremo de la barra.

Llamaremos $y(x)$ a la expresión para la curva que queremos encontrar y al punto en el que se encuentra el extremo $P\prime : (x, y(x))$.

Llamaremos P al punto en el que nos situamos en cada instante.

Como se puede observar en la **Figura 1** la barra de acero tiene la dirección de la recta tangente a la curva descrita por el extremo citado y siempre se mantiene la distancia L entre el punto en el que estemos situados y dicho extremo.

Con esto obtenemos lo siguiente:

- Vector tangente: $(1, y\prime(x))$
- Recta tangente: $(x, y) + \lambda(1, y\prime(x))$
- Como sabemos que la recta tangente pasa por P cuando $\lambda = -x$ (porque P está en el eje de ordenadas y ha de tener la primera coordenada igual a

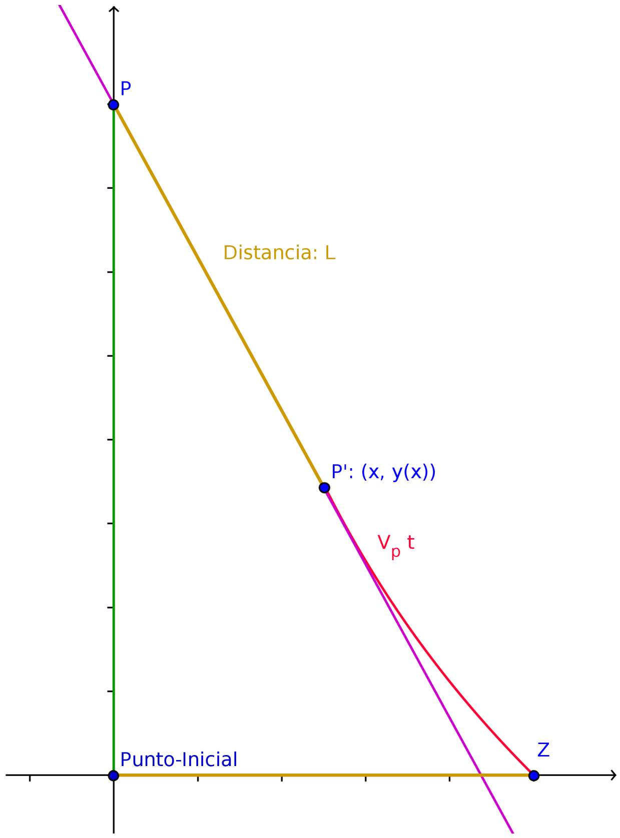

Figura 1: Problema de la tractriz

cero) tenemos que
$P = (0, y - xy\prime(x))$

- Ahora usando que la distancia entre P y $P\prime$ es L vemos que
$L = \sqrt{(P\prime - P)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 y\prime(x)^2}$

- Despejando $y\prime$ tenemos
$y\prime(x) = \pm\sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1}$

- Se escogerá la rama negativa porque la recta tangente del problema tiene pendiente negativa. Por tanto sólo nos falta obtener nuestra función, que es
$$y(x) = -\int (\sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1}) dx + C$$

- Para averiguar C atendemos al problema y observamos que tenemos un dato adicional, y es que $y(L) = 0$ pues la posición inicial del extremo de la barra es $(L, 0)$ y por tanto $y(L) = 0$.

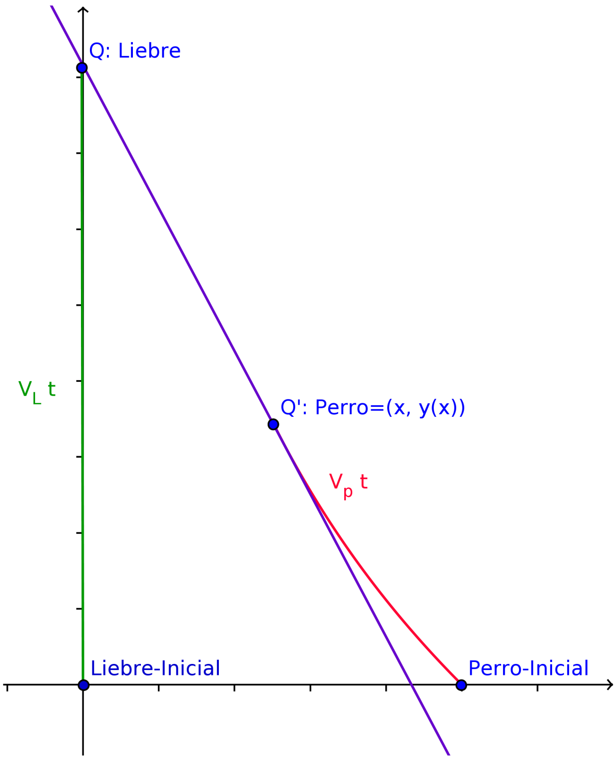

Figura 2: Curva de persecución

Ejemplo (Curva de persecución I):

Veamos el problema de la curva de persecución: Supongamos que una liebre que se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas comienza a huir con velocidad V_L y en el sentido positivo del eje de ordenadas de un perro que inicialmente tiene la posición $(0, D)$ y comienza a perseguirle con velocidad V_P (Ver **Figura 2**).

Llamaremos Q a la posición de la liebre en cada instante y $Q\prime : (x, y(x))$ a la posición del perro.

Observamos que el perro, al perseguir a la liebre, siempre lo hace mirándole, por tanto, en cada instante, la recta tangente a la curva que describe el perro al perseguir a la liebre pasa por Q y por $Q\prime$.

Como dato adicional tenemos que la distancia recorrida por la liebre es $V_L t$ y la distancia recorrida por el perro es $V_P t$, por tanto en cada instante la liebre está en la posición $(0, V_L t)$.

Tenemos pues:

- Vector tangente: $(1, y\prime(x))$
- Recta tangente: $(x, y) + \lambda(1, y\prime(x))$
- Como sabemos que la recta tangente pasa por Q cuando $\lambda = -x$ (porque Q está en el eje de ordenadas y ha de tener la primera coordenada igual a cero) tenemos que
  $Q = (0, y - xy\prime(x))$ y además que $Q = (0, V_L t)$ por tanto $V_L t = xy\prime(x)$
- La distancia recorrida por el perro es $V_P t = \int_x^D \sqrt{1 + (y\prime(s))^2 ds}$
- Despejando t de ambas ecuaciones e igualando términos tenemos que $\frac{V_P}{V_L}(y - xy\prime(x)) = \int_x^D \sqrt{1 + (y\prime(s))^2 ds}$
- Derivando ambos términos y utilizando el cambio $p = y\prime$ llegamos a $\frac{V_p}{V_L} xp\prime = \sqrt{1 + p^2}$
- Integrando: $\sqrt{1 + p^2} + p = e^{C_1} x^{\frac{V_L}{V_T}}$
- Despejando de esta ecuación obtenemos p y por tanto $y\prime$, habrá que calcular la constante de integración y volver a integrar y a calcular la nueva constante de integración para obtener y, por lo que necesitaremos dos datos adicionales para efectuar este cálculo:
  $y(D) = 0$
  $y\prime(D) = 0$

La expresión que se obtiene depende de las velocidades V_L y V_P, vamos a simplificar el problema suponiendo $D = 1$. Tenemos tres casos distintos:

- **Caso 1:** $V_L = V_P$
  En este caso se tiene $y\prime(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ de donde obtenemos $y(x) = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - ln(x)) + C_2$ y utilizando el dato $y(1) = 0$ podemos hallar $C_2 = \frac{-1}{4}$.
  Tenemos como solución $y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}ln(x) - \frac{1}{4}$.
  Una vez obtenida la expresión, podemos hallar la distancia entre la liebre y el perro, que dependerá de la posición del perro: $d = \sqrt{x^2 + x^2(y\prime(x))^2}$.
  Como el perro va describiendo una curva y la liebre una recta vemos que el perro se va acercando poco a poco a la liebre. Sin embargo, cuando

$x \longrightarrow 0^+$ vemos que la curva que describe el perro "se parece" cada vez más a una recta y por tanto en el infinito la distancia de separación se mantendrá constante.
Vemos pues que

$$\lim_{x \to 0^+} d = \frac{1}{2}$$

- **Caso 2:** $V_L < V_P$
  Tenemos la expresión

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{V_L}{V_P}+1}}{\frac{V_L}{V_P}+1} - \frac{x^{1-\frac{V_L}{V_P}}}{1-\frac{V_L}{V_P}}\right) + C_3$$

  En esta ocasión tenemos que el perro alcanza a la liebre, sabiendo que $y(1) = 0$ podemos calcular la constante C_3 y el valor de $y(0)$ es el punto de captura.

- **Caso 3** $V_L > V_P$
  En este caso el perro no llega a alcanzar nunca a la liebre, que es más rápida. Al igual que hemos calculado la distancia de separación en el caso 1 y el punto de captura en el caso 2, en este caso lo interesante será calcular la tasa de separación entre la liebre y el perro.

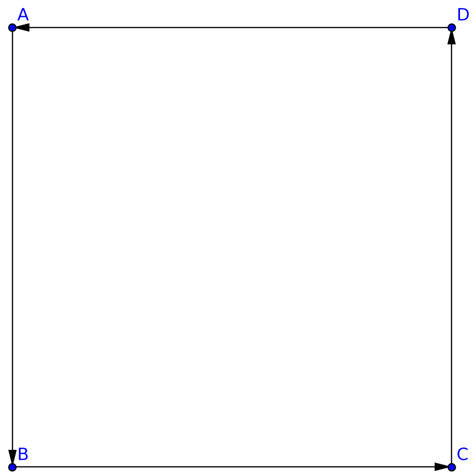

Figura 3: Curva de persecución II

Ejemplo (Curva de persecución II):

Supongamos que disponemos de una mesa cuadrada en cuyas esquinas hay colocadas 4 hormigas, A, B, C, y D. (Ver **Figura 3**). En el instante inicial cada hormiga empieza a perseguir a la que está en la esquina contigua (en el sentido contrario de las agujas del reloj). En este problema buscamos la expresión para la curva que describe cada hormiga.

Como primera observación, vemos que cada hormiga describirá la misma curva y que esta tendrá forma de espiral. Atendiendo a la simetría del problema, bastará con que analicemos el comportamiento de dos hormigas (Ver **Figura 4**). Como prevemos que la curva va a tener forma de espiral, trabajaremos con coordenadas polares, por tanto, el punto en el que se encuentra la hormiga A será $A = (r(\theta)cos(\theta), r(\theta)sin(\theta))$. Por simetría, el punto B tendrá la misma expresión sustituyendo el ángulo por $\theta + \frac{\pi}{2}$. Por tanto tenemos que como $r(\theta) = r(\theta + \frac{\pi}{2})$, $B = (-r(\theta)sin(\theta), r(\theta)cos(\theta))$

Al ser una curva de persecución, sabemos que la recta tangente pasa por los puntos A y B. La recta tangente es $r \equiv (rcos(\theta), rsin(\theta)) + \lambda(r\prime cos(\theta) - rsin(\theta), r\prime sin(\theta) + rcos(\theta))$

Como sabemos que la recta pasa por los puntos citados, $\exists\lambda : r \equiv (-rsin(\theta), rcos(\theta))$. Obteniendo λ y despejando tenemos

$$\begin{cases} r = r' \\ r(0) = \frac{L}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donde L es la longitud del lado del cuadrado.

Por tanto $r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{2}}e^{-\theta}$

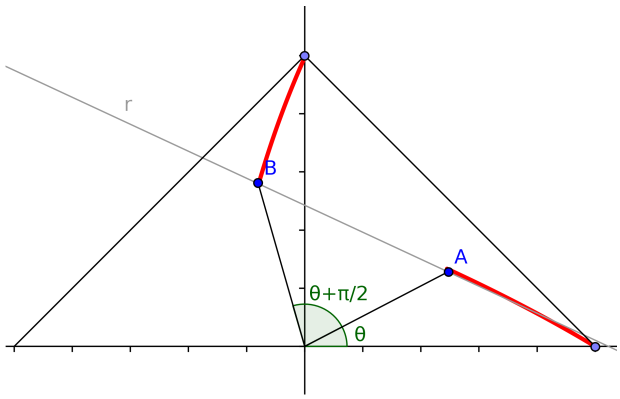

Figura 4: Curva de persecución II - Análisis

En estos ejemplos hemos tenido una EDO y un(os) dato(s) que nos permite(n) calcular la(s) constante(s) de integración. En los casos en los que hemos tenido más de un dato, siempre se han referido al mismo punto, es decir, nos han proporcionado el valor de la función en un punto y el de su derivada en el **mismo** punto.

Definición: **Problema de valores iniciales de Cauchy.** Un problema de valores iniciales de Cauchy es aquel en el que se presenta una EDO y unos datos iniciales que se refieren al mismo punto.

Existen casos en el que los datos proporcionados no se refieren al mismo punto.

Definición: **Problema de valores de contorno.** Un problema de valores de contorno es aquel en el que se presenta una EDO y unos datos iniciales que **no** se refieren al mismo punto.

Existen dos casos especiales de problemas de valores de contorno:

- Problema de Dirichlet: Se proporciona el valor de una función en puntos diferentes.
- Problema de Neumann: Se proporciona el valor de la derivada de una función en puntos diferentes.

Hasta ahora hemos conseguido resolver algunos problemas en los que se nos presentaba una EDO de orden 1 o de orden 2. Una cuestión a plantearse es cómo tratar una EDO de orden n.

Lema 1.1: Una EDO de orden n puede escribirse como un sistema de n EDO de orden 1.

Demostración:

Dada una EDO de orden n de la forma

$$F(x, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

podemos construir el sistema

$$\begin{cases} y\prime = p \ \textbf{\textit{(orden 1)}} \\ F(x, p, p\prime, \ldots, p^{(n-2)}) = p^{(n-1)} \ \textbf{\textit{(orden n-1)}} \end{cases}$$

que tiene una EDO de orden 1 y una EDO de orden $n-1$. Iterando $n-2$ veces de esta forma a partir de aquí obtenemos un sistema de n EDO de orden 1.

Realicemos un último ejemplo de resolución de un problema utilizando una EDO.

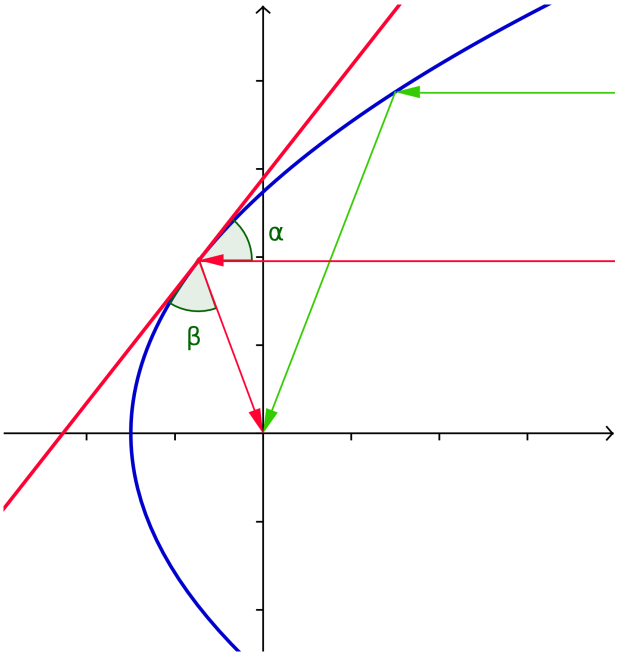

Figura 5: Análisis de antena parabólica

Ejemplo (Antena parabólica):

Vamos a estudiar por qué las antenas parabólicas han de tener forma de parábola. El objetivo es buscar una curva en la cual todas los rayos paralelos al eje que reboten contra dicha curva vayan dirigidos a un mismo punto.

Sabemos que, en una recta, el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Sin embargo, no podemos decir lo mismo sobre una parábola. Para solucionar esto, observamos que lo que ocurre es que "localmente, el rayo rebota contra la recta tangente a la parábola en dicho punto" (Ver **Figura 5**).

Llamemos $(x, y(x))$ a la gráfica de la curva, entonces, la recta tangente es $(1, y\prime(x))$

Sabemos que $< x, y >= |x| \cdot |y| cos(\theta)$ siendo θ el ángulo que forman los vectores x, y. Por tanto $cos(\theta) = \frac{<x,y>}{|x||y|}$

De aquí obtenemos que

$$\alpha = \frac{<(1,0),(1,y\prime)>}{\sqrt{1+(y\prime)^2}}$$

$$\beta = \frac{<(1,y\prime),(x,y)>}{\sqrt{1+(y\prime)^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}$$

Igualando α y β obtenemos

$$\begin{cases} x + yy\prime \\ y(-d) = 0 \end{cases}$$

Siendo d la distancia del vértice de la parábola al foco.

Para resolver la ecuación seguimos los siguientes pasos:

- Observamos que $x + yy\prime = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2+y^2}{2}$ y que por tanto tenemos la EDO $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2+y^2}{2} = \sqrt{x^2+y^2}$
- Llamamos $T = x^2 + y^2$
- Tenemos entonces
$$\begin{cases} \frac{T\prime}{2} = \sqrt{T} \\ T(-d) = d^2 \end{cases}$$
- Despejando obtenemos $\frac{T\prime}{2\sqrt{T}} = 1$
- Llegamos a que $(\sqrt{T})\prime = 1$
- Integrando y utilizando el dato proporcionado por el porblema llegamos a la solución, que es la ecuación de una parábola.

2. Familias de curvas

Sabemos que, dada una EDO de primer orden de la forma $F(x, y(x)) = y'$, el valor de la función F nos indica la pendiente de la recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

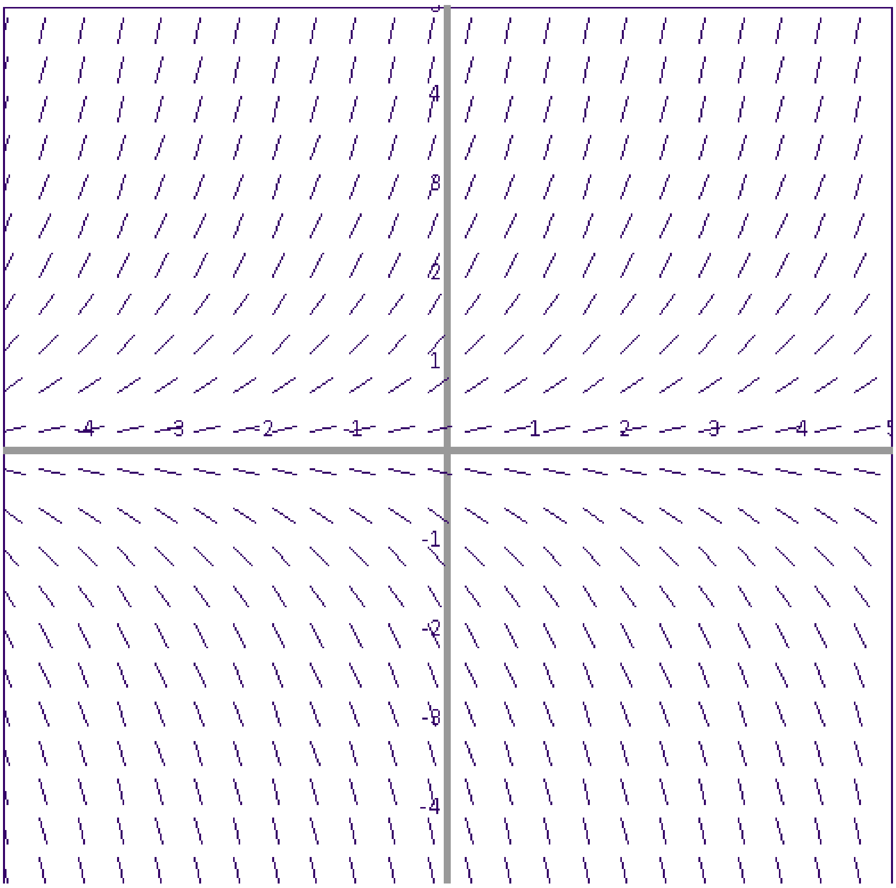

Figura 6: Campo de pendientes $y\prime = y$

Sea la EDO $y\prime = y$
Vemos que en las rectas de la forma $y = c$ tenemos que $y = y\prime = c$, por tanto la recta tangente a la solución en todos los puntos de la recta $y = c$ tiene pendiente c.

Podemos entonces calcular el campo de pendientes de la EDO (Ver **Figura 6**).

Tomando un punto de partida, la curva solución tiene como recta tangente en cada punto las mostradas en el campo de pendientes.

En este caso sabemos que la solución a esa ecuación es de la forma ae^{x+b} con a y b constantes.

Tomando un punto en el eje de abcisas, la recta tangente tiene la dirección del eje de abcisas, por tanto la solución partiendo de un punto del eje x es el propio eje. Vemos que si escogemos un punto que no pertenezca a dicho eje es imposible llegar a “tocar” el eje, pues en caso contrario no existiría unicidad en la solución.

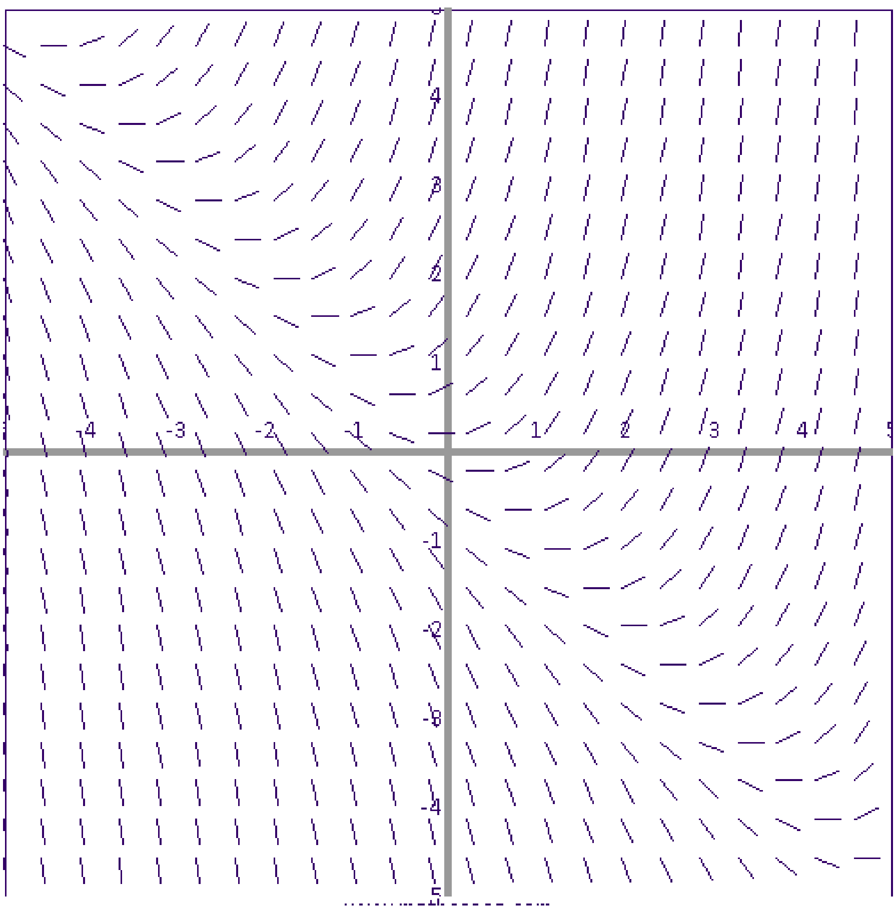

Figura 7: Campo de pendientes $y\prime = x + y$

Ejemplo:

Analicemos la EDO $y\prime = x + y$
En este caso, en las rectas de la forma $x + y = c$ la recta tangente a la curva solución tiene pendiente c. En la **Figura 7** se muestra el campo de pendientes de esta EDO.

Para hallar la solución a la ecuación observamos que $(x + y)\prime = x + y + 1$. Si denotamos $t = x + y$ tenemos la ecuación $t\prime = t + 1$ y despejando $\frac{t\prime}{t+1} = 1$

Tras integrar ambos términos obtendremos la solución. Para obtener todas las soluciones no hay que olvidar que $\int \frac{1}{x} = ln|x|$

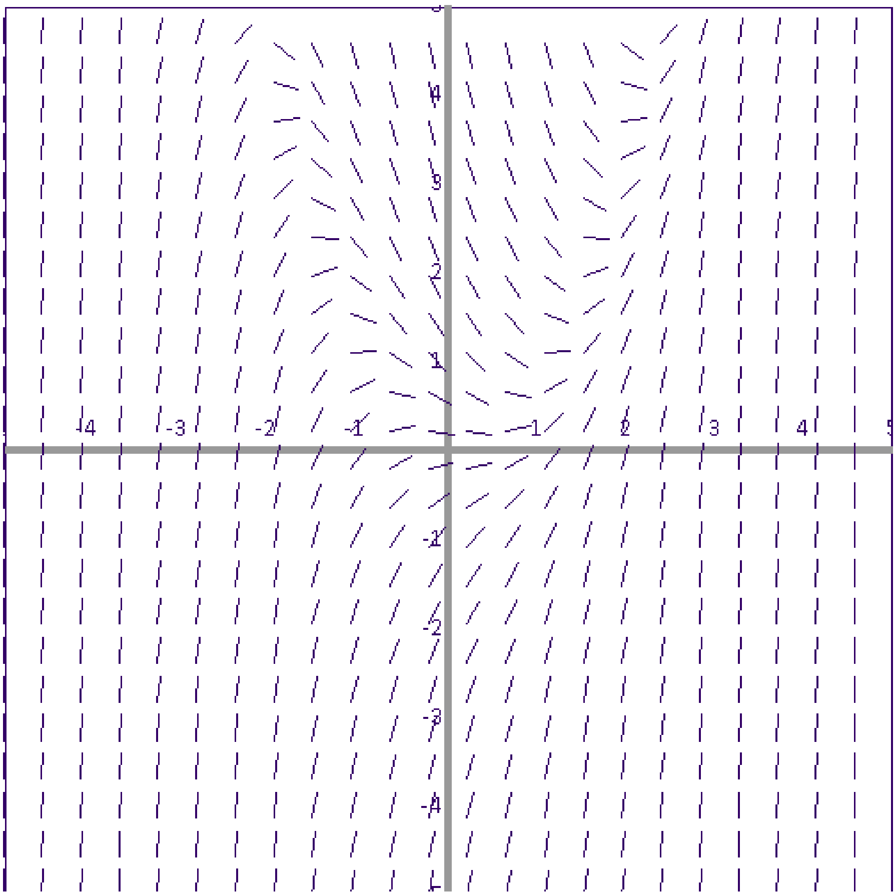

Figura 8: Campo de pendientes $y\prime = x^2 + y$

Ejemplo:

Sea la EDO $y\prime = x^2 + y$
Las curvas en las que la pendiente de la recta tangente a la solución se mantiene constante son de la forma $x^2 + y = c$, es decir, parábolas. En la **Figura 8** puede observarse el campo de pendientes de la EDO.

Nos gustaría estudiar dónde están los puntos de inflexión de las soluciones. Sabemos que los puntos de inflexión aparecen cuando $y\prime\prime = 0$ Vemos entonces que

$$y\prime\prime = 2x - y\prime = 2x - x^2 + y \implies y\prime\prime = 0 \iff y = x^2 - 2x = x(x-2)$$

Los puntos de inflexión están en la parábola $y = x(x-2)$. Veamos cómo solucionar esta EDO.

$$y\prime + y = x^2$$
$$e^x y\prime + e^x y = e^x x^2$$
$$(e^x y)\prime = e^x x^2$$
$$e^x y = \int x^2 e^x dx + C$$
$$y = e^{-x}(\int x^2 e^x dx + C)$$

La técnica utilizada en el segundo paso se conoce como **Factor integrante**

En estos ejemplos hemos visto curvas que donde la pendiente de la recta tangente a las soluciones es constante. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición: **Isoclinas.** Curvas en las que la pendiente de la recta tangente a las soluciones es constante. En general, para una EDO de orden 1, las isoclinas vienen dadas por $F(x, y) = c$

Veamos ahora un ejemplo en el que no hay unicidad de soluciones:

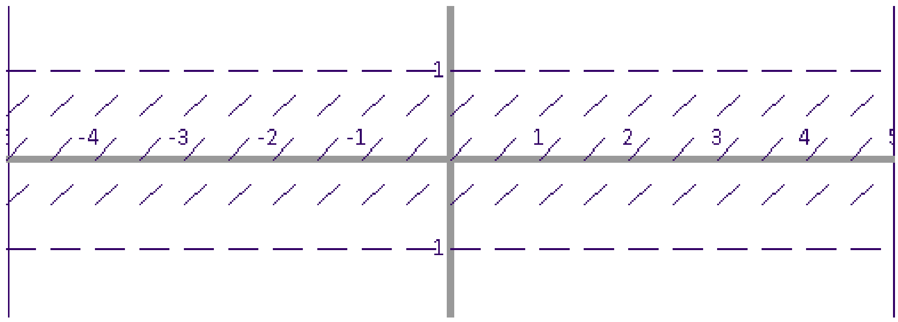

Figura 9: Campo de pendientes $y\prime = \sqrt{1 - y^2}$

Ejemplo:

Sea la EDO $y\prime = \sqrt{1 - y^2}$ y el dato $y(x_0) = C$.
Vemos que si $|C| > 1 \implies$ No hay solucion. Si $C = 1 \implies y = 1$, si $C = -1 \implies y = -1$. En la **Figura 9** se puede observar el campo de pendientes de la EDO.

Vemos que $y = sin(x)$ es solución porque

$$\frac{\partial}{\partial x} sin(x) = cos(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)}$$

pero sólo es válida esta solución si $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Vemos que no hay unicidad de solución, tomando el dato $y(\frac{-\pi}{2}) = -1$:

- *Sol1:* $y = -1$
- *Sol2:* $y = \begin{cases} -1 \text{ si } x < \frac{-\pi}{2} \\ sin(x) \text{ si } x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1 \text{ si } x > \frac{-\pi}{2} \end{cases}$

  Podemos observar que la derivada de la raíz cuadrada se "va a infinito" en el 0. Podríamos pensar que por esta razón no tenemos asegurada la unicidad de la solución.

Hasta ahora hemos visto que dada una EDO, el conjunto de soluciones nos proporciona una familia de curvas. Vamos a analizar el siguiente problema:

- Dada una familia de curvas uniparamétrica, encontrar la ecuación diferencial ordinaria que satisfacen.

Veamos unos ejemplos:

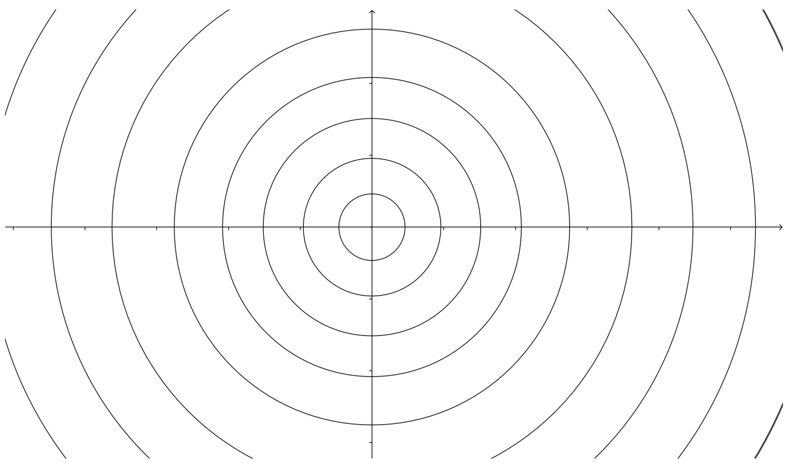

Figura 10: Familia de curvas $x^2 + y^2 = R^2$

Ejemplo:

Tenemos la familia de curvas $x^2 + y^2 = R^2$, (Ver **Figura 10**).
Derivando obtenemos $2x + 2yy\prime = 0$ y simplificando $x + yy\prime = 0$.

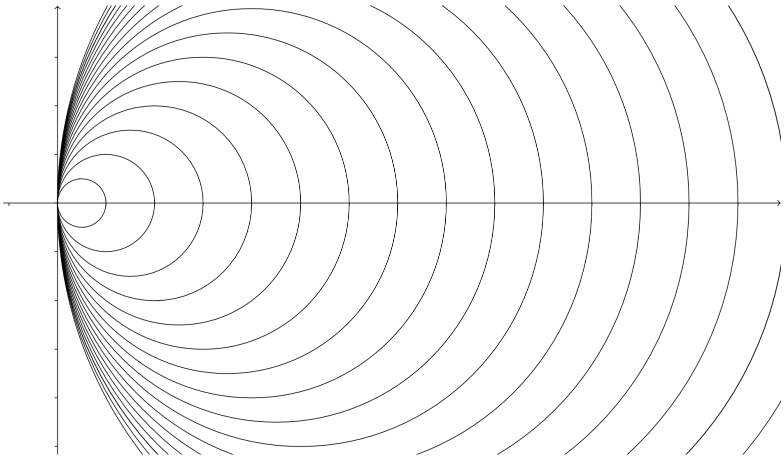

Figura 11: Familia de curvas $x^2 + y^2 = 2Cx$

Ejemplo:

Tenemos la familia de curvas $x^2 + y^2 = 2Cx$, (Ver **Figura 11**).
Derivando obtenemos $2x + 2yy\prime = 2C \iff x + yy\prime = C$
Tenemos el sistema $\begin{cases} x + yy\prime = C \\ x^2 + y^2 = 2Cx \end{cases}$
Sustituyendo C en la segunda ecuación tenemos $x^2 + y^2 = 2(x + yy\prime)x$.

Ejemplo:

Vamos a obtener la familia de rectas tangentes a la parábola $f(x) = \frac{x^2}{4}$, (Ver **Figura 12**).

Tenemos que $f\prime(x) = \frac{x}{2}$ y por tanto, la recta tangente en un punto a es $y = f(a) + f\prime(a)(x - a)$. Por tanto tenemos que la familia de rectas tangentes a la parábola viene dada por

$$y - \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = 0$$

Hemos construido una familia de rectas tangentes a una parábola. Se dice que la parábola es la **envolvente** de la familia de rectas obtenida.

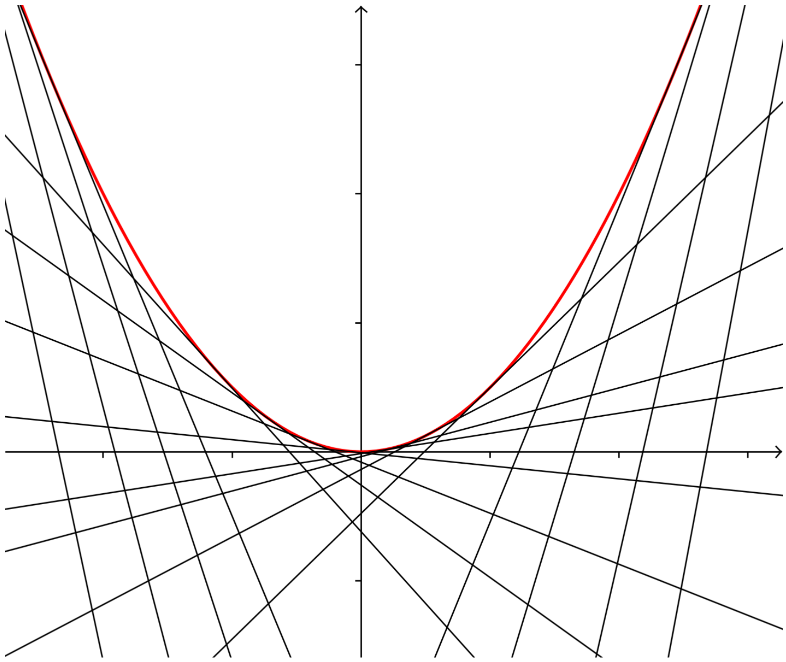

Figura 12: Familia de rectas tangentes a $f(x) = \frac{x^2}{4}$

A raíz del ejemplo anterior definimos:

Definición: **Envolvente.** Una curva envolvente es aquella que "toca" a todas las curvas de una familia y es tangente en los puntos de contacto.

Vamos a analizar como calcular la curva envolvente a una familia de curvas. Como ya hemos visto, en general una familia de curvas viene dada por una expresión de la forma $F(x, y, c) = 0$. Llamemos $Q = (x_q, y_q)$ al punto de contacto entre la curva y su envolvente.

En la **Figura 13** podemos observar que sumando una pequeña perturbación δ a la constante c obtenemos otra curva de la familia, la cual interseca con la anterior en un punto $P_\delta = (x_\delta, y_\delta)$. Notamos que $(x_\delta, y_\delta) \to (x_q, y_q)$ cuando $\delta \to 0$.

Tenemos entonces que $\begin{cases} F(x_\delta, y_\delta, c) = 0 \\ F(x_\delta, y_\delta, c+\delta) = 0 \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones tenemos $F(x_\delta, y_\delta, c+\delta) - F(x_\delta, y_\delta, c) = 0$. Dividiendo por δ y tomando límites tenemos que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{F(x_\delta, y_\delta, c+\delta) - F(x_\delta, y_\delta, c)}{\delta} = 0$$

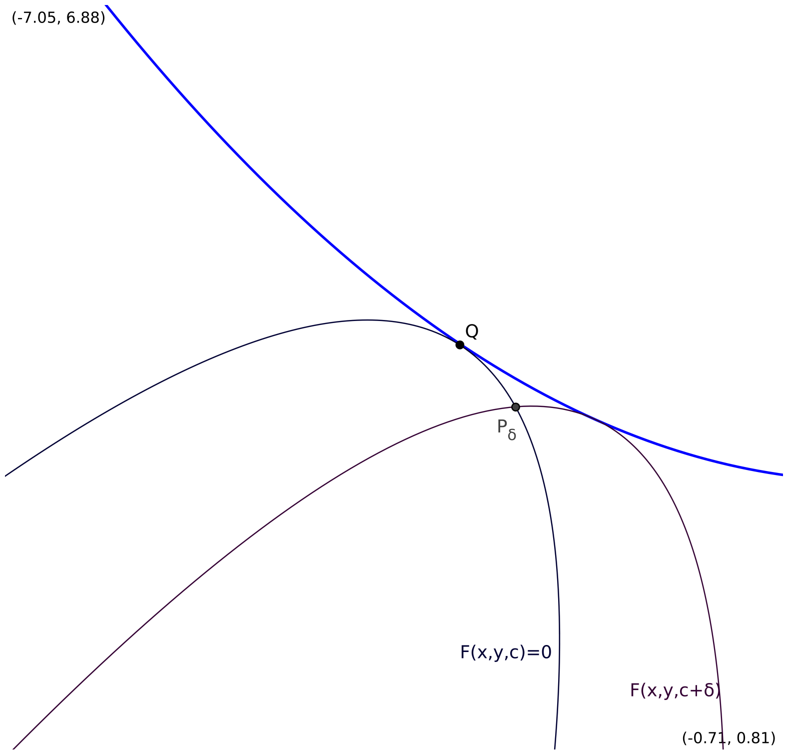

Figura 13: Envolvente de una familia de curvas

obteniendo así que $\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c)=0$.

Una vez hecho esto obtenemos un método para hallar la curva envolvente a una familia de curvas:

Método para hallar la envolvente:

Para hallar la envolvente a una familia de curvas basta con eliminar c del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c)=0 \end{cases}$$

donde $F(x,y,c)=0$ define la familia de curvas de la cual queremos hallar la envolvente.

Pongamos en práctica lo aprendido con un ejemplo:

Ejemplo:

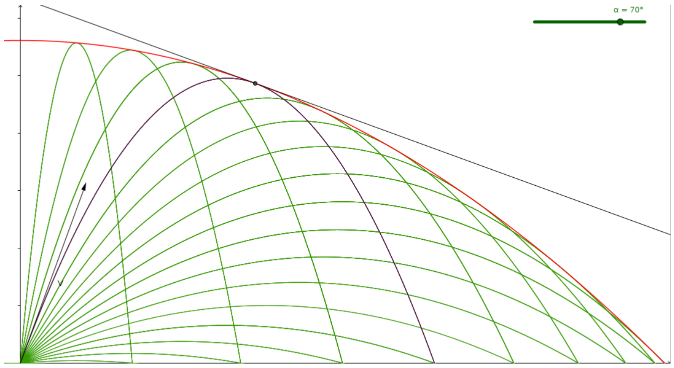

Figura 14: Envolvente a una familia de parábolas

Supongamos que tenemos un cañon antiaéreo en el origen de coordenadas que dispara un proyectil con una velocidad inicial V. El ángulo α en el que dispara el cañon es variable. Sabemos que la curva que describe el proyectil es una parábola. El objetivo de este problema es hallar la zona en la que un avión podría volar sin ser alcanzado por un proyectil. Es sencillo darse cuenta de que la zona de peligro viene descrita por la que queda bajo la curva envolvente a la familia de parábolas que pueden describir los proyectiles lanzados (Ver **Figura 14**).

En primer lugar hallaremos la familia de curvas, tenemos en principio:

- Movimiento horizontal:
  $x(t) = Vcos(\alpha)t$

- Movimiento vertical:
  $y(t) = Vsin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$ Donde t es el tiempo y g es la aceleración de la gravedad.

- $y(t_{max}) = 0 \implies t_{max} = \frac{2Vsin(\alpha)}{g}$

- Obtenemos así la ecuación de la **posición**:

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (Vcos(\alpha)t, t(Vsin(\alpha) - \frac{g}{2}t)$$

  donde $t \in [0, t_{max}]$

- Despejando t e igualando términos se obtiene la ecuación de la **trayectoria**:

$$tan(\alpha)x - \frac{g}{2V^2cos^2(\alpha)}x^2 - y = 0$$

  Usando que $1 + tan^2(\alpha) = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$ simplificamos la ecuación anterior:

$$tan(\alpha)x - \frac{g(tan^2(\alpha)+1)}{2V^2}x^2 - y = 0$$

- Hemos obtenido la familia de parábolas $F(x,y,\alpha) = 0$ donde

$$F(x,y,\alpha) = tan(\alpha)x - \frac{g(tan^2(\alpha)+1)}{2V^2}x^2 - y$$

- Para facilitar los cálculos llamamos $c = tan(\alpha)$ y calculamos

$$\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c) = x - \frac{g}{V^2}cx^2$$

- Notamos que $\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c) = 0 \iff c = \frac{V^2}{gx}$
- Sustituyendo y simplificando llegamos a que la envolvente a nuestra familia de parábolas es

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{g}{2V^2}x^2$$

Índice alfabético