

Cálculo II

Guillermo Julián Moreno

11/12 C2

Índice

1	Estructura de \mathbb{R}^N	3
1.1	Vectores	3
1.2	Sucesiones en \mathbb{R}^N	3
1.3	Topología	4
2	Funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$	6
2.1	Representación de casos específicos	6
2.1.1	Funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}	6
2.1.2	Funciones de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}	6
2.2	Límites	8
2.2.1	Resolución de indeterminaciones	8
2.3	Continuidad	9
3	Diferenciabilidad de funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$	10
3.1	Operaciones con derivadas	11
3.1.1	Regla de la cadena	11
3.2	Derivadas direccionales	12
3.3	Gradiente	12
3.3.1	Plano tangente a través del gradiente	13
3.4	Derivadas paramétricas	13
3.5	Derivadas de orden superior	13
3.6	Máximos y mínimos	15
3.6.1	Resultados de álgebra lineal	15
3.6.2	Ejemplos	16
3.7	Máximos y mínimos absolutos	17
3.7.1	Ejemplos	18
4	Funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{>1}$	18
4.1	Curvas parametrizadas	18
4.1.1	Ejemplos	18
4.1.2	Cálculo recta tangente	19
4.1.3	Cálculo de longitudes	19
4.2	Superficies parametrizadas	20
4.2.1	Ejemplos	20
4.2.2	Parametrización de superficies de revolución	22
4.2.3	Coordenadas cilíndricas	22
4.2.4	Coordenadas esféricas	22
4.2.5	Usos de coordenadas esféricas y cilíndricas	23
4.2.6	Cálculo del plano tangente	23
4.3	Campos vectoriales	24
5	Integración	25
5.1	Cálculo de integrales	26
5.2	Cambio de variables	28
5.3	Integración en \mathbb{R}^3	29
5.4	Integrales sobre curvas	31
5.4.1	Integral de función escalar sobre una curva	31

5.4.2	Integral de campo vectorial sobre una curva	32
5.4.3	Integrales en campos conservativos	33
5.5	Integrales sobre superficies	33
5.5.1	Integral de campo escalar sobre una superficie	33
5.5.2	Integral de campo vectorial sobre una superficie	35
5.6	Teoremas del análisis vectorial	35

1. Estructura de \mathbb{R}^N

1.1. Vectores

Operaciones básicas: suma, producto por un número real.

PRODUCTO ESCALAR EUCLÍDEO

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \alpha$$

NORMA EUCLÍDEA

$$\|x\| = \sqrt{\vec{x}\vec{x}}$$

La norma euclídea es mayor o igual que cero y cumple la desigualdad triangular.

DISTANCIA EUCLÍDEA

$$D(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$$

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy Schawrz).

$$|\vec{x}\vec{y}| \leq \|x\| \|y\|$$

Definición 1.2 Ortogonalidad. Dos vectores son ortogonales si el ángulo que forman es un ángulo recto:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\vec{y} = 0$$

1.2. Sucesiones en \mathbb{R}^N

Notación: $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde x_j^k es la coordenada j del elemento k de la sucesión.

Definición 1.3 Sucesiones convergentes. Una sucesión de vectores es convergente a un vector \vec{a} si la distancia entre el vector \vec{x}_k se va reduciendo a medida que k va aumentando.

$$\vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{a} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \text{ / } k \geq k_0 \Rightarrow \|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \epsilon$$

Teorema 1.4. La sucesión de vectores convergen si convergen todas sus coordenadas.

$$\vec{x}_k \rightarrow \vec{a} \Leftrightarrow x_j^k \rightarrow a_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, N$$

Demostración. Primero demostramos la **implicación a la derecha**. Sabemos que $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$, por lo tanto

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \text{ tal que } k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j^k - a_j)^2} < \epsilon$$

Es obvio que

$$\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j^k - a_j)^2} \geq \sqrt{(x_j^k - a_j)^2} = |x_j^k - a_j| \leq \epsilon \quad \forall j$$

Por lo tanto, queda demostrada la implicación a la derecha.

Ahora **demostramos hacia la izquierda**. Sabemos que $\forall j \quad x_j^k \rightarrow a_j$, por lo que $\forall \epsilon > 0, \exists k_0^j \text{ tal que } k > k_0^j \Rightarrow |x_j^k - a_j| < \epsilon$. Los k_0 no tienen por qué ser todos iguales.

Lo que sí sabemos es que si cogemos un k^* que sea el máximo de todos los k_0 , entonces si $k \geq k^*$ entonces $|x_j^k - a_j| < \epsilon \quad \forall j$.

Escogemos los k_0 tal que $\forall k > k_0^j \quad |x_j^k - a_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{N}}$, y sea k^* el mayor de todos ellos. Entonces,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j^k - a_j)^2} < \sqrt{N \frac{\epsilon^2}{N}} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

Queda demostrada la implicación hacia la izquierda y por lo tanto la doble implicación. \square

Definición 1.5 Criterio de Cauchy. La sucesión $\{\vec{x}_k\}$ es de Cauchy si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \exists k_0$ tal que si $k, m \geq k_0$, entonces $\|\vec{x}_k - \vec{x}_m\| < \epsilon$.

Definición 1.6 Espacio completo. Dado un espacio X con una norma diremos que X es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy contenida en X tiene un límite que está en X .

1.3. Topología

Definición 1.7 Bola abierta. Definimos la bola abierta de centro \vec{x}_0 y radio ϵ al conjunto de los puntos que están a una distancia menor que ϵ de \vec{x}_0 .

$$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

Definición 1.8 Conjunto abierto. Un conjunto A es abierto si y sólo si $\forall a \in A$, podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A$.

Definición 1.9 Conjunto cerrado. Un conjunto B es cerrado si y sólo si su complementario $B^c = \mathbb{R}^N - B$ es abierto.

Observación: Los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son el vacío (\emptyset) y el total (\mathbb{R}^N). Dos años después, Azorero dice que ahora el vacío es un conjunto abierto. Lo que sea.

Definición 1.10 Interior. El interior de un conjunto A (notación: \mathring{A}) es el conjunto abierto más grande posible contenido dentro de A .

Definición 1.11 Cierre. El cierre de un conjunto B (notación \overline{B}) es el conjunto cerrado más pequeño posible que contiene a B .

Teorema 1.12 (Caracterización por sucesiones). *Diremos que B es cerrado si y sólo si dada una sucesión $\{\vec{x}_l\} \subset B$ con $\vec{x}_k \rightarrow L$ entonces $L \in B$.*

Demostración. Demostramos primero la **implicación a la derecha**. Supongamos que L no está en B , por lo que $L \in B^c$, que es un conjunto abierto. por lo tanto $\exists \epsilon > 0 \wedge B_\epsilon(L) \subset B^c$. Por ser $\vec{x}_k \rightarrow L$, $\exists k_0 \wedge k \geq k_0 \Rightarrow \|\vec{x}_k - L\| < \epsilon/2$, por lo que esos \vec{x}_k estarían dentro de B^c . Contradicción.

Ahora pasamos a demostrar la **implicación hacia la izquierda**. Supongamos que B^c no es abierto. Entonces $\exists b \in B^c$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$ en $B_\epsilon(b)$ hay algún punto de B . Sea $\epsilon = k^{-1}$. En $B_k^{-1}(b)$ hay algún punto de B , al que llamamos x_k . A medida que aumenta k , $\|x_k - b\| \rightarrow 0$ y por lo tanto $x_k \rightarrow b$. Pero, según la hipótesis el límite L estaba dentro de B . Contradicción. \square

Definición 1.13 Frontera. La frontera de un conjunto A (notación: δA) son todos los puntos del borde del conjunto. Es decir, que $a \in \delta A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\epsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset$.

Definición 1.14 Punto aislado. Un punto $a \in A$ es aislado si y sólo si $\exists \epsilon \wedge B_\epsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Definición 1.15 Punto de acumulación. Un punto $a \in Ac(A)$ es un punto de acumulación si y sólo si $\forall \epsilon > 0; (B_\epsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 1.16 Conjunto compacto. Un subconjunto $k \subset \mathbb{R}^N$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Teorema 1.17. Un conjunto $k \subset \mathbb{R}^N$ es compacto si y sólo si $\forall \{\vec{x}_k\} \subset k$ podemos encontrar alguna subsucesión convergente.

Definición 1.18 Conjunto convexo. Un conjunto es convexo si uniendo dos puntos cualquiera por un segmento no nos salimos del conjunto.

Definición 1.19 Función cóncava/convexa. Una función es cóncava si, trazando una recta por dos puntos de la recta la gráfica queda por encima. Es convexa si la gráfica queda por debajo.

2. Funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$

2.1. Representación de casos específicos

2.1.1. Funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}

Definición 2.1 Conjunto de nivel. Un conjunto de nivel son todos los puntos (x, y) que están al mismo nivel, al estilo de las curvas de nivel de los mapas topográficos.

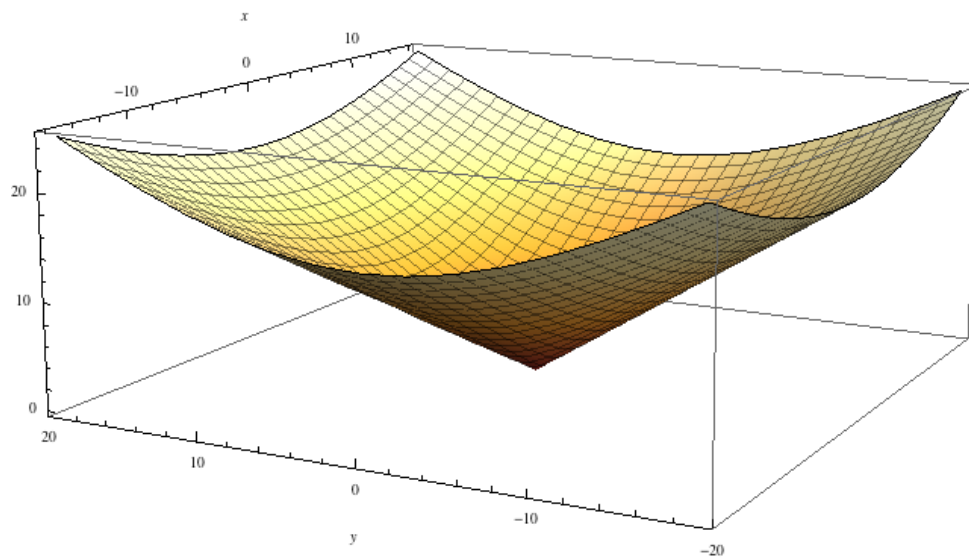
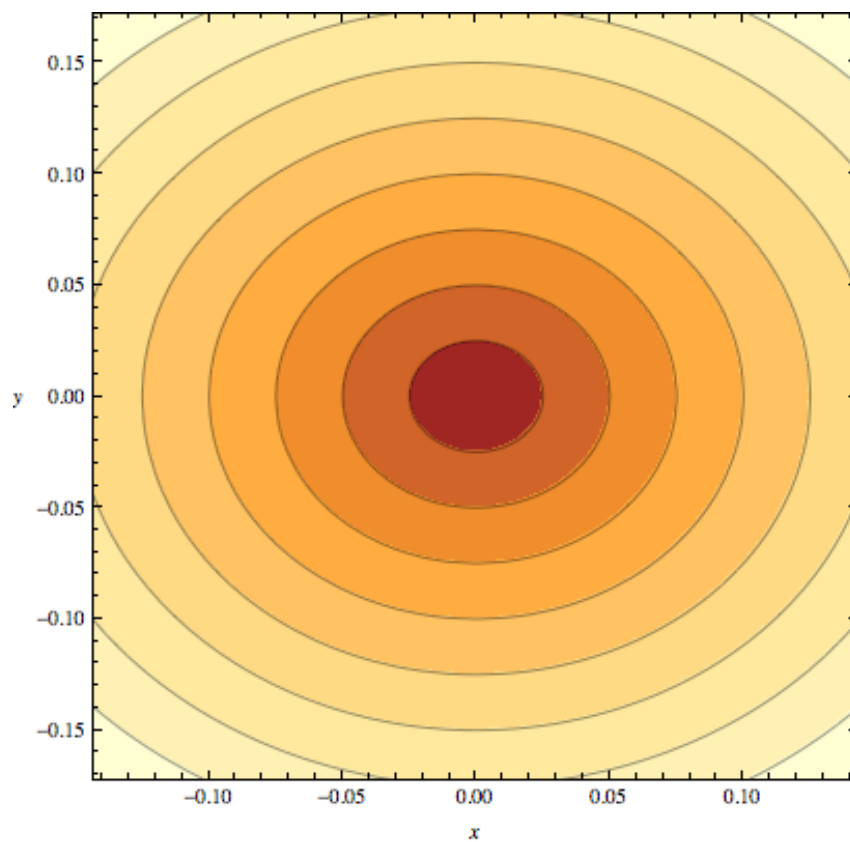
$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

Usando los conjuntos de nivel podemos reducir el problema de dibujar la superficie a encontrar las curvas que representan cada conjunto de nivel. Por ejemplo, tomando la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $c < 0$, $N_c = \emptyset$. Si $c = 0$ entonces $N_0 = (0, 0)$, y si $c > 0$ entonces cada conjunto N_c es una circunferencia de radio c centrada en el origen.

Para ensamblar todos los conjuntos hacemos una sección vertical, por ejemplo usando el plano $x = 0$. En este caso, la función que sale es $z = |y|$, por lo que la superficie es un cono.

2.1.2. Funciones de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}

En las funciones de tres variables también podemos usar los conjuntos de nivel como superficies, de forma que podemos hacernos una idea de cómo sería la función en \mathbb{R}^4 .

Figura 1: La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ Figura 2: Las líneas de contorno de f

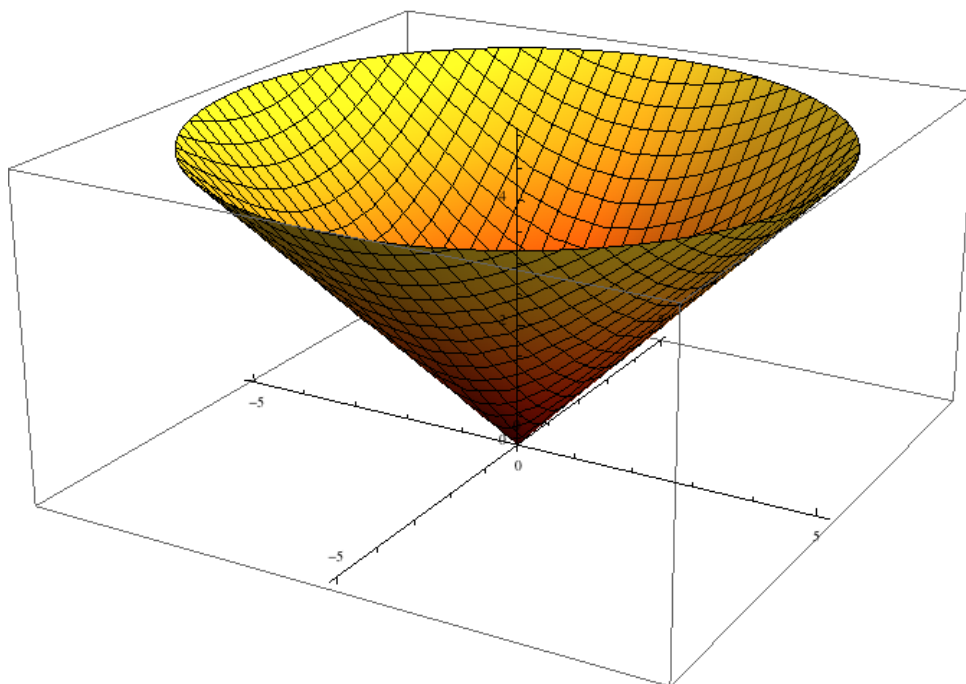


Figura 3: La función dibujada

2.2. Límites

Definición 2.2 .Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \wedge 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{L}\| < \epsilon$$

Las propiedades de los límites en varias dimensiones son las siguientes:

- El límite es único.
- Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_M)$ y $\vec{L} = (L_1, \dots, L_M)$. Entonces, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = L_j, j = 1 \dots M$.
- $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$.
- $\lim \lambda f = \lambda \lim f$.
- $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ si $\lim g \neq 0$.
- Si en un entorno de \vec{a} $f \leq g$ entonces $\lim f \leq \lim g$.

2.2.1. Resolución de indeterminaciones

Indeterminación 0/0: Tomemos el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Primero tomamos límites a lo largo de rectas $y = kx$. El límite se convierte entonces en un límite de una sola variable:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + (kx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^2(1 + k^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{|x| \sqrt{1 + k^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{\sqrt{1 + k^2}} = 0 \quad \forall k$$

Con esto logramos una conjetura del límite, que podemos probar o bien con la definición de límite o bien con el criterio de comparación. Como podemos acotar la expresión

$$0 \leq \frac{x^2 x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

y es obvio que $x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow 0$, entonces por criterio de comparación (lema del sándwich), nos queda que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Sin embargo, que el límite de cualquier recta sea 0 no implica que el límite sea ese número. Por ejemplo, sea f la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{si } y \neq x^2 \end{cases}$$

El límite a lo largo de cualquier recta en el origen es 0. Sin embargo, si me acerco al origen a través de la parábola $y = x^2$ es límite es 1. Por lo tanto, el límite no existe.

2.3. Continuidad

Definición 2.3 . Una función f es continua en \vec{a} si y sólo si $f(\vec{a}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$. Es decir:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\|$$

Teorema 2.4 (Caracterización en términos de sucesiones). *F es continua en \vec{a} si y sólo si para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\vec{x}_n) = F(\vec{a})$.*

Las funciones continuas cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites. Además, la función de cada una de las coordenadas de una función continua también es continua.

Teorema 2.5 (Continuidad de la composición). Si F es continua en \vec{a} y G es continua en $F(\vec{a})$, entonces $G \circ F$ es continua en \vec{a}

Definición 2.6 Inversa. Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, y $A \subset \mathbb{R}^M$, definimos la función inversa:

$$F^{-1}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid F(\vec{x}) \in A\}$$

Teorema 2.7. F es continua si y sólo si para todo conjunto abierto A $F^{-1}(A)$ es abierto.

Teorema 2.8. F es continua si y sólo si para todo conjunto cerrado B $F^{-1}(B)$ es cerrado.

3. Diferenciabilidad de funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$

Definición 3.1 Derivada parcial. La derivada parcial de una función es la derivada con respecto a una única variable. Notación:

$$\frac{\partial F}{\partial x}$$

El problema de la derivabilidad en varias variables es que no podemos buscar la aproximación igual que en una variable. Buscamos entonces una aproximación lineal, donde

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + DF(\vec{x}) + \epsilon$$

Donde ϵ es el error que cumple que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\epsilon}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

. D es el **diferencial**, que depende de la función.

Definición 3.2 Diferencial. Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, tal que $F(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_m)$. Entonces, el diferencial es una matriz de dimensión $M \times N$ que se define como

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

El diferencial cumple la siguiente identidad:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\| (F(\vec{x}) - F(\vec{a})) - DF(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) \|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Teorema 3.3. Si F es diferenciable en \vec{a} , entonces F es continua en \vec{a} .

Teorema 3.4. Si F es diferenciable, entonces existen todas las derivadas parciales. Atención: el recíproco no es cierto.

Teorema 3.5. Si existen todas las derivadas parciales y además son continuas, entonces la función es diferenciable.

Observación: Si las parciales no son continuas pueden darse los dos casos, que sea o no sea diferenciable.

3.1. Operaciones con derivadas

Se aplican las mismas reglas que en una dimensión.

3.1.1. Regla de la cadena

Tenemos dos funciones, $F : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^K$ y $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, y consideramos su composición $H = F \circ G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$.

Teorema 3.6. Si G es diferenciable en \vec{a} y F diferenciable en $G(\vec{a})$ entonces H es diferenciable en \vec{a} . Además:

$$DH(\vec{a}) = DF(G(\vec{a})) \cdot DG(\vec{a})$$

Teorema 3.7. Sea A una matriz y \vec{x} un vector. Se tiene entonces que

$$A\vec{x} \leq C \|\vec{x}\|$$

donde C es una constante. Esto es útil para probar la regla de la cadena.

Se puede abreviar la obtención de cada derivada parcial del diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H_a}{\partial x_b} = \sum_{i=0}^M \frac{\partial H_a}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_b}$$

donde y_1 es cada una de las variables de F .

3.2. Derivadas direccionales

La derivada direccional nos indica cómo crece la función en una dirección determinada por un vector. La definición estricta viene a continuación:

Definición 3.8 Derivada direccional. Dada una función $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y un vector unitario \vec{u} , llamamos $D_{\vec{u}}F(\vec{a})$ a la derivada de F en el punto \vec{a} en la dirección \vec{u} . Si llamamos $g(t) = F(\vec{a} + t\vec{u})$, entonces

$$D_{\vec{u}}F(\vec{a}) \equiv g'(0) = \left. \frac{dF(\vec{a} + t\vec{u})}{dt} \right|_{t=0}$$

Teorema 3.9. Si F es derivable, entonces $D_{\vec{u}}F(\vec{a}) = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{u} \rangle$.

3.3. Gradiente

Definición 3.10 Gradiente. Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, se define el gradiente como

$$\nabla F \in \mathbb{R}^N = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

El gradiente es un caso especial de la matriz diferencial, y cumple estas dos propiedades:

1. El gradiente vive en el mismo espacio que los conjuntos de nivel, no en el de la imagen.
2. ∇F es la dirección de máximo crecimiento de la función.

3.3.1. Plano tangente a través del gradiente

Además, el gradiente permite calcular el plano tangente a una superficie, tanto en superficies dadas como conjuntos de nivel $F(x, y, z) = C$ como en superficies dadas como gráficas $z = f(x, y)$.

Vamos con el primer caso: tomamos la superficie $S \equiv \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = C\}$, el punto \vec{a} y la curva $\sigma(t)$ que cumple que $\sigma(t) \subset S \forall t$ y que $\sigma(0) = \vec{a}$.

Denominamos $g(t) = F(\sigma(t)) = C$, por lo que $g'(t) = 0$. En particular, tenemos que $\langle \nabla F(\vec{a}), \sigma'(0) \rangle = 0$. Dado que σ es una curva arbitraria, obtenemos que $\nabla F(\vec{a})$ es perpendicular a todos los vectores tangentes a la superficie. Por lo tanto, $\nabla F(\vec{a})$ es perpendicular al plano tangente a S en \vec{a} .

De esta forma, podemos definir el plano tangente según la siguiente ecuación:

$$0 = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{x} - \vec{a} \rangle$$

Vamos ahora con el segundo caso, donde $S \equiv \{z = f(x, y)\}$. Hay dos métodos posibles, el primero es usando el cálculo anterior tomando $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$. De esta forma, nos quedaría que el plano tangente a S en el punto (a, b) tendría la siguiente ecuación:

$$f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - z = 0$$

También podemos obtenerlo directamente. Tomamos una curva con x constante, esto es $\sigma_1(y) = (a, y, f(a, y))$, cuya derivada es $\sigma'_1 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$. Hacemos lo mismo con y constante, quedándonos $\sigma_2 = (x, b, f(x, b))$ y $\sigma'_2 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$. Así nos quedaría un vector \vec{n} perpendicular a S :

$$\vec{n} = \sigma'_1 \times \sigma'_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$$

y que es el mismo que habíamos obtenido con el anterior método.

3.4. Derivadas paramétricas

Una función paramétrica se da de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Si derivamos $x(t)$ y $y(t)$, tenemos el vector director de la recta tangente a la curva para un parámetro t . Además, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

3.5. Derivadas de orden superior

La derivada de orden superior consiste en derivar varias veces una función. Por ejemplo, si f es una función:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

consistiría en derivar primero f con respecto de y y después con respecto de x .

Teorema 3.11 (Teorema de las derivadas cruzadas de Euler). Sea $F \in C^2$, $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Demostración. Definimos $G(h, k) = F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0 + k) + F(x_0, y_0)$. k es fijo y h variable, y definimos $g(s) = F(s, y_0 + k) - F(s, y_0)$. Con esta notación, $G(h, k) = g(x_0 + h) - g(x_0)$. Según el teorema del valor medio:

$$G(h, k) = g'(\tilde{s})h$$

para algún $\tilde{s} \in [x_0, x_0 + h]$. Derivando, tenemos que

$$g'(s) = \frac{\partial F}{\partial x}(s, y_0 + k) - \frac{\partial F}{\partial x}(s, y_0)$$

Definimos $H(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{s}, t)$. Entonces, tenemos que

$$G(h, k) = H'(\tilde{t})kh$$

para algún $\tilde{t} \in [y_0, y_0 + k]$. Si derivamos, tenemos que

$$H'(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\tilde{s}, t)$$

Entonces, nos queda $G(h, k) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\tilde{s}, \tilde{t})hk$, es decir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\tilde{s}, \tilde{t}) = \frac{G(h, k)}{hk}$$

Si tenemos en cuenta que cuando $h \rightarrow 0$ y $k \rightarrow 0$ \tilde{s} y \tilde{t} tienden a cero respectivamente, entonces

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{G(h, k)}{hk}$$

Si repitiésemos la misma prueba paso a paso pero en lugar de empezar tomando la derivada en x la tomamos en y , obtendremos el mismo resultado. \square

A partir del teorema, podemos obtener la matriz de derivadas segundas:

Definición 3.12 Matriz Hessiana.

$$D^2 f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

3.6. Máximos y mínimos

Definición 3.13 Máximo/mínimo local. Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de máximo local si $\exists \epsilon > 0 \wedge F(\vec{x}_0) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in B_\epsilon(\vec{x}_0)$

La definición es análoga para el mínimo

Observación: Por las propiedades del gradiente, si F es diferenciable y \vec{x}_0 es un máximo o mínimo local, entonces debe ser $\nabla F(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definición 3.14 Punto crítico. $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ es un punto crítico de F si y sólo si $\nabla F(\vec{y}) = \vec{0}$

No todos los puntos críticos son máximos o mínimos, así que tenemos que clasificarlos de alguna forma. Para ello, usamos el polinomio de Taylor de orden 2, de forma que

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \epsilon$$

Simplificando nos queda que:

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)^T + \epsilon$$

Dado que el gradiente es 0, el punto clave es el signo de $\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)^T$. Para ello, usamos las siguientes definiciones del álgebra lineal.

3.6.1. Resultados de álgebra lineal

Definición 3.15 Matriz semidefinida y definida positiva y negativa.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \leq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T < 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 3.16. Si una matriz es simétrica, existe una base en la cual la matriz es diagonal.

Sea A una matriz $N \times N$. Entonces diremos que un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Dado que podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, entonces tenemos que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ si y sólo si

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Es decir, la autorrecta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una solución no trivial del sistema anterior. Sin embargo, para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$ debe ser 0.

Por lo tanto, los autovalores son las soluciones de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad.

Teorema 3.17. *Si un conjunto de autovectores es una base, entonces la matriz A expresada respecto a esa base pasa a ser diagonal, y los elementos de la diagonal son los autovalores.*

Si dos autovalores son distintos, los autovectores asociados son distintos.

Si A es simétrica, entonces el conjunto de autovectores es una base.

Volvemos ahora al cálculo.

Teorema 3.18 (Clasificación de puntos críticos). *Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$ (con dos derivadas continuas), y sea \vec{x}_0 un punto crítico. Entonces*

1. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **mayores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida positiva y \vec{x}_0 es un **mínimo local**.*
2. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **menores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida negativa y \vec{x}_0 es un **máximo local**.*
3. *Si **algunos** autovalores son **mayores que cero** y otros son **menores que cero**, entonces \vec{x}_0 es un **punto de silla**.*
4. *Si **algún** autovalor es **0**, y el resto son mayores o menores que cero, entonces \vec{x}_0 es un **punto crítico degenerado**.*

3.6.2. Ejemplos

Tomamos $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Obtenemos los puntos críticos, es decir, los puntos en los que $\nabla F(x, y) = (0, 0)$. El punto resultante es $(0, 0)$. Estudiamos el tipo de punto crítico. Para ello, calculamos la matriz hessiana en ese punto:

$$D^2F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son las soluciones de

$$0 = \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

Por lo tanto, λ es 3 o 1. Dado que ambos autovalores son mayores que 0, entonces D^2F es definida positiva y $(0,0)$ es un mínimo local.

3.7. Máximos y mínimos absolutos

Definición 3.19 Máximo y mínimo absoluto. Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. \vec{x}_m es un máximo absoluto de F en A si y sólo si $F(\vec{x}_m) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in A$. La definición es análoga para el mínimo.

Teorema 3.20 (Teorema de compacidad). *Tenemos un conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto (cerrado y acotado). Supongamos la sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$. Entonces podemos encontrar al menos una subsucesión $\{\vec{x}_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\vec{x}_{n_j}\}$ es convergente.*

Demostración. Trabajamos en dimensión 2, pero la demostración es análoga. Como K es compacto, podemos encontrar un cuadrado Q_0 de lado L que encierre completamente a K . Divido Q_0 en 2^2 cuadrados de lado $L/2$. En alguno de ellos hay infinitos términos de la sucesión: lo llamamos Q_1 y me quedo con uno de los términos de la sucesión, al que llamamos x_1 . Volvemos a dividir este cuadrado en cuatro cuadrados, elegimos uno que tenga infinitos términos de la sucesión y seleccionamos un elemento de la sucesión dentro al que llamamos x_2 . Repetimos esto muchas veces, de forma que cada término x_n está encerrado en el cuadrado Q_n de lado $\frac{L}{2^n}$.

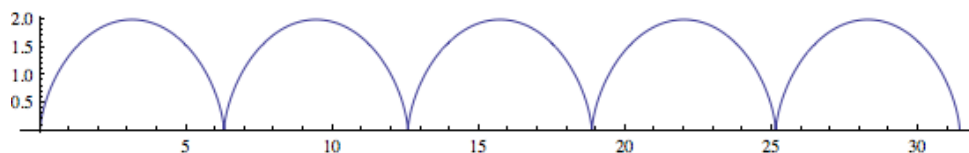
Si $k, l > n$, entonces es claro que $\|\vec{x}_k - \vec{x}_l\|$ es menor o igual que la diagonal de Q_n , que es $\frac{L}{2^n}\sqrt{2}$, que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Por el criterio de Cauchy, entonces esta sucesión es convergente, y como K es cerrado el límite pertenece a K . \square

Teorema 3.21. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, continua en K . Entonces, F alcanza su máximo y mínimo absolutos en K .*

Demostración.

Como F es acotada, existe $\alpha = \sup\{F(x) \mid x \in K\}$. Existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ tal que si $n \rightarrow \infty$ entonces $F(x_n) \rightarrow \alpha$. Sabemos que existe $\{x_n\} \subset K$, por lo que existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ convergente tal que $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in K$.

Como F es continua, $F(x_{n_k}) \rightarrow F(x_0)$, es decir $F(x_{n_j}) \rightarrow \alpha$, por lo tanto el supremo es el máximo. \square

Figura 4: El cicloide evaluado desde 0 hasta 10π

3.7.1. Ejemplos

La función a estudiar es $F(x, y) = x^2 - y^2$ en la bola $\omega = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$. Es diferenciable en todo \mathbb{R} porque es un polinomio.

Calculamos el diferencial y vemos qué ocurre cuando es 0

$$\nabla F = (2x, -2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Operando, vemos que el punto $(0, 0)$ es un punto de silla. Ahora sólo queda ver el comportamiento en la frontera C , cuando $x^2 + y^2 = 1$. F restringida a C quedaría de la siguiente forma:

$$F(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

El coseno tiene máximos cuando $t = 0$ y $t = \pi$, y mínimos cuando $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$. Es decir, tiene máximos absolutos en los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y mínimos absolutos en $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Teorema 3.22 (Multiplicadores de Lagrange). *Tenemos una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y una restricción $G(x_1, \dots, x_n) = k$, resolvemos el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}\nabla F &= \lambda \nabla G \\ G &= k\end{aligned}$$

4. Funciones $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{>1}$

4.1. Curvas parametrizadas

4.1.1. Ejemplos

La cicloide es un ejemplo de curva parametrizada en dos dimensiones, con la siguiente función:

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

4.1.2. Cálculo recta tangente

Sea $\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ una curva diferenciable. Hay dos casos posibles para formar la recta tangente:

Si $(x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)) \neq (0, 0, 0)$, entonces la recta tangente es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'_1(t_0) \\ x'_2(t_0) \\ x'_3(t_0) \end{pmatrix}$$

Si, por el contrario, $\sigma'(t_0) = \vec{0}$, entonces normalizamos la derivada y hallamos el límite cuando $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

Si este límite existe, nos dará la dirección de la recta tangente. Si no existe, no hay recta tangente.

Ejemplos

Cicloide La función de la cicloide es $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Cuando $t = 0$, $\sigma'(0) = (0, 0)$. Normalizamos entonces la derivada y nos queda que

$$\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}}(1 - \cos t, \sin t)$$

Tomamos el límite cuando $t \rightarrow 0$. La primera componente queda 0, la segunda es más compleja:

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}} \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{1 + \cos t}} = \frac{\sin t \sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 t}} = \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{|\sin t|}$$

Esto tiende a 1 cuando nos aproximamos por la derecha, y -1 cuando nos acercamos por la izquierda. No hay por lo tanto recta tangente.

4.1.3. Cálculo de longitudes

Tenemos una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ de la que queremos buscar la longitud. Trabajamos en dimensión $N = 3$ para simplificar, pero el resultado es generalizable. Dividimos el segmento en varios puntos t_0, t_1, \dots, t_n . La longitud de un segmento que va del punto t_i a t_{i+1} es

$$l = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2}$$

Según el teorema del valor medio, si $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$ entonces

$$l = \sqrt{(x'(s_i)(t_{i+1} - t_i))^2 + (y'(s_i)(t_{i+1} - t_i))^2 + (z'(s_i)(t_{i+1} - t_i))^2} = (t_{i+1} - t_i)F(s_i)$$

donde ¹

¹ En realidad, los s_i no tienen por qué ser iguales para todas las coordenadas. Sin embargo, esto no afecta a la demostración, ya que cuando el intervalo se hace muy pequeño los puntos medios coinciden.

$$F(s_1) = \sqrt{(x'(s_i))^2 + (y'(s_i))^2 + (z'(s_i))^2}$$

Entonces, la longitud L del segmento es

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$$

Teorema 4.1 (Longitud de arco). *Dada una curva parametrizada $\sigma : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, la longitud de arco entre dos puntos $a, b \in \Omega$ es*

$$\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$$

Ejemplos

Circunferencia Si $\sigma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma'(\theta) &= (-R \sin \theta, R \cos \theta) \\ \|\sigma'(\theta)\| &= \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} = R\end{aligned}$$

Integramos

$$\int_0^{2\pi} \|\sigma'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

Cardioide La ecuación es $\sigma(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t)$, la derivada es $\sigma'(t) = (-\sin t - \sin 2t, \cos t + \cos 2t)$. Calculamos el módulo:

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos t}$$

Integramos:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos t} dt = 8$$

4.2. Superficies parametrizadas

4.2.1. Ejemplos

El **helicoid** es una función Φ de dos variables, que crea una superficie helicoidal (escalera de caracol) en el espacio, tal que

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \Phi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)\end{aligned}$$

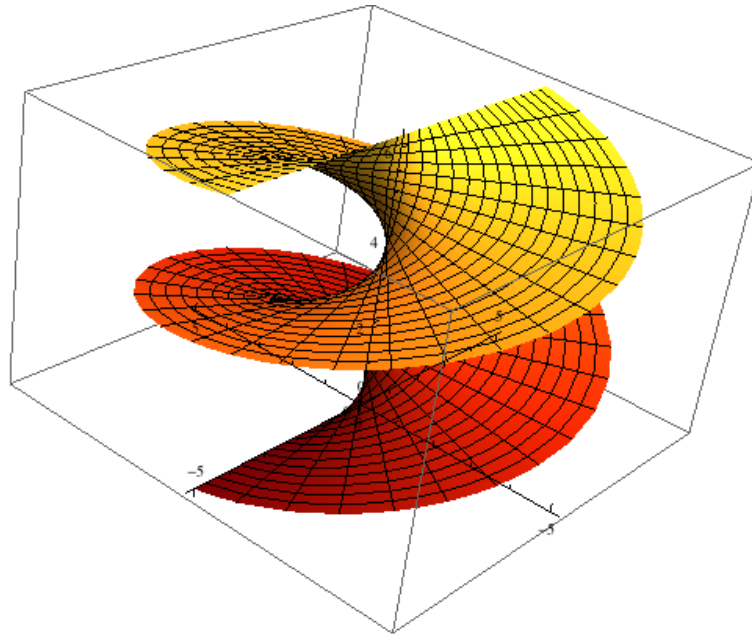


Figura 5: El helicoides

En general, una superficie parametrizada es una aplicación Φ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto \Phi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))\end{aligned}$$

Por ejemplo, el **paraboloide** se puede definir como una superficie parametrizada

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Otro ejemplo es el **cilindro** de radio 2. Para parametrizarlo, usamos coordenadas polares de la siguiente forma:

$$\Phi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z) \quad t \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

Si queremos hacer la **esfera** de radio R , en la parametrización usamos dos parámetros (longitud y latitud)

$$\Phi(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi]$$

El **toro** (una especie de flotador) se produce al girar una circunferencia de radio R_1 en el plano XZ con el centro sobre el eje X a R_2 del origen alrededor del eje Z .

$$\Phi(\theta, \phi) = ((R_2 + R_1 \cos \phi) \cos \theta, (R_2 + R_1 \cos \phi) \sin \theta, R_1 \sin \phi) \quad \theta, \phi \in [0, 2\pi]$$

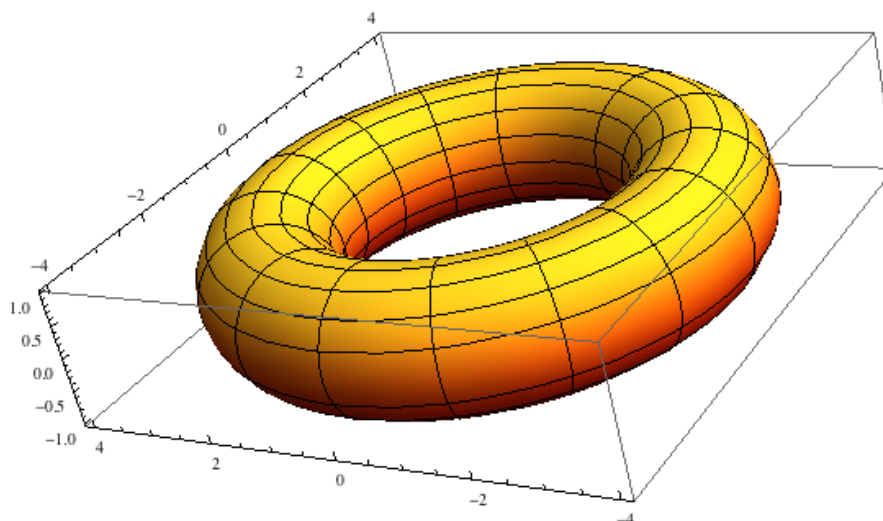


Figura 6: Toro

4.2.2. Parametrización de superficies de revolución

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la superficie de revolución que surge al rotar esta función sobre el eje z es la siguiente

$$\begin{aligned} z(r, \theta) &= f(r) \\ x(r, \theta) &= r \cos \theta \\ y(r, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

4.2.3. Coordenadas cilíndricas

Dado un punto P , sus coordenadas cartesianas son (x, y, z) . Entonces, sus coordenadas cartesianas son (r, θ, z) , donde $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in \mathbb{R}$. La correspondencia es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Geométricamente, z es la altura de P . Haciendo la proyección del punto sobre el plano xy , r es la distancia de la proyección al origen y θ el ángulo del eje X con la recta que une el origen y la proyección del punto.

4.2.4. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas de un punto P son (ρ, θ, ϕ) , donde $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. La correspondencia con coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \phi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Geométricamente, ρ es la distancia de P al origen, θ es el ángulo que forman el eje X y la recta que une P y el origen, y ϕ es el ángulo que forman el eje Z y esa misma recta.

4.2.5. Usos de coordenadas esféricas y cilíndricas

En las coordenadas cilíndricas, si mantenemos constante un parámetro y variamos los otros dos obtenemos varias superficies:

- Si r constante, tenemos un cilindro.
- Si θ constante, tenemos un semiplano.
- Si z constante, tenemos un plano horizontal.

Lo mismo ocurre con las coordenadas esféricas:

- Si ρ constante, tenemos una esfera.
- Si θ constante, tenemos un semiplano.
- Si ϕ constante, tenemos un cono.

4.2.6. Cálculo del plano tangente

Tenemos una superficie $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la que queremos calcular el plano tangente en un punto $P = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$. Si mantenemos fijo v y variamos u (nos movemos sobre una recta), tenemos que

$$\Phi(u, v_0) = \sigma_1(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

cuyo vector tangente es $\nabla \sigma_1'(u_0) \equiv T_u(u_0, v_0)$. De la misma forma obtenemos el vector tangente en la dirección v al que denotamos $T_v(u_0, v_0)$. Calculamos entonces el vector $\vec{v} = T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$ que es normal al plano, y a partir del cual obtenemos la ecuación del plano.

Ejemplos

Helicoide La ecuación del helicoide es $\Phi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$. Calculamos los vectores tangentes:

$$T_s = \nabla \Phi(s, t_0) = (\cos t_0, \sin t_0, 0)$$

$$T_t = \nabla \Phi(s_0, t) = (-s_0 \sin t_0, s_0 \cos t_0, 1)$$

Calculamos el vector normal

$$\vec{n} = T_s \times T_t = \cdots = (\sin t_0, -\cos t_0, s_0)$$

La ecuación del plano es entonces

$$R \equiv \langle (x, y, z) - P, \vec{n} \rangle = 0$$

4.3. Campos vectoriales

Los campos vectoriales son funciones $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, en el que a cada punto se le asigna un vector.

Definición 4.2 Campo gradiente. Diremos que F es un campo gradiente o conservativo si $\exists V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla V$.

Definición 4.3 Divergencia. En un campo vectorial, la divergencia mide el cambio de volumen y existencia de fuentes o sumideros. Si la divergencia es 0, tenemos un "fluido incompresible".

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Definición 4.4 Rotacional. El rotacional mide el giro interno de las partículas en un campo, que se puede expresar como ²

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times \vec{F}$$

Si el rotacional es distinto de cero, significa que ha habido choques internos de las partículas y por lo tanto ha habido pérdida de energía.

Teorema 4.5. Supongamos que $F \in C^1$ es un campo gradiente. Entonces, $\operatorname{rot} F = \vec{0}$. El recíproco también es cierto.

Demostración. Al ser un campo gradiente, $F = \nabla V$. En cada una de las coordenadas tenemos $\frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\partial V}{\partial x_b} \right) - \frac{\partial}{\partial x_b} \left(\frac{\partial V}{\partial x_a} \right)$, que según el teorema de las derivadas cruzadas de Euler es 0. □

Definición 4.6 Laplaciano. El laplaciano es la divergencia de un campo gradiente F . Si $F = \nabla V$, entonces

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = \nabla^2 V$$

²En realidad, ∇ no es un vector y esto es sólo una regla mnemotécnica

5. Integración

Tomemos una función en dimensión dos, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$. Su gráfica será una determinada superficie. El problema de la integración consiste en hallar el volumen encerrado bajo esa superficie.

El punto de partida es similar al método en dimensión 1: sabemos calcular el volumen de prismas rectangulares. Lo que haremos será particionar el rectángulo en varios subrectángulos, a cada uno de los cuales le corresponde un prisma que aproxima por debajo y otro por encima. A medida que aumentamos el número de subrectángulos, los volúmenes se aproximan y si existe el límite, será el volumen que buscamos.

Procedimiento Lo primero que hacemos entonces es hacer la partición del rectángulo inicial $[a, b] \times [c, d]$. Hacemos particiones del intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ y del $[c, d]$ en subintervalos $[y_k, y_{k+1}]$. Entonces, tenemos los subrectángulos $R_{ik} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, donde $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$.

A partir de esto, aproximamos por prismas rectangulares rectos. A cada R_{ik} le corresponde un mínimo $m_{ik} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in R_{ik}\}$ y análogamente un máximo M_{ik} .

Ahora hacemos la aproximación por arriba y por abajo. Sea \mathcal{P} la partición hecha al comienzo, definimos la suma superior U como

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i,k} M_{ik} \cdot \text{Área}(R_{ik})$$

y análogamente definimos la suma inferior $L(f, \mathcal{P})$.

A partir de aquí, tomamos los límites. Tomamos $\alpha = \inf\{U(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partición}\}$ y $\beta = \sup\{L(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partición}\}$. Por lo tanto, la función es integrable si $\alpha = \beta$. La notación es la siguiente:

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \alpha = \beta$$

Teorema 5.1 (Función integrable). *f es integrable si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ podemos encontrar una partición \mathcal{P}_ϵ tal que $U(f, \mathcal{P}_\epsilon) - L(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$.*

Teorema 5.2. *Si f es acotada y continua, entonces es integrable.*

Ejemplos de funciones no integrables

$$f(x, y) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{C} \wedge y \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 5.3 Conjuntos de área cero. Un $A \subset \mathbb{R}^2$ tiene área cero si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ lo podemos recubrir por una familia finita de rectángulos R_1, \dots, R_k tales $\text{Área}(R_1) + \dots + \text{Área}(R_k) \leq \epsilon$.

Son conjuntos de área cero los puntos aislados, rectas y curvas en una única dimensión.

Teorema 5.4. Si F es acotada y sus discontinuidades son de área cero, entonces es integrable.

5.1. Cálculo de integrales

Lema 5.5 (Principio de Cavalieri). Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, poseen entonces igual volumen.

Con esto, podemos dividir una superficie F en *rebanadas*. Usando la misma notación para las particiones de antes, hallamos que el volumen aproximado de cada rebanada es el área de una de las caras de la rebanada por el ancho. De esta forma, el volumen total aproximado sería

$$V = \sum_i \text{Área}(y_i)(y_{i+1} - y_i)$$

que es una suma de Riemann:

$$V = \int_c^d \text{Área}(y) dy$$

Ahora bien, ¿qué es el $\text{Área}(y)$? Si nos fijamos, es el área encerrada bajo la función $f(x, y)$ entre a y b cuando y se mantiene fijo. Es decir:

$$\text{Área}(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Así, nos queda que el volumen es el siguiente:

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Teorema 5.6 (Teorema de Fubini). Sea F continua en $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces:

$$\int \int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x, y) dx \right) dy$$

Versión 2:

Sea F con discontinuidades en un conjunto de área 0. Entonces si $\int_c^d F(x, y) dy$ existe $\forall x \in [a, b]$ entonces $\int_R F = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y) dy \right) dx$. La forma es análoga si existe $\int_a^b F(x, y) dx \forall y \in [c, d]$.

Ejemplos Consideramos la función $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ en la región $\Omega \equiv [0, 1] \times [0, 1]$. Buscamos el volumen que encierra esta superficie, así que integramos según el Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} V = \iint_{\Omega} f(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(2x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{3} - y^2 \right) dy = \\ &= \left(\frac{5}{3}y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos visto cómo integrar en rectángulos. Ahora bien, ¿qué ocurre si queremos integrar en una superficie B no rectangular? Tomemos el ejemplo de antes, y nuestro conjunto B como el primer cuadrante del círculo de radio 1: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$. Consideramos la extensión

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in B \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega - B \end{cases}$$

Dado que la discontinuidad de salto es un conjunto de área 0, entonces \tilde{f} es integrable, y como el área extendida no aporta volumen, tenemos que $\iint_B f \equiv \iint_{\Omega} \tilde{f}$. Si calculamos la integral

$$\iint_{\Omega} \tilde{f} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) dy dx$$

Al haber extendido, integrando con respecto a y no aporta superficie todo el intervalo $[0, 1]$, sino que nos importa el intervalo $[0, \sqrt{1-x^2}]$. Y dado que en ese intervalo $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)$, nos queda la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left(2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} \right) dx \end{aligned}$$

Resolviendo esta integral, el resultado es $\frac{3\pi}{8}$, que es independiente del orden en el que integremos.

Observación: Que las integrales iteradas existan no implica que la función sea integrable.

5.2. Cambio de variables

Teorema 5.7. Dada una integral $\iint f(x, y) dx dy$ y un cambio de variable $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, la integral quedaría de la siguiente forma:

$$\iint f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

donde $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ es el jacobiano y vale:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

Ejemplos Probamos el cambio de variables para hallar el **área del círculo** $D \equiv x^2 + y^2 \leq R^2$

$$\iint_D 1 dx dy$$

El cambio de variable sería $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. El jacobiano sería

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = r$$

por lo que la integral quedaría

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2$$

Vamos a intentarlo ahora con la esfera. En un octavo de la esfera (región D), la ecuación sería $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Así, con el mismo cambio de variable del anterior ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Vol. esfera} &= 8 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy dx \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} d\theta = \frac{8R^3}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Intentamos ahora hacer la integral de e^{-x^2} . Llamamos $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. I también es igual a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$, porque sólo hemos cambiado el nombre de la variable. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

Aquí podemos aplicar un cambio de variable a coordenadas polares, de forma que nos quedaría

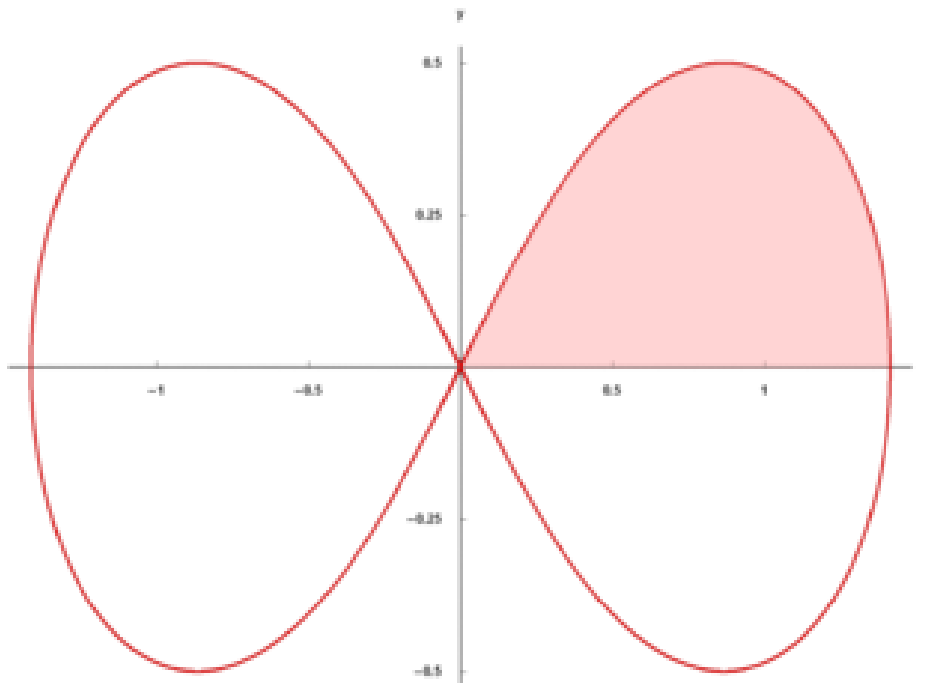


Figura 7: La curva Lemniscata

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_0^{\infty} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Probemos ahora la ecuación de la Lemniscata, que dibuja una gráfica similar al símbolo ∞ y cuya ecuación es

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Pasando a coordenadas polares, tenemos que la ecuación es

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

Estudiamos el área de uno de los cuadrantes al que llamamos D , el sombreado en la figura ??, en el que la ecuación es $r = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}$. Su área sería

$$4 \iint_D dx \, dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} r \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2 \cos 2\theta}{2} d\theta = 2a^2$$

5.3. Integración en \mathbb{R}^3

La motivación para las integrales triples es el cálculo de la "masa" de región Ω con una densidad variable $f(x, y, z)$. La idea y la teoría es la misma que en dimensión dos, que nos acabará llevando a un teorema de Fubini (ver página ??) y a un teorema de cambio de variable.

El primer problema que se plantea es cómo colocar los límites de integración. Tomaremos la función $f(x, y, z) = x^2 \cos x$ y la región T limitada (acotada) por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$, es decir, un prisma triangular (un prisma cuadrangular dividido por su diagonal).

La proyección de T en el plano XY es un triángulo, por lo que tomamos los límites en x y en y que nos dan esta región. Tendríamos entonces la siguiente integral:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int f \, dz \, dy \, dx$$

Observamos ahora el comportamiento de la variable z , que siempre valdrá π independientemente de x e y . La integral nos quedaría entonces de la siguiente forma:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^\pi f \, dz \, dy \, dx$$

Vamos ahora a buscar los límites para una región más compleja, un paraboloide $z = x^2 + y^2$ tapado por arriba por la esfera de radio 1 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Primero hallamos la intersección entre ambas para encontrar la proyección en el plano XY . Sustituyendo, tenemos que $z + z^2 = 1$, por lo tanto y como $z > 0$, tenemos que $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, de tal forma que la proyección sobre el plano XY es la circunferencia de radio $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ centrada en el origen. De esta forma, la integral sería

$$\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f \, dz \, dy \, dx$$

Teorema 5.8 (Cambio de variables en \mathbb{R}^3). *Dado un cambio de variables $\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, se transforma la integral*

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

en

$$\int \int \int_{\Omega^*} f(\Phi(u, v, w)) \left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| \, du \, dv \, dw$$

donde

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Cambio a coordenadas cilíndricas Hacemos el cambio de variable a coordenadas cilíndricas, calculando el determinante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Cambio a coordenadas esféricas Si calculamos el determinante, observamos cómo el cambio en la medida queda como $\rho^2 \sin \varphi$.

5.4. Integrales sobre curvas

Imaginemos una curva $\Gamma \equiv \{\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]\}$. Sobre esta curva podemos hacer integrales de funciones escalares y de campos vectoriales.

5.4.1. Integral de función escalar sobre una curva

En este caso, nuestra curva Γ es un alambre de densidad variable $f(x, y, z)$. Entonces, la integral sería la masa de ese alambre. No sabemos cómo hacer esta cuenta en el espacio, pero en el intervalo $[a, b]$ sí sabemos. Es decir, el problema es buscar una integral

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) * dt$$

donde $*$ es el cambio en la medida. Para buscarlo, miramos qué ocurre cuando f es constante y vale 1: la integral es la longitud de esa curva. Pero la longitud ya la hemos obtenido (ver ??), y sólo teníamos que integrar $\|\sigma'(t)\|$. De esta forma, nos quedaría que el cambio en la medida es $\|\sigma'(t)\|$ y la integral es

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\sigma'(t)\| dt$$

Teorema 5.9. *En el caso escalar, el resultado no depende de la parametrización.*

Demostración. Tenemos una curva Γ con dos parametrizaciones: $\sigma_1(t)$, que transforma el intervalo $[a, b]$; y $\sigma_2(s)$ que lo hace con el $[c, d]$. Entonces, hay una biyección $h(t) = s$ que transforma el intervalo $[a, b]$ en $[c, d]$ y que es derivable h y su inversa. Dada una función f , tendremos entonces que

$$I = \int_{\gamma} f(x, y, z) d\sigma_2 = \int_c^d f(\sigma_2(s)) \|\sigma_2'(s)\| ds = \int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(d)} f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt$$

Hay dos posibilidades sobre h : que sea decreciente o creciente. Si es creciente, transforma $[c, d]$ en $[a, b]$. Si es decreciente, tenemos que transforma $[c, d]$ en $[b, a]$.

Si h es creciente, $h' \geq 0$ por lo que $h = |h|$. Entonces, nos queda que

$$I = \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt = \int_a^b f(\sigma_1(t)) \|\sigma_1'(t)\| dt$$

Si h es decreciente, $h' \leq 0$ por lo que $-h = |h|$. De esta forma, nos quedaría que

$$I = \int_b^a f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt = - \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt =$$

$$= \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))h'(t)\| dt$$

□

5.4.2. Integral de campo vectorial sobre una curva

Aquí, la integral representa el trabajo realizado por el campo vectorial \vec{F} alrededor de la curva Γ , más específicamente sobre la componente del vector tangencial a la curva en cada punto. A esta componente la llamaremos la componente efectiva. Una vez que calculamos esta componente, sólo tenemos números de forma que pasamos a una integral de función escalar.

Llamamos \vec{v}_t al vector unitario tangente a la curva en un punto. Entonces, la componente efectiva $F_t = \|\vec{F}\| \cos \alpha$. Dado que \vec{v}_t es de módulo uno, nos queda que $F_t = \langle \vec{F}, \vec{v}_t \rangle$. De esta forma, concluimos que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} d\sigma = \int_a^b \langle \vec{F}(\sigma(t)), \vec{v}_t \rangle \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

Reparametrización Tenemos una curva Γ con dos parametrizaciones: $\sigma_1(t)$, que transforma el intervalo $[a, b]$; y $\sigma_2(s)$ que lo hace con el $[c, d]$. Entonces, hay una biyección $h(t) = s$ que transforma el intervalo $[a, b]$ en $[c, d]$ y que es derivable h y su inversa. De esta forma, $\sigma_2(s) = \sigma_2(h(t)) = \sigma_1(t)$.

Hay dos posibilidades sobre h : que sea decreciente o creciente. Si es creciente, transforma $[c, d]$ en $[a, b]$. Si es decreciente, tenemos que transforma $[c, d]$ en $[b, a]$. En el primer caso, h conserva la orientación y σ_1 y σ_2 tienen la misma orientación. En el caso decreciente, las parametrizaciones tienen distinta orientación.

Teorema 5.10. *Si las dos parametrizaciones conservan la orientación sobre Γ , que es una curva simple o cerrada simple, entonces la integral mantiene el mismo valor. Si la orientación es distinta, las integrales son iguales con distinto signo.*

Definición 5.11 Curva simple. Γ es una curva simple si la aplicación que la recorre es inyectiva.

Definición 5.12 Curva cerrada simple. Γ es una curva cerrada simple si dada la aplicación $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que la recorre, σ es inyectiva en $[a, b)$ y $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Demostración. Dada una función F , tendremos entonces que

$$I = \int_{\gamma} F(x, y, z) d\sigma_2 = \int_c^d \langle F(\sigma_2(s)), \sigma_2'(s) \rangle ds = \int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(d)} \langle F(\sigma_2(h(t))), \sigma_2'(h(t)) \rangle h'(t) dt$$

Hay dos posibilidades sobre h : que sea decreciente o creciente. Si es creciente, transforma $[c, d]$ en $[a, b]$. Si es decreciente, tenemos que transforma $[c, d]$ en $[b, a]$.

Si h es creciente, $h' \geq 0$ por lo que $h = |h|$. Entonces, nos queda que

$$I = \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))h'(t)\| dt = \int_a^b f(\sigma_1(t)) \|\sigma_1'(t)\| dt$$

Si h es decreciente, $h' \leq 0$ por lo que $-h = |h|$. De esta forma, nos quedaría que

$$\begin{aligned} I &= \int_b^a f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt = - \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))\| h'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\sigma_2(h(t))) \|\sigma_2'(h(t))h'(t)\| dt \end{aligned}$$

□

5.4.3. Integrales en campos conservativos

Si tenemos una curva $\Gamma \equiv \{\sigma(t) \mid t \in [a, b]\}$, la integral sobre el campo $F = \nabla U$ sería

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F &= \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla U(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b DU(\sigma(t)) D\sigma(t) dt = \int_a^b (U \circ \sigma)(t) dt = (U \circ \sigma)(t) \Big|_{t=a}^b \end{aligned}$$

Es decir, en un campo conservativo la integral no depende del camino seguido, sólo de los puntos inicial y final:

$$\int_{\Gamma} F = U(\sigma(b)) - U(\sigma(a))$$

5.5. Integrales sobre superficies

5.5.1. Integral de campo escalar sobre una superficie

La motivación de la integral sobre una superficie es hallar la masa de una lámina con la forma S y densidad superficial variable $f(x, y, z)$. La superficie S se puede parametrizar a través de una aplicación $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $(u, v) \in D$. La integral se transforma entonces en

$$\int \int_S f(x, y, z) = \int \int_D f(\Phi(u, v)) * du dv$$

donde, igual que antes, $*$ es el cambio en la medida. Para hallarlo, observamos qué ocurre cuando la densidad es constante y vale 1: deberíamos obtener el área de la superficie. Este área es la suma de todas las pequeñas áreas de S que llamamos S_{ij} y que obtenemos a partir de un rectángulo en la región D que llamamos R_{ij} , de ancho k y largo n .

El área de S_{ij} es aproximadamente $\|hT_u \times kT_v\| = hk \|T_u \times T_v\|$, donde T_u y T_v son los vectores tangentes a la superficie S_{ij} en el punto $(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j), z(u_i, v_j))$. De esta forma, el área nos quedaría como

$$\sum_{i,j} \|T_u \times T_v\| \text{Area}(R_{ij})$$

que es una suma de Riemann para la función $\|T_u \times T_v\|$ en el plano (u, v) . De esta forma, la integral nos quedaría como

$$\int \int_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv$$

Por lo tanto

$$\int \int_S f(x, y, z) = \int \int_D f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \, du \, dv$$

Ejemplos Probamos a obtener el área lateral de un **cilindro**, que debería ser $2\pi Rh$. En coordenadas cilíndricas, la parametrización sería

$$\Phi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h]$$

Hallamos los vectores $T_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$ y $T_z = (0, 0, 1)$. El producto vectorial valdría $(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ y su módulo vale R . La integral quedaría

$$\int \int_S 1 = \int_0^h \int_0^{2\pi} R \, d\theta \, dz = 2\pi Rh$$

Vamos ahora con la **esfera**, usando coordenadas esféricas. $T_\theta = (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0)$ y $T_\phi = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi)$. Entonces

$$T_\theta \times T_\phi = -R^2 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

cuyo módulo vale $R^2 |\sin \phi|$. El área de la esfera sería entonces

$$\begin{aligned} A &= 8 \int \int_S 1 = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 |\sin \phi| \, d\phi \, d\theta = 8R^2 \int_0^{\pi/2} (-\cos \phi)|_{\phi=0}^{\pi/2} \, d\theta = \\ &= 8R^2 \int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta = 8R^2 \frac{\pi}{2} = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Probemos ahora con el **helicoides** (ver página ??) de radio R , cuya parametrización es $\Phi(r, t) = (r \cos t, r \sin t, t)$. Hallamos los vectores tangentes $T_r = (\cos t, \sin t, 0)$ y $T_t = (-r \sin t, r \cos t, 1)$. El producto vectorial es $T_r \times T_t = (\sin t, -\cos t, r)$ y su módulo vale $\sqrt{1+r^2}$. El área sería entonces

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \pi = 2\pi \int_0^R \sqrt{1+r^2} \, dr$$

Para hallar la integral hacemos el cambio de variable $r = \sinh s$, de tal forma que $dr = \cosh s$. Quedaría entonces

$$2\pi \int_{\text{arcsinh}(R)} \cosh^2 s \, ds = \frac{1}{2} (R\sqrt{1+R^2} + \text{arcsinh}(R))$$

5.5.2. Integral de campo vectorial sobre una superficie

Supongamos que F es el campo de velocidades de un fluido que arrastra objetos. Ahora pensamos qué ocurre si colocamos una *red*, que es una superficie S . La integral representa cuantos objetos *capturamos* en la red por unidad del tiempo. Sin embargo, la parte efectiva del campo sólo es la componente normal del campo a la que llamamos F_N . De esta forma nos quedaría que

$$\int \int_S \vec{F} = \int \int_D F_N \|T_u \times T_v\| du dv$$

Al igual que cuando hicimos para curvas, hallamos el vector normal como

$$F_N = \left\langle \vec{F}, \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \right\rangle$$

5.6. Teoremas del análisis vectorial

Definición 5.13 Orientación positiva. Dada una curva Γ , definimos su orientación positiva Γ^+ . La obtenemos según la regla de la mano izquierda: nos colocamos de pie sobre la curva con la mano izquierda hacia el interior del dominio, de forma que nuestra nariz apunta a la orientación positiva de la curva.

Definición 5.14 Orientaciones compatibles. Dada una curva Γ y una superficie S , la orientación compatible Γ^+ , S^+ es aquella en la que si nos colocamos de pie sobre la superficie en su vector normal, nos movemos hacia el borde de tal forma que la mano izquierda queda hacia dentro y la nariz apunta a la orientación compatible de la curva.

Teorema 5.15 (Teorema de Green). Sea Γ una curva simple en \mathbb{R}^2 . Llamamos D al interior de Γ . Sea (P, Q) el campo con $P, Q \in C^1(D)$. Entonces

$$\int_{\Gamma^+} (P, Q) d\sigma = \int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Teorema 5.16 (Teorema de Stokes). Dada Γ una curva cerrada simple en \mathbb{R}^3 que es el borde de una superficie S , tenemos que

$$\int_{\Gamma^+} \vec{F} d\sigma = \int \int_{S^+} \text{rot } \vec{F} dS$$

Esto indica que el flujo por una superficie depende sólo de la forma de su boca.

Teorema 5.17 (Teorema de Gauss). *Sea S una superficie cerrada que encierra una región Ω , y $\vec{F} \in C^1(\Omega)$.*

$$\int \int_{S^+} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

Índice alfabético

- Autovalor, 15
- Autovector, 15
- Bola abierta, 4
- Cambio de variables en \mathbb{R}^3 , 30
- Campo
 - conservativo, 24
 - gradiente, 24
 - vectorial, 24
- Campo gradiente, 24
- Caracterización en términos de sucesiones, 9
- Caracterización por sucesiones, 5
- Cardioide, 20
- Cicloide, 18
- Cierre, 5
- Cilindro, 21, 23
- Clasificación de puntos críticos, 16
- Conjunto
 - abierto, 5
 - cerrado, 5
 - compacto, 6
 - convexo, 6
 - de área cero, 26
- Conjunto compacto, 6
- Conjunto convexo, 6
- Conjunto de nivel, 6
- Conjuntos de área cero, 26
- Cono, 6, 23
- Continuidad de la composición, 9
- Convergencia
 - Criterio de Cauchy, 4
 - de sucesiones, 3
- Coordenadas
 - cilíndricas, 22
 - esféricas, 22
- Criterio de Cauchy, 4
- Curva
 - cerrada simple, 32
 - simple, 32
- Curva cerrada simple, 32
- Curva simple, 32
- Derivada
 - cruzadas, 14
 - direccional, 12
 - paramétrica, 13
 - parcial, 10
- Derivada direccional, 12
- Derivada parcial, 10
- Desigualdad de Cauchy Schawrz, 3
- Diferencial, 10
- Distancia, 3
- Divergencia, 24
- Esfera, 21, 23
- Espacio completo, 4
- Frontera, 5
- Función
 - composición, 9
 - concavidad, 6
 - continua, 9
 - integrable, 25
 - inversa, 10
- Función cóncava/convexa, 6
- Función integrable, 25
- Gradiente, 12
- Helicoide, 20
- Integral, 26
 - de línea, 20
 - sobre curva, 31
 - sobre superficies, 33
- Interior, 5
- Inversa, 10
- Jacobiano, 28
- Límite, 8
- Laplaciano, 24
- Lemniscata, 29
- Longitud de arco, 20
- Máximo y mínimo absoluto, 17
- Máximo/mínimo
 - absoluto, 17
 - local, 15, 16
- Máximo/mínimo local, 15
- Matriz
 - definida positiva/negativa, 15

Hessiana, 14
jacobiana, 28
semidefinida positiva/negativa, 15
Matriz Hessiana, 14
Matriz semidefinida y definida positiva y negativa, 15
Multiplicadores de Lagrange, 18
Norma, 3
Orientación
compatible, 35
positiva, 35
Orientación positiva, 35
Orientaciones compatibles, 35
Ortogonalidad, 3
Paraboloide, 21
Plano, 23
tangente, 13, 23
Principio de Cavalieri, 26
Producto escalar, 3
Punto
aislado, 5
crítico, 15
crítico degenerado, 16
de acumulación, 5
de silla, 16
Punto aislado, 5
Punto crítico, 15
Punto de acumulación, 5
Recta
tangente, 19
Rotacional, 24
Semiplano, 23
Superficie
de revolución, 22
Teorema
de Fubini, 26
de Gauss, 36
de Green, 35
de Stokes, 35
Teorema de compacidad, 17
Teorema de Fubini, 26
Teorema de Gauss, 35
Teorema de Green, 35
Teorema de las derivadas cruzadas de Euler, 14
Teorema de Stokes, 35
Toro, 21