Análisis Matemático

Víctor de Juan Sanz

13/14 C1

Índice

Datos de interés:
Jesus Garcia Azorero
Despacho: 17-608
Correo: jesus.azorero@uam.es

1. Contenido de la asignatura

1.1. Preliminares

Repaso de contenidos de Cálculo II como conjuntos abiertos y cerrados, gradiente ...

1.2. Teorema funcion inversa, implicita y rango

Aplicación a funciones no lineales de los teoremas fundamentales de cálculo II

1.3. Mínimos y máximos condicionados

Multiplicadores de Lagrange

1.4. Subvariedades diferenciales

Objetos de dimensión n en espacios de dimensión m ($n < m$).

1.5. Integración en subvariedades diferenciales

1.6. Teorema de Stokes

Demostración del teorema con lenguaje de las formas diferenciales.

2. Preliminares del análisis matemático

A lo largo del curso vamos a trabajar en $\mathbb{R}^n = (x_1, \ldots c, x_n)\ x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$

2.1. Producto escalar, norma y distancia

Durante todo el año denotaremos al vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $\overline{x}$ por comodidad.

Definición 2.1 **Producto escalar euclídeo**.

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Propiedades:

- $\langle \lambda\overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{x} + \overline{z} \rangle + \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle gx, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$

Las tres primeras son la consecuencia de que el producto escalar tiene que ser bilineal.

En general, un producto escalar es una matriz definida positiva y se opera de la siguiente manera:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = (x_1, x_2, ..., x_N) \cdot \begin{pmatrix} a_1 1 & \cdots & a_1 N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N 1 & \cdots & a_N N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Definición 2.2 **Norma euclídea**.

$$||\overline{x}|| = (\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \cdots = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades:

- $||\overline{x}|| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
- Homogeneidad: $||\lambda\overline{x}|| = \lambda\, ||\overline{x}||$
- Desigualdad triangular: $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{x}||$

Lema 2.3. $||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$ *para cualquier producto escalar* $*$.

Definición 2.4 **Norma**. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una **norma**.

En general se tiene $||\cdot||_p, p \in \mathbb{N}$ y se definen todas de la misma forma:

$$||\overline{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay tres casos particulares, la norma uno

$$||\overline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

La norma 2, que es la norma euclídea

y la norma infinito

$$||\overline{x}||_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Vamos a demostrar que la norma p cumple las 3 propiedades de una norma. Para ello, nos apoyaremos en dos teoremas previos:

Teorema 2.5 (Desigualdad de Young). *Sea* $p > 1$ *y tomamos* p' *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *(exponente conjugado). Entonces:*

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \cdot |a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

Demostración. Se utiliza la idea de la función logaritmo, que es cóncava[1] y creciente. Tomando 2 puntos A y B tenemos la condición de concavidad

$$t \log A + (1-t) \log B \leq \log(tA + (1-t) \cdot B)$$

. Utilizando la derivada hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y tomamos un punto que dista t de A y $(1-t)$ de B. Como la función es cóncava sabemos que ese valor será menor que el valor del logaritmo en un punto t entre A y B.

Tomando $A = |a|^p$, $B = |b|^p$ y $t = \frac{1}{p} \to 1 - t = \frac{1}{p'}$ tenemos que

$$\frac{1}{p} \cdot log|a|^p + \frac{1}{p'} \cdot log|b|^{p'} \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$\log|a| + \log|b| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$\log|ab| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

□

Teorema 2.6 (Desigualdad de Hölder). *Se trata de una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ocurre en el caso* $p = 2$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq ||\overline{x}||_p \, ||y_i||_p$$

Demostración. Tomamos

$$a_i = \frac{|x_i|}{||\overline{x}||_p}$$
$$b_i = \frac{|y_i|}{||\overline{y}||_{p'}}$$

Tenemos que

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{p'} b_i^{p'}$$

Sustituimos:

$$frac|x_i|||x||_p \cdot \frac{|y_i|}{||y||_p} \leq \frac{|x_i|^p}{p \cdot ||x||_p^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p' \cdot ||y||_{p'}^p}$$

Tomamos sumatorios y, teniendo en cuenta que $||x||_p^p = \sum |x_i|^p$, nos queda

$$\frac{1}{||x||_p \, ||y||_{p'}} \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p \, ||x||_p^p} \sum |x_i|^p + \frac{1}{p' \, ||y||_{p'}^{p'}} \sum |y_i|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Una vez probadas las dos desigualdades anteriores, pasamos a probar la desigualdad triangular:

Demostración. El objetivo es demostrar que

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p \leq ||\overline{x}||_p + ||\overline{y}||_p$$

y vamos a hacerlo en varios pasos.

Para evitarnos las raíces empezamos con $||\overline{x}+\overline{y}||_p^p$

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p^p = \sum_1^N |x_i+y_i|^p = \sum_1^N |x_i+y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} =$$
$$= \sum_1^N |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_1^N |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (2.6) tenemos:

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p^p \leq$$
$$\sum (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i+y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*} + \sum (|y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|X_i+y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*}$$

Por ser p y p' exponentes conjugados es fácil comprobar que $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$
Sacamos factor común y pasamos al otro lado obteniendo (PASO INTERMEDIO?)

$$\left(\sum_1^N |x_i+y_i|^p \right)^{\overbrace{\left(1-\frac{1}{p'}\right)}^{p}} = ||\overline{x}+\overline{y}||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

Guille: esta demostración es muy, muy rara. □

EJERCICIO PROPUESTO: Tomamos en el plano el conjunto de los puntos cuya norma es 1. Tomando en la norma p=2 sale la circunferencia. ¿Y en p=3?

Observación: Estos argumentos se pueden utilizar para demostrar

$$\int |f \cdot g| \, dx \leq \left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Definición 2.7 **Distancia euclídea**.

$$d(\overline{x},\overline{y}) = ||\overline{y}-\overline{x}||$$

Propiedades:

- La distancia es siempre positiva: $d(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$
- $d(\overline{x},\overline{x}) = 0$
- Simetría: $d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$
- Desigualdad triangular $d(\overline{x},\overline{z}) \leq d(\overline{x},\overline{y}) + d(\overline{y},\overline{z})$. La distancia entre 2 puntos es menor o igual en línea recta que pasando por un punto intermedio.

Definición 2.8 **Distancia**. Cualquier operacion que cumpla las 3 propiedades anteriores es una distancia.

Recapitulando Con un producto escalar puedo definir una norma y con esa norma puedo definir una distancia. Pero... ¿Podemos definir una norma que no venga de un producto escalar y/o alguna distancia que no provenga de una norma? Sí, por ejemplo

$$\tilde{d}(\overline{x},\overline{y}) = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}(y) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x)|$$

No cuesta mucho comprobar que cumple las 3 propiedades de una distancia. Además, esta distancia es cuanto menos curiosa porque nunca será mayor de π.

Podemos comprobar que si existiera una norma que midiese esta distancia tendríamos

$$||\tilde{\overline{x}}|| = \tilde{d}(\overline{x},\overline{0}) = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x)|$$

pero esto no cumple la propiedad: $||\tilde{\lambda x}|| = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}\lambda x| \neq |\lambda|\,|\operatorname{arc}\operatorname{tg} x| = |\lambda x|\,||\tilde{x}||$ ya que ninguna distancia puede ser mayor que π y tomando un $\lambda > \pi$ se produciría la contradicción.

2.2. Relación norma - producto escalar

Teorema 2.9. *Supongamos que tengo un producto escalar $*$ y una norma asociada*

$$||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$$

. Entonces

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = ||\overline{x}||^2 + ||\overline{y}||^2 + 2(\overline{x} * \overline{y})$$

Demostración.

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = (\overline{x}+\overline{y}) * (\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}*\overline{x}+\overline{x}*\overline{y}+\overline{y}*\overline{x}+\overline{y}*\overline{y} = ||\overline{x}||^2+||\overline{y}||^2+2(\overline{x}*\overline{y})$$

□

Esa norma asociada al producto escalar tiene dos propiedades importantes:

- Paralelogramo: $||\overline{x}+\overline{y}||^2+||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 2\left(||x||^2+||x||^2\right)$
- Polarización: $||\overline{x}+\overline{y}||^2-||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 4(\overline{x}*\overline{y})$

2.3. Equivalencia de normas

Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^N$. Si intento calcular la norma de un vector $\overline{x}$

$$||\overline{x}|| = \left|\left|\sum x_i e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{N} ||x_1 e_1|| = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \cdot ||e_i||$$

Tenemos: $||\overline{x}|| \leq \sum_{i=1}^N c_i|x_i|$ siendo $c_i = ||e_i||$. Aplicando Cauchy-Schwarz nos queda

$$\sum_{i=1}^{N} \left(c_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum \left(|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, puedo controlar cualquier norma con una constante y la norma euclídea:

$$|||\overline{x}||| \leq C\,||x||_2$$

En particular, $0 \leq |||\overline{x_n}-\overline{x}||| \leq c||\overline{x_n}-\overline{x}||$.

Observación: Si aplicamos Holder en vez de Cauchy, sale la igualdad con la norma p y no con la euclídea.

Aplicación: Sea $F(\overline{x}) = |||\overline{x}|||$ y $F:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$|F(\overline{x})-F(\overline{y})| = ||||\overline{x}-\overline{y}|||| = |||\overline{x}-\overline{y}||| \leq C||\overline{x}-\overline{y}||$$

Utilizando: $|||\overline{a}-\overline{b}||| \geq |||\overline{a}|||-|||\overline{b}|||$ [2]

Es decir, cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es **continua** respecto de la norma euclídea. [3]

Teorema 2.10 (Relación norma $\leftrightarrow$ producto escalar). $||\cdot||$ *una norma cualquiera de* $\mathbb{R}^N$ *proviene de un producto escalar si y sólo si la norma satisface la identidad del paralelogramo.*

[2](la desigualdad triangular con restas, que se saca con un simple cambio de variable)
[3]Continua si la tomas como una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$

Demostración. En el apartado anterior (2.2) demostramos la implicación hacia la derecha. Vamos a demostrar la recíproca: Suponemos que la norma satisface la identidad del paralelogramo:

$$\left|\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\right|^2 + \left|\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\right|^2 = 2\left|\left|\overline{a}\right|\right|^2 + 2\left|\left|\overline{b}\right|\right|^2 \tag{2.3.1}$$

Queremos probar que existe un producto escalar $*$ tal que $||\overline{x}|| = (\overline{x}*\overline{x})^{\frac{1}{2}}$, así que definimos uno utilizando la identidad de polarización:

$$\overline{x} * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(||\overline{x}+\overline{y}||^2 - ||\overline{x}-\overline{y}||^2\right) \tag{2.3.2}$$

Queremos probar que, efectivamente, $*$ es un producto escalar, así que tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

1. $\overline{x} * \overline{y} = \overline{y} * \overline{x}$.
2. $\overline{x} * \overline{x} \geq 0 \quad \forall\, \overline{x}$
3. $(\overline{x} * \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$
4. $(\lambda\overline{x}) * \overline{y} = \lambda\,(\overline{x} * \overline{y})$
5. $(\overline{x}+\overline{y}) * \overline{z} = \overline{x} * \overline{x} + \overline{y} * \overline{z}$

Las propiedades 1, 2 y 3 son triviales. Vamos con 4 y 5

Demostración de la 4ª propiedad Demostraremos que se cumple por inducción cuando $\lambda \in \mathbb{N}$. Primero probamos para $\lambda = 2$.

$$\begin{aligned} (2\overline{x}) * \overline{y} = & \qquad \text{usando (2.3.2)} \\ = \frac{1}{4}\left(|||2\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||2\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) = & \\ = \frac{1}{4}\left(|||\underbrace{\overline{x}}_{a} + \underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2 - |||\underbrace{\overline{x}}_{a} + \underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{-b}|||^2\right) = & \qquad \text{usando (2.3.1)} \\ = \frac{1}{4}\left(2|||\overline{x}|||^2 + 2|||\overline{x}+\overline{y}|||^2\right) = & \\ = 2\frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) = 2(\overline{x}*\overline{y}) & \end{aligned}$$

Conclusión: si $\lambda = 2$ vemos que sale fuera y por lo tanto se cumple.

Paso 2 de la inducción: buscamos demostrar la propiedad con $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{N}$

$$(n\overline{x}) * \overline{y} = \qquad \text{usando (2.3.2)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(|||n\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||n\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|||\underbrace{(n-1)\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2 - |||\underbrace{(n-1)\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{b}|||^2\right) = \qquad \text{usando (2.3.1)}$$

$$= \ldots = 2(\overline{x} * \overline{y}) + (n-2)(\overline{x} * \overline{y}) = \quad \text{usando hip. de inducción}$$

$$= n(\overline{x} * \overline{y})$$

Queda demostrado por lo tanto para $\lambda \in \mathbb{N}$. Falta ahora demostrarlo para el resto de conjuntos de números.

Para $\lambda \in \mathbb{Z}$ utilizaremos $(-\overline{x}) * \overline{y} = -(\overline{x} * \overline{y})$ y podremos usar la demostración de los naturales.

Para $\lambda = n \in \mathbb{Q}$ con $n = \frac{p}{q}$, siendo p y q primos entre sí, vemos que

$$\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y} = \frac{q\left(\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y}\right)}{q} = \frac{\left(q \cdot \frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y}}{q} = \frac{(p\overline{x} * \overline{y})}{q}$$

que tal y como habíamos demostrado antes es igual a $\dfrac{p\,(\overline{x} * \overline{y})}{q}$, con lo que queda demostrado también para los racionales.

Por último, queremos demostrarlo cuando $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda = \liminf nr_n$. Utilizaremos el resultado previo de que cualquier norma es continua.

$\overline{x}, \overline{y}$ fijos.

Revisar: Los $|||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2$ y $|||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2$ son continuos.

$$\alpha\overline{x} * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) = \lim_{n\to\infty}(r_n\overline{x} * \overline{y}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\overline{x} * \overline{y}) = \alpha(\overline{x} * \overline{y})$$

WTF es esto.

Demostración de la 4 propiedad:

$$A = (\overline{x}+\overline{y}) * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}+\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)$$

$$B = \overline{x} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}-\overline{z}|||^2\right)$$

$$C = \overline{y} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)$$

Demostraremos que $A - B - C = 0$

COMPLETAR la comprobación. □

Observación: $d(\overline{x},\overline{y}) = |||\overline{x}-\overline{y}|||$ para alguna norma $|||\cdot|||$ $\Leftrightarrow$ $(d(\overline{x}+\overline{z})+d(\overline{y}+\overline{z}) = d(\overline{x},\overline{y}) \wedge d(\lambda\overline{x},\lambda\overline{y} = |\lambda|\, d(\overline{x},\overline{y}))$

3. Topología

Definición 3.1 **Bola**. Se define la bola de radio R centrada en el punto $\overline{x}_0$ como

$$B_R(\overline{x}_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; \underbrace{d(\overline{x},\overline{x}_0)}_{=||\overline{x}-\overline{x}_0||} < R\}$$

Para evitar jaleos, al tratar la distancia vamos a tomar la norma euclídea. Como todas las normas son equivalentes, nos da igual tomar una que otra.

Definición 3.2 **Conjunto abierto**. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es abierto si y sólo si $\forall\, \overline{a} \in A\; \exists \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(\overline{a}) \subset A$

Definición 3.3 **Conjunto cerrado**. Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si su complementario $B^c = \mathbb{R}^N - B$ es abierto.

Teorema 3.4 (Caracterización de cerrados en términos de sucesiones). *Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si para cualquier sucesión convergente $\{x_n\} \subset B$ se cumple que $\lim x_n \in B$.*

Teorema 3.5 (Operaciones con conjuntos abiertos y cerrados). *Suponemos conjuntos de dimensión finita:*

- *Unión arbitraria de abiertos $\rightarrow$ abierto*
- *Intersección finita de abiertos $\rightarrow$ abierto*
- *Union finita de cerrados $\rightarrow$ cerrado*
- *Intersección arbitraria de cerrados $\rightarrow$ cerrado*

Definición 3.6 **Punto de acumulación**. La idea intuitiva es aquellos puntos a los que puedo llegar en el límite, es decir, puntos que a su alrededor a una distancia arbitrariamente pequeña existen otros puntos del conjunto.

$$A \subset \mathbb{R}^N,\; a \in (A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\; (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Siendo (A) es el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 3.7 **Frontera**. La frontera ∂A de un conjunto A son aquellos puntos para los que en su entorno (para cualquier ε) hay puntos tanto del conjunto como puntos de fuera del conjunto.

$$a \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$$

Definición 3.8 **Interior**. El interior es el conjunto abierto más grande que está contenido en el conjunto A.

Definición 3.9 **Cierre**. El cierre de un conjunto AA es el conjunto cerrado más pequeño en el que está contenido A.

Observación: Cierre e interior no los vamos a definir formalmente porque se dan por supuesto.

Definición 3.10 **Conjunto compacto**. Un conjunto que cumpla cualquiera de las 3 propiedades siguientes.

Teorema 3.11 (Conjunto cerrado y acotado). *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Son equivalentes:*

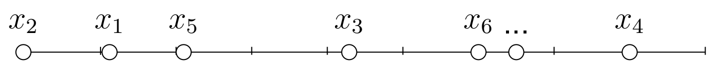
1. *K cerrado y acotado.*
2. *Para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset K$, podemos encontrar una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ con $\lim x_{n_j} \in K$.*
3. *Dado cualquier recubrimiento $\{A_i\}$ abierto de modo que $K \subset \cup\{A_i\}$ puedo encontrar un recubrimiento finito $\{A_j\}, j = 1, ..., M \;/\; K \subset \bigcup_{i=1}^{M} A_i$*

Demostración.

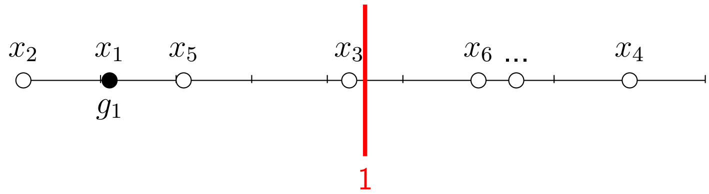
2 implica 1 Supongamos que K no estuviera acotado (negamos la propiedad 1). Consideremos una sucesión de vectores $\{x_n\}$ de tal forma que $||x_n|| = n$, creciente y no acotada, pero con todos los elementos en K. Es imposible encontrar una subsucesión convergente, lo que contradice 2.

Si, por otra parte, K no fuera cerrado, tendríamos que la frontera está fuera del conjunto, y podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ con $\lim x_n \in \partial K$, lo que contradice 2.

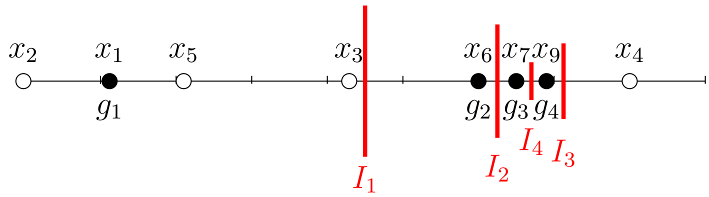
1 implica 2 Empecemos por el caso sencillo, explorando una sucesión cualquiera $\{\overline{x}_n\} \subset K \subset \mathbb{R}$, donde K es, como decíamos en el enunciado, cerrado y acotado. Para encontrar una subsucesión convergente, usaremos el criterio de bisección.



Escogemos el primer elemento g_1 de nuestra subsubcesión, y dividimos por la mitad el segmento.



En al menos una de las dos mitades del segmento habrá infinitos términos: cogemos esa mitad y repetimos los mismos pasos. Finalmente, llegaremos a una subsucesión de este estilo:



Nuestra subsucesión $\{g_x\}$ es igualmente infinita. Tal y como la hemos definido, tenemos que cada g_i está en un intervalo (I_i, I_{i-1}) que cada vez se hace más pequeño. Es decir, que la subsucesión $\{g_x\}$ es de Cauchy y, por lo tanto convergente.

Ahora sólo queda ver cómo podríamos obtener esa subsucesión cuando estamos en espacios que no sean $\mathbb{R}^N$. La idea es sencilla: primero, buscamos una subsucesión que converja en la primera coordenada. Dentro de esa subsucesión, buscamos otra subsucesión que converja además en la segunda, y así con las N coordenadas. $\square$

Teorema 3.12. *Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Entonces, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en K existen $x_m, x_M \in K \;/\; F(x_m) \leq F(x) \leq F(x_M)\ \forall x \in K$.*

Es decir, si F es continua en K alcanza su máximo y su mínimo en el conjunto.

Aplicación: $F(\overline{x}) = |||\overline{x}|||$ una norma (que ya sabemos que es continua):

Conclusión: $m\,||x|| \leq |||\overline{x}||| \leq C||\overline{x}||$

Teorema 3.13. *En $\mathbb{R}^N$ TODAS las normas son equivalentes.*

3.1. Conexión

Definición 3.14 **Conexión por caminos**. Dados $a, b \in C$ podemos encontrar una aplicación continua $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = b$ con $\varphi(t) \in C \, \forall t \in [0,1]$.

Es decir, C es conexo por caminos si podemos encontrar una "línea", un camino que una dos puntos cualquiera del conjunto y que además no se salga del conjunto.

Definición 3.15 **Conexión por abiertos**. C es conexo por conjuntos si para cualquier par de abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^N \;/\; C \subset A \cup B$ se cumple que, si $A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Esto es equivalente a decir que C no puede ser expresado como unión de dos conjuntos disjuntos.

Observación:

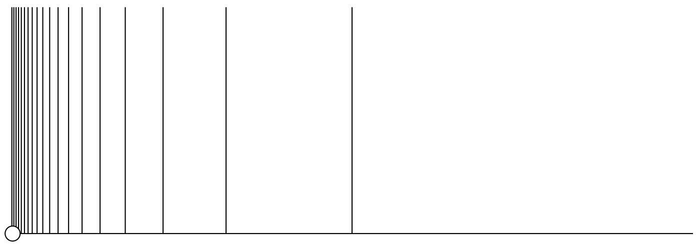


Figura 1: Conjunto peine

Es curioso comprobar que estas 2 definiciones no son equivalentes. Tomemos el conjunto peine (figura 3.1)

$$\{(x,0), x \in (0,1]\} \cup \{(0,y), y \in (0,1]\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, y \right), y \in [0,1] \right\}$$

Es un conjunto conexo por abiertos porque no podemos separarlo en dos conjuntos disjuntos. Sin embargo, no es conexo por caminos porque, si queremos ir del punto $(0,1)$ al $(0,0{,}5)$ no podemos hacerlo ya que el único camino pasaría por el punto $(0,0)$, que no está en el conjunto.

4. Funciones continuas, abiertos y cerrados

Sea F continua. Contrario a lo que podríamos intuir,

1) A abierto $\not\Rightarrow F(A)$ abierto. 2) B cerrado $\not\Rightarrow F(B)$ cerrado.

Definición 4.1 **Función inversa**. Dada

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

, definimos su inversa como

$$F^{-1}(A) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; F(\overline{x}) \in A \right\}$$

Teorema 4.2 (Función inversa).

- *F continua* $\wedge$ *A abierto* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *abierto.*
- *F continua* $\wedge$ *B cerrado* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *cerrado.*

Este teorema nos sirve para decir fácilmente si un conjunto es abierto o cerrado. Por ejemplo, consideremos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + \cos(x\,|y|) - e^z < 1\}$$

Podemos definir ahí la función F como

$$F(x, y, z) = x^2 + \cos(x\,|y|) - e^z$$

que va de $\mathbb{R}^3$ a cierto conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} \;/\; a < 1\}$. Podemos reescribir M como

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; F(x, y, z) \in A\}$$

o, de otra forma, $M = F^{-1}(A)$. Según el teorema (4.2), como A es abierto entonces M también es abierto.

Demostración. 1) Dado un $\overline{x} \in F^{-1}(A)$ queremos hallar un $R > 0$ tal que $B_R(\overline{x}) \subset F^{-1}(A)$. Partimos de

$$\overline{x} \in F^{-1}(A) \Leftrightarrow F(\overline{x}) \in A$$

Como F es continua, $\exists \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(F(\overline{x})) \subset A$. Esto es equivalente a decir que, para cualquier $\overline{z}$

$$||\overline{z} - F(\overline{x})|| < \varepsilon \Rightarrow \overline{z} \in A$$

Por la definición de continuidad, dado un $\overline{s} \in B_R(\overline{x})$

$$\exists \delta > 0 \;/\; ||\overline{x} - \overline{s}|| < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{s})|| < \varepsilon$$

y por lo tanto $F(\overline{s}) \in A$ y $\overline{s} \in F^{-1}(A)$. Conclusión: Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $s \in B_R(\overline{x}) \Rightarrow s \in F^{-1}(A)$.

Pofale. Yo no lo pillo. $\square$

4.1. Aplicaciones lineales

Sea: $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

L es lineal $\Leftrightarrow L(\lambda\overline{x}) = \lambda L(\overline{x}) \wedge L(\overline{x}+\overline{y}) = L(\overline{x}) + L(\overline{y})$

Además, toda aplicación lineal se puede escribir en forma de matriz.

$$L(\overline{x}) = A\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.3. *L lineal $\Rightarrow$ L continua.*

Demostración.

$$L(\overline{x} = \begin{pmatrix} A_1 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

COMPLETAR

□

4.2. Norma de matrices

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\overline{x} \rightarrow F(\overline{x}) = \underbrace{||A\overline{x}||}_{L(\overline{x})}$$

F es continua.

Sabemos que existe $c > 0$ tal que $||A\overline{x}|| \leq C||\overline{x}||$, es decir, $||A\overline{x}|| \leq C$ si $||\overline{x}|| = 1$.

$$M = \{||A\overline{x}|| \diagup ||\overline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

[4] La mejor constante C es la cota superior mínima (supremo) que vamos a llamar α.
$\alpha \in^? M$
α se alcanza en M, porque F es continua y M es compacto.

Definición 4.4 **Norma de una matriz.**

$$|||A||| = \alpha = max||A\overline{x}|| \diagup ||\overline{x}|| = 1$$

Ejercicio propuesto: demostrar que $|||\cdot|||$ es una norma. Demostración de la 4' porpiedad:

[4] Conjunto esfera unidad

$$|||A+B||| = max||(A+B)\overline{x}||| = ||(A+B)\overline{x}_{A,B}|| = ||A\overline{x}_{AB} + B\overline{x}_{AB}|| \leq$$

$$\underbrace{||A\overline{x}_{AB}||}_{\leq max||A\overline{x}||=|||A|||} + \underbrace{||B\overline{x}_{AB}||}_{|||B|||}$$

Ejemplo: COMPLETAR Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular su norma. Resolución: Acabamos teniendo que maximizar (sabiendo que $|x|+|y| = 1$: $|x+2y| + |-3x+y| + |2x| \leq |x| + |2y| + |3x| + |y| + 2|x| = 6|x| + 3|y| \leq 6(|x|+|y|) = 6$ ¿Podemos encontrar un vector (x_0, y_0) tal que $||A(x_0,y_0)^T||_1 = 6$?
Tomando $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$ lo encontramos.

Obsevación: Coincide con la suma de los valores absolutos de las columnas y escoger el más grande.

Aplicando lo mismo con la norma infinito: COMPLETAR COMPLETAR

Lema 4.5. *Sea A una matriz, A^TA es simétrica.*

Lema 4.6. $\underbrace{<\overline{x}, A\overline{y}>}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{<A^T\overline{x}, \overline{y}>}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^M}$

A^TA diagonalizable ($N \times N$). Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$.

Desarrollamos en B: $\overline{x} = \sum \alpha_i \overline{v}_i$. Con $<v_i, v_j>= 0$ con $i \neq j$.

Calculamos $||\overline{x}|| = \sum \alpha_i^2 < v_i, v_i >$

$$A^TA\overline{x} = (A^TA)(\sum \alpha_i v_i) = \sum(\alpha_i \lambda_i \overline{v_i})$$

Queremos hallar el máximo de $||A\overline{x}||$ cuando $||\overline{x}|| = 1$.

$$||A\overline{x}||^2 =< A\overline{x}, A\overline{x} >=< A^TA\overline{x}, \overline{x} >= \underbrace{< \sum \lambda_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i >}_{<v_i,v_j>=0 \text{ con } i \neq j.}$$

$$= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{max}(\sum \alpha_i^2) = \lambda_{max}$$

Conclusión: Hemos demostrado que:

$$max||A\overline{x}|| \underbrace{\leq}_{=} (\lambda_{max})^{\frac{1}{2}}$$

Este máximo se puede alcanzar tomando x como el autovector asociado, por lo que el $\leq$ se convierte en un $=$.

5. Limite

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

Definición 5.1 **Límite.**

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = \overline{L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < ||\overline{x} - \overline{a}|| < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - L|| < \varepsilon$$

Importante el detalle de $0 < ||\overline{x} - \overline{a}||$, no es un $\leq$, porque no se necesita que la función esté si quiera definida en el punto $\overline{a}$.

Teorema 5.2. *Sean* $\overline{x_n} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$ *y* $\overline{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^N$.

$$x_n \to \overline{L} \Leftrightarrow (x_1 \to L_1) \wedge (x_2 \to L_2) \wedge ... \wedge (x_n \to L_n)$$

Idea para el cálculo de límites:

- $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(x) = \lim_{\overline{y}\to 0} F(\overline{y} + \overline{a})$.
- Límite a lo largo de rectas. $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) \sim \lim F(t\overline{v})$

Si $\lim F(t\overline{v})$ toma valores distintos dependiendo de $\overline{v} \Leftrightarrow \nexists \lim_{\overline{x}\to\overline{0}} F(\overline{x})$

Pero, si $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(t\overline{v}) = L \Rightarrow \overline{L}$ es el candidato a ser el límite (no tiene porque serlo). El siguiente paso sería demostrar con argumentos de comparación (Sandwich) u otros que $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = L$.

El contraejemplo es $f(x, y) = \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4}$. Veamos por que:

Nos acercamos al límite por medio de rectas:

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x \cdot (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{(1 + x^2m^4)x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x, mx)) \to 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Pero si nos acercamos al límite por medio de $x = y^2$ tenemos:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2y^2}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x, y)) \neq 0$$

Teorema 5.3. *F continua $\Leftrightarrow$ para cualquier abierto A, $F^{-1}(A)$ es abierto.*

Obsevación: Si $F : \omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M \Leftrightarrow$ para cualquier abierto $A, F^{-1}(A) = \omega \cup V$, con V abierto.

Demostración. $\Rightarrow$ De este teorema ya teníamos demostrada la implicación $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } ||\overline{x} - \overline{a}|| < \delta \Rightarrow \underbrace{||F(\overline{x}) - F(\overline{a})|| < \delta}_{F(\overline{x}) \in B_\varepsilon(F(\overline{a}))}$$

Tomamos

$$A = B_\varepsilon(F(\overline{a})) \rightarrow F(\overline{a}) \in A \Rightarrow \overline{a} \in F^{-1}(A)$$

Por hipótesis, $F^{-1}(A)$ abierto $\wedge$ $\overline{a} \in F^{-1}(A)$

$\exists B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A)$.Es decir, $\overline{s} \in B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A), s \in F^{-1}(A) \Rightarrow F(s) \in A = B_\varepsilon(F(\overline{a}))$

□

Observación: Este teorema también se cumple para cerrados.

6. Diferenciación

Definición 6.1 . F diferenciable en $\overline{a}$ si

$$\exists \text{ aplicación lineal L tal que } \frac{F(\overline{x}) - F(\overline{a}) - L(\overline{x} - ga)}{||\overline{x} - \overline{a}||} \underbrace{\rightarrow}_{\overline{x} \rightarrow \overline{a}} 0$$

$$= \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{a}} \frac{\left|\left|F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}\right|\right|}{||\overline{h}||}$$

Obsevación:

- Si existe, L es única.

Demostración. Supongamos que existen L_1, L_2.

$$0 = \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}}{||\overline{h}||}$$

.

Sumando: $0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}|| + ||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}||}{||\overline{h}||}$

Obsevación: $||A-B|| = ||A+(-B)|| \leq ||A|| + ||B||$

$$\leq \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{2\cdot \left|\left|F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a})\right|\right| + \left|\left|L_1\overline{h}\right|\right| + \left|\left|L_2\overline{h}\right|\right|}{||\overline{h}||}$$

Completar la contradicción. □

Notación: (Diferencia de F en $\overline{a}$)

$$L \equiv DF(\overline{a})$$

Proposición:

$$F \text{ diferenciable en } \overline{a} \Rightarrow F \text{ continua en } \overline{a}$$

Demostración.

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$$

Esta es la definición de diferenciable. Para que este límite sea 0, el numerador tiene que tender a 0, por lo que $F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) \to 0$ □

Obsevación: F diferenciable en $\overline{a}$.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Sabemos:

$$0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$$

En particular (tomando $h = t\overline{e_1}$)

$$\lim_{\overline{t}\to\overline{0}} \frac{a}{b} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} || \underbrace{\frac{1}{t}F(\overline{a}+t\overline{e_1}) - F(\overline{a})) - L\overline{e_1}}_{\overline{W}(t)\in\mathbb{R}^N} ||$$

Tomando la componente k-esima

$$0 = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_K(a+te_i) - F_k(a)}{t} - L_{ki})$$

$$L_{ki} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_k(a+te_i) - F_k(a)}{t}) = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\overline{a})$$

Nomenclatura: Aproximación lineal $\sim$ Diferencial.

Matriz jacobiana $\sim$ Jacobiana.

Teorema 6.2. *Matriz asociada a $DF(\overline{a}) \equiv$ Matriz de las derivadas parciales de F.*

$$DF(\overline{a}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.3. *F diferencialbe en $\overline{a} \Rightarrow \exists \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\overline{a}), i = 1, 2, ..., N \wedge k = 1, 2, ..., M$*

El contraejemplo para demostrar $\Leftarrow$ es el mismo que en los límites a lo largo de rectas.

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y^2} & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Comentarios sobre notación:

- $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Utilizamos notación vectorial en vez de matricial (porque tendríamos una matriz columna).
  Ejemplo: la velocidad (en un instante de tiempo, un punto en el espacio).
- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ (función escalar):

  COMPLETAR Se suele llamar vector gradiente.
-

6.1. Regla de la cadena:

Derivada de una composición:
COMPLETAR DIBUJITO

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$.

$G : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^K$.

$H = G \circ F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$.

$\overline{x} \in \mathbb{R}^N, \overline{y} \in \mathbb{R}^M$

F diferenciable en $\overline{a}$, G diferenciable en $F(\overline{a})$. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en $\overline{a}$. Además la expresión matricial es:

$\underbrace{DH(\overline{a})}_{K\times N} = \underbrace{DG(F(\overline{a}))}_{K\times M} \cdot \underbrace{DF(\overline{a})}_{M\times N}$

Obsevación:

Notación de Leibniz: Para calcular 1 único elemento de la matriz diferencial (el de la fila i, columna j):

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Con cuidado de $\dfrac{\partial G_i}{\partial y_k}$ evaluado en $F(\overline{a})$ y $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$ evaluado en $\overline{a}$.

Aplicaciones y ejemplos:

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

  $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$

  Sea $g \equiv F \circ \sigma \equiv$ Comportamiento de F a lo largo de la curva $\sigma, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  $$g'(t_0) = DF(\sigma(t_0))D\sigma(t_0) = \underbrace{\quad\cdots\quad}_{\text{Notación matricial}} = \underbrace{\langle \nabla F(\sigma(t_0)) \rangle \sigma'(t_0)}_{\text{Notación vectorial}}$$

- $\sigma(t) = t\overline{b} + (1-t)\overline{a}$

  $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

  $F \circ \sigma(t) \equiv g(t)$

  COMPLETAR

6.2. Extensiones del teorema del Valor Medio

- Original: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

  $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ para algún $c \in [a, b]$

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

  $\sigma(t) = t(\overline{b}) + (1-t)\overline{a}$

  $g = F \circ \sigma \; g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $F(\overline{b} - \overline{a}) = g(1) - g(0) = g'(s)$ para algún $s \in [0, 1]$

  Peeeeero...

  $$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

  $$F(\overline{b}) - F(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(\overline{c_1}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \\ \langle \nabla F_2(\overline{c_2}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \end{pmatrix}$$

  Tenemos 2 c distintos, uno para cada f, por lo que este teorema pierde sentido.

- Versión para funciones matriciales:

Teorema 6.4 (Extensión del valor medio). *Sea $f \in C^1$ en un abierto que contenga* $[a, b]$.

$$||F(\overline{b}-\overline{a})|| \leq |||DF(\overline{c})||| \cdot ||\overline{b}-\overline{a}||$$

Siendo c un punto del segmento que une $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en el que $|||DF(tb+(1-t)a)|||$ alcanza su máximo.

Demostración. i)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\overline{b} - f(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds \text{ con } g(t) = f(tb + (1-t)a)$$

ii)

$$h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(\overline{b} - h(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = \int_0^1 \langle \nabla h(s\overline{a} + (1-s)\overline{b}), (\overline{b} - \overline{a}) \rangle$$

$$g(t) = h(tb + (1-t)a)$$

iii)

$$\overline{G} = (G_1, ..., G_M), G_i = \int_0^1 H_i(t)dt$$

Con $\overline{H} = (H_1(t), ..., H_M(t))$

$$||\overline{G}||^2 = \langle \overline{G}, \overline{G} \rangle = \sum_{i=1}^{M} \left(\int_0^1 H_i(t)dt \right) \underbrace{\left(\int_0^1 H_i(s)ds \right)}_{G_i}$$

$$||\overline{G}||^2 = \int_0^1 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{M} G_i H_i(t)}_{\langle \overline{G}, \overline{H}(t) \rangle \leq ||\overline{G}|| \cdot ||\overline{H}||} \right) dt$$

Conclusión:

$$||\overline{G}||^2 \leq \int_0^1 ||G|| \cdot ||H(t)||dt$$

iv) $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

$F_i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underbrace{F_i(\overline{b}) - F_i(\overline{a})}_{G_i} = \int_0^1 \underbrace{\langle \nabla F_i(s\overline{b} + (1-s)\overline{a}), (\overline{b} - \overline{a}) \rangle}_{H_i(t)} dt$

Por el apartado iii tenemos que:

$$\overline{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(tb+(1-t)a), b-a \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla F_M(tb+(1-t)a), b-a \rangle \end{pmatrix} = (DF(...)) \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_M - a_M \end{pmatrix}$$

$$||H(t)|| = ||DF(...)(\overline{b}-\overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\overline{b}-\overline{a}||$$

$$||F(\overline{b}) - F(\overline{a})|| \leq \int_0^1 ||\nabla DF_i(tb+(1-t)a), b-a||dt$$

Aplicando: $A\overline{v} \leq |||A||| \cdot ||\overline{v}||$

$$||F(\overline{b}) - F(\overline{a})|| \leq \int_0^1 |||DF(*)||| \cdot ||\overline{b}-\overline{a}||dt$$

$$= ||\overline{b}-\overline{a}|| \int_0^1 |||DF(tb+(1-t)a)|||dt \leq |||DF(\overline{c})||| \cdot ||\overline{b}-\overline{a}||$$

Siendo c un punto del segmento que une $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en el que $|||DF(tb+(1-t)a)|||$ alcanza su máximo.

Conclusión:

$$||F(\overline{b}) - F(\overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\overline{b}-\overline{a}||$$

□

Aplicación:
$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M, F \in C^1$, definida en un conjunto abierto y conexo.

$DF(\overline{x}) \equiv 0, \forall \Rightarrow F \equiv$ cte.

6.3. Derivada direccional:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ (escalar)

$\overline{a} \sim$ Recta que pasa por $\overline{a}$ con dirección $\overline{v}$.

$r(t) = \overline{a} + t\overline{v}$.

Obsevación: Como una recta tiene infinitos vectores directores (dependiendo de la longitud), siempre tomaremos vectores directores unitarios, con $||\overline{v}|| = 1$.

Vamos a estudiar: $g(t) = F(\overline{a} + t\overline{v}) = F \circ r(t)$.

$t \sim 0 \Leftrightarrow \overline{a} + t\overline{v} \sim \overline{a}$

Definición 6.5 **Regla de la cadena.**

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(\overline{a} + h\overline{v}) - F(\overline{a})}{h} \equiv D_{\overline{v}} F(\overline{a})$$

.

Obsevación: La existencia de $D_{\overline{v}}F(\overline{a}), \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^N$ NO garantiza que F sea derivable.

Si sabemos que F SÍ es diferenciable podemos usar la regla de la cadena obteniendo:

$D_{\overline{v}}F(\overline{a}) = g'(0) = D(F \circ r)(0) = ... = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{v} \rangle$

Aplicación:

- Dirección de máximo crecimiento:

  $D_{\overline{v}}F(\overline{a}) = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{v} \rangle \leq ||\nabla F(\overline{a})|| \cdot \underbrace{||\overline{v}||}_{\equiv 1}$

  Conclusión:

  $$D_{\overline{v}}F(\overline{a}) \leq ||\nabla F(\overline{a})||$$
  $$\uparrow$$
  $$\text{El } = \text{se obtiene cuando } \overline{v} = \frac{\nabla F(\overline{a})}{||\nabla F(\overline{a})||}.$$

- Vector perpendicular a los conjuntos de nivel

  $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

  $S = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; F(\overline{x}) = 0\}$ (Conjunto de nivel)

  $\overline{a} \in S$

  Entonces: $\nabla F(\overline{a}) \perp S$

Teorema 6.6 (Derivadas parciales continuas implican función diferenciable). *Si existen todas las derivadas parciales y son continuas* $\Rightarrow$ F *diferenciable en* $\overline{a}$.

Contraejemplo de la no reciprocidad: $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Demostración. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\left| F(a+a, b+k) - F(a,b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)k \right|}{||(h,k)||} \longrightarrow 0?$$

Sumamos y restamos al numerador $F(a, b+k)$.

$$\frac{\left|\left(\underbrace{F(a+h,b+k)-F(a,b+k)}_{\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h},b+k)\text{ para algún }0\leq\tilde{h}\leq h}-\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)h\right)+\left(\underbrace{F(a,b+k)-F(a,b)}_{\frac{\partial F}{\partial x}(a+h,b+\tilde{k})\text{ si }0\leq\tilde{k}\leq k}-\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)k\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0\leq\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h},b+k)-\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right|\cdot|h|+\left|\frac{\partial F}{\partial y}(a,b+\tilde{k})-\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right|\cdot|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=(*)$$

Aquí es donde aplicamos que las derivadas parciales son continuas: como h y k son pequeños (por lo tanto $\tilde{h}<h$ también lo será) los puntos (a,b) y $(a{+}h,b{+}k)$ también están cerca, por lo que sus imágenes por la derivada estarán también cerca, es decir, $|\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)-\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h},b+k)|\to 0$ y lo mismo con la otra.

Conclusión:

$$0\leq(*)\leq\varepsilon\underset{\substack{\uparrow}}{\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}\leq C\varepsilon\to 0\text{ cuando }\overline{h},\overline{k}\to\overline{0}$$

El numerdador es la norma 1 y el denominador la norma 2.

En $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes.

□

6.4. Derivadas iteradas:

Notación: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

Teorema 6.7 (Euler (orden de las derivadas)). *Si las derivadas segundas son continuas, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

6.5. Máximos y mínimos

Definición 6.8 **Máximo/mínimo local**. Sea $f:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$. Diremos que $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^N$ es un punto de máximo local si $\exists\varepsilon>0\ /\ F(\vec{x}_0)\geq F(\vec{x})\ \ \forall\vec{x}\in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$

La definición es análoga para el mínimo

Observación: Por las propiedades del gradiente, si F es diferenciable y $\vec{x}_0$ es un máximo o mínimo local, entonces debe ser $\nabla F(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definición 6.9 **Punto crítico**. $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ es un punto crítico de F si y sólo si $\nabla F(\vec{y}) = \vec{0}$

No todos los puntos críticos son máximos o mínimos, así que tenemos que clasificarlos de alguna forma. Para ello, usamos el polinomio de Taylor de orden 2, de forma que

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \langle \nabla F(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)\rangle +$$
$$\frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon$$

Simplificando nos queda que:

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_o)^T + \varepsilon$$

Dado que el gradiente es 0, el punto clave es el signo de $\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_o)^T$. Para ello, usamos las siguientes definiciones del álgebra lineal.

6.5.1. Resultados de álgebra lineal

Definición 6.10 **Matriz semidefinida y definida positiva y negativa**.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \geq 0 \ \ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida positiva si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T > 0 \ \ \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T \leq 0 \ \ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida negativa si y sólo si $\vec{v} A \vec{v}^T < 0 \ \ \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 6.11. *Si una matriz es simétrica, existe una base en la cual la matriz es diagonal.*

Sea A una matriz $N \times N$. Entonces diremos que un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$. Dado que podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, entonces tenemos que $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ si y sólo si

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Es decir, la autorrecta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una solución no trivial del sistema anterior. Sin embargo, para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ debe ser 0.

Por lo tanto, los autovalores son las soluciones de la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad.

Teorema 6.12. *Si un conjunto de autovectores es una base, entonces la matriz A expresada respecto a esa base pasa a ser diagonal, y los elementos de la diagonal son los autovalores.*

Si dos autovalores son distintos, los autovectores asociados son distintos.

Si A es simétrica, entonces el conjunto de autovectores es una base.

Volvemos ahora al cálculo.

Teorema 6.13 (Clasificación de puntos críticos). *Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$ (con dos derivadas continuas), y sea $\vec{x}_0$ un punto crítico. Entonces*

1. *Si* ***todos*** *los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son* ***mayores que cero****, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida positiva y $\vec{x}_0$ es un* ***mínimo local****.*
2. *Si* ***todos*** *los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son* ***menores que cero****, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida negativa y $\vec{x}_0$ es un* ***máximo local****.*
3. *Si* ***algunos*** *autovalores son* ***mayores que cero*** *y otros son* ***menores que cero****, entonces $\vec{x}_0$ es un* ***punto de silla.***
4. *Si algún autovalor* ***es 0****, y el resto son mayores o menores que cero, entonces $\vec{x}_0$ es un* ***punto crítico degenerado****.*

6.5.2. Ejemplos

Tomamos $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Obtenemos los puntos críticos, es decir, los puntos en los que $\nabla F(x,y) = (0,0)$. El punto resultante es $(0,0)$. Estudiamos el tipo de punto crítico. Para ello, calculamos la matriz hessiana en ese punto:

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Los autovalores son las soluciones de

$$0 = det\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

Por lo tanto, λ es 3 o 1. Dado que ambos autovalores son mayores que 0, entonces D^2F es definida positiva y $(0,0)$ es un mínimo local.

6.6. Máximos y mínimos absolutos

Definición 6.14 **Máximo y mínimo absoluto**. Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. $\vec{x}_m$ es un máximo absoluto de F en A si y sólo si $F(\vec{x}_m) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in A$. La definición es análoga para el mínimo.

Teorema 6.15 (Teorema de compacidad). *Tenemos un conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto (cerrado y acotado). Supongamos la sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Entonces podemos encontrar al menos una subsucesión $\{\vec{x}_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\vec{x}_{n_j}\}$ es convergente.*

Demostración. Trabajamos en dimensión 2, pero la demostración es análoga. Como K es compacto, podemos encontrar un cuadrado Q_0 de lado L que encierre completamente a K. Divido Q_0 en 2^2 cuadrados de lado $L/2$. En alguno de ellos hay infinitos términos de la sucesión: lo llamamos Q_1 y me quedo con uno de los términos de la sucesión, al que llamamos x_1. Volvemos a dividir este cuadrado en cuatro cuadrados, elegimos uno que tenga infinitos términos de la sucesión y seleccionamos un elemento de la sucesión dentro al que llamamos x_2. Repetimos esto muchas veces, de forma que cada término x_n está encerrado en el cuadrado Q_n de lado $\frac{L}{2^n}$.

Si $k, l > n$, entonces es claro que $||\vec{x}_k - \vec{x}_l||$ es menor o igual que la diagonal de Q_n, que es $\frac{L}{2^n}\sqrt{2}$, que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por el criterio de Cauchy, entonces esta sucesión es convergente, y como K es cerrado el límite pertence a K. □

Teorema 6.16. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en K. Entonces, F alcanza su máximo y mínimo absolutos en K.*

Demostración.

Como F es acotada, existe $\alpha = \sup\{F(x) \ / \ x \in K\}$. Existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ tal que si $n \to \infty$ entonces $F(x_n) \to \alpha$. Sabemos que existe $\{x_n\} \subset K$, por lo que existe una subsucesión$\{x_{n_j}\}$ convergente tal que $x_{n_j} \to x_0 \in K$

Como F es continua, $F(x_{n_k}) \to F(x_0)$, es decir $F(x_{n_j}) \to \alpha$, por lo tanto el supremo es el máximo. □

6.6.1. Ejemplos

La función a estudiar es $F(x,y) = x^2 - y^2$ en la bola $\omega = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$. Es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ porque es un poliniomio.

Calculamos el diferencial y vemos qué ocurre cuando es 0

$$\nabla F = (2x, -2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Operando, vemos que el punto $(0,0)$ es un punto de silla. Ahora sólo queda ver el comportamiento en la frontera C, cuando $x^2 + y^2 = 1$. F restringida a C quedaría de la siguiente forma:

$$F(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

El coseno tiene máximos cuando $t = 0$ y $t = \pi$, y mínimos cuando $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$. Es decir, tiene máximos absolutos en los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$ y mínimos absolutos en $(0,-1)$, $(0,1)$.

Teorema 6.17 (Multiplicadores de Lagrange). *Tenemos una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y una restricción $G(x_1, \cdots, x_n) = k$, resolvemos el siguiente sistema:*

$$\begin{gathered} \nabla F = \lambda \nabla G \\ G = k \end{gathered}$$

6.7. Desarrollo de Taylor

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}.F \in C^k$[5].

Queremos desarrolar F alrededor de $\overline{a} \in \mathbb{R}^N$.

Dimensión 1) $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{g^{k)}(0)}{k!}x^k + \underbrace{error}_{\frac{g^{k+1)}(s)}{(k+1)!}x^{(k+1)}}$

$F(\overline{a} + \overline{h}) = F(\overline{a}) + ...$

Más dimensiones)

Tomamos $g(t) \equiv F(t(\overline{a} + \overline{h}) + (1-t)\overline{a})$. Así hemos reducido el cálculo a dimensión 1.

$$g'(t) = \langle \nabla F(a + th), h \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + th) \cdot h_i$$

$$g'(0) = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{h} \rangle$$

[5] F es k veces derivable

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{a}+\overline{h})\cdot h_j\right)h_i = \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a}+t\overline{h})h_i h_j$$

Iterando:

$$\frac{g^{s)}(0)}{s!} = \frac{1}{s!}\sum_{i_1,i_2,...,i_s=1}^{N}\frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}}$$

El hesiano aparece en:

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{a}+\overline{h})\cdot h_j\right)h_i = \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a}+t\overline{h})h_i h_j = ... =$$

$$\frac{1}{2}(h_1,...,h_N)\cdot\left(D^2F(\overline{a})\right)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_N\end{pmatrix}$$

Desarollo de Taylor en general:

$$F(\overline{a}+\overline{h}) = F(\overline{a}) + \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{h}\rangle + \frac{1}{2}\overline{h}^T D^2F(\overline{a})\overline{h} + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{N}\frac{\partial^3 F}{\partial x_k, \partial x_j, \partial x_i}(\overline{a})h_k h_j h_i +$$

Teorema 6.18.

$$\frac{|F(\overline{a}+\overline{h}-P_{s,a}(\overline{h})|}{||\overline{h}||^s} \to 0, \text{ Cuando } \overline{h}\to 0$$

Además $P_{s,a}(\overline{h}$ es el único polinomio de orden S que hace que el límite sea 0).

Con estos conocimientos son posibles de realizar todos los ejercicios de la hoja de problemas 2.

7. Teoremas de la función implícita y la función inversa

En el mundo lineal tenemos:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$L(\overline{x}) = A\overline{x}, A =$ matriz NxN

Si queremos resolver el sistema: $A\overline{x} = \overline{y}$. Este sistema tiene solución $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$ (porque $\exists A^{-1}$).

$F : \mathbb{R}^{N+M} \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$L(\overline{x}) = A\overline{x}, A =$ matriz $Nx(N+M)$

Para resolver el sistema $A\overline{x} = \overline{y}$. Se resolvía parametrizando M variables.

En el mundo NO lineal:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

Suponemos que $\exists F(\overline{a}) = F(\overline{b})$

$$\left.\begin{array}{c} F(x_1, \ldots, x_N) = y_1 \\ F(x_1, \ldots, x_N) = y_2 \\ \vdots \\ F(x_1, \cdots, x_N) = y_N \end{array}\right\} F(\overline{x}) = \overline{y}$$

Vamos a intentar resolver este problema utilizando Taylor para aproximar al orden lineal, pero tenemos que pagar un precio: para que taylor funcione tenemos que trabajar cerca del punto. Esto significa que el resultado va a ser local.

Teorema 7.1 (Teorema de la aplicación contractiva). *Sea* $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *o*
Sea $F : C \longrightarrow C, C \in \mathbb{R}^N$*, cerrado, o*
Sea $F : K \longrightarrow K, K \in \mathbb{R}^N$*, compacto.*

Supongamos que existe $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$||F(x) - F(y)|| \leq \alpha \, ||x - y|| \, \forall x, y \in \begin{cases} \mathbb{R}^N \\ C \\ K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in \begin{cases} \mathbb{R}^N \\ C \\ K \end{cases} \text{ tal que } F(x_0) = x_0 \text{ (Punto fijo)}$$

Demostración. Primero llevamos los casos de C y $\mathbb{R}^n$ a un conjunto compacto K. Partimos de

$$||F(\overline{x}) - F(\overline{a})|| \leq \alpha \, ||\overline{x} - \overline{a}|| \tag{7.0.1}$$

y veamos qué ocurre para un vector general $\overline{x}$:

$$||F(\overline{x})|| = ||(F(\overline{x}) - F(\overline{a}) + F(\overline{a})|| \leq ||F(\overline{x}) - F(\overline{a})|| + ||F(\overline{a})||$$

Aplicando (7.0.1) tenemos que

$$||F(\overline{x})|| \leq \alpha \, ||\overline{x} - \overline{a}|| + ||F(\overline{a})||$$

Si tomamos $\overline{a} = 0$ (en el caso $0 \notin C$ solo haría falta una pequeña traslación), y suponemos $||x|| < R$, tenemos entonces que

$$||F(\overline{x})|| \leq \alpha R + \left|\left|F(\overline{0})\right|\right| < R$$

Es decir, F toma un compacto y lo lleva en sí mismo: $F : B_R(0) \longrightarrow B_R(0)$. Podemos seguir la demostración ahora suponiendo que estamos trabajando siempre sobre un compacto.

El siguiente paso es llevar a cabo un **proceso iterativo**. Tenemos

$$F : K \longrightarrow K$$

con $K \subset \mathbb{R}^N$ conjunto compacto. Definimos entonces la sucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, construido de forma iterativa con $x_n = F(x_{n-1})$. Vamos a demostrar que esa sucesión es de Cauchy, lo que implicaría que es convergente.

Para ello, dado $\varepsilon > 0$ hay que hallar n_0 tal que si $n, m > n_0$ entonces $||x_n - x_m|| < \varepsilon$. Pongamos, para facilitar la demostración, que $n > m$.

Entonces, sumamos y restamos a ese módulo cada uno de los x_i entre n y m:

$$||x_n - x_m|| = ||x_n \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_{m+1} - x_m|| \leq \sum_{i=m}^{n} ||x_i - x_{i-1}|| \tag{7.0.2}$$

Operamos ahora con cada uno de esos sumandos. Por ejemplo, con $i = n$, vemos que

$$\begin{aligned} ||x_n - x_{n-1}|| = ||F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})|| \leq \alpha\, ||x_{n-1} - x_{n-2}|| = \\ = \alpha\, ||F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})|| \leq \alpha^2\, ||x_{n-2} - x_{n-3}|| \end{aligned}$$

Si seguimos operando, llegaremos a que $||x_n - x_{n-1}|| \leq \alpha^{n-2}\, ||x_2 - x_1||$. Generalizando, tenemos que

$$||x_i - x_{i-1}|| \leq \alpha^{i-2}\, ||x_2 - x_1||$$

Aplicando esta fórmula en (7.0.2)

$$||x_n - x_m|| \leq \left(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} + \cdots + \alpha^{m-1}\right) ||x_2 - x_1||$$

Esa suma de α's es la suma de una sucesión geométrica de razón α. Por lo tanto, la podemos simplificar como

$$\sum_{k=m-1}^{n-2} \alpha^k = \alpha^{m-1}\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha}$$

, y la ecuación nos queda de la forma

$$\frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha}\, ||x_2 - x_1||$$

. Dado que $\dfrac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha} \xrightarrow[n_0 \to \infty]{} 0$, tendremos que tomando un n_0 suficientemente grande se cumple que

$$\frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha}\,||x_2 - x_1|| < \varepsilon$$

para un ε arbitrariamente pequeño. Con esto **demostramos que la sucesión de x_n es de Cauchy** y por lo tanto es convergente a un cierto límite x_0.

Tal y como habíamos construido la sucesión, tenemos que

$$x_n = F(x_{n-1}) \tag{7.0.3}$$

x_n converge a x_0 cuando $n \to \infty$. De la misma forma, como x_{n-1} también converge a x_0, está claro que $F(x_{n-1})$ convergerá a $F(x_0)$. Sustituyendo estos dos resultados en (7.0.3), tenemos que

$$x_0 = F(x_0)$$

Hemos demostrado por lo tanto que el límite de esa sucesión que hemos construido **es un punto fijo** de la función.

Nos queda **demostrar ahora que ese punto es único**, y lo haremos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos puntos fijos:

$$\begin{gathered} a = F(a) \\ b = F(b) \end{gathered}$$

Entonces tendríamos que

$$||a-b|| = ||F(a) - F(b)|| \leq \alpha\,||a-b||$$

pero como α es menor estricto que 1, entonces tendríamos que

$$||a-b|| < ||a-b||$$

, lo que es una contradicción. $\square$

El teorema de la aplicación contractiva nos sirve, por ejemplo, para comprobar si hay una solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

$$\left.\begin{aligned} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Podemos definir:

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$
$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds \equiv T(y_1)$
$\ldots$
$y_n = T(y_{n-1}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$

$T(y) = y?$
Aquí es donde entraría la diferencia entre trabajar en $\mathbb{R}^N$ y un espacio de funciones.

Ejercicio propuesto: Aplicar este argumento a iterativo

$$\left.\begin{array}{r} y' = y \\ y(0) = 1 \equiv y_0 \end{array}\right\}$$

8. Ejercicios

8.1. Hoja 1

$\overline{A} = x \in \mathbb{R}^N; \forall V_x \diagup V_x \cup A \neq \emptyset$, siendo V_x un entorno abierto de x. $\overline{A} = A \cap$

Teorema 8.1. *$A \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado $\Leftrightarrow \#1 \subset (A) \subset A$*

Demostración.

$$A\text{es cerrado} \Rightarrow A^c \text{ es abierto} \Rightarrow$$
$$\forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0 \diagup B(x,\varepsilon) \subset A^c \Rightarrow$$
$$A \cap B(x,\varepsilon) = \ \Rightarrow x \nexists \#1 \subset (()A)$$

□

Falta la recíproca.

a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$$

Es cerrado, porque $= [-1, 0]$ Demostración: (hay que demostrar las inclusiones $\subseteq$ y $\supseteq$)

b) No es ni cerrado ni abierto.

Obsevación: $\mathbb{R}$ es el cierre de $\mathbb{Q}$.

c)

8.2. Hoja 2

8.3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ Continuidad:

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+7y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \leq |x| \to 0 \Rightarrow$$

Continua en 0.

Derivadas parciales en $(0,0)$

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} F(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}) = \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} F(\frac{h^3/h^2}{h}) = 1$$

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} F(\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}) = \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} F(\frac{0}{0+7h^2}) = 0$$

WTF DONDE VA¿¿¿¿¿¿

9. Convergencia y continuidad

Al tener definida una norma podemos definir convergencia y continuidad:

- *Convergencia:* $\overline{x_n} \to \overline{x} \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 tqn > n_0 \Rightarrow |||\overline{x} - \overline{x_n}||| < \varepsilon$.
- *Continuidad:* Sea $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $||\overline{x} - \overline{a}||_a < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{a})||_b < \varepsilon$

Observación: Es interensante ver que se puede hablar de continuidad tomando una norma en $\mathbb{R}^N$ y otra distinta en $\mathbb{R}^M$ sin por ello variar la definición de continuidad. Más adelante veremos que en $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes y qué significa que las normas sean equivalentes. (Esto no sucederá en espacios de dimensión infinita) ?????????????????

Índice alfabético