Sea $X$ una v.a. con distribución exponencial de parámetro $\theta$. Calcular la función de distribución, la de densidad y la función cuantílica de la v.a. $Y = \theta X^{1/3}$.

**Solución:** La función de densidad de $X$ es $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$, si $x > 0$. Por tanto, la función de distribución de $X$ es

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\theta x}.$$

Función de distribución de $Y$:

$$G_\theta(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\left\{\theta X^{1/3} \leq y\right\} = \mathbb{P}\{X \leq \left(\frac{y}{\theta}\right)^3\} = F\left(\left(\frac{y}{\theta}\right)^3\right) = 1 - e^{-y^3/\theta^2}$$

Función de densidad de $Y$:

$$g_\theta(y) = G'_\theta(y) = \frac{3}{\theta^2} y^2 e^{-y^3/\theta^2}$$

Función cuantílica de $Y$: Por definición de función cuantílica, $G_\theta^{-1}(p) = \text{ínf}\{y : G_\theta(y) \geq p\}$. Como la distribución de $Y$ es absolutamente continua y la función de distribución $G_\theta$ es estrictamente creciente, en realidad $G_\theta^{-1}$ es simplemente la inversa de la función de distribución, es decir, $G_\theta^{-1}(p)$ es el punto $y$ tal que $G_\theta(y) = p$. Por tanto,

$$G_\theta^{-1}(p) = y \Leftrightarrow p = G_\theta(y) = 1 - e^{-y^3/\theta^2}.$$

Despejando $y$, obtenemos

$$y = G_\theta^{-1}(p) = (-\theta^2 \log(1-p))^{1/3}.$$