Teorema de Liouville

Rodrigo Vargas

1. Sea $f(z)$ entera con $f(1) = 2f(0)$. Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existe z con $|f(z)| < \varepsilon$.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica no constante entonces su recorrido debe ser denso en $\mathbb{C}$.

3. Suponga que f es una función entera que tiene periodos 1 y i es decir

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+i) &= f(z) \end{aligned}$$

   cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, muestre que f debe ser constante.

4. Sea g una función entera tal que $5 \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ¿qué puede decir de tal g?

5. ¿Si f es entera y acotada en el eje real tiene que ser constante?

6. ¿Puede existir una función biyectiva y holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con inversa holomorfa?

7. Sea f entera con $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ muestre que f es constante.

8. Si $f(z)$ es entera, $|f''(z) - 3| \geq 0,001$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$. ¿Cuánto vale f(i)?

9. Si $f(z)$ es entera y $f(z) \neq t^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, pruebe que f es constante.

10. Sean f y g funciones enteras tales que

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   ¿Qué conclusión se puede obtener?

11. Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones enteras tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} f(z) \leq k \operatorname{Re} g(z)$ para alguna constante real k. Demuestre que existen constantes a y b tal que

$$f(z) = ag(z) + b$$

1. Sea $f(z)$ entera con $f(1) = 2f(0)$. Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existe z con $|f(z)| < \varepsilon$.

   Solución: Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo z se tiene que
$$|f(z)| \geq \varepsilon.$$
   Consideremos la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por
$$g(z) = \frac{\varepsilon}{f(z)}$$
   entonces g es entera. Además, $|g(z)| \leq 1$, por el Teorema de Liouville, g es constante, lo que implica que f es constante, es decir, $f(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego
$$c = f(1) = 2f(0) = 2c \Rightarrow c = 0$$
   pero $|f(z)| \geq \varepsilon > 0$ lo cual es una contradicción.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica no constante entonces su recorrido debe ser denso en $\mathbb{C}$.

   Solución: Supongamos que $\Omega = f(\mathbb{C})$ no es denso, entonces existe una bola $B(a, r)$ tal que $f(z) \notin B(a, r)$, es decir
$$|f(z) - a| \geq r, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$
   Definamos
$$g(z) = \frac{r}{f(z) - a}$$
   entonces g es entera y $|g(z)| \leq 1$, por el teorema de Liouville, g es constante lo que implica que f es constante, lo que es una contracción.

3. Suponga que f es una función entera que tiene periodos 1 y i es decir
$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+i) &= f(z) \end{aligned}$$
   cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, muestre que f debe ser constante.

   Solución: Consideremos
$$R = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq 1\}$$

entonces para cada $z \in \mathbb{C}$ existe $w \in R$ tal que $f(z) = f(w)$. En efecto, dado $z = x + iy$ existe $w = (x - [x]) + i(y - [y])$, entonces si $[x] = n, [y] = m \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(w) &= f((x - [x]) + i(y - [y])) \\ &= f(z - \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n-veces} - \underbrace{(i + \cdots + i)}_{m-veces} = f(z) \end{aligned}$$

y obtenemos que

$$|f(z)| = |f(w)| \leq \sqrt{2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

es decir, f es acotada, por el teorema de Liouville f es constante.

4. Sea g una función entera tal que $5 \geq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ¿qué puede decir de tal g?

   Solución: Consideremos $\varphi(z) = \dfrac{5}{g(z)}$ entonces φ es entera y

   $$|\varphi(z)| = \frac{5}{|g(z)|} \leq 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   es decir, φ es acotada. Por el teorema de Liouville, φ es constante

   $$\varphi(z) = c \Rightarrow g(z) = \frac{5}{c}$$

   es decir, g es constante.

5. ¿Si f es entera y acotada en el eje real tiene que ser constante?

   Solución: Consideremos $f(z) = \sin(z)$ entonces $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y además $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero f no es constante.

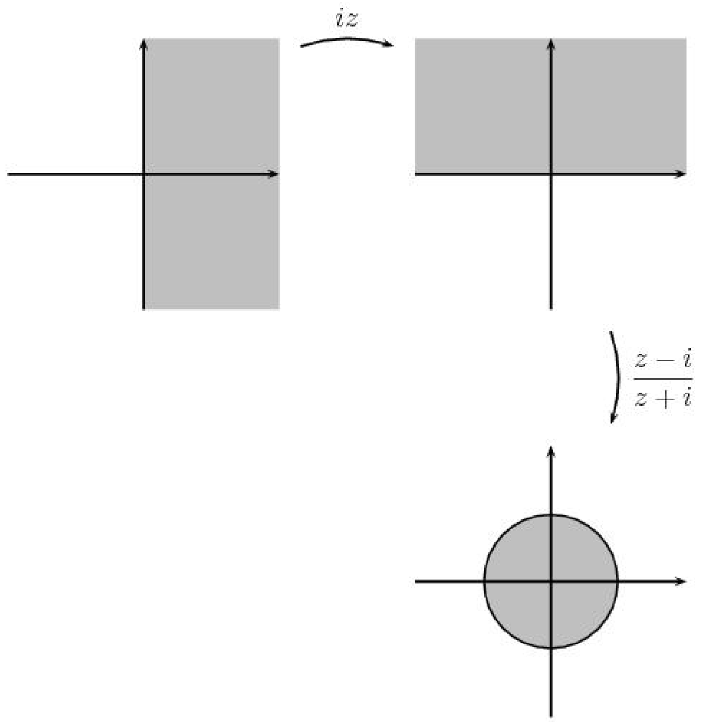
6. ¿Puede existir una función biyectiva y holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con inversa holomorfa?

   Solución: Supongamos que existe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ biyectiva analítica con inversa analítica, entonces $g = f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es entera y además $|g(z)| \leq 1$, es decir, g es acotada. Por el teorema de Liouville, g es constante, esto es, $f^{-1}(z) = c$, para todo $z \in \mathbb{C}$, lo que contradice la biyectividad de f. Por lo tanto, no existe una tal f.

7. Sea f entera con $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ muestre que f es constante.

Solución: Consideremos las transformaciones

$$T(z) = iz, \qquad \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$



Luego, $\psi(z) = (\varphi \circ T \circ f)(z)$ es una función entera con

$$|\psi(z)| \leq 1 \Rightarrow \psi \quad \text{es acotada}$$

Por el teorema de Liouville, ψ es acotada, es decir

$$\psi(z) = c \Rightarrow (\varphi \circ T \circ f)(z) = c \Rightarrow f(z) = (T^{-1} \circ \varphi^{-1})(c) = \text{constante}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

8. Si $f(z)$ es entera, $|f''(z) - 3| \geq 0,001$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$. ¿Cuánto vale f(i)?

Solución: Consideremos

$$g(z) = \frac{0,001}{f''(z) - 3}$$

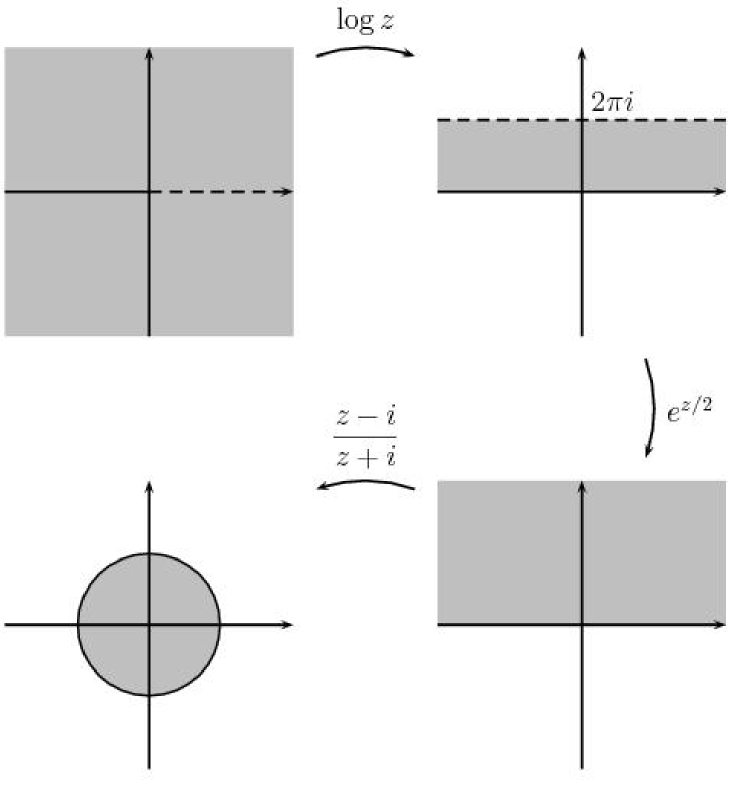
entonces g es entera, ya que f lo es y $|g(z)| \leq 1$. Por el teorema de Liouville, g es constante, lo cual implica que $f''(z)$ es constante entonces

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

Como $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$ obtenemos que $f(z) = 3z^2 - z$. Por lo tanto, $f(i) = -3 - i$.

9. Si $f(z)$ es entera y $f(z) \neq t^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, pruebe que f es constante.

   Solución: Si $f(z) \neq t^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces f mapea $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ menos el eje real positivo incluido el cero.



Entonces

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{e^{\frac{1}{2}\log f(z)} - i}{e^{\frac{1}{2}\log f(z)} + i} \right| \leq 1$$

y φ es entera, por el teorema de Liouville φ es constante lo que implica que f es constante.

10. Sean f y g funciones enteras tales que

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

¿Qué conclusión se puede obtener?

Solución: Consideremos $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

como $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, si $g(z_0) = 0$ entonces $f(z_0) = 0$ y

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) f_1(z)}{(z - z_0) g_2(z)} = \frac{f_1(z_0)}{g_2(z_0)}$$

y φ tiene singularidades removibles, luego es posible tornar φ entera, además

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

por el teorema de Liouville, φ es constante lo que implica

$$f(z) = c g(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

11. Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones enteras tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} f(z) \leq k \operatorname{Re} g(z)$ para alguna constante real k. Demuestre que existen constantes a y b tal que

$$f(z) = a g(z) + b$$

Solución: Consideremos

$$\varphi(z) = f(z) - k g(z)$$

entonces $\operatorname{Re}(\varphi(z)) = \operatorname{Re}(f(z)) - k \operatorname{Re}(g(z)) \leq 0$, luego

$$|e^{\varphi(z)}| \leq 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Además, $e^{\varphi(z)}$ es entera, por el teorema de Liouville, $e^{\varphi(z)} = c =$ constante lo que implica $\varphi(z) = \log c$ entonces

$$f(z) = k g(z) + \log c = a g(z) + b$$