Curso Análisis Matemático
Nombre y apellido:

Problema 1
Consideremos el conjunto

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 \cos^2(xy) + y^2 \sin^2(xy) \leq 3\}.$$

i) Estudiar si A es abierto, cerrado o ninguna de las dos cosas.
ii) Demostrar que $(2, 0) \notin \text{int } A$ o que $(\sqrt{2}, 0) \in \text{int A}$
iii) Demostrar que $(1, 0) \in \partial A$.

Resolución
i) Sea $F(x, y) = x^2 \cos^2(xy) + y^2 \sin^2(xy)$, F es una función contínua por ser composición, suma y producto de funciones continuas. Además $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq F(x, y) \leq 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) \in [1, 3]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in F^{-1}([1, 3])\}$.
$[1, 3]$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ ya que $[1, 3]^c = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ es abierto porque $(-\infty, 1)$ es abierto al igual que $(3, \infty)$ y la union de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
Luego, $[1, 3]$ es cerrado y F contínua, con lo cual $F^{-1}([1, 3])$ es cerrado y por lo tanto A es cerrado.
ii) $\text{int}(A) = (1, 3)$ y dado que $F(\sqrt{2}, 0) = 2 \in \text{int}(A)$ se tiene que $(\sqrt{2}, 0) \in \text{ int } A$.
Ahora, $F(2, 0) = 4 > 3$ entonces $(2, 0) \notin A$ y dado que $\text{int}(A) \subset A$ se tiene que $(2, 0) \notin \text{int}(A)$.
Del mismo modo, dado que $F(\sqrt{2}, 0) = 2$ se tiene que $(\sqrt{2}, 0) \in \text{ int}A = (1, 3)$.
iii) Sea $\epsilon > 0$, entonces $(1 - \frac{\epsilon}{2}, 0) \in B_\epsilon(1, 0)$ y además $(1, 0) \in B_\epsilon(1, 0)$.
Ahora, notemos que $F(1 - \frac{\epsilon}{2}, 0) = (1 - \frac{\epsilon}{2})^2 < 1$. Entonces $(1 - \frac{\epsilon}{2}) \notin A$ y dado que $F(1, 0) = 1$ se tiene que $(1, 0) \in A$; con lo cual, $\forall \epsilon > 0$ $B_\epsilon(1, 0) \cap A \neq \varnothing$ y $B_\epsilon(1, 0) \cap A^c \neq \varnothing$ y entonces $(1, 0) \in \partial A$.

Problema 2
(a) Si $f(x, y) = (x^2 + xy + 1, y^2 + 2)$ y $g(u, v) = (u + v, 2u, v)$ encuentre la matriz jacobiana de la composición $g \circ f$ en el punto $(1, 1)$.
(b) Dada una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, sea $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ su expresión en coordenadas polares $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$. Muestre que

$$||\nabla f(x, y)||^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\right)^2.$$

Resolución
(a)

$$D(g \circ f)(1, 1) = Dg(f(1, 1)) \cdot Df(1, 1) = Dg(3, 3) \cdot Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ya que $Df = \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$ y $Dg = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin \theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos \theta\right)^2 \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x}\cos \theta)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\sin \theta)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}\sin \theta + \frac{1}{r^2}r^2(\frac{\partial f}{\partial x})^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\
&= \quad (\frac{\partial f}{\partial x})^2\cos^2\theta + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\sin^2\theta + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\cos^2\theta + (\frac{\partial f}{\partial x})^2\sin^2\theta \\
&= \quad (\frac{\partial f}{\partial x})^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = ||\nabla f(x,y)||^2
\end{aligned}
$$

Problema 3

(a) Sea $F(x,y) = (x^2e^y + 2x + y, x^3 + x)$. Probar que F admite una inversa local alrededor de cada punto (x_0, y_0) del plano.

(b) Si H denota la inversa local de F alrededor del punto $(1,0)$, encontrar la matriz jacobiana de $DH(3,2)$.

(c) Probar que F admite una inversa global C^∞.

Resolución

Sea $F = (F_1, F_2)$ con $F_1(x,) = x^2e^y + 2x + y$ y $F_2(x,y) = x^3 + x$. F_1 y F_2 son de clase C^∞ (y en particular C^1) por ser combinaciones de polinomios y exponenciales. Además

$$
\det(J(x,y)) = \det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right) = \det\begin{pmatrix} 2xe^y + 2 & x^2e^y + 1 \\ 3x^2 + 1 & 0 \end{pmatrix} = -(x^2e^y+1)(3x^2+1) \neq 0, \forall(x,y)
$$

ya que $x^2e^y + 1 \geq 1$ y $3x^2 + 1 \geq 1$. Por lo tanto, por el Teorema de la Función Inversa, podemos afirmar que existe una inversa local de F, de clase C^1 (mas aún, esta será de clase C^∞ por ser F_1 y F_2 de clase C^∞) en un entorno de cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

La matriz jacobiana de $DF(1,0)$ es $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Luego su inversa en $F(1,0) = (3,2)$ es

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
$$

Finalmente, supongamos que $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$. Entonces $x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2$. La función x^3+x es inyectiva ya que su derivada es $3x^2+1 > 0, \forall x$ (es una función siempre creciente). Luego $x_1 = x_2$. Además $F_1(x_1, y_1) = F_2(x_2, y_2)$ entonces, dado que $x_1 = x_2$ se tiene que $x_1^2e^{y_1} + y_1 = x_1^2e^{y_2} + y_2$. La función $a^2e^y + y$ es inyectiva, ya que su derivada es $a^2e^y + 1 > 0, \forall y$. Luego $y_1 = y_2$ y entonces F es inyectiva globalmente. Por lo visto al principio F^{-1} es C^∞ localmente, luego lo es C^∞ a secas.