1. Hoja 1

Ejercicio 1: Decide de manera razonada si los siguientes conjuntos son grupos con la operación definida.

- a) $(\mathbb{R}, +)$
- b) Fijado $n \in \mathbb{Z}_{n>0}$, el conjunto de los enteros módulo n con la suma.
- c) $(C^*, \cdot)$
- d) $(U(n), \Delta)$, donde $U(n)$ denota los restos módulo n de enteros coprimos con n.
- e) Dado un conjunto no vacío X, el conjunto G de las biyecciones de X con la composición, $(G, \circ)$.Calcula el cardinal de G si X es un conjunto finito.

a)

$$\left.\begin{array}{c} \text{¿Es asociativo? Sí} \\ \text{¿Tiene elmento neutro? Sí:} \\ a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R} \\ \text{¿Existe el inverso de todo elemento? Sí:} \\ a^{-1} = -a, \forall a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Sí es un grupo.}$$

b)

$$\left.\begin{array}{c} \text{¿Es asociativo? Sí} \\ \text{¿Tiene elmento neutro? Sí:} \\ \overline{a} + \overline{n} = \overline{a}, \forall \overline{a} \in \mathbb{Z}_n \\ \text{¿Existe el inverso de todo elemento? Sí:} \\ \overline{a} + (\overline{n} - \overline{a}) = \overline{n} = e \Rightarrow a^{-1} = \overline{n} - \overline{a}, \forall a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Sí es un grupo.}$$

2. Hoja 2

2.1. Problema 4

Sea G un grupo. Demostrar que $Z(G) = \{X \;/\; X \in G (\forall Y \in G) XY = YX\}$

- $1 \in Z(G)$
- $X_1, X_2 \in G X_1 Y = Y X_1 \to X^{-1} X Y X^{-1} = X^{-1} Y X X^{-1} \Rightarrow X^{-1} Y = Y X^{-1}$, es decir, el inverso también conmuta, por lo que los inversos de $X_1, X_2 \in Z(G)$

- $X_1X_2Y = X_1YX_2 = YX_1X_2, X_1 \cdot X_2 \in Z(G)$ el producto de 2 elementos del grupo está en el centro, por lo que es cerrado por la operación.

a)

$$Z(D_3), D_3 = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2 \\ b, ab, a^2b \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} a^3 = 1 = b^2 \\ ba^j = a^{-j}b \end{Bmatrix}$$

b)

$$Z(D_4) = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2, a^3 \\ b, ab, a^2b, a^3b \\ a^4 = 1 = b^2 \\ ba = a^{-1}b \end{Bmatrix}$$

$$Z(D_4) = \left\{ x \;/\; x \in D_4 axa^{-1} = x = bxb^{-1} \right\}$$

Sin sentido... $a^ib \notin Z(D_4).(a^2 \neq 1)$

$a^i \in Z(D_4) \Leftrightarrow (a^{2i} = 1)$

$Z(D_4) = \{1, a^2\} =< a^2 >$

2.2. 5

b) $C_{D_4}(b)$. Basta con comprobar la conmutación con a^j y con a^jb siendo $j = 0, 1, 2, 3$, ya que con eso podemos ver la conmutación con todos los elementos. Se puede demostrar la conmutatividad multiplicando a derecha e iezquierda por b y b^{-1} y si nos queda $= 1$, es conmutativo.

$$\begin{cases} b(a^j)b^{-1} = a^{-j}, a^j \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \\ b(a^jb)b^{-1} = a^{-j} = a^{-j}b, a^jb \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \end{cases}$$

2.3. 9

a)

b)

$$f(x, y) = \int_a^x yg(s)ds$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo $\left(f \text{ continua } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(xy) \underbrace{\frac{\partial xy}{\partial x}}_{=y} - \underbrace{g(a) \frac{\partial a}{\partial x}}_{=0} = g(xy)y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots = g(xy)x$$

2.4. Ejercicio de examen:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $g(1) = 4$.

Sea $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{x^2 y e^z} g(t)dt$.

Demostrar que f es diferenciable y calcular $\nabla f(1, 1, 0)$.

3. Hoja 3

3.1. Problema 1:

a) Todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es cíclico.

$H \leq \mathbb{Z} \Rightarrow (\exists r \in N) \diagup H = r\mathbb{Z} = \{r_j \diagup j \in \mathbb{Z}\}$
$H = \{\ldots - 3r, -2r, -r, 0, r, 2r, 3r, \ldots\}$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$
$r = min(H \cap \mathbb{N}^*)$ Si $H = \{0\}$ ya está ($r = 0$) Supongo $H \neq \{0\}$ y entonces $H \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$
$x \in H \Rightarrow -x \in H$
$r\mathbb{Z} \subset H$
Si $x \in H$ puedo tomar $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $x = jr + k, 0 \leq k < r$ [1]

c) $r\mathbb{Z} \subset s\mathbb{Z} \iff s|r$

r, s enteros no negativos.
$r\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \Rightarrow r \in s\mathbb{Z} \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} \diagup r = sj \Rightarrow s|r$
$s|r, x \in r\mathbb{Z},$
$r = js,\ x = rk,\ x = jsk = jks\ \in s\mathbb{Z}$

b) [2]

$r\mathbb{Z} = s\mathbb{Z} \Rightarrow r|s, s|r, \Rightarrow r = s$

d) $H \leq \mathbb{Z}, 6\mathbb{Z} \subset H = r\mathbb{Z},$

$r|6,\ r = 1, 2, 3, 6$
$H = \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}$

3.2. Problema 3:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \exists f'(x) \neq 0 \Rightarrow f$ inyectiva.

Solución: aplicando el teorema del valor medio.

[1] Si a alguien le apetece completarlo que lo haga, no me ha dado tiempo...
[2] Y por qué el b está después que el c, pues no lo se porque no le entiendo hablar.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (e^x cos(y) + 2e^x sen(y), -e^x cos(y))$

$$J = \begin{pmatrix} e^x cos(y) + 2e^x sen(y) & e^x cos(y) + 2e^x sen(y) \\ -e^x cos(y) & e^x sen(y) \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$det(J) = (e^x cos(y) + 2e^x sen(y)) + e^x sen(y) + e^x cos(y) sen(y)(-e^x sen(y) + 2e^x cos(y)) =$$

$$= ... = 2e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Aunque el jacobiano sea siempre positivo, f no es inyectiva porque si tomamos $f(0,0) = (1,-1) = f(0,2\pi)$.

3.3. inventado:

Sea $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Encontrar los puntos en los que la siguiente aplicación es localmente inversible de clase C^1.

- 1) $F \in C^1$ por ser F_1, F_2 polinomios.
- 2)$det(J) > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

  En este caso:

  $$det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

- 3) Por el teorema de la funcion inversa, existe una inversa local de F, C^1 en todo entorno de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x,y) \neq (0,0)$.

  Está la posibilidad de que exista la función inversa, pero no podemos deducir nada del teorema. Para verlo, recurrimos a la definición de inyectividad, y en este caso, no es inyectiva porque es una función par.

3.4. 5

a) $f \in C^1(\mathbb{R}), f' \neq 0$. No tiene sentido...

$$\begin{cases} u(x,y) = f(x) \\ v(x,y) = -y + f(x) \end{cases}$$

Probar que tiene inversa global.

Mismos pasos que en el ejercicio anterior:

- 1) $F \in C^1$ por ser F_1, F_2 , porque $f \in C^1$.

- 2)$det(J) > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$det(J) = det\begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ f(x) + xf'(x) & -1 \end{pmatrix} = -f'(x) \neq 0 \text{ por hipótesis}$$

Como nos piden calcular las derivadas parciales de la función inversa. (La inversa de la matriz jacobiana, es la jacobiana de la matriz inversa)

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} f'(0) & 0 \\ f(0) & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que buscamos en la matriz inversa, que en este caso es ella misma.

El teorema solo nos demuestra la existencia de la inversa local (contraejemplo:3.3. Hay que ver la inyectividad para hablar de inversa global.

$$F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$
$$\text{Condición: } F(x_1,y_1) = F(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$
$$u(x_1,y_1) = u(x_2,y_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$
$$f' \text{ no se anula } \Rightarrow \text{f es inyectiva} \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$v(x_1,y_1) = v(x_2,y_2) - y_1 + x_1 f(x_1) = -y_2 + x_2 f(x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{x_1 = x_2}$$
$$y_1 = y_2$$

Hemos demostrado que F es inyectiva y por lo tanto admite inversa global.

3.5. Problema 6:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} u = 2x + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xyz \\ v = x + y + 2xy + 2x^2 \\ w = 4x + y + z + 3y^2 + 3z^2 + 6yz \end{cases}$$

- $u, v, w \in C^1$ por se surma de polinomios.

- $$\frac{\partial u}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 2$$
  $$\frac{\partial u}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$$
  $$\frac{\partial u}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(0,0) = 0$$
  $$\frac{\partial v}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 1$$
  $$\frac{\partial v}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$
  $$\frac{\partial v}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(0,0) = 0$$
  $$\frac{\partial w}{\partial x} = ... \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,0) = 4$$
  $$\frac{\partial w}{\partial y} = ... \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(0,0) = 1$$
  $$\frac{\partial w}{\partial z} = ... \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}(0,0) = 1$$

$$det(J) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ inversa local de clase } C^1 \text{ en un entonrno del origen.}$$

3.6. 8:

a)

$$det(J) = det \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -rsen(\varphi) & 0 \\ sen(\varphi) & rcos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rcos^2(\varphi) + rsen^2(\varphi) = r$$

Por tanto, por el teorema de la función inversa, existe una inversa de clase $C^1, \forall (r,h,\varphi) \Leftrightarrow r \neq 0$.

3.7. 9:

b: Calcular la inversa en (2,-2$\sqrt{3}$) Resolver:

$$\begin{cases} 2 = rcos(\varphi) \\ -2\sqrt{3} = rsen(\varphi) \end{cases}$$

Hay que hallar la inversa de:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

3.8. 13

$$det(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$$

Esto es aplicando la primera ecuación de Cauchy-Riemman. Obteniendo una condición

Aplicando la otra condición en el jacobiano llegamos a $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \neq (0,0)$

c) Queremos ver que $g(x,y) = (f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2, 2f_1(x,y)f_2(x,y))$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemman. Facilito.