HOJA DE EJERCICIOS 4
Análisis Matemático.
CURSO 2012-2013.

Problema 1. Si $M, N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ son subvariedades n dimensionales arbitrarias, ¿es siempre $M \cup N$ una subvariedad? ¿Y $M \cap N$?

Problema 2. Estudiar si el conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x\,y = 0\,,\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ z \neq 0, \pm 1\}$$

es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente M .

Problema 3. Demostrar que $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ no es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^2$.

Problema 4. Representar gráficamente el conjunto

$$C = \{\big(\cos t,\ \operatorname{sen} t, t^2\,(2\pi - t)^2\big) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

y probar que es una subvariedad de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Hallar los espacios tangente y normal a C en el punto $(1,0,0)$.

Problema 5. Considérense las subvariedades de dimensión 1, C_1 y C_2 en $\mathbb{R}^3$ determinadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son subvariedades de dimensión 1.

c) Hallar la recta tangente a C_1 en el punto $(1/\sqrt{14}\,, 2/\sqrt{14}\,, -3/\sqrt{14})$. Hallar la ecuación del plano normal a C_2 en el punto $((3+\sqrt{5})/2, (3+\sqrt{5})/4, -(5+3\sqrt{5})/4)$.

d) Calcular parametrizaciones locales de C_1 y de C_2 . *Indicación:* Utilizar coordenadas esféricas en C_1 y cilíndricas en C_2 .

Problema 6. *a)* Hallar el hiperplano tangente a la gráfica G de la función

$$f(x,y,z) = e^y\,\cos z + e^z\,\cos x + e^x\,\cos y$$

en el punto de G correspondiente a $x = y = z = 0$.

b) Estudiar si

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 3\}$$

define, localmente en $\mathbf{p} = (0,0,0)$, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar el plano tangente a M en $\mathbf{p}$. Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

Problema 7. Sea una parametrización $\mathbf{X}$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{X}(0,0) = (x_0,y_0,z_0)$, y denotemos por $(a_{ij})_{i=1,2,3,j=1,2}$ la matriz de $D\mathbf{X}(0,0)$. Demostrar que la recta normal a S en (x_0,y_0,z_0) viene dada por

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}\,.$$

Problema 8. Sea

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2+x_2^2 = 1\,,\ x_3^2+x_4^2 = 1\}$$

Estudiar si M es una subvariedad bidimensional de $\mathbb{R}^4$. Hallar una parametrización de M en un entorno de $(1,0,0,-1)$. Hallar el espacio tangente a M en $(0,1,1,0)$ exhibiendo una de sus bases.

Problema 9. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ la curva definida por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ x^2 - 3\,z^2 + t^2 = 2 \\ 4\,x^2 - y^2 - z^2 - 2\,t^2 = -6 \end{cases}$$

Hallar los puntos de Γ en los que $(2, -16, 4, 5)$ es vector tangente.

Problema 10. Considérese la superficie esférica $\mathbb{S}^2$ descrita mediante la parametrización local

$$\mathbf{X}(u,v) = \Big(\frac{2\,u}{1+u^2+v^2}, \frac{2\,v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\Big)$$

dada por la proyección estereográfica (que proyecta cada punto de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en $\mathbb{S}^2$ por medio de la recta que lo une con el polo norte $N = (0,0,1)$).

a) Calcular la matriz diferencial, y comprobar que $||\mathbf{X}(u,v)|| = 1$ en todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. ¿Hay algún punto (a,b,c) en la esfera de $\mathbb{R}^3$ que no es la imagen de ningún $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mediante $\mathbf{X}$?
b) Sea Γ la curva en $\mathbb{S}^2$ obtenida mediante

$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u,v) \qquad \text{cuando} \quad 3\,v = u - 2\,,\ u \in \mathbb{R}\,.$$

Representar gráficamente Γ en $\mathbb{S}^2$. *Indicación:* Intentar visualizar la proyección estereográfica.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\big(\frac{10}{27}, \frac{2}{27}, \frac{25}{27}\big)$.

Problema 11. *a)* Demostrar que

$$\mathbb{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$

es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente $\mathbb{H}$.

b) Demostrar que la función

$$\mathbf{X}(u,v) = \big(v\,\cos u, v\ \operatorname{sen}\,u, u\big)\,, \qquad \text{donde} \quad u \in \mathbb{R}\,,\ v > 0\,,$$

permite definir parametrizaciones locales de una superficie regular H en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente H.

Problema 12. Hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = x - 2\,y + 2\,z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 13. Hallar los puntos de la curva determinada por

$$\begin{cases} x^2 + x\,y + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen.

Problema 14. *a)* Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3\,\log z$ en la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 5\,r^2$ en la que $x > 0, y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$a\,b\,c^3 \le 27\,\Big(\frac{a+b+c}{5}\Big)^5\,.$$

b) Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica

$$\sqrt[n]{a_1\,a_2 \cdots\, a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{para } a_i \ge 0.$$

Indicación: Escríbase $a_i = x_i^2$ y considérese sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

Problema 15. *a)* Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2\,x + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 \geq x\}\,.$$

b) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = 2\,x^2 + y^2 + z^2 - x\,y$ sobre el conjunto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}\,.$$

Problema 16. Calcular el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}\,,$$

siendo $a, b, c > 0$.

Problema 17. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a\,b\,(a+b) = 1$. Calcular el volumen máximo de los sólidos que tienen como base el triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$ y cuyas secciones al cortar por planos perpendiculares al plano XY y paralelos al plano YZ son triángulos isósceles de altura 4.

Problema 18. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar una fórmula para la distancia de un punto (a,b,c) a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

Problema 19. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$$

sobre la variedad

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 5\}.$$

Problema 20. Calcular la longitud de las aristas laterales de la pirámide de base rectangular con volumen máximo entre las inscritas en la esfera de radio R.

Problema 21. Sea la función

$$f_\alpha(x,y) = x^4 + y^4 + \alpha(x^2 + y^2),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Calcular los valores de α para los que f_α sólo tiene un máximo relativo, indicando el valor del mismo.
b) Determinar el valor del parámetro α_0 de forma que $(5,5)$ sea un punto crítico para f_α.
c) Para el valor calculado en el apartado anterior, determinar el máximo y mínimo absolutos de f_α en

$$x^2 + y^2 = 36.$$
