Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una población con función de densidad

$$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$$

siendo $\theta > 0$. Calcula el test de razón de verosimilitudes, de nivel α, para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Solución: La función de verosimilitud es

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) = \begin{cases} e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i} & \text{si } \theta \leq x_{(1)}, \\ 0 & \text{si } \theta > x_{(1)}, \end{cases} \tag{1}$$

donde hemos utilizado que $x_{(1)} := \text{mín}_{1 \leq i \leq n} x_i$ y que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \leq x_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{[\theta,\infty)} \left(\min_{1 \leq i \leq n} (x_i) \right). \end{aligned}$$

Como la verosimilitud (1) es una función creciente en θ, el estimador de máxima verosimilitud (e.m.v.) de θ es $\hat{\theta} = x_{(1)}$.
Calculemos la razón de verosimilitudes

$$\Lambda_n = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta)}.$$

Observemos que $\Theta_0 = (0, \theta_0]$ y $\Theta = (0, \infty)$. Como la verosimilitud es creciente en θ, tenemos que

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = e^{n\theta_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Como el supremo del denominador de Λ_n se alcanza cuando θ es igual al e.m.v., tenemos que

$$\sup_{\theta \in \Theta} f_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = e^{n\hat{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Por tanto, $\Lambda_n = e^{n(\theta_0 - x_{(1)})}$.
El test de razón de verosimilitudes es el que tiene como región crítica o de rechazo

$$R = \{(x_1, \ldots, x_1) : \Lambda_n < k_\alpha\} \tag{2}$$

donde k_α se elige de manera que el tamaño del test (la máxima probabilidad de error de tipo I)

$$\max_{\theta \leq \theta_0} \mathbb{P}(R)$$

sea igual a α. Ahora bien, observemos que

$$\Lambda_n < k_\alpha \Leftrightarrow e^{n(\theta_0 - x_{(1)})} < k_\alpha \Leftrightarrow n(\theta_0 - x_{(1)}) < \log(k_\alpha) \Leftrightarrow x_{(1)} > \theta_0 - \frac{1}{n} \log(k_\alpha) =: \theta_0 + c_\alpha.$$

Por tanto, la región de rechazo (2) equivale a la región

$$R = \{(x_1, \ldots, x_1) : x_{(1)} > \theta_0 + c_\alpha\}$$

donde c_α es tal que

$$\max_{\theta \leq \theta_0} \mathbb{P}(R) = \max_{\theta \leq \theta_0} \mathbb{P}_\theta\{X_{(1)} > \theta_0 + c_\alpha\} = \alpha.$$

Para completar la expresión de la región de rechazo, determinemos c_α. Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta\{X_{(1)} > \theta_0 + c_\alpha\} &= \mathbb{P}_\theta\{\min_{1\leq i\leq n} X_i > \theta_0 + c_\alpha\} \\
&= \mathbb{P}_\theta\{X_1 > \theta_0 + c_\alpha, X_2 > \theta_0 + c_\alpha, \ldots, X_n > \theta_0 + c_\alpha\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta\{X_i > \theta_0 + c_\alpha\} = (\mathbb{P}_\theta\{X > \theta_0 + c_\alpha\})^n \\
&= e^{-n(\theta_0 + c_\alpha - \theta)}, \qquad (3)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\mathbb{P}_\theta\{X > \theta_0 + c_\alpha\} = \int_{\theta_0+c_\alpha}^{\infty} e^{-(x-\theta)}dx = e^{-(\theta_0+c_\alpha-\theta)}.$$

Como la función (3) es creciente en θ tenemos que

$$\alpha = \max_{\theta\leq\theta_0} e^{-n(\theta_0+c_\alpha-\theta)} = e^{-n(\theta_0+c_\alpha-\theta_0)} = e^{-nc_\alpha} \Leftrightarrow c_\alpha = -\frac{1}{n}\log\alpha.$$

Observemos que, como $\alpha \in (0,1)$, se cumple que $c_\alpha > 0$.
Así pues, finalmente la expresión de la región crítica del test de razón de verosimilitudes para el contraste del enunciado es

$$R = \left\{(x_1, \ldots, x_1) : x_{(1)} > \theta_0 - \frac{1}{n}\log\alpha\right\}.$$

Intuitivamente es una región crítica razonable, pues rechazamos que $\theta \leq \theta_0$ cuando la menor de las observaciones de la muestra está demasiado alejada de estos valores de θ. Recordemos que, para un θ fijo el soporte de la densidad $f(\cdot;\theta)$ es precisamente el intervalo $[\theta,\infty)$ y $f(x,\theta)$ es decreciente en x. Así que esperamos que, al muestrear de $f(\cdot,\theta)$, salgan observaciones "justo a la derecha"de θ. Es decir, si estoy contrastando $H_0 : \theta < 3$ y todas las observaciones de la muestra son mucho mayores que $\theta_0 = 3$, intuimos que H_0 es falsa.