HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2013-2014.

Problema 1. Denotamos por $||x||$ la norma euclídea asociada al producto escalar en $\mathbf{R}^N$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Probar las dos identidades siguientes, y dar una interpretación geométrica:
1) $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$.
2) $4 < x, y >= ||x + y||^2 - ||x - y||^2$.

Problema 2. Sea $\overline{A}$ el cierre de un conjunto (es decir, la unión de A con sus puntos de acumulación). Demostrar las siguientes propiedades:
1) $\overline{A} = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, \forall V_x,\, V_x \cap A \neq \emptyset\}$, siendo V_x un entorno abierto del punto x.
2) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Problema 3. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:
1) $\bigcap_{k=1}^{\infty} [-1, \frac{1}{k})$ en $\mathbf{R}$.
2) $(0, 1) \cap \mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$.
3) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 < x \leq y\}$ en $\mathbf{R}^2$.
4) $H = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, x_1 = 0\}$ en $\mathbf{R}^N$.
5) $\{x \in \mathbf{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$ en $\mathbf{R}^N$.
Determinar el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

Problema 4. Sea $U \subset \mathbf{R}^N$ un conjunto abierto, y $A \subset \mathbf{R}^N$ un subconjunto tal que $U \subset A$. Probar que $U \subset \text{int}(A)$.

Problema 5. Sean $x \in \mathbf{R}^N$ y $A \subset \mathbf{R}^N$. Se define la distancia de x a A por

$$d(x, A) = \text{ínf}\{||x - y|| \,:\, y \in A\}.$$

a) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, d(x, A) < \epsilon\}$. Probar que A_ϵ es abierto.
b) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, d(x, A) \leq \epsilon\}$, probar que es cerrado.
c) Probar que A es cerrado si y sólo si $A = \bigcap_{\epsilon>0} A^\epsilon$.

Problema 6. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbf{R}^N$ tal que para todo k,

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq r||x_k - x_{k-1}||,$$

para algún $r \in (0, 1)$. demostrar que $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es convergente.

Problema 7. Demostrar que $A \subset \mathbf{R}^N$ es compacto si y sólo si cualquier subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación que pertenece a A.

Problema 8. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| = 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| \geq 1\}$$

<u>Problema</u> 9. Sea $S^{N-1} = \{x \in \mathbf{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$. Sea $f \,:\, S^{N-1} \to \mathbf{R}$ una función continua. estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
1) $f(S^{N-1})$ es acotado.
2) $f(S^{N-1})$ es un abierto.
Si además se sabe que $f(S^{N-1}) \subset \mathbf{Q}$, estudiar qué se puede decir de f.

<u>Problema</u> 10. Demostrar que toda transformación lineal $T \,:\, \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$ es continua.

<u>Problema</u> 11. Sea A una matriz $N \times N$. Se define su norma por

$$|||A||| = \max_{x \in \mathbf{R}^N - \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Se consideran en $\mathbf{R}^N$ las normas

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|,\ ||x||_\infty = \max\{|x_i| \,:\, i = 1 \cdots N\}.$$

Determinar las normas de A respecto de las normas $||x||_1$ y $||x||_\infty$ en $\mathbf{R}^N$.

<u>Problema</u> 12. Demostrar que la norma de una matriz A (con valores complejos) respecto de la norma euclídea es

$$|||A||| = (\max\{\text{autovalores de } A^*A\})^{1/2},$$

donde A^* es la matriz conjugada de la traspuesta. Demostrar que

$$||A||^2 \leq \mathrm{traza}(A^*A).$$