Análisis Matemático

Víctor de Juan Sanz

13/14 C1

Índice

Datos de interés:
Jesus Garcia Azorero
Despacho: 17-608
Correo: jesus.azorero@uam.es

1. Contenido de la asignatura

1.1. Preliminares

Repaso de contenidos de Cálculo II como conjuntos abiertos y cerrados, gradiente ...

1.2. Teorema funcion inversa, implicita y rango

Aplicación a funciones no lineales de los teoremas fundamentales de cálculo II

1.3. Mínimos y máximos condicionados

Multiplicadores de Lagrange

1.4. Subvariedades diferenciales

Objetos de dimensión n en espacios de dimensión m ($n < m$).

1.5. Integración en subvariedades diferenciales

1.6. Teorema de Stokes

Demostración del teorema con lenguaje de las formas diferenciales.

2. Preliminares del análisis matemático

A lo largo del curso vamos a trabajar en $\mathbb{R}^n = (x_1, \ldots c, x_n)\ x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$

2.1. Producto escalar, norma y distancia

Durante todo el año denotaremos al vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $\overline{x}$ por comodidad.

Definición 2.1 **Producto escalar euclídeo**.

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Propiedades:

- $\langle \lambda\overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{x} + \overline{z} \rangle + \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle gx, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$

Las tres primeras son la consecuencia de que el producto escalar tiene que ser bilineal.

En general, un producto escalar es una matriz definida positiva y se opera de la siguiente manera:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = (x_1, x_2, ..., x_N) \cdot \begin{pmatrix} a_1 1 & \cdots & a_1 N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N 1 & \cdots & a_N N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Definición 2.2 **Norma euclídea**.

$$||\overline{x}|| = (\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \cdots = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades:

- $||\overline{x}|| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
- Homogeneidad: $||\lambda\overline{x}|| = \lambda\, ||\overline{x}||$
- Desigualdad triangular: $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{x}||$

Lema 2.3. $||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$ *para cualquier producto escalar* $*$.

Definición 2.4 **Norma**. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una **norma**.

En general se tiene $||\cdot||_p, p \in \mathbb{N}$ y se definen todas de la misma forma:

$$||\overline{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay tres casos particulares, la norma uno

$$||\overline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

La norma 2, que es la norma euclídea

y la norma infinito

$$||\overline{x}||_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Vamos a demostrar que la norma p cumple las 3 propiedades de una norma. Para ello, nos apoyaremos en dos teoremas previos:

Teorema 2.5 (Desigualdad de Young). *Sea* $p > 1$ *y tomamos* p' *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *(exponente conjugado). Entonces:*

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \cdot |a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

Demostración. Se utiliza la idea de la función logaritmo, que es cóncava[1] y creciente. Tomando 2 puntos A y B tenemos la condición de concavidad

$$t \log A + (1-t) \log B \leq \log(tA + (1-t) \cdot B)$$

. Utilizando la derivada hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y tomamos un punto que dista t de A y $(1-t)$ de B. Como la función es cóncava sabemos que ese valor será menor que el valor del logaritmo en un punto t entre A y B.

Tomando $A = |a|^p$, $B = |b|^p$ y $t = \frac{1}{p} \to 1 - t = \frac{1}{p'}$ tenemos que

$$\frac{1}{p}\cdot log|a|^p + \frac{1}{p'}\cdot log|b|^{p'} \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$\log|a| + \log|b| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$\log|ab| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$
$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

□

Teorema 2.6 (Desigualdad de Hölder). *Se trata de una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ocurre en el caso* $p = 2$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq ||\overline{x}||_p \, ||y_i||_p$$

Demostración. Tomamos

$$a_i = \frac{|x_i|}{||\overline{x}||_p}$$
$$b_i = \frac{|y_i|}{||\overline{y}||_{p'}}$$

Tenemos que

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{p'} b_i^{p'}$$

Sustituimos:

$$frac|x_i|||x||_p \cdot \frac{|y_i|}{||y||_p} \leq \frac{|x_i|^p}{p\cdot ||x||_p^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p'\cdot ||y||_{p'}^p}$$

Tomamos sumatorios y, teniendo en cuenta que $||x||_p^p = \sum |x_i|^p$, nos queda

$$\frac{1}{||x||_p \, ||y||_{p'}} \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p\,||x||_p^p} \sum |x_i|^p + \frac{1}{p'\,||y||_{p'}^{p'}} \sum |y_i|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Una vez probadas las dos desigualdades anteriores, pasamos a probar la desigualdad triangular:

Demostración. El objetivo es demostrar que

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p \leq ||\overline{x}||_p + ||\overline{y}||_p$$

y vamos a hacerlo en varios pasos.

Para evitarnos las raíces empezamos con $||\overline{x}+\overline{y}||_p^p$

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p^p = \sum_1^N |x_i+y_i|^p = \sum_1^N |x_i+y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} =$$
$$= \sum_1^N |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_1^N |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (2.6) tenemos:

$$||\overline{x}+\overline{y}||_p^p \leq$$
$$\sum (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left(\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*} + \sum (|y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left(\left(|X_i+y_i|^{p-1}\right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*}$$

Por ser p y p' exponentes conjugados es fácil comprobar que $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$
Sacamos factor común y pasamos al otro lado obteniendo (PASO INTERMEDIO?)

$$\left(\sum_1^N |x_i+y_i|^p\right)^{\overbrace{\left(1-\frac{1}{p'}\right)}^{p}} = ||\overline{x}+\overline{y}||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

Guille: esta demostración es muy, muy rara. □

EJERCICIO PROPUESTO: Tomamos en el plano el conjunto de los puntos cuya norma es 1. Tomando en la norma p=2 sale la circunferencia. ¿Y en p=3?

Observación: Estos argumentos se pueden utilizar para demostrar

$$\int |f \cdot g| \, dx \leq \left(\int |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} \, dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Definición 2.7 **Distancia euclídea**.

$$d(\overline{x},\overline{y}) = ||\overline{y}-\overline{x}||$$

Propiedades:

- La distancia es siempre positiva: $d(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$
- $d(\overline{x},\overline{x}) = 0$
- Simetría: $d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$
- Desigualdad triangular $d(\overline{x},\overline{z}) \leq d(\overline{x},\overline{y}) + d(\overline{y},\overline{z})$. La distancia entre 2 puntos es menor o igual en línea recta que pasando por un punto intermedio.

Definición 2.8 **Distancia**. Cualquier operacion que cumpla las 3 propiedades anteriores es una distancia.

Recapitulando Con un producto escalar puedo definir una norma y con esa norma puedo definir una distancia. Pero... ¿Podemos definir una norma que no venga de un producto escalar y/o alguna distancia que no provenga de una norma? Sí, por ejemplo

$$\tilde{d}(\overline{x},\overline{y}) = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}(y) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x)|$$

No cuesta mucho comprobar que cumple las 3 propiedades de una distancia. Además, esta distancia es cuanto menos curiosa porque nunca será mayor de π.

Podemos comprobar que si existiera una norma que midiese esta distancia tendríamos

$$||\tilde{\overline{x}}|| = \tilde{d}(\overline{x},\overline{0}) = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x)|$$

pero esto no cumple la propiedad: $||\tilde{\lambda x}|| = |\operatorname{arc}\operatorname{tg}\lambda x| \neq |\lambda|\,|\operatorname{arc}\operatorname{tg} x| = |\lambda x|\,||\tilde{x}||$ ya que ninguna distancia puede ser mayor que π y tomando un $\lambda > \pi$ se produciría la contradicción.

2.2. Relación norma - producto escalar

Teorema 2.9. *Supongamos que tengo un producto escalar* $*$ *y una norma asociada*

$$||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$$

. Entonces

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = ||\overline{x}||^2 + ||\overline{y}||^2 + 2(\overline{x} * \overline{y})$$

Demostración.

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = (\overline{x}+\overline{y})*(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}*\overline{x}+\overline{x}*\overline{y}+\overline{y}*\overline{x}+\overline{y}*\overline{y} = ||\overline{x}||^2+||\overline{y}||^2+2(\overline{x}*\overline{y})$$

□

Esa norma asociada al producto escalar tiene dos propiedades importantes:

- Paralelogramo: $||\overline{x}+\overline{y}||^2+||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 2\left(||x||^2+||x||^2\right)$
- Polarización: $||\overline{x}+\overline{y}||^2-||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 4(\overline{x}*\overline{y})$

2.3. Equivalencia de normas

Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^N$. Si intento calcular la norma de un vector $\overline{x}$

$$||\overline{x}|| = \left|\left|\sum x_i e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{N} ||x_1 e_1|| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|\cdot||e_i||$$

Tenemos: $||\overline{x}|| \leq \sum_{i=1}^{N} c_i|x_i|$ siendo $c_i = ||e_i||$. Aplicando Cauchy-Schwarz nos queda

$$\sum_{i=1}^{N}\left(c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sum\left(|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, puedo controlar cualquier norma con una constante y la norma euclídea:

$$|||\overline{x}||| \leq C\,||x||_2$$

En particular, $0 \leq |||\overline{x_n}-\overline{x}||| \leq c||\overline{x_n}-\overline{x}||$.

Observación: Aplicar Holder en vez de Cauchy, sale la igualdad con la norma p y no con la euclídea.

Aplicación: Sea $F(\overline{x} = |||\overline{x}|||$ y $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$

$$|F(\overline{x})-F(\overline{y})| = ||||\overline{x}-\overline{y}|||| = |||\overline{x}-\overline{y}||| \leq C||\overline{x}-\overline{y}||$$

Utilizando: $|||\overline{a}-\overline{b}||| \geq |||\overline{a}|||-|||\overline{b}|||$ [2]

Interpretación del resultado: Cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es CONTINUA respecto de la norma euclídea. [3]

[2](la desigualdad triangular con restas, que se saca con un simple cambio de variable)
[3]Continua si la tomas como una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$

Teorema 2.10 (Relación norma $\leftrightarrow$ producto escalar). $||\cdot||$ *una norma cualquiera de* $\mathbb{R}^N$ *proviene de un producto escalar si y sólo si la norma satisface la identidad del paralelogramo.*

Demostración. En el apartado anterior (2.2) demostramos la implicación hacia la derecha. Vamos a demostrar la recíproca: Suponemos que la norma satisface la identidad del paralelogramo:

$$\left|\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\right|^2+\left|\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\right|^2=2\left|\left|\overline{a}\right|\right|^2+2\left|\left|\overline{b}\right|\right|^2 \tag{1}$$

Queremos probar que existe un producto escalar $*$ tal que $||\overline{x}||=(\overline{x}*\overline{x})^{\frac{1}{2}}$, así que definimos uno utilizando la identidad de polarización:

$$\overline{x}*\overline{y}=\frac{1}{4}\left(||\overline{x}+\overline{y}||^2-||\overline{x}-\overline{y}||^2\right) \tag{2}$$

Queremos probar que, efectivamente, $*$ es un producto escalar, así que tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

1. $\overline{x}*\overline{y}=\overline{y}*\overline{x}$.
2. $\overline{x}*\overline{x}\geq 0 \quad \forall\,\overline{x}$
3. $(\overline{x}*\overline{x})=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$
4. $(\lambda\overline{x})*\overline{y}=\lambda\left(\overline{x}*\overline{y}\right)$
5. $(\overline{x}+\overline{y})*\overline{z}=\overline{x}*\overline{x}+\overline{y}*\overline{z}$

Las propiedades 1, 2 y 3 son triviales. Vamos con 4 y 5

Demostración de la 4ª propiedad Demostraremos que se cumple por inducción cuando $\lambda\in\mathbb{N}$. Primero probamos para $\lambda=2$.

$$\begin{aligned}(2\overline{x})*\overline{y}= & \qquad \text{usando (2)}\\ =\frac{1}{4}\left(|||2\overline{x}+\overline{y}|||^2-|||2\overline{x}-\overline{y}|||^2\right)= & \\ =\frac{1}{4}\left(|||\underbrace{\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2-|||\underbrace{\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{-b}|||^2\right)= & \qquad \text{usando (1)}\\ =\frac{1}{4}\left(2|||\overline{x}|||^2+2|||\overline{x}+\overline{y}|||^2\right)= & \\ =2\frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}|||^2-|||\overline{x}-\overline{y}|||^2\right)=2(\overline{x}*\overline{y}) & \end{aligned}$$

Conclusión: si $\lambda=2$ vemos que sale fuera y por lo tanto se cumple.

Paso 2 de la inducción: buscamos demostrar la propiedad con $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
(n\overline{x}) * \overline{y} &= && \text{usando (2)}\\
&= \frac{1}{4}\left(|||n\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||n\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) = &&\\
= \frac{1}{4}\left(|||\underbrace{(n-1)\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2 - |||\underbrace{(n-1)\overline{x}}_{a}+\underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{b}|||^2\right) &= && \text{usando (1)}\\
&= \ldots = 2(\overline{x}*\overline{y}) + (n-2)(\overline{x}*\overline{y}) = && \text{usando hip. de inducción}\\
&= n(\overline{x}*\overline{y}) &&
\end{aligned}
$$

Queda demostrado por lo tanto para $\lambda \in \mathbb{N}$. Falta ahora demostrarlo para el resto de conjuntos de números.

Para $\lambda \in \mathbb{Z}$ utilizaremos $(-\overline{x}) * \overline{y} = -(\overline{x} * \overline{y})$ y podremos usar la demostración de los naturales.

Para $\lambda = n \in \mathbb{Q}$ con $n = \frac{p}{q}$, siendo p y q primos entre sí, vemos que

$$
\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y} = \frac{q\left(\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y}\right)}{q} = \frac{\left(q \cdot \frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y}}{q} = \frac{(p\overline{x} * \overline{y})}{q}
$$

que tal y como habíamos demostrado antes es igual a $\dfrac{p\,(\overline{x} * \overline{y})}{q}$, con lo que queda demostrado también para los racionales.

Por último, queremos demostrarlo cuando $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda = \liminf nr_n$. Utilizaremos el resultado previo de que cualquier norma es continua.

$\overline{x}, \overline{y}$ fijos.

Revisar: Los $|||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2$ y $|||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2$ son continuos.

$$
\alpha\overline{x} * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) =
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) = \lim_{n\to\infty}(r_n\overline{x} * \overline{y}) =
$$
$$
\lim_{n\to\infty} r_n(\overline{x} * \overline{y}) = \alpha(\overline{x} * \overline{y})
$$

WTF es esto.

Demostración de la 4 propiedad:

$$
A = (\overline{x}+\overline{y}) * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}+\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)
$$
$$
B = \overline{x} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}-\overline{z}|||^2\right)
$$
$$
C = \overline{y} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)
$$

Demostraremos que $A - B - C = 0$

COMPLETAR la comprobación. $\square$

Observación: $d(\overline{x}, \overline{y}) = |||\overline{x} - \overline{y}|||$ para alguna norma $|||\cdot||| \Leftrightarrow (d(\overline{x} + \overline{z}) + d(\overline{y} + \overline{z}) = d(\overline{x}, \overline{y}) \wedge d(\lambda\overline{x}, \lambda\overline{y} = |\lambda|\, d(\overline{x}, \overline{y}))$

3. Topología

Definición 3.1 **Bola**. Se define la bola de radio R centrada en el punto $\overline{x}_0$ como

$$B_R(\overline{x}_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; \underbrace{d(\overline{x}, \overline{x}_0)}_{=||\overline{x}-\overline{x}_0||} < R\}$$

Para evitar jaleos, al tratar la distancia vamos a tomar la norma euclídea. Como todas las normas son equivalentes, nos da igual tomar una que otra.

Definición 3.2 **Conjunto abierto**. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ es abierto si y sólo si $\forall \overline{a} \in A \; \exists \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(\overline{a}) \subset A$

Definición 3.3 **Conjunto cerrado**. Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si su complementario $B^c = \mathbb{R}^N - B$ es abierto.

Teorema 3.4 (Caracterización de cerrados en términos de sucesiones). *Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado si y sólo si para cualquier sucesión convergente $\{x_n\} \subset B$ se cumple que $\lim x_n \in B$.*

Teorema 3.5 (Operaciones con conjuntos abiertos y cerrados). *Suponemos conjuntos de dimensión finita:*

- *Unión arbitraria de abiertos $\to$ abierto*
- *Intersección finita de abiertos $\to$ abierto*
- *Union finita de cerrados $\to$ cerrado*
- *Intersección arbitraria de cerrados $\to$ cerrado*

Definición 3.6 **Punto de acumulación**. La idea intuitiva es aquellos puntos a los que puedo llegar en el límite, es decir, puntos que a su alrededor a una distancia arbitrariamente pequeña existen otros puntos del conjunto.

$$A \subset \mathbb{R}^N,\; a \in (A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\; (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Siendo (A) es el conjunto de los puntos de acumulación.

Definición 3.7 **Frontera**. La frontera ∂A de un conjunto A son aquellos puntos para los que en su entorno (para cualquier ε) hay puntos tanto del conjunto como puntos de fuera del conjunto.

$$a \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$$

Definición 3.8 **Interior**. El interior es el conjunto abierto más grande que está contenido en el conjunto A.

Definición 3.9 **Cierre**. El cierre de un conjunto AA es el conjunto cerrado más pequeño en el que está contenido A.

Observación: Cierre e interior no los vamos a definir formalmente porque se dan por supuesto.

Definición 3.10 **Conjunto compacto**. Un conjunto que cumpla cualquiera de las 3 propiedades siguientes.

Teorema 3.11 (Conjunto cerrado y acotado). *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Son equivalentes:*

1. *K cerrado y acotado.*
2. *Para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset K$, podemos encontrar una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ con $\lim x_{n_j} \in K$.*
3. *Dado cualquier recubrimiento $\{A_i\}$ abierto de modo que $K \subset \cup\{A_i\}$ puedo encontrar un recubrimiento finito $\{A_j\}, j = 1, ..., M \;/\; K \subset \bigcup_{i=1}^{M} A_i$*

Demostración.

2 implica 1 Supongamos que K no estuviera acotado (negamos la propiedad 1). Consideremos una sucesión de vectores $\{x_n\}$ de tal forma que $||x_n|| = n$, creciente y no acotada, pero con todos los elementos en K. Es imposible encontrar una subsucesión convergente, lo que contradice 2.

Si, por otra parte, K no fuera cerrado, tendríamos que la frontera está fuera del conjunto, y podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ con $\lim x_n \in \partial K$, lo que contradice 2.

1 implica 2 Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ cerrado y acotado, $\{\overline{x_n}\} \subset K$ y $\overline{x_n} = x_i^i$ tenemos

$$\{\overline{x_n}\} \subset K \subset B_R(\overline{0}) \Rightarrow ||X_N|| \leq R, \forall N \Rightarrow \left|X_n^j\right| \leq R$$

Ahora vamos a aplicar el argumento de bisección [4] para seleccionar la sucesión que nos interesa.

Para ello recordamos el criterio de Cauchy:

$$A_N \subset \mathbb{R}\text{convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \;/\; n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Con el criterio de bisección podemos encontrar una subsucesión convergente de la siguiente manera: definimos una subsucesión que converja a la primera coordenada, después con el mismo criterio podemos arreglar la sucesión para que converja a la segunda coordena.

Aquí también pasa algo muy raro. □

Teorema 3.12. *Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Entonces, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en K si existen $x_m, x_M \in K \;/\; F(x_m) \leq F(x) \leq F(X_M)\ \forall x \in K$.*

Es decir, F es continua en K si alcanza su máximo y su mínimo en el conjunto.

Demostración. Primero, vamos a **demostrar que el conjunto está acotado superiormente**. Por reducción al absurdo, se puede encontrar una subsucesión convergente que por ser compacto tiene que ser convergente a un elemento pertenciente al conjunto, pero esa sucesión por ser no acotada tenemos: $\exists \overline{x}_n \in K \;/\; F(\overline{x}_n) \geq n$

Paso 1.2) De manera totalmente análoga.

Paso 2) Vamos a demostrar la existencia de X_M: Por ser un conjunto acotado, tenemos un supremo en ese conjunto. ¿Ese supremo pertenecerá al conjunto?. Si no perteneciera, podríamos encontrar una subsucesión convergente al supremo lo que contradice la condición de acotado.

WTF. □

Aplicación: $F(\overline{x}) = |||\overline{x}|||$ una norma (que ya sabemos que es continua):

Conclusión: $m\,||x|| \leq |||\overline{x}||| \leq C||\overline{x}||$

Teorema 3.13. *En $\mathbb{R}^N$ TODAS las normas son equivalentes.*

3.1. Conexión

Definición 3.14 **Conexión por caminos**. Dados $a, b \in C$ podemos encontrar una aplicación continua $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = b$ con $\varphi(t) \in C\,\forall t \in [0,1]$.

Es decir, C es conexo por caminos si podemos encontrar una "línea", un camino que una dos puntos cualquiera del conjunto y que además no se salga del conjunto.

Definición 3.15 **Conexión por abiertos**. C es conexo por conjuntos si para cualquier par de abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^N \ / \ C \subset A \cup B$ se cumple que, si $A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Esto es equivalente a decir que C no puede ser expresado como unión de dos conjuntos disjuntos.

Observación:

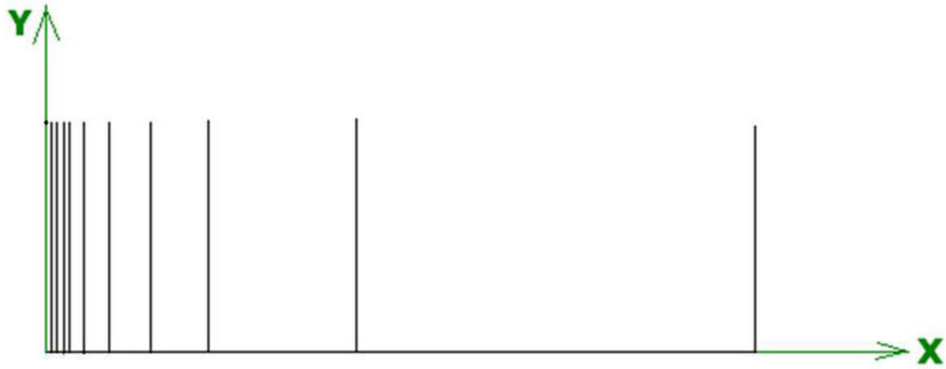

Figura 1: Conjunto *peine*

Es curioso comprobar que estas 2 definiciones no son equivalentes. Si tomamos el conjunto peine (figura 1)

$$\{(x,0), x \in (0,1]\} \bigcup \{(0,y), y \in (0,1]\} \bigcup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, y\right), y \in [0,1]\}$$

Podemos razonar que sí es conexo por caminos, pero no según la otra definición.

4. Funciones continuas, abiertos y cerrados

Sea F continua:

1) A abierto $\nRightarrow F(A)$ abierto.

2) B cerrado $\nRightarrow F(B)$ cerrado.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Definimos

$$F^{-1}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \ / \ F(\overline{x}) \in A\}$$

Teorema 4.1 (Función inversa).

- *F continua* $\wedge$ *A abierto* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *abierto.*
- *F continua* $\wedge$ *B cerrado* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *cerrado.*

Aplicación:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \not/ \ x^2 + cos(x|y|) - e^z < 1\}$$
$$F(x, y, z) = x^2 + cos(x|y|) - e^z < 1$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

COMPLETAR

Demostración. 1)

$$\overline{x} \in F^{-1}(A)\text{Queremos hallar } R > 0 \not/ \ B_R(\overline{x}) \subset F^{-1}(A)$$
$$\overline{x} \in F^{-1}(A) \Leftrightarrow F(\overline{x}) \in A$$
$$\exists \varepsilon > 0 \not/ \ B_\varepsilon(F(\overline{x})) \subset A$$
$$\text{es decir: si}||\overline{z} - F(\overline{x})|| < \varepsilon \Rightarrow \overline{z} \in A$$
$$\text{F continua} \Rightarrow \exists \delta > 0 \not/ \ \underbrace{||\overline{x} - \overline{s}|| < \delta}_{\overline{s} \in B_R?(\overline{x})} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{s})|| < \varepsilon.\text{en particular,} F(\overline{s}) \in A; s \in F^{-1}(A)$$

Conclusión: Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $s \in B_R(\overline{x}) \Rightarrow s \in F^{-1}(A)$. □

4.1. Aplicaciones lineales

Sea: $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

L es lineal $\Leftrightarrow L(\lambda\overline{x}) = \lambda L(\overline{x}) \wedge L(\overline{x} + \overline{y}) = L(\overline{x}) + L(\overline{y})$

Además, toda aplicación lineal se puede escribir en forma de matriz.

$$L(\overline{x}) = A\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2. *L lineal $\Rightarrow$ L continua.*

Demostración.

$$L(\overline{x} = \begin{pmatrix} A_1 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

COMPLETAR

□

4.2. Norma de matrices

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\overline{x} \to F(\overline{x}) = \underbrace{||A\overline{x}||}_{L(\overline{x})}$$

F es continua.

Sabemos que existe $c > 0$ tal que $||A\overline{x}|| \leq C||\overline{x}||$, es decir, $||A\overline{x}|| \leq C$ si $||\overline{x}|| = 1$.

$$M = \{||A\overline{x}|| \;/\; ||\overline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

[5] La mejor constante C es la cota superior mínima (supremo) que vamos a llamar α.
$\alpha \in^? M$
α se alcanza en M, porque F es continua y M es compacto.

Definición 4.3 **Norma de una matriz.**

$$|||A||| = \alpha = max||A\overline{x}|| \;/\; ||\overline{x}|| = 1$$

Ejercicio propuesto: demostrar que $|||\cdot|||$ es una norma. Demostración de la 4' porpiedad:

$$|||A+B||| = max||(A+B)\overline{x}||| = ||(A+B)\overline{x}_{A,B}|| = ||A\overline{x}_{AB} + B\overline{x}_{AB}|| \leq$$
$$\underbrace{||A\overline{x}_{AB}||}_{\leq max||A\overline{x}||=|||A|||} + \underbrace{||B\overline{x}_{AB}||}_{|||B|||}$$

Ejemplo: COMPLETAR Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular su norma. Resolución: Acabamos teniendo que maximizar (sabiendo que $|x| + |y| = 1$: $|x + 2y| + |-3x + y| + |2x| \leq |x| + |2y| + |3x| + |y| + 2|x| = 6|x| + 3|y| \leq 6(|x| + |y|) = 6$ ¿Podemos encontrar un vector (x_0, y_0) tal que $||A(x_0, y_0)^T||_1 = 6$?
Tomando $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$ lo encontramos.

Obsevación: Coincide con la suma de los valores absolutos de las columnas y escoger el más grande.

Aplicando lo mismo con la norma infinito: COMPLETAR COMPLETAR

Lema 4.4. *Sea A una matriz, A^TA es simétrica.*

Lema 4.5. $\underbrace{< \overline{x}, A\overline{y} >}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{< A^T\overline{x}, \overline{y} >}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^M}$

[5] Conjunto esfera unidad

$A^T A$ diagonalizable $(N \times N)$. Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$.

Desarrollamos en B: $\overline{x} = \sum \alpha_i \overline{v}_i$. Con $< v_i, v_j >= 0$ con $i \neq j$.

Calculamos $||\overline{x}|| = \sum \alpha_i^2 < v_i, v_i >$

$$A^T A\overline{x} = (A^T A)(\sum \alpha_i v_i) = \sum(\alpha_i \lambda_i \overline{v_i})$$

Queremos hallar el máximo de $||A\overline{x}||$ cuando $||\overline{x}|| = 1$.

$$||A\overline{x}||^2 =< A\overline{x}, A\overline{x} >=< A^T A\overline{x}, \overline{x} >= \underbrace{< \sum \lambda_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i >}_{<v_i,v_j>=0 \text{ con } i\neq j.}$$

$$= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{max}(\sum \alpha_i^2) = \lambda_{max}$$

Conclusión: Hemos demostrado que:

$$max||A\overline{x}|| \underbrace{\leq}_{=} (\lambda_{max})^{\frac{1}{2}}$$

Este máximo se puede alcanzar tomando x como el autovector asociado, por lo que el $\leq$ se convierte en un $=$.

5. Limite

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

Definición 5.1 **Límite**.

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = \overline{L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < ||\overline{x} - \overline{a}|| < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - L|| < \varepsilon$$

Importante el detalle de $0 < ||\overline{x} - \overline{a}||$, no es un $\leq$, porque no se necesita que la función esté si quiera definida en el punto $\overline{a}$.

Teorema 5.2. *Sean* $\overline{x_n} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$ *y* $\overline{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^N$.

$$x_n \to \overline{L} \Leftrightarrow (x_1 \to L_1) \wedge (x_2 \to L_2) \wedge ... \wedge (x_n \to L_n)$$

Idea para el cálculo de límites:

- $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} F(x) = \lim\limits_{\overline{y}\to 0} F(\overline{y} + \overline{a})$.
- Límite a lo largo de rectas. $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) \sim \lim F(t\overline{v})$

Si $\lim F(t\overline{v})$ toma valores distintos dependiendo de $\overline{v} \Leftrightarrow \nexists \lim_{\overline{x}\to\overline{0}} F(\overline{x})$

Pero, si $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(t\overline{v}) = L \Rightarrow \overline{L}$ es el candidato a ser el límite (no tiene porque serlo). El siguiente paso sería demostrar con argumentos de comparación (Sandwich) u otros que $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = L$.

El contraejemplo es $f(x,y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^4}$. Veamos por que:

Nos acercamos al límite por medio de rectas:

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x\cdot(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{(1+x^2m^4)x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x,mx)) \to 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Pero si nos acercamos al límite por medio de $x = y^2$ tenemos:

$$f(x,y) = f(y^2,y) = \frac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)) \neq 0$$

Teorema 5.3. *F continua $\Leftrightarrow$ para cualquier abierto A, $F^{-1}(A)$ es abierto.*

Obsevación: Si $F : \omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M \Leftrightarrow$ para cualquier abierto $A, F^{-1}(A) = \omega \cup V$, con V abierto.

Demostración. $\Rightarrow$ De este teorema ya teníamos demostrada la implicación $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } ||\overline{x}-\overline{a}|| < \delta \Rightarrow \underbrace{||F(\overline{x}) - F(\overline{a})|| < \delta}_{F(\overline{x})\in B_\varepsilon(F(\overline{a}))}$$

Tomamos

$$A = B_\varepsilon(F(\overline{a})) \to F(\overline{a}) \in A \Rightarrow \overline{a} \in F^{-1}(A)$$

Por hipótesis, $F^{-1}(A)$ abierto $\wedge\ \overline{a} \in F^{-1}(A)$

$\exists B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A)$.Es decir, $\overline{s} \in B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A), s \in F^{-1}(A) \Rightarrow F(s) \in A = B_\varepsilon(F(\overline{a}))$

□

Observación: Este teorema también se cumple para cerrados.

6. Diferenciación

Definición 6.1 . F diferenciable en $\overline{a}$ si

$$\exists \text{ aplicación lineal L tal que } \frac{F(\overline{x}) - F(\overline{a}) - L(\overline{x} - ga)}{||\overline{x} - \overline{a}||} \underbrace{\rightarrow}_{\overline{x} \rightarrow \overline{a}} 0$$

$$= \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{a}} \frac{\left|\left|F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}\right|\right|}{||\overline{h}||}$$

Obsevación:

- Si existe, L es única.

Demostración. Supongamos que existen L_1, L_2.

$$0 = \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}}{||\overline{h}||}$$

.

Sumando: $0 = \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{||F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}|| + ||F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}||}{||\overline{h}||}$

Obsevación: $||A - B|| = ||A + (-B)|| \leq ||A|| + ||B||$

$$\leq \lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{2 \cdot \left|\left|F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a})\right|\right| + \left|\left|L_1\overline{h}\right|\right| + \left|\left|L_2\overline{h}\right|\right|}{||\overline{h}||}$$

Completar la contradicción. □

Notación: (Diferencia de F en $\overline{a}$)

$$L \equiv DF(\overline{a})$$

Proposición:

F diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow F$ continua en $\overline{a}$

Demostración.

$$\lim_{\overline{h} \rightarrow \overline{0}} \frac{||F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}||}{||\overline{h}||} = 0$$

Esta es la definición de diferenciable. Para que este límite sea 0, el numerador tiene que tender a 0, por lo que $F(\overline{a} + \overline{h}) - F(\overline{a}) \rightarrow 0$ □

Obsevación: F diferenciable en $\overline{a}$.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Sabemos:

$$0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$$

En particular (tomando $h = t\overline{e_1}$)

$$\lim_{\overline{t}\to\overline{0}} \frac{a}{b} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} || \underbrace{\frac{1}{t} F(\overline{a}+t\overline{e_1}) - F(\overline{a})) - L\overline{e_1}}_{\overline{W}(t)\in\mathbb{R}^N} ||$$

Tomando la componente k-esima

$$0 = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_K(a+te_i) - F_k(a)}{t} - L_{ki})$$

$$L_{ki} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_k(a+te_i) - F_k(a)}{t}) = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\overline{a})$$

Nomenclatura: Aproximación lineal $\sim$ Diferencial.

Matriz jacobiana $\sim$ Jacobiana.

Teorema 6.2. *Matriz asociada a $DF(\overline{a}) \equiv$ Matriz de las derivadas parciales de F.*

$$DF(\overline{a}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.3. *F diferencialbe en $\overline{a} \Rightarrow \exists \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\overline{a}), i = 1,2,...,N \wedge k = 1,2,...,M$*

El contraejemplo para demostrar $\Leftarrow$ es el mismo que en los límites a lo largo de rectas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y^2} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comentarios sobre notación:

- $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Utilizamos notación vectorial en vez de matricial (porque tendríamos una matriz columna).
  Ejemplo: la velocidad (en un instante de tiempo, un punto en el espacio).

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ (función escalar):

  COMPLETAR Se suele llamar vector gradiente.

-

6.1. Regla de la cadena:

Derivada de una composición:

COMPLETAR DIBUJITO

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$.

$G : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^K$.

$H = G \circ F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$.

$\overline{x} \in \mathbb{R}^N, \overline{y} \in \mathbb{R}^M$

F diferenciable en $\overline{a}$, G diferenciable en $F(\overline{a})$. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en $\overline{a}$. Además la expresión matricial es:

$\underbrace{DH(\overline{a})}_{K\times N} = \underbrace{DG(F(\overline{a}))}_{K\times M} \cdot \underbrace{DF(\overline{a})}_{M\times N}$

Obsevación:

Notación de Leibniz: Para calcular 1 único elemento de la matriz diferencial (el de la fila i, columna j):

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Con cuidado de $\dfrac{\partial G_i}{\partial y_k}$ evaluado en $F(\overline{a})$ y $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$ evaluado en $\overline{a}$.

Aplicaciones y ejemplos:

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

  $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$

  Sea $g \equiv F \circ \sigma \equiv$ Comportamiento de F a lo largo de la curva $\sigma, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  $$g'(t_0) = DF(\sigma(t_0))D\sigma(t_0) = \underbrace{\dots}_{\text{Notación matricial}} = \underbrace{\langle \nabla F(\sigma(t_0)) \rangle \sigma'(t_0)}_{\text{Notación vectorial}}$$

- $\sigma(t) = t\overline{b} + (1-t)\overline{a}$

  $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

  $F \circ \sigma(t) \equiv g(t)$

  COMPLETAR

6.2. Extensiones del teorema del Valor Medio

- Original: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.
  $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ para algún $c \in [a,b]$
- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$
  $\sigma(t) = t(\overline{b}) + (1-t)\overline{a}$
  $g = F \circ \sigma \; g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $F(\overline{b} - \overline{a}) = g(1) - g(0) = g'(s)$ para algún $s \in [0,1]$
  Peeeeero...
  $$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
  $$F(\overline{b}) - F(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(\overline{c_1}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \\ \langle \nabla F_2(\overline{c_2}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \end{pmatrix}$$
  Tenemos 2 c distintos, uno para cada f, por lo que este teorema pierde sentido.
- Versión para funciones matriciales:

Teorema 6.4 (Extensión del valor medio). *Sea $f \in C^1$ en un abierto que contenga* $[a,b]$.
$$||F(\overline{b} - \overline{a})|| \leq |||DF(\overline{c})||| \cdot ||\overline{b} - \overline{a}||$$
Siendo c un punto del segmento que une $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en el que $|||DF(tb + (1-t)a)|||$ alcanza su máximo.

Demostración. i)
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(\overline{b} - f(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds \text{ con } g(t) = f(tb + (1-t)a)$$
ii)
$$h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h(\overline{b} - h(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = \int_0^1 \langle \nabla h(s\overline{a} + (1-s)\overline{b}), (\overline{b} - \overline{a}) \rangle$$
$$g(t) = h(tb + (1-t)a)$$
iii)
$$\overline{G} = (G_1, ..., G_M), G_i = \int_0^1 H_i(t)dt$$
Con $\overline{H} = (H_1(t), ..., H_M(t))$
$$||\overline{G}||^2 = \langle \overline{G}, \overline{G} \rangle = \sum_{i=1}^{M} \left(\int_0^1 H_i(t)dt \right) \underbrace{\left(\int_0^1 H_i(s)ds \right)}_{G_i}$$

$$||\overline{G}||^2 = \int_0^1 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{M} G_i H_i(t)}_{\langle \overline{G}, \overline{H}(t)\rangle \leq ||\overline{G}||\cdot||\overline{H}||} \right) dt$$

Conclusión:

$$||\overline{G}||^2 \leq \int_0^1 ||G|| \cdot ||H(t)|| dt$$

iv) $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

$F_i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underbrace{F_i(\bar{b}) - F_i(\overline{a})}_{G_i} = \int_0^1 \underbrace{\langle \nabla F_i(s\bar{b} + (1-s)\overline{a}), (\bar{b} - \overline{a}) \rangle}_{H_i(t)} dt$

Por el apartado iii tenemos que:

$$\overline{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(tb + (1-t)a), b - a \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla F_M(tb + (1-t)a), b - a \rangle \end{pmatrix} = (DF(...)) \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_M - a_M \end{pmatrix}$$

$$||H(t)|| = ||DF(...)(\bar{b} - \overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}||$$

$$||F(\bar{b}) - F(\overline{a})|| \leq \int_0^1 ||\nabla DF_i(tb + (1-t)a), b - a|| dt$$

Aplicando: $A\overline{v} \leq |||A||| \cdot ||\overline{v}||$

$$||F(\bar{b}) - F(\overline{a})|| \leq \int_0^1 |||DF(*)||| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}|| dt$$

$$= ||\bar{b} - \overline{a}|| \int_0^1 |||DF(tb + (1-t)a)||| dt \leq |||DF(\overline{c})||| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}||$$

Siendo c un punto del segmento que une $\overline{a}$ y $\bar{b}$ en el que $|||DF(tb + (1-t)a)|||$ alcanza su máximo.

Conclusión:

$$||F(\bar{b}) - F(\overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}||$$

□

Aplicación:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M, F \in C^1$, definida en un conjunto abierto y conexo.

$DF(\overline{x}) \equiv 0, \forall \Rightarrow F \equiv$ cte.

6.3. Derivada direccional:

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ (escalar)

$\overline{a} \sim$ Recta que pasa por $\overline{a}$ con dirección $\overline{v}$.

$r(t) = \overline{a} + t\overline{v}$.

Obsevación: Como una recta tiene infinitos vectores directores (dependiendo de la longitud), siempre tomaremos vectores directores unitarios, con $||\overline{v}|| = 1$.

Vamos a estudiar: $g(t) = F(\overline{a} + t\overline{v}) = F \circ r(t)$.

$t \sim 0 \Leftrightarrow \overline{a} + t\overline{v} \sim \overline{a}$

Definición 6.5 **Regla de la cadena**.

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(\overline{a} + h\overline{v}) - F(\overline{a})}{h} \equiv D_{\overline{v}}F(\overline{a})$$

.

Obsevación: La existencia de $D_{\overline{v}}F(\overline{a}), \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^N$ NO garantiza que F sea derivable.

Si sabemos que F SÍ es diferenciable podemos usar la regla de la cadena obteniendo:

$D_{\overline{v}}F(\overline{a}) = g'(0) = D(F \circ r)(0) = ... = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{v} \rangle$

Aplicación:

- Dirección de máximo crecimiento:

  $D_{\overline{v}}F(\overline{a}) = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{v} \rangle \leq ||\nabla F(\overline{a})|| \cdot \underbrace{||\overline{v}||}_{\equiv 1}$

  Conclusión:

  $$D_{\overline{v}}F(\overline{a}) \leq ||\nabla F(\overline{a})||$$
  $$\uparrow$$
  $$\text{El } = \text{se obtiene cuando } \overline{v} = \frac{\nabla F(\overline{a})}{||\nabla F(\overline{a})||}.$$

- Vector perpendicular a los conjuntos de nivel

  $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

  $S = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \ / \ F(\overline{x}) = 0\}$ (Conjunto de nivel)

  $\overline{a} \in S$

  Entonces: $\nabla F(\overline{a}) \perp S$

Teorema 6.6 (Derivadas parciales continuas implican función diferenciable). *Si existen todas las derivadas parciales y son continuas* $\Rightarrow F$ *diferenciable en* $\overline{a}$.

Contraejemplo de la no reciprocidad: $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Demostración. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\left|F(a+a, b+k) - F(a,b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)k\right|}{||(h,k)||} \longrightarrow 0?$$

Sumamos y restamos al numerador $F(a, b+k)$.

$$\frac{\left|\left(\underbrace{F(a+h,b+k) - F(a,b+k)}_{\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h},b+k) \text{ para algún } 0\leq\tilde{h}\leq h} - \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)h\right) + \left(\underbrace{F(a,b+k) - F(a,b)}_{\frac{\partial F}{\partial x}(a+h,b+\tilde{k}) \text{ si } 0\leq\tilde{k}\leq k} - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)k\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \leq \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h}, b+k) - \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right| \cdot |h| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}(a, b+\tilde{k}) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right| \cdot |k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = (*)$$

Aquí es donde aplicamos que las derivadas parciales son continuas: como h y k son pequeños (por lo tanto $\tilde{h} < h$ también lo será) los puntos (a,b) y $(a+h, b+k)$ también están cerca, por lo que sus imágenes por la derivada estarán también cerca, es decir, $|\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a+\tilde{h}, b+k)| \to 0$ y lo mismo con la otra.

Conclusión:

$$0 \leq (*) \leq \varepsilon \underset{\uparrow}{\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}} \leq C\varepsilon \to 0 \text{ cuando } \overline{h}, \overline{k} \to \overline{0}$$

El numerdador es la norma 1 y el denominador la norma 2.
En $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes.

□

6.4. Derivadas iteradas:

Notación: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Teorema 6.7 (Euler (orden de las derivadas)). *Si las derivadas segundas son continuas, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

6.5. Máximos y mínimos

Definición 6.8 **Máximo/mínimo local**. Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de máximo local si $\exists \epsilon > 0 \;/\; F(\vec{x}_0) \geq F(\vec{x}) \;\; \forall \vec{x} \in B_\epsilon(\vec{x}_0)$

La definición es análoga para el mínimo

Observación: Por las propiedades del gradiente, si F es diferenciable y $\vec{x}_0$ es un máximo o mínimo local, entonces debe ser $\nabla F(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definición 6.9 **Punto crítico**. $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ es un punto crítico de F si y sólo si $\nabla F(\vec{y}) = \vec{0}$

No todos los puntos críticos son máximos o mínimos, así que tenemos que clasificarlos de alguna forma. Para ello, usamos el polinomio de Taylor de orden 2, de forma que

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \langle \nabla F(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle +$$
$$\frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \epsilon$$

Simplificando nos queda que:

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \langle \nabla F(\vec{x}_0), \vec{x}-\vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_o)^T + \epsilon$$

Dado que el gradiente es 0, el punto clave es el signo de $\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0) D^2 F(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_o)^T$. Para ello, usamos las siguientes definiciones del álgebra lineal.

6.5.1. Resultados de álgebra lineal

Definición 6.10 **Matriz semidefinida y definida positiva y negativa**.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida positiva si y sólo si $\vec{v}A\vec{v}^T \geq 0 \;\; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida positiva si y sólo si $\vec{v}A\vec{v}^T > 0 \;\; \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es semidefinida negativa si y sólo si $\vec{v}A\vec{v}^T \leq 0 \;\; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$.

La matriz A de dimensión $N \times N$ es definida negativa si y sólo si $\vec{v}A\vec{v}^T < 0 \;\; \forall \vec{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 6.11. *Si una matriz es simétrica, existe una base en la cual la matriz es diagonal.*

Sea A una matriz $N \times N$. Entonces diremos que un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Dado que podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, entonces tenemos que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ si y sólo si

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Es decir, la autorrecta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una solución no trivial del sistema anterior. Sin embargo, para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ debe ser 0.

Por lo tanto, los autovalores son las soluciones de la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad.

Teorema 6.12. *Si un conjunto de autovectores es una base, entonces la matriz A expresada respecto a esa base pasa a ser diagonal, y los elementos de la diagonal son los autovalores.*

Si dos autovalores son distintos, los autovectores asociados son distintos.

Si A es simétrica, entonces el conjunto de autovectores es una base.

Volvemos ahora al cálculo.

Teorema 6.13 (Clasificación de puntos críticos). *Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$ (con dos derivadas continuas), y sea $\vec{x}_0$ un punto crítico. Entonces*

1. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **mayores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida positiva y $\vec{x}_0$ es un **mínimo local**.*
2. *Si **todos** los autovalores de $D^2F(\vec{x}_0)$ son **menores que cero**, entonces $D^2F(\vec{x}_0)$ es definida negativa y $\vec{x}_0$ es un **máximo local**.*
3. *Si **algunos** autovalores son **mayores que cero** y otros son **menores que cero**, entonces $\vec{x}_0$ es un **punto de silla**.*

4. *Si algún autovalor* ***es 0****, y el resto son mayores o menores que cero, entonces $\vec{x}_0$ es un* ***punto crítico degenerado****.*

6.5.2. Ejemplos

Tomamos $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Obtenemos los puntos críticos, es decir, los puntos en los que $\nabla F(x, y) = (0, 0)$. El punto resultante es $(0, 0)$. Estudiamos el tipo de punto crítico. Para ello, calculamos la matriz hessiana en ese punto:

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Los autovalores son las soluciones de

$$0 = det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

Por lo tanto, λ es 3 o 1. Dado que ambos autovalores son mayores que 0, entonces D^2F es definida positiva y $(0, 0)$ es un mínimo local.

6.6. Máximos y mínimos absolutos

Definición 6.14 **Máximo y mínimo absoluto**. Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. $\vec{x}_m$ es un máximo absoluto de F en A si y sólo si $F(\vec{x}_m) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in A$. La definición es análoga para el mínimo.

Teorema 6.15 (Teorema de compacidad). *Tenemos un conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto (cerrado y acotado). Supongamos la sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Entonces podemos encontrar al menos una subsucesión $\{\vec{x}_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\vec{x}_{n_j}\}$ es convergente.*

Demostración. Trabajamos en dimensión 2, pero la demostración es análoga. Como K es compacto, podemos encontrar un cuadrado Q_0 de lado L que encierre completamente a K. Divido Q_0 en 2^2 cuadrados de lado $L/2$. En alguno de ellos hay infinitos términos de la sucesión: lo llamamos Q_1 y me quedo con uno de los términos de la sucesión, al que llamamos x_1. Volvemos a dividir este cuadrado en cuatro cuadrados, elegimos uno que tenga infinitos términos de la sucesión y seleccionamos un elemento de la sucesión dentro al que llamamos x_2. Repetimos esto muchas veces, de forma que cada término x_n está encerrado en el cuadrado Q_n de lado $\frac{L}{2^n}$.

Si $k, l > n$, entonces es claro que $||\vec{x}_k - \vec{x}_l||$ es menor o igual que la diagonal de Q_n, que es $\frac{L}{2^n}\sqrt{2}$, que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por el criterio de Cauchy, entonces esta sucesión es convergente, y como K es cerrado el límite pertence a K. $\square$

Teorema 6.16. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en K. Entonces, F alcanza su máximo y mínimo absolutos en K.*

Demostración.

Como F es acotada, existe $\alpha = \sup\{F(x) \ / \ x \in K\}$. Existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ tal que si $n \to \infty$ entonces $F(x_n) \to \alpha$. Sabemos que existe $\{x_n\} \subset K$, por lo que existe una subsucesión$\{x_{n_j}\}$ convergente tal que $x_{n_j} \to x_0 \in K$

Como F es continua, $F(x_{n_k}) \to F(x_0)$, es decir $F(x_{n_j}) \to \alpha$, por lo tanto el supremo es el máximo. $\square$

6.6.1. Ejemplos

La función a estudiar es $F(x, y) = x^2 - y^2$ en la bola $\omega = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$. Es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ porque es un poliniomio.

Calculamos el diferencial y vemos qué ocurre cuando es 0

$$\nabla F = (2x, -2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Operando, vemos que el punto $(0, 0)$ es un punto de silla. Ahora sólo queda ver el comportamiento en la frontera C, cuando $x^2 + y^2 = 1$. F restringida a C quedaría de la siguiente forma:

$$F(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

El coseno tiene máximos cuando $t = 0$ y $t = \pi$, y mínimos cuando $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$. Es decir, tiene máximos absolutos en los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y mínimos absolutos en $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Teorema 6.17 (Multiplicadores de Lagrange). *Tenemos una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y una restricción $G(x_1, \cdots, x_n) = k$, resolvemos el siguiente sistema:*

$$\nabla F = \lambda \nabla G$$
$$G = k$$

6.7. Desarrollo de Taylor

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}.F \in C^{k6}$.

Queremos desarrolar F alrededor de $\overline{a} \in \mathbb{R}^N$.

Dimensión 1) $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{g^{k)}(0)}{k!}x^k + \underbrace{error}_{\frac{g^{k+1)}(s)}{(k+1)!}x^{(k+1)}}$

$F(\overline{a} + \overline{h}) = F(\overline{a}) + ...$

Más dimensiones)

Tomamos $g(t) \equiv F(t(\overline{a} + \overline{h}) + (1-t)\overline{a})$. Así hemos reducido el cálculo a dimensión 1.

$$g'(t) = \langle \nabla F(a + th), h \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + th) \cdot h_i$$

$$g'(0) = \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{h} \rangle$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{a} + \overline{h}) \cdot h_j \right) h_i = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a} + t\overline{h}) h_i h_j$$

Iterando:

$$\frac{g^{s)}(0)}{s!} = \frac{1}{s!} \sum_{i_1, i_2, ..., i_s = 1}^{N} \frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}}$$

El hesiano aparece en:

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{a} + \overline{h}) \cdot h_j \right) h_i = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a} + t\overline{h}) h_i h_j = ... =$$

$$\frac{1}{2}(h_1, ..., h_N) \cdot \left(D^2 F(\overline{a}) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$$

Desarollo de Taylor en general:

$$F(\overline{a} + \overline{h}) = F(\overline{a}) + \langle \nabla F(\overline{a}), \overline{h} \rangle + \frac{1}{2} \overline{h}^T D^2 F(\overline{a}) \overline{h} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k, \partial x_j, \partial x_i}(\overline{a}) h_k h_j h_i +$$

Teorema 6.18.
$$\frac{|F(\overline{a} + \overline{h} - P_{s,a}(\overline{h})|}{||\overline{h}||^s} \to 0, \text{ Cuando } \overline{h} \to 0$$

Además $P_{s,a}(\overline{h}$ es el único polinomio de orden S que hace que el límite sea 0).

[6] F es k veces derivable

Con estos conocimientos son posibles de realizar todos los ejercicios de la hoja de problemas 2.

7. Ejercicios

7.1. Hoja 1

$\overline{A} = x \in \mathbb{R}^N; \forall V_x \,/\, V_x \cup A \neq \emptyset$, siendo V_x un entorno abierto de x. $\overline{A} = A \cap$

Teorema 7.1. $A \subset \mathbb{R}^N$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \#1 \subset (A) \subset A$

Demostración.

$$A \text{es cerrado} \Rightarrow A^c \text{ es abierto} \Rightarrow$$
$$\forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \subset A^c \Rightarrow$$
$$A \cap B(x,\varepsilon) = \ \Rightarrow x \nexists \#1 \subset (()A)$$

□

Falta la recíproca.

a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$$

Es cerrado, porque $= [-1, 0]$ Demostración: (hay que demostrar las inclusiones $\subseteq$ y $\supseteq$)

b) No es ni cerrado ni abierto.

Obsevación: $\mathbb{R}$ es el cierre de $\mathbb{Q}$.

c)

7.2. Hoja 2

7.3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ Continuidad:

$$0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2+7y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| \leq |x| \to 0 \Rightarrow$$

Continua en 0.

Derivadas parciales en $(0,0)$

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} F(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}) = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} F(\frac{h^3/h^2}{h}) = 1$$

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} F(\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}) = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} F(\frac{0}{0+7h^2}) = 0$$

WTF DONDE VA¿¿¿¿¿¿

8. Convergencia y continuidad

Al tener definida una norma podemos definir convergencia y continuidad:

- *Convergencia:* $\overline{x_n} \to \overline{x} \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 tqn > n_0 \Rightarrow |||\overline{x} - \overline{x_n}||| < \varepsilon$.
- *Continuidad:* Sea $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $||\overline{x} - \overline{a}||_a < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{a})||_b < \varepsilon$

Observación: Es interensante ver que se puede hablar de continuidad tomando una norma en $\mathbb{R}^N$ y otra distinta en $\mathbb{R}^M$ sin por ello variar la definición de continuidad. Más adelante veremos que en $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes y qué significa que las normas sean equivalentes. (Esto no sucederá en espacios de dimensión infinita) ?????????????????