

7. Ejercicios

7.1. Hoja 1

Ejercicio 2:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^N; \forall V_x \cap V_x \cup A \neq \emptyset, \text{ siendo } V_x \text{ un entorno abierto de } x\}$. $\bar{A} = A \cap$

Teorema 7.1. $A \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado $\Leftrightarrow A^c \subset (A) \subset A$

Demostración.

A es cerrado $\Rightarrow A^c$ es abierto \Rightarrow
 $\forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \varepsilon) \subset A^c \Rightarrow$
 $A \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset \Rightarrow x \notin A$

□

Falta la recíproca.

Ejercicio 3:

a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$$

Es cerrado, porque $[-1, 0]$ Demostración: (hay que demostrar las inclusiones \subseteq y \supseteq)

b) No es ni cerrado ni abierto.

Observación: \mathbb{R} es el cierre de \mathbb{Q} .

c)

7.2. Hoja 2

Ejercicio ?:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 7y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{Continuidad:}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + 7y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

Continua en 0.

Derivadas parciales en (0, 0)

$$\lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{h^3/h^2}{h}\right) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{0}{0 + 7h^2}\right) = 0$$

7.3. 5

b) $C_{D_4}(b)$. Basta con comprobar la conmutación con a^j y con $a^j b$ siendo $j = 0, 1, 2, 3$, ya que con eso podemos ver la conmutación con todos los elementos. Se puede demostrar la conmutatividad multiplicando a derecha e izquierda por b y b^{-1} y si nos queda $= 1$, es conmutativo.

$$\begin{cases} b(a^j)b^{-1} = a^{-j}, a^j \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^{2j} = 1 \\ b(a^j b)b^{-1} = a^{-j} = a^{-j}b, a^j b \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^{2j} = 1 \end{cases}$$

7.4. 9

a)

b)

$$f(x, y) = \int_a^x yg(s)ds$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo $\left(f \text{ continua} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(xy) \underbrace{\frac{\partial xy}{\partial x}}_{=y} - g(a) \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}}_{=0} = g(xy)y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = g(xy)x$$

7.5. Ejercicio de examen:

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $g(1) = 4$.

Sea $f(x, y, z) = \int_0^{x^2 y e^z} g(t) dt$.

Demostrar que f es diferenciable y calcular $\nabla f(1, 1, 0)$.

8. Hoja 3

8.1. Problema 3:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \exists f'(x) \neq 0 \Rightarrow f$ inyectiva.

Solución: aplicando el teorema del valor medio.

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (e^x \cos(y) + 2e^x \sin(y), -e^x \cos(y))$$

$$J = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) + 2e^x \sin(y) & e^x \cos(y) + 2e^x \sin(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \det(J) &= (e^x \cos(y) + 2e^x \sin(y)) + e^x \sin(y) + e^x \cos(y) \sin(y) (-e^x \sin(y) + 2e^x \cos(y)) = \\ &= \dots = 2e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aunque el jacobiano sea siempre positivo, f no es inyectiva porque si tomamos $f(0, 0) = (1, -1) = f(0, 2\pi)$.

8.2. inventado:

Sea $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Encontrar los puntos en los que la siguiente aplicación es localmente inversible de clase C^1 .

- 1) $F \in C^1$ por ser F_1, F_2 polinomios.
- 2) $\det(J) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

En este caso:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

- 3) Por el teorema de la función inversa, existe una inversa local de F, C^1 en todo entorno de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y) \neq (0, 0)$.

Está la posibilidad de que exista la función inversa, pero no podemos deducir nada del teorema. Para verlo, recurrimos a la definición de inyectividad, y en este caso, no es inyectiva porque es una función par.

8.3. 5

a) $f \in C^1(\mathbb{R}), f' \neq 0$. No tiene sentido...

$$\begin{cases} u(x, y) = f(x) \\ v(x, y) = -y + f(x) \end{cases}$$

Probar que tiene inversa global.

Mismos pasos que en el ejercicio anterior:

- 1) $F \in C^1$ por ser F_1, F_2 , porque $f \in C^1$.
- 2) $\det(J) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ f(x) + xf'(x) & -1 \end{pmatrix} = -f'(x) \neq 0 \text{ por hipótesis}$$

Como nos piden calcular las derivadas parciales de la función inversa. (La inversa de la matriz jacobiana, es la jacobiana de la matriz inversa)

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} f'(0) & 0 \\ f(0) & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que buscamos en la matriz inversa, que en este caso es ella misma.

El teorema solo nos demuestra la existencia de la inversa local (contraejemplo: 8.2. Hay que ver la inyectividad para hablar de inversa global.

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

$$\text{Condición: } F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

$$u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$f' \text{ no se anula} \Rightarrow f \text{ es inyectiva} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$v(x_1, y_1) = v(x_2, y_2) - y_1 + x_1 f(x_1) = -y_2 + x_2 f(x_2) \xRightarrow{x_1=x_2}$$

$$y_1 = y_2$$

Hemos demostrado que F es inyectiva y por lo tanto admite inversa global.

8.4. Problema 6:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} u = 2x + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xyz \\ v = x + y + 2xy + 2x^2 \\ w = 4x + y + z + 3y^2 + 3z^2 + 6yz \end{cases}$$

- $u, v, w \in C^1$ por se surma de polinomios.

▪

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \dots \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \dots \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \dots \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \dots \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \dots \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \dots \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0) = 4$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \dots \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \dots \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}(0, 0) = 1$$

$$\det(J) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ inversa local de clase } C^1 \text{ en un entorno del origen.}$$

8.5. 8:

a)

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r$$

Por tanto, por el teorema de la función inversa, existe una inversa de clase C^1 , $\forall(r, h, \varphi) \Leftrightarrow r \neq 0$.

8.6. 9:

b: Calcular la inversa en $(2, -2\sqrt{3})$ Resolver:

$$\begin{cases} 2 = r\cos(\varphi) \\ -2\sqrt{3} = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Hay que hallar la inversa de:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

8.7. 13

$$\det(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$$

Esto es aplicando la primera ecuación de Cauchy-Riemman. Obteniendo una condición

Aplicando la otra condición en el jacobiano llegamos a $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \neq (0, 0)$

c) Queremos ver que $g(x, y) = (f_1(x, y)^2 - f_2(x, y)^2, 2f_1(x, y)f_2(x, y))$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemman. Facilito.