ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Hoja 3: Grupos III: Subgrupos. Subgrupos normales. Teoremas de Isomorfía. Construcción de homomorfismos.

1. Subgrupos de $\mathbb{Z}$.

a) Demuestra que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es cíclico, de la forma $k\mathbb{Z}$ para algún entero k.

b) Demuestra que hay tantos subgrupos en $\mathbb{Z}$ como enteros positivos.

c) Dados dos enteros positivos r, s, demuestra que $r\mathbb{Z} \subset s\mathbb{Z}$ si y sólo si r es un múltiplo de s.

d) Halla todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $6\mathbb{Z}$.

2. Otra presentación del grupo Q_8 de cuaterniones. Definimos:

$$Q_8 := \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

con las relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk.$$

a) Observa que Q_8 también se puede presentar como

$$Q_8 := \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

con las relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

b) Halla el orden de cada elemento de Q_8.

c) Observa que $(-1)i = i^3 = i(-1)$, y que -1 conmuta con i con j y con k.

d) Observa que $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

e) Halla el retículo de los subgrupos de Q_8.

f) Observa que todo subgrupo H de Q_8 es normal. Estudia los distintos grupos Q_8/H.

3. Algunas propiedades de los subgrupos normales.

a) Demuestra que si H y K son normales en G, entonces $H \cap K$ también lo es.

b) Si $N \trianglelefteq G$ y $N \subseteq H \leq G$, demuestra que:

(i) $N \trianglelefteq H$;

(ii) H/N es un subgrupo de G/N;

(iii) $H/N \trianglelefteq G/N$ si y sólo si $H \trianglelefteq G$.

c) Supongamos que $N \trianglelefteq G$ y $N \subseteq H \leq G$. Demuestra que

$$|G : H| = \mid G/N : H/N \mid.$$

4. El producto de dos subgrupos.

a) Encuentra en S_3 dos subgrupos H, K tales que HK no sea subgrupo de G.

b) Sea $(G, *)$ un grupo y sean $H < G$ y $K \lhd G$. Demuestra que $HK = KH$ y que $HK < G$. Compara este resultado con el apartado anterior.

5. Encuentra todos los subgrupos normales de S_3 y de D_4.

6. Homomorfismos de grupos: propiedades básicas. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Usando la notación multiplicativa demuestra que:

a) $f(e) = e'$, donde e denota el neutro de G y e' es el neutro de H.

b) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.

c) Si $a^k = e$ entonces $f(a)^k = e'$ y concluye que $|f(a)|$ divide a $|a|$.

d) Sean $f, g : G \to H$ dos homomorfismos de grupos. Suponemos que $G = \langle S \rangle$. Demostrar que si $f(s) = g(s)$ para cualquier $s \in S$, entonces $f = g$.

7. Se define $f \colon D_3 \to \{\pm 1\}$ mediante: $f(g) = 1$ si g es una rotación y $f(g) = -1$ si g es una simetría. Demuestra que f es un homomorfismo de grupos. Calcula el núcleo de f.

8. Si $(G, \cdot)$ es un grupo, definimos una nueva operación en G escribiendo $x * y := y \cdot x$. Demuestra que $(G, *)$ es un grupo y que $(G, *)$ y $(G, \cdot)$ son isomorfos.

9. Homomorfismos de $\mathbb{Z}$ en otros grupos, y de otros grupos en $\mathbb{Z}$.

a) Demuestra que todo homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ queda determinado por el valor $f(1)$.

b) Demuestra que para cada elemento $a \in G$ se puede definir un homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ tal que $f(1) = a$.

c) Si G es finito, el único homomorfismo $f : G \to \mathbb{Z}$ es el trivial.

10. Subgrupos de C_n.

a) Halla todos los subgrupos de C_6. *Sugerencia: usa el segundo teorema de isomorfía.*

b) Demuestra que todo subgrupo de C_n es cíclico.

c) Indica cuántos subgrupos tiene C_{100}.

11. Homomorfismos de C_n en otros grupos.

a) Observa que el grupo C_n está generado por $\overline{1}$.

(i) Si $f : C_n \to G$ es un homomorfismo de grupos, demuestra que la función queda determinada por el valor $f(\overline{1})$, y $f(\overline{1})$ es un elemento de G cuyo orden divide a n.

(ii) Recíprocamente, demuestra que si $g \in G$ es un elemento cuyo orden divide a n, entonces existe un (único) homomorfismo de grupos $h : C_n \to G$ que cumple que $h(\overline{1}) = g$.

b) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_6 en C_4.

c) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_4 en C_6.

d) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_6 en D_4.

e) Decide de manera razonada si la correspondencia $x \to 3x$ de C_{12} a C_{10} es un homomorfismo de grupos.

f) Decide de manera razonada el número de homomorfismos sobreyectivos de C_{20} a C_8. ¿Cuántos hay si no pedimos que los homomorfismos sean sobreyectivos?

12. Usando las propiedades de los homomorfismos de grupos demuestra que...

a) Si G es finito de orden 17, el único homomorfismo de G en el grupo de permutaciones S_6 es el trivial, y el único homomorfismo de S_6 en G es el trivial.

b) Sea G un grupo cíclico. Demuestra que $G \cong \mathbb{Z}$ ó $G \cong C_n$.

c) Si p es un primo y $|G| = p$, demuestra que $G \cong C_p$.

13. Homomorfismos de D_4 en otros grupos. Recuerda que el grupo D_4 está generado por dos elementos A y B que complen las condiciones $A^4 = Id$, $B^2 = Id$, y $AB = BA^{-1}$.

a) Si $f : D_4 \to G$ es un homomorfismo de grupos demuestra que $f(A)^4 = e$, $f(B)^2 = e$, y $f(A)f(B) = f(B)f(A)^{-1}$.

b) Recíprocamente, si a y b son dos elementos de G que cumplen las propiedades: $a^4 = e$, $b^2 = e$, y $ab = ba^{-1}$, demuestra que existe un (único) homomorfismo de grupos $h : D_4 \to G$ que cumple que $h(A) = a$ y $h(B) = b$.

c) Halla todos los homomorfismos de grupos de D_4 en C_6.

14. Demuestra que S_3 y D_3 son isomorfos. Describe un homomorfismo inyectivo de D_n en S_n.

15. Demuestra que el grupo D_4 no es isomorfo al grupo de cuaterniones. *Sugerencia: Calcula el número de elementos de orden 2 que tiene cada grupo.*

16. Si $|X| = |Y|$, demuestra que $S_X \cong S_Y$.

17. El grupo de automorfismos de un grupo.

a) Demuestra que la composición de homomorfismos de grupos es un homomorfismo de grupos.

b) Si $f : G \to H$ es un isomorfismo de grupos, demuestra que $f^{-1} : H \to G$ es un isomorfismo. Así, si $G \cong H$, entonces $H \cong G$.

c) Si $G \cong H$ y $H \cong K$, demuestra que $G \cong K$.

d) Sea $\mathrm{Aut}(G)$ el conjunto de todos automorfismos de G. Demuestra que $\mathrm{Aut}(G)$ es un grupo con la composición.

e) Demuestra que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong C_2$.

f) Sea G un grupo, sea $x \in G$ y sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Demuestra que x y $\alpha(x)$ tienen el mismo orden.

g) Sea $g \in G$. Demuestra que la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \mapsto & xgx^{-1} \end{array}$$

es un automorfismo de G.

h) Se define el *interior de* G, $\mathrm{Int}(G)$, como el subconjunto de los automorfismos de G que son de la forma descrita en el apartado anterior. Demuestra que $\mathrm{Int}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

i) Describe $\mathrm{Int}(D_3)$.

j) Demuestra que $\mathrm{Int}(G)$ es isomorfo a un cociente de G por algún subgrupo normal H de G.