Un grupo G, que supondremos numerable, actúa sobre una variedad M si hay una función

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \to & M \\ (g, p) & \mapsto & g \cdot p \end{array}$$

tal que

1. (Asociatividad) $(g_1 \cdot g_2) \cdot p = g_1 \cdot (g_2 \cdot p)$,

2. (Neutro) $1 \cdot p = p$.

3. (Diferenciabilidad) Para cada $g \in G$ la función biyectiva $L_g : M \to M$, definida por $L_g(p) := g \cdot p$ y con inversa $L_{g^{-1}}$, es un difeomorfismo.

Dado un punto $p \in M$, su **órbita** $\mathcal{O}(p)$ es el conjunto de todos los puntos de M que se obtienen como productos $g \cdot p$, con $g \in G$ y p un punto fijado. Decimos que la acción es **libre** si para todo punto de p la función

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{O}(p) \\ (g & \mapsto & g \cdot p \end{array}$$

es inyectiva.

Decimos que la acción del grupo G en la variedad M es **propiamente discontinua** si:

1. Para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p tal que el conjunto de elementos $g \in G$ tales que $U \cap g(U) \neq \emptyset$ es finito.

2. Si $p, q \in M$ no están en la misma órbita de G existen entornos U, V, de p y q, tales que para todo $g \in G$ se verifica $U \cap g(V) = \emptyset$.

TEOREMA

Supongamos dada una acción libre y propiamente discontinua de un grupo numerable G en una variedad M. Definimos $N := \{\mathcal{O}(p) \mid p \in M\}$, **el espacio de órbitas de la acción**, de forma que hay una función natural

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & N \\ p & \mapsto & \mathcal{O}(p). \end{array}$$

Entonces, $\pi : M \to N$ es un revestimiento y se puede dotar a N de una estructura de variedad diferenciable que hace de π una función diferenciable.

DEMOSTRACIÓN

1. Comenzamos dotando a N de una topología que haga que π sea continua, es decir, N tiene la topología con más abiertos tal que la anteimagen por π de cada uno de ellos es abierto en M. La segunda condición en la definición de acción propiamente discontinua implica directamente que N es Hausdorff.

2. Como la acción es libre y propiamente discontinua, en particular, debido a la primera condición en la definición de acción propiamente discontinua, cada punto $p \in M$ tiene un entorno U_p tal que $U_p \cap g(U_p) \neq \emptyset$ implica $g = 1$.

3. Cada uno de los abiertos U_p se proyecta biyectivamente, mediante π, sobre su imagen $V_p := \pi(U_p) \subset N$. Además,

$$\pi^{-1}(V_p) = \bigcup_{g \in G} g(U_p),$$

   que es una unión disjunta de abiertos de M, y, por tanto, un abierto. En consecuencia, por definición de la topología de N, V_p es un abierto de N y π es un revestimiento de variedades topológicas, con las cartas coordenadas en los abiertos V_p definidas mediante cartas en los abiertos U_p, que son homeomorfos con ellos.

   Queda un pequeño detalle ya que falta ver que N admite una base de abiertos numerable, pero eso es consecuencia de que la imagen por π de un abierto es abierto y de que M la admite.

4. Finalmente, debemos comprobar que los cambios de carta en N son difeomorfismos. Supongamos que $V_1, V_2 \subset N$ son dos abiertos coordenados en N con intersección no vacía. Se han construido a partir de abiertos coordenados $U_1, U_2 \subset M$ que pueden tener intersección vacía, pero con seguridad existe $g \in G$ tal que $U_1 \cap g(U_2) \neq \emptyset$, ya que en caso contrario es imposible que sea $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

   Entonces, el cambio de carta se puede ver como una composición de tres difeomorfismos: los dos correspondientes a las cartas U_1 y U_2 y la multiplicación por g en M.

$\square$