1. Hoja 1

2. Hoja 2

2.1. Problema 4

Sea G un grupo. Demostrar que $Z(G) = \{X \;/\; X \in G(\forall Y \in G)XY = YX\}$

- $1 \in Z(G)$
- $X_1, X_2 \in GX_1Y = YX_1 \rightarrow X^{-1}XYX^{-1} = X^{-1}YXX^{-1} \Rightarrow X^{-1}Y = YX^{-1}$, es decir, el inverso también conmuta, por lo que los inversos de $X_1, X_2 \in Z(G)$
- $X_1X_2Y = X_1YX_2 = YX_1X_2, X_1 \cdot X_2 \in Z(G)$ el producto de 2 elementos del grupo está en el centro, por lo que es cerrado por la operación.

a)

$$Z(D_3), D_3 = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2 \\ b, ab, a^2b \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} a^3 = 1 = b^2 \\ ba^j = a^{-j}b \end{Bmatrix}$$

b)

$$Z(D_4) = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2, a^3 \\ b, ab, a^2b, a^3b \\ a^4 = 1 = b^2 \\ ba = a^{-1}b \end{Bmatrix}$$

$$Z(D_4) = \left\{x \;/\; x \in D_4axa^{-1} = x = bxb^{-1}\right\}$$

Sin sentido... $a^ib \notin Z(D_4).(a^2 \neq 1)$

$a^i \in Z(D_4) \Leftrightarrow (a^{2i} = 1)$

$Z(D_4) = \{1, a^2\} =< a^2 >$

2.2. 5

b) $C_{D_4}(b)$. Basta con comprobar la conmutación con a^j y con a^jb siendo $j = 0, 1, 2, 3$, ya que con eso podemos ver la conmutación con todos los elementos. Se puede demostrar la conmutatividad multiplicando a derecha e iezquierda por b y b^{-1} y si nos queda $= 1$, es conmutativo.

$$\begin{cases} b(a^j)b^{-1} = a^{-j}, a^j \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \\ b(a^jb)b^{-1} = a^{-j} = a^{-j}b, a^jb \in C_{D_4}(b) \Leftrightarrow a^2j = 1 \end{cases}$$