Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra Conmutativa. Curso 2014-15

Titulación Matemáticas

Primer Parcial

Jueves, 19 de febrero de 2015

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE: ______________

DNI: ______________________ GRUPO: ______________

Problema 1. (20 puntos) Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Los anillos $\mathbb{Z}_{50}$ y $\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_2$ son isomorfos. VERDADERO

Tma. Chino del Resto: Si $I_1, I_2 \subset R$, son ideales tales que: $I_1 \cap I_2 = (0)$ y además $I_1 + I_2 = R$, entonces $R \cong R/I_1 \times R/I_2$

(Ejercicios 4, 5 hoja 2)

En este caso $R = \mathbb{Z}_{50}$; $I_1 = \langle \overline{25} \rangle$ e $I_2 = \langle \overline{2} \rangle$.

$I_1 \cap I_2 = \langle \overline{25} \rangle \cap \langle \overline{2} \rangle = \langle \overline{50} \rangle = (\overline{0})$

y además $I_1 + I_2 = \langle \overline{25} \rangle + \langle \overline{2} \rangle = \langle \overline{1} \rangle = \mathbb{Z}_{50}$;

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{50} \cong \mathbb{Z}_{50} / {}^{25\mathbb{Z}}/_{50\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{50} / {}^{2\mathbb{Z}}/_{50\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2$.

(b) El ideal $\langle 3 \rangle \subset \mathbb{Z}_{15}$ es un $\mathbb{Z}_5$-módulo.

VERDADERO

1ª Forma: Usando los ejercicios 1 y 2 de la hoja 3.

$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{15}} \langle \overline{3} \rangle = \langle \overline{5} \rangle \Rightarrow \langle \overline{3} \rangle$ es un $\mathbb{Z}_{15} / \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{15}} \langle 3 \rangle$-módulo, ie.

es un $\mathbb{Z}_{15} / {}^{5\mathbb{Z}}/_{15\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_5$-módulo

2ª Forma: Basta comprobar que el producto $\overline{n} \in \mathbb{Z}_5$ por un elemento $\overline{m} \in \langle \overline{3} \rangle \subset \mathbb{Z}_{15}$ está bien definido: (ie. no depende de la representante escogida): En efecto:

$\overline{n} \cdot \overline{m} = (n + 5k) \cdot (3s + 15\ell) = 3ns + 15\ell n + 15ks + 5 \cdot 15 m\ell$

$k, \ell \in \mathbb{Z}$

$\overline{m} = 3s + 15\ell$

$\equiv \overline{n \cdot 3s} \in \langle \overline{3} \rangle$ en $\mathbb{Z}_{15}$.

$= \overline{nm}$

(c) Sea $f : R \to T$ un homomorfismo de anillos, y supongamos que T es un anillo reducido. Entonces R es necesariamente un anillo reducido.

FALSO

1er ejemplo

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$\bar{n} \bmod 4 \longrightarrow \bar{n} \bmod 2$$

2º ejemplo

$$K[x]/\langle x^2 \rangle \longrightarrow K$$

$$r \in K \longrightarrow r$$

$$x \longrightarrow 0$$

(d) Existe una parte multiplicativa $S \subset \mathbb{Z}_{10}$ tal que $S^{-1}\mathbb{Z}_{10}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.

VERDADERO

Basta tomar $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$. Entonces si:

$$\varphi : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}_{10}$$

se tiene que $\ker\varphi = \langle \bar{5} \rangle$, luego $\frac{\mathbb{Z}_{10}}{5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}} \hookrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}_{10}$.

Además, en $S^{-1}\mathbb{Z}_{10}$ se tiene que:

$\bar{2}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$; $\bar{5} = \bar{0}$. $\bar{6} = \bar{1}$; $\bar{7} = \bar{2}$; $\bar{8} = \bar{3}$; $\bar{9} = \bar{4}$;

es fácil ver que $\# S^{-1}\mathbb{Z}_{10} = 5$, y que además es un cuerpo. Luego necesariamente

$$S^{-1}\mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_5.$$

Problema 2. (10 puntos) Sea R un anillo y sea $S \subset R$ una parte multiplicativa. Enuncia y demuestra la propiedad universal del localizado $S^{-1}R$.

Problema 3. (10 puntos) Para cada entero $n > 1$ consideramos el homomorfismo natural de paso al cociente $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$. Decide, de manera razonada, si existe algún $n \neq 20$ y un homomorfismo f que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{Z}_{20} \\ \mathbb{Z}_n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

1ª Forma

f existe $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} \phi \subset \operatorname{Ker} \pi \Leftrightarrow \langle n \rangle \subset \langle 20 \rangle$

$\Leftrightarrow 20 \mid n$.

2ª Forma f para empezar, si existe, debe ser un homomorfismo de grupos. Como además necesariamente $\pi(1) = \bar{1} \bmod 20$, y $\phi(1) = 1 \bmod n$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{1}) = \bar{1} \bmod 20$. Como $|\bar{1} \bmod n| = n \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(\bar{1})| \mid n \Rightarrow \boxed{20 \mid n.}$ Veamos que esta condición es suficiente para def el hom. de anillos. Definimos:

$$f(\bar{m}) := \pi(m) = m \bmod 20$$

tomando $m \in \{\phi^{-1}(\bar{m})\}$.

Hace falta ver que f está bien definida (ie. que la imagen de $\bar{m}$ no depende del representante escogido).

Si $m' \in \mathbb{Z}$, y $m' \in \phi^{-1}(\bar{m}) \Rightarrow m - m' \in \langle n \rangle$

Entonces $f(m') = \pi(m + kn) \equiv \overline{m + kn} \bmod 20 =$

$= \bar{m}$ si $n \in \langle 20 \rangle$.

Y ahora es fácil ver que si $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in \mathbb{Z}_n$, $f(\bar{m}_1 + \bar{m}_2) =$
$= \pi(m_1 + m_2) = \overline{m_1 + m_2} \bmod 20 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 \bmod 20$, y lo mismo para $f(\bar{m}_1 \bar{m}_2)$.