Análisis Matemático

Víctor de Juan Sanz

13/14 C1

Índice

Datos de interés:
Jesus Garcia Azorero
Despacho: 17-608
Correo: jesus.azorero@uam.es

1. Contenido de la asignatura

1.1. Preliminares

Repaso de contenidos de Cálculo II como conjuntos abiertos y cerrados, gradiente ...

1.2. Teorema funcion inversa, implicita y rango

Aplicación a funciones no lineales de los teoremas fundamentales de cálculo II

1.3. Mínimos y máximos condicionados

Multiplicadores de Lagrange

1.4. Subvariedades diferenciales

Objetos de dimensión n en espacios de dimensión m ($n < m$).

1.5. Integración en subvariedades diferenciales

1.6. Teorema de Stokes

Demostración del teorema con lenguaje de las formas diferenciales.

2. Preliminares del análisis matemático

A lo largo del curso vamos a trabajar en $\mathbb{R}^n = (x_1, \ldots, x_n)$ $x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$

2.1. Producto escalar, norma y distancia

Durante todo el año denotaremos al vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $\overline{x}$ por comodidad.

Definición 2.1 **Producto escalar euclídeo**.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Propiedades:

- $\langle \lambda \overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{x} + \overline{z} \rangle + \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
- $\langle gx, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$

Las tres primeras son la consecuencia de que el producto escalar tiene que ser bilineal.

Definición 2.2 **Norma euclídea**.

$$||\overline{x}|| = (\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \cdots = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades:

- $||\overline{x}|| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
- Homogeneidad: $||\lambda \overline{x}|| = \lambda \, ||\overline{x}||$
- $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{x}||$

Definición 2.3 **Norma**. Cualquier operación que cumpla las 3 propiedades anteriores es una **norma**.

Lema 2.4. $||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$ *para cualquier producto escalar* $*$.

Definición 2.5 **Norma p.** Las normas p $||\cdot||_p$ se definen todas de la misma forma:

$$||\overline{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay dos casos particulares, la norma uno

$$||\overline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

y la norma infinito

$$||\overline{x}||_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Vamos a demostrar que la norma p cumple las 3 propiedades de una norma. Para ello, nos apoyaremos en dos teoremas previos:

Teorema 2.6 (Desigualdad de Young). *Sea $p > 1$ y tomamos p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (exponente conjugado). Entonces:*

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \cdot |a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

Demostración. Se utiliza la idea de la función logaritmo, que es cóncava[1] y creciente. Tomando 2 puntos A y B tenemos la condición de concavidad

$$t \log A + (1-t) \log B \leq \log(tA + (1-t) \cdot B)$$

. Utilizando la derivada hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y tomamos un punto que dista t de A y $(1-t)$ de B. Como la función es cóncava sabemos que ese valor será menor que el valor del logaritmo en un punto t entre A y B.

Tomando $A = |a|^p$, $B = |b|^p$ y $t = \frac{1}{p} \to 1 - t = \frac{1}{p'}$ tenemos que

$$\frac{1}{p} \cdot log|a|^p + \frac{1}{p'} \cdot log|b|^{p'} \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$

$$\log|a| + \log|b| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$

$$\log|ab| \leq log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right)$$

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$$

□

Teorema 2.7 (Desigualdad de Hölder). *Se trata de una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ocurre en el caso* $p = 2$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq ||\overline{x}||_p \, ||y_i||_p$$

Demostración. Tomamos

$$a_i = \frac{|x_i|}{||\overline{x}||_p}$$
$$b_i = \frac{|y_i|}{||\overline{y}||_{p'}}$$

Tenemos que

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{p'} b_i^{p'}$$

Sustituimos:

$$frac|x_i|||x||_p \cdot \frac{|y_i|}{||y||_p} \leq \frac{|x_i|^p}{p \cdot ||x||_p^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p' \cdot ||y||_{p'}^p}$$

Tomamos sumatorios y, teniendo en cuenta que $||x||_p^p = \sum |x_i|^p$, nos queda

$$\frac{1}{||x||_p \, ||y||_{p'}} \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p \, ||x||_p^p} \sum |x_i|^p + \frac{1}{p' \, ||y||_{p'}^{p'}} \sum |y_i|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Una vez probadas las dos desigualdades anteriores, pasamos a probar la desigualdad triangular:

Demostración. El objetivo es demostrar que

$$||\overline{x} + \overline{y}||_p \leq ||\overline{x}||_p + ||\overline{y}||_p$$

y vamos a hacerlo en varios pasos.

Para evitarnos las raíces empezamos con $||\overline{x} + \overline{y}||_p^p$

$$||\overline{x} + \overline{y}||_p^p = \sum_{1}^{N} |x_i + y_i|^p = \sum_{1}^{N} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} =$$
$$= \sum_{1}^{N} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{1}^{N} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (2.7) tenemos:

$||\overline{x}+\overline{y}||_p^p \leq$

$$\sum (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|x_i+y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*} + \sum (|y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sum \left((|X_i+y_i|^{p-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{*}$$

Por ser p y p' exponentes conjugados es fácil comprobar que $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$
Sacamos factor común y pasamos al otro lado obteniendo (PASO INTERMEDIO?)

$$\left(\sum_1^N |x_i+y_i|^p \right)^{\overbrace{\left(1-\frac{1}{p'}\right)}^{p}} = ||\overline{x}+\overline{y}||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

Guille: esta demostración es muy, muy rara. □

EJERCICIO PROPUESTO: Tomamos en el plano el conjunto de los puntos cuya norma es 1. Tomando en la norma p=2 sale la circunferencia. ¿Y en p=3?

Observación: Estos argumentos se pueden utilizar para demostrar

$$\int |f \cdot g| \; dx \leq \left(\int |f|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} \; dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

COMPLETAR.

Definición 2.8 **Distancia euclídea**.

$$d(\overline{x},\overline{y}) = ||\overline{y}-\overline{x}||$$

Propiedades:

- La distancia es siempre positiva: $d(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$
- $d(\overline{x},\overline{x}) = 0$
- Simetría: $d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$
- Desigualdad triangular $d(\overline{x},\overline{z}) \leq d(\overline{x},\overline{y}) + d(\overline{y},\overline{z})$. La distancia entre 2 puntos es menor o igual en línea recta que pasando por un punto intermedio.

Definición 2.9 **Distancia**. Cualquier operacion que cumpla las 3 propiedades anteriores es una distancia.

Recapitulando Con un producto escalar puedo definir una norma y con esa norma puedo definir una distancia. Pero... ¿Podemos definir una norma que no venga de un producto escalar y/o alguna distancia que no provenga de una norma? Sí, por ejemplo

$$\tilde{d}(\overline{x},\overline{y}) = |\mathrm{arc\,tg}(y) - \mathrm{arc\,tg}(x)|$$

No cuesta mucho comprobar que cumple las 3 propiedades de una distancia. Además, distancia es cuanto menos curiosa porque nunca será mayor de π.

Podemos comprobar que si existiera una norma que midiese esta distancia tendríamos

$$||\tilde{\overline{x}}|| = \tilde{d}(\overline{x},\overline{0}) = |\mathrm{arc\,tg}(x)|$$

pero esto no cumple la propiedad: $||\tilde{\lambda x}|| = |\mathrm{arc\,tg}\,\lambda x| \neq |\lambda|\,|\mathrm{arc\,tg}\,x| = |\lambda x|\,||\tilde{x}||$ ya que ninguna distancia puede ser mayor que π y tomando un $\lambda > \pi$ se produciría la contradicción.

2.2. Relación norma - producto escalar

Teorema 2.10. *Supongamos que tengo un producto escalar* $*$ *y una norma asociada*

$$||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$$

. Entonces

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = ||\overline{x}||^2 + ||\overline{y}||^2 + 2(\overline{x} * \overline{y})$$

Demostración.

$$||\overline{x}+\overline{y}||^2 = (\overline{x}+\overline{y}) * (\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}*\overline{x} + \overline{x}*\overline{y} + \overline{y}*\overline{x} + \overline{y}*\overline{y} = ||\overline{x}||^2 + ||\overline{y}||^2 + 2(\overline{x}*\overline{y})$$

□

Esa norma asociada al producto escalar tiene dos propiedades importantes:

- Paralelogramo: $||\overline{x}+\overline{y}||^2 + ||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 2\left(||x||^2 + ||x||^2\right)$
- Polarización: $||\overline{x}+\overline{y}||^2 - ||\overline{x}-\overline{y}||^2 = 4(\overline{x}*\overline{y})$

2.3. Equivalencia de normas

Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^N$. Si intento calcular la norma de un vector $\overline{x}$

$$||\overline{x}|| = \left|\left|\sum x_i e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{N} ||x_1 e_1|| = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \cdot ||e_i||$$

Tenemos: $||\overline{x}|| \leq \sum_{i=1}^{N} c_i|x_i|$ siendo $c_i = ||e_i||$. Aplicando Cauchy-Schwarz nos queda

$$\sum_{i=1}^{N} \left(c_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum \left(|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, puedo controlar cualquier norma con una constante y la norma euclídea:

$$|||\overline{x}||| \leq C\,||x||_2$$

En particular, $0 \leq |||\overline{x_n} - \overline{x}||| \leq c||\overline{x_n} - \overline{x}||$.

Observación: Aplicar Holder en vez de Cauchy, sale la igualdad con la norma p y no con la euclídea.

Aplicación: Sea $F(\overline{x} = |||\overline{x}|||$ y $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$|F(\overline{x}) - F(\overline{y})| = ||||\overline{x} - \overline{y}|||| = |||\overline{x} - \overline{y}||| \leq C||\overline{x} - \overline{y}||$$

Utilizando: $|||\overline{a} - \overline{b}||| \geq |||\overline{a}||| - |||\overline{b}|||$ [2]

Interpretación del resultado: Cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es CONTINUA respecto de la norma euclídea. [3]

Teorema 2.11 (Relación norma $\leftrightarrow$ producto escalar). $||\cdot||$ *una norma cualquiera de* $\mathbb{R}^N$ *proviene de un producto escalar si y sólo si la norma satisface la identidad del paralelogramo.*

Demostración. En el apartado anterior (2.2) demostramos la implicación hacia la derecha. Vamos a demostrar la recíproca: Suponemos que la norma satisface la identidad del paralelogramo:

$$\left|\left|\overline{a} + \overline{b}\right|\right|^2 + \left|\left|\overline{a} - \overline{b}\right|\right|^2 = 2\,||\overline{a}||^2 + 2\left|\left|\overline{b}\right|\right|^2 \tag{1}$$

Queremos probar que existe un producto escalar $*$ tal que $||\overline{x}|| = (\overline{x} * \overline{x})^{\frac{1}{2}}$, así que definimos uno utilizando la identidad de polarización:

$$\overline{x} * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(||\overline{x} + \overline{y}||^2 - ||\overline{x} - \overline{y}||^2\right)$$

Queremos probar que, efectivamente, $*$ es un producto escalar, así que tenemos que demostrar las siguientes propiedades:

1. $\overline{x} * \overline{y} = \overline{y} * \overline{x}$.
2. $\overline{x} * \overline{x} \geq 0 \quad \forall\, \overline{x}$
3. $(\overline{x} * \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$
4. $(\lambda \overline{x}) * \overline{y} = \lambda\,(\overline{x} * \overline{y})$
5. $(\overline{x} + \overline{y}) * \overline{z} = \overline{x} * \overline{x} + \overline{y} * \overline{z}$

Las propiedades 1, 2 y 3 son triviales. Vamos con 4 y 5

[2](la desigualdad triangular con restas, que se saca con un simple cambio de variable)

[3]Continua si la tomas como una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$

Demostración de la 4ª propiedad Demostraremos que se cumple por inducción cuando $\lambda \in \mathbb{N}$. Primero probamos para $\lambda = 2$.

$$(2\overline{x}) * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(|||2\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||2\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|||\underbrace{\overline{x}}_{a} + \underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2 - |||\underbrace{\overline{x}}_{a} + \underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{-b}|||^2\right) = \qquad \text{usando (1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2|||\overline{x}|||^2 + 2|||\overline{x}+\overline{y}|||^2\right) =$$

$$= 2\frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) = 2(\overline{x} * \overline{y})$$

Conclusión: si $\lambda = 2$ vemos que sale fuera.
Paso 2: $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{N}$
Inducción completa: suponemos el resultado cierto para 1,...,n-1. Queremos probar el resultado para n.

$$(n\overline{x}) * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(|||n\overline{x}+\overline{y}|||^2 - |||n\overline{x}-\overline{y}|||^2\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(|||(n-1)\overline{x} + \underbrace{\overline{x}+\overline{y}}_{b}|||^2 - |||\underbrace{(n-1)\overline{x}}_{a} + \underbrace{\overline{x}-\overline{y}}_{b}|||^2\right) =$$

$$... = 2(\overline{x} * \overline{y}) + (n-2)(\overline{x} * \overline{y}) = n(\overline{x} * \overline{y})$$

Paso 3: $\lambda = n$ con $n \in \mathbb{Z}$
Utilizaremos $(-\overline{x}) * \overline{y} = -(\overline{x} * \overline{y}$ y se acaba saliendo.
Paso 4: $\lambda = n$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y} = q\left(\left(\frac{p}{q}\overline{x}\right) * \overline{y}\right) = (q \cdot \frac{p}{q}\overline{x}) * \overline{y} = (p\overline{x} * \overline{y}) = p\left(\overline{x} * \overline{y}\right)$$

Multiplicamos por q y lo metemos, simplifica con el denominador y la p si puede salir.
Paso 5: $\alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha = \liminf nr_n$. Utilizaremos el resultado previo de que cualquier norma es continua.
$\overline{x}, \overline{y}$ fijos.
Revisar: Los $|||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2$ y $|||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2$ son continuos.

$$\alpha\overline{x} * \overline{y} = \frac{1}{4}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(||r_n\overline{x}+\overline{y}|||^2||| - |||r_n\overline{x}-\overline{y}|||^2|||\right) = \lim_{n\to\infty}(r_n\overline{x} * \overline{y}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\overline{x} * \overline{y}) = \alpha(\overline{x} * \overline{y})$$

Demostración de la 4 propiedad:

$$A = (\overline{x}+\overline{y}) * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}+\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)$$

$$B = \overline{x} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{x}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{x}-\overline{z}|||^2\right)$$

$$C = \overline{y} * \overline{z} = \frac{1}{4}\left(|||\overline{y}+\overline{z}|||^2 - |||\overline{y}-\overline{z}|||^2\right)$$

Demostraremos que $A - B - C = 0$
COMPLETAR la comprobación. $\square$

Observación: $d(\overline{x},\overline{y}) = |||\overline{x}-\overline{y}|||$para alguna norma$||| \cdot |||$ $\Leftrightarrow$ $(d(\overline{x}+\overline{z}) + d(\overline{y}+\overline{z}) = d(\overline{x},\overline{y}) \wedge d(\lambda\overline{x},\lambda\overline{y} = |\lambda|\, d(\overline{x},\overline{y}))$

3. Topología

Definicion:

$$B_R(\overline{x}_0) = \overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; \underbrace{d(\overline{x},\overline{x}_0)}_{||\overline{x}-\overline{x}_0||} < R$$

Para evitar jaleos, al tratar la distancia vamos a tomar la norma euclídea

$$A \subset \mathbb{R}^N \text{abierto} \Leftrightarrow \forall \overline{a} \in A, \exists \varepsilon(a) > 0 \;/\; B_\varepsilon(A) \subset A.$$
$$B \subset \mathbb{R}^N \text{cerrado} \Leftrightarrow B^c(= \mathbb{R}^N - B)\text{abierto}.$$

Teorema 3.1 (Caracteriación de cerrados en términos de sucesiones).

$B \subset \mathbb{R}^N$*cerrado* $\Leftrightarrow$ *para cuaquier sucesión convergente*$X_n \subset B$*entonces*$\lim X_n \in B$

Teorema 3.2. *Suponemos conjuntos de dimensión finita:*

- *Unión arbitraria de abiertos* $\rightarrow$ *abierto*
- *Intersección finita de abiertos* $\rightarrow$ *abierto*
- *Union finita de cerrados* $\rightarrow$ *cerrado*
- *Intersección arbitraria de cerrados* $\rightarrow$ *cerrado*

Definicion: Punto de acumulación

La idea intuitiva es aquellos puntos a los que puedo llegar en el límite, es decir, puntos que a su alrededor a una distancia arbitrariamente pequeña existen otros puntos del conjunto.

$$A \subset \mathbb{R}^N a \in A \subset (A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(a) - a) \cap \neq \emptyset$$

Siendo $A \subset (A)$ es el conjunto de los puntos de acumulación.

Definicion: Frontera
La frontera son aquellos puntos que en su entorno (para cualquier ε) hay puntos

$$A \subset\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$$

Definicion: Interior
Es el conjunto abierto más grande subconjunto del conjunto total.

Definicion: Cierre
El conjunto cerrado más pequeño en el que está contenido el conjunto total.

Observación: Cierre e interior no los vamos a definir formalmente porque se dan por supuesto.

Teorema 3.3 (Conjunto cerrado y acotado). *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Son equivalentes:*

- *K cerrado y acotado.*
- *Para cualquier sucesión $X_n \subset K$, podemos encontrar una subsucesión convergente $X_{n_j} \subset X_n$.*
- *Dado cualquier recubrimiento A_i abierto de modo que $K \subset \cup A_i$ puedo encontrar un recubrimiento finito $A_j, j = 1, ..., M \;/\; K \subset \cup_{i=1}^M A_i$*

Definicion: Conjunto compacto
Un conjunto que cumpla cualquiera de las 3 propiedades anteriores.

Teorema 3.4. *En $\mathbb{R}^N$ se cumple que las 3 propiedades anteriores son equivalentes 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3*

Demostración.

Demostración. 2 $\Rightarrow$ 1)
Si no estuviera acotado entonces no sería posible encontrar una subsucesión convergente en la sucesión de elementos de norma 1, norma 2, norma 3... lo que contradice 2.

Y si no fuera cerrado, lo que pasaría sería: ... que contradice 2 □

Demostración. 1 ⇒ 2)
Sea $K \subset \mathbb{R}^N$, cerrado y acotado. Sea $X_n \subset K$ Vamos a utilizar que: sea $\overline{X_n} = (X_i^i)$ tenemos

$$\overline{X_n} \subset K \subset B_R(\overline{0}) \Rightarrow ||X_N|| \leq R, \forall N \Rightarrow \left|X_n^j\right| \leq R$$

Ahora vamos a aplicar el argumento de bisección [4] para seleccionar la sucesión que nos interesa.

Para ello recordamos el criterio de Cauchy:

$$A_N \subset \mathbb{R}\text{convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \;/\; n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Con el criterio de bisección podemos encontrar una subsucesión convergente de la siguiente manera: definimos una subsucesión que converja a la primera coordenada, después con el mismo criterio podemos arreglar la sucesión para que converja a la segunda coordena.

□

□

Teorema 3.5. *$K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto.*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $K, \exists x_m, x_M \in K \;/\; F(X_m) \leq F(x) \leq F(X_M), \forall x \in K$, es decir, F alcanza su máximo y su mínimo.

Demostración.

Paso 1.1) Vamos a demostrar que el conjunto está acotado superiormente:

Por reducción al absurdo, se puede encontrar una subsucesión convergente que por ser compacto tiene que ser convergente a un elemento pertenciente al conjunto, pero esa sucesión por ser no acotada tenemos: $\exists x_n \in K \;/\; F(\overline{X_n}) \geq n$

Paso 1.2) De manera totalmente análoga.

Paso 2) Vamos a demostrar la existencia de X_M: Por ser un conjunto acotado, tenemos un supremo en ese conjunto. ¿Ese supremo pertenecerá al conjunto?. Si no perteneciera, podríamos encontrar una subsucesión convergente al supremo lo que contradice la condición de acotado. □

Aplicación: $F(\overline{x}) = |||\overline{x}|||$ una norma (que ya sabemos que es continua):

Conclusión: $m\,||x|| \leq |||\overline{x}||| \leq C||\overline{x}||$

Teorema 3.6. *En $\mathbb{R}^N$ TODAS las normas son equivalentes.*

3.1. Conexión

Definicion: Conexión por caminos

Dados $a, b \in C$ podemos encontrar una aplicación continua $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b, \varphi(t) \in C, \forall t \in [0, 1]$

Definicion: Conexión

Para cualquier par de abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^N \;/\; C \subset A \cup B$ si $A \cap C \neq \wedge B \cap C \neq \;\Rightarrow A \cap B \neq$.

Observación: Es curioso comprobar que estas 2 definiciones no son equivalentes. Si tomamos el conjunto

$$\{(x, 0), x \in (0, 1]\} \bigcup \{(0, y), y \in (0, 1]\} \bigcup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, y\right), y \in [0, 1]\}$$

Podemos razonar que sí es conexo por caminos, pero no según la otra definición.

4. Funciones continuas, abiertos y cerrados

Sea F continua:
1) A abierto $\not\Rightarrow F(A)$ abierto.
2) B cerrado $\not\Rightarrow F(B)$ cerrado.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Definimos

$$F^{-1}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; F(\overline{x}) \in A\}$$

Teorema 4.1 (Función inversa).
- *F continua* $\wedge$ *A abierto* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *abierto.*
- *F continua* $\wedge$ *B cerrado* $\Rightarrow F^{-1}(A)$ *cerrado.*

Aplicación:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + cos(x|y|) - e^z < 1\}$$
$$F(x, y, z) = x^2 + cos(x|y|) - e^z < 1$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

COMPLETAR

Demostración. 1)

$$\overline{x} \in F^{-1}(A) \text{Queremos hallar } R > 0 \;/\; B_R(\overline{x}) \subset F^{-1}(A)$$
$$\overline{x} \in F^{-1}(A) \Leftrightarrow F(\overline{x}) \in A$$
$$\exists \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(F(\overline{x})) \subset A$$
$$\text{es decir: si} ||\overline{z} - F(\overline{x})|| < \varepsilon \Rightarrow \overline{z} \in A$$

$$\text{F continua} \Rightarrow \exists\delta > 0 \;/\; \underbrace{||\overline{x} - \overline{s}|| < \delta}_{\overline{s}\in B_R?(\overline{x})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{s})|| < \varepsilon.\text{en particular,} F(\overline{s}) \in A; s \in F^{-1}(A)$$

Conclusión: Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que $s \in B_R(\overline{x}) \Rightarrow s \in F^{-1}(A)$. □

4.1. Aplicaciones lineales

Sea: $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$
L es lineal $\Leftrightarrow L(\lambda\overline{x}) = \lambda L(\overline{x}) \wedge L(\overline{x} + \overline{y}) = L(\overline{x}) + L(\overline{y})$
Además, toda aplicación lineal se puede escribir en forma de matriz.

$$L(\overline{x}) = A\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2. *L lineal ⇒ L continua.*

Demostración.

$$L(\overline{x} = \begin{pmatrix} A_1 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

COMPLETAR

□

4.2. Norma de matrices

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\overline{x} \rightarrow F(\overline{x}) = \underbrace{||A\overline{x}||}_{L(\overline{x})}$$

F es continua.

Sabemos que existe $c > 0$ tal que $||A\overline{x}|| \leq C||\overline{x}||$, es decir, $||A\overline{x}|| \leq C$ si $||\overline{x}|| = 1$.

$$M = \{||A\overline{x}|| \;/\; ||\overline{x}|| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

[5] La mejor constante C es la cota superior mínima (supremo) que vamos a llamar α.
$\alpha \in^? M$
α se alcanza en M, porque F es continua y M es compacto.

[5] Conjunto esfera unidad

Definicion:

$$|||A||| = \alpha = max||A\overline{x}|| \;/\; ||\overline{x}|| = 1$$

Ejercicio propuesto: demostrar que $|||\cdot|||$ es una norma.

Demostración de la 4' porpiedad:

$$|||A+B||| = max||(A+B)\overline{x}||| = ||(A+B)\overline{x}_{A,B}|| = ||A\overline{x}_{AB} + B\overline{x}_{AB}|| \leq$$

$$\underbrace{||A\overline{x}_{AB}||}_{\leq max||A\overline{x}|| = |||A|||} + \underbrace{||B\overline{x}_{AB}||}_{|||B|||}$$

Ejemplo: COMPLETAR Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular su norma. Resolución: Acabamos teniendo que maximizar (sabiendo que $|x| + |y| = 1$: $|x+2y| + |-3x+y| + |2x| \leq |x| + |2y| + |3x| + |y| + 2|x| = 6|x| + 3|y| \leq 6(|x|+|y|) = 6$ ¿Podemos encontrar un vector (x_0, y_0) tal que $||A(x_0,y_0)^T||_1 = 6$?
Tomando $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$ lo encontramos.

Obsevación: Coincide con la suma de los valores absolutos de las columnas y escoger el más grande.

Aplicando lo mismo con la norma infinito: COMPLETAR COMPLETAR

Lema 4.3. *Sea A una matriz, A^TA es simétrica.*

Lema 4.4. $\underbrace{<\overline{x}, A\overline{y}>}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^n} = \underbrace{<A^T\overline{x}, \overline{y}>}_{\text{Producto en } \mathbb{R}^M}$

A^TA diagonalizable ($N \times N$). Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$.
Desarrollamos en B: $\overline{x} = \sum \alpha_i \overline{v}_i$. Con $<v_i, v_j>= 0$ con $i \neq j$.
Calculamos $||\overline{x}|| = \sum \alpha_i^2 < v_i, v_i >$

$$A^TA\overline{x} = (A^TA)(\sum \alpha_i v_i) = \sum (\alpha_i \lambda_i \overline{v_i})$$

Queremos hallar el máximo de $||A\overline{x}||$ cuando $||\overline{x}|| = 1$.

$$||A\overline{x}||^2 =< A\overline{x}, A\overline{x} >=< A^TA\overline{x}, \overline{x} >= \underbrace{< \sum \lambda_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i >}_{<v_i,v_j>=0 \text{ con } i\neq j.}$$

$$= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{max}(\sum \alpha_i^2) = \lambda_{max}$$

Hemos demostrado que:

$$max||A\overline{x}|| \underbrace{\leq}_{=} (\lambda_{max})^{\frac{1}{2}}$$

Este máximo se puede alcanzar tomando x como el autovector asociado, por lo que el $\leq$ se convierte en un $=$.

5. Limite

$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

Definicion: Limite

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = \overline{L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < ||\overline{x} - \overline{a}|| < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - L|| < \varepsilon$$

Importante el detalle de $0 < ||\overline{x} - \overline{a}||$, no es un $\leq$, porque no se necesita que la función esté si quiera definida en el punto $\overline{a}$.

Teorema 5.1. *Sean $\overline{x_n} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$ y $\overline{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^N$.*

$$x_n \to \overline{L} \Leftrightarrow (x_1 \to L_1) \wedge (x_2 \to L_2) \wedge ... \wedge (x_n \to L_n)$$

Idea para el cálculo de límites:

- $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} F(x) = \lim\limits_{\overline{y}\to 0} F(\overline{y} + \overline{a})$.
- Límite a lo largo de rectas. $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) \sim \lim F(t\overline{v})$

Si $\lim F(t\overline{v})$ toma valores distintos dependiendo de $\overline{v} \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} F(\overline{x})$

Pero, si $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(t\overline{v}) = L \Rightarrow \overline{L}$ es el candidato a ser el límite (no tiene porque serlo). El siguiente paso sería demostrar con argumentos de comparación (Sandwich) u otros que $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} F(\overline{x}) = L$.

El contraejemplo es $f(x, y) = \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4}$. Veamos por que:

Nos acercamos al límite por medio de rectas:

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x \cdot (mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{(1 + x^2m^4)x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x, mx)) \to 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Pero si nos acercamos al límite por medio de $x = y^2$ tenemos:

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2y^2}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusión:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x, y)) \neq 0$$

Teorema 5.2. *F continua $\Leftrightarrow$ para cualquier abierto A, $F^{-1}(A)$ es abierto.*

Obsevación: Si $F : \omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M \Leftrightarrow$ para cualquier abierto $A, F^{-1}(A) = \omega \cup V$, con V abierto.

Demostración. $\Rightarrow$ De este teorema ya teníamos demostrada la implicación $\Rightarrow$.
$\Leftarrow$ Queremos probar:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } ||\overline{x}-\overline{a}|| < \delta \Rightarrow \underbrace{||F(\overline{x}) - F(\overline{a})|| < \delta}_{F(\overline{x})\in B_\varepsilon(F(\overline{a}))}$$

Tomamos

$$A = B_\varepsilon(F(\overline{a})) \to F(\overline{a}) \in A \Rightarrow \overline{a} \in F^{-1}(A)$$

Por hipótesis, $F^{-1}(A)$ abierto $\wedge$ $\overline{a} \in F^{-1}(A)$

$$\exists B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A).\text{Es decir, } \overline{s} \in B_\delta(\overline{a}) \subset F^{-1}(A), s \in F^{-1}(A) \Rightarrow F(s) \in A = B_\varepsilon(F(\overline{a}))$$

□

Observación: Este teorema también se cumple para cerrados.

6. Diferenciación

Definicion: F diferenciable en $\overline{a}$

$$\exists \text{ aplicación lineal L tal que } \frac{F(\overline{x}) - F(\overline{a}) - L(\overline{x} - ga)}{||\overline{x}-\overline{a}||} \underbrace{\to}_{\overline{x}\to\overline{a}} 0$$

$$= \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L\overline{h}}{||\overline{h}||}$$

Obsevación:

- Si existe, L es única.

Demostración. Supongamos que existen L_1, L_2.

$$0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}}{||\overline{h}||}$$

.

$$\text{Sumando: } 0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_1\overline{h}|| + ||F(\overline{a}+\overline{h}) - F(\overline{a}) - L_2\overline{h}||}{||\overline{h}||}$$

Obsevación: $||A-B|| = ||A+(-B)|| \leq ||A|| + ||B||$
Completar la contradicción.

□

Notación: (Diferencia de F en $\overline{a}$)

$$L \equiv DF(\overline{a})$$

Proposición:

$$F \text{ diferenciable en } \overline{a} \Rightarrow F \text{ continua en } \overline{a}$$

Demostración.

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h})-F(\overline{a})-L\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$$

Esta es la definición de diferenciable. Para que este límite sea 0, el numerador tiene que tender a 0, por lo que $F(\overline{a}+\overline{h})-F(\overline{a}) \to 0$ □

Obsevación: F diferenciable en $\overline{a}$.

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

Sabemos:

$$0 = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{||F(\overline{a}+\overline{h})-F(\overline{a})-L\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$$

En particular (tomando $h = t\overline{e_1}$)

$$\lim_{\overline{t}\to\overline{0}} \frac{a}{b} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} ||\underbrace{\frac{1}{t}F(\overline{a}+t\overline{e_1})-F(\overline{a}))-L\overline{e_1}}_{\overline{W}(t)\in\mathbb{R}^N}||$$

Tomando la componente k-esima

$$0 = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_K(a+te_i)-F_k(a)}{t} - L_{ki})$$

$$L_{ki} = \lim_{\overline{t}\to\overline{0}} F(\frac{F_k(a+te_i)-F_k(a)}{t}) = \frac{d\,F_k}{d\,x_i}(\overline{a})$$

Nomenclatura: Aproximación lineal $\sim$ Diferencial.
Matriz jacobiana $\sim$ Jacobiana.

Teorema 6.1. *Matriz asociada a $DF(\overline{a}) \equiv$ Matriz de las derivadas parciales de F.*

Teorema 6.2. *F diferencialbe en $\overline{a} \Rightarrow \exists\frac{d\,F_k}{d\,x_i}(\overline{a}), i = 1,2,...,N \wedge k = 1,2,...,M$*

El contraejemplo para demostrar $\not\Leftarrow$ es el mismo que en los límites a lo largo de rectas.
$f(x,y) = \frac{xy^2}{x+y^2}, (x,y) = (0,0) \wedge 0, (x,y) = (0,0)$

Comentarios sobre notación:

- $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Utilizamos notación vectorial en vez de matricial (porque tendríamos una matriz columna).
  Ejemplo: la velocidad (en un instante de tiempo, un punto en el espacio).
- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ (función escalar):

  COMPLETAR Se suele llamar vector gradiente.
-

6.1. Regla de la cadena:

Derivada de una composición:
COMPLETAR DIBUJITO
$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$.
$G : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^K$.
$H = G \circ F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$.
$\overline{x} \in \mathbb{R}^N, \overline{y} \in \mathbb{R}^M$
F diferenciable en $\overline{a}$, G diferenciable en $F(\overline{a})$. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en $\overline{a}$. Además la expresión matricial es:
$\underbrace{DH(\overline{a})}_{K\times N} = \underbrace{DG(F(\overline{a}))}_{K\times M} \cdot \underbrace{DF(\overline{a})}_{M\times N}$

Obsevación:

Notación de Leibniz: Para calcular 1 único elemento de la matriz diferencial (el de la fila i, columna j):

$$\frac{d\,H_i}{d\,x_j}(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{d\,G_i}{d\,y_k} \cdot \frac{d\,F_k}{d\,x_j}$$

Con cuidado de $\dfrac{d\,G_i}{d\,y_k}$ evaluado en $F(\overline{a})$ y $\frac{d\,F_k}{d\,x_j}$ evaluado en $\overline{a}$.

Aplicaciones y ejemplos:

- $$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
  $$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
  Sea $g \equiv F \circ \sigma \equiv$ Comportamiento de F a lo largo de la curva $\sigma, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  $$g'(t_0) = DF(\sigma(t_0))D\sigma(t_0) = \underbrace{\ldots}_{\text{Notación matricial}} = \underbrace{\langle \nabla F(\sigma(t_0)) \rangle \sigma'(t_0)}_{\text{Notación vectorial}}$$
- $$\sigma(t) = t\overline{b} + (1-t)\overline{a}$$
  $$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

  COMPLETAR

6.2. Extensiones del teorema del Valor Medio

- Original: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

  $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ para algún $c \in [a, b]$

- $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

  $\sigma(t) = t(\overline{b}) + (1-t)\overline{a}$

  $g = F \circ \sigma \; g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $F(\overline{b} - \overline{a}) = g(1) - g(0) = g'(s)$ para algún $s \in [0, 1]$

  Peeeeero...

  $$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

  $$F(\overline{b}) - F(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(\overline{c_1}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \\ \langle \nabla F_2(\overline{c_2}), \overline{b} - \overline{a} \rangle \end{pmatrix}$$

  Tenemos 2 c distintos, uno para cada f, por lo que este teorema pierde sentido.

- Versión para funciones matriciales:

  $$||F(\overline{b} - \overline{a})|| \leq |||DF(\overline{a})||| \cdot ||\overline{b} - \overline{a}||$$

Demostración. i)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\overline{b} - f(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds \text{ con } g(t) = f(tb + (1-t)a)$$

ii)

$$h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(\overline{b} - h(\overline{a}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = \int_0^1 \langle \nabla h(s\overline{a} + (1-s)\overline{b}), (\overline{b} - \overline{a}) \rangle$$

$$g(t) = h(tb + (1-t)a)$$

iii)

$$\overline{G} = (G_1, ..., G_M), G_i = \int_0^1 H_i(t)dt$$

Con $\overline{H} = (H_1(t), ..., H_M(t))$

$$||\overline{G}||^2 = \langle \overline{G}, \overline{G} \rangle = \sum_{i=1}^{M} \left(\int_0^1 H_i(t)dt \right) \underbrace{\left(\int_0^1 H_i(s)ds \right)}_{G_i}$$

$$||\overline{G}||^2 = \int_0^1 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{M} G_i H_i(t)}_{\langle \overline{G}, \overline{H}(t) \rangle \leq ||\overline{G}|| \cdot ||\overline{H}||} \right) dt$$

Conclusión:

$$||\overline{G}||^2 \leq \int_0^1 ||G|| \cdot ||H(t)|| dt$$

iv) $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

$F_i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underbrace{F_i(\bar{b}) - F_i(\overline{a})}_{G_i} = \int_0^1 \underbrace{\langle \nabla F_i(s\bar{b} + (1-s)\overline{a}), (\bar{b} - \overline{a}) \rangle}_{H_i(t)} dt$

Por el apartado iii tenemos que:

$$\overline{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla F_1(tb + (1-t)a), b - a \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla F_M(tb + (1-t)a), b - a \rangle \end{pmatrix} = (DF(...)) \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_M - a_M \end{pmatrix}$$

$$||H(t)|| = ||DF(...)(\bar{b} - \overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}||$$

$$||F(\bar{b}) - F(\overline{a})|| \leq \int_0^1 \langle \nabla F_i(tb + (1-t)a), b - a \rangle dt$$

Conclusión:

$$||F(\bar{b}) - F(\overline{a})|| \leq ||DF|| \cdot ||\bar{b} - \overline{a}||$$

$\square$

WTF DONDE VA¿¿¿¿¿¿

7. Convergencia y continuidad

Al tener definida una norma podemos definir convergencia y continuidad:

- *Convergencia:* $\overline{x_n} \to \overline{x} \longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 tqn > n_0 \Rightarrow |||\overline{x} - \overline{x_n}||| < \varepsilon$.
- *Continuidad:* Sea $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua en $a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $||\overline{x} - \overline{a}||_a < \delta \Rightarrow ||F(\overline{x}) - F(\overline{a})||_b < \varepsilon$

Observación: Es interensante ver que se puede hablar de continuidad tomando una norma en $\mathbb{R}^N$ y otra distinta en $\mathbb{R}^M$ sin por ello variar la definición de continuidad. Más adelante veremos que en $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes y qué significa que las normas sean equivalentes. (Esto no sucederá en espacios de dimensión infinita) ?????????????????