

1). Две выборки из  $N(0, 1)$  по 50 элементов. Вычисляем дисперсию разности средних каждой выборки.

Выборки независимые, поэтому можно рассматривать их отдельно (дисперсия разности равна сумме дисперсий). Для каждой выборки в силу независимости случайных величин:

$$Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_{50}}{50}\right) = 50Var(X_1)/(50^2) = \frac{1}{50}.$$

Итоговый ответ:  $2 * 1/50 = 0.25$ .

2) Делаем две выборки из  $N(0, 1)$  по 100 элементов, из каждой выборки выбираются 50 элементов без повторений. Вычисляем дисперсию разности средних каждой выборки.

Выборки независимые, поэтому можно рассматривать их отдельно (дисперсия разности равна сумме дисперсий). Без ограничений общности можно считать, что обозначения введены так, что мы имеем дело со случайными величинами  $X_1, \dots, X_{50}$ . Далее рассуждаем как и в предыдущем случае. Итоговый ответ: 0.25.

3) Делаем две выборки из  $N(0, 1)$  по 100 элементов, из каждой выборки выбираются 50 элементов с повторами. Вычисляем дисперсию разности средних каждой выборки.

Выборки независимые, поэтому можно рассматривать их отдельно (дисперсия разности равна сумме дисперсий). Рассмотрим одну из этих выборок по 100 элементов. Это выборка образует для нас некоторое эмпирическое распределение (бутстрэппинг). Из этого распределения мы выбираем величины  $X_1, \dots, X_{50}$  независимо (как и в 2 предыдущих случаях), хоть там и могут быть повторы, поэтому снова применимо рассуждение из предыдущих пунктов, и ответ 0.25.

4) Делаем одну выборку из  $N(0, 1)$  по 100 элементов, оттуда выбираем 50 элементов без повторов, потом снова из этих же 100 элементов выбираем 50 элементов без повторов. Вычисляем дисперсию разности средних каждой выборки.

Рассматриваем эмпирическое распределение (как при бутстрэппинге), порожденное выборкой из 100 элементов. Оттуда мы выбираем 50 элементов, для дисперсии среднего снова применима та же самая формула (так как нет повторов). Когда мы выбираем второй раз, мы выбираем независимо, поэтому снова в итоге будет 0.25.

5) Делаем одну выборку из  $N(0, 1)$  по 100 элементов, оттуда выбираем 50 элементов с повторами, потом снова из этих же 100 элементов выбираем 50 элементов с повторами. Вычисляем дисперсию разности средних каждой выборки.

Рассматриваем эмпирическое распределение (как при бутстрэппинге), порожденное выборкой из 100 элементов. Оттуда мы выбираем 50 элементов, для дисперсии среднего снова применима та же самая формула (так

как выбираем независимо). Когда мы выбираем 100 элементов второй раз, мы выбираем независимо, поэтому снова в итоге будет 0.25.