Процентные ставки и временная стоимость денег.

Interest, interest rate. Капитал — то, что предоставляется в долг. Эффективная процетная ставка $i(t)$ — размер платы за единице капитала, одолженного в момент времени $t$ и возвращенного в момент времени $t+1$. Наращенная сумма $F(n)$ за $n$ лет — это единичный капитал и проценты. Первоначальный капитал обозначают через $C$.

Простые проценты (simple interest) — проценты только на первоначальный капитал. В этом случае:

$$S = CF(n) = C(1 + ni).$$

Это формула простых процентов. Множитель — это функция наращения простых процентов. Отметим, что $n$ необязано быть целым. Но меряют традиционно в годах.

Сложные проценты:

$$S = CF(n) = C(1 + i)^n.$$

Ситуация вложения процентов снова в капитал называется капитализацией процентов. Формула сложных процентов (compound interest).

Обычно под процентной ставкой понимают ставку сложных процентов.

Пусть накопление процентов происходит $p$ раз в году. Указывают годовую ставку $i^{(p)}$. Считаем, что происходит начисление по ставке $i^{(p)}/p$ в каждый период с капитализацией процентов. Итого, если $N$ — общее число периодов начисления:

$$S = CF(N) = C(1 + i^{(p)}/p)^N.$$

Пусть как и раньше $i$ — эффективная процентная ставка, тогда номинальная ставка (nominal rate) — это такая годовая ставка $i^{(p)}$, которая дает тот же результат, что и эффективная:

$$1 + i = (1 + i^{(p)}/p)^p.$$

Пусть мы хотим получить обратно $S$, тогда $P$, которую мы хотим дать взаймы называется дисконтированной, говорят, что $S$ дисконтируется. Еще говорят, что $P$ — современная величиная для $S$. Разность

$S-P$ называется дисконтом. Математический дисконт завязан на простые проценты по ставке $i$:

$$P = \frac{S}{1+ni}.$$

Множитель $\frac{1}{1+ni}$ называют дисконтным. Дисконт — это

$$D_i = S - P = S\frac{ni}{1+ni}.$$

Отметим, что $i = (S-P)/P$.

Есть еще коммерческий или банковский дисконт. Пусть $d$ — банковская учетная ставка (discount value): $d = (S-C)/S$, где $C$ — первоначальный капитал, $S$ — подлежащая возврату сумма в 1-й момент. Процесс начисления и удержания процентов: простой коммерческий дисконт (simple commercial discount):

$$D_d = S(1-nd).$$

То есть разница исключительно в знаменателе определения эффективной ставки.

Встречается дисконтирования по сложной учетной ставке:

$$C = S(1-d)^n,$$

а дисконт равен

$$D_d = S(1-(1-d)^n).$$

Точно также для дисконтирования $p$ раз в году по номинальной учетной ставке:

$$C = S(1-d^{(p)}/p)^N.$$

Теория непрерывных процентов. Пусть капитализация происходит непрерывно, тогда

$$F(t) = (1+i)^t = \exp\delta t,$$

т.е. $\delta = \ln(1+i)$.

Функция

$$F'(t) = \delta\exp\delta t$$

называется ставкой роста капитала (rate of increase). Тогда силой роста (force of interest) называется число

$$\delta = \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{d}{dt} \ln F(t).$$

С тем же успехом сила роста может быть и переменной:

$$F(t) = \exp \int_0^t \delta(s) ds.$$

Говорят, что у $F(t)$ экспоненциальный характер, если сила роста не меняется со временем. Тогда

$$1 + i(t) = \frac{F(t)}{F(t-1)} = \exp \int_{t-1}^t \delta(s) ds.$$

Приведение к современному значению осуществляется по формуле сложных процентов. Значение $X(1+i)^{-t} = X \exp -deltat$ — это современная ценность суммы $X$ (present value). Или приведенная стоимость. Современная ценность единичной суммы:

$$\nu(t) = (1+i)^{-t} = \exp -\delta t$$

это коэффициент дисконтирования.

Пусть в момент $t_2$ мы имеем $X$, тогда в момент $t_1$ мы имеем:

$$P = \frac{F(t_1)X}{F(t_2)} = X \exp - \int_{t_1}^{t_2} \delta(s) ds.$$

Процедура нахождения приведенного значения $P$ — дисконтирование.

Рассмотрим поток платежей: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$. Его современное значение равно:

$$c_1\nu(t_1) + \ldots + c_n\nu(t_n) = \sum_{j=1}^n P_j.$$

Достаточно частые (например, еженедельные платежи — все равно, что непрерывная модель). Если $\rho(t)$ — это наша ставка (функция, по которой делаются выплаты), то приведенное значение равно: $\int_0^T \rho(t)\nu(t)dt$. Если сложный поток имеет и дискретную и непрерывную составляющие, то там просто будет сумма.

Чтобы приводить не к моменту времени 0, а к $T_1$ достаточно сосчитать $p.v.(t = 0)/nu(T_1)$. Или $p.v.(T_1) = \frac{\nu(T_2)p.v.(T_2)}{\nu(T_1)}$.

Уравнение эквивалетности. Вложение в момент 0 суммы X против потока платежей $jX$ и одолженная сумма $X$ в конце.

Вот видимо обобщенный поток. У нас есть издержки $a_{t_1}, \dots, a_{t_n}$ и поступающие платежи $b_{t_1}, \dots, b_{t_n}$. Уравнение эквивалетности — это уравнение на силу роста, при которой суммы входящих и выходящих платежей равны:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{t_j} \exp -\delta t_j = \sum_{j=1}^{n} (b_{t_j} - a_{t_j}) \exp -\delta t_j,$$

где $c_{t_j}$ — чистая сумма (нетто) потока платежей в момент времени $t_j$. Подставляем вместо силы роста ставку: $\exp \delta = 1 + i$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{t_j} (1+i)^{-t_j} = 0.$$

Уравнение эквивалетности или баланса (equation of value) или уравнение доходности.

Решение не всегда существует. Важен класс операций/потоков для которых существует единственное положительное решение. Например, такой класс для $A_i = \sum_{j=0}^{i} c_{t_j}$ можно определить так: $A_0 \neq 0$, $A_n \neq 0$, последовательность $A_j$ ровно 1 раз меняет знак. Решение предлагается искать численными методами.

Функции сложного процента.

Пусть у нас есть серия выплат $b_j$в моменты времени $t_j$. Пример, выплаты в пенсионный фонд. Плата — это платежи $c_k$ в моменты времени $\tau_k$.

Аннуитет — это поток платежей, все члены которого положительны, а интервалы времени постоянные (annuity). Еще говорят про финансовую ренту. Член ренты $R$ — размер отдельного поступления, период ренты — интервал между 2поступлениями, и есть процентная ставка ядл наращения или дисконтирования платежей. Эти 3 составляющие однозначно определяют ренту.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. В конце периода выплаты происходят у обыкновенных рент или рент постнумерандо (immediate annuity certain, annuity payable in arrear). В начале каждого периода происходят выплаты у авансированных рент или рент пренумерандо (annuity due, annuity payable in advance). Наращенная сумма ренты учитывает проценты. Приведенное значение ренты — это дисконт всех ее значений на какой-то моменты времени. Разница между обыкновенной и авансированной рентами в выборе начала отсчета. Для начала отсчета в t=1 обыкновенная рента становится авансированной.

Пусть период ренты равен 1. Начало в $t_0$, настоящий момент. Приведенная стоимость обыкновенной ренты в момент $t_0 = 0$ — это $a_n$, коэффициент приведения обыкновенной ренты. Часто пишут $a_{n,i}$, указывая и зависимость от процентной ставки $i$. Тогда

$$a_n = \frac{\nu(1-\nu^n)}{(1-\nu)}, \qquad \nu = \exp -\delta = \frac{1}{1+i}.$$

Современное значение серии платежей, приведенное ко времени 1-го платежа — это $\dddot{a}_n$:

$$\dddot{a}_n = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}.$$

Это современное значение потока платежей, при условии, что платежи осуществляются вперед.

Коэффициенты приведения авансированной и обыкновенной ренты связаны соотношением:

$$\dddot{a}_n = (1+i)a_n,$$
$$\dddot{a}_n = 1 + a_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

В нуле у нас нули, при нулевой эффективной ставке у нас идеальное совпадение.

Имеют место формулы:

$$1 = ia_n + \nu^n,$$
$$1 = da_n + \nu^n.$$

Современное значение финансовой ренты — это сумма всех дисконтированных на данный момент членов этой ренты. Соответсвенно не для единичного члена ренты:

$$A = Ra_n.$$

Обозначим через $s_n$ и $\dddot{s}_n$ наращенные суммы на конец периода для $n$ единичных платежей обыкновенной и авансированной рент. Тогда

$$s_n = (1+i)^n a_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_n = (1+i)^n \ddot{a}_n = \frac{(1+i)^n - 1}{d},$$
$$s_{n+1} = 1 + \ddot{s}_n,$$
$$(1+i)^n = i s_n + 1,$$
$$(1+i)^n = d\ddot{s}_n + 1.$$

Речь идет о коэффициентах накопления обыкновенной и авансированной рент. Ну и для неединичного члена ренты мы просто все умножаем на $R$.

Если ряд бесконечен, то рента вечная. Ее сумма бесконечна, но приведенное значение часто конечно. Современная стоимость $A_\infty$ — это сумма, которую надо вложить, чтобы в дальнейшем каждый период получать $R$. Коэффициенты накопления обыкновенной и авансированной рент определяются вот так:

$$a_\infty = \lim a_n = \frac{1}{i},$$
$$\ddot{a}_\infty = \lim \ddot{a}_n = \frac{1}{d}.$$

Имеют место отсроченные ренты/deferred annuities. То есть мы начинаем с моменты времени $m+1$. Ее стоимость в настоящий момент обозначается через

$$_m a_n = \nu^m a_n = a_{m+n} - a_m,$$
$$_m \ddot{a}_n = \nu^m \ddot{a}_m = \ddot{a}_{m+n} - \ddot{a}_m.$$

Различают возрастающие выплаты с переменным размером выплаты: $b_j = j$ в простейшем случае. Современная стоимость обозначается:

$$(Ia)_n = \frac{\ddot{a}_n - n\nu^n}{i},$$

$$(I\ddot{a})_n = 1 + a_{n-1} + Ia_{n-1}.$$

Есть и отложенная возрастающая ренты, начинающаяся с момента времени $m$ (deferred increasing annuity):

$$_m Ia_n = \nu^m Ia_n,$$

$$_m I\ddot{a}_n = \nu^m I\ddot{a}_n.$$

Различают и $p$-срочные ренты, когда платежи делают $p$ раз в году. Для единичного члена ренты речь идет о платеже размера $1/p$. Соответствующая современная стоимость обозначается через $a_n^p$. За счет замены времени:

$$a_n^p = \frac{i}{i^p} a_n = \frac{1-\nu^n}{i^p},$$

$$\ddot{a}_n^p = \frac{i}{d^p} a_n = \frac{1-\nu^n}{d^p}.$$

Отметим, что

$$a_n^p = \nu^{1/p} \ddot{a}_n^p,$$

$$i a_n = i^p a_n^p = d^p \ddot{a}_n^p = d \ddot{a}_n = 1 - \nu^n.$$

Накопленные суммы определяются следующим образом:

$$s_n^p = (1+i)^n a_n^p = \frac{i}{i^p} s_n,$$

$$\ddot{s}_n^p = (1+i)^n \ddot{a}_n^p = \frac{i}{d^p} s_n.$$

Для вечных $p$-рент:

$$a_\infty^p = \frac{1}{i^p}, \qquad \ddot{a}_\infty^p = \frac{1}{d^p},$$

$$\ddot{a}_\infty^p = \frac{1}{p} + a_\infty^p.$$

Различают и отложенные $p$-ренты

$${}_m a_n^p = \nu^m a_n^p,$$

$${}_m \ddot{a}_n^p = \nu_m^m \ddot{a}_n^p.$$

Достаточно частые (например, ежедневные) ренты можно считать непрерывными. При этом

$$\lim i^p = \lim d^p = \delta.$$

Тогда

$$\lim \ddot{a}_n^p = \frac{1-\nu^n}{\delta}, \qquad \lim a_n^p = \frac{1-\nu^n}{\delta}.$$

Для годовой обыкновенной ренты с непрерывным начислением процентов и силой роста $\delta$ для наращенной суммы

$$S = R\frac{\exp n\delta - 1}{\exp\delta - 1}.$$

Постоянная непрерывная рента имеет современную стоимость

$$A = S\exp\delta n = R\frac{1 - \exp\delta n}{\exp\delta - 1}.$$

Облигации (bonds).

Они относятся к бумагам с фиксированным доходом (fixed income securities). Облигация значит, что произведен заем. Основные параметры: номинал (face value), выкупная цены (redemption value), дата погашения (date of maturity), норма доходности или купонная процентная ставка (coupon rate), даты выплаты процентов. Облигации бывают:

- По методу обеспечения: государственные и муниципальные, частных корпораций с залогом имущества, или другим залогом (corporate bonds), частных корпораций без специального обеспечения (corporate debentures).

- По сроку: с фиксированной датой погашения (term bonds), бессрочные (perpetuities).

- По способу погашения номинала: разовым платежом (bullet bonds), распределенными по времени погашениями долей номинала, последовательным погашением доли общего количества облигаций (serial bonds). Лотерейные или тиржаные займы.

- По методу выплаты дохода: только проценты (бессрочные облигации), без выплаты процентов (zero coupon bonds), проценты вместе с номиналом в конце срока, периодическая выплата процентов, а в конце выкупная цена.

Отношение рыночной цены и номинала: at par, discount bond (ниже номинала), premium bond. Цена с процентами: dirty, full, gross price. Цена без процентов: clean, flat price.

Курс: quote, quoted price: $K = \frac{P}{N}/100$, где $K$ — курс облигации, $P$ — рыночная цена, $N$ — номинал.

Capital loss, capital gain — разность номинала и цены приобритения.

Виды доходности: купонная — coupon rate, текущая — current/running yield, полная — yield to maturity, redemption yield, yield.

Доходность от облигаций без обязательного погашения:

$$i_t = \frac{100g}{K},$$

где $g$ — купонная ставка процента, $K$ — курс, $i_t$ — текущая доходность. Для выплат $p$ раз в год и полной доходности:

$$i = (1 + \frac{i_t}{p})^p - 1.$$

Для облигаций без выплаты процентов:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1,$$

где $i$ — полная доходность, $K$ — курс, $n$ — срок до выкупа облигации ($K < 1$).

Для облигаций с выплатой процентов и номинала в конце срока (конечная выплата — lump sum):

$$i = \frac{1+g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1,$$

где $i$ — полная доходность, $K$ — курс, $n$ — срок до выкупа облигации, $g$ — купонная ставка процента.

Для облигаций с периодической выплатой процентов и выплатой номинала в конце срока. Текущая доходность считается как:

$$i_t = \frac{100g}{K}.$$

Приравняем стоимость всех поступлений цене облигации. Имеем для рыночной цены и курса:

$$P = N\nu^n + gNa_{n,i},$$

$$K/100 = \nu^n + ga_{n,i}.$$

Вот приближенное решение:

$$i = \frac{g + (1 - \frac{K}{100})/n}{(1 + \frac{K}{100})/2}.$$

Или более общая формула:

$$K/100 = \nu^n + g a^p_{n,i}.$$

Через $nu$ обозначен дисконтный множитель по неизвестной ставке $i$.

Есть другие облигации, у которых для дисконтирования применяется годовая номинальная ставка, количество дисконтирований совпадает с количеством купонных выплат:

$$K/100 = \nu^{np} + \frac{g}{p} a^p_{n,i}.$$