Содержание

1 Введение.

Диссертация посвящена изучению структуры некоторых множеств диффеоморфизмов гладких многообразий, связанных с так называемыми свойствами отслеживания псевдотраекторий. Наибольший интерес представляют вопросы о плотности (типичности) таких множеств и о характеризации этих множеств и их внутренностей в терминах теории структурной устойчивости.

В настоящее время теория свойств отслеживания является достаточно хорошо разработанным разделом теории динамических систем. Ее современное состояние достаточно полно отражено в монографиях [21, 18]. Данная теория изучает условия, при которых вблизи любой приближенной траектории некоторой динамической системы находится некоторая истинная. Первые результаты в этом направлении были получены Д.В. Аносовым [1] и Р. Боуэном [10]. В работе рассматриваются в основном дискретные динамические системы, т.е. каскады, порожденные диффеоморфизмами гладких замкнутых многообразий. Грубо говоря, наличие некоторого свойства отслеживания означает, что вблизи любой достаточно точной приближенной траектории находится некоторая истинная. Так как термины "вблизи" и "приближенная траектория" можно понимать по-разному, можно определить несколько свойств отслеживания. Целью данной работы является изучение множеств диффеоморфизмов, обладающих некоторыми свойствами отслеживания.

Основным объектом данной работы являются диффеоморфизмы гладких замкнутых многообразий. Однако для определения свойств отслеживания гладкость не нужна, поэтому различные свойства отслеживания будут определяться для гомеоморфизмов метрических пространств.

Пусть f — гомеоморфизм метрического пространства M с метрикой dist. Траекторией точки p гомеоморфизма f называется множество

$$O(p, f) = \left\{ f^k(p) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Аналогично вводятся понятия положительной и отрицательной полутраекторий гомеоморфизма f:

$$O_+(p, f) = \left\{ f^k(p) \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\},$$

$$O_-(p, f) = \left\{ f^k(p) \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 0 \right\}.$$

Далее часто, не оговаривая этого дополнительно, будет использоваться обозначение

$$p_k = f^k(p) \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Как обычно, будем обозначать через id_M тождественное отображение пространства M. В некоторых случаях нижний индекс будет опускаться.

Определение 1. Будем называть последовательность $\xi = \{x_k\}$ *d–псевдотраекторией* гомеоморфизма f, если

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d \qquad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, d–псевдотраектория является одной из возможных формализаций понятия приближенной траектории.

Определение 2. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *свойство* POTP *(свойство отслеживания псевдотраекторий, pseudo orbit tracing property)*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ найдется такая точка $q \in M$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(q)) < \epsilon \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Иными словами, свойство POTP состоит в том, что всякая "достаточно точная" псевдотраектория "поточечно близка" к некоторой истинной траектории. В работе мы будем обозначать одним и тем же символом как некоторое свойство динамических систем, так и множество всех систем, обладающих этим свойством. Мы будем говорить, что точка q ϵ-отслеживает псевдотраекторию ξ, если выполняются неравенства (1.1).

Будем обозначать через $N(\epsilon, A)$ ϵ-окрестность множества $A \subset M$. В работе [24] вводятся определения орбитального свойства отслеживания (OSP, orbital shadowing property) и слабого свойства отслеживания (WSP, weak shadowing property).

Определение 3. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *орбитальное свойство отслеживания*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой d–псевдотраектории ξ найдется такая точка $q \in M$, что

$$\xi \subset N(\epsilon, O(q, f)) \qquad \text{и} \qquad O(q, f) \subset N(\epsilon, \xi). \tag{1.2}$$

Определение 4. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *слабое свойство отслеживания*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка $q \in M$, что

$$\xi \subset N(\epsilon, O(q, f)).$$

Свойство OSP является ослабленным аналогом свойства POTP — вместо того чтобы требовать близость "в каждый момент времени" точки псевдотраектории x_k и точки истинной траектории $f^k(q)$, требуется, чтобы были близки множества точек псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ и траектории $O(q, f)$. Слабое свойство отслеживания WSP является ослабленным вариантом свойства OSP — требуется лишь, чтобы множество точек "достаточно точной" псевдотраектории ξ содержалось в малой окрестности некоторой истинной траектории $O(q, f)$. Мы будем говорить, что траектория точки q орбитально ϵ-отслеживает псевдотраекторию ξ, если выполняются неравенства (1.2).

При изучении пространств отображений (пространства гомеоморфизмов компактного метрического пространства с C^0-топологией и пространства диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия с C^1-топологией) одним из самых важных вопросов является вопрос типичности. В данной работе под типичным понимается свойство, выполняющееся для всех отображений из некоторого множества II категории по Бэру, а под плотным — выполняющееся для всех отображений из некоторого плотного множества. В работе рассматривается пространство гомеоморфизмов $H(M)$ компактного метрического пространства M с C^0-топологией, индуцируемой метрикой

$$d_{C^0}(f,g) = \max_{p\in M} \max\left(\operatorname{dist}(f(p),g(p)), \operatorname{dist}(f^{-1}(p),g^{-1}(p))\right).$$

Пусть M — это гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой dist. Будем обозначать через $Df(x)$ дифференциал диффеоморфизма f многообразия M в точке x. Как обычно, будем обозначать через T_xM касательное пространство в точке x многообразия M. Будем обозначать через $|\cdot|$ норму в пространстве T_xM, порожденную метрикой dist. Для сокращения изложения, будем считать, что многообразие M вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ достаточно большой размерности. В этом случае касательное пространство естественным образом отождествляется с линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Будем обозначать через $\operatorname{Diff}^1(M)$ пространство диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M с C^1-топологией, индуцируемой метрикой

$$d_{C^1}(f,g) = \max_{p\in M}\left(\operatorname{dist}(f(p),g(p)), \max_{v\in T_pM, |v|=1} |Df(p)v - Dg(p)v|\right).$$

Отметим, что пространства $H(M)$ и $\operatorname{Diff}^1(M)$ являются простанствами Бэра, поэтому если некоторое свойство отображений является типичным относительно одной из этих топологий, то оно является и плотным относительно этой топологии.

С.Ю. Пилюгин и О.Б. Пламеневская (см. [23]) доказали типичность свойства отслеживания псевдотраекторий в пространстве $H(M)$, если пространство M является гладким замкнутым многообразием. Отметим что, из C^0-типичности свойства отслеживания псевдотраекторий следует C^0-типичность орбитального и слабого свойств отслеживания. Ч. Бонатти, Л.Дж. Диац и Дж. Туркат [9] показали, что свойство отслеживания псевдотраекторий является неплотным относительно C^1-топологии в пространстве $\mathrm{Diff}^1(M)$, а С. Кровизье [11] установил, что слабое свойство отслеживания C^1-плотно (см. также работу С.Ю. Пилюгина, К. Сакая и О.А. Тараканова [25]).

Во второй главе изучается орбитальное свойство отслеживания диффеоморфизмов гладких замкнутых многообразий и доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Существует такая область $W \subset \mathrm{Diff}^1(S^2 \times S^1)$, что любой диффеоморфизм $f \in W$ не обладает свойством* OSP.

В доказательстве теоремы 1 используется техника косых произведений, разработанная Ю.С. Ильяшенко и А.С. Городецким. Подробнее идея доказательства поясняется в начале главы 2.

Пусть f — произвольный гомеоморфизм метрического пространства M с метрикой dist. Можно рассмотреть аналог свойства отслеживания псевдотраекторий для периодических траекторий и периодических псевдотраекторий. В работе [16] дается определение периодического свойства отслеживания.

Определение 4. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *периодическое свойство отслеживания* PerSh *(periodic shadowing property)*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой периодической d-псевдотраектории ξ найдется такая периодическая точка q, что выполняется соотношение (1.1).

В определении свойства POTP можно накладывать условия на зависимость числа ϵ от d. Это приводит к следующему определению.

Определение 5. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *свойство* LipSP *(Lipschitz shadowing property, липшицево свойство отслеживания)*, если существуют такие положительные числа L и d_0, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ с $d \leq d_0$ найдется такая точка $q \in M$, что

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(q)) \leq Ld \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Наряду с периодическим свойством отслеживания можно рассматривать и его липшицев аналог.

Определение 6. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *липшицево периодическое свойство отслеживания* LipPerSh, если существуют такие положительные числа L и d_0, что для любой периодической d-псевдотраектории с $d \leq d_0$ найдется такая периодическая точка q, что выполняется соотношение (1.3).

В третьей главе изучаются периодическое и липшицево периодическое свойства отслеживания диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M и их связь со структурной устойчивостью. При изучении свойств отслеживания диффеоморфизмов гладких замкнутых многообразий одним из подходов является переход к C^1-внутренностям. Будем обозначать через $\mathrm{Int}^1(P)$ внутренность некоторого подмножества P множества диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M относительно C^1-топологии. Как обычно, будем обозначать через ΩS множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов. В работе [28] К. Сакай доказал, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания псевдотраекторий, совпадает с множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов. В третьей главе мы доказываем, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих периодическим свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Существуют не структурно устойчивые диффеоморфизмы, обладающие свойством отслеживания псевдотраекторий (см., например, [22]). Точно так же существуют не Ω-устойчивые диффеоморфизмы, обладающие периодическим свойством отслеживания. С.Ю. Пилюгин и С.Б. Тихомиров в работе [26] доказали, что структурная устойчивость и липшицево свойство отслеживания эквивалентны. Также отметим, что С.Ю. Пилюгин доказал (см. [22]) эквивалентность структурной устойчивости и так называемого вариационного свойства отслеживания. В третьей главе доказывается эквивалентность Ω-устойчивости и липшицева периодического свойства отслеживания. Таким образом, основной результат третьей главы можно сформулировать так:

Теорема 2. *Если M — гладкое замкнутое многообразие, то* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSP}) = \mathrm{LipPerSP} = \Omega S$.

Пусть M — метрическое пространство с метрикой dist, $f : M \mapsto M$ — гомеоморфизм. Определим следующее свойство последовательности $\xi = \{x_k\}_{k>0}$:

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty. \tag{$*$}$$

Последовательность, обладающая свойством $(*)$, является приближенной траекторией, которая становится "все точнее" на бесконечности.

В работе [12] введено следующее определение.

Определение 7. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *свойство* LmSP *(предельное свойство отслеживания, limit shadowing property)*, если для любой последовательности, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(q)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Наличие предельного свойства отслеживания означает, что если приближенная траектория "становится все точнее" на бесконечности, то к ней "стремится" некоторая точная траектория. По аналогии с обычным свойством отслеживания предельное свойство отслеживания можно ослабить, потребовав не "сходимости" приближенной траектории к точной, а совпадения множеств предельных точек. Обозначим через $\omega(\xi)$ множество всех предельных точек последовательности $\xi = \{x_k\}_{k>0}$. В работе [20] вводится следующее определение.

Определение 8. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *орбитальное предельное свойство отслеживания* OLmSP, если для любой последовательности $\xi=\{x_k\}$, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\omega(\xi) = \omega(q).$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{LmSP} \subset \mathrm{OLmSP}.$$

В работе [20] вводится следующее ослабление орбитального предельного свойства отслеживания.

Определение 9. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *слабое предельное свойство отслеживания* WLmSP, если для любой последовательности $\xi=\{x_k\}$, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\omega(\xi) \subset \omega(q). \tag{1.4}$$

В работе [24] наряду со свойством WSP определяется и следующее свойство.

Определение 10. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *второе слабое свойство отслеживания* 2WSP, если для любого положительного ε найдется такое положительное d, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка $q \in M$, что

$$O(q, f) \subset N(\varepsilon, \xi).$$

Нетрудно видеть, что свойство 2WSP является ослаблением свойства OSP. По аналогии с обычными свойствами отслеживания, исходя из определения орбитального предельного свойства отслеживания, мы вводим еще одно слабое предельное свойство отслеживания.

Определение 11. Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *второе слабое предельное свойство отслеживания* 2WLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\omega(q) \subset \omega(\xi). \tag{1.5}$$

Можно ввести аналоги сформулированных предельных свойств отслеживания, в которых $k \to +\infty$ заменено на $k \to -\infty$ (в главе 4 приводятся эти определения).

В четвертой главе изучаются слабые предельные свойства отслеживания. В работе [24] доказано, что любой гомеоморфизм

f компактного метрического пространства M обладает свойством 2WSP. Мы доказываем аналог этого утверждения для свойства 2WLmSP — в утверждении 2 доказывается, что любой гомеоморфизм f компактного метрического пространства M обладает свойством 2WLmSP.

При изучении динамических систем особый интерес вызывает структура неблуждающего множества. Как обычно, обозначим через $\Omega(f)$ множество всех неблуждающих точек гомеоморфизма f. Хорошо известно, что для гомеоморфизма f

$$\Omega(f) \supset \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

В четвертой главе приводится пример гомеоморфизма f для которого множества $\Omega(f)$ и $\bigcup_{p \in M} \omega(p)$ не совпадают. В утверждении 3 доказывается, что если для гомеоморфизма f выполняется свойство WLmSP, то

$$\Omega(f) = \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

С.Ю. Пилюгин в работе [20] доказал, что

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{OLmSP}) = \mathrm{Int}^1(\mathrm{LmSP}) = \Omega S.$$

К. Сакай в работе [27] показал, что если $\dim M = 2$, то $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WSP}) \subset \subset \Omega S$. Кроме того, К. Сакай отметил, что его результат не обобщается на случай многообразий большей размерности. Основным результатом четвертой главы является следующая теорема:

Теорема 3. *Если M — гладкое замкнутое многообразие и*

$\dim M = 2$, *то*

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) = \Omega S.$$

В четвертой главе поясняется, что теорема 3 не обобщается на случай многообразий более высокой размерности.

Для "отрицательных" предельных свойств отслеживания выполняются аналогичные утверждения.

Основными результатами диссертации являются теоремы 1–3. Эти результаты опубликованы в работах автора [1–5]. Работы [1], [5] опубликованы в журналах, входящих в список ВАК.

2 Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1-топологии.

2.1 Схема доказательства основного результата.

Данная глава посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. *Существует такая область* $W \subset \mathrm{Diff}^1(S^2 \times S^1)$, *что любой диффеоморфизм* $f \in W$ *не обладает свойством* OSP.

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся идеей, восходящей к А.С. Городецкому и Ю.С. Ильяшенко: строить пример в классе частично-гиперболических косых произведений. Для этого мы рассмотрим некоторое ступенчатое косое произведение G_0 над сдвигом Бернулли со слоем — окружностью (все необходимые определения даются позже). Реализовав сдвиг Бернулли как отображение подковы Смейла, достаточно быстро сжимающее и растягивающее по сравнению с динамикой на слое, мы увидим, что этому косому произведению соответствует локально-максимальное частично-гиперболическое множество, центральные слои в котором – окружности. Более того, как следует из работ М.В. Хирша, К.К. Пью, М. Шуба и А.С. Городецкого (см. [2, 15, 13]), при малых возмущениях такой гладкой реализации частично-гиперболическое множество сохраняется, по-прежнему оставаясь произведением окружности на подкову Смейла. Так как индивидуально гладкие центральные слои гельдерово зависят от точки на базе (т.е. на подкове Смейла), сужение возмущенного отображения на это частичное гиперболическое множество является гельдеровым мягким косым произведением. В качестве искомой области W из теоремы 1 берется достаточно малая C^1-окрестность ступенчатого косого произведения G_0. Эта окрестность берется, в частности, настолько малой, что любому диффеоморфизму из области W соответствует некоторое мягкое косое произведение. Далее мы показываем, что теорема 1 сводится к теореме $1'$ (ее точная формулировка приводится в следующем параграфе).

Теорема $1'$. *Для гельдеровых мягких косых произведений, "достаточно близких" к косому произведению G_0, не выполняется* OSP.

Доказательство теоремы $1'$ разбивается на два случая: случай

(A1) и случай (A2). Случай (A1) возникает, если существуют две гиперболические периодические точки p (с одномерным неустойчивым многообразием) и q (с одномерным устойчивым многообразием), у которых эти многообразия пересекаются. Тогда, используя основную лемму, мы строим псевдотраекторию, которая орбитально не отслеживается никакой точной траекторией. Случай (A2) возникает при отсутствии таких пересечений. В этом случае мы построим такую псевдотраекторию, что любая орбитально отслеживающая ее точная траектория должна оказаться гетероклинической, соединяющей две гиперболические периодические точки с соответственно одномерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Предположение о наличии орбитального свойства отслеживания будет противоречить сделанному предположению об отсутствии пересечений.

Опишем структуру второй главы. В параграфе 2.2 приведены основные определения, описаны основные свойства косых произведений и показано, что теорема 1 сводится к теореме $1'$. В параграфе 2.3 сформулирована и доказана лемма 1 (основная лемма), играющая большую роль в доказательстве теоремы $1'$. В параграфе 2.4 показано, что доказательство теоремы $1'$ сводится к разбору двух вышеупомянутых случаев: случая (A1) и случая (A2), и рассмотрен случай (A1). Кроме того, в начале параграфа 2.4 коротко обрисована схема доказательства теоремы $1'$. В параграфе 2.5 сформулированы и доказаны две вспомогательные леммы о свойствах рассматриваемых косых произведений, необходимые для разбора случая (A2). В параграфе 2.6 разобран случай (A2) с точностью до леммы 6. Лемма 6 доказана в параграфе 2.7, который состоит из 4 пунктов. В пункте 2.7.1 введены основные обозначения, необходимые для доказательства леммы 6. В пункте 2.7.2 приведены наброски доказательств лемм 8 и 9, играющих ключевую роль в доказательстве пункта (6.c) леммы 6. В пункте 2.7.3 завершено доказательство пункта (6.c), и, наконец, в пункте 2.7.4 доказаны остальные пункты леммы 6.

2.2 Динамические свойства косых произведений.

Дадим основные определения.

Обозначим через Σ^2 пространство всех двухсторонних последовательностей 0 и 1 с метрикой

$$d_{\Sigma^2}(\omega, \omega') = 1/2^k,$$

где $k \geq 0$ — такое минимальное целое число, что если $\omega = \\ = \ldots \beta_{-1}|\beta_0\beta_1 \ldots$, $\omega' = \ldots \beta'_{-1}|\beta'_0\beta'_1 \ldots$, то

$$\text{либо } \beta_{-k-1} \neq \beta'_{-k-1}, \qquad \text{либо } \beta_k \neq \beta'_k,$$

а знак | означает, что следующий за ним символ стоит на нулевой позиции. Если такого k не существует, т.е. $\omega = \omega'$, то $d_{\Sigma^2}(\omega, \omega') = 0$. Знак | будет использоваться и в дальнейшем. Напомним определение сдвига Бернулли $\sigma : \Sigma^2 \mapsto \Sigma^2$:

$$\sigma(\dots\beta_{-1}|\beta_0\beta_1\beta_2\dots) = \dots\beta_{-1}\beta_0|\beta_1\beta_2\dots.$$

В статье [3] вводятся следующие определения:

Определение 12. Зафиксируем два диффеоморфизма f_0 и f_1 окружности S^1. Будем называть *ступенчатым косым произведением* такое отображение $G : \Sigma^2 \times S^1 \mapsto \Sigma^2 \times S^1$, что

$$G(\omega, \phi) = (\sigma(\omega), f_{\omega_0}(\phi)) \qquad \text{при } \omega \in \Sigma^2, \phi \in S^1,$$

где ω_0 — символ, стоящий у последовательности ω на нулевой позиции.

Определение 13. Зафиксируем произвольный набор диффеоморфизмов f_ω окружности S^1, параметризованный двухсторонними последовательностями $\omega \in \Sigma^2$. Будем называть *мягким косым произведением* такое отображение $G : \Sigma^2 \times S^1 \mapsto \Sigma^2 \times S^1$, что

$$G(\omega, \phi) = (\sigma(\omega), f_\omega(\phi)) \qquad \text{при } \omega \in \Sigma^2, \phi \in S^1.$$

Подчеркнем, что в определении 12 выбор диффеоморфизма f_j определяется символом ω_0, стоящим у последовательности ω на нулевой позиции, тогда как в определении 13 выбор зависит уже от всей последовательности ω. Обозначим через g диффеоморфизм сферы S^2, обладающий стандартной подковой Смейла. Известно, что у отображения g есть локально максимальное инвариантное множество Λ, гомеоморфное множеству Σ^2, и сужение отображения

g на множество Λ топологически сопряжено со сдвигом Бернулли σ (см., например, [5]).

Известно (см., например, [3]), что диффеоморфизм g можно рассматривать как отображение $g : D_0 \cup D_1 \mapsto D'_0 \cup D'_1$, где D_0 и D_1 — это дизъюнктные горизонтальные, а D'_0 и D'_1 — это дизъюнктные вертикальные прямоугольники. В следующем определении (также взятом из работы [3]) вводится распространение ступенчатого косого произведения на множество $(D_0 \cup D_1) \times S^1$.

Определение 14. *Гладкой реализацией* ступенчатого косого произведения G называется такое гладкое отображение $F : (D_0 \cup D_1) \times S^1 \mapsto (D'_0 \cup D'_1) \times S^1$, что

$$F(x, \phi) = (g(x), f_x(\phi)) \qquad \text{при } x \in D_0 \cup D_1,\ \phi \in S^1,$$

$$\text{где } f_x = f_j \qquad \text{при } x \in D_j,\ j \in \{0, 1\},$$

а f_0 и f_1 — диффеоморфизмы из определения ступенчатого косого произведения G.

Гладкую реализацию F косого произведения G можно гладко продолжить до диффеоморфизма многообразия $M = S^2 \times S^1$. Обозначим это продолжение снова через F, и далее под гладкой реализацией будем подразумевать именно диффеоморфизм многообразия M. Нетрудно видеть, что у диффеоморфизма F есть локально максимальное инвариантное множество, динамика на котором совпадает с динамикой исходного косого произведения G.

Пусть g_0 — поворот окружности S^1 на малый угол $b < 1/100$.

Пусть g_1 — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, множество неблуждающих точек которого состоит всего из двух неподвижных точек: аттрактора $\mathbf{p}$ и репеллера $\mathbf{q}$. Как обычно, мы рассматриваем окружность S^1 как $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Мы предполагаем, что в окрестности точки $\mathbf{q} = 0$ радиуса $1/8$ отображение g_1 является растяжением с некоторой константой $a > 1$, а в окрестности точки $\mathbf{p} = 1/2$ радиуса $1/8$ — сжатием с константой $1/a$. Кроме того, будем считать, что диффеоморфизмы g_0 и g_1 (а значит и числа a и b) выбраны так, что

$$\mathrm{dist}_{C^1}(g_j, \mathrm{id}) < \delta_0 \quad \text{при } j \in \{0, 1\}, \tag{2.1}$$

где число δ_0 достаточно мало. Далее мы будем накладывать ограничения на число δ_0, что приведет к ограничениям на диффеоморфизмы g_0 и g_1 (а значит и на числа a и b). Обозначим через G_0 ступенчатое косое произведение, образованное диффеоморфизмами g_0 и g_1. G_0 — это то самое косое произведение, о котором шла речь в параграфе 2.1.

Будем называть базой множество Σ^2, а слоем — некоторое множество вида $\omega \times S^1$, где $\omega \in \Sigma^2$. Будем обозначать через $pr : \Sigma^2 \times S^1 \mapsto \Sigma^2$ естественную проекцию на базу. Будем говорить, что траектории двух точек $p_1, p_2 \in \Sigma^2 \times S^1$ лежат на разных слоях, если траектории их проекций на базу не пересекаются. Будем называть словом любую конечную последовательность 0 или 1.

Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f многообразия M с римановой метрикой dist. Определим множества

$$W^s(p) = \left\{q \in M | \exists r \in O(p, f) : \mathrm{dist}\left(f^k(q), f^k(r)\right) \longrightarrow 0,\ k \to +\infty\right\}, \tag{2.2}$$

$$W^u(p) = \left\{q \in M | \exists r \in O(p, f) : \mathrm{dist}\left(f^k(q), f^k(r)\right) \longrightarrow 0,\ k \to -\infty\right\}. \tag{2.3}$$

Множества, определенные равенствами (2.2) и (2.3), называются соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями траектории точки p. Будем называть гиперболическую периодическую точку p точкой типа (m, n), если

$$\mathrm{dim} W^s(p) = m \quad \text{и} \quad \mathrm{dim} W^u(p) = n.$$

Будем называть произвольную периодическую точку $p \in \Sigma^2$ сдвига Бернулли гиперболической периодической точкой типа (1,1). Согласно этому определению, гиперболической периодической точке $p \in \Sigma^2$ будет соответствовать гиперболическая периодическая точка $\bar{p}$ типа (1,1) диффеоморфизма $g : S^2 \mapsto S^2$. Будем называть произвольную периодическую точку $p = (\omega_0, \phi_0) \in \Sigma^2 \times S^1$ гиперболической периодической точкой типа (2,1) (соответственно, типа (1,2)) мягкого косого произведения G, если точка ϕ_0 является гиперболической притягивающей (отталкивающей) точкой диффеоморфизма

$$\bar{G}_{\omega_0,\ \phi_0} : S^1 \mapsto S^1, \quad \bar{G}_{\omega_0,\ \phi_0}(\phi) := pr_{S^1} G^{m_p}(\omega_0, \phi) \quad \text{при } \phi \in S^1,$$

где pr_{S^1} — это проекция на S^1, а m_p — это период точки p.

Мы воспользуемся результатом Городецкого и Ильяшенко о плотности гиперболических периодических точек разных типов, фактически являющимся следствием теоремы 2 из [4]:

Теорема 4. *Для диффеоморфизмов g_0 и g_1 указанного выше вида и любых чисел C и α существуют такие окрестности $W_0(g_0)$ и $W_1(g_1)$ (в C^1-топологии), что если для мягкого косого произведения G (образованного диффеоморфизмами f_ω) выполняются условия*

$$f_\omega \in W_{\omega_0} \qquad \textit{для любых } \omega \in \Sigma^2 \tag{2.4}$$

(где ω_0 — символ, стоящий на нулевой позиции у последовательности ω);

$$L := \max_{\omega\in\Sigma^2}\max_{\phi\in S^1}(||Df_\omega(\phi)||, ||Df_\omega^{-1}(\phi)||) < 2^\alpha; \tag{2.5}$$

$$d_{C^0}(f_\omega, f_{\omega'}) \leq C(d_{\Sigma^2}(\omega,\omega'))^\alpha \qquad \textit{для любых } \omega,\omega' \in \Sigma^2, \tag{2.6}$$

где d_{C^0} — это C^0–метрика,

то в множестве $\Sigma^2\times S^1$ плотны как гиперболические периодические точки типа (2,1), так и гиперболические периодические точки типа (1,2).

Замечание 1. *Формально в статье [4] эта теорема доказывается лишь для случая C^2-топологии, но, по существу, использованные в доказательстве этой теоремы рассуждения с минимальными изменениями переносятся на случай C^1-топологии. В* *параграфе 6 данной главы (пункты 6.1, 6.2 и 6.3) практически полностью приводится доказательство теоремы 4.*

Будем называть мягкое косое произведение гельдеровым, если для него выполняются неравенства (2.6). Теорема 4 утверждает, что у гельдеровых мягких косых произведений, "достаточно близких" к косому произведению G_0, плотны гиперболические периодические точки разных типов.

Обозначим через F_0 гладкую реализацию ступенчатого косого произведения G_0. Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет следующая теорема. Она утверждает, что у диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму F_0, есть локально-максимальное инвариантное множество, динамика на котором совпадает с динамикой некоторого гельдерового косого произведения, "близкого" к косому произведению G_0.

Теорема 5. *Предположим, что упомянутые выше диффеоморфизмы g_0 и g_1 достаточно C^1-близки к тождественному отображению (т.е. число δ_0 из неравенств* (2.1) *достаточно мало). Тогда существуют такие числа C и α, что для любых окрестностей $W_0(g_0)$ и $W_1(g_1)$ найдется такая окрестность W диффеоморфизма F_0 в C^1-топологии, что у любого диффеоморфизма $F \in W$ есть локально максимальное инвариантное множество Δ, и $F|_\Delta$ топологически сопряжено с некоторым мягким косым произведением G, для которого выполняются все условия* *теоремы 4 (а именно соотношения* (2.4), (2.5) *и* (2.6)*).*

Замечание 2. *По-видимому, теорема 5 нигде явно не формулируется, но, по существу, ее доказательство приводится в работах [6, 2, 13]. Мы приводим доказательство теоремы 5 для полноты, фактически повторяя с небольшими изменениями рассуждение из работы [6]. В теореме 5 диффеоморфизму F, достаточно близкому к тождественному, невзаимнооднозначно сопоставляется мягкое косое произведение G. При этом, из приведенного в статьях [2, 13] рассуждения следует, что гиперболическим периодическим точкам из множества Δ диффеоморфизмов из окрестности W соответствуют гиперболические периодические точки того же типа мягких косых произведений (этот факт вынесен в замечание 3 и будет доказан ниже).*

Доказательство теоремы 5. Пусть, как и раньше D_0 и D_1, — это дизъюнктные горизонтальные прямоугольники, а D_0' и D_1' — это дизъюнктные вертикальные прямоугольники. Кроме того, пусть

$$D = D_0 \cup D_1, \quad D' = D_0' \cup D_1'.$$

Следуя работе [6], мы воспользуемся следующей теоремой из работы [2]:

Теорема 6. *Пусть C^{r+1}-гладкое* $(0 \leq r \leq \infty)$ *отображение $g : D \mapsto D'$ является гиперболическим с локально максимальным множеством Λ, $\Lambda = \bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}} g^n(D)$, а M — это некоторое замкнутое многообразие. Рассмотрим отображение*

$\mathcal{F}_0 : D \times M \mapsto D' \times M$, $\mathcal{F}_0 = g \times id_M$. Тогда существует такая C^{r+1}-окрестность V диффеоморфизма $\mathcal{F}_0$ (здесь под $\mathcal{F}_0$ подразумевается распространение отображения $\mathcal{F}_0$ на множество $S^2 \times M$), что для любого диффеоморфизма $F \in V$ выполнено следующее:

(a) существует инвариантное множество $\Delta_F \subset D \times M$, гомеоморфное $\Lambda \times M$,

(b) проекция $\Phi : (\Delta_F, F) \mapsto (\Lambda, g)$ является полусопряжением,

(c) множества $\Phi^{-1}(z)$ являются C^{r+1}-гладкими многообразиями для всех $z \in \Lambda$,

(d) множества $\Phi^{-1}(z)$ гельдерово зависят от точки $z \in \Lambda$ в C^r-метрике в пространстве слоев, далее мы поясним это свойство (подробные определения можно найти в работе [2]).

Более того, показатель и константа Гельдера из пункта (d) могут быть выбраны одними и теми же для всех диффеоморфизмов из W.

Поясним пункт (d) теоремы 6. Зафиксируем произвольную точку $z \in \Lambda$. Как утверждается в работе [2], если диффеоморфизмы F и $\mathcal{F}_0$ достаточно близки, то множество $\Phi^{-1}(z)$ можно рассматривать как график отображения $\mathrm{map}(z) : M \mapsto D$. Следуя работе [2] определим C^0-метрику на пространстве слоев:

$$\mathrm{dist}_{C^0}(\mathrm{map}(z_1), \mathrm{map}(z_2)) := \max_{x \in M} \mathrm{dist}_{S^2}(\mathrm{map}(z_1)(x), \mathrm{map}(z_2)(x)),$$

где $z_1, z_2 \in \Lambda$. Определение C^r-метрики на пространстве слоев при $r > 0$ можно найти в работе [2].Тогда пункт (d) означает следующее: существуют такие постоянные C и α, что

$$\mathrm{dist}_{C^r}(\mathrm{map}(z_1), \mathrm{map}(z_2)) \le C(\mathrm{dist}_\Lambda(z_1, z_2))^\alpha \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in \Lambda.$$

Мы применим эту теорему для $r = 0$, $M = S^1$ и ранее определенного диффеоморфизма g, обладающего стандартной подковой Смейла. Будем называть некоторое множество $\Phi^{-1}(z)$ при $z \in \Lambda$ из теоремы 6 центральным слоем. Кроме того, нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы 6.8 из [15].

Теорема 7. *В условиях теоремы 6 центральные слои непрерывно в C^{r+1}-топологии зависят от точки множества Δ_F и от диффеоморфизма F.*

Подчеркнем, что любой центральный слой является графиком некоторого отображения, и под расстоянием подразумевается расстояние между соответствующими отображениями в C^{r+1}-метрике.Рассмотрим отображение $F : D \times S^1 \mapsto U(D') \times S^1$, C^1-близкое к отображению $\mathcal{F}_0 = g \times \mathrm{id}_{S^1}$, где $U(D')$ — это, своего рода, "возмущение" множества D'. Пусть (z, x) — естественные координаты на множестве $D \times S^1$. По теореме 6 у отображения F есть локально максимальное частично-гиперболическое множество Δ_F, гомеоморфное произведению $\Lambda \times S^1$, причем динамика на множестве центральных слоев сопряжена с отображением $g : \Lambda \mapsto \Lambda$. Более того, по теореме 7 центральные слои множества Δ_F C^1-близки к центральным слоям инвариантного множества $\Lambda \times S^1$ невозмущенного отображения $\mathcal{F}_0$. Определим отображение $\Phi_0 : (\Lambda, g) \mapsto (\Sigma^2, \sigma)$, являющееся гомеоморфизмом, сопрягающим отображение $g : \Lambda \mapsto \Lambda$ и сдвиг Бернулли σ. Рассмотрим отображение

$$h_F : \Delta_F \mapsto \Sigma^2 \times S^1, \quad h_F(z, x) := (\Phi_0 \circ \Phi(z, x), x),$$

где $z \in D,\ x \in S^1$. Это отображение переводит центральные слои в окружности, т.е. в слои. Отметим, что отображение h_F сохраняет координату вдоль S^1.

Обозначим через pr_{S^1} естественную проекцию на окружность S^1. Докажем, что если отображение F достаточно близко к отображению $\mathcal{F}_0$ в C^1-топологии, то отображение h_F будет гомеоморфизмом, C^1-гладким вдоль центральных слоев. Действительно, отметим, что

$$h_F^{-1} : \Sigma^2 \times S^1 \mapsto \Delta_F, \quad h_F^{-1}(\omega, x) = (\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega))(x), x),$$

где по построению $\Phi_0^{-1}(\omega) \in \Lambda$, а символ $\mathrm{map}(\cdot)$ означает то же, что и раньше. В силу теорем 6 и 7 если диффеоморфизмы F и $\mathcal{F}_0$ достаточно близки, то отображения h_F и h_F^{-1} будут корректно определены и непрерывны.

Выберем такую окрестность V_0 диффеоморфизма $\mathcal{F}_0$, что для диффеоморфизмов $F \in V_0$ отображение h_F является гомеоморфизмом. Отображение F переставляет центральные слои частично-гиперболического инвариантного множества Δ_F, и на множестве этих центральных слоев возникает индуцированное отображение.

Рассмотрим отображение

$$G_F : \Sigma^2 \times S^1 \mapsto \Sigma^2 \times S^1, \quad G_F := h_F \circ F \circ h_F^{-1}.$$

Далее мы покажем, что если число δ_0 достаточно мало и диффеоморфизм $F \in V_0$ достаточно близок к F_0, то отображение G_F является мягким косым произведением, для которого выполняются соотношения (2.4), (2.5) и (2.6).

Покажем, что отображение G_F является мягким косым произведением. Так как отображения h_F и h_F^{-1} являются C^1-гладкими вдоль слоев и переводят слои в слои, для этого достаточно доказать лишь, что $prG_F = \sigma$, где pr, как и раньше, обозначает проекцию на Σ^2. Заметим, что

$$prG_F(\omega, x) = \Phi_0 \circ \Phi \circ F(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega))(x), x). \tag{2.7}$$

В силу условия (b), равенства (2.7) и так как

$$(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega))(x), x) \in \Phi^{-1}(\Phi_0^{-1}(\omega)) \quad \forall x \in S^1,$$

$$prG_F(\omega, x) = \Phi_0 \circ g \circ \Phi(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega))(x), x) = \Phi_0 \circ g \circ \Phi_0^{-1}(\omega) = \sigma(\omega).$$

Таким образом, отображение G_F является мягким косым произведением. Покажем, что диффеоморфизмы f_ω мягкого косого произведения G_F будут гельдерово зависеть от точки на базе. Действительно, выберем две произвольные последовательности $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma^2$. Выберем произвольную точку $x \in S^1$. Тогда

$$\mathrm{dist}_{S^1}(f_{\omega_1}(x), f_{\omega_2}(x)) = \mathrm{dist}_{S^1}(pr_{S^1} G_F(\omega_1, x), pr_{S^1} G_F(\omega_2, x)) =$$

$$= \mathrm{dist}_{S^1}(pr_{S^1} \circ h_F \circ F \circ h_F^{-1}(\omega_1, x), pr_{S^1} \circ h_F \circ F \circ h_F^{-1}(\omega_2, x)) =$$

$$= \mathrm{dist}_{S^1}(pr_{S^1} \circ F \circ h_F^{-1}(\omega_1, x), pr_{S^1} \circ F \circ h_F^{-1}(\omega_2, x)) \le$$

$$\le \mathrm{dist}\left(F\left(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega_1))(x), x\right), F\left(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega_2))(x), x\right)\right).$$

Существует такая константа C_0, что

$$\mathrm{dist}_{S^1}(f_{\omega_1}(x), f_{\omega_2}(x)) \le$$

$$\le C_0 \max_{x \in S^1} \mathrm{dist}\left(\left(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega_1))(x), x\right), \left(\mathrm{map}(\Phi_0^{-1}(\omega_2))(x), x\right)\right).$$

В силу пункта (d), написанной выше оценки и определения C^0-метрики в пространстве слоев,

$$\mathrm{dist}_{S^1}(f_{\omega_1}(x), f_{\omega_2}(x)) \le C_0 C \mathrm{dist}_\Lambda \left(\Phi_0^{-1}(\omega_1), \Phi_0^{-1}(\omega_2)\right)^\alpha.$$

Хорошо известно (см., например, [5]), что отображение Φ_0^{-1} является гельдеровым. Расстояние между диффеоморфизмами f_ω^{-1} оценивается аналогично. Таким образом, мы доказали гельдерову зависимость слоев, т.е. условие (2.6).

Из теоремы 7 следует, что если окрестность $V_1 \subset V_0$ достаточно мала, то для диффеоморфизмов $F \in V_1$ мягкое косое произведение G_F C^1-непрерывно зависит от F (т.е. диффеоморфизмы f_ω мягкого косого произведения G_F C^1-непрерывно зависят от F) — в частности, мягкое косое произведение G_F близко к отображению $\sigma \times \mathrm{id}_{S^1}$.

Найдутся такая C^1-окрестность $W \subset V_1$ диффеоморфизма $\mathcal{F}_0 = g \times \mathrm{id}_{S^1}$ и константы L, C, α, что если $F \in W$, то для отображения G_F будут выполняться все условия теоремы 4. Действительно, условие (2.6) уже обосновано. Для любой достаточно малой окрестности W диффеоморфизма $\mathcal{F}_0$ найдется такая окрестность W' тождественного диффеоморфизма id_{S^1} в C^1-топологии, что $f_\omega \in W'$. Кроме того, можно выбрать окрестность W, а значит и окрестность W', столь малой, что число L, определенное в теореме 4, будет настолько близко к 1, чтобы выполнялось соотношение (2.5). Пусть число δ_0 из неравенств (2.1) настолько мало, что гладкая реализация F_0 ступенчатого косого произведения G_0 попадает в окрестность W и выполняется включение $g_0, g_1 \in W'$. Из этого включения, выбора окрестности W', свойств диффеоморфизмов f_ω и теоремы 7 следует, что для любых достаточно малых окрестностей W_0 и W_1 соответственно диффеоморфизмов g_0 и g_1 найдется такая окрестность $W(F_0) \subset W$ гладкой реализации F_0, что для любых диффеоморфизмов $F \in W(F_0)$ соответствующее мягкое косое произведение G_F удовлетворяет условиям (2.4), (2.5) и (2.6).

Гладкую реализацию F_0 можно рассматривать (после продолжения) как отображение пространства $S^2 \times S^1$. Первоначально мы рассматривали сужение диффеоморфизма многообразия $S^2 \times S^1$ на множество $D \times S^1$. Так как у близких диффеоморфизмов близки и сужения на множество $D \times S^1$, окрестность $W(F_0)$ — искомая. $\square$

Замечание 3. *В обозначениях доказательства теоремы 5 гиперболическим периодическим точкам мягких косых произве-*

дений G_F соответствуют гиперболические периодические точки диффеоморфизмов F многообразия $S^2 \times S^1$.

Доказательство замечания 3. Пусть точка p — гиперболическая периодическая точка мягкого косого произведения G_F. Ей соответствует некоторая периодическая точка $\bar{p}$ диффеоморфизма F. Так как отображения h_F и h_F^{-1} являются C^1-гладкими вдоль слоев, точка $\bar{p}$ является периодической гиперболической точкой для сужения диффеоморфизма F на соответствующие центральные слои. Так как множество Δ — частично гиперболическое, точка $\bar{p}$ является гиперболической периодической точкой для диффеоморфизма F того же типа, что и точка p. □

Для удобства мы будем обозначать через dist как метрику на многообразии $S^2 \times S^1$, так и метрику в пространстве $\Sigma^2 \times S^1$. Пусть p — периодическая точка гомеоморфизма f некоторого метрического пространства M. Будем называть устойчивым (соответственно, неустойчивым) многообразием траектории точки p множество $W^s(p)$ ($W^u(p)$), определенное равенством (2.2) (соответственно, (2.3)). Выберем в качестве гомеоморфизма f некоторое мягкое косое произведение G из формулировки теоремы 5. Пусть F — диффеоморфизм многообразия $S^2 \times S^1$, соответствующий косому произведению G. Подчеркнем, что, несмотря на названия, множества $W^s(p)$ и $W^u(p)$ многообразиями не являются. Однако множества $W^s_F(\bar{p})$ и $W^u_F(\bar{p})$, являющиеся устойчивым и неустойчивым многообразиями траектории точки $\bar{p} \in S^2 \times S^1$ (соответствующей точке $p \in \Sigma^2 \times S^1$ в смысле замечания 3) относительно диффеоморфизма F, уже будут многообразиями. Определим размерности множеств $W^s(p)$ и $W^u(p)$

$$\mathrm{dim} W^s(p) := \mathrm{dim} W^s_F(\bar{p}), \qquad \mathrm{dim} W^u(p) := \mathrm{dim} W^u_F(\bar{p}).$$

Тогда, если точка p является гиперболической периодической точкой типа (m, n), то $\mathrm{dim} W^s(p) = m$ и $\mathrm{dim} W^u(p) = n$.

Если p — периодическая точка сдвига Бернулли σ, то числа $\mathrm{dim} W^s(p)$ и $\mathrm{dim} W^u(p)$ определяются аналогично, только диффеоморфизм F следует заменить на определенный ранее диффеоморфизм g. Согласно этому определению, $\mathrm{dim} W^s(p) = \mathrm{dim} W^u(p) = 1$, т.е. точка $p \in \Sigma^2$ является гиперболической периодической точкой типа (1,1).

Пусть число δ_0 из неравенств (2.1) настолько мало, чтобы удовлетворять требованиям теоремы 5. Зафиксируем такие числа $a > 1$ и $b < 1/100$ и диффеоморфизмы g_0 и g_1 упомянутого выше вида, что выполняются неравенства (2.1). По зафиксированным диффеоморфизмам g_0 и g_1 определим ступенчатое косое произведение G_0 и его гладкую реализацию F_0.

Пусть W — окрестность отображения F_0 из теоремы 5. Для доказательства теоремы 1 достаточно найти такое число δ', что $N(\delta', F_0) \subset W$ и для любого диффеоморфизма $F \in N(\delta', F_0)$ не выполняется OSP. Пусть $\delta < \delta_0$ — произвольное малое число. В силу замечания 2, если число δ' достаточно мало, то произвольному диффеоморфизму $F \in N(\delta', F_0)$ соответствует мягкое косое произведение G, диффеоморфизмы f_ω которого (см. определение 13) попадают в окрестность $N(\delta, g_{\omega_0})$, где символ ω_0 определяется в условии теоремы 4. В ходе доказательства теоремы 1 мы выберем число δ достаточно малым, т.е., тем самым, выберем и число δ'. По теореме 5 у любого диффеоморфизма $F \in W$ есть локально максимальное инвариантное множество Δ. Значит, для доказательства теоремы 1, достаточно доказать лишь, что для сужения $F|_\Delta$ не выполняется OSP. А так как свойство OSP сохраняется при сопряжении, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать лишь следующее утверждение:

Теорема 1$'$. *Пусть G — мягкое косое произведение, соответствующее (в смысле замечания 2) некоторому диффеоморфизму F многообразия $M = S^2 \times S^1$. Кроме того, пусть для G выполняются условия теоремы 4, и окрестности $W_0(g_0)$ и $W_1(g_1)$ достаточно малы. Тогда для G не выполняется* OSP.

2.3 Основная лемма.

Следующая лемма является основным ингредиентом для нашей конструкции. Она доставляет достаточное условие на псевдотраекторию, при котором любая орбитально отслеживающая ее траектория лежит на устойчивом (или неустойчивом) многообразии гиперболической периодической точки.

Лемма 1. *Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой $dist$, f — диффеоморфизм многообразия M, p — гиперболическая периодическая точка и $q^1 \in W^s(p)$. Зафиксируем произвольные числа $R > 0$ и $0 < \epsilon_0 < R/2$. Существует такое число $0 < \epsilon < \epsilon_0$, что если последовательность $\xi = \{x_k\}$ такова, что*

$$x_k = q_k^1 = f^k(q^1) \text{ при } k \geq 1, \quad x_k \notin N(\epsilon_0, O(p, f)) \text{ при } k < 1, \tag{2.8}$$

то для любой точки q^2, для которой выполняются включения

$$\xi \subset N(\epsilon, O(q^2, f)) \quad \text{и} \quad O(q^2, f) \subset N(\epsilon, \xi) \tag{2.9}$$

и неравенство $dist(q_1^1, q_1^2) < \epsilon$, верно следующее:

$$q^2 \in W^s(p), \tag{2.10}$$

$$dist(q_k^1, q_k^2) \leq R \quad \text{при } k \geq 1. \tag{2.11}$$

Фактически лемма утверждает следующее. Пусть p — гиперболическая периодическая точка. Тогда если псевдотраектория $\xi = \{x_k\}$ определенного типа при всех достаточно больших положительных k "близка" к траектории $O(p, f)$ и при всех достаточно больших по абсолютной величине отрицательных k "далека" от траектории $O(p, f)$, то любая точная траектория, орбитально отслеживающая псевдотраекторию ξ, попадает на устойчивое многообразие точки p.

Следствие. *В условиях леммы 1 пусть точка* $q^1 \in W^u(p)$*. Существует такое число* $0 < \epsilon < \epsilon_0$*, что если последовательность* $\xi = \{x_k\}$ *такова, что*

$$x_k = q^1_k = f^k(q^1) \text{ при } k \le 1, \quad x_k \notin N(\epsilon_0, O(p,f)) \text{ при } k > 1, \tag{2.12}$$

то для любой точки q^2*, для которой выполняются включения* (2.9) *и неравенство* $dist(q^1_1, q^2_1) < \epsilon$*, верно следующее:*

$$q^2 \in W^u(p), \tag{2.13}$$

$$dist(q^1_k, q^2_k) \le R \quad \text{при } k \le 1. \tag{2.14}$$

Доказательство леммы 1. Для начала нам необходимо выбрать достаточно малое число ϵ. Мы будем делать это в несколько шагов. Выберем такое число $\epsilon_1 < \epsilon_0$, что

- если $O(p,f) = \{p_0, \dots, p_{m_p-1}\}$, то окрестности

  $$N(\epsilon_1, p_0),\ N(\epsilon_1, p_1), \dots, N(\epsilon_1, p_{m_p-1})$$

  являются дизъюнктными;
- если положительная полутраектория $O_+(x,f)$ содержится в множестве $N(\epsilon_1, O(p,f))$, то $x \in W^s(p)$;
- $$(N(\epsilon_1, O(p,f)) \cup f(N(\epsilon_1, O(p,f)))) \cap N(\epsilon_1, x_k) = \emptyset \text{ при } k \le 1;$$
- на границе множества $N(\epsilon_1, O(p,f))$ нет точек последовательности ξ.

Выберем такое минимальное число $n > 1$, что точки x_k при $k \geq n$ содержатся в множестве $N(\epsilon_1, O(p,f))$. Выберем такое число $\epsilon_2 < \epsilon_1$, что

- следующие окрестности являются дизъюнктными:

$$N(\epsilon_2, O(p,f)) \quad \text{и} \quad N(\epsilon_2, x_k) \text{ при } 1 \leq k \leq n.$$

- если для некоторых чисел $1 \leq k_1 \leq n$ и $1 \leq k_2$

$$x_{k_1} = q^1_{k_1} \notin N(\epsilon_1, O(p,f)) \quad \text{и} \quad x_{k_2} = q^1_{k_2} \in N(\epsilon_1, O(p,f)),$$

то $N(\epsilon_1, O(p,f)) \cap N(\epsilon_2, x_{k_1}) = \emptyset$ и $N(\epsilon_2, x_{k_2}) \subset N(\epsilon_1, O(p,f))$.

Выберем такое минимальное число $m \geq n$, что точка x_m попадает в множество $N(\epsilon_2/3, O(p,f))$. Выберем такое число $\epsilon_3 < \epsilon_2/3$, что окрестности $N(\epsilon_3, x_k)$ при $1 \leq k \leq m$ являются дизъюнктными. Выберем такое число $\epsilon < \epsilon_3$, что

$$f^{j-k}(N(\epsilon, x_k)) \subset N(\epsilon_3, x_j) \qquad \text{при } 1 \leq j, k \leq m.$$

Покажем, что выбранное число ϵ является искомым. Пусть для точки q^2 и последовательности ξ выполняется соотношение (2.9).

Так как $q^2_1 \in N(\epsilon, x_1)$, из выбора ϵ следует, что

$$q^2_k \in N(\epsilon_3, x_k) \qquad \text{при } 1 \leq k \leq m. \tag{2.15}$$

Таким образом, в силу включения (2.15) и наших обозначений, точка q^2_m попадает в множество $N(\epsilon_2, O(p,f))$. Для доказательства включения (2.10) достаточно обосновать включение

$$q^2_k \in N(\epsilon_1, O(p,f)) \qquad \text{при всех } k \geq m. \tag{2.16}$$

Предположим, что включение (2.16) не выполняется, т.е. существует такое минимальное число $r > m$, что

$$q_r^2 \notin N(\epsilon_1, O(p, f)). \tag{2.17}$$

Из соотношения (2.9) и выбора ϵ_2 и ϵ_3 следует существование такого $k < n$, что точка q_r^2 попадает в множество $N(\epsilon, x_k)$. Возможны два случая:

Случай 1: $k \leq 1$. По выбору r, $q_{r-1}^2 \in N(\epsilon_1, O(p, f))$. Но тогда, в силу соотношения (2.17),

$$f(N(\epsilon_1, O(p, f))) \cap N(\epsilon_1, x_k) \neq \emptyset \qquad \text{при } k \leq 1,$$

что противоречит выбору ϵ_1.

Случай 2: $1 < k < n$. Найдется такое максимальное число $1 \leq k' < k$, что точка $x_{k'}$ не попадает в множество $N(\epsilon_1, O(p, f))$. Но тогда, в силу выбора ϵ,

$$q_{r-t}^2 \in N(\epsilon_3, x_{k-t}) \quad \text{при } 0 \leq t \leq k - k',$$

а значит, по выбору ϵ_2,

$$q_{r-(k-k')}^2 \notin N(\epsilon_1, O(p, f)) \quad \text{и} \quad q_{r-t}^2 \notin N(\epsilon_2, O(p, f)) \text{ при } 0 \leq t \leq k-k'.$$

Таким образом, $r - (k - k') > m$ (так как иначе нашлось бы такое $1 \leq t \leq k - k'$, что точка $q_m^2 = q_{r-t}^2$ содержится в множестве $N(\epsilon_2, O(p, f))$). Значит, число r не минимально. Противоречие.

Включение (2.16) доказано, а вместе с ним доказано и включение (2.10). В силу соотношений (2.15) и (2.16) и так как

$q_k^1 \in N(\epsilon_1, O(p,f))$ при $k \geq m$, для точек q^1 и q^2 выполняется неравенство (2.11). $\square$

2.4 Сведение доказательства теоремы 1′ к двум случаям, разбор случая (A1).

Возможны следующие два случая:

(A1) Найдутся две гиперболические периодические точки r_1 и r_2, лежащие на разных слоях, с одномерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями соответственно, у которых эти многообразия пересекаются.

(A2) Для любых двух гиперболических периодических точек r_1 и r_2, лежащих на разных слоях, с одномерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями соответственно, эти многообразия не пересекаются.

Теперь мы можем более подробно наметить схему доказательства в двух рассматриваемых случаях.

В случае (A1) мы построим псевдотраекторию следующим образом. Она будет состоять из участка истинной гетероклинической траектории от r_1 к r_2, переходящего (достаточно близко от точки r_2) в траекторию, лежащую на слое точки r_2 и "уходящую" от точки r_2 по ее неустойчивому многообразию. Подчеркнем, что основную лемму можно применять как к самой этой псевдотраектории, так и к ее проекции на базу (подкову Смейла). Для достижения противоречия предположим, что построенная нами псевдотраектория орбитально отслеживается некоторой истинной. Применив основную лемму к проекции траектории на базу, мы увидим, что эта траектория лежит на слое некоторой траектории, "входящей" в точку r_2. С другой стороны, поскольку псевдотраектория "исходит" из точки r_1, истинная траектория должна лежать на неустойчивом многообразии точки r_1. Кроме того, так как сдвиг Бернулли обладает свойством различимости траекторий, проекция использованной в нашей конструкции гетероклинической траектории на базу должна совпадать с проекцией отслеживаюшей истинной траектории. Наконец, поскольку проекция локального неустойчивого многообразия в малой окрестности точки r_1 на базу взаимноодно-значна, а точка в базе нам известна, истинная траектория должна в точности совпадать с использованной для конструкции гетероклинической траекторией. Но это приводит к противоречию — участок псевдотраектории на конечном этапе не будет отслеживаться.

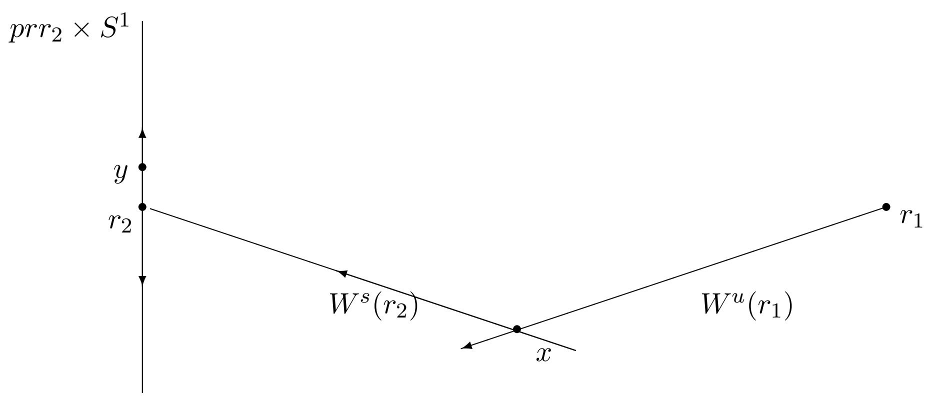

рис. 1

На рисунке 1 изображен фазовый портрет косого произведения в случае (A1).

В случае (A2) мы, задействовав технику мягких косых произведений, построим псевдотраекторию, на начальном и на конечном этапе соответственно "исходящую из" и "входящую в" гиперболические периодические точки с одномерными неустойчивыми и устойчивыми многообразиями соответственно, и не подходящую к этим точкам на промежуточном этапе. Тогда в силу основной леммы истинная траектория, орбитально отслеживающая такую псевдотраекторию, должна быть гетероклинической между этими точками, что и приводит к искомому противоречию.

Случай (A1) будет разобран в этом параграфе, а случаю (A2) посвящены все оставшееся параграфы этой главы.

Предположим, что для отображения G выполняется случай (A1). Выберем точку $x \in W^u(r_1) \cap W^s(r_2)$ и точку $y \in \in (prr_2 \times S^1) \cap W^u(r_2)$ (см. рис. 1). Для начала нам необходимо выбрать достаточно малое число ε. Мы будем делать это в несколько шагов. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что

1) для отображения G, некоторой точки траектории $O(x, G)$ и точки r_1 выполняется заключение следствия основной леммы;
2) для сдвига Бернулли σ, некоторой точки траектории $O(prx, \sigma)$ и точки prr_2 выполняется заключение основной леммы (в этих двух пунктах число R предполагается доста-

точно малым, но заранее зафиксированным числом);

3) точка y не попадает в множество $N(2\varepsilon_0, O(x,G))$;

4) проекция pr отображает локальное неустойчивое многообразие $W^u_{\varepsilon_0}(r_1)$ на базу взаимнооднозначно.

Поясним пункты 1) и 2). Строго говоря, основная лемма или ее следствие в нашем случае не применимы, так как пространства Σ^2 и $\Sigma^2 \times S^1$ не являются многообразиями, а эти утверждения доказывались лишь для многообразий. Но в пункте 1) можно рассмотреть диффеоморфизм F многообразия M, соответствующий мягкому косому произведению G (в смысле замечания 2), и точки $\bar{x}$ и $\bar{r}_1$, являющиеся аналогами точек x и r_1 для диффеоморфизма F. Найдутся такие число ϵ_0 и точка $x_0 \in O(x,G)$, что для них выполняется аналог условия (2.12). Выберем произвольную точку $q^2 \in \Sigma^2 \times S^1$, для которой выполняются аналог соотношения (2.9) для некоторого малого числа ϵ и неравенство $\operatorname{dist}(G(q^2), G(x_0)) < \epsilon$. По теореме 5 существует гомеоморфизм h_F, сопрягающий сужение $F|_\Delta$ (где множество Δ определялось в условии теоремы 5) и косое произведение G. Так как гомеоморфизмы h_F и h_F^{-1} являются гомеоморфизмами компактных метрических пространств, они являются равномерно непрерывными. Поэтому для некоторого числа $\bar{\epsilon}_0$ и точки $\bar{x}_0 = h_F^{-1}(x_0)$ выполняется аналог условия (2.12). Более того, для точки $\bar{q}^2 = h_F^{-1}(q^2)$, являющейся аналогом точки q^2, точки $\bar{x}_0$, достаточно малого числа $\bar{\epsilon}$ и отображения F выполняются все условия следствия. Таким образом, следствие можно применить к диффеоморфизму F, т.е. для произвольного достаточно малого числа $\bar{R}$, малого числа $\bar{\epsilon}$ и точек $\bar{x}_0$ и $\bar{q}^2$ будут выполняться аналоги соотношений (2.13) и (2.14). Следовательно, в силу равномерной непрерывности гомеоморфизма h_F, для произвольного достаточно малого числа R, малого числа ϵ и точек x_0 и q^2 будут выполняться аналоги соотношений (2.13) и (2.14).

Значит, заключение следствия будет выполняться для отображения G. В пункте 2) можно рассмотреть зафиксированный ранее диффеоморфизм $g : S^2 \mapsto S^2$, обладающий подковой Смейла, и рассуждать совершенно аналогично. Таким образом, заключение леммы 1 применимо и к сдвигу Бернулли σ.

Поясним пункт 4). Рассмотрим диффеоморфизм $F : M \mapsto M$, соответствующий мягкому косому произведению G. По теореме 5 у диффеоморфизма F есть такое локально максимальное инвариантное множество Δ, гомеоморфное $\Sigma^2 \times S^1$, что гомеоморфизмы $F|_\Delta$ и G топологически сопряжены. Напомним, что мы называем центральными слоями те множества, гомеоморфные S^1, которые соответствуют слоям косого произведения G. По замечанию 3 периодической точке r_1 косого произведения G соответствует некоторая гиперболическая периодическая точка $\bar{r}_1$ диффеоморфизма F. Так как точка r_1 — типа (2,1), локальное неустойчивое многообразие точки $\bar{r}_1$ относительно диффеоморфизма F, т.е. множество

$W^u_{\mathrm{loc},F}(\bar{r}_1)$, — это просто конечное объединение "отрезков". Неустойчивое пространство диффеоморфизма F в точке $\bar{r}_1$ образует ненулевой угол с центральным слоем точки $\bar{r}_1$. По теореме 7 центральные слои диффеоморфизма F C^1-близки к соответствующим центральным слоям диффеоморфизма $g \times \mathrm{id}_{S^1}$, т.е. к окружностям. Следовательно, множество $W^u_{\mathrm{loc},F}(\bar{r}_1)$ может пересекаться с любым центральным слоем только по одной точке. Значит, и множество $W^u_{\mathrm{loc},G}(r_1)$ может пересекаться с любым слоем лишь по одной точке. Таким образом, на множестве $W^u_{\mathrm{loc},G}(r_1)$ проекция на базу взаимнооднозначна.

Нам понадобятся две следующие леммы:

Лемма 2. *Существует такое число R, что если $\sigma : \Sigma^2 \mapsto \Sigma^2$ — сдвиг Бернулли, а q^1 и q^2 — две такие точки из Σ^2, что*

$$d_{\Sigma^2}(q^1_k, q^2_k) \leq R \quad \text{для любых } k \in \mathbb{Z},$$

то $q^1 = q^2$ (мы считаем, что $q^j_k = \sigma^k(q^j)$).

Фактически лемма 2 означает, что для сдвига Бернулли σ выполняется свойство различимости траекторий (его точное определение дается в параграфе 4.1). Доказательство этого факта приводится, например, в книге [5].

Лемма 3. *В условиях случая (А1) пусть R — число из леммы 2. Существует такое число $\varepsilon < \varepsilon_0$, что если для двух точек $q^1 = prx$ и q^2, содержащихся в Σ^2 и таких, что*

$q^1, q^2 \in W^u(prr_1) \cap W^s(prr_2)$, *выполнены соотношения*

$$d_{\Sigma^2}(q_1^1, q_1^2) < \epsilon,$$

$$O(q^1, \sigma) \subset N(\varepsilon, O(q^2, \sigma)) \quad \text{и} \quad O(q^2, \sigma) \subset N(\varepsilon, O(q^1, \sigma)),$$

то $dist(q_k^1, q_k^2) \leq R$ *при* $k \in \mathbb{Z}$.

Иными словами, лемма 3 означает, что в условиях случая (A1) из орбитальной близости двух гетероклинических траекторий, идущих из prr_1 в prr_2, следует их поточечная близость.

Доказательство. По выбору числа ε_0 для точки prr_1, отображения σ и некоторой точки $q_{k_1-1}^1 = \sigma^{k_1-1}(q^1) \in O(prx, \sigma)$ выполняется заключение следствия леммы 1, а для точки prr_2, отображения σ и некоторой точки $q_{k_2-1}^1 \in O(prx, \sigma)$ выполняется заключение леммы 1 (где число R — из леммы 2). Значит, если $d_{\Sigma^2}(q_{k_1}^1, q_{k_1}^2) < \varepsilon_0$, то, в силу аналогов неравенств (2.11),

$$d_{\Sigma^2}(q_k^1, q_k^2) \leq R \qquad \text{при } k \leq k_1.$$

Аналогично, если $d_{\Sigma^2}(q_{k_2}^1, q_{k_2}^2) < \varepsilon_0$, то

$$d_{\Sigma^2}(q_k^1, q_k^2) \leq R \qquad \text{при } k \geq k_2.$$

Выберем такое число $\varepsilon < \varepsilon_0$, что если $d_{\Sigma^2}(q_1^1, q_1^2) < \varepsilon$, то

$$d_{\Sigma^2}(q_k^1, q_k^2) < \varepsilon_0 \quad \text{для } k, \text{ лежащих между 1 и } k_1;$$

$$d_{\Sigma^2}(q_k^1, q_k^2) < \varepsilon_0 \quad \text{для } k, \text{ лежащих между 1 и } k_2.$$

Выбранное число ε будет искомым, т.е. для него будет выполняться заключение леммы 3. $\square$

Пусть ε — число, существование которого доказано в лемме 3. Выберем произвольное число $d < \varepsilon$. Мы построим псевдотраекторию, о которой шла речь в начале параграфа 2.4. Выберем такие числа k_1 и k_2, что

$$x_{k_1+1} \in N(d/2, O(r_2, G)) \quad \text{и} \quad y_{k_2} \in N(d/2, O(r_2, G)).$$

Построим d–псевдотраекторию $\xi = \{\xi_k\}$ следующим образом (см. рис. 1):

$$\xi_k = x_k \text{ при } k \leq k_1, \quad \xi_k = y_{k-k_1+k_2-1} \text{ при } k > k_1.$$

Предположим, что для косого произведения G выполняется орбитальное свойство отслеживания. Тогда найдется такая точка q, что для нее и для псевдотраектории ξ выполняется соотношение (1.2).

По выбору числа ε, для точки r_1 и псевдотраектории ξ выполняется следствие леммы 1. Следовательно,

$$q \in W^u(r_1). \tag{2.18}$$

Рассмотрим последовательность $pr\xi$. До попадания в $d/2$-малую окрестность точки prr_2 точки последовательности $pr\xi$ совпадают с соответствующими точками траектории $O(prx, \sigma)$, а ее оставшееся точки совпадают с точками траектории $O(prr_2, \sigma)$. Поэтому, в силу соотношения (1.2), при достаточно малом d

$$O(prx, \sigma) \subset N(\varepsilon, O(prq, \sigma)) \quad \text{и} \quad O(prq, \sigma) \subset N(\varepsilon, O(prx, \sigma)). \tag{2.19}$$

Итак, для траектории точки prx выполняются аналог условия (2.8) и соотношение (2.19). Значит, в силу выбора ε и соотношения (2.18),

$$prq \in W^u(prr_1) \cap W^s(prr_2).$$

Для точек prx и prq (мы можем считать, что $\operatorname{dist}(x_1, q_1) < \varepsilon$) выполняются все условия леммы 3. Следовательно,

$$d_{\Sigma^2}(\sigma^k(prx), \sigma^k(prq)) \leq R \qquad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

По лемме 2,

$$prq_k = prx_k \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $x, q \in W^u(r_1)$, найдется такое число K, что точки x_K и q_K лежат на том локальном неустойчивом многообразии точки r_1, которое проецируется на базу однозначно (см. об этом в выборе ε, пункт 4)). Значит, равенство $prq_K = prx_K$ влечет равенство $q_K = x_K$, а оно, в свою очередь, влечет равенство $q = x$. Следовательно, в силу соотношения (1.2), выполняются включения

$$O(x, G) \subset N(\varepsilon, \xi) \quad \text{и} \quad \xi \subset N(\varepsilon, O(x, G)),$$

что противоречит построению последовательности ξ. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно, и если для мягкого косого произведения G выполняется случай (A1), то $G \notin \mathrm{OSP}$.

2.5 Начало разбора случая (A2) — вспомогательные леммы

В этом разделе будут сформулированы и доказаны две вспомогательные леммы о свойствах косых произведений, необходимые для разбора случая (A2). Введем соответствующие обозначения.

Рассмотрим ступенчатое косое произведение G_0, образованное диффеоморфизмами g_0 и g_1. По теореме 4 у косого произведения G_0 есть бесконечное множество гиперболических периодических точек типа (1,2), лежащих на разных слоях, и бесконечное множество гиперболических периодических точек типа (2,1), лежащих на разных слоях. Заметим, что в любом бесконечном множестве лежащих на разных слоях периодических точек в пространстве $\Sigma^2 \times S^1$ есть точки сколь угодно больших периодов. Выберем у косого произведения G_0 четыре гиперболические периодические точки, чьи траектории лежат на разных слоях: p_1 и p_3 типа $(2, 1)$ и p_2 и p_4 типа $(1, 2)$.

Напомним, что мы называем словом любую конечную последовательность нулей или единиц. Последовательность prp_j, где $j \in \{1, \dots, 4\}$, является периодической, т.е. в ней периодически повторяется некоторое слово ω_j длины T_j. Будем считать, что слово ω_j является словом минимальной длины, т.е. число T_j является основным периодом точки prp_j относительно сдвига Бернулли σ. Без ограничения общности будем считать, что точки p_j были выбраны так, что $T_j > 2$ при $j \in \{1, \dots, 4\}$, т.е. в слове ω_j есть как 0, так и 1. Кроме того, без ограничения общности будем считать, что

$$T_3 \leq \min(T_1, T_2) \qquad \text{и} \qquad T_4 \leq \min(T_1, T_2). \tag{2.20}$$

Определим число

$$T = \max(T_1, T_2). \tag{2.21}$$

Будем считать, что окрестности W_0 и W_1 из формулировки теоремы $1'$ настолько малы, что точки p_j сохраняются для любых мягких косых произведений из формулировки теоремы $1'$ (фактически являющихся возмущениями ступенчатого косого произведения G_0). Это значит, что у аналогов этих точек p_j будут те же самые периоды и те же самые типы. В частности, число T не зависит от выбора мягкого косого произведения G.

Обозначим теми же символами p_j ($j \in \{1, \dots, 4\}$) те гиперболические периодические точки мягкого косого произведения G, которые соответствуют точкам p_j ступенчатого косого произведения G_0. Как было отмечено выше, периоды T_j и типы точек p_j не изменятся. Пусть, как и раньше, ω_j ($j \in \{1, \dots, 4\}$) — это периодически повторяющиеся слова у последовательностей prp_j.

Определим цилиндрические окрестности U_1 и U_2 точек p_1 и p_2 следующим образом:

$$U_j := \{\omega = \dots \omega_j \omega_j | \omega_j \omega_j \dots\} \times S^1, \quad j \in \{1, 2\}.$$

В предыдущей формуле многоточие обозначает любые символы, а знак | означает то же, что и раньше (см. параграф 2.2). Слово ω_j повторяется четыре раза: два раза до нулевой позиции и два раза после. Определим цилиндрические окрестности траекторий $O(p_j, G)$ $(j \in \{1,2\})$ следующим образом:

$$V_j := U_j^0 \cup U_j^1 \cup \ldots \cup U_j^{T_j-1},$$

где множество U_j^k $(0 \le k \le T_j - 1)$ определяется так же, как и множество U_j, только слово ω_j заменяется на слово $\sigma^k(\omega_j)$, т.е. на соответствующую циклическую перестановку слова ω_j.

Лемма 4. *В наших условиях*

$$O(p_j, G) \cap V_t = \emptyset \qquad \textit{при } j \in \{3,4\},\ t \in \{1,2\}, \tag{2.22}$$

т.е. траектории точек p_3 и p_4 не попадают в цилиндрические окрестности V_1 и V_2 траекторий $O(p_1, G)$ и $O(p_2, G)$.

Доказательство. Без ограничения общности, докажем соотношение (2.22) для точки p_3 и множества U_1. Предположим, что это соотношение не выполняется. Это значит, что существует такое число K, что у последовательности prp_3 с позиции под номером $K - 2T_1$ до позиции $K + 2T_1 - 1$ стоит слово $\omega_1\omega_1\omega_1\omega_1$. При этом, по соотношению (2.20), слово ω_1 длиннее слова ω_3. Рассмотрим слово ω_1, начинающееся с K-й позиции последовательности prp_3. Первые T_3 символов этого слова являются циклической перестановкой слова ω_3. Обозначим эту перестановку через $\bar{\omega}_3$. Значит, слово ω_1 накрывается m раз повторенными словами $\bar{\omega}_3$ плюс некоторая "добавка" — r первых символов из $\bar{\omega}_3$ $(0 \le r < T_3)$.

Но второе слово ω_1 (то, что начинается с $K+T_1$-й позиции последовательности prp_3, см. рис. 2) тоже накрывается словами $\bar{\omega}_3$. С одной стороны, оно должно начинаться с $\bar{\omega}_3$ (так как первое и второе слова ω_1 совпадают), а с другой стороны — с T_3-r последних символов из $\bar{\omega}_3$ (см. рис. 2). Это значит, что если в слове $\bar{\omega}_3$ поменять местами r первых символов и T_3-r последних, то слово $\bar{\omega}_3$ не изменится, т.е.

$$\sigma^r(prp_3) = prp_3.$$

Значит, $r=0$, но тогда слово ω_1 есть m раз повторенное слово ω_3. Таким образом, траектории точек prp_1 и prp_3 пересекаются, что противоречит выбору точек p_1 и p_3. Соотношение (2.22) доказано.

□

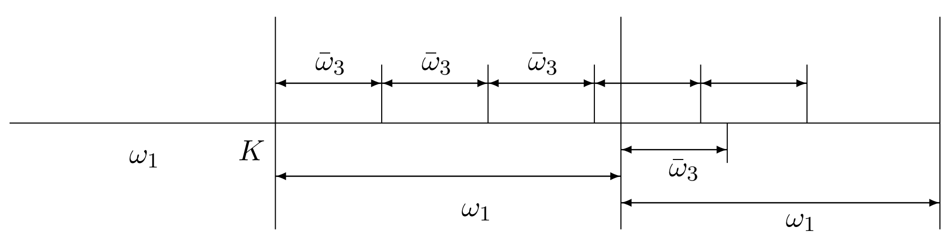

рис. 2

Лемма 5. *Если $m > 4T$, а последовательность $\beta \in \Sigma^2$ такова, что в ней периодически повторяется слово*

$$\omega = \alpha_1\omega_3 \ldots \omega_3\alpha_2,$$

где слово ω_3 повторяется ровно m раз, а в словах α_1 и α_2 (длина которых больше $4T$) не могут стоять подряд меньше T нулей, *то*

$$O(\beta, \sigma) \cap prV_t = \emptyset \qquad \text{\textit{при} } t \in \{1, 2\}. \tag{2.23}$$

Иными словами, траектория последовательности β относительно сдвига Бернулли, у которой периодически повторяется слово ω, не пересекает множества prV_1 и prV_2.

Доказательство. Без ограничения общности докажем, что соотношение (2.23) выполняется для точки β и множества prU_1. Предположим противное. Это значит, что существует такое число K, что у последовательности β с позиции $K - 2T_1$ до позиции $K + 2T_1 - 1$ стоит слово $\omega_1\omega_1\omega_1\omega_1$. Возможны два случая:

а) K–я позиция "находится" в слове α_1 (тот случай, когда она "находится" в слове α_2, разбирается аналогично). В слове ω_1 по построению есть как нули, так и единицы. Значит, в слове ω_1 может быть не больше $T_1 - 1$ нулей. Этот факт и то, что слово $\omega_1\omega_1$ содержится в слове α_1, противоречат свойствам слова α_1.

б) K-я позиция "находится" в слове $\omega_3 \ldots \omega_3$. Так как число повторений m слова ω_3 больше $4T$, слово $\omega_1\omega_1$ накроется некоторым набором слов ω_3. Далее для достижения противоречия следует рассуждать так же, как и при доказательстве леммы 4.

В обоих возможных случаях мы получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. $\square$

2.6 Сведение случая (A2) к лемме 6

Напомним, что в начале параграфа 2.4 был приведен набросок доказательства случая (A2). Здесь мы разберем случай (A2) с точностью до одной леммы.

Выберем мягкое косое произведение G из формулировки теоремы $1'$, и предположим, что для него выполняется случай (A2) (см. определение в начале параграфа 2.4). Следующая лемма играет ключевую роль в разборе случая (A2). Фактически она утверждает, что возможно построить "сколь угодно точные" псевдотраектории с необходимыми нам свойствами (они должны "исходить" из точки p_1 и "входить" в точку p_2, а их "промежуточная часть" должна быть "отделена" от траекторий $O(p_1, G)$ и $O(p_2, G)$).

Лемма 6. *В наших условиях, если окрестности W_0 и W_1 достаточно малы, то*

(6.a) Одномерное неустойчивое многообразие точки p_1 и двумерное устойчивое многообразие точки p_3 пересекаются;

(6.b) Двумерное неустойчивое многообразие точки p_4 и одномерное устойчивое многообразие точки p_2 пересекаются;

(6.c) Для любого числа d найдется такая гиперболическая периодическая точка s, что

- *$s \in N(d, p_3)$, и устойчивое многообразие точки s одномерно;*
- *траектория $O(s, G)$ не попадает в множества V_1 и V_2.*

(6.d) Существует такая точка $y \in W^u(s) \cap W^s(p_4)$, что ее траектория $O(y, G)$ не попадает в множества V_1 и V_2.

Лемма 6 будет доказана в разделе 2.7. Выберем точки $x \in W^u(p_1) \cap W^s(p_3)$ и $z \in W^u(p_4) \cap W^s(p_2)$. Фазовый портрет мягкого косого произведения G изображен на рисунке 3. Для удобства на рисунке 3 символом s обозначены все точки траектории $O(s, G)$ из леммы 6.

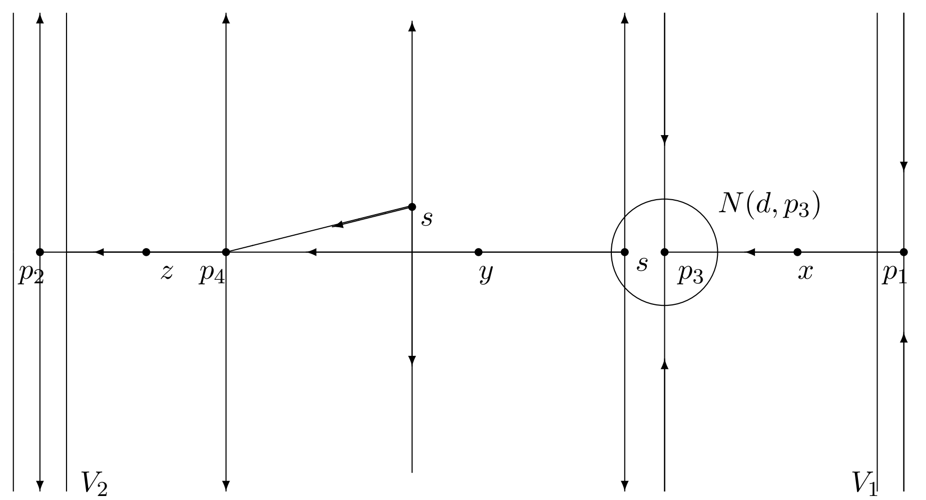

рис. 3

Покажем, как, используя лемму 6, можно завершить доказательство для случая (A2). Для начала нам необходимо выбрать достаточно малое число ε. Мы будем делать это в несколько шагов. Точки x и z можно выбрать настолько близкими к точкам p_1 и p_2, что найдется такое число ε_0, что

$$N(\varepsilon_0, O_-(x, G)) \subset V_1, \quad N(\varepsilon_0, O_+(z, G)) \subset V_2;$$

$$N(\varepsilon_0, O_-(x, G)) \cap N\left(\varepsilon_0, O(z, g) \cup O(y, G)\right) = \emptyset;$$

$$N(\varepsilon_0, O_+(z, G)) \cap N\left(\varepsilon_0, O(x, G) \cup O(y, G)\right) = \emptyset,$$

где y — произвольная точка из формулировки леммы 6. Существует такое число $\varepsilon < \varepsilon_0/3$, что

- для отображения G, точки z и точки p_2 выполняется заключение основной леммы;
- для отображения G, точки x и точки p_1 выполняется заключение следствия основной леммы.

Ранее, в параграфе 2.4 (см. выбор ε_0) было показано, что к мягким косым произведениям можно применять основную лемму и ее следствие.

Теперь, когда число ε выбрано, мы можем построить псевдотраекторию. Выберем произвольное число $d < \varepsilon$. Пусть s — точка, соответствующая числу $d/3$, а y — точка из пункта (6.d), соответствующая точке s, существование которых доказывается в лемме 6. Найдутся такие числа k_1, k_2, k_3 и k_4, что

$$x_{k_1+1} \in N(d/3, p_3), \quad y_{k_2} \in N(d/3, s),$$

$$y_{k_3+1} \in N(d/2, p_4), \quad z_{k_4} \in N(d/2, p_4).$$

Построим d–псевдотраекторию $\xi = \{\xi_k\}$ следующим образом:

$$\xi_k = x_k \text{ при } k \le k_1, \quad \xi_k = y_{k-k_1-1+k_2} \text{ при } k_1 < k \le k_1 + 1 + k_3 - k_2,$$

$$\xi_k = z_{k-k_1-2-k_3+k_2+k_4} \text{ при } k > k_1 + 1 + k_3 - k_2.$$

Предположим, что для косого произведения G выполняется орбитальное свойство отслеживания, т.е. существует такая точка

q, что для нее и для псевдотраектории ξ выполняется соотношение (1.2).

По выбору числа ε для построенной псевдотраектории ξ и точки p_2 выполняется заключение леммы 1. Следовательно,

$$p \in W^s(p_2). \tag{2.24}$$

По совершенно аналогичным причинам к псевдотраектории ξ и точке p_1 применимо заключение следствия леммы 1. Следовательно,

$$p \in W^u(p_1). \tag{2.25}$$

Но существование точки p, удовлетворяющей включениям (2.24) и (2.25), противоречит условию случая (A2). Полученное противоречие показывает, что в случае (A2) $G \notin \mathrm{OSP}$.

Итак, в обоих случаях мы заключили, что $G \notin \mathrm{OSP}$. Для завершения доказательства теоремы $1'$ осталось доказать лишь лемму 6.

2.7 Доказательство леммы 6

Доказательство леммы 6 в значительной степени основывается на доказательствах отдельных лемм из статьи [4].

2.7.1 Пункт (6.с) — основные обозначения

Мы начнем с доказательства пункта (6.с). По теореме 4 существует гиперболическая периодическая точка s, удовлетворяющая всем условиям пункта (6.c), кроме, быть может, последнего:

$$O(s, G) \cap (V_1 \cup V_2) = \emptyset. \tag{2.26}$$

Мы фактически повторим основную часть доказательства теоремы 2 (сформулированной в параграфе 2.1) из статьи [4], проследив, что от точки s, кроме всего прочего, можно потребовать и выполнение соотношения (2.26). Идея доказательства состоит в том, чтобы построить точку s так, чтобы для нее выполнялись условия леммы 5. Тогда соотношение (2.26) будет выполняться в силу леммы 5.

Без ограничения общности будем считать, что множества $W_0(g_0)$ и $W_1(g_1)$ — это шары радиуса δ, где δ — это некоторое достаточно малое число, на которое далее будут несколько раз накладываться ограничения. Введем следующие обозначения

$$\bar{f}_m[\omega] = f_{\sigma^{m-1}(\omega)} \circ \ldots \circ f_{\sigma(\omega)} \circ f_\omega,$$

$$\bar{f}_{-m}[\omega] = f^{-1}_{\sigma^{-m}(\omega)} \circ \ldots \circ f^{-1}_{\sigma^{-1}(\omega)},$$

$$\bar{f}_0[\omega] = \mathrm{id}.$$

Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 7 (лемма о погрешности). *Существует такое число K, не зависящее от выбора δ, что если для некоторых числа $m \in \mathbb{N}$ и точек $\omega, \omega' \in \Sigma^2$ выполнено неравенство*

$$d_{\Sigma^2}(\omega, \omega') \leq 2^{-m},$$

то

$$d_{C^0}(\bar{f}_{\pm m}[\omega], \bar{f}_{\pm m}[\omega']) \leq \gamma := K\delta^\beta,$$

где $\beta := 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}$, *а числа* L *и* α *определены в условии теоремы 4.*

Замечание 4. *Доказательство леммы 7 почти дословно повторяет доказательство леммы 3.1 из работы [4]; нужно сделать лишь несколько тривиальных изменений в связи с переходом к* C^1*-топологии. Мы приводим его для полноты.*

Доказательство леммы 7. Мы докажем лемму для отображений $\bar{f}_m$, доказательство для $\bar{f}_{-m}$ проводится аналогично. Заметим, что если для некоторых диффеоморфизмов f и g окружности S^1 выполняются неравенства

$$||Df||, ||Df^{-1}||, ||Dg||, ||Dg^{-1}|| \leq L, \tag{2.27}$$

то имеют место следующие оценки

$$|f(\phi) - g(\psi)| \leq L|\phi - \psi| + d_{C^0}(f, g), \tag{2.28}$$

$$|f^{-1}(\phi) - g^{-1}(\psi)| \leq L|\phi - \psi| + d_{C^0}(f^{-1}, g^{-1})$$

для любых $\phi, \psi \in S^1$. Действительно,

$$|f(\phi) - g(\psi)| \leq |f(\phi) - g(\phi)| + |g(\phi) - g(\psi)| \leq$$

$$\leq d_{C^0}(f, g) + \int_\psi^\phi |Dg(\theta)| d\theta \leq L|\phi - \psi| + d_{C^0}(f, g),$$

что влечет неравенства (2.27), их аналог для диффеоморфизмов f^{-1} и g^{-1} доказывается аналогично.

В силу условия (2.5) неравенства (2.27) выполняются для любых диффеоморфизмов f_ω мягких косых произведений из формулировки теоремы $1'$.

Пусть

$$\delta^l = d_{C^0}(\bar{f}_l[\omega], \bar{f}_l[\omega']), \quad \text{где } l \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $\delta^0 = 0$. По условию леммы 7 и по определению сдвига Бернулли σ

$$d_{\Sigma^2}(\sigma^l(\omega), \sigma^l(\omega')) \leq 2^{-m+l}.$$

Пусть $l < m$. В силу условия (2.6) имеет место оценка

$$d_{C^0}(f_{\sigma^l(\omega)}, f_{\sigma^l(\omega')}) \leq C2^{(-m+l)\alpha}.$$

Неравенство (2.28) влечет неравенство

$$\delta^{l+1} \leq L\delta^l + C2^{(-m+l)\alpha}.$$

Найдем члены рекуррентной последовательности x_l, удовлетворяющей следующим условиям

$$x_{l+1} = Lx_l + C2^{(-m+l)\alpha}, \quad x_0 = 0.$$

По построению $x_l \geq \delta^l$. Отметим, что

$$x_l = C2^{-m\alpha}\frac{2^{l\alpha} - L^l}{2^\alpha - L}.$$

Так как число δ можно считать достаточно малым, можно выбрать такое число $k < m$, что

$$C2^{(-m+k)\alpha} \leq 2\delta \leq C2^{(-m+k+1)\alpha}. \tag{2.29}$$

Тогда

$$\delta^k \leq x_k \leq C\frac{2^{(-m+k)\alpha}}{2^\alpha - L} \leq \frac{2\delta}{2^\alpha - L}.$$

По построению, $d_{C^1}(f_\omega, g_{\omega_0}) < \delta$, поэтому

$$\max_{\{(\omega,\omega')|\omega_0=\omega'_0\}} d_{C^0}(f_\omega, f_{\omega'}) \le 2\delta. \tag{2.30}$$

При $l < m$ имеет место следующее неравенство:

$$\delta^{l+1} \le L\delta^l + 2\delta.$$

Оно следует из неравенств (2.28) и (2.30). Пусть $i \le m-k$. Найдем член рекуррентной последовательности $\{y_l\}$, удовлетворяющий условиям

$$y_{i+k+1} = Ly_{i+k} + 2\delta, \quad y_k = \frac{2\delta}{2^\alpha - L}.$$

Отметим, что

$$y_{i+k} = \frac{2\delta}{1-L} + C(L,\alpha)\delta L^i$$

где $C(L,\alpha) = 2(2^\alpha - 1)/((2^\alpha - L)(L-1))$. В силу неравенств (2.29)

$$2^{(m-k)\alpha} \le 2^\alpha \frac{C}{2\delta};$$

следовательно,

$$L^{m-k} \le \left(2^\alpha \frac{C}{2\delta}\right)^{\ln L/\alpha \ln 2}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\delta^m \le y_m \le \bar{C}(L,\alpha)\delta L^{m-k} \le \bar{C}(L,\alpha)\delta \left(2^\alpha \frac{C}{2\delta}\right)^{\ln L/\alpha \ln 2} = K(L,\alpha,C)\delta^\beta,$$

где $\beta = 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}$, а $\bar{C}(L,\alpha)$ и $K(L,\alpha,C)$ — некоторые числа, зависящие лишь от L,α и L,α,C, соответственно. $\square$

Нам понадобятся обозначения из статьи [4]. Рассмотрим слово $\bar{\beta} = \beta_{-m}\ldots\beta_{m-1}$. Пусть

$$C_{\bar{\beta}} = \{\omega = \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^2 |\ \alpha_k = \beta_k \text{ при } -m \le k \le m-1\}.$$

Множество $C_{\bar{\beta}}$ является цилиндрической окрестностью в пространстве Σ^2. Пусть

$$V_{\pm}[\bar{\beta}](\phi) = \{\bar{f}_{\pm m}[\omega](\phi) |\ \omega \in C_{\bar{\beta}}\}.$$

Для фиксированного слова $\bar{\beta} = \beta_{-m} \ldots \beta_0 \ldots \beta_{m-1}$ пусть $\Gamma_m = C_{\bar{\beta}}$. Определим множества $V_m(\phi)$ и $V_{-m}(\phi)$ (где $\phi \in S^1$):

$$V_{\pm m}(\phi) = \{\bar{f}_{\pm m}[\omega](\phi) \mid \omega \in \Gamma_m\}.$$

Отметим, что по определению, $V_{\pm}[\bar{\beta}](\phi) = V_{\pm m}(\phi)$.

По лемме 7,

$$\mathrm{diam} V_{\pm}[\bar{\beta}](\phi) \leq \gamma$$

вне зависимости от выбора точки ϕ и длины слова $\bar{\beta}$. В силу определения числа γ можно выбрать число δ так, что $\gamma < b/40$ (напомним, что числа a и b были выбраны в конце параграфа 2.2 вместе с диффеоморфизмами g_0 и g_1).

Заметим, что существуют такие дуги W_+, $W_- \subset S^1$, длины которых не меньше чем $1/4 - \delta$, что для любой последовательности ω со значением $\omega_0 = 1$ на нулевой позиции, отображение f_ω растягивает дугу W_+ (с константой растяжения не меньше чем $a - \delta$) и сжимает дугу W_-. Пусть

$$P = \{p \in S^1 | p \text{ — аттрактор отображения } f_\omega,\ \omega \in \Sigma^2, \omega_0 = 1\},$$

$$Q = \{q \in S^1 | q \text{ — репеллер отображения } f_\omega,\ \omega \in \Sigma^2, \omega_0 = 1\}.$$

Заметим, что величины $\mathrm{diam} P$ и $\mathrm{diam} Q$ имеют порядок δ, и при достаточно малом δ они не больше $\gamma = K\delta^\beta$. Теперь, когда основные обозначения введены, мы можем сформулировать и доказать основные леммы.

2.7.2 Пункт (6.c) — основные леммы

Пусть $S = [1/(b-\delta)]$, где $[\cdot]$ — целая часть. Заметим, что если число δ достаточно мало, то S не зависит от выбора δ.

Нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 3.3 из статьи [4]:

Лемма 8. *Пусть $\alpha = \alpha_{-n} \dots \alpha_{n-1}$ — произвольное слово, а $\phi_1, \phi_2 \in S^1$ — произвольные различные точки. Тогда существует такое слово*

$$\bar{\beta} = \beta_{-m} \dots \beta_{-n-1} \alpha_{-n} \dots \alpha_{n-1} \beta_n \dots \beta_{m-1},$$

что у слов $\beta_{-m} \dots \beta_{-n-1}$ и $\beta_n \dots \beta_{m-1}$ не могут стоять подряд меньше T нулей и

$$dist_{S^1}(V_{\pm}[\bar{\beta}](\phi_1), V_{\pm}[\bar{\beta}](\phi_2)) \geq 2b.$$

Здесь и далее, если это не оговорено дополнительно, под расстоянием между двумя множествами на окружности подразумевается длина минимальной дуги, соединяющей точки этих множеств.

Замечание 5. *Мы фактически повторим доказательство леммы 8 из статьи [4]. Все изменения в рассуждении связаны лишь с ограничением на число нулей у слов из формулировки лем-*

мы. Мы приводим лишь набросок доказательства, делая акцент на необходимых изменениях.

Доказательство леммы 8. Построение слова $\beta^l = \beta_{-l} \dots \beta_{l-1}$ будет вестись по индукции, начиная со слова α и приписывая поочередно с того или иного конца то $ST + 1$ нуль, то единицу и ST нулей. Мы будем действовать согласно описанному ниже алгоритму. Когда алгоритм останавливается, построение заканчивается (индукция ведется по числу l). Алгоритм состоит из 2 шагов:

Шаг 1. Пусть

$$M_{\pm l} = \min_{\omega \in C_{\beta^l}} \operatorname{dist}_{S^1}(\bar{f}_{\pm l}[\omega](\phi_1), \bar{f}_{\pm l}[\omega](\phi_2)).$$

Проверим выполнение следующих условий:

$$M_l > 3b \qquad (B1) \qquad \text{и} \qquad M_{-l} > 3b. \qquad (B2)$$

Если оба условия выполнены, то алгоритм останавливается; ниже мы докажем, что в этом случае построенное слово будет искомым. Если хотя бы одно из условий (B1), (B2) нарушается, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Пусть

$$W_{\pm l} = V_{\pm}[\beta^l](\phi_1) \cup V_{\pm}[\beta^l](\phi_2).$$

Проверим выполнение следующих условий:

$$W_l \subset W_+ \qquad (C1) \qquad \text{и} \qquad W_{-l} \subset W_-. \qquad (C2)$$

Если условие (C1) (соответственно, (C2)) выполняется, припишем справа (соответственно, слева) одну единицу и ST нулей, а если нет — припишем справа (соответственно, слева) $ST+1$ нуль. Далее снова возвращаемся к шагу 1. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество тех l, при которых мы возвращаемся к шагу 1.

Фактически в предложении 3.1 из статьи [4] доказывается, что если алгоритм остановится, то слово $\bar{\beta}$, полученное в момент остановки алгоритма, будет удовлетворять требованиям леммы 8.

Для завершения доказательства леммы 8 осталось показать лишь, что описанный выше алгоритм остановится за конечное число шагов. Предположим, что это не так, т.е. построена некоторая растущая последовательность (симметричных) слов β^l, которая определяет двухстороннюю последовательность ω. Пусть

$$\phi_{jl}^{\pm} = \bar{f}_{\pm l}[\omega](\phi_j), \qquad j = 1, 2,$$

$$\delta_l^{\pm} = \mathrm{dist}_{S^1}(\phi_{1l}^{\pm}, \phi_{2l}^{\pm}).$$

По построению последовательности ω, $\phi_{jl}^{\pm} \in V_{\pm}[\beta^l](\phi_j)$. Следовательно, по лемме 7 и по определению чисел $M_{\pm l}$,

$$\delta_l^{\pm} - 2K\delta^{\beta} \le M_{\pm l} \le \delta_l^{\pm}.$$

Для продолжения доказательства леммы 8 нам понадобится следующее утверждение:

Предложение 1. *Существует такое число $m \in \mathcal{M}$, что $\delta_m^{\pm} > 1/16$.*

Отметим, что из предложения 1 следует, что описанный выше алгоритм остановится за конечное число шагов. Действительно, для числа $m \in \mathcal{M}$ из предложения 1 выполнено неравенство $M_{\pm m} > 3b$ (напомним, что $b < 1/100$).

Доказательство предложения 1. Отображение $f_{\sigma^l(\omega)}$ при $\omega_l = 0$ переводит каждую точку ϕ в некоторую точку дуги $[\phi + b - \delta, \phi + b + \delta]$, а каждую дугу длины λ переводит в дугу длины $\lambda' \in ((1-\delta)\lambda, (1+\delta)\lambda)$. При $\omega_l = 1$ отображение $f_{\sigma^l(\omega)}$ переводит каждую дугу длины λ, содержащуюся в W_+, в дугу длины $\lambda' \in ((a-\delta)\lambda, (a+\delta)\lambda)$. При этом, если $\omega_l = 1$, то по построению $\phi_{1l}^+, \phi_{2l}^+ \in W_+$.

Покажем, что если $\delta_l^+ < 1/8$ ($1/8$ — это примерно половина длины дуги W_+), то в последовательности ω после ω_l не могут стоять больше $(TS+1)(S+1)+TS$ нулей подряд. Действительно, мы применяем отображения, δ–близкие к поворотам на $(TS+1)b$, $(2TS+2)b$, $\ldots$, $(TS+1)(S+1)b$; значит, какой-то из этих поворотов переведет меньшую из дуг $(\phi_{1l}^+, \phi_{2l}^+)$ в дугу W_+ (так как дуга W_+ достаточно велика). Пусть это будет поворот на $(TS+1)\ell b$. По построению, если $l-1 \in \mathcal{M}$, то $\omega_{l+(TS+1)\ell b} = 1$. Так как возможно, что $l-1 \notin \mathcal{M}$, следует учесть еще не более ST нулей, которые требуются, чтобы "придти" к элементу из множества $\mathcal{M}$, т.е. перейти к шагу 1.

Следовательно,

$$\delta_{l+(TS+1)(S+1)+TS}^+ > (a-\delta)(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+TS}\delta_l^+ \qquad \text{при } \delta_l^+ < 1/8. \tag{2.31}$$

Если число δ достаточно мало, то $a - \delta > 1$. Так как число $(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+TS}$ близко к 1, при достаточно малом δ,

$$(a-\delta)(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+TS} > 1.$$

Следовательно, в последовательности $\{\delta_n^+\}$ должен быть элемент $\delta_n^+ \geq 1/8$. Докажем, что

$$\delta_k^+ > 1/16 \qquad \text{для всех } k > n. \tag{2.32}$$

Предположим, что это не так, т.е. существует такое число $k > n$, что $\delta_k^+ \leq 1/16$. Выберем такое число $t \in [n, k)$, что

$$\delta_t^+ \geq 1/8, \quad \delta_p^+ < 1/8 \qquad \text{при любых } p \in (t, k].$$

Тогда из соотношения (2.31) следует, что $k < t + (TS+1) \cdot$ $\cdot (S+1) + TS + 1$. Действительно, так как $\delta_{t+1}^+ < 1/8$,

$$\delta_{t+(TS+1)(S+1)+TS+1}^+ > (a-\delta)(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+ST}\delta_{t+1}^+ \geq$$

$$\geq (a-\delta)(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+ST+1}\delta_t^+ > 1/8.$$

Последнее неравенство выполнено, так как $\delta_t^+ \geq 1/8$, а число δ можно выбрать столь малым, что

$$(a-\delta)(1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+ST+1} > 1.$$

Итак, $k < t + (TS+1)(S+1) + TS + 1$. По аналогичным причинам среди элементов ω_l при $t+1 \leq l \leq k$ не может быть единиц. Но тогда

$$\delta_k^+ \geq (1-\delta)^{(TS+1)(S+1)+2} 1/8 > 1/16$$

(при достаточно малом δ), что противоречит выбору k. Полученное противоречие доказывает неравенство (2.32).

Аналогично доказывается существование такого числа n', что $\delta_k^- > 1/16$ для всех $k > n'$. Из доказанного нами следует, что можно считать, что $k, k' \in \mathcal{M}$. Это доказывает предложение 1, а значит и лемму 8. $\square$

$\square$

Рассмотрим такие максимальные дуги $\bar{W}_+$ и $\bar{W}_-$, что

$$N(3\gamma, \bar{W}_+) \subseteq W_+ \quad \text{и} \quad N(3\gamma, \bar{W}_-) \subseteq W_-.$$

Мы считаем, что число γ достаточно мало, поэтому

$$Q \subset \bar{W}_+ \quad \text{и} \quad P \subset \bar{W}_-.$$

Нам понадобится следующая лемма. Она аналогична лемме 3.4 из статьи [4], в ней добавлен лишь один новый пункт — пункт (9.a), и несколько усилены пункты (9.b) и (9.c). Поэтому мы фактически повторим рассуждение из [4] с небольшими необходимыми нам изменениями. Мы приведем лишь набросок доказательства леммы 9, делая акцент на необходимых изменениях. Кроме того, отметим, что в упомянутой лемме 3.4 содержится еще один пункт, который нам не понадобится, и поэтому мы его не приводим.

Лемма 9 (об искажении дуг). *Пусть заданы слово* $\bar{\alpha} = \alpha_{-n} \dots \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ *и дуга* $J \subset S^1$. *Тогда найдутся такие слова*

$\bar{\beta} = \beta_{-m} \ldots \beta_{-n-1}\alpha_{-n} \ldots \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}\beta_n \ldots \beta_{m-1}$ *и*

$\bar{\beta}' = \beta'_{-m'} \ldots \beta'_{-n-1}\alpha_{-n} \ldots \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}\beta'_n \ldots \beta'_{m'-1}$, *что*

(9.a) в добавленных к слову $\bar{\alpha}$ словах не могут стоять меньше чем T нулей подряд;

(9.b) если $\omega \in C_{\bar{\beta}}$, то

$$\bar{f}_m[\omega](J) \subset \bar{W}_- \quad \text{и} \quad W_- \subset \bar{f}_{-m}[\omega](J), \tag{2.33}$$

$$|(\bar{f}_m[\omega])'|_J| < 1, \qquad |(\bar{f}_{-m}[\omega])'|_{(\bar{f}_{-m}[\omega])^{-1}(W_-)}| > 1; \tag{2.34}$$

(9.c) если $\omega' \in C_{\bar{\beta}'}$, то

$$\bar{f}_{-m'}[\omega'](J) \subset \bar{W}_+ \quad \text{и} \quad W_+ \subset \bar{f}_{m'}[\omega'](J), \tag{2.35}$$

$$|(\bar{f}_{-m'}[\omega'])'|_J| < 1, \qquad |(\bar{f}_{m'}[\omega'])'|_{(\bar{f}_{m'}[\omega'])^{-1}(W_+)}| > 1. \tag{2.36}$$

Доказательство. Построим слово $\bar{\beta}$, обладающее свойствами (9.a) и (9.b). Обозначим концы дуги J через ϕ_1 и ϕ_2. По лемме 8 слово $\bar{\alpha}$ можно так достроить до слова $\bar{\beta}_1 = \beta_{-k_1} \ldots \beta_{k_1-1}$, что для него будет выполняться заключение леммы 8, т.е. расстояние между множествами $V_{k_1}(\phi_1)$ и $V_{k_1}(\phi_2)$, а также между множествами $V_{-k_1}(\phi_1)$ и $V_{-k_2}(\phi_2)$ будет не меньше $2b$.

Пусть

$$X_{-l} := \bigcap_{\omega \in \Gamma_l} \bar{f}_{-l}[\omega](J) \quad \text{при } l \geq k_1,$$

$$Y_l := \bigcap_{\omega \in \Gamma_l} \bar{f}_l[\omega](S^1 - \bar{J}) \quad \text{при } l \geq k_1,$$

т.е. X_{-l} — это интервал между множествами $V_{-l}(\phi_1)$ и $V_{-l}(\phi_2)$, содержащийся в образах дуги J под действием отображений $\bar{f}_{-l}[\omega]$, где ω "пробегает" множество Γ_l, а Y_l — это интервал между $V_l(\phi_1)$ и $V_l(\phi_2)$, содержащийся в образах дуги $S^1 - \bar{J}$ под действием $\bar{f}_l[\omega]$, где ω "пробегает" множество Γ_l (символом $\bar{J}$ мы обозначаем замыкание дуги J, а знаком "$-$" — теоретико-множественную разность).

Достроим слово $\bar{\beta}_1$ до слова $\bar{\beta}_2 = \beta_{-k_2} \dots \beta_{k_2-1}$ так, чтобы выполнялись пункт (9.a) и включения

$$Q \subset Y_{k_2} \qquad \text{и} \qquad P \subset X_{-k_2}.$$

Для этого будем по индукции (как и в лемме 8) добавлять символы справа и слева. Пусть l — параметр индукции; база — это случай $l = k_1$. Проверим выполнимость следующих условий:

$$Q \subset Y_l \qquad \text{(D1)} \qquad \text{и} \qquad P \subset X_{-l} \qquad \text{(D2)}.$$

Если оба условия выполнены, то построение закончено. Иначе действуем так: если условие (D1) (соответственно, (D2)) выполнено, то добавляем справа (слева) $ST + 1$ единицу, иначе добавляем справа (слева) $ST + 1$ нуль. Покажем, что этот алгоритм остановится за конечное число шагов.

Предложение 2. *Если условие (D1) или (D2) оказалось выполненным на каком-то шаге, то оно будет выполняться до конца построения.*

Суть этого предложения можно сформулировать так: добавление любого числа единиц не может "повредить" выполнению этих условий. Доказательство предложения 2 (равно как и его формулировка) дословно повторяет доказательство предложения 3.4 из статьи [4], поэтому мы его не приводим.

Предложение 3. *Каждое из условий (D1) и (D2) окажется выполненным на некотором шаге.*

Доказательство предложения 3. Предположим, что условие (D1) никогда не окажется выполненным; случай невыполнения условия (D2) разбирается совершенно аналогично. Описанный выше алгоритм определит некоторую последовательность ω, причем, в силу предложения 2, $\omega_l = 0$ при $l \geq k_1$. Значит, при $l \geq k_1$ отображения $f_{\sigma^l(\omega)}$ будут близки к повороту на b. При этом, по выбору числа k_1, расстояние между множествами $V_{k_1}(\phi_1)$ и $V_{k_1}(\phi_2)$ не меньше $2b$. Значит,

$$\operatorname{diam}(\bar{f}_{k_1}[\omega](S^1 - \bar{J})) \geq 2b.$$

Но тогда при достаточно малом δ одна из дуг

$$\bar{f}_{k_1}[\omega](S^1 - \bar{J}),\ \bar{f}_{k_1+ST+1}[\omega](S^1 - \bar{J}), \ldots, \bar{f}_{k_1+(S+1)ST+S+1}[\omega](S^1 - \bar{J})$$

целиком накроет множество Q, причем так, что расстояние от Q до ее концов будет больше γ. Пусть это будет дуга $\bar{f}_{k_1+tST+t}[\omega](S^1 - \bar{J})$. По лемме 7 множества $V_{k_1+tST+t}(\phi_1)$ и $V_{k_1+tST+t}(\phi_2)$ находятся в γ–окрестностях концов этой дуги. Поэтому $Q \subset Y_{k_1+tST+t}$, и условие (D1) выполнено. $\square$

Итак, мы построили такое слово $\bar{\beta}_2$ длины $2k_2$, что для него выполняются аналоги условия (9.a) из формулировки леммы и условий (D1) и (D2). Далее следует повторить конец доказательства леммы 3.4 из статьи [4] с незначительными изменениями. $\square$

Теперь, когда доказана лемма 9, мы можем завершить доказательство пункта (6.c).

2.7.3 Пункт (6.c) — завершение доказательства

Отметим, что множества вида $C_\alpha \times J \subset \Sigma^2 \times S^1$, где $J \subset S^1$ — дуга, а α — слово, образуют базу топологии в пространстве $\Sigma^2 \times S^1$. Пусть ω_3 — это, как и раньше, периодически с периодом T_3 повторяющееся слово в последовательности prp_3. Выберем такое большое число $2m$ и такую малую дугу J, что

$$p_3 \subset C_{\omega_3 \ldots \omega_3} \times J \subset N(d, p_3),$$

где слово ω_3 повторяется m раз до нулевой позиции и m раз после. Применим пункт (9.c) из леммы 9. Пусть слово $\bar{\beta}$ — это слово из пункта (9.c) леммы 9. Обозначим через ω бесконечную последовательность, у которой периодически повторяется слово $\bar{\beta}$ (причем $\omega \in C_{\bar{\beta}}$). Для любой точки $\phi \in S^1$ к точке $(\omega, \phi) \in \Sigma^2 \times S^1$ применима лемма 5 (так как выполнено свойство (9.a)). Значит, для любой точки $s = (\omega, \phi)$ выполняется соотношение (2.26).

В статье [4] доказывается, что найдется такая точка $\phi_0 \in S^1$, что точка $s := (\omega, \phi_0)$ будет гиперболической периодической точкой типа (1,2), и будут выполняться аналоги соотношений (2.35) и (2.36). Пункт (6.c) доказан.

2.7.4 Доказательство остальных пунктов леммы 6

Мы приведем лишь доказательство пункта (6.d). Отметим, что точки p_1, p_2, p_3, p_4 сохраняются для рассматриваемых мягких косых произведений G, и в выборе этих точек был допущен достаточно большой произвол (фактически требовались лишь гиперболичность и выполнение условия (2.20) на периоды). В пунктах 2.7.1–2.7.3 была достаточно подробно изложена описанная в статье [4] процедура построения гиперболических периодических точек $p = (\omega, \phi)$ различных типов, для которых выполняются соответственно аналоги условий (2.33) и (2.34) или (2.35) и (2.36) (в зависимости от типа периодической точки). Эта процедура позволяет строить точки сколь угодно большого периода. Поэтому можно считать, что точки p_1 и p_4 были первоначально построены с помощью такой процедуры для ступенчатого косого произведения G_0, а потом зафиксированы. В этом случае пункты (6.a) и (6.b) являются следствиями пункта (6.d). Таким образом, достаточно доказать лишь пункт (6.d).

Коротко опишем схему доказательства пункта (6.d). Сначала мы построим такую последовательность $\omega \in \Sigma^2$, что

$$\omega \in W^u(prs) \cap W^s(prp_4) \quad \text{и} \quad O(\omega, \sigma) \cap (prV_1 \cup prV_2) = \emptyset;$$

до нулевой позиции у последовательности ω "идет" некоторая подпоследовательность последовательности prs, от 0-й до $(\bar{K} - 1)$-й позиции "идут" нули, а начиная с $\bar{K}$-й позиции "идет" некоторая подпоследовательность последовательности prp_4 (число $\bar{K}$ — это пока произвольное число, потом мы его неявно выберем). Потом мы докажем, что для построенной последовательности ω найдется такое $\phi \in S^1$, что траектория точки (ω, ϕ) будет "идти" из точки s в точку p_4. Далее, применив предложение 5 (аналог леммы 5), мы увидим, что траектория точки $y := (\omega, \phi)$ не попадает в цилиндрические окрестности V_1 и V_2 множеств $O(p_1, G)$ и $O(p_2, G)$. Таким образом, для точки y будет выполняться заключение пункта (6.d).

Выберем произвольные числа $\bar{K} \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$. Мы будем говорить, что две последовательности $\omega = \{\beta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\bar{\omega} = \{\bar{\beta}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ совпадают на отрезке $[\bar{K} - m, \bar{K} + m - 1]$, если выполняется соотношение

$$\beta_k = \bar{\beta}_k \quad \text{при } \bar{K} - m \le k \le \bar{K} + m - 1. \tag{2.37}$$

Нам понадобится следующее утверждение, формально являющееся обобщением леммы 7 о погрешности. Его доказательство тривиально.

Предложение 4. *Если для последовательностей $\omega, \bar{\omega} \in \Sigma^2$ выполняется соотношение* (2.37)*, то имеет место неравенство*

$$dist_{S^1}(\bar{f}_{\bar{K}\pm m}[\omega](\bar{\phi}_1), \bar{f}_{\bar{K}\pm m}[\bar{\omega}](\bar{\phi}_2)) \le \gamma, \tag{2.38}$$

где γ — константа из леммы 7, а точки $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2 \in S^1$ таковы, что

$$\bar{\phi}_1 := (\bar{f}_{\bar{K}}[\omega])^{-1}(\phi) \in S^1, \quad \bar{\phi}_2 := (\bar{f}_{\bar{K}}[\bar{\omega}])^{-1}(\phi) \in S^1. \tag{2.39}$$

Напомним, что число T определялось равенством (2.21). Обозначим через t_p период точки p_4, а через t_s — период точки s. Отметим, что $t_s > T$. Будем считать, что $p_4 = (\alpha^p, \phi_p)$, где у последовательности α^p периодически повторяется слово $\alpha_1^p \dots \alpha_{t_p}^p$, причем символ α_1^p стоит на нулевой позиции последовательности α^p. Напомним, что точки s и p_4 являются репеллерами на слое. В пункте 2.7.3 мы выбрали такую максимальную дугу $\bar{W}_+$, что

$$N(3\gamma, \bar{W}_+) \subset W_+.$$

Так как точка $p_4 = (\alpha^p, \phi_p)$ является периодической,

$$\bar{f}_{t_p}[\alpha^p](\phi_p) = \phi_p.$$

По построению точки s (в силу пункта (9.c) из леммы 9), для последовательности $\omega^s = prs$, дуги J и некоторого числа m_s (определенных в формулировке леммы 9) выполняются аналоги соотношений (2.35) и (2.36). Следовательно, если $\bar{s} = (\alpha^s, \phi_s) = G^{m_s}(s)$, а у последовательности α^s периодически повторяется слово $\alpha_1^s \dots \alpha_{t_s}^s$, причем символ $\alpha_{t_s}^s$ стоит на (-1)-й позиции последовательности α^s, то будут выполняться следующие соотношения:

$$\phi_s \subset \bar{W}_+ \subset W_+, \quad \bar{f}_{-t_s}[\alpha^s](W_+) \subset \bar{W}_+ \subset W_+,$$

$$|(\bar{f}_{-t_s}[\alpha^s])'|_{W_+}| < 1.$$

Приведенные выше соотношения означают, что дуга (α^s, W_+) содержится в области отталкивания точки $\bar{s}$ относительно отображения G^{t_s}, т.е. область отталкивания на слое точки (α^s, ϕ_s) (область отталкивания точки ϕ_s для сужения отображения G^{t_s} на множество (α^s, S^1)) содержит дугу W_+.

Так как точка $\bar{s} = (\alpha^s, \phi_s)$ является периодической,

$$\bar{f}_{-t_s}[\alpha^s](\phi_s) = \phi_s.$$

Выберем такое число Δ, что если положительная полутраектория некоторой точки p диффеоморфизма G^{t_p} содержится в множестве $N(\Delta, p_4)$, то $p \in W^s_{G^{t_p}}(p_4)$.

Пусть последовательность ω такова, что

1. с $(-t_s)$-й до (-1)-й позиции у нее стоит слово $\alpha^s_1 \dots \alpha^s_{t_s}$, и это слово далее периодически повторяется у подпоследовательности $\omega|_{k<0}$ (последовательность ω можно рассматривать как отображение $\omega : \mathbb{Z} \mapsto M$, тогда $\omega|_A$ — сужение отображения ω на некоторое множество A);
2. с $\bar{K}$-й до $(\bar{K} + t_p - 1)$-й позиции у нее стоит слово $\alpha^p_1 \dots \alpha^p_{t_p}$, и это слово далее периодически повторяется у подпоследовательности $\omega|_{k \geq \bar{K}}$, где $\bar{K} \in \mathbb{N}$ — некоторое число, которое мы выберем позже.

Лемма 10.

(10.a) *Для любого числа $m \in \mathbb{N}$ существуют такие точка ϕ^m_ω и дуга J^m_ω, что*

$$\phi^m_\omega \in N(\gamma, \phi_p); \tag{2.40}$$

$$\bar{W}_+ \subset N(\gamma, J^m_\omega) \quad \textit{и} \quad J^m_\omega \subset N(\gamma, \bar{W}_+) \subset W_+; \tag{2.41}$$

$$dist_{S^1}(\bar{f}_{wt_p}[\sigma^{\bar{K}}(\omega)](\phi^m_\omega), \phi_p) \leq \gamma \quad \textit{при } 0 \leq w \leq 2m; \tag{2.42}$$

$$\bar{f}_{-wt_s}[\omega](J^m_\omega) \subset N(\gamma, \bar{f}_{-wt_s}[\alpha^s](\bar{W}_+)) \subset W_+ \quad \textit{при } 0 \leq w \leq 2m. \tag{2.43}$$

(10.b) *Если ϕ_ω — одна из предельных точек последовательности ϕ_ω^m, а дуга J_ω — "предельная дуга" последовательности J_ω^m (смысл этого термина мы поясним в доказательстве леммы), то выполняются соотношения*

$$(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_\omega) \in W^s(p_4), \quad (\omega, J_\omega) \subset W^u(\bar{s}). \tag{2.44}$$

Доказательство. Начнем с доказательства пункта (10.a). Выберем произвольное число $m \in \mathbb{N}$ и произвольное число $0 \leq k < m$. Пусть $\bar{L} = mt_p$. Рассмотрим последовательность α^p. Применим предложение 4 к "отрезку" $[\bar{L}-(m-k)t_p, \bar{L}+(m-k)t_p-1] = [kt_p, 2mt_p-kt_p-1]$ и последовательностям $\sigma^{\bar{K}}(\omega)$ и α^p, по построению совпадающим на этом отрезке. Пусть $\phi_\omega^m = (\bar{f}_{mt_p}[\sigma^{\bar{K}}(\omega)])^{-1}(\phi_p)$. По построению,

$$\bar{f}_{t_p}[\alpha^p](\phi_p) = \phi_p.$$

Значит, в силу неравенств (2.38) и (2.39), для любых $0 \leq k < m$,

$$\mathrm{dist}_{S^1}(\bar{f}_{kt_p}[\sigma^{\bar{K}}(\omega)](\phi_\omega^m), \bar{f}_{kt_p}[\alpha^p](\phi_p)) \leq \gamma, \tag{2.45}$$

$$\mathrm{dist}_{S^1}(\bar{f}_{2mt_p-kt_p}[\sigma^{\bar{K}}(\omega)](\phi_\omega^m), \bar{f}_{2mt_p-kt_p}[\alpha^p](\phi_p)) \leq \gamma. \tag{2.46}$$

Подставляя в неравенство (2.45) $k = 0$, мы получаем включение (2.40). Из неравенств (2.45) и (2.46) следуют неравенства (2.42) для $w \neq m$. Неравенства (2.42) для $w = m$ выполняются по построению.

Пусть $\bar{L} = -mt_s$. Применим предложение 4 к "отрезку"

$$[\bar{L} - (m-k)t_s, \bar{L} + (m-k)t_s - 1] = [-2mt_s + kt_s, -kt_s - 1]$$

и последовательностям ω и α^s, по построению совпадающим на этом отрезке. Пусть $V_n^+ = \bar{f}_{-nt_s}[\alpha^s](\bar{W}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}$, а $J_\omega^m = (\bar{f}_{-mt_s}[\omega])^{-1}(V_m^+)$. Ясно, что множество J_ω^m — дуга. По построению, множество (α^s, W_+) лежит в области отталкивания точки $\bar{s}$ и, более того,

$$\bar{f}_{vt_s}[\alpha^s](W_+) \subset \bar{W}_+ \subset W_+ \quad \text{при } v \in \mathbb{Z}, v \leq 0.$$

По построению дуги $\bar{W}_+$,

$$V_{-v}^+ = \bar{f}_{vt_s}[\alpha^s](\bar{W}_+) \subset \bar{W}_+ \quad \text{при } v \in \mathbb{Z}, v \leq 0.$$

Значит, в силу соотношений (2.38) и (2.39), для любых $0 \leq k < m$,

$$d_H(\bar{f}_{-2mt_s+kt_s}[\omega](J_\omega^m), V_{2m-k}^+) \leq \gamma, \tag{2.47}$$

$$d_H(\bar{f}_{-kt_s}[\omega](J_\omega^m), V_k^+) \leq \gamma, \tag{2.48}$$

где через d_H обозначено расстояние по Хаусдорфу.

Подставляя в неравенство (2.48) $k = 0$, мы получаем включение (2.41). Из неравенств (2.47) и (2.48) следуют неравенства (2.43) для $w \neq m$. Неравенства (2.43) для $w = m$ выполняются по построению.

Обоснуем пункт (10.b). Пусть ϕ_ω — некоторая предельная точка последовательности ϕ_ω^m. Тогда для любого числа w для точки ϕ_ω будут выполняться соотношения (2.42) и включение (2.40). Пусть j_1^m и j_2^m — концы дуги $J_\omega^m \subset \bar{W}_+$. Найдется такая последовательность m_k, что

$$j_e^{m_k} \longrightarrow j_e, \qquad \text{при } e = \{0, 1\},\ k \to +\infty,$$

где j_1 и j_2 — некоторые точки. Пусть J_ω — дуга между точками j_1 и j_2, содержащаяся в W_+. Дугу J_ω мы будем называть предельной. Отметим, что J_ω — множество всех предельных точек последовательности $J_\omega^{m_k}$. Для дуги J_ω будут выполняться соотношения (2.43) и включения (2.41) при любых w.

Так как точки p_1, p_2, p_3 и p_4 были выбраны "одинаковыми" для всех мягких косых произведений из формулировки теоремы $1'$, можно считать, что $2\gamma < \Delta/2$. В силу соотношения (2.42), положительная полутраектория точки $(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_\omega)$ относительно отображения G^{t_p} содержится в окрестности $N(\Delta/2, p_4)$ (при достаточно малом γ; напомним, что точка p_4 фиксирована, а точка $\bar{s}$ — нет). Следовательно,

$$(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_\omega) \in W^s_{G^{t_p}}(p_4); \quad \text{значит,} \quad (\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_\omega) \in W^s(p_4).$$

Аналогично, в силу соотношений (2.43), отрицательные полутраектории точек дуги (ω, J_ω) содержатся в малой окрестности дуги $(pr\bar{s}, \bar{W}_+)$.

Мы уже отмечали, что область отталкивания точки $\bar{s}$ на слое относительно отображения G^{t_s} содержит дугу W_+, и поэтому область отталкивания точки $\bar{s}$ относительно отображения G^{t_s} достаточно велика, точнее эта область отталкивания содержит множество вида

$$(V(pr\bar{s}) \cap W^u_\sigma(pr\bar{s}), N(\gamma, \bar{W}_+)),$$

где $V(pr\bar{s})$ — малая окрестность точки $pr\bar{s}$ на базе, т.е. в множестве Σ^2.

Поэтому из соотношений (2.43) следует включение

$$(\omega, J_\omega) \subset W^u_{G^{ts}}(\bar{s}), \quad \text{значит,} \quad (\omega, J_\omega) \subset W^u(\bar{s}).$$

□

Лемма 10, в частности, означает, что соотношения (2.44) выполняются для некоторых точки ϕ_ω и дуги J_ω. Ранее мы определили все символы, стоящие у последовательности ω на "отрезке" от 0 до $\bar{K}-1$, равными нулю. Теперь мы можем определить число $\bar{K}$. Напомним, что в пункте 2.7.2 вводилось число $S = [1/(b-\delta)]$.В силу включений (2.41), дуга J_ω достаточно велика, поэтому, если у последовательности ω на отрезке от 0 до $(S+1)TS+S$ стоят нули, то одна из дуг

$$\bar{f}_{TS+1}[\omega](J_\omega), \dots, \bar{f}_{kTS+k}[\omega](J_\omega), \dots, \bar{f}_{(S+1)TS+S+1}[\omega](J_\omega)$$

накроет точку ϕ_p. Пусть это случится для дуги $\bar{f}_{kTS+k}[\omega](J_\omega)$. В этом случае положим

$$\bar{K} := kTS + k.$$

Тогда, очевидно, дуга $\bar{f}_{\bar{K}}[\omega](J_\omega)$ накроет точку ϕ_p.

По лемме 10, $(\omega, J_\omega) \subset W^u(\bar{s})$ и $(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_p) \in W^s(p_4)$, по построению $(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_p) \in G^{\bar{K}}(\omega, J_\omega)$, значит,

$$(\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_p) \in W^u(\bar{s}) \cap W^s(p_4).$$

Для завершения доказательства леммы 6 нам осталось доказать лишь следующее предложение. Доказательство этого предложения аналогично доказательству леммы 5, поэтому мы не будем его приводить.

Предложение 5. *Пусть β_p — слово, повторяющееся с периодом T_4 у последовательности prp_4, $\beta_s = \alpha_1^s \dots \alpha_{t_s}^s$ — ранее построенное слово, периодически повторяющееся у последовательности prs, и θ — слово, состоящее из $k(TS+1)$ нулей, где $k \geq 0$. Если $\omega = \dots \beta_s \dots \beta_s \theta \beta_p \dots \beta_p \dots$, то*

$$O(\omega, \sigma) \cap (prV_1 \cup prV_2) = \emptyset.$$

Применив к точке $y := (\sigma^{\bar{K}}(\omega), \phi_p)$ предложение 5, мы видим, что точка y удовлетворяет уловиям пункта (6.d). Лемма 6 доказана. Значит, доказаны теоремы 1 и 1′.

3 Периодические свойства отслеживания и Ω-устойчивость.

Целью данной главы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 2. *Если M — гладкое замкнутое многообразие, то* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSP}) = \mathrm{LipPerSP} = \Omega S$.

Опишем структуру данной главы. В параграфе 3.1 доказывается включение $\Omega S \subset \mathrm{LipPerSh}$. В силу этого включения $\Omega S \subset \mathrm{PerSh}$. Так как множество ΩS открыто в C^1-топологии, $\Omega S \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSh})$. В параграфе 3.2 доказывается включение $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSh}) \subset \Omega S$. Наконец, в параграфе 3.3 доказывается включение $\mathrm{LipPerSh} \subset \Omega S$.

3.1 $\Omega S \subset$ LipPerSh

Сформулируем ряд вспомогательных определений и утверждений. Пусть f — диффеоморфизм гладкого замкнутого многообразия M с римановой метрикой dist. Будем обозначать через $\mathrm{Per}(f)$ множество всех периодических точек диффеоморфизма f. Пусть $N = \sup_{x \in M} ||Df(x)||$.

Определение 15. Будем говорить, что для диффеоморфизма f выполняется аксиома A, если множество его неблуждающих точек $\Omega(f)$ гиперболично, и в множестве $\Omega(f)$ плотны периодические точки.

Хорошо известно, что если для диффеоморфизма f выполняется аксиома A, то его неблуждающее множество $\Omega(f)$ может быть представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа компактных инвариантных множеств

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m. \tag{3.1}$$

Множества Ω_i, называемые базисными множествами, являются гиперболическими множествами, каждое из которых содержит плотную полутраекторию. Кроме того, хорошо известно, что Ω-устойчивость диффеоморфизма f эквивалентна наличию аксиомы А и условию отсутствия циклов (см. [7]).

В определении 5 речь идет о наличии липшицевого свойства отслеживания на всем многообразии. Можно изучать вопрос о наличии липшицевого свойства отслеживания на некотором подмножестве многообразия.

Определение 16. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает *липшицевым свойством отслеживания на множестве* U, если существуют такие положительные числа L и d_0, что если последовательность $\xi \subset U$ является d-псевдотраекторией с $d \leq d_0$, то для некоторой точки $q \in U$ выполняются неравенства (1.3).

Определение 17. Будем говорить, что для диффеоморфизма f выполняется *свойство различимости траекторий (expansivity) на множестве* U, если существует такое положительное число a, что если траектории точек p и q содержатся в множестве U и выполняются неравенства

$$\operatorname{dist}(f^i(p), f^i(q)) \leq a \quad \text{при } i \in \mathbb{Z},$$

то $p = q$.

Следующее утверждение хорошо известно (см. [21, 7]):

Утверждение 1. *Пусть* Λ *— гиперболическое множество диффеоморфизма* f*. Существует такая окрестность* U *множе-*

ства Λ, *что диффеоморфизм* f *обладает липшицевым свойством отслеживания и свойством различимости траекторий на множестве* U.

Нам потребуются следующие леммы (см. [25]):

Лемма 11. *Пусть* f *— гомеоморфизм компактного метрического пространства* X *с метрикой dist. Для любой окрестности* U *неблуждающего множества* $\Omega(f)$ *существуют такие положительные числа* B, d_1, *что если последовательность* $\xi = \{x_i\}$ *является* d*-псевдотраекторией гомеоморфизма* f *с* $d \leq d_1$ *и*

$$x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l} \notin U$$

для некоторых $l > 0$ *и* $k \in \mathbb{Z}$, *то* $l \leq B$.

Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ — это базисные множества из разложения (3.1) неблуждающего множества Ω-устойчивого диффеоморфизма f.

Лемма 12. *Пусть* $U_1, \dots, U_m$ *— это дизъюнктные окрестности базисных множеств* $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. *Найдутся такие окрестности* $V_j \subset U_j$ *множеств* Ω_j *и положительное число* d_2, *что если последовательность* $\xi = \{x_i\}$ *является такой* d*-псевдотраекторией диффеоморфизма* f *с* $d \leq d_2$, *что если* $x_0 \in V_j$ *и* $x_t \notin U_j$ *для некоторых* $j \in \{1, \dots, m\}$ *и* $t > 0$, *то* $x_i \notin V_j$ *для* $i \geq t$.

Целью данного параграфа является доказательство следующей леммы:

Лемма 13. $\Omega S \subset \mathrm{LipPerSh}$.

Доказательство. Используя утверждение 1, построим такие дизъюнктные окрестности $W_1, \dots, W_m$ базисных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ из разложения (3.1), что

- диффеоморфизм f обладает липшицевым свойством отслеживания на каждом из множеств W_j с одними и теми же константами L, d_0^*;
- диффеоморфизм f обладает свойством различимости траекторий на каждом из множеств W_j с одной и той же константой a.

При необходимости уменьшая d_0^*, выберем такие окрестности V_j и U_j множеств Ω_j, что

- $V_j \subset U_j \subset W_j \quad$ при $j \in \{1, \dots, m\}$;
- для некоторого числа d_2 и множеств V_j и U_j выполняется заключение леммы 12;
- Ld_0^*-окрестности множеств U_j содержатся в множествах W_j.

Воспользовавшись леммой 11, найдем константы B и d_1 для окрестности $V_1 \cup \ldots \cup V_m$ множества $\Omega(f)$. Докажем, что диффеоморфизм f обладает липшицевым периодическим свойством отслеживания с константами L и $d_0 = \min(d_0^*, d_1, d_2, a/2L)$.

Пусть $\xi = \{x_i\}$ — это μ-периодическая d-псевдотраектория диффеоморфизма f с $d \le d_0$. В силу леммы 11 псевдотраектория ξ пересекается с некоторой окрестностью V_j. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 \in V_j$. Тогда $\xi \subset U_j$. Действительно, если $x_{i_0} \notin U_j$ для некоторого i_0, то $x_{i_0+k\mu} \notin U_j$ для любых $k \in \mathbb{Z}$. Выберем такое k, что $i_0 + k\mu > 0$. Тогда по лемме 12 $x_i \notin V_j$ для любых $i \geq i_0 + k\mu$, что противоречит периодичности псевдотраектории ξ и включению $x_0 \in V_j$.

Таким образом, для некоторой точки p выполняются аналоги неравенств (1.3). Докажем периодичность точки p. По построению множеств U_j и W_j, траектория точки p содержится в множестве W_j. Пусть $q = f^\mu(p)$. В силу аналогов неравенств (1.3) и периодичности псевдотраектории ξ,

$$\operatorname{dist}(x_i, f^i(q)) = \operatorname{dist}(x_{i+\mu}, f^i(q)) \leq Ld, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{dist}(f^i(p), f^i(q)) \leq 2Ld \leq a, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $q = p = f^\mu(p)$. Итак, мы доказали, что периодическая d-псевдотраектория ξ $2Ld$-отслеживается периодической точкой p. $\square$

3.2 $\mathbf{Int}^1(\mathbf{PerSh}) \subset \Omega S$

Обозначим через HP множество диффеоморфизмов многообразия M, у которых все периодические точки гиперболичны. Пусть $\mathcal{F} = \operatorname{Int}^1(\mathrm{HP})$. Хаяши и Аоки (см. [14, 8]) доказали, что множества $\mathcal{F}$ и ΩS совпадают. Таким образом, нам достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 14. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSh}) \subset \mathcal{F}$.

Доказательство. В доказательстве этой и других лемм данной главы будет применяться стандартная линеаризационная техника, основанная на свойствах экспоненциального отображения.

Обозначим через exp стандартное экспоненциальное отображение касательного расслоения многообразия M, а через $\exp_x$ соответствующее отображение $\exp_x : T_xM \mapsto M$. Пусть p — периодическая точка диффеоморфизма f. Пусть $p_i = f^i(p)$ и $A_i = Df(p_i)$. Рассмотрим отображения

$$F_i = \exp_{p_i+1}^{-1} \circ f \circ \exp_{p_i} : T_{p_i}M \mapsto T_{p_{i+1}}M. \tag{3.2}$$

В силу стандартных свойств экспоненциального отображения $D\exp_x(0) = \mathrm{id}$. Следовательно,

$$DF_i(0) = A_i.$$

Представим $F_i(v)$ в виде

$$F_i(v) = A_i v + \phi_i(v), \quad \text{где } \frac{|\phi_i(v)|}{|v|} \longrightarrow 0 \text{ при } |v| \to 0.$$

Обозначим через $B(r, x)$ шар радиуса r с центром в точке x в пространстве M, а через $B_T(r, x)$ — шар радиуса r с центром в начале координат в пространстве T_xM.

Существует такое положительное число r, что для любой точки $x \in M$ отображение $\exp_x$ является диффеоморфизмом множества $B_T(r, x)$ на образ, и отображение $\exp_x^{-1}$ является диффеоморфизмом множества $B(r, x)$ на образ. Кроме того, будем считать, что число r обладает следующим свойством:

$$\frac{\operatorname{dist}(\exp_x(v), \exp_x(w))}{|v-w|} \leq 2 \quad \text{при } v, w \in B_T(r, x);$$

$$\frac{|\exp_x^{-1}(y) - \exp_x^{-1}(z)|}{\operatorname{dist}(y, z)} \leq 2 \quad \text{при } y, z \in B(r, x).$$

Далее при построении d-псевдотраекторий мы будем считать число d столь малым, что соответствующие точки псевдотраекторий, отслеживающих траекторий, их образы в касательных пространствах и т.д. содержатся в шарах $B(r, p_i)$ и $B_T(r, p_i)$. Далее мы не будем повторять эти условия на малость числа d.

Для доказательства леммы 14 достаточно доказать включение $\operatorname{Int}^1(\mathrm{PerSh}) \subset \mathrm{HP}$ (так как левая часть этого включения C^1-открыта).

Рассуждая от противного предположим, что существует диффеоморфизм $f \in \operatorname{Int}^1(\mathrm{PerSh})$ с негиперболической периодической точкой p периода m. Зафиксируем C^1-окрестность $\mathcal{N} \subset \mathrm{PerSh}$ диффеоморфизма f. У матрицы $Df^m(p)$ есть собственное число $|\lambda| = 1$. Будем считать λ чисто комплексным собственным числом. Случай вещественного λ разбирается аналогично.

Существуют такое число $a \in (0, r)$, координаты $v_j = (\rho_j \cos\theta_j, \rho_j \sin\theta_j, w)$ и диффеоморфизм $h \in \mathcal{N}$, что $h(p_j) = p_{j+1}$, точке p_j соответствует точка 0 в координатах v_j и если

$$H_j = \exp_{p_{j+1}}^{-1} \circ h \circ \exp_{p_j}$$

и $|v_j| \leq a$, то для некоторых вещественного числа ψ и натурального числа ν таких, что $\cos \nu\psi = 1$,

$$H_j(v_j) = A_j v_j = (r_j \rho_j \cos(\theta_j + \psi), r_j \rho_j \sin(\theta_j + \psi), B_j w)$$

(где B_j — матрица размера $(n-2)\times(n-2)$, $n = \dim M$, $B_{j+m} = B_j$), причем

$$r_0 r_1 \cdots r_{m-1} = 1, \quad r_{j+m} = r_j. \tag{3.3}$$

Таким образом, диффеоморфизм h, C^1-близок к диффеоморфизму f, и у матрицы $Dh^m(p_0)$ есть собственное число λ, являющееся корнем степени ν из 1, которому соответствует жорданов блок размерности 1.

Выберем положительное число $8\epsilon < a$. Так как $h \in \mathcal{N}$, выберем число $0 < d < \epsilon$ из определения свойства PerSh для диффеоморфизма h. Пусть $R = 2\max(r_0, \ldots, r_{m-1})$. Выберем такое натуральное число K, что $m\nu K d/R^m > 8\epsilon$. Уменьшая d при необходимости, мы можем считать, что

$$8\epsilon < m\nu K d/R^m < 2a. \tag{3.4}$$

Построим последовательность $y_k \in T_{p_k}M$ следующим образом: $y_0 = (0, 0, 0)$ (в доказательстве леммы 14 размерность последней координаты равна $n - 2$),

$$y_{k+1} = A_k y_k + (r_0 r_1 \cdots r_k (\cos k\psi)/(2R^m), r_0 r_1 \cdots r_k (\sin k\psi)/(2R^m), 0)$$

при $0 \le k \le Km\nu - 1$,

$$y_{k+1} = A_k y_k - (r_0 r_1 \cdots r_k (\cos k\psi)/(2R^m), r_0 r_1 \cdots r_k (\sin k\psi)/(2R^m), 0)$$

при $Km\nu \le k \le 2Km\nu - 1$ и $y_{k+2Km\nu} = y_k$ для $k \in \mathbb{Z}$.

Ясно, что

$$y_{m\nu K} = (m\nu K d/(2R^m), 0, 0). \tag{3.5}$$

Пусть

$$x_k = \exp_{p_k}(y_k).$$

Так как

$$\exp_{p_{k+1}}^{-1}(h(x_k)) = H_k(y_k) = A_k y_k$$

и

$$|y_{k+1} - A_k y_k| < d/2,$$

последовательность $\xi = \{x_k\}$ является $2m\nu K$-периодической d-псевдотраекторией диффеоморфизма h.

По нашим предположениям найдется такая периодическая точка r_0 диффеоморфизма h, что

$$\operatorname{dist}(x_k, r_k) < \epsilon \quad \text{при } k \in \mathbb{Z},$$

где $r_k = h^k(r_0)$. Пусть

$$q_k = (U_k, V_k, W_k) = \exp_{p_k}^{-1}(r_k), \quad y_k = (u_k, v_k, 0) \qquad \text{при } k \in \mathbb{Z},$$

тогда

$$\sqrt{(U_k - u_k)^2 + (V_k - v_k)^2} \le |q_k - y_k| < 2\epsilon \quad \text{при } k \in \mathbb{Z},$$

следовательно,

$$\sqrt{U_0^2 + V_0^2} \le |q_0| < 2\epsilon.$$

Так как $q_{k+1} = H_k(q_k)$ для любых $k \in \mathbb{Z}$, по построению отображений H_k, $\sqrt{U_k^2 + V_k^2} = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$. Таким образом, мы заключаем, что $\sqrt{U_K^2 + V_K^2} < 2\epsilon$ и получаем противоречие с соотношениями $\sqrt{(U_K - u_K)^2 + (V_K - v_K)^2} < 2\epsilon$, (3.4) и (3.5). $\square$

3.3 **LipPerSh** $\subset \Omega S$

В этом параграфе мы предполагаем, что для диффеоморфизма f выполняется свойство LipPerSh с константами $L \geq 1$ и $d_0 > 0$. В этом случае для диффеоморфизма f^{-1} тоже выполняется свойство LipPerSh (мы будем считать, что с теми же константами L и d_0).

Лемма 15. Любая точка $p \in \mathrm{Per}(f)$ гиперболична.

Доказательство. Рассуждая от противного, будем предполагать, что у диффеоморфизма f есть негиперболическая периодическая точка p. Для простоты обозначений будем считать точку p неподвижной. Общий случай разбирается аналогично. В случае неподвижной точки отображение (3.2) принимает вид

$$F(v) = \exp_p^{-1} \circ f \circ \exp_p(v) = Av + \phi(v),$$

и у матрицы A есть собственное число $|\lambda| = 1$. Будем считать λ чисто комплексным собственным числом. Случай вещественного λ разбирается аналогично.

В силу выбора координат, мы можем считать, что матрица

$A = \operatorname{diag}(H_1, H_2)$, где

$$H_1 = \begin{pmatrix} Q & I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & Q & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & Q \end{pmatrix},$$

причем

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

При выборе новых координат константы L,d_0,N, вообще говоря, изменятся. Для удобства мы будем обозначать новые константы теми же символами. Если v — двумерный вектор, то

$$|Qv| = |v|. \tag{3.6}$$

Пусть $2l$ — это размерность жордановой клетки H_1 и $n = \dim M$. Пусть $K = 25L$ и d — малое число. Далее мы построим последовательность векторов $y_0, \dots, y_Q \in T_pM$ с $y_Q = y_0$, где число Q будет выбрано позже. Определим двумерный вектор $v_1 = (1, 0)$. Пусть $y_0 = 0$ и

$$y_{k+1} = Ay_k + (0, \dots, 0, dQ^{k+1}v_1, 0, \dots, 0)^{(2l-1,2l)} \quad \text{при } 0 \le k \le K-1.$$

В предыдущей формуле запись $(2l-1, 2l)$ означает, что лишь эти компоненты вектора отличны от нуля. Тогда,

$$y_K = (w_1^1, \dots, w_l^1, 0, \dots, 0),$$

где w_j^1 — это двумерные вектора, причем, $|w_l^1| = Kd$. Отметим, что при $j < l$ числа $|w_l^1|/d$ могут быть не целыми. Пусть

$$y_{k+1} = Ay_k - (0, \ldots, 0, dQ^{k+1}v_1, 0, \ldots, 0)^{(2l-1,2l)} \quad \text{при } K \leq k \leq 2K-1.$$

Тогда,

$$y_{2K} = (w_1^2, \ldots, w_{l-1}^2, 0, \ldots, 0).$$

В случае $l = 1$ последовательность $y_0, \ldots, y_Q$ построена с $Q = 2K$. Далее будем считать, что $l > 1$. Если при всех $k \in \{1, \ldots, l-1\}$ $|w_k^2| = 0$, то положим $Q = 2K$ и закончим построение последовательности $y_0, \ldots, y_Q$. В противном случае найдется такое максимальное число $k \in \{1, \ldots, l-1\}$, что $|w_k^2| > 0$. Без ограничения общности будем считать, что $k = l - 1$. Определим число $N_2 = [|w_{l-1}^2|/d]$, где через $[\cdot]$, как и раньше, обозначена целая часть. Пусть $v_2 = w_{l-1}^2/|w_{l-1}^2|$ и

$$y_{k+1} = Ay_k - (0, \ldots, 0, dQ^{k+1-2K}v_2, 0, \ldots, 0)^{(2l-3,2l-2)}$$

при $2K \leq k \leq N_2 + 2K - 2$,

$$y_{N_2+2K} = Ay_{N_2+2K-1} - (0, \ldots, 0, d(|w_{l-1}^2| - N_2)Q^{N_2}v_2, 0, \ldots, 0)^{(2l-3,2l-2)}.$$

Таким образом,

$$y_{N_2+2K} = (w_1^3, \ldots, w_{l-2}^3, 0, \ldots, 0).$$

В случае $l = 2$ последовательность $y_0, \ldots, y_Q$ построена с $Q = 2K + N_2$. Далее будем считать, что $l > 2$. Рассуждая аналогичным образом, мы определяем число N_3, вектор $v_3 = w_{l-2}^3/|w_{l-2}^3|$

и вектора $y_{N_2+2K+1}, \dots, y_{N_2+N_3+2K}$, причем

$$y_{N_3+N_2+2K} = (w_1^4, \dots, w_{l-3}^4, 0, \dots, 0).$$

В итоге, для некоторого числа Q мы определим последовательность y_k при $0 \le k \le Q$ так, что $y_Q = 0$. Пусть

$$Y := \frac{\max_{0 \le k \le Q} |y_k|}{d}.$$

Отметим, что числа Y и Q полностью определяются числом K (а, следовательно, и числом L). Определим последовательность y_k при всех $k \in \mathbb{Z}$ по следующей формуле

$$y_{k+Q} = y_k \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, последовательность y_k будет Q-периодической по построению. Определим последовательность $\xi = \{x_k\}$ равенством $x_k = \exp_p(y_k)$. Так как $\phi(v) = o(v)$ при $v \to 0$, мы можем считать число d столь малым, что

$$|\phi(y_k)| < d \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

В силу равенства (3.6),

$$|y_{k+1} - Ay_k| \le d \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Так как

$$\exp_p^{-1}(f(x_k)) = F(y_k) = Ay_k + \phi(y_k),$$

в силу соотношений (3.7) и (3.8),

$$|y_{k+1} - \exp_p^{-1}(f(x_k))| \le |y_{k+1} - Ay_k| + |\phi(y_k)| < 2d.$$

Следовательно, последовательность $\xi = \{x_k\}$ является Q-периодической $4d$-псевдотраекторией.

Теперь мы оценим расстояния между точками траектории отображения F и его линеаризации. Выберем вектор $q_0 \in T_pM$ и предположим, что точки $q_k = F^k(q_0)$ содержатся в $(Y + 8L)d$-окрестности нуля при $0 \le k \le K$. Пусть $r_k = A^k q_0$. На точки r_k не накладываются никакие ограничения так, как далее оцениваются значения функции ϕ только в точках q_k. Выберем произвольное число μ, ограничения на которое будут наложены позже. Будем считать число d столь малым, что

$$|\phi(v)| \le |v| \quad \text{при } |v| \le (Y + 8L)d.$$

Тогда

$$|q_1| \le |Aq_0| + |\phi(q_0)| \le (N+1)|q_0|,$$

$$\dots,$$

$$|q_k| \le |Aq_{k-1}| + |\phi(q_{k-1})| \le (N+1)^k|q_0|$$

при $1 \le k \le K$,

$$|q_1 - r_1| = |Aq_0 + \phi(q_0) - Aq_0| \le \mu|q_0|,$$

$$|q_2 - r_2| = |Aq_1 + \phi(q_1) - Ar_1| \le N|q_1 - r_1| + \mu|q_1| \le \mu(2N+1)|q_0|,$$

$$|q_3 - r_3| \le N|q_2 - r_2| + \mu|q_2| \le \mu(N(2N+1) + (N+1)^2)|q_0|$$

и так далее.

Таким образом, существует такое число $\nu = \nu(K, N)$, что

$$|q_k - r_k| \le \mu\nu|q_0| \quad \text{при } 0 \le k \le K.$$

Пусть $\mu = 1/\nu$, тогда, очевидно, что $\mu = \mu(K, N)$, и при достаточно малом d выполняются неравенства

$$|q_k - r_k| \le |q_0| \quad \text{при } 0 \le k \le K. \tag{3.9}$$

Так как $f \in \mathrm{LipPerSP}$, если число $d \le d_0$, то $4d$-псевдотраектория ξ $4Ld$-отслеживается периодической траекторией некоторой точки p_0, т.е. если $p_k = f^k(p_0)$, то

$$\mathrm{dist}(x_k, p_k) \le 4Ld \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Пусть $q_k = \exp_p^{-1}(p_k)$.

В силу определения числа Y и неравенств (3.10),

$$|q_k| \le |y_k| + 2\mathrm{dist}(x_k, p_k) \le (Y + 8L)d \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что $|q_0| \le 8Ld$.

Если $r_k = A^k q_0$, то в силу неравенств (3.9)

$$|q_K - r_K| \le |q_0| \le 8Ld. \tag{3.11}$$

Будем обозначать через $v^{[i,j]}$ двумерный вектор, состоящий из i-й и j-й компонент вектора v. Тогда

$$|r_K^{[2l-1,2l]}| = |q_0^{[2l-1,2l]}|. \tag{3.12}$$

Из соотношений

$$|y_K^{[2l-1,2l]}| = Kd \quad \text{и} \quad |q_K - y_K| \le 8Ld$$

следуют неравенства

$$|q_K^{[2l-1,2l]}| \ge Kd - 8Ld = 17Ld \tag{3.13}$$

(напомним, что по определению $K = 25L$).

Неравенства (3.11)–(3.13) противоречат друг другу. $\square$

Лемма 16. *Существуют такие константы $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, зависящие только от N и L, что для любой точки $p \in Per(f)$ существуют дополнительные подпространства $S(p)$ и $U(p)$ касательного пространства T_pM, являющиеся Df-инвариантными, т.е.*

(H1) $Df(p)S(p) = S(f(p))$ *и* $Df(p)U(p) = U(f(p))$

и выполняются оценки

(H2.1) $|Df^j(p)v| \le C\lambda^j|v| \quad$ *при* $v \in S(p), j \ge 0,$

(H2.2) $|Df^{-j}(p)v| \le C\lambda^j|v| \quad$ *при* $v \in U(p), j \ge 0.$

Замечание 6. *По существу лемма 16 означает, что множество* Per(f) *обладает всеми стандартными свойствами гиперболического множества за исключением компактности.*

Доказательство леммы 16. Зафиксируем периодическую точку p периода m. Пусть $p_i = f^i(p)$, $A_i = Df(p_i)$ и $B = Df^m(p)$. По лемме 15 матрица B является гиперболической. Обозначим через $S(p)$ и $U(p)$ инвариантные подпространства матрицы B, соответствующие частям спектра матрицы B, содержащимся вне и внутри единичного круга, соответственно. Пространства $S(p)$ и $U(p)$ являются дополнительными, Df-инвариантными, и выполняются соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} B^n v_s = \lim_{n\to+\infty} B^{-n} v_u = 0, \quad v_s \in S(p), v_u \in U(p). \tag{3.14}$$

Далее приводится доказательство неравенств (H2.2) с $C = 16L$ и $\lambda = 1+1/(8L)$. Для получения неравенств (H2.1) можно применить аналогичное рассуждение к диффеоморфизму f^{-1}.

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v_u \in U(p)$ и произвольное целое число $j \geq 0$. Определим последовательности $v_i, e_i \in T_{p_i}M$ и $\lambda_i > 0$ при $i \geq 0$ следующим образом:

$$v_0 = v_u, \quad v_{i+1} = A_i v_i, \quad e_i = v_i/|v_i|, \quad \lambda_i = |v_{i+1}|/|v_i| = |A_i e_i|.$$

Пусть

$$\tau = \frac{\lambda_{m-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_1 + \lambda_{m-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1} + 1}{\lambda_{m-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}.$$

Рассмотрим последовательность $\{a_i \in \mathbb{R}, i \geq 0\}$, определенную формулами

$$a_0 = \tau, \quad a_{i+1} = \lambda_i a_i - 1. \tag{3.15}$$

Отметим, что

$$a_m = 0 \quad \text{и} \quad a_i > 0, \quad i \in \{0, \ldots, m-1\}. \tag{3.16}$$

Действительно, если $a_i \leq 0$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, то $a_k < 0$ при любых $k \in \{i+1, \ldots, m\}$.

В силу соотношений (3.14) существует такое число $n > 0$, что

$$|B^{-n} \tau e_0| < 1. \tag{3.17}$$

Рассмотрим конечную последовательность $w_i \in T_{p_i}M$, $i \in \{0, \ldots, m(n+1)\}$, определенную равенствами

$$w_i = a_i e_i \quad \text{при } i \in \{0, \ldots, m-1\},$$

$$w_m = B^{-n}\tau e_0,$$

$$w_{m+1+i} = A_i w_{m+i} \quad \text{при } i \in \{0, \dots, mn-1\}.$$

Отметим, что

$$w_{km} = B^{k-1-n}\tau e_0 \quad \text{при } k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать последовательность $\{w_i\}$ как $m(n+1)$-периодическую последовательность, определенную при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что

$$A_i w_i = a_i A_i e_i = a_i \frac{v_{i+1}}{|v_i|} \quad \text{при } i \in \{0, \dots, m-2\},$$
$$w_{i+1} = (\lambda_i a_i - 1)\frac{v_{i+1}}{|v_{i+1}|} = a_i \frac{v_{i+1}}{|v_i|} - e_{i+1} \quad \text{при } i \in \{0, \dots, m-2\},$$
$$A_{m-1} w_{m-1} = a_{m-1} \frac{v_m}{|v_{m-1}|} = \frac{v_m}{\lambda_{m-1}|v_{m-1}|} = e_m$$

(в последних равенствах учитывается тот факт, что $a_{m-1}\lambda_{m-1} = 1$ в силу того, что $a_m = 0$).

Приведенные выше равенства и оценка (3.17) влекут неравенство

$$|w_{i+1} - A_i w_i| < 2 \quad \text{при } i \in \mathbb{Z}. \tag{3.18}$$

Зафиксируем маленькое положительное число d и рассмотрим $m(n+1)$-периодическую последовательность $\xi = \{x_i = \exp_{p_i}(dw_i), i \in \mathbb{Z}\}$. Покажем, что при достаточно малом d последовательность ξ является $4d$-псевдотраекторией диффеоморфизма f. Пусть

$$\zeta_{i+1} = \exp^{-1}_{p_{i+1}}(f(x_i)) \quad \text{и} \quad \zeta'_{i+1} = \exp^{-1}_{p_{i+1}}(x_{i+1}).$$

Тогда

$$\zeta_{i+1} = \exp_{p_{i+1}}^{-1} f(\exp_{p_i}(dw_i)) = F_i(dw_i) = A_i dw_i + \phi_i(dw_i),$$

где отображение F_i определено равенством (3.2), $\phi_i(v) = o(|v|)$ и

$$\zeta'_{i+1} = \exp_{p_{i+1}}^{-1}(x_{i+1}) = dw_{i+1}.$$

В силу неравенств (3.18), при достаточно малом d,

$$|\zeta'_{i+1} - \zeta_{i+1}| < 2d \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(x_{i+1}, f(x_i)) < 4d.$$

Таким образом, последовательность ξ является периодической $4d$-псевдотраекторией.

По лемме 15 m-периодическая траектория $\{p_i\}$ является гиперболической. Следовательно, в некоторой своей окрестности траектория $\{p_i\}$ является единственной периодической траекторией. В силу наших предположений, при достаточно малом d псевдотраектория ξ $4Ld$-отслеживается траекторией $\{p_i\}$. Так как $\operatorname{dist}(x_i, p_i) \le 4Ld$,

$$|a_i| = |w_i| \le 8L \quad \text{при } i \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Пользуясь равенствами $\lambda_i = (a_{i+1} + 1)/a_i$, мы видим, что для $i \in \{0, \dots, m-1\}$,

$$\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1} = \frac{a_1+1}{a_0}\frac{a_2+1}{a_1}\dots\frac{a_i+1}{a_{i-1}} =$$
$$= \frac{a_i+1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_{i-1}}\right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{8L}\left(1+\frac{1}{8L}\right)^{i-1} > \frac{1}{16L}\left(1+\frac{1}{8L}\right)^{i}$$

(мы учитываем тот факт, что $1+1/(8L) < 2$ из-за того, что $L \geq 1$).

Кроме того, заметим, что

$$|Df^i(p)v_u| = \lambda_{i-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_0 |v_u| \quad \text{при } i \in \{0, \ldots, m-1\}$$

и ранее зафиксированный вектор $v_u \in U(p)$ был произвольным.

Приведенное выше рассуждение доказывает неравенства (H2.2) для $j \leq m-1$. В случае $j \geq m$ можно выбрать такое целое $k > 0$, что $km > j$ и применить приведенное выше рассуждение к периодической траектории $p_0, \ldots, p_{km-1}$ (отметим, что мы нигде не использовали тот факт, что число m являлось минимальным периодом). $\square$

Лемма 17. *Если $f \in \mathrm{LipPerSh}$, то для f выполняется аксиома A.*

Доказательство. Будем обозначать через P_l множество точек $p \in \mathrm{Per}(f)$ индекса l (как обычно, будем называть индексом гиперболической периодической точки размерность ее неустойчивого многообразия). Пусть R_l — это замыкание множества P_l. Множество R_l является компактным и Df-инвариантным. Докажем, что множество R_l является гиперболическим. Пусть $n = \dim M$.

Рассмотрим точку $q \in R_l$ и зафиксируем такую последовательность точек $p_m \in P_l$, что $p_m \longrightarrow q$ при $m \to +\infty$. По лемме 16 существуют дополнительные подпространства $S(p_m)$ и $U(p_m)$ (размерностей $n-l$ и l, соответственно) пространства $T_{p_m}M$, для которых выполняются оценки (H2.1) и (H2.2).

Фиксируем локальные координаты в окрестности (q, T_qM) в касательном расслоении многообразия M; выберем подпоследовательность $\{p_{m_k}\}$, для которой последовательности $S(p_{m_k})$ и $U(p_{m_k})$ сходятся в топологии Грассмана к некоторым подпространствам S_0 и U_0 пространства T_qM.

Пространства S_0 и U_0 будут дополнительными. Действительно, рассмотрим "угол" β_{m_k} между подпространствами $S_{p_{m_k}}$ и $U_{p_{m_k}}$, определенный (по отношению к введенным локальным координатам в окрестности точки (q, T_qM)) следующим образом:

$$\beta_{m_k} = \min |v^s - v^u|,$$

где минимум берется по всем возможным парам единичных векторов $v^s \in S(p_{m_k})$ и $v^u \in U(p_{m_k})$. В работе [19] (лемма 12.1) показано, что числа β_{m_k} ограничены снизу положительной константой $\alpha = \alpha(C, \lambda, N)$. Таким образом, пространства S_0 и U_0 являются дополнительными.

Докажем единственность пространств S_0 и U_0. Приводимое ниже доказательство этого факта близко к рассуждениям из [19]. Рассуждая от противного, предположим существование подпоследовательности p_{m_i}, для которой последовательности $S(p_{m_i})$ и $U(p_{m_i})$ сходятся к дополнительным пространствам S_1 и U_1, не совпадающим с пространствами S_0 и U_0. Без ограничения общности будем считать, что $S_0 \backslash S_1 \neq \emptyset$. В силу непрерывности отображения Df, для $j \geq 0$ выполняются следующие неравенства:

$$|Df^j(q)v| \leq C\lambda^j |v| \quad \text{при } v \in S_0 \cup S_1,$$

$$|Df^j(q)v| \geq C^{-1}\lambda^{-j} |v| \quad \text{при } v \in U_0 \cup U_1.$$

Так как

$$T_q M = S_0 \oplus U_0 = S_1 \oplus U_1,$$

в силу наших предположений найдется такой вектор $v \in S_0$, что

$$v = v^s + v^u, \quad v^s \in S_1, v^u \in U_1, \quad v^u \neq 0.$$

Тогда

$$|Df^j(q)v| \leq C\lambda^j |v| \longrightarrow 0 \quad \text{при } j \to +\infty,$$

$$|Df^j(q)v| \geq C^{-1}\lambda^{-j}|v^u| - C\lambda^j |v^s| \to +\infty \quad \text{при } j \to +\infty.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Таким образом, доказана единственность пространств S_0 и U_0.

Для любой точки $q \in R_l$ существуют однозначно определенные дополнительные Df-инвариантные подпространства $S(q)$ и $U(q)$ с соответствующими оценками гиперболичности. Мы доказали, что каждое множество R_l является гиперболическим, причем $\dim S(q) = n - l$ и $\dim U(q) = l$.

Предположим, что $r \in \Omega(f)$. Тогда найдутся такие последовательность точек $r_m \longrightarrow r$ при $m \to +\infty$ и последовательность индексов $k_m \longrightarrow +\infty$ при $m \to +\infty$, что $f^{k_m}(r_m) \longrightarrow r$. Далее, продолжая последовательность

$$r_m, f(r_m), \ldots, f^{k_m-1}(r_m)$$

периодически с периодом k_m, мы строим периодическую d_m-псевдотраекторию диффеоморфизма f, причем $d_m \longrightarrow 0$ при $m \to +\infty$.

Так как $f \in \mathrm{LipPerSh}$, для достаточно больших m найдутся такие периодические точки p_m, что $\mathrm{dist}(p_m, r_m) \longrightarrow 0$ при $m \to +\infty$. Следовательно, периодические точки плотны в множестве $\Omega(f)$.

Так как гиперболические множества разных размерностей являются дизъюнктными, имеет место разложение

$$\Omega(f) = R_0 \cup \ldots \cup R_n,$$

т.е. множество $\Omega(f)$ является гиперболическим. $\square$

В параграфе 3.1 мы отметили, что если для диффеоморфизма f выполняется аксиома A, то его неблуждающее множество может быть представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа базисных множеств (см. формулу (3.1)). По аналогии с формулами (2.2) и (2.3) определим устойчивые и неустойчивые "многообразия" множеств Ω_i:

$$W^s(\Omega_i) = \{x \in M \mid \mathrm{dist}(f^k(x), \Omega_i) \longrightarrow 0, \quad k \to +\infty\},$$

$$W^u(\Omega_i) = \{x \in M \mid \mathrm{dist}(f^k(x), \Omega_i) \longrightarrow 0, \quad k \to -\infty\},$$

Для базисных множеств Ω_i и Ω_j будем писать $\Omega_i \to \Omega_j$ в том случае, когда множество

$$W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_j)$$

содержит блуждающую точку.

Определение 18. Будем говорить, что диффеоморфизм f *содержит 1-цикл*, если для некоторого базисного множества Ω_i выполняется соотношение $\Omega_i \to \Omega_i$.

Определение 19. Будем говорить, что диффеоморфизм f *содержит t-цикл*, если найдутся такие $t > 1$ базисных множеств

$$\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_t},$$

что

$$\Omega_{i_1} \to \cdots \to \Omega_{i_t} \to \Omega_{i_1}.$$

Лемма 18. *Если* $f \in \mathrm{LipPerSh}$, *то диффеоморфизм f не содержит циклов.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что у диффеоморфизма f есть t-цикл, образованный множествами $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_t}$. Тогда найдутся точки

$$p^1 \in (W^u(\Omega_{i_1}) \cap W^s(\Omega_{i_2})) \setminus \Omega(f), \ldots, p^t \in (W^u(\Omega_{i_t}) \cap W^s(\Omega_{i_{t+1}})) \setminus \Omega(f)$$

(мы считаем, что $i_{t+1} = i_1$). Следовательно, для каждого $j \in \in \{1, \ldots, t\}$ существуют такие последовательности $k_m^j, l_m^j \longrightarrow +\infty$ при $m \to +\infty$, что

$$f^{-k_m^j}(p^j) \longrightarrow \Omega_{i_j}, \quad f^{l_m^j}(p^j) \longrightarrow \Omega_{i_{j+1}} \quad \text{при } m \to +\infty.$$

В силу компактности соответствующих базисных множеств можно считать, что существуют такие точки q^j и r^j, что

$$f^{-k^j_m}(p^j) \longrightarrow q^j \in \Omega_{i_j}, \quad f^{l^j_m}(p^j) \longrightarrow r^j \in \Omega_{i_{j+1}} \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Так как каждое из множеств Ω_{i_j} содержит положительную всюду плотную полутраекторию, существуют такие точки $s^j_m \longrightarrow r^j$ и индексы $n^j_m > 0$, что $f^{n^j_m}(s^j_m) \longrightarrow q^{j+1}$ при $m \to +\infty$ (мы считаем, что $q^{t+1} = q^1$).

Далее, продолжая последовательность

$$p^1, f(p^1), \dots, f^{l^1_m - 1}(p^1), s^1_m, \dots, f^{n^1_m - 1}(s^1_m), f^{-k^2_m}(p^2), \dots, f^{-1}(p^2);$$

$$\dots;$$

$$p^{t-2}, f(p^{t-2}), \dots, f^{l^{t-2}_m - 1}(p^{t-2}), s^{t-2}_m, \dots, f^{n^{t-2}_m - 1}(s^{t-2}_m), f^{-k^{t-1}_m}(p^{t-1}),$$

$$\dots, f^{-1}(p^{t-1});$$

$$p^{t-1}, f(p^{t-1}), \dots, f^{l^{t-1}_m - 1}(p^{t-1}), s^{t-1}_m, \dots, f^{n^{t-1}_m - 1}(s^{t-1}_m), f^{-k^t_m}(p^t), \dots$$

$$\dots, f^{-1}(p^t)$$

периодически с периодом $\sum_j k^j_m + l^j_m + n^j_m$, мы строим периодическую d_m-педотраекторию диффеоморфизма f, причем $d_m \longrightarrow 0$ при $m \to +\infty$.

Так как $f \in \mathrm{LipPerSh}$, для достаточно больших m найдутся такие периодические точки z_m, что $z_m \longrightarrow p^1$ при $m \to +\infty$. То есть точка p^1 является неблуждающей, что противоречит нашим предположениям. $\square$

В силу лемм 15–18 $\mathrm{LipPerSh} \subset \Omega S$.

4 Слабые предельные свойства отслеживания диффеоморфизмов двумерных многообразий

Данная глава устроена следующим образом. В параграфе 4.1 обсуждается ряд свойств диффеоморфизмов, обладающих слабыми предельными свойствами отслеживания. В параграфе 4.2 изучается структура неблуждающего множества при наличии свойства WLmSP. Наконец, в параграфе 4.3 формулируется и доказывается основной результат данной главы — теорема 3.

4.1 Некоторые свойства диффеоморфизмов, обладающих слабыми предельными свойствами отслеживания

Лемма 19. *Если последовательность ξ удовлетворяет условию $(*)$, то множество $\omega(\xi)$ инвариантно относительно f.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $p \in M$. Покажем, что $p \in \omega(\xi)$ тогда и только тогда, когда $f(p) \in \omega(\xi)$. Действительно, $p \in \omega(\xi)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{n_k\}$, что

$$\operatorname{dist}(x_{n_k}, p) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty,$$

что эквивалентно соотношению

$$\operatorname{dist}(f(x_{n_k}), f(p)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Так как для последовательности ξ выполняется условие $(*)$, приведенное выше соотношение эквивалентно включению $f(p) \in \omega(\xi)$.

$\square$

Покажем, что в случае компактного фазового пространства, так же как и свойство 2WSP, свойство 2WLmSP выполняется для любого гомеоморфизма f.

Утверждение 2. *Дискретная динамическая система f на компактном метрическом пространстве M обладает свойством* 2WLmSP*.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность ξ, удовлетворяющую условию $(*)$. В силу компактности метрического пространства M найдется точка $p \in \omega(\xi)$. Значит, по лемме 19 выполняется включение $O(p, f) \subset \omega(\xi)$. Следовательно, выполняется условие (1.5). $\square$

Как уже было отмечено во введении, можно рассматривать "отрицательные" аналоги предельных свойств отслеживания. Введем отрицательный аналог свойства $(*)$ — свойство $(**)$.

Будем говорить, что последовательность $\xi = \{x_k\}_{k<0}$ обладает свойством $(**)$, если

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to -\infty. \tag{$**$}$$

Введем свойство Lm_SP, отрицательный аналог свойства LmSP.

Определение 20. Будем говорить, что гомеоморфизм f обладает *свойством* Lm_SP, если для любой последовательности ξ, для которой выполняется свойство $(**)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(q)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to -\infty.$$

Так же как и в случае свойства LmSP, существуют два способа определения слабого Lm_SP.

Определение 21. Будем говорить, что гомеоморфизм f обладает *свойством* WLm_SP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}_{k<0}$, для которой выполняется свойство $(**)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\alpha(\xi) \subset \alpha(q), \tag{4.1}$$

где $\alpha(q)$ — это α-предельное множество траектории $O(p, f)$, а $\alpha(\xi)$ — это множество всех предельных точек последовательности $\xi = \{x_k \mid k < 0\}$.

Определение 22. Будем говорить, что гомеоморфизм f обладает *свойством* 2WLm_SP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}_{k<0}$, для которой выполняется свойство $(**)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\alpha(q) \subset \alpha(\xi).$$

По аналогии с утверждением 2 можно доказать, что любой гомеоморфизм компактного метрического пространства обладает свойством 2WLm_SP.

Покажем, что свойства WLmSP и WLm_SP различны. Приведем пример гомеоморфизма $f \in$ WLmSP\WLm_SP.

Пример. Пусть M — двумерная сфера $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^3$.

Введем следующие обозначения:

$$S := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad u_1 := (0, 0, 1), \quad u_2 := (0, 0, -1).$$

Рассмотрим гомеоморфизм f сферы M, обладающий следующими свойствами:

а) множество всех неподвижных точек гомеоморфизма f совпадает с $\{u_1\} \cup \{u_2\} \cup S$;

б) для любой точки $p = (x, y, z) \in M$:

$$\omega(p) = S,\ \alpha(p) = u_1 \text{ при } 0 < z < 1,$$

$$\omega(p) = S,\ \alpha(p) = u_2 \text{ при } -1 < z < 0;$$

в) если координаты образа некоторой точки $p = (x, y, z) \in M$ под действием гомеоморфизма f обозначены через $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, то

$$0 < \overline{z} < z < 1, \text{ если } 0 < z < 1,$$

$$-1 < z < \overline{z} < 0, \text{ если } -1 < z < 0.$$

Покажем, что $f \notin$ WLm_SP.

Определим числовую последовательность $\{\varphi_k\}_{k \le 0}$ следующим образом:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_k = \varphi_{k+1} - \frac{1}{k} \pmod{2\pi}; \quad k < 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим последовательность $\xi = \{x_k\} \subset M$ с $x_k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k, 0)$. Легко видеть, что для последовательности ξ выполнено условие $(**)$.

По построению последовательность $\{\varphi_k\}$ плотна в отрезке $[0, 2\pi]$, следовательно, последовательность ξ плотна в круге S, то есть $\alpha(\xi) = S$. В силу условий а) и б), не существует такой точки $p \in M$, что $\alpha(p) \supset S$. Таким образом, включение (4.1) не выполнено ни для какой точки $p \in M$. Следовательно, $f \notin$ WLm_SP.

Покажем, что $f \in$ WLmSP. Рассмотрим произвольную последовательность $\xi = \{x_k \in M \mid k \geq 0\}$, удовлетворяющую условию $(*)$. Найдется такое число N, что для любого числа $n > N$ выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(x_{n+1}, f(x_n)) < \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{4.2}$$

Легко видеть, что возможны следующие три случая:

$\underline{1}.^0$ $\omega(\xi) = u_1$ (или $\omega(\xi) = u_2$). В этом случае включение (1.4) выполняется для точки $p := u_1$ $(p := u_2)$.

$\underline{2}.^0$ $\omega(\xi) = \{u_1\} \cup \{u_2\}$. В этом случае найдется такая последовательность чисел $\{n_k\}_{k>0}$, что для любых $k > 0$ выполняются соотношения $n_k > N$ и

$$x_{n_k} \in N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right), \quad x_{n_k+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right). \tag{4.3}$$

Зафиксируем произвольное натуральное число k. В силу условия в),

$$f(x_{n_k}) \in N\left(\sqrt{2}, u_1\right). \tag{4.4}$$

Используя соотношения (4.3), (4.4) и аналог соотношения (4.2) мы получаем, что

$$x_{n_k+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_2\right).$$

Таким образом, некоторая подпоследовательность последовательности $\xi = \{x_k\}$ содержится в множестве $M \setminus \left(N\left(\sqrt{2}/3, u_1\right) \cup \cup N\left(\sqrt{2}/3, u_2\right)\right)$. Следовательно, в силу компактности метрического пространства M,

$$\omega(\xi) \cap M \setminus \left(N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_2\right)\right) \neq \varnothing,$$

что противоречит нашим предположениям. Итак, этот случай невозможен.

$\underline{3}.^0$ $\omega(\xi) \setminus (\{u_1\} \cup \{u_2\}) \neq \varnothing$. В этом случае существует такая точка $q \in \omega(\xi)$, что $q \notin \{u_1\} \cup \{u_2\}$. Предположим, что $q \notin S$. Фактически, в доказательстве утверждения 2 было показано, что если $q \in \omega(\xi)$, то $\omega(q) \subset \omega(\xi)$. Поэтому, в силу свойства б) и нашего предположения, $S \subset \omega(\xi)$. Нам понадобится следующее предложение.

Предложение 6. *Если множество $\omega(\xi)$ пересекается с кругом S, то оно содержится в круге S.*

Доказательство. Пусть $q \in \omega(\xi)$ и выполняется включение

$$\omega(\xi) \cap S \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

Покажем, что $q \in S$. Рассуждая от противного, предположим, что точка q не лежит в круге S. Существует такое число ε_1, что

$$q \notin N(2\varepsilon_1, S).$$

По свойствам а) и в), существует такое число ε_2, что

$$N\left(\varepsilon_2, f(N(\varepsilon_1, S))\right) \subset N(\varepsilon_1, S). \tag{4.6}$$

Так как для последовательности ξ выполняется соотношение $(*)$, существует такое число K, что для любых $k > K$

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < \varepsilon_2. \tag{4.7}$$

В силу включения (4.5), найдется такое число $n > K$, что

$$x_n \in N(\varepsilon_1, S).$$

Следовательно, $f(x_n) \in f(N(\varepsilon_1, S))$, а значит, в силу соотношений (4.6) и (4.7),

$$x_{n+1} \in N(\varepsilon_1, S).$$

Рассуждая по индукции, мы получаем, что для любых $k \geq n$ выполняется включение

$$x_k \in N(\varepsilon_1, S),$$

что противоречит включению (4.5). Следовательно, наше предположение не верно и $q \in S$. $\square$

В силу предложения 6 наше предположение не верно, и $q \in S$. Таким образом, множество $\omega(\xi)$ обязательно пересекается с множеством S. Тогда в силу предположения множество $\omega(\xi) \subset S$.

А значит, включение (1.4) выполняется, например, для точки $p := \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Итак, для любой последовательности ξ, удовлетворяющей условию $(*)$, мы построили точку $p \in M$, для которой выполняется включение (1.4). Следовательно, $f \in \mathrm{WLmSP}$.

Замечание 7. *Аналогично можно построить гомеоморфизм* $f \in \mathrm{WLm\_SP} \setminus \mathrm{WLmSP}$.

4.2 Структура неблуждающего множества в случае выполнения WLmSP

Напомним, что через $\Omega(f)$ обозначено неблуждающее множество гомеоморфизма f. Предположим, что f — это гомеоморфизм компактного метрического пространства M с метрикой dist. Хорошо известно, что

$$\Omega(f) \supset \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

Однако следующий простой пример показывает что, вообще говоря, у гомеоморфизма f могут быть неблуждающие точки, не являющиеся ω-предельными ни для одной траектории.

Рассмотрим следующую систему на плоскости:

$$\dot{x} = -g(x,y)y, \quad \dot{y} = \ g(x,y)x, \tag{4.8}$$

где g — это такая непрерывная функция, что $g(x,y) \geq 0$ и

$$g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ y = 0.$$

Фазовый портрет системы (4.8) изображен на рисунке 4:

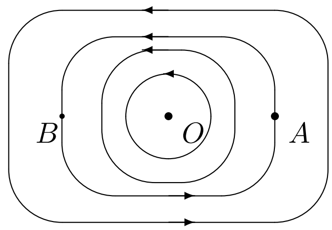

рис. 4

У системы (4.8) есть точки покоя $O := (0,0)$ и $A := (1,0)$ и незамкнутая траектория, проходящая через некоторую точку B. Траектория любой точки, не лежащей на траекториях точек B, A и O, является замкнутой.

В качестве гомеоморфизма f рассмотрим сдвиг по траекториям системы (4.8) на время 1. Точка B является неблуждающей для гомеоморфизма f, так как сколь угодно близко от нее есть неблуждающие точки системы (4.8), а значит, и гомеоморфизма T, однако, по построению, точка B не является ω-предельной ни для одной траектории.

Оказывается, что имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3. *Если* $f \in \mathrm{WLmSP}$, *то*

$$\Omega(f) = \bigcup_{p \in M} \omega(p). \tag{4.9}$$

Доказательство. Чтобы достигнуть противоречия, предположим, что равенство (4.9) не выполнено, то есть существует такая неблуждающая точка s, что

$$s \notin \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

Тогда для любого шара $N(1/n, s)$ найдутся такая точка q_n и такое число $N_n \geq 1$, что выполняются включения

$$q_n \in N(1/n, s) \text{ и } f^{N_n}(q_n) \in N(1/n, s).$$

Построим последовательность $\xi = \{x_k\}_{k \geq 0}$ следующим образом:

$$x_0 := q_1, \qquad x_1 := f(q_1), \qquad \ldots \qquad x_{N_1 - 1} := f^{N_1 - 1}(q_1),$$

$$x_{N_1} := q_2, \qquad x_{N_1+1} := f(q_2), \qquad \ldots \qquad x_{N_1+N_2-1} := f^{N_2-1}(q_2),$$

$$\ldots$$

$$x_{N_1+\ldots+N_{m-1}} := q_m, \qquad \ldots \qquad x_{N_1+\ldots+N_m-1} := f^{N_m-1}(q_m),$$

$$\ldots$$

Покажем, что для последовательности ξ выполнено соотношение $(*)$. Действительно, по построению,

$$\operatorname{dist}\left(x_{N_1+\ldots+N_{m-1}}, f(x_{N_1+\ldots+N_{m-1}-1})\right) \leq \operatorname{dist}(q_m, s) +$$

$$+\operatorname{dist}\left(f(f^{N_{m-1}-1}(q_{m-1})), s\right) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно, для последовательности ξ выполняется соотношение $(*)$.

По построению последовательности ξ,

$$\omega(\xi) \supset s. \tag{4.10}$$

Но так как $f \in \mathrm{WLmSP}$, найдется точка p, для которой выполняется включение (1.4). Из включений (4.10) и (1.4) следует включение

$$s \subset \omega(p),$$

что противоречит выбору точки s. Таким образом, наше предположение неверно, и выполняется равенство (4.9). $\square$

Замечание 8. *Нетрудно видеть, что для* WLm_SP *выполняется аналогичное утверждение: если* $f \in \mathrm{WLm\_SP}$, *то* $\Omega(f) = \bigcup_{p \in M} \alpha(p)$.

4.3 Формулировка и доказательство теоремы 3

Теорема 3. *Если* M *— гладкое замкнутое многообразие и* $\dim M = 2$, *то*

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) = \Omega S.$$

Замечание 9. *Напомним, что диффеоморфизм* f *обладает свойством* HP, *если все его периодические точки являются гиперболическими. Пусть, как и в главе 3,* $\mathcal{F} := \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$. *Хаяши и Аоки доказали, что* $\mathcal{F} = \Omega\mathrm{S}$ *(см. [14, 8]). Пилюгин доказал (см. [20]), что* $\Omega\mathrm{S} \subset \mathrm{LmSP} \subset \mathrm{WLmSP}$. *Таким образом для доказательства теоремы 3 достаточно доказать лишь, что в случае двумерного замкнутого гладкого многообразия* $\mathrm{WLmSP} \subset \mathcal{F}$, *что и будет сделано ниже.*

Замечание 10. *Сформулированная теорема не обобщается на случай многообразий более высокой размерности.*

В статье [17] Мане построил такую подобласть $\mathcal{M}$ множества диффеоморфизмов 3-мерного тора $\mathbb{T}^3$, что любой диффеоморфизм $f \in \mathcal{M}$ имеет всюду плотную в $\mathbb{T}^3$ траекторию, $\Omega(f) = \mathbb{T}^3$, но

f не является Ω-устойчивым. Известно (см. [29]), что если отображение f является гомеоморфизмом компактного метрического пространства X и $\Omega(f) = X$, то из существования плотной траектории следует существование плотной положительной полутраектории. Таким образом, $\mathcal{M} \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})\backslash\Omega\mathrm{S}$; следовательно, $\mathcal{M} \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})\backslash\mathcal{F}$.

Замечание 11. *Как будет видно из доказательства теоремы 3, для свойства* WLm_SP *справедлива аналогичная теорема.*

Доказательство. Доказательство сформулированной теоремы основывается на конструкциях, близких к использованным в статьях [20, 27].

Отметим, что для доказательства теоремы достаточно доказать лишь, что $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) \subset \mathrm{HP}$ (так как левая часть этого включения C^1-открыта). Мы будем доказывать это включение от противного. Предположим, что существует диффеоморфизм $f \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})$ с негиперболической периодической точкой p. Пусть m — это период точки p, обозначим через p_j точки $f^j(p)$ при $j = 0, \ldots, m-1$. Так как точка p негиперболическая, у матрицы $Df^m(p)$ существует собственное число λ, по модулю равное единице.

Дальнейшее доказательство состоит из разбора следующих двух случаев.

Случай I. Число λ вещественно.

Выберем диффеоморфизм $h \in W$, обладающий следующими свойствами:

(h1) $p_j = h^j(p)$ при $0 \le j \le m-1$, а $p = h^m(p)$ (то есть для диффеоморфизма h точка p является периодической с периодом m);

(h2) для собственных чисел λ и μ матрицы $Dh^m(p)$ выполнены следующие соотношения: $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ |\lambda| = 1,\ |\mu| \ne 1$;

(h3) существуют дизъюнктные окрестности $U_0, \dots, U_{m-1}$ точек $p_0, \dots, p_{m-1}$ с локальными координатами $y_j = (v_j, w_j)$ при $0 \le j \le m-1$, обладающие следующими свойствами:

(h3.1) $p_j = (0,0)$ в системе координат y_j;

(h3.2) существует такое число $a > 0$ (не зависящее от индекса j), что для множеств

$$V_j = \{(v_j, w_j) \mid |v_j| \le a,\ |w_j| \le a\}$$

выполняются включения

$$V_j \subset U_j, \quad h(V_j) \subset U_{j+1}, \quad \text{где } 0 \le j \le m-1$$

(как обычно, мы полагаем, что $U_m = U_0$);

(h3.3) Сужение $h_j = h|_{V_j}$ определяется формулой

$$h_j(v_j, w_j) = (r_j v_j, s_j w_j) \text{ для } (v_j, w_j) \in V_j, \quad 0 \le j \le m-1,$$

где $r_j, s_j \in \mathbb{R},\ r_0 \cdots r_{m-1} = \lambda,\ s_0 \cdots s_{m-1} = \mu.$

Таким образом, мы предположили, что диффеоморфизм h линеен в малых окрестностях точек p_j и у матрицы $Dh^m(p)$ одно из собственных чисел лежит на единичной окружности, а другое не лежит на ней. Ясно, что этого всегда можно добиться сколь угодно C^1-малым возмущением диффеоморфизма f.

Возможны следующие два подслучая:

а) $|\mu| > 1$.

Выберем число $c \in (0, a/3)$ и рассмотрим отображение $F : M \mapsto M$, совпадающее с диффеоморфизмом h вне множества V_0, а внутри V_0 определяемое следующей формулой:

$$F(v_0, w_0) = (r_0 t(v_0), s_0 w_0) \quad \text{при } (v_0, w_0) \in V_0, \tag{4.11}$$

где $t(v)$ — это нечетная непрерывно-дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

(t1) $t(v) = v$ при $|v| \leq c$ или $|v| \geq 3c$,

(t2) $|t(v)| > |v|$ при $c < |v| < 3c$.

Очевидно, что при достаточно малом c найдется нечетная непрерывно-дифференцируемая функция $t(v)$, обладающая свойствами (t1) и (t2), для которой соответствующее отображение F является диффеоморфизмом, содержащимся в W, и выполняется включение $F(V_0) \subset U_1$.

Рассмотрим компакты

$$A_0 = \{(v_0, 0) \in V_0 \mid |v_0| \leq c\} \text{ и } A = A_0 \cup F(A_0) \cup \ldots \cup F^{m-1}(A_0).$$

На рисунке 5 показано как диффеоморфизм F действует в малой окрестности компакта A. Под действием диффеоморфизма F отрезок A_0 переходит в отрезок $F(A_0)$, под действием F^{m-1} он переходит в отрезок $F^{m-1}(A_0)$, а под действием диффеоморфизма F^m отрезок A_0 переходит в себя. Компакт A — это объединение m отрезков $A_0,\ F(A_0),\ \ldots,\ F^{m-1}(A_0)$.

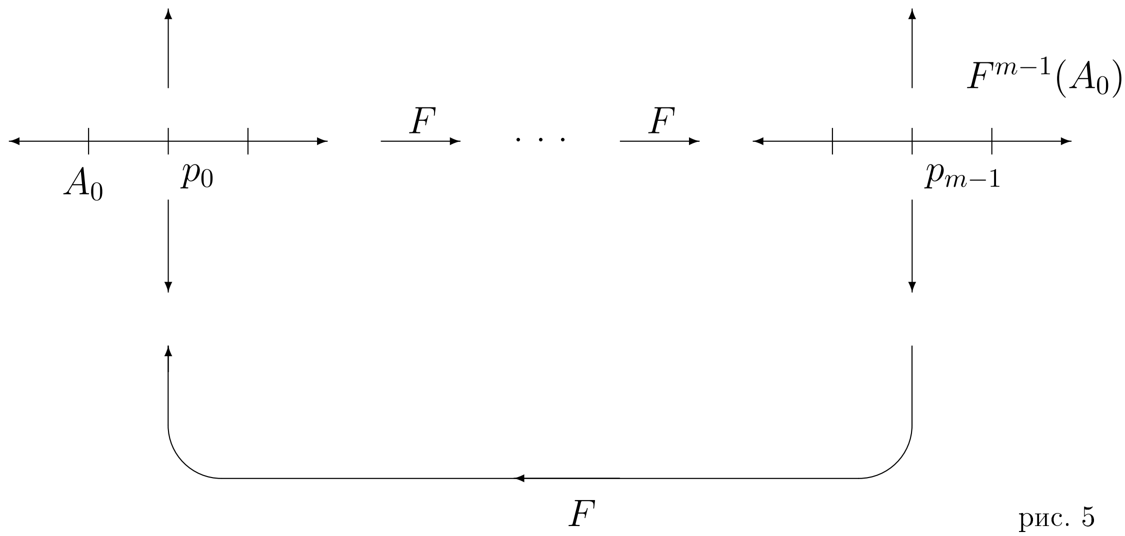

рис. 5

Докажем, что компакт A обладает следующими свойствами:

(r1) он инвариантен относительно диффеоморфизма F;

(r2) для любой окрестности U компакта A найдется такая окрестность V, что $F^{-k}(V) \subset U$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

(r3) существует такая окрестность Δ компакта A, что $F^k(q) \longrightarrow A$ при $k \to -\infty$ для любой точки $q \in \Delta$.

Компакт A, обладающий свойствами (r1)–(r3), называется репеллером.

По построению диффеоморфизма F,

$$F^m(A_0) = \{(\lambda v, 0) \mid |v| \leq c\} = \{(v, 0) \mid |v| \leq c\} = A_0.$$

Следовательно, для компакта A выполняется свойство (r1).

Докажем, что для компакта A выполняется свойство (r2).

Без ограничения общности можно считать, что множество U имеет следующий вид:

$$U = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{(v_j, w_j) \in V_j \mid |v_j| < d_1, |w_j| < d_2\},$$

где числа d_1 и d_2 достаточно малы. Рассмотрим множество

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{(v_j, w_j) \in V_j \mid |v_j| < 2c, |w_j| < a\}.$$

Так как нас интересуют сколь угодно малые окрестности U, будем считать, что $U \subset \Delta$.

Определим окрестность V следующим образом:

$$V = U \cap F(U) \cap \ldots \cap F^{m-1}(U).$$

Зафиксируем произвольные числа $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. В силу свойств функции $t(v)$, имеет место равенство

$$F^{-km}(v, w) = \left(\lambda^{-k} t^{-k}(v), \mu^{-k} w\right) \quad \text{при } (v, w) \in U.$$

Таким образом, выполняется включение

$$F^{-km}(U) \subset U.$$

Следовательно, имеют место включения

$$V \subset F^j(U) \subset F^{km+j}(U).$$

В силу произвольности выбора чисел k и j, выполняется свойство (r2).

Нетрудно видеть, что, по построению диффеоморфизма F и функции t, для компакта A и определенной выше окрестности Δ выполняется свойство (r3) (см. рис. 5). Таким образом, компакт A является репеллером.

Для завершения доказательства первого случая нам понадобится следующее утверждение:

Утверждение 4. *Если компакт A является репеллером для диффеоморфизма F и существует такая точка y, что $\omega(y) \cap A \neq 0$, то $y \in A$.*

Доказательство утверждения 4. Для достижения противоречия предположим, что $y \notin A$. Тогда найдется окрестность U компакта A, не содержащая точку y. По окрестности U выберем окрестность V из свойства (r2).

По условию, найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что $F^k(y) \in V$. Тогда по свойству (r2),

$$y \in F^{-k}(V) \subset U,$$

что противоречит нашим предположениям.

Следовательно, $y \in A$. $\square$

Построим последовательность $\{x_k\}_{k\geq 0} \subset A_0$ следующим образом:

<u>шаг 1</u> : $x_0 = (-c, 0),\ x_1 = (0, 0),\ x_2 = (c, 0);$

<u>шаг 2</u> : $x_3 = (c, 0),\ x_4 = (c/2, 0),\ x_5 = (0, 0),$

$$x_6 = (-c/2, 0),\ x_7 = (-c, 0);$$

и т. д.

На k-м шаге мы "проходим" все точки вида

$$\left(\frac{lc}{2^{k-1}}, 0\right), \quad l \in \left\{-2^{k-1}, \ldots, 2^{k-1}\right\},$$

после каждого шага меняя направление обхода на противоположное.

Рассмотрим последовательность

$$\xi = \{y_k\}_{k \geq 0} \subset A, \quad y_k = F^k(x_k).$$

Покажем, что для последовательности ξ выполняется соотношение $(*)$. Рассмотрим число

$$\tau = \max_{0 \leq j \leq m-1} r_j.$$

Тогда, по конструкции диффеоморфизма F,

$$\mathrm{dist}(y_{k+1}, F(y_k)) = \mathrm{dist}(F^{k+1}(x_{k+1}), F^{k+1}(x_k)) \leq$$

$$\leq \tau^{m-1}\mathrm{dist}(x_{k+1}, x_k) \longrightarrow 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

то есть для диффеоморфизма F выполнено соотношение $(*)$.

Так как $F \in \mathrm{WLmSP}$, найдется такая точка $y \in M$, что

$$\omega(y) \supset \omega(\xi). \tag{4.12}$$

По построению, $\omega(\xi) = A$. Таким образом, мы находимся в условиях утверждения 4. Следовательно, $y \in A$.

По построению множества A, найдется такая точка $(v, 0) \in A_0$, что

$$y = F^j(v, 0) \quad \text{при } 0 \leq j \leq m-1.$$

Тогда

$$F^{km-j}(y) = (\lambda^k t^k(v), 0) = (\lambda^k v, 0) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

Мы видим, что траектория $O(y, F)$ состоит не более чем из $2m$ точек. (Напомним, что $\lambda = \pm 1$.) Следовательно, $\omega(\xi) = A \not\subset \omega(y)$, то есть мы получили противоречие с включением (4.12).

б) $|\mu| < 1$.

Определим множества

$$A_0 = \left\{(v_0, 0) \in V_0 \mid |v_0| \leq \frac{a}{2}\right\}, \quad A = A_0 \cup h(A_0) \cup \ldots \cup h^{m-1}(A_0)$$

$$\text{и } V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{m-1}.$$

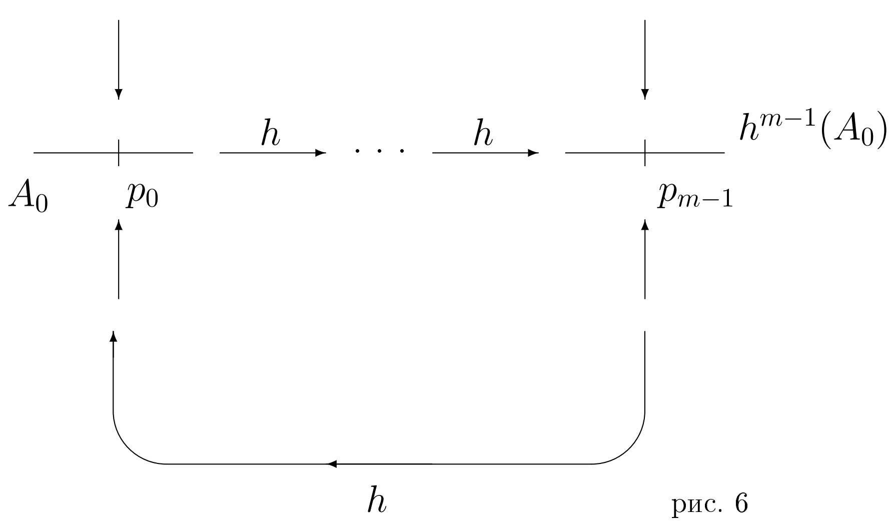

рис. 6

На рисунке 6 показано, как действует диффеоморфизм h в малой окрестности компакта A. Таким образом, под действием диффеоморфизма h отрезок A_0 переходит в отрезок $h(A_0)$, под действием h^{m-1} он переходит в отрезок $h^{m-1}(A_0)$, а под действием диффеоморфизма h^m отрезок A_0 переходит в себя. Компакт A — это объединение m отрезков $A_0,\ h(A_0),\ \ldots,\ h^{m-1}(A_0)$.

Так же, как в пункте а), построим такую всюду плотную в компакте A_0 последовательность $\{x_k\}$, что

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, x_k) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Как и в пункте а), рассмотрим последовательность

$$\xi = \{y_k\}, \quad y_k = h^k(x_k).$$

Непосредственно из построения последовательности $\{x_k\}$ видно, что последовательность ξ плотна в A. Точно так же, как в пункте а), доказывается, что для последовательности ξ выполняется условие $(*)$. Так как $h \in \mathrm{WLmSP}$, существует точка $y \in M$, для которой выполняется включение (4.12).

Без ограничения общности будем считать, что $y \in V$. Тогда найдутся такие $|v| \le a$ и $|w| \le a$, что $y = (v, w)$. Следовательно,

$$h^{2mk}(y) = \big(\lambda^{2k} v, \mu^{2k} w\big) = \big(v, \mu^{2k} w\big) \longrightarrow (v, 0) \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Мы видим, что множество $\omega(y)$ состоит не более чем из $2m$ точек. Следовательно, $\omega(\xi) = A \not\subset \omega(y)$, то есть мы получили противоречие с включением (4.12).

Случай II. λ — комплексное число.

Выберем такой диффеоморфизм $h \in W$, что собственные числа λ и $\overline{\lambda}$ матрицы $Dh^m(p)$ являются корнями степени ν из 1 и выполняются свойства (h1) и (h3), причем свойство (h3.3) модифицируется следующим образом:

(h3.3′) если $y_j = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j))$, где $\rho_j \geq 0$, $\theta_j \in [0, 2\pi)$, то сужение $h_j = h|_{V_j}$ определяется по следующей формуле:

$$h_j(y_j) = (r_j \rho_j \cos(\theta_j + \chi_j), r_j \rho_j \sin(\theta_j + \chi_j)),$$

где

$$(r_0 \cdot \ldots \cdot r_{m-1})^\nu = 1, \quad \nu(\chi_0 + \ldots + \chi_{m-1}) \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

для $0 \leq j \leq m-1$.

Таким образом, мы предположили, что диффеоморфизм h линеен в малых окрестностях точек p_j и собственные числа матрицы $Dh^m(p)$ являются корнями из единицы. Ясно, что этого всегда можно добиться сколь угодно C^1-малым возмущением диффеоморфизма f.

Так же, как в пункте б), определим множество V. Рассмотрим компакты

$$A_0 = \left\{(\rho_0, 0) \in V_0 \mid |\rho_0| \leq \frac{a}{2}\right\} \text{ и } A = A_0 \cup h(A_0) \cup \ldots \cup h^{\nu m-1}(A_0).$$

Компакт A_0 — это небольшой отрезок с центром в точке $p = p_0$. На рисунке 7 показаны траектории точек компакта A_0 диффеоморфизма h. Под действием диффеоморфизма h^{m-1} отрезок A_0 с центром в точке p_0 переходит в отрезок $h^{m-1}(A_0)$

с центром в точке p_{m-1}, под действием диффеоморфизма h^m он переходит в отрезок $h^m(A_0)$ с центром в точке p_0, под действием диффеоморфизма $h^{\nu m-1}$ он переходит в отрезок $h^{\nu m-1}(A_0)$ с центром в точке p_{m-1}, а под действием диффеоморфизма $h^{\nu m}$ отрезок A_0 с центром в точке p_0 переходит в себя. Компакт A — это объединение νm отрезков $A_0,\ h(A_0),\ \ldots,\ h^{\nu m-1}(A_0)$ (то есть всех отрезков на рисунке 7). В малых окрестностях точек $p_0,\ \ldots,\ p_{m-1}$ диффеоморфизм h^m действует как поворот, и диффеоморфизм $h^{\nu m}$ совпадает с тождественным.

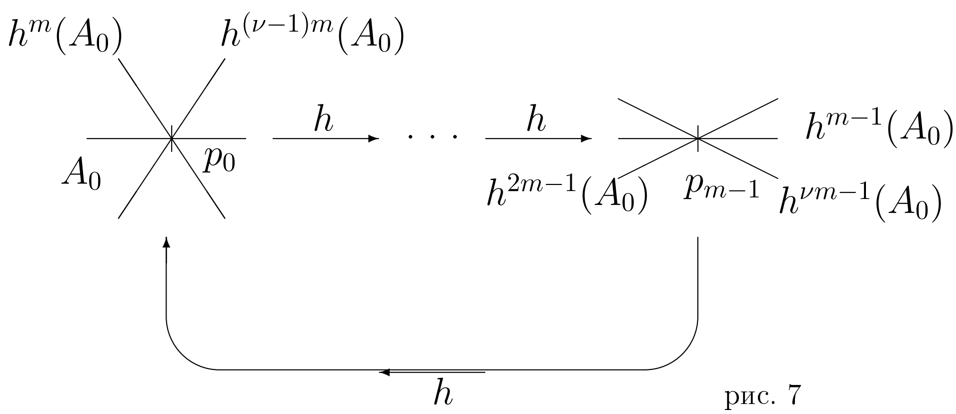

рис. 7

Так же, как в пункте а), построим такую всюду плотную в компакте A_0 последовательность $\{x_k\}$, что

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, x_k) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Как и в пункте а), рассмотрим последовательность

$$\xi = \{y_k\}, \quad y_k = h^k(x_k).$$

Непосредственно из построения последовательности $\{x_k\}$ видно, что последовательность ξ плотна в A. Так же, как и в пункте а) доказывается, что для последовательности ξ выполняется соотношение $(*)$. Так как $h \in \mathrm{WLmSP}$, найдется точка $y \in M$, для которой выполняется включение (4.12).

Без ограничения общности будем считать, что $y \in V$. Тогда найдутся такие $0 \leq \rho_j \leq a$ и $\theta_j \in [0, 2\pi)$, что $y = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j))$.

Следовательно, в силу свойства (h3.3′),

$$h^{mk\nu}(y) = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j)) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

Мы видим, что траектория $O(y, h)$ состоит не более чем из $m\nu$ точек. Следовательно, $A = \omega(\xi) \not\subset \omega(y)$, что противоречит включению (4.12).

Итак, во всех возможных случаях мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) \setminus \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP}) = \varnothing$. $\square$

Список литературы

[1] *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Труды 5-й Межд. конф. по нелин. колеб. Киев. 1970. Т. 2. С. 39–45.

[2] *Городецкий А. С.* Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических си-

стем. Текст диссертации, МГУ им. Ломоносова, мех-мат, 2001, 77 с.

[3] *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем. // Функц. анализ и прил. 1999. Т. 33. №2. С. 16–30.

[4] *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом. // Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 231. С. 96–118.

[5] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999. 768 с.

[6] *Клепцын В. А., Нальский М. Б.* Устойчивость существования негиперболических мер для C^1-диффеоморфизмов. // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41. №4. С. 30–45.

[7] *Пилюгин С. Ю.* Пространства динамических систем. Reg. Chaotic Dynamics, Москва-Ижевск, 2008, 270 с.

[8] *Aoki N.*, The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 23, 1992, P. 21–65.

[9] *Bonatti Ch., Diaz L. J., Turcat G.* Pas de "shadowing lemma" pour les dynamiques partiellement hyperboliques // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I, Math. 2000. Vol. 330. P. 587–592.

[10] *Bowen R.* Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lect. Notes. Math. Vol. 470. Springer-Verlag.

Berlin. 1975. 108 p.

[11] *Crovisier S.* Periodic orbits and chain-transitive sets of C^1-diffeomorphisms // Publ. Math. de LI'HÉS. 2006. Vol. 104. №1. P. 87–141.

[12] *Eirola T., Nevanlinna O., Pilyugin S. Yu.* Limit shadowing property // Numer. Funct. Anal. Optim. 1997. Vol. 18. P. 75–92.

[13] *Gorodetski A.* Regularity of central leaves of partially hyperbolic sets and its applications // Izv. RAN (The Newslet. of the Rus. Acad. of Science). 2006. Vol. 70. №6. P. 52–78.

[14] *Hayashi S.* Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A // Ergod. Theory Dyn. Syst., Vol. 12, 1992, P. 233–253.

[15] *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant Manifolds, Lect. Notes in Math., Vol. 583. Springer-Verlag. Berlin-New York. 1977. 149 p.

[16] *Kośćielniak P.*, On genericity of shadowing and periodic shadowing property // J. Math. Anal. Appl., Vol. 310, 2005, P. 188–196.

[17] *Mãné R.* Contributions to the stability conjecture // Topology, 1978. Vol. 17, P. 383–396.

[18] *Palmer K.* Shadowing in Dynamical Systems. Dordrecht-Boston-London. 2000. 299 p.

[19] *Plamenevskaya O. B.*, Weak shadowing for two-dimensional diffeomorphisms // Mat. Zametki, Vol. 65, 1999, P. 477–480.

[20] *Pilyugin S. Yu.* Sets of diffeomorphisms with various limit shadowing properties // J. Dyn. Differ. Equat. 2007. Vol. 19. P. 747–775.

[21] *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in Dynamical Systems, Lect. Notes in Math. Vol. 1706. Springer-Verlag. Berlin. 1999. 283 p.

[22] *Pilyugin S. Yu.* Variational shadowing // Discr. Contin. Dyn. Syst. (accepted).

[23] *Pilyugin S. Yu., Plamenevskaya O. B.* Shadowing is generic // Topol. and its Appl. 1999. Vol. 97. P. 253–266.

[24] *Pilyugin S. Yu., Rodionova A. A., Sakai K.* Orbital and weak shadowing properties // Discr. Contin. Dyn. Systems. 2003. Vol. 9. P. 287–308.

[25] *Pilyugin S. Yu., Sakai K., Tarakanov O. A.* Transversality properties and C^1-open sets of diffeomorphisms with weak shadowing // Discr. Contin. Dyn. Systems, 2006, Vol. 16, N 4, P. 871–882.

[26] *Pilyugin S. Yu., Tikhomirov S. B.* Lipschitz shadowing implies structural stability (to appear).

[27] *Sakai K.* Diffeomorphisms with weak shadowing // Fund. Math., 2001. Vol. 168, P. 53–75.

[28] *Sakai K.* Pseudo orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms of closed manifolds // Osaka J. Math. 1994. Vol. 31. P. 373–386.

[29] *Walters P.* An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag. 1982. 250 p.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Осипов А. В.* Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1-топологии // Алгебра и анализ, 2010, Т. 22, С. 127–163.

[2] *Осипов А. В.* Слабые предельные свойства отслеживания динамических систем на двумерных многообразиях // Электр. журн. Диф. ур-я и проц. упр-я., 2006. N 4, С. 1–16.

[3] *Осипов А. В.* C^1-неплотность орбитального свойства отслеживания // Зап. межд. конф. совр. пробл. матем. и прил., Москва, Унив. книга, 2009, С. 183–184.

[4] *Osipov A. V.* Lipschitz Periodic Shadowing // Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial, St. Petersburg, 2010, P. 58–59.

[5] *Osipov A. V., Pilyugin S. Yu., Tikhomirov S. B.* Periodic shadowing and Ω-stability // Reg. Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, N 2–3, P.406–419.