

Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Cholesky-Zerlegung $A = L \cdot L^T$ berechnen

Rechenweg:

Algorithm 1 Cholesky-Zerlegung

```

function CHOLESKY( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )
   $L = \{ 0 \} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ▷ Initialisiere  $L$ 
  for ( $k = 1$ ;  $k \leq n$ ;  $k++$ ) do
     $L_{k,k} = \sqrt{A_{k,k} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{k,i}^2}$ 
    for ( $i = k + 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ ) do
       $L_{i,k} = \frac{A_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{i,j} \cdot L_{k,j}}{L_{k,k}}$ 
    end for
  end for
  return  $L$ 
end function

```

Lösung: $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe b)

Gesucht: $\det(A)$

Sei $P \cdot A = L \cdot R$, die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(R)}{\det(P)}$$

$\det(L) = 1$, da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine strikte untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \dots \cdot r_{nn}$, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) \in \{1, -1\}$

Das Verfahren ist also:

Algorithm 2 Determinante berechnen

Require: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$P, L, R \leftarrow \text{LRZERL}(A)$

$x \leftarrow 1$

for i in $1..n$ **do**

$x \leftarrow x \cdot r_{ii}$

$x \leftarrow x \cdot p_{ii}$

end for

Alternativ kann man auch in einer angepassten LR-Zerlegung direkt die Anzahl an Zeilenvertauschungen zählen. Dann benötigt man P nicht mehr. Ist die Anzahl der Zeilenvertauschungen ungerade, muss das Produkt der r_{ii} negiert werden.

Aufgabe 2

Voraussetzung: Gegeben sei eine Funktion F :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ F(x) &:= \cos(x) \end{aligned}$$

sowie eine Folge $(x)_k$ mit $x_{k+1} := F(x_k)$.

Behauptung: $\exists! x^* : \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

Beweis: über den Banachschen Fixpunktsatz.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Also genügt es $x \in [-1, 1]$ auf der Suche nach Fixpunkten zu betrachten.

Sei nun $x \in [-1, 0)$. Dann gilt: $\cos(x) > 0$. Da $x < 0$ aber $F(x) > 0$, kann kein Fixpunkt in $[-1, 0)$ sein. Es genügt also sogar, nur $[0, 1]$ zu betrachten.

Sei $0 \leq x < y \leq 1$. Dann folgt:

$$\stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\Rightarrow} \exists L \in (x, y) : \frac{\cos(y) - \cos(x)}{y - x} = f'(L) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \exists L \in [0, 1] : \|\cos y - \cos x\| = \|- \sin(L) \cdot (y - x)\| \quad (2)$$

$$= \underbrace{\sin(L)}_{[0,1]} (y - x) \quad (3)$$

$$\Rightarrow F \text{ ist Kontraktion auf } [0,1] \quad (4)$$

Da $F|_{[0,1]}$ eine Selbstabbildung und eine Kontraktion ist und offensichtlich $[0, 1]$ abgeschlossen ist, greift der Banachsche Fixpunktsatz. Es folgt direkt, dass auch für alle $x \in [0, 1]$ die Folge $(x)_k$ gegen den einzigen Fixpunkt x^* konvergiert. \square

Teil 1: Fixpunkte können nur in $[0, 1]$ sein.

Teil 2: F ist auf $[0, 1]$ eine Kontraktion

Anmerkung

Um zu zeigen, dass es genau einen Fixpunkt x^* in $(0, 1)$ gibt, braucht man den Banachschen Fixpunktsatz nicht. Nur um zu zeigen, dass die Fixpunktiteration auf für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen diesen Fixpunkt x^* konvergiert, braucht man ihn.

So kann man die existenz eines Fixpunktes zeigen:

Offensichtlich ist $F(0) \neq 0$ und $F(1) \neq 1$, also ist der Fixpunkt - falls vorhanden - in $(0, 1)$. F ist in $(0, 1)$ stetig und streng monoton fallend. Da auch $-x$ in $(0, 1)$ streng monoton fallend ist, folgt, dass $\cos(x) - x$ in $(0, 1)$ streng monoton fallend ist.

$$x = 0 \Rightarrow \cos(x) - x = \cos(0) - 0 = 1$$

$$x = 45^\circ = \frac{1}{4}\pi < 1 \Rightarrow \cos(45^\circ) - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0, \text{ da}$$

$$8 < 9 < \pi^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{8} < \pi \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \pi \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists x^* : \cos(x^*) - x^* = 0 \Leftrightarrow \exists x^* : \cos(x^*) = x^*$.

Dieses x^* ist eindeutig, da $\cos(x) - x$ *streng* monoton fallend ist.

Aufgabe 3

Gegeben:

f_i	7	1	-1	7
x_i	-1	0	1	2

Teilaufgabe a)

Allgemein lauten Lagrange-Polynome:

$$L_i = \frac{\overbrace{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}^{\text{Produkt der Nullstellen}}}{\underbrace{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}_{\text{Normalisierungsfaktor}}}$$

Im speziellen:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \quad (9)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \quad (10)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \quad (11)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \quad (12)$$

Durch die Interpolationsformel von Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

ergibt sich

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad (13)$$

Anmerkung: Es ist nicht notwendig die Monomdarstellung zu berechnen. In diesem Fall hat es jedoch das Endergebnis stark vereinfacht.

Teilaufgabe b)

Für die Berechnung der dividierten Differenzen gilt allgemein:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{(i+k)-1}] - f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}} \quad (14)$$

In diesem Fall bedeutet das konkret:

$$f[x_0] = 7, \quad f[x_1] = 1, \quad f[x_2] = -1, \quad f[x_3] = 7 \quad (15)$$

$$f[x_0, x_1] = -6, \quad f[x_1, x_2] = -2, \quad f[x_2, x_3] = 8 \quad (16)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 2, \quad f[x_1, x_2, x_3] = 5 \quad (17)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \quad (18)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$p(x) = 7 + (x - \underbrace{(-1)}_{x_0}) \cdot (-6) + (x - \underbrace{(-1)}_{x_0}) \cdot (x - \underbrace{(0)}_{x_1}) \cdot 2 + (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \quad (19)$$

(Siehe erste Spalte mit x_0)

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber $c_1 = 0$ gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da $c_1 = 0$ gilt, muss $c_3 = 1$ sein (Symmetrie). Und dann muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x) dx \quad (20)$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, \quad (21)$$

$$b_2 = \frac{4}{6}, \quad (22)$$

$$b_3 = \frac{1}{6} \quad (23)$$

Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (24)$$

ist. Wenn diese nun auf N Intervalle aufgefittet wird gilt folgendes:

$$h = \frac{(b-a)}{N} \quad (25)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h) + 4 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} f\left(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h\right) \right] \quad (26)$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h)$ steht für die Grenzknoten (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt $N - 2$ Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen a und b nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)$ sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es N Stück.

Teilaufgabe c)

Diese Aufgabe ist nicht relevant, da Matlab nicht Klausurrelevant ist.

Aufgabe 5

Zunächst ist nach der Familie von Quadraturformeln gefragt, für die gilt: ($p :=$ Ordnung der QF)

$$s = 3 \quad (27)$$

$$0 = c_1 < c_2 < c_3 \quad (28)$$

$$p \geq 4 \quad (29)$$

Nach Satz 29 sind in der Familie genau die QFs, für die gilt:
Für alle Polynome $g(x)$ mit $\text{Grad} \leq m - 1$ gilt:

$$\int_0^1 M(x) \cdot g(x) dx = 0 \quad (30)$$

Da eine Quadraturformel höchstens $\text{Grad } 2s = 6$ (Satz 30) haben kann und es wegen $c_1 = 0$ nicht die Gauss-Quadratur sein kann (Satz 31), kommt nur Ordnung $p = 4$ und $p = 5$ in Frage.

In dieser Aufgabe sind nur die symmetrischen QF, also die von Ordnung $p = 4$ explizit anzugeben. Für die QF von Ordnung $p = 5$ hätte man nur die Gewichte in Abhängigkeit der Knoten darstellen müssen und

eine Bedingung nur an die Knoten herleiten müssen.

Ordnung 4

Es gilt $g(x) = c$ für eine Konstante c , da $\text{Grad}(g(x)) = 0$ ist. Also ist 30 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot c dx = 0 \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 M(x) dx = 0 \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 M(x) dx = 0 \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) dx = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_3) + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot c_3 = 0 \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot c_3}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot c_3} = c_2 \quad (36)$$

Natürlich müssen auch die Gewichte optimal gewählt werden. Dafür wird Satz 28 genutzt: Sei $b^T = (b_1, b_2, b_3)$ der Gewichtsvektor. Sei zudem $C :=$

$$\begin{pmatrix} c_1^0 & c_2^0 & c_3^0 \\ c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: C ist invertierbar und $b = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Es gibt genau eine symmetrische QF in der Familie. Begründung:

Aus $c_1 = 0$ folgt, dass $c_3 = 1$ ist. Außerdem muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Also sind die Knoten festgelegt. Da wir die Ordnung $\geq s = 3$ fordern, sind auch die Gewichte eindeutig.

Es handelt sich um die aus der Vorlesung bekannte Simpsonregel.

Ordnung 5

Es gilt $g(x) = ax + c$ für Konstanten $a \neq 0, c$, da $\text{Grad}(g(x)) = 1$ ist. Also ist 30 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot (ax + c) dx = 0 \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^1 x M(x) dx + c \int_0^1 M(x) dx = 0 \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^1 x(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) dx + c \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) dx = 0 \quad (39)$$

$$\stackrel{c_1=0}{\Leftrightarrow} a \int_0^1 x^2(x - c_2)(x - c_3) dx + c \int_0^1 x(x - c_2)(x - c_3) dx = 0 \quad (40)$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{c_2 c_3}{3} - \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{4} + \frac{1}{5} \right) + c \left(\frac{c_2 c_3}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (41)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_2 c_3}{3} - \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{4} + \frac{1}{5} \right) + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:d} \left(\frac{c_2 c_3}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (42)$$

Nun habe ich Wolfram|Alpha lösen lassen:

$$c_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \approx 0.355 \quad (43)$$

$$c_3 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \approx 0.845 \quad (44)$$

Wegen der Ordnungsbedingungen gilt nun:

$$1 = b_1 + b_2 + b_3 \quad (45)$$

$$\frac{1}{2} = b_2 \cdot \frac{6 - \sqrt{6}}{10} + b_3 \cdot \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \quad (46)$$

$$\frac{1}{3} = b_2 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^2 + b_3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^2 \quad (47)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - b_3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^2 = b_2 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^2 \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} - b_3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^2}{\left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^2} = b_2 \quad (49)$$

$$\Leftrightarrow b_2 = \frac{100}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})^2} - b_3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{6})^2}{(6 - \sqrt{6})^2} \quad (50)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{100}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})^2} - b_3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{6})^2}{(6 - \sqrt{6})^2} \right) \cdot \frac{6 - \sqrt{6}}{10} + b_3 \cdot \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \quad (51)$$

$$= \left(\frac{10}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})} - b_3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{6})^2}{10 \cdot (6 - \sqrt{6})} \right) + b_3 \cdot \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \quad (52)$$

$$= b_3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} - \frac{(6 + \sqrt{6})^2}{10 \cdot (6 - \sqrt{6})} \right) + \frac{10}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})} \quad (53)$$

$$= b_3 \cdot \left(\frac{30 - (6 + \sqrt{6})^2}{10 \cdot (6 - \sqrt{6})} \right) + \frac{10}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})} \quad (54)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{10}{3 \cdot (6 - \sqrt{6})} = b_3 \cdot \left(\frac{30 - (6 + \sqrt{6})^2}{10 \cdot (6 - \sqrt{6})} \right) \quad (55)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot (6 - \sqrt{6}) - 20}{6 \cdot (6 - \sqrt{6})} = b_3 \cdot \left(\frac{30 - (6 + \sqrt{6})^2}{10 \cdot (6 - \sqrt{6})} \right) \quad (56)$$

$$\Leftrightarrow b_3 = \frac{(3 \cdot (6 - \sqrt{6}) - 20) \cdot 10 \cdot (6 - \sqrt{6})}{6 \cdot (6 - \sqrt{6}) \cdot (30 - (6 + \sqrt{6})^2)} \quad (57)$$

$$= \frac{(3 \cdot (6 - \sqrt{6}) - 20) \cdot 5}{3 \cdot (30 - (6 + \sqrt{6})^2)} \quad (58)$$

$$= \frac{15 \cdot (6 - \sqrt{6}) - 100}{90 - 3 \cdot (6 + \sqrt{6})^2} \quad (59)$$

$$\boxed{b_3 = \frac{16 - \sqrt{6}}{36}} \approx 0.3764 \quad (60)$$

$$\boxed{b_2 = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}} \approx 0.5125 \quad (61)$$

$$\text{Ordnungsbedingung 1} \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{1}{9}} \quad (62)$$

$$\frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{16 + \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^3 + \frac{16 - \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^3 \quad \checkmark \quad (63)$$

$$\frac{1}{5} \stackrel{?}{=} \frac{16 + \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^4 + \frac{16 - \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^4 \quad \checkmark \quad (64)$$

$$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{16 + \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{6}}{10} \right)^5 + \frac{16 - \sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{6}}{10} \right)^5 = \frac{33}{200} \quad \times \quad (65)$$