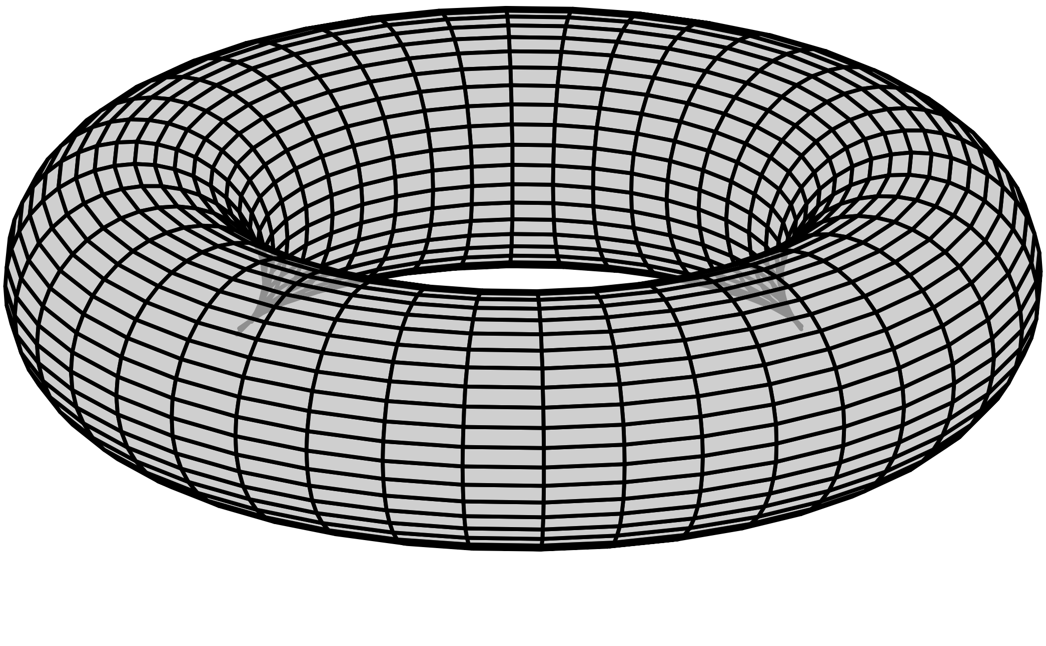
Geometrie und Topologie



Siehe GitHub

30. Oktober 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

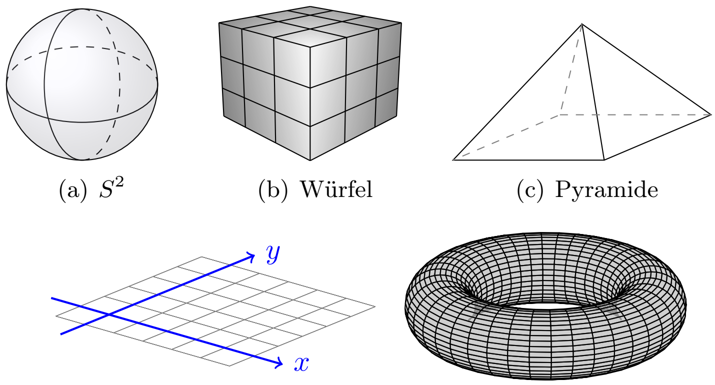
Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus. Für den $\mathbb{R}^2$ müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.



(a) S^2 (b) Würfel (c) Pyramide

(d) $\mathbb{R}^2$ (e) Torus

Abbildung 1.1: Beispiele für verschiedene Formen

1.2 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)
Betrachte $\emptyset$ und X mit der „trivialen Topologie“ $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$.

Es gilt: $X \in \mathfrak{T}$ und $\emptyset \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind offen. Außerdem $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. $\square$

Beispiel 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

   $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$
   Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$

2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum

3) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

4) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
   Beobachtungen:
   - $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
   - Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in $\mathfrak{T}_Z$

5) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

6) $X := \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$ heißt „Sierpińskiraum“.
   abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie
   $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$

2) $X = \mathbb{R}$, $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$

3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$
   $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

Beispiel 3
Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$.

Bemerkung 1
Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, für die $\mathfrak{B}$ Subbasis ist.

Definition 5
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Spurtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Definition 6
Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.
$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

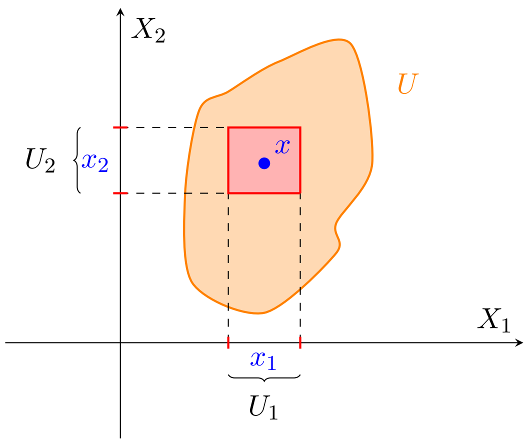


Abbildung 1.2: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
$\Rightarrow$ Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ überein.

2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. $\mathfrak{T}$ Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$: $U_1 \times U_2$
(Siehe Abb. 1.3)

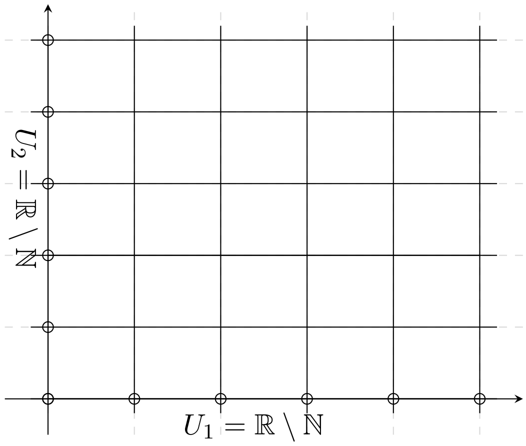


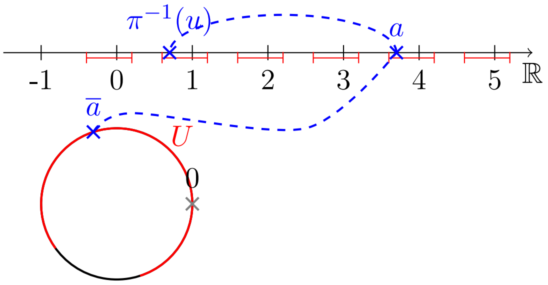
Abbildung 1.3: Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$

Definition 7

Sei X topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \to \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_\sim$, $U \subseteq \overline{X}$ heißt offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf $\overline{X}$ definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

Beispiel 5

$X = \mathbb{R}, a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$



$0 \sim 1$, d. h. $[0] = [1]$

Beispiel 6

$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

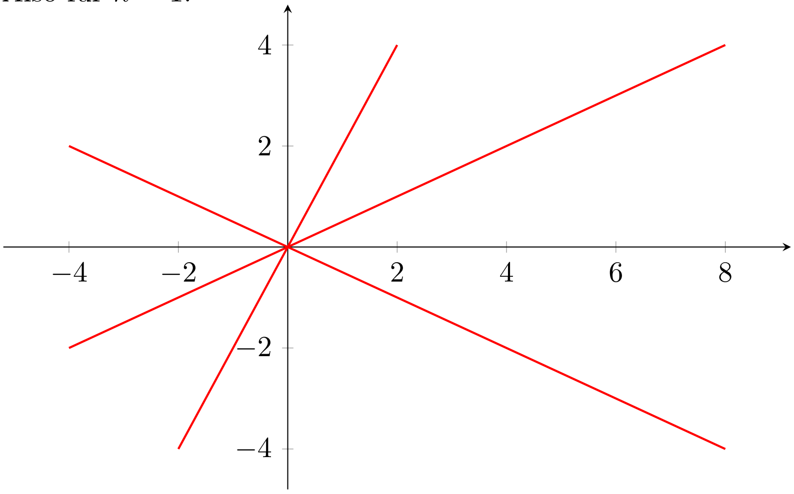
$X/_\sim$ ist ein Torus.

Beispiel 7

$$\begin{aligned} X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\, 0 \,\}, x \sim y &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \end{aligned}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für $n = 1$:



1.3 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x + z)$

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{\, y \in X \mid d(x, y) < r \,\} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$ ist Basis einer Topologie auf X.

Beispiel 8

Sei V ein euklidischer oder hermiteischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird V durch $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ zum metrischen Raum.

Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Dann heißt

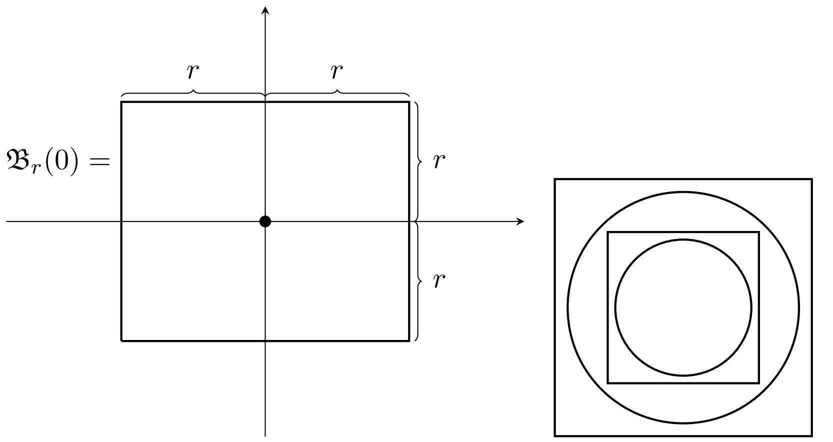
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$ und $d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

Beobachtung: d erzeugt die eukldische Topologie.

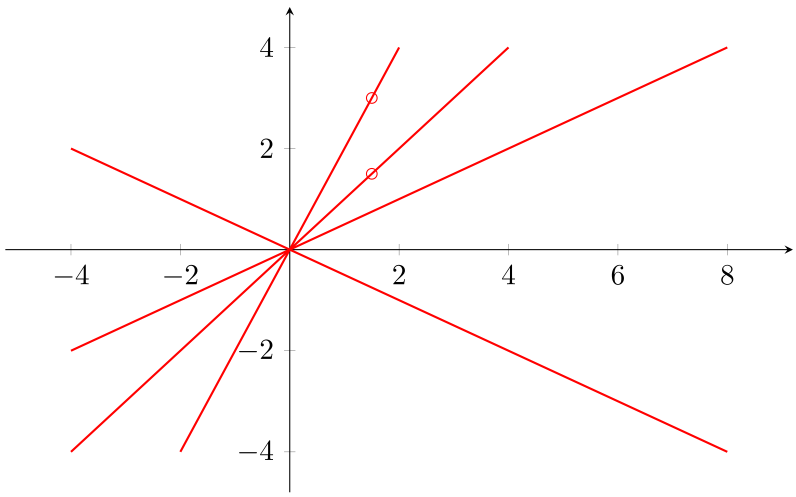


(a) $\mathfrak{B}_r(0)$ (b) Euklidische Topologie

Abbildung 1.4: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 11 (SNCF-Metrik[1])

$X = \mathbb{R}^2$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorfsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.

b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

Definition 10

Sei X ein topologischer Raum und $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n), wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

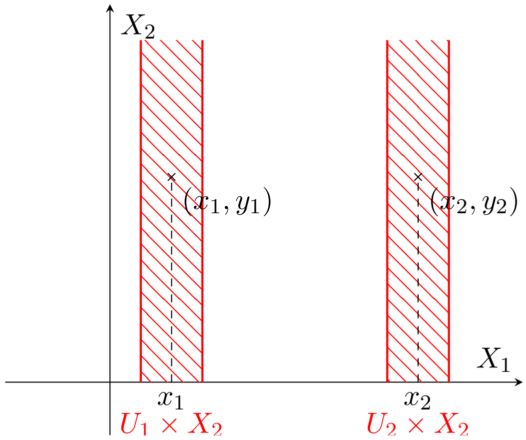


Abbildung 1.5: Wenn X_1, X_2 hausdorffsch sind, dann auch $X_1 \times X_2$

Korollar 1.2
Ist X hausdorffsch, so hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Annahme: x und y mit $x \neq y$ sind Grenzwerte der Folge (x_n).

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Nach Annahme gibt es n_0 mit $x_n \in U_x \cap U_y$ für alle $n \geq n_0 \Rightarrow$ Widerspruch ■

1.4 Stetigkeit

Definition 11
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt **stetig**, wenn für jedes offene $U \subseteq Y$ auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Korollar 1.3
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Dann gilt: f ist stetig $\Leftrightarrow$ zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(x, \varepsilon) > 0$, sodass für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $x \in X, \varepsilon > 0$ gegeben. Sei $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$. Dann ist U offen in Y. $\overset{11.a}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$ ist offen in X. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$. $\Rightarrow \exists \delta > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$ $\Rightarrow \{\, y \in X \mid d_X(x, y) < \delta \,\} \Rightarrow$ Beh.

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subseteq Y$ offen, $X \in f^{-1}(U)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ Es gibt $\delta > 0$, sodass $f(\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$ ■

Bemerkung 5
Eine Ableitung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(A) \subseteq X$ ist abgeschlossen.

Beispiel 12

1) Für jeden topologischen Raum X gilt: $\mathrm{Id}_X : X \to X$ ist Homöomorphismus.

2) Ist Y trivialer topologischer Raum, d.h. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

3) Ist X diskreter topologischer Raum, so ist $f : X \to Y$ stetig für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung f.

4) Sei $X = [0, 1), Y = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \}$ und $f(t) = e^{2\pi i t}$

Bild mit Kreis und Zahlenstrahl von 0 bis 1 einfügen

Die Umkehrabbildung g ist nicht stetig, da $g^{-1}(U)$ nicht offen ist (vgl. Bild TODO)

Korollar 1.4
Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen.

Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $U \subseteq Z$ offen $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. $g^{-1}(U)$ ist offen in Y weil g stetig ist, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ist offen in X, weil f stetig ist. ■

Bemerkung 6
Für jeden topologischen Raum ist $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$ eine Gruppe.

Bemerkung 7

a Jede Isometrie $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.

b $\text{Isom}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$ ist Untergruppe von $\text{Homöo}(X)$ für jeden metrischen Raum X.

Korollar 1.5
Seien X, Y topologische Räume. $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen

$$(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$$

Wird $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, so sind π_X und π_Y stetig.

Beweis: Sei $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$ ist offen in $X \times Y$. ■

Korollar 1.6
Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ der Bahnenraum versehen mit der Quotiententopologie, $\pi : X \to \overline{X}$, $x \mapsto [x]_\sim$.

Dann ist π stetig.

Beweis: Nach Definition ist $U \subseteq \overline{X}$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen

Beobachtung: Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass π stetig wird.

Beispiel 13 (Stereographische Projektion)
$\mathbb{R}^n$ und $S^n \setminus \{ N \}$ sind homöomorph für beliebiges $N \in S^n$

$$\begin{aligned} S^n &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right\} \end{aligned}$$

Sei ohne Einschränkung $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f : & S^n \setminus \{ N \} \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto & \quad \overbrace{L_P \cap H}^{\text{genau ein Punkt}} \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{n+1} = 0 \right\}$ und L_P die Gerade in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und P ist.

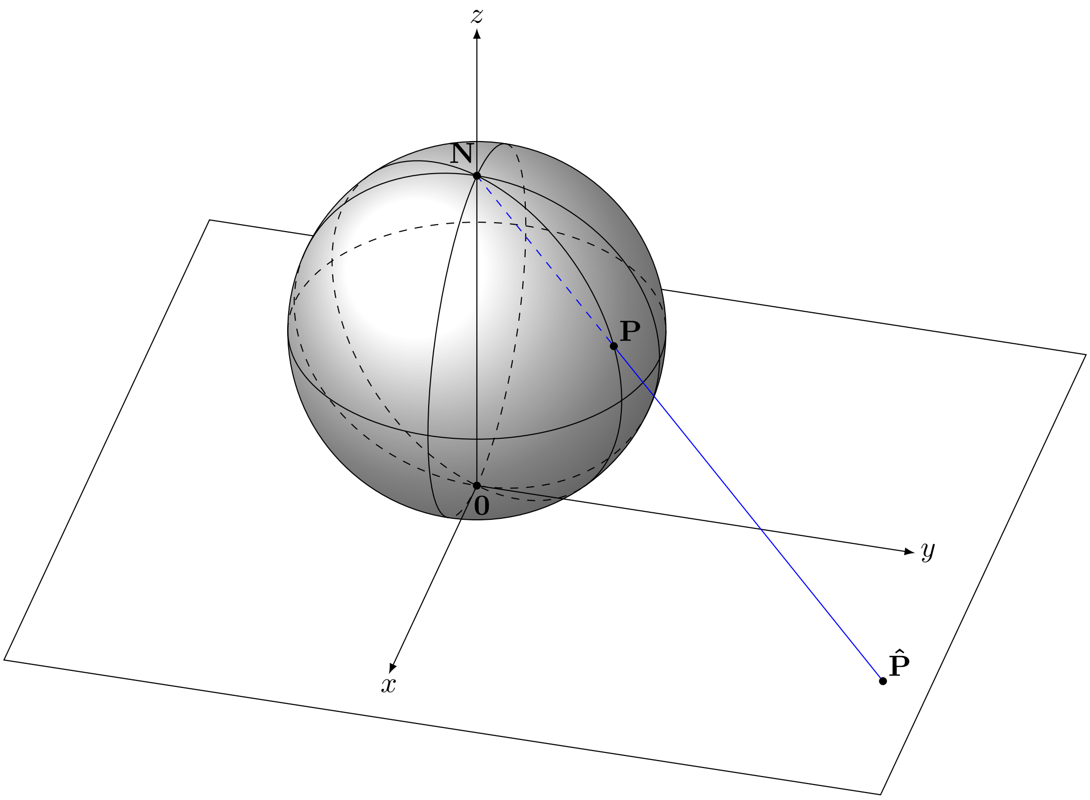


Abbildung 1.6: Visualisierung der sphärischen Projektion
Bildquelle: texample.net/tikz/examples/map-projections

Sei $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, so ist $x_{n+1} < 1$, also ist L_P nicht parallel zu H. Also schneiden sich L_P und H in genau einem Punkt $\hat{P}$.

Es gilt: f ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie.

$\mathfrak{B}_\delta(x)$ δ-Kugel um x.

$\mathfrak{T}$ Topologie.

$\mathbb{N}$ Natürliche Zahlen.

$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen.

$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen.

$\mathbb{R}$ Reele Zahlen.

$\mathbb{R}^\times$ Multiplikative Einheitengruppe von $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^+$ Echt positive reele Zahlen.

$\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen.

$\mathbb{P}$ Projektiver Raum.

$\overline{M}$ Abschluss der Menge M.

M° Inneres der Menge M.

∂M Rand der Menge M.

$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.

$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M.

$A \setminus B$ A ohne B.

$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.

$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.

$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von x bzgl. $\sim$.

$X/_\sim$ X modulo $\sim$.

$\|x\|$ Norm von x.

$|x|$ Betrag von x.

π_X Projektion auf X.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.

S^n Sphäre.

Index