

### **Graphentheorie I**

Martin Thoma | 2. Juli 2013

#### INSTITUT FÜR STOCHASTIK



### Inhalte



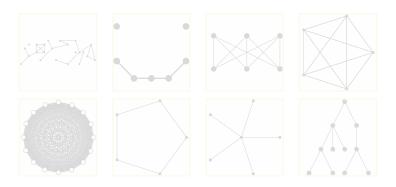
- Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

### Graph



#### Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K), wobei  $E \neq \emptyset$  die Eckenmenge und  $K \subseteq E \times E$  die Kantenmenge bezeichnet.

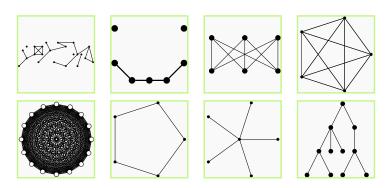


### Graph



#### Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E,K), wobei  $E\neq\emptyset$  die Eckenmenge und  $K \subseteq E \times E$  die Kantenmenge bezeichnet.



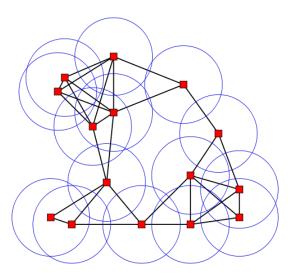
### Synonyme



# Knoten ⇔ Ecken

### Modellierung, Flüsse, Netzwerke





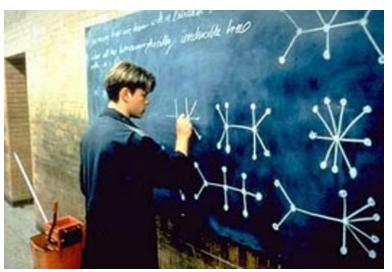
#### Karten





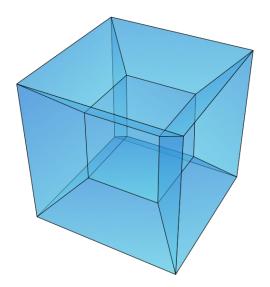
### **Good Will Hunting**





### **Graham's Number**





### Isomorphe Graphen



martin-thoma.de/uni/graph.html

#### Grad einer Ecke

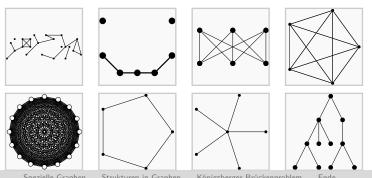


#### Grad einer Ecke

Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

#### Isolierte Ecke

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn isoliert.



Grundlagen 00000000000 Martin Thoma - Graphentheorie I

Spezielle Graphen

Strukturen in Graphen

Königsberger Brückenproblem

### **Schlinge**



### Schlinge

Sei G = (E, K) ein Graph und  $k = \{e_1, e_2\} \in K$  eine Kante.

k heißt **Schlinge** : $\Leftrightarrow e_1 = e_2$ 

Ein Graph ohne Schlingen heißt "schlingenfrei"







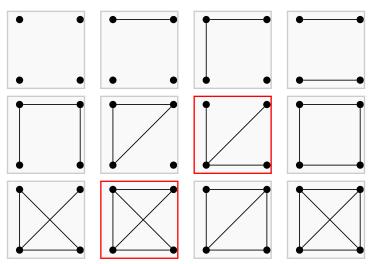




Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.



Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.

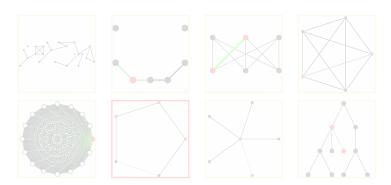


### Inzidenz



#### Inzidenz

Sei  $e \in E$  und  $k = \{e_1, e_2\} \in K$ . e heißt **inzident** zu  $k :\Leftrightarrow e = e_1$  oder  $e = e_2$ 

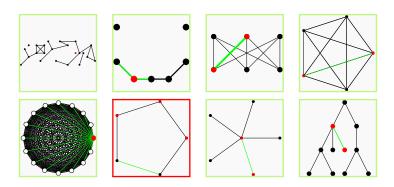


### Inzidenz



#### Inzidenz

Sei  $e \in E$  und  $k = \{e_1, e_2\} \in K$ . e heißt **inzident** zu  $k :\Leftrightarrow e = e_1$  oder  $e = e_2$ 



### Vollständige Graphen

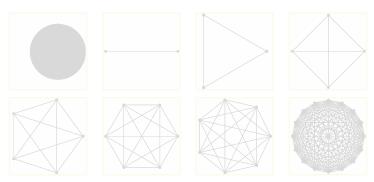


#### Vollständiger Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt vollständig : $\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ \{ e, e \} \mid e \in E \}$ 

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als  $K_n$  bezeichnet.



### Vollständige Graphen

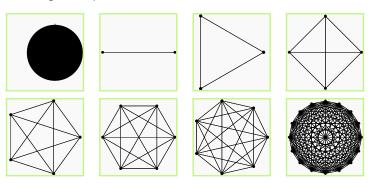


#### Vollständiger Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt vollständig : $\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ \{ e, e \} \mid e \in E \}$ 

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als  $K_n$  bezeichnet.



### **Bipartiter Graph**



### Bipartiter Graph

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A,B\subset E$  zwei disjunkte Eckenmengen mit  $E\setminus A=B.$ 

 ${\cal G}$  heißt **bipartit** 

 $:\Leftrightarrow \forall_{k=\{\ e_1,e_2\ \}\in K}: (e_1\in A\ \mathsf{und}\ e_2\in B)\ \mathsf{oder}\ (e_1\in B\ \mathsf{und}\ e_2\in A)$ 

















### Vollständig bipartiter Graph



#### Vollständig bipartiter Graph

Sei G = (E, K) ein bipartiter Graph und  $\{A, B\}$  bezeichne die Bipartition.

G heißt vollständig bipartit : $\Leftrightarrow A \times B = K$ 













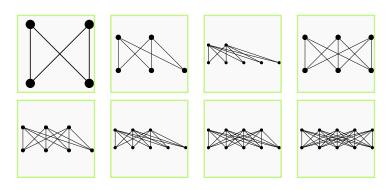




### Vollständig bipartite Graphen



Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition  $\{A, B\}$ bezeichnet man mit  $K_{|A|,|B|}$ .



00000



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der  $K_{m,n}$ ?

18/62



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der  $K_{m,n}$ ?

Ecken: m+n (1)

Kanten:  $m \cdot n$  (2)

## Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken



### Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei G = (E, K) ein Graph.

Dann heißt eine Folge  $k_1, k_2, \ldots, k_s$  von Kanten, zu denen es Ecken  $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_s$  gibt, so dass

- $k_1 = \{e_0, e_1\}$
- $k_2 = \{e_1, e_2\}$
- . . . .
- $k_s = \{e_{s-1}, e_s\}$

gilt ein Kantenzug, der  $e_0$  und  $e_s$  verbindet und s seine Länge.



### Geschlossener Kantenzug



### Geschlossener Kantenzug

Sei G = (E, K) ein Graph und  $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$  ein Kantenzug mit  $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$  und  $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$ .

A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_0 = e_s$  .

Ein Kantenzug wird durch den Tupel  $(e_0, \ldots, e_s) \in E^{s+1}$ charakterisiert.









### Weg



#### Weg

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,...,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$  .

#### Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

### Weg



#### Weg

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,...,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$  .

### Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

### Weg



#### Weg

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,...,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$  .

### Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

#### **Kreis**



#### Kreis

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow$  A ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.





#### **Kreis**



#### Kreis

Sei G = (E, K) ein Graph und  $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow A$  ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.





#### **Kreis**



#### Kreis

Sei G=(E,K) ein Graph und  $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$  ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow A$  ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.







#### Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G = (E, K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Martin Thoma - Graphentheorie I

000000



#### Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G = (E, K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei  $e_0 \in E$  eine beliebige Ecke aus G. Da  $e_0$  min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante  $k_0$ .

000000



#### Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G=(E,K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge >0.

Sei  $e_0 \in E$  eine beliebige Ecke aus G. Da  $e_0$  min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante  $k_0$ .

Diese verbindet  $e_0$  mit einer weiteren Ecke  $e_1$ , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke  $e_j$ , die bereits als  $e_i$  durchlaufen wurde. Die Ecken  $e_i, \ldots, e_j = e_i$  bilden also eine Kreis  $\blacksquare$ 



#### Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G=(E,K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge >0.

Sei  $e_0 \in E$  eine beliebige Ecke aus G. Da  $e_0$  min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante  $k_0$ .

Diese verbindet  $e_0$  mit einer weiteren Ecke  $e_1$ , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke  $e_j$ , die bereits als  $e_i$  durchlaufen wurde. Die Ecken  $e_i, \ldots, e_j = e_i$  bilden also eine Kreis  $\blacksquare$ 

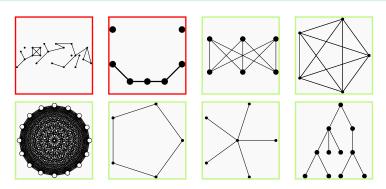
### Zusammenhängender Graph



#### Zusammenhängender Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** : $\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$  : Es ex. ein Kantenzug,  $der e_1$  und  $e_2$  verbindet



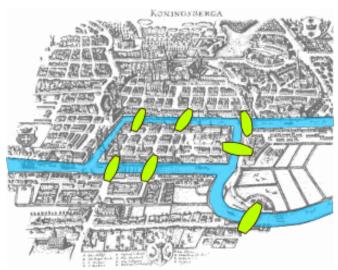
# Königsberg heute





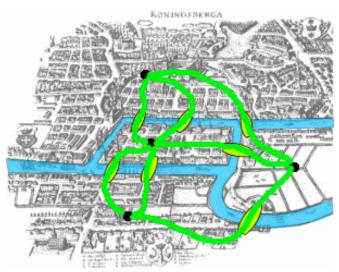
# Königsberger Brückenproblem





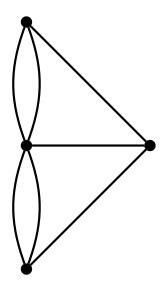
# Übersetzung in einen Graphen





# Übersetzung in einen Graphen







#### Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt eulerscher Kreis : $\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$ .

#### Eulerscher Graph

Ein Graph heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Martin Thoma - Graphentheorie I

#### **Hamiltonkreis**



#### Achtung

Verwechslungsgefahr: Hamiltonkreis  $\neq$  Eulerkreis

#### Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt **Hamilton-Kreis** : $\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e$  ist genau ein mal in A.

#### Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt eulerscher Kreis : $\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$ .

#### **Hamiltonkreis**



#### Achtung

Verwechslungsgefahr: Hamiltonkreis  $\neq$  Eulerkreis

#### Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

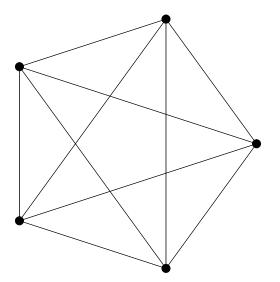
A heißt **Hamilton-Kreis** : $\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e$  ist genau ein mal in A.

#### **Eulerscher Kreis**

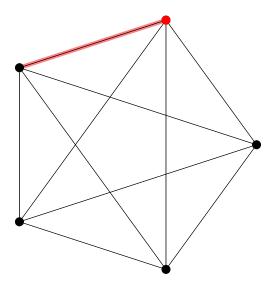
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt eulerscher Kreis : $\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$ .

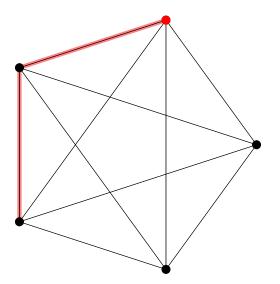




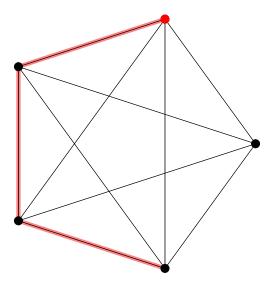




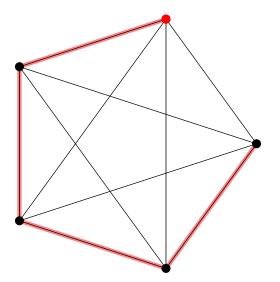




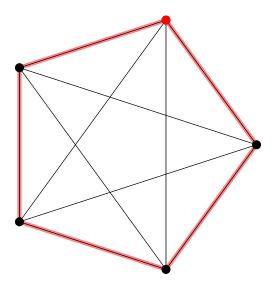




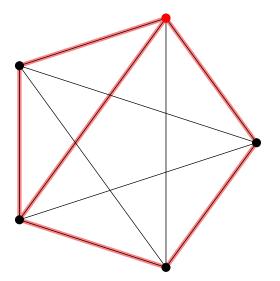




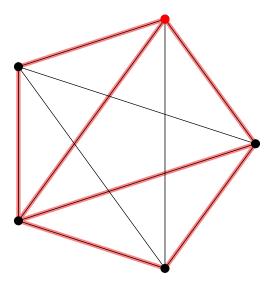




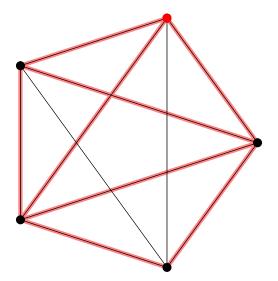




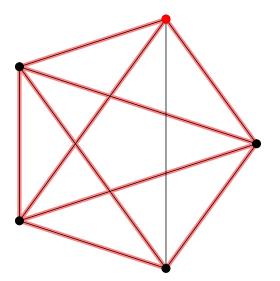




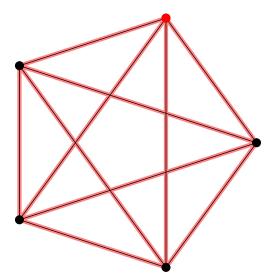




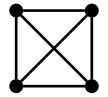




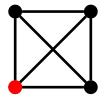






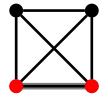




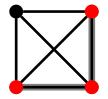


Königsberger Brückenproblem

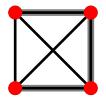




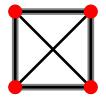




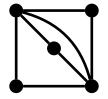




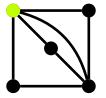




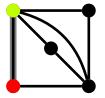








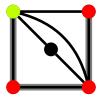




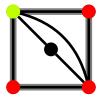




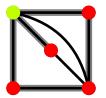




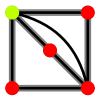
















#### Satz von Euler



#### Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.





#### Satz von Euler



#### Satz von Euler

Wenn ein Graph  ${\cal G}$  eulersch ist, dann hat jede Ecke von  ${\cal G}$  geraden Grad.

 $\Rightarrow$  Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.





#### Satz von Euler



#### Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

 $\Rightarrow$  Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.







**Beh.:** G ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$ 



**Beh.:** G ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$ 

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ 



**Beh.:** G ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$ 

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in  $\emph{e}$  hinein und hinaus

 $\Rightarrow \operatorname{\mathsf{Grad}}(e) \equiv 0 \mod 2$ 



**Beh.:** G ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$ 

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

 $\Rightarrow \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$ 



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. ✓

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

I.V.: Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei dener jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$  hat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.

. . .

Martin Thoma - Graphentheorie I



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

#### Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch.  $\checkmark$ 

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

I.V.: Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei dener jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$  hat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.

. . .



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

#### Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

<u>I.A.:</u> m = 0: G ist eulersch.  $\checkmark$ 

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

 $\underline{\text{I.V.:}}$  Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei dener jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$  hat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.

. . .



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

<u>I.A.:</u> m = 0: G ist eulersch.  $\checkmark$ 

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\ensuremath{\checkmark}$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

 $\underline{\text{I.V.:}}$  Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$  hat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

Martin Thoma - Graphentheorie I



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch.  $\checkmark$ 

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

 $\underline{\text{I.V.:}}$  Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$  hat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

I.V.: Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei G = (E, K) mit  $2 \le m = |K|$ . G ist zus.  $\Rightarrow$  Jede Ecke von G



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

I.V.: Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

<u>I.S.</u>: Sei G = (E, K) mit  $2 \le m = |K|$ . G ist zus.  $\Rightarrow$  Jede Ecke von Ghat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\checkmark$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

I.V.: Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

<u>I.S.</u>: Sei G = (E, K) mit  $2 \le m = |K|$ . G ist zus.  $\Rightarrow$  Jede Ecke von Ghat min. Grad 2.  $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$  Es gibt einen Kreis C in G.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch.  $\checkmark$ 

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat.  $\ensuremath{\checkmark}$ 

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch.  $\checkmark$ 

 $\underline{\text{I.V.:}}$  Sei  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

Grundlagen



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

. . .

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^*$  haben geraden Grad
- $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_n$
- $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$  können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

. . .

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^*$  haben geraden Grad
- $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_r$
- $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$  können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

. . .

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

 $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^{\ast}$  haben geraden Grad

 $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_n$ 

 $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$  können in C "eingehängt" werden

 $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

. . .

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^{\ast}$  haben geraden Grad
- $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_n$
- $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$  können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

. . .

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^*$  haben geraden Grad
- $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_n$
- $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$  können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh.



### Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- $\Rightarrow$  Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in  $G^*$  haben geraden Grad
- $\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$  Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise  $C_1,\ldots,C_n$
- $\Rightarrow C_1, \ldots, C_n$  können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$  ist eulersch $\Rightarrow$  Beh.

### Wie findet man Eulerkreise?



#### **Algorithmus 1** Algorithmus von Hierholzer

**Require:** G = (E, K) ein eulerscher Graph.

 $C \leftarrow \text{leerer Kreis}$ 

### repeat

 $C_{\sf tmp} \leftarrow {\sf ein beliebiger Kreis}$ 

 $C \leftarrow C$  vereinigt mit  $C_{\mathsf{tmp}}$ 

Entferne Kanten in  $C_{tmp}$  aus G

Entferne isolierte Ecken

**until** C ist Eulerkreis

**Ergebnis:** Eulerkreis *C* 

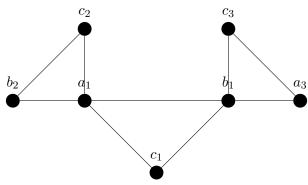
vgl. Aufgabe 5



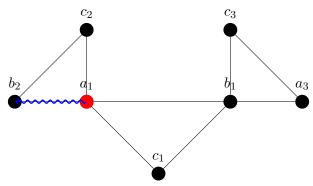
Sind Eulerkreise bis auf Rotation und Symmetrie eindeutig?

39/62

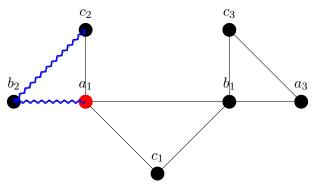




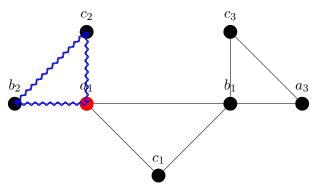




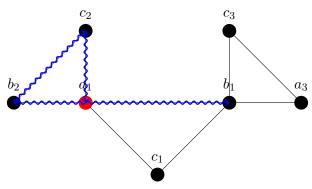




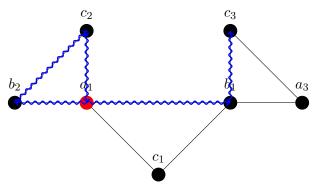




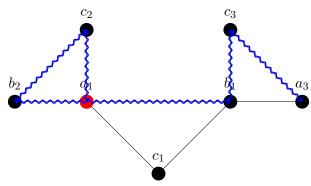




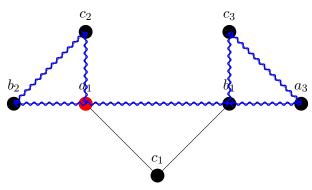




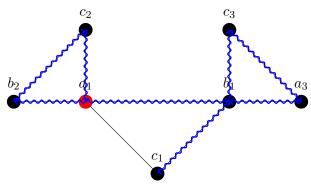




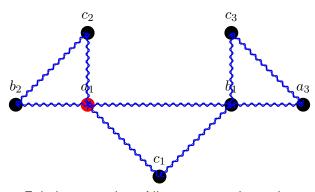




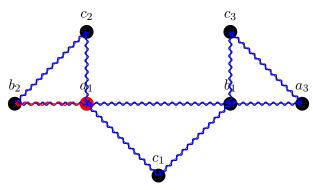




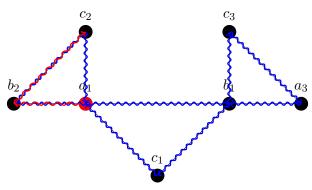




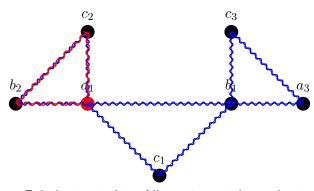




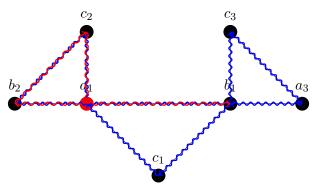




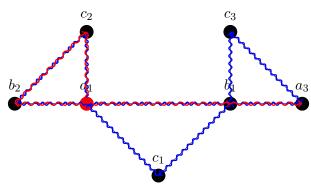




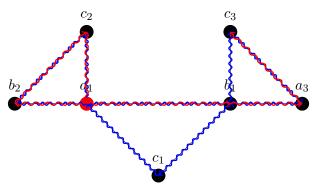




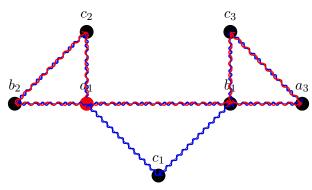




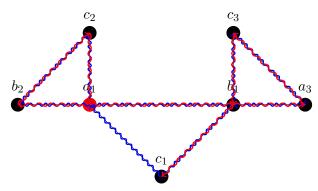




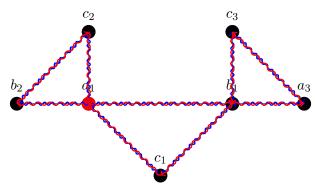












⇒ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig



#### Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von  $G:\Leftrightarrow$  lede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann "in einem Zug" gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt



### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie : $\Leftrightarrow$  G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen

 $\xrightarrow{\mathsf{Satz}\ \mathsf{von}\ \mathsf{Euler}} \mathsf{In}\ G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht  $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen  $e_0, e_s$ .





#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie : $\Leftrightarrow$  G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis " $\Rightarrow$ "

Sei G = (E, K) ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \ldots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen



#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und  $L=(e_0,\ldots,e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^*=(E,K\cup\{e_s,e_0\})$ . Es gibt einen

Eulerkreis in  $G^*$ 

 $\stackrel{\mathsf{Satz}\ \mathsf{von}\ \mathsf{Euler}}{\longleftrightarrow}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht  $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heiß

Rückrichtung analog



#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und  $L=(e_0,\ldots,e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^*=(E,K\cup\{\,e_s,e_0\,\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$ 

 $\xrightarrow{\text{Satz von Euler}}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grac

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht  $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heiß

Rückrichtung analog



#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie : $\Leftrightarrow$  G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis " $\Rightarrow$ "

Sei G = (E, K) ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen

Eulerkreis in  $G^*$ 

 $\overbrace{\operatorname{Satz\ von\ Euler}}^{\operatorname{Satz\ von\ Euler}}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

 $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen  $e_0, e_s$ .

Martin Thoma - Graphentheorie I



#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis "⇒ "

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und  $L=(e_0,\ldots,e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^*=(E,K\cup \{\,e_s,e_0\,\})$ . Es gibt einen

Eulerkreis in  $G^*$ 

 $\xrightarrow{\operatorname{Satz\ von\ Euler}}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

 $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen  $e_0,e_s$ . lacksquare

Rückrichtung analog



#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie : $\Leftrightarrow$  G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis " $\Rightarrow$ "

Sei G = (E, K) ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \ldots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen

Eulerkreis in  $G^*$ 

 $\xrightarrow{\text{Satz von Euler}}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

 $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen  $e_0, e_s$ .





#### Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie : $\Leftrightarrow$  G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

### Beweis " $\Rightarrow$ "

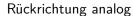
Sei G = (E, K) ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \ldots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen

Eulerkreis in  $G^*$ 

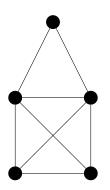
 $\xrightarrow{\mathsf{Satz\ von\ Euler}}$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

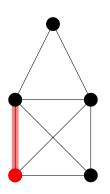
 $\Leftrightarrow$  in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen  $e_0, e_s$ .



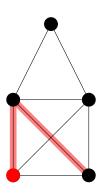




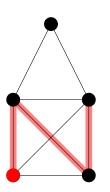




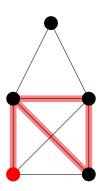




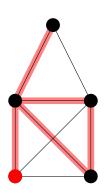




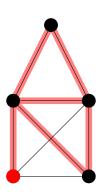




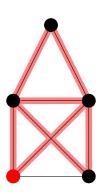




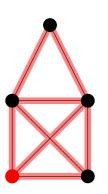












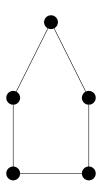
# Aufgabe 3



Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

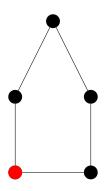
Ende







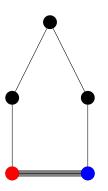
ldee: Knoten abwechselnd färben



Spezielle Graphen



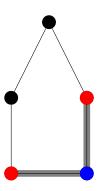
ldee: Knoten abwechselnd färben



Spezielle Graphen

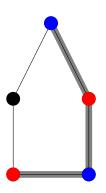


ldee: Knoten abwechselnd färben

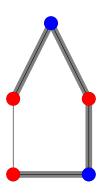


Spezielle Graphen

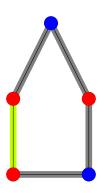












# Aufgabe 4



Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

 ${\color{red}\mathsf{Annahme:}}\ G$  hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$  Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 $\Rightarrow$  Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge lacktriangle

Martin Thoma - Graphentheorie I



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

 $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge

Martin Thoma - Graphentheorie I



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

- $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\operatorname{Beh.:}}\ G$  ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$  Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 $\Rightarrow$  Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge  $\blacksquare$ 



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$  Ein Subgraph von G ist nicht bipartit



 $\underline{\text{Vor.:}}$  Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$  ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$  Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 $\Rightarrow$  Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge  $\blacksquare$ 



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit  $\Rightarrow G$  hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$  Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 $\Rightarrow$  Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$  hat keinen Kreis ungerader Länge



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Färbe Graphen mit Breitensuche



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge  $\Rightarrow G$  ist bipartit

Färbe Graphen mit Breitensuche



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge  $\Rightarrow$  G ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche



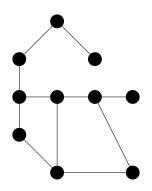
Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$  hat keinen Kreis ungerader Länge  $\Rightarrow G$  ist bipartit

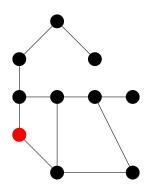
Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■



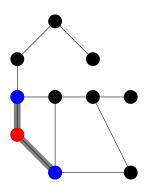




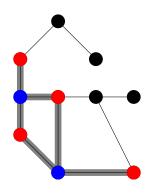


Martin Thoma - Graphentheorie I

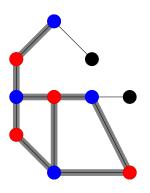




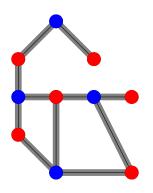












### Aufgabe 9, Teil 1



Im folgenden sind die ersten drei Graphen  $G_1, G_2, G_3$  einer Folge  $(G_n)$ aus Graphen abgebildet. Wie sieht  $G_4$  aus?

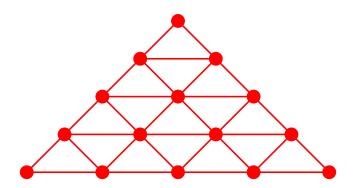






## Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)

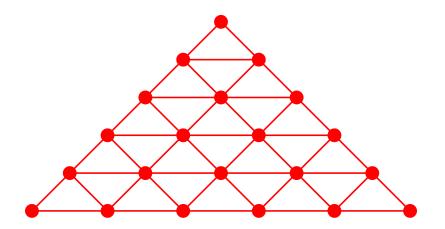




Martin Thoma - Graphentheorie I

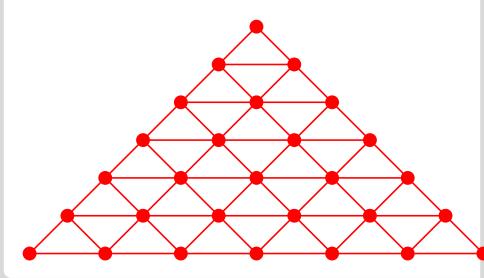
# Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)





# Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)





## Aufgabe 9, Teil 2



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat  $G_i$ ?







## Aufgabe 9. Teil 2: Antwort



Ecken:

$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

Kanten:

$$|K_{n}| = |K_{n-1}| + \underbrace{((n+1)-1)+2}_{\text{auBen}} + (n-1) \cdot 2$$

$$= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2$$

$$= |K_{n-1}| + 3n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 3 \frac{n^{2} + n}{2}$$
(5)
$$= (6)$$

Spezielle Graphen

Grundlagen

Ende

## Aufgabe 9, Teil 3



Gebe  $G_i$  formal an.







## Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)



Gebe  $G_n$  formal an.







$$E_n = \{ e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n; \ x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \mod 2 \}$$

$$K_n = \{ \{ e_{x,y}, e_{i,j} \} \in E_n^2 \mid (x + 2 = i \land y = j) \lor (x + 1 = i \land y \pm 1 = j) \}$$

$$G_n = (E_n, K_n)$$

#### RECTANGLEFREECOLORING



#### RECTANGLEFREECOLORING

Gegeben ist  $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und ein ungerichteter Graph G = (E, K) mit

$$E = \{ e_{x,y} \mid 1 \le x \le n \} \land 1 \le y \le m$$

und

$$K = \{ k = \{ e_{x,y}, e_{x',y'} \} \in E \times E : | x - x'| + |y - y'| = 1 \}$$

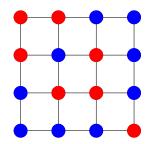
Färbe die Ecken von G min einer minimalen Anzahl von Farben so, dass gilt:

$$\forall e_{x,y}, e_{x',y'} \in E : \neg(c(e_{x,y}) = c(e_{x',y'}) = c(e_{x',y}) = c(e_{x,y'}))$$

### RECTANGLEFREECOLORING



#### $4 \times 4$ - Instanz:



## Bildquellen



- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg\_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit\_disk\_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

#### Literatur



• A. Beutelspacher: Diskrete Mathematik für Einsteiger, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3

## Folien, LaTeXund Material



Der Foliensatz und die LATEX und TikZ-Quellen sind unter github.com/MartinThoma/LaTeXexamples/tree/master/presentations/Diskrete-Mathematik Kurz-URL: goo.gl/uTgam