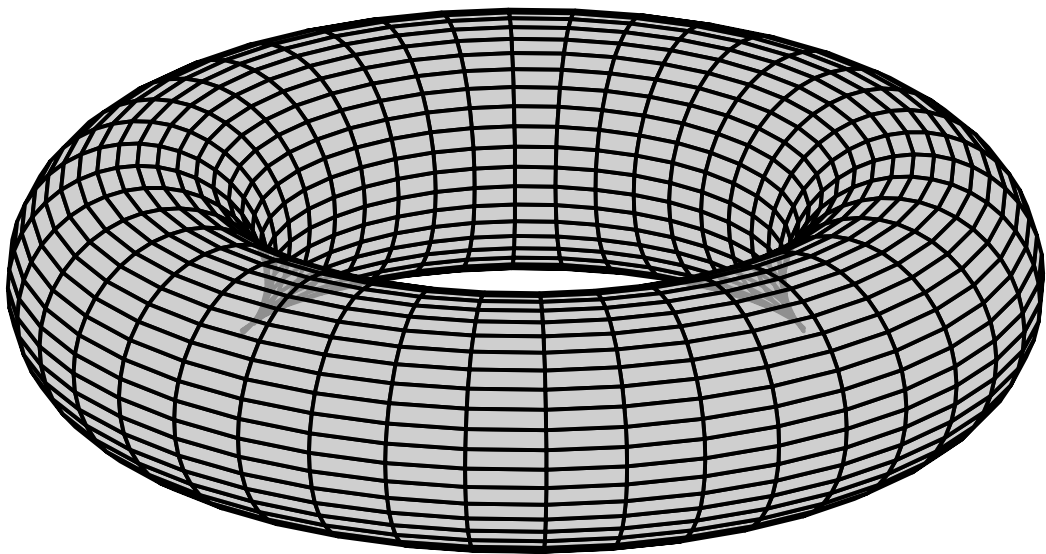


# Geometrie und Topologie



Siehe [GitHub](#)

3. November 2013

# Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet [tinyurl.com/GeoTopo](http://tinyurl.com/GeoTopo).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische Grundbegriffe</b>	<b>2</b>
1.1	Vorgeplänkel . . . . .	2
1.2	Topologische Räume . . . . .	2
1.3	Metrische Räume . . . . .	6
1.4	Stetigkeit . . . . .	8
1.5	Zusammenhang . . . . .	10
1.6	Kompaktheit . . . . .	13
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>14</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>15</b>

# 1 Topologische Grundbegriffe

## 1.1 Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche  $S^2$  lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum  $\mathbb{R}^2$  oder zu einem Torus. Für den  $\mathbb{R}^2$  müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

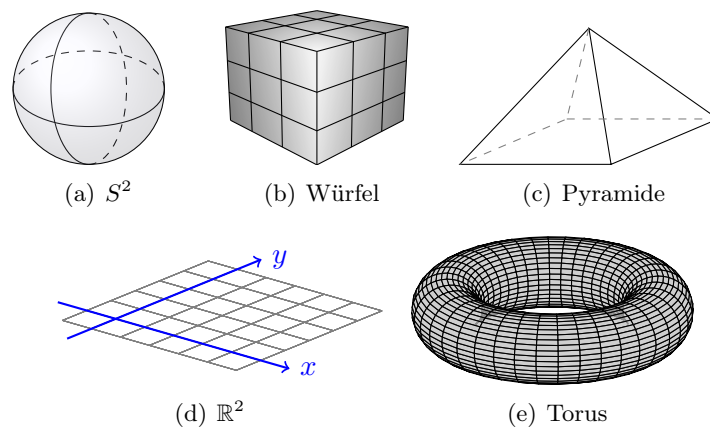


Abbildung 1.1: Beispiele für verschiedene Formen

## 1.2 Topologische Räume

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B.  $[0, 1)$ . Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

**Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)**

Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  mit der „trivialen Topologie“  $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ .

Es gilt:  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen. Außerdem  $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$  und  $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel 1**

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in U$  gibt es  $r > 0$ , sodass  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\} \subseteq U$

Also:  $\mathfrak{T} = \{M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel}\}$

- 2) Allgemeiner:  $(X, d)$  metrischer Raum

- 3)  $X$  Menge,  $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$  heißt „diskrete Topologie“

- 4)  $X := \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{T}_Z := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  heißt „Zariski-Topologie“

Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$ , sodass  $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in  $\mathfrak{T}_Z$

- 5)  $X := \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

- 6)  $X := \{0, 1\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$  heißt „Sierpińskiraum“.  
abgeschlossene Mengen:  $\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}$

**Definition 2**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

**Definition 3**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- a)  $M^\circ := \{x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$  heißt **Inneres** oder **offener Kern** von  $M$ .

- b)  $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von  $M$ .

- c)  $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$  heißt **Rand** von  $M$ .

- d)  $M$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\overline{M} = X$  ist.

**Beispiel 2**

- 1)  $X = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie

$M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$

- 2)  $X = \mathbb{R}, M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$

- 3)  $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$   
 $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

**Definition 4**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.
- b)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis**, wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.

**Beispiel 3**

Gegeben sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit euklidischer Topologie  $\mathfrak{T}$ . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von  $\mathfrak{T}$ .

**Bemerkung 1**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$ , für die  $\mathfrak{B}$  Subbasis ist.

**Definition 5**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Spurtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$

**Definition 6**

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.

$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

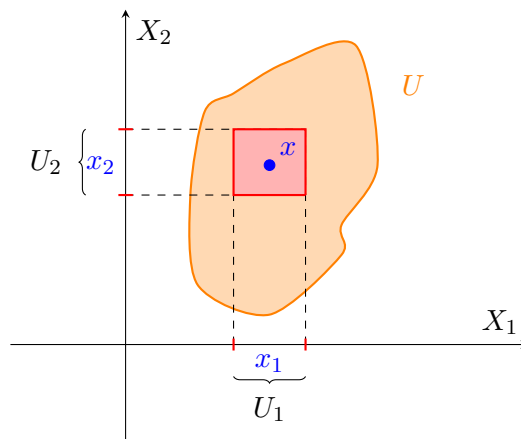


Abbildung 1.2: Zu  $x = (x_1, x_2)$  gibt es Umgebungen  $U_1, U_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq U$

**Beispiel 4**

- 1)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  
 $\Rightarrow$  Die Produkttopologie auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$  überein.
- 2)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie.  $\mathfrak{T}$  Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^2$ :  $U_1 \times U_2$  (Siehe Abb. 1.3)

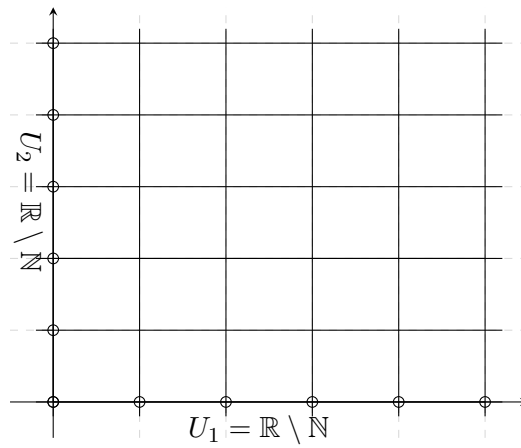


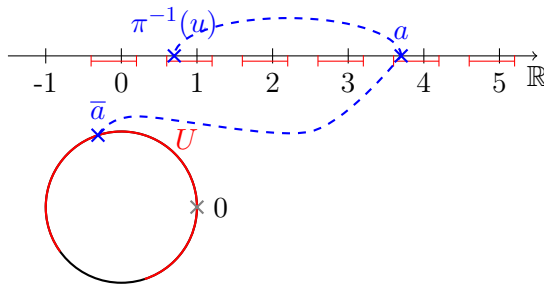
Abbildung 1.3: Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}^2$

### Definition 7

Sei  $X$  topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : x \rightarrow \overline{x}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ ,  $U \subseteq \overline{X}$  heißt offen, wenn  $\pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf  $\overline{X}$  definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

### Beispiel 5

$$X = \mathbb{R}, a \sim b : \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

### Beispiel 6

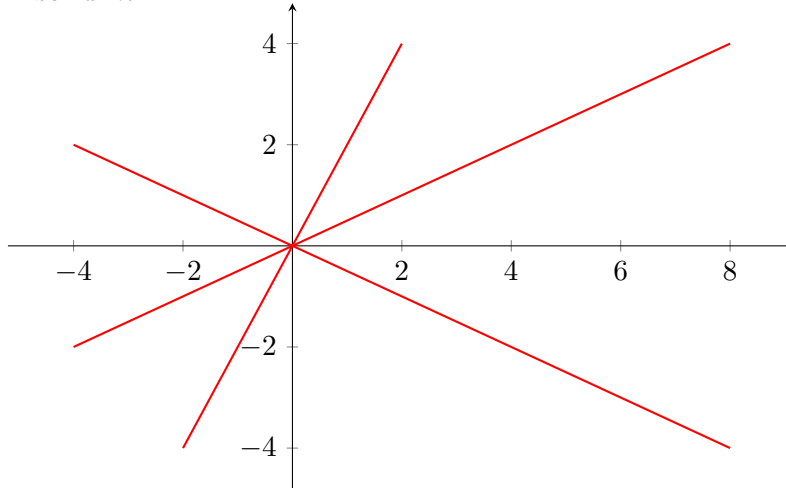
$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$X/\sim$  ist ein Torus.

### Beispiel 7

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \\ \overline{X} &= \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Also für  $n = 1$ :



### 1.3 Metrische Räume

#### Definition 8

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i)  $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$
- (ii)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

#### Bemerkung 2

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ .

#### Beispiel 8

Sei  $V$  ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird  $V$  durch  $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  zum metrischen Raum.

#### Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik  $d$  induziert die **diskrete Topologie**.

#### Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$  und  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$  ist Metrik.

*Beobachtung:*  $d$  erzeugt die euklidische Topologie.



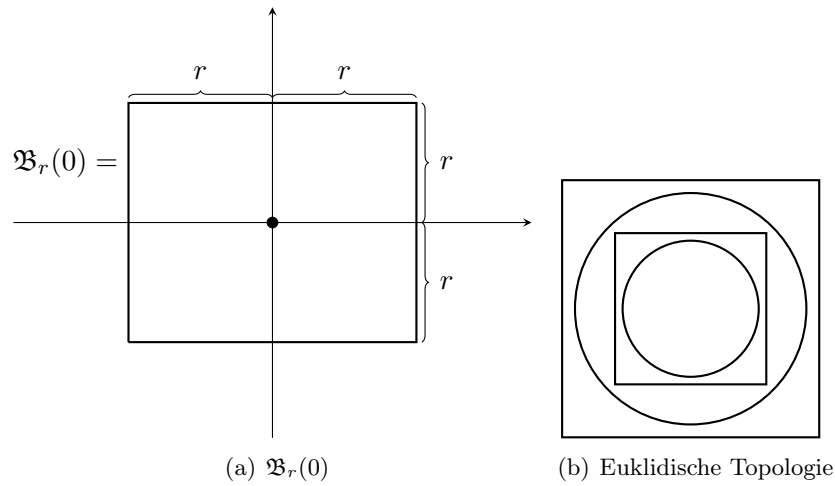
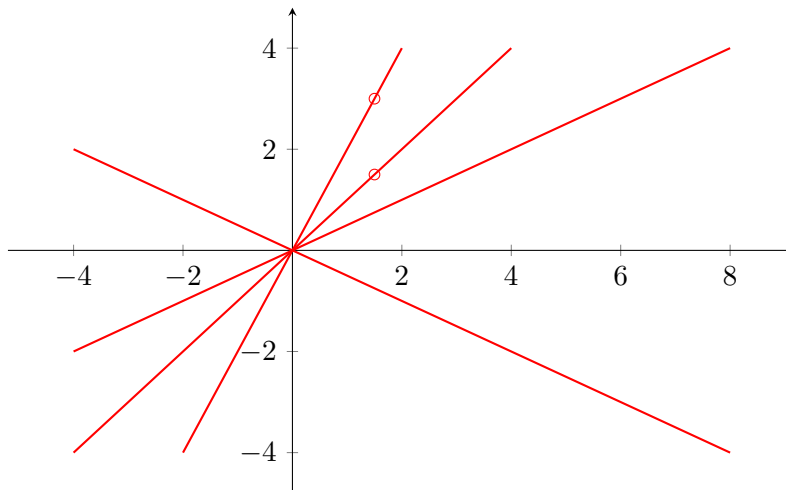


Abbildung 1.4: Veranschaulichungen zur Metrik  $d$

**Beispiel 11 (SNCF-Metrik<sup>1</sup>)**

$$X = \mathbb{R}^2$$



**Definition 9**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)**

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$ .

**Bemerkung 4**

Seien  $X, X_1, X_2$  Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum um  $X$  ist Hausdorffsch.
- b)  $X_1 \times X_2$  ist Hausdorffsch.

**Definition 10**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .  $x \in X$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0$  gibt, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

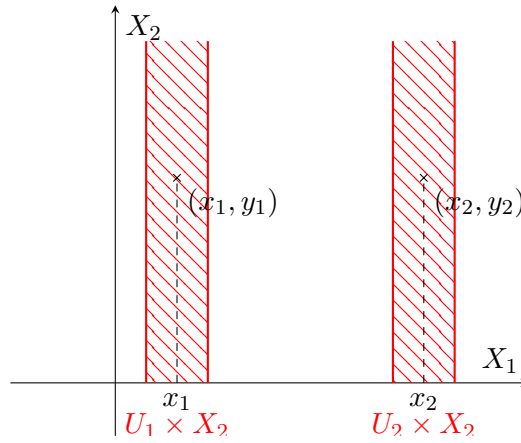


Abbildung 1.5: Wenn  $X_1, X_2$  hausdorffsch sind, dann auch  $X_1 \times X_2$

### Korollar 1.2

Ist  $X$  hausdorffsch, so hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.

**Beweis:** Annahme:  $x$  und  $y$  mit  $x \neq y$  sind Grenzwerte der Folge  $(x_n)$ .

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Nach Annahme gibt es  $n_0$  mit  $x_n \in U_x \cap U_y$  für alle  $n \geq n_0 \Rightarrow$  Widerspruch ■

## 1.4 Stetigkeit

### Definition 11

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- a)  $f$  heißt **stetig**, wenn für jedes offene  $U \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.
- b)  $f$  heißt **Homöomorphismus**, wenn es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Korollar 1.3

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta(x, \varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in X, \varepsilon > 0$  gegeben und  $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$ .

Dann ist  $U$  offen in  $Y$ .

$\stackrel{11.a}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ . Dann ist  $x \in f^{-1}(U)$ .

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$

$\Rightarrow \{ y \in X \mid d_X(x, y) < \delta \} \Rightarrow \text{Beh.}$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq Y$  offen,  $x \in f^{-1}(U)$ .

Dann gibt es  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

$\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$  Es gibt  $\delta > 0$ , sodass  $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$

$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$  ■

### Bemerkung 5

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq Y$  gilt:  $f^{-1}(A) \subseteq X$  ist abgeschlossen.

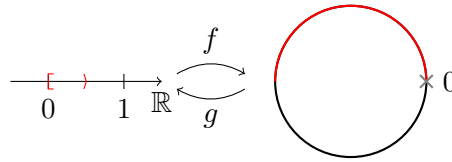


Abbildung 1.6: Beispiel einer stetigen Funktion  $f$ , deren Umkehrabbildung  $g$  nicht stetig ist.

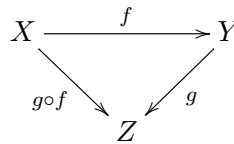
### Beispiel 12

- 1) Für jeden topologischen Raum  $X$  gilt:  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$  ist Homöomorphismus.
- 2) Ist  $Y$  trivialer topologischer Raum, d.h.  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$ , so ist jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig.
- 3) Ist  $X$  diskreter topologischer Raum, so ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Abbildung  $f$ .
- 4) Sei  $X = [0, 1)$ ,  $Y = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \}$  und  $f(t) = e^{2\pi it}$ . Die Umkehrabbildung  $g$  ist nicht stetig, da  $g^{-1}(U)$  nicht offen ist (vgl. Abb. 1.6)

### Korollar 1.4

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen.

Dann ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.



**Beweis:** Sei  $U \subseteq Z$  offen  $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .  $g^{-1}(U)$  ist offen in  $Y$  weil  $g$  stetig ist,  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  ist offen in  $X$ , weil  $f$  stetig ist. ■

### Bemerkung 6

- a) Für jeden topologischen Raum ist  $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$  eine Gruppe.
- b) Jede Isometrie  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- c)  $\text{Isom}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$  ist Untergruppe von  $\text{Homöo}(X)$  für jeden metrischen Raum  $X$ .

### Korollar 1.5

Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionen

$$(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$$

Wird  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen, so sind  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  stetig.

**Beweis:** Sei  $U \subseteq X$  offen  $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$  ist offen in  $X \times Y$ . ■

### Korollar 1.6

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  der Bahnraum versehen mit der Quotiententopologie,  $\pi : X \rightarrow \overline{X}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ .

Dann ist  $\pi$  stetig.

**Beweis:** Nach Definition ist  $U \subseteq \overline{X}$  offen  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen. ■

*Beobachtung:* Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass  $\pi$  stetig wird.

**Beispiel 13 (Stereographische Projektion)**

$\mathbb{R}^n$  und  $S^n \setminus \{N\}$  sind homöomorph für beliebiges  $N \in S^n$

$$\begin{aligned} S^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

Es sei  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} f: S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto \overbrace{L_P \cap H}^{\text{genau ein Punkt}} \end{aligned}$$

wobei  $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\}$  und  $L_P$  die Gerade in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $P$  ist.

Sei  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ , so ist  $x_{n+1} < 1$ , also ist  $L_P$  nicht parallel zu  $H$ . Also schneiden sich  $L_P$  und  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .

Es gilt:  $f$  ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

## 1.5 Zusammenhang

**Definition 12**

Ein Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen nichtleeren Teilmengen  $U_1, U_2$  von  $X$  gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  und  $U_1 \cup U_2 = X$ .

**Bemerkung 7**

$X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es gibt keine nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen  $A_1, A_2$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  und  $A_1 \cup A_2 = X$ .

**Bemerkung 8**

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt zusammenhängend, wenn  $Y$  als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

**Beispiel 14**

$\mathbb{R}^n$  ist mit der euklidischen Topologie zusammenhängend, denn:

Angenommen,  $\mathbb{R}^n = U_1 \cup U_2$  mit  $U_i$  offen,  $U_i \neq \emptyset$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  existiert.

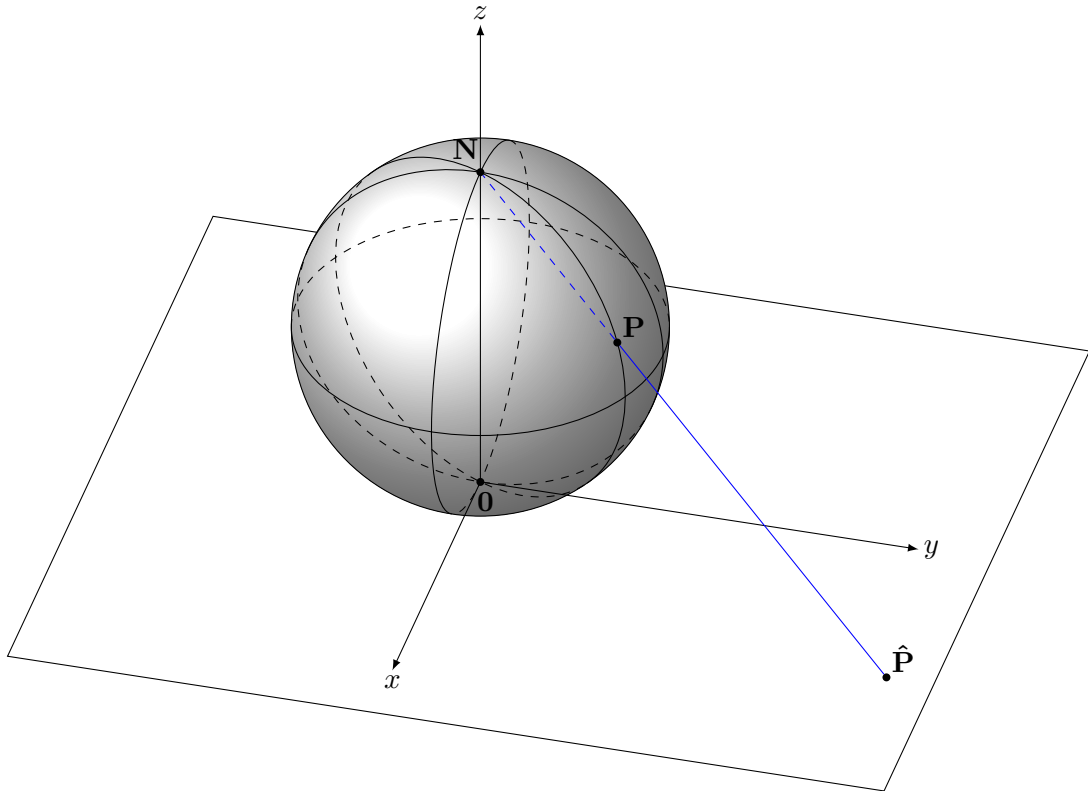


Abbildung 1.7: Visualisierung der sphärischen Projektion

Bildquelle: [texample.net/tikz/examples/map-projections](https://texample.net/tikz/examples/map-projections)

Sei  $x \in U_1, y \in U_2$  und  $[x, y]$  die Strecke zwischen  $x$  und  $y$ . Dann ist  $U_1 \cap [x, y]$  die Vereinigung von offenen Intervallen. Dann gibt es  $z \in [x, y]$  mit  $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$ , aber  $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$ . In jeder Umgebung von  $z$  liegt ein Punkt von  $U_1 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $U_2$  offen.

**Beispiel 15 (Zusammenhang von Räumen)**

1.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$
2.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist zusammenhängend.
3.  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, da

$$(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$$

4.  $\{x\}$  ist zusammenhängend für jedes  $x \in X$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum ist.
5.  $\mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend

**Korollar 1.7**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  zusammenhängend. Dann ist auch  $\overline{A}$  zusammenhängend.

**Beweis:** Angenommen  $\overline{A} = A_1 \cup A_2, A_i$  abgeschlossen,  $\neq \emptyset, A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\text{abgeschlossen}}_{\text{disjunkt}}$$

Wäre  $A \cap A_1 = \emptyset$

$$\Rightarrow A \subseteq A_2$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq A_2$$

$$\Rightarrow A_1 = \emptyset$$

$\Rightarrow$  Widerspruch

■

### Korollar 1.8

Sei  $X$  topologischer Raum,  $A, B \subseteq X$  zusammenhängend.

Ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $A \cup B = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$  offen, disjunkt

$$\stackrel{\text{GE}}{\Rightarrow} A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \text{ offen, disjunkt}$$

$$\stackrel{A \text{ zhgd.}}{\Rightarrow} A \cap U_1 = \emptyset$$

$$\stackrel{A \cap B \neq \emptyset}{\Rightarrow} U_1 \subseteq B$$

$$B = \underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung}$$

■

### Definition 13

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

Für  $x \in X$  sei

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente**.

### Korollar 1.9

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a)  $Z(x)$  ist die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.
- b)  $Z(x)$  ist abgeschlossen.
- c)  $X$  ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

**Beweis:** a) Sei  $Z(x) = A_1 \cup A_2$  mit  $A_i \neq \emptyset$  abgeschlossen, disjunkt.

GE sei  $x \in A_1$  und  $y \in A_2$ .  $y$  liegt in einer zusammenhängenden Teilmenge  $A$ , die auch  $x$  enthält.  $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$  ist unerlaubte Zerlegung.

b) Nach Korollar 1.7 ist  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend  $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x)}$

c) Ist  $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \stackrel{1.8}{\Rightarrow} Z(y) \cup Z(x)$  ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) &\subseteq Z(x) \Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ &\subseteq Z(y) \Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

**Korollar 1.10**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $A \subseteq X$  zusammenhängend, so ist  $f(A) \subseteq Y$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ , offen, disjunkt.

$$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset}$$

■

**1.6 Kompaktheit****Definition 14**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$$\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}, \quad U_i \text{ offen in } X, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

**Definition 15**

Sei  $X$  eine Menge und  $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

$T$  heißt eine **Überdeckung** von  $X$ , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in T : x \in M$$

**Korollar 1.11**

$I = [0, 1]$  ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in J}$  eine offene Überdeckung von  $I$ .

Es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass jedes Teilintervall von  $I$  in einem der  $U_i$  enthalten ist. Dann überdecken endlich viele ...

das  
haben  
wir  
nicht  
mehr  
ge-  
schafft

# Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$  Basis einer Topologie.

$\mathfrak{B}_\delta(x)$   $\delta$ -Kugel um  $x$ .

$\mathfrak{T}$  Topologie.

$\mathbb{N}$  Natürliche Zahlen.

$\mathbb{Z}$  Ganze Zahlen.

$\mathbb{Q}$  Rationale Zahlen.

$\mathbb{R}$  Reelle Zahlen.

$\mathbb{R}^\times$  Multiplikative Einheitengruppe von  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}^+$  echt positive reelle Zahlen.

$\mathbb{C}$  Komplexe Zahlen.

$\mathbb{P}$  Projektiver Raum.

$\overline{M}$  Abschluss der Menge  $M$ .

$M^\circ$  Inneres der Menge  $M$ .

$\partial M$  Rand der Menge  $M$ .

$A \times B$  Kreuzprodukt zweier Mengen.

$\mathcal{P}(M)$  Potenzmenge von  $M$ .

$A \setminus B$   $A$  ohne  $B$ .

$A \subseteq B$  Teilmengenbeziehung.

$A \subsetneq B$  echte Teilmengenbeziehung.

$[x]_\sim$  Äquivalenzklassen von  $x$  bzgl.  $\sim$ .

$X/\sim$   $X$  modulo  $\sim$ .

$\|x\|$  Norm von  $x$ .

$|x|$  Betrag von  $x$ .

$\mathfrak{O}$  Ohne Einschränkung.

$\pi_X$  Projektion auf  $X$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  Skalarprodukt.

$S^n$  Sphäre.

$f^{-1}(M)$  Urbild von  $M$ .



# Index

- abgeschlossen, 2
- Abschluss, 3
- Basis, 4
- dicht, 3
- Grenzwert, 7
- Homöomorphismus, 8
- Inneres, 3
- Kern
  - offener, 3
- kompakt, 13
- Limes, 7
- Metrik, 6
  - diskrete, 6
  - SNCF, 7
- offen, 2
- Produkttopologie, 4
- Projektion
  - stereographische, 10
- Quotiententopologie, 5
- Rand, 3
- Raum
  - hausdorffscher, 7
  - metrischer, 6
  - topologischer, 2
- Sierpińskiraum, 3
- Spurtopologie, 4
- stetig, 8
- Subbasis, 4
- Teilraum, 4
- Topologie
  - diskrete, 3, 6
  - euklidische, 3
  - triviale, 3
  - Zariski, 3, 11
- Torus, 2
- Überdeckung, 13
- Umgebung, 3
- zusammenhängend, 10
- Zusammenhang, 10–13
- Zusammenhangskomponente, 12