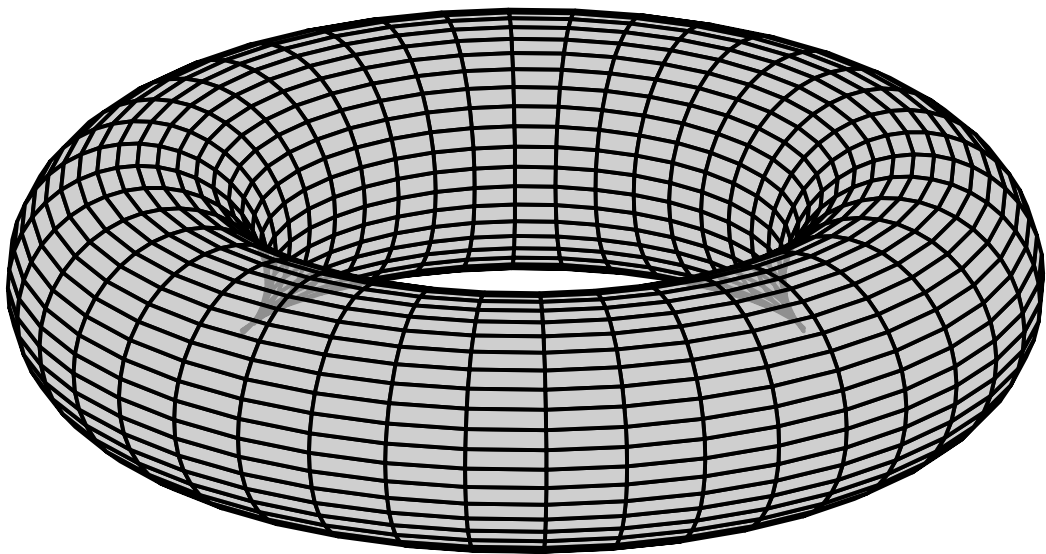


Geometrie und Topologie



Siehe [GitHub](#)

30. Oktober 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Grundbegriffe	2
1.1	Vorgeplänkel	2
1.2	Topologische Räume	2
1.3	Metrische Räume	6
1.4	Stetigkeit	8
	Symbolverzeichnis	12
	Stichwortverzeichnis	13

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum \mathbb{R}^2 oder zu einem Torus. Für den \mathbb{R}^2 müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

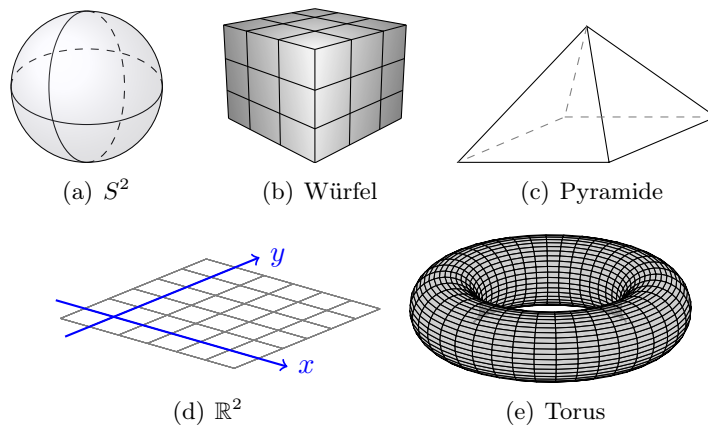


Abbildung 1.1: Beispiele für verschiedene Formen

1.2 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathfrak{T}) bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von \mathfrak{T} heißen **offene Teilmengen** von X .

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte \emptyset und X mit der „trivialen Topologie“ $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$.

Es gilt: $X \in \mathfrak{T}$ und $\emptyset \in \mathfrak{T}$, d. h. X und \emptyset sind offen. Außerdem $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$, d. h. X und \emptyset sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. \square

Beispiel 1

- 1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \text{ sodass } B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$$

$$\text{Also: } \mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$$

- 2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum

- 3) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

- 4) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“

Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X], \text{ sodass } \mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in \mathfrak{T}_Z

- 5) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{ U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r) \}$

- 6) $X := \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$ heißt „Sierpińskiraum“.
abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x , wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

- a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M .

Kern von M .

- b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M .

- c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M .

- d) M heißt **dicht** in X , wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

- 1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie

$$M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$$

- 2) $X = \mathbb{R}, M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$

- 3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$

$$M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$$

Definition 4

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum.

- a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie \mathfrak{T} , wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} ist.
- b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus \mathfrak{B} ist.

Beispiel 3

Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie \mathfrak{T} . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von \mathfrak{T} .

Bemerkung 1

Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie \mathfrak{T} auf X , für die \mathfrak{B} Subbasis ist.

Definition 5

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y .

\mathfrak{T}_Y heißt **Spurtopologie** und (Y, \mathfrak{T}_Y) heißt ein **Teilraum** von (X, \mathfrak{T})

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.

$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$ ist eine Basis von \mathfrak{T} .

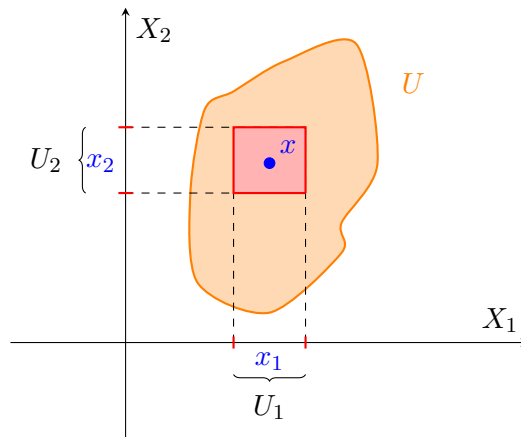


Abbildung 1.2: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

- 1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
 \Rightarrow Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf \mathbb{R}^2 überein.
- 2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. \mathfrak{T} Produkttopologie auf \mathbb{R}^2 : $U_1 \times U_2$ (Siehe Abb. 1.3)

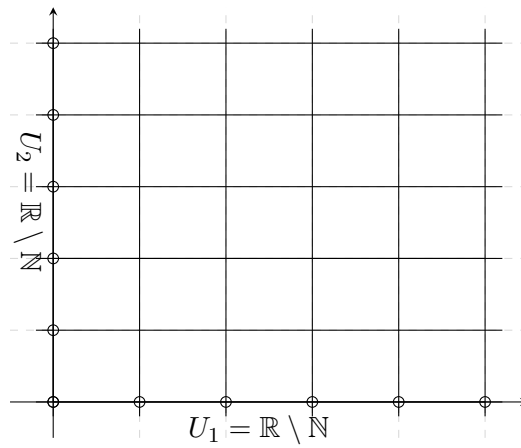


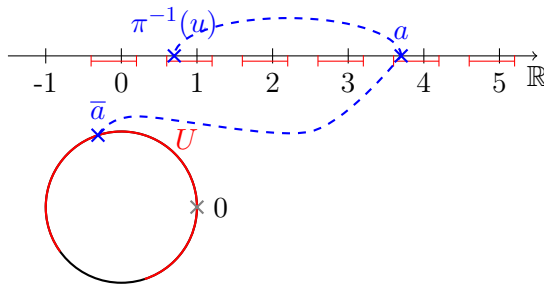
Abbildung 1.3: Zariski-Topologie auf \mathbb{R}^2

Definition 7

Sei X topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X , $\overline{X} = X/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \rightarrow \overline{x}$, $x \mapsto [x]_\sim$, $U \subseteq \overline{X}$ heißt offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf \overline{X} definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

Beispiel 5

$$X = \mathbb{R}, a \sim b : \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

Beispiel 6

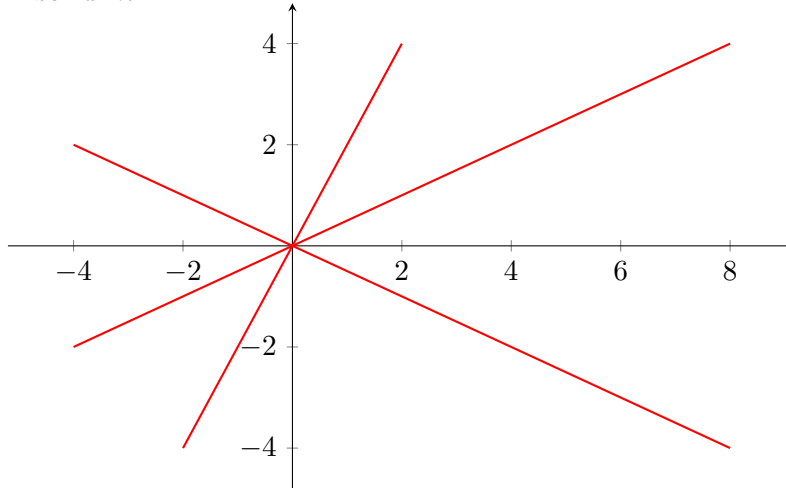
$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

X/\sim ist ein Torus.

Beispiel 7

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \\ \overline{X} &= \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Also für $n = 1$:



1.3 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

\mathfrak{B} ist Basis einer Topologie auf X .

Beispiel 8

Sei V ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird V durch $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ zum metrischen Raum.

Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$ und $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

Beobachtung: d erzeugt die euklidische Topologie.

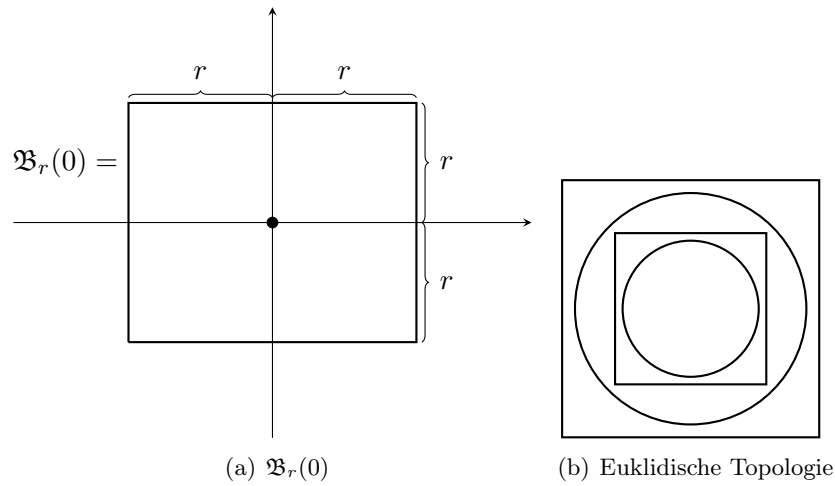
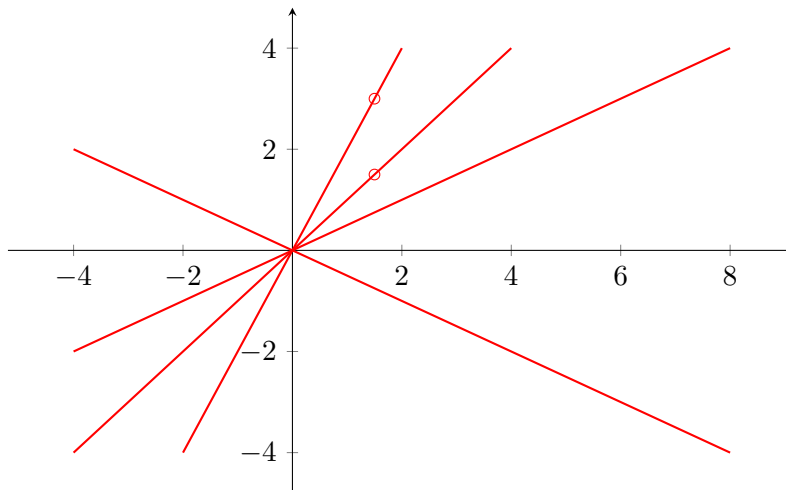


Abbildung 1.4: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 11 (SNCF-Metrik¹)

$$X = \mathbb{R}^2$$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.
- b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

Definition 10

Sei X ein topologischer Raum und $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n) , wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

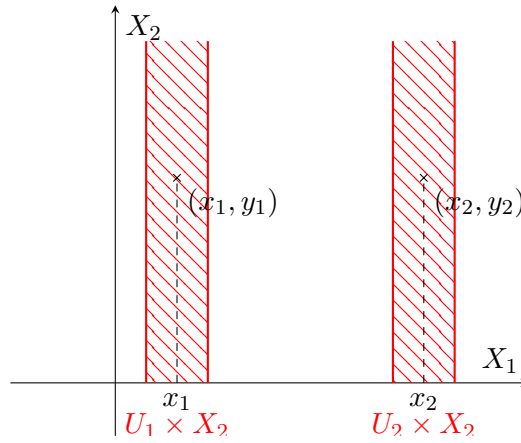


Abbildung 1.5: Wenn X_1, X_2 hausdorffsch sind, dann auch $X_1 \times X_2$

Korollar 1.2

Ist X hausdorffsch, so hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Annahme: x und y mit $x \neq y$ sind Grenzwerte der Folge (x_n) .

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Nach Annahme gibt es n_0 mit $x_n \in U_x \cap U_y$ für alle $n \geq n_0 \Rightarrow$ Widerspruch ■

1.4 Stetigkeit

Definition 11

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) f heißt **stetig**, wenn für jedes offene $U \subseteq Y$ auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.
- b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

Korollar 1.3

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Dann gilt: f ist stetig \Leftrightarrow zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(x, \varepsilon) > 0$, sodass für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Sei $x \in X, \varepsilon > 0$ gegeben und $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$.

Dann ist U offen in Y .

$\stackrel{11.a}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$ ist offen in X . Dann ist $x \in f^{-1}(U)$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$

$\Rightarrow \{y \in X \mid d_X(x, y) < \delta\} \Rightarrow \text{Beh.}$

„ \Leftarrow “: Sei $U \subseteq Y$ offen, $x \in f^{-1}(U)$.

Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

$\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ Es gibt $\delta > 0$, sodass $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$

$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$ ■

Bemerkung 5

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(A) \subseteq X$ ist abgeschlossen.

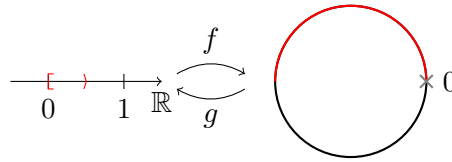


Abbildung 1.6: Beispiel einer stetigen Funktion f , deren Umkehrabbildung g nicht stetig ist.

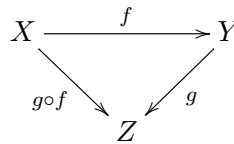
Beispiel 12

- 1) Für jeden topologischen Raum X gilt: $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ ist Homöomorphismus.
- 2) Ist Y trivialer topologischer Raum, d.h. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$, so ist jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig.
- 3) Ist X diskreter topologischer Raum, so ist $f : X \rightarrow Y$ stetig für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung f .
- 4) Sei $X = [0, 1)$, $Y = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \}$ und $f(t) = e^{2\pi it}$. Die Umkehrabbildung g ist nicht stetig, da $g^{-1}(U)$ nicht offen ist (vgl. Abb. 1.6)

Korollar 1.4

Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen.

Dann ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.



Beweis: Sei $U \subseteq Z$ offen $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. $g^{-1}(U)$ ist offen in Y weil g stetig ist, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ist offen in X , weil f stetig ist. ■

Bemerkung 6

- a) Für jeden topologischen Raum ist $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$ eine Gruppe.
- b) Jede Isometrie $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- c) $\text{Isom}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$ ist Untergruppe von $\text{Homöo}(X)$ für jeden metrischen Raum X .

Korollar 1.5

Seien X, Y topologische Räume. $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen

$$(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$$

Wird $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, so sind π_X und π_Y stetig.

Beweis: Sei $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ ist offen in $X \times Y$. ■

Korollar 1.6

Sei X ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X , $\overline{X} = X/\sim$ der Bahnraum versehen mit der Quotiententopologie, $\pi : X \rightarrow \overline{X}$, $x \mapsto [x]_\sim$.

Dann ist π stetig.

Beweis: Nach Definition ist $U \subseteq \overline{X}$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen. ■

Beobachtung: Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass π stetig wird.

Beispiel 13 (Stereographische Projektion)

\mathbb{R}^n und $S^n \setminus \{N\}$ sind homöomorph für beliebiges $N \in S^n$

$$\begin{aligned} S^n &= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Sei ohne Einschränkung $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f : S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\text{genau ein Punkt} \\ P &\mapsto \overbrace{L_P \cap H} \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\}$ und L_P die Gerade in \mathbb{R}^{n+1} durch N und P ist.

Sei $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, so ist $x_{n+1} < 1$, also ist L_P nicht parallel zu H . Also schneiden sich L_P und H in genau einem Punkt \hat{P} .

Es gilt: f ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

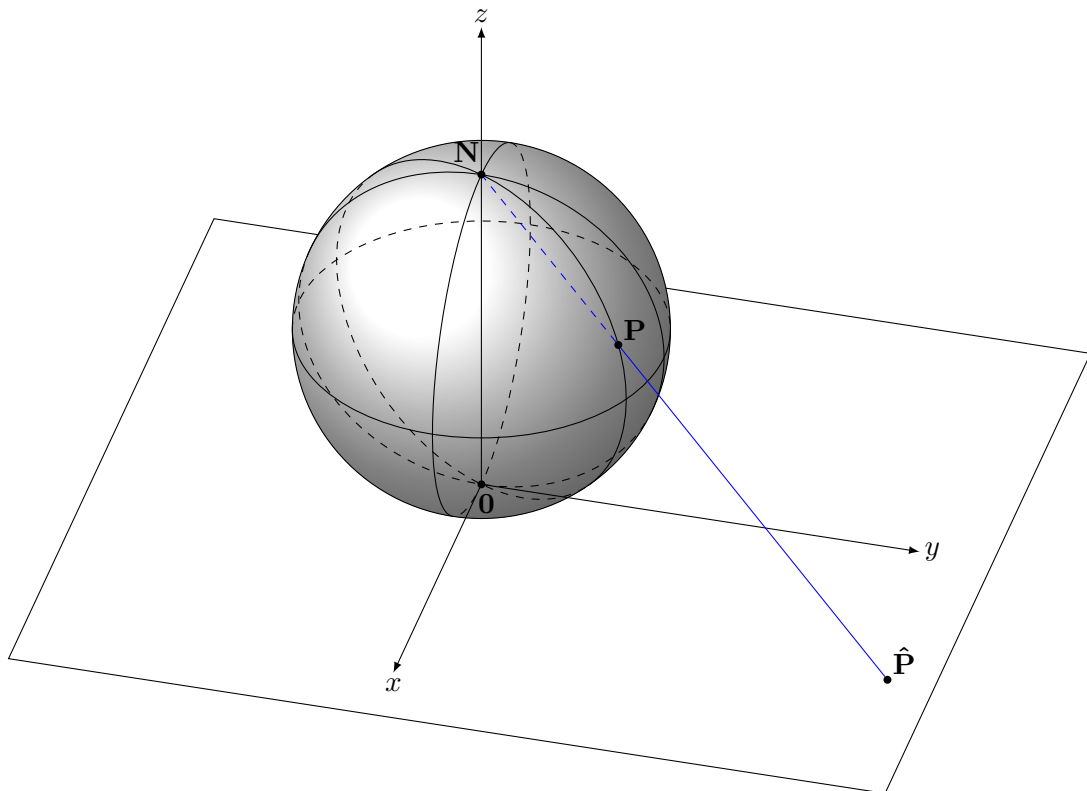


Abbildung 1.7: Visualisierung der sphärischen Projektion

Bildquelle: texample.net/tikz/examples/map-projections

Symbolverzeichnis

\mathfrak{B} Basis einer Topologie.

$\mathfrak{B}_\delta(x)$ δ -Kugel um x .

\mathfrak{T} Topologie.

\mathbb{N} Natürliche Zahlen.

\mathbb{Z} Ganze Zahlen.

\mathbb{Q} Rationale Zahlen.

\mathbb{R} Reelle Zahlen.

\mathbb{R}^\times Multiplikative Einheitengruppe von \mathbb{R} .

\mathbb{R}^+ echt positive reelle Zahlen.

\mathbb{C} Komplexe Zahlen.

\mathbb{P} Projektiver Raum.

\overline{M} Abschluss der Menge M .

M° Inneres der Menge M .

∂M Rand der Menge M .

$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.

$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M .

$A \setminus B$ A ohne B .

$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.

$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.

$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von x bzgl. \sim .

X/\sim X modulo \sim .

$\|x\|$ Norm von x .

$|x|$ Betrag von x .

π_X Projektion auf X .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.

S^n Sphäre.

Index

- abgeschlossen, 2
- Abschluss, 3
- Basis, 4
- dicht, 3
- Grenzwert, 7
- Homöomorphismus, 8
- Inneres, 3
- Kern
 - offener, 3
- Limes, 7
- Metrik, 6
 - diskrete, 6
 - SNCF, 7
- offen, 2
- Produkttopologie, 4
- Projektion
 - stereographische, 10
- Quotiententopologie, 5
- Rand, 3
- Raum
 - hausdorffscher, 7
 - metrischer, 6
 - topologischer, 2
- Sierpińskiraum, 3
- Spurtopologie, 4
- stetig, 8
- Subbasis, 4
- Teilraum, 4
- Topologie
 - diskrete, 3, 6
 - euklidische, 3
 - triviale, 3
 - Zariski, 3
- Torus, 2
- Umgebung, 3