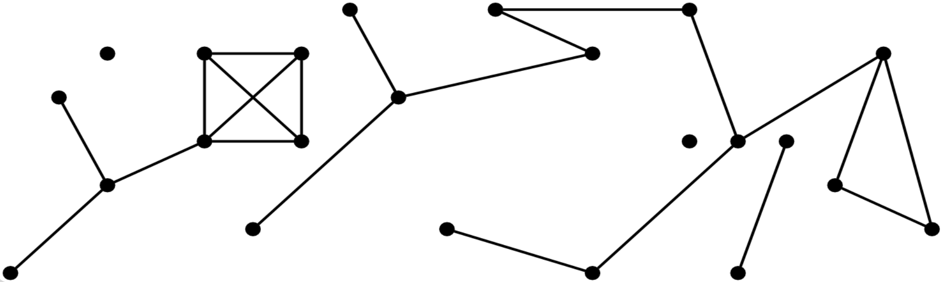
Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK



Inhalte

1. Grundlagen
2. Spezielle Graphen
3. Strukturen in Graphen
4. Königsberger Brückenproblem
5. Ende

Graph

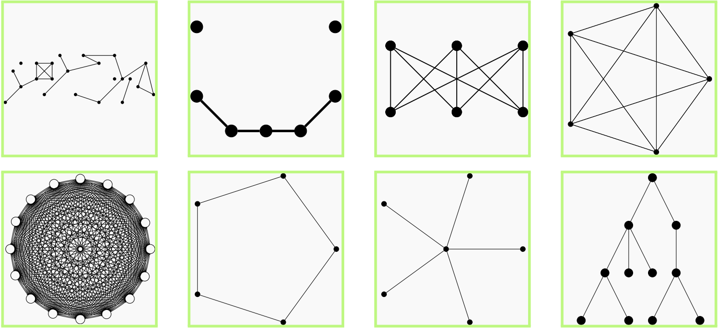
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K), wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

Graph

Graph

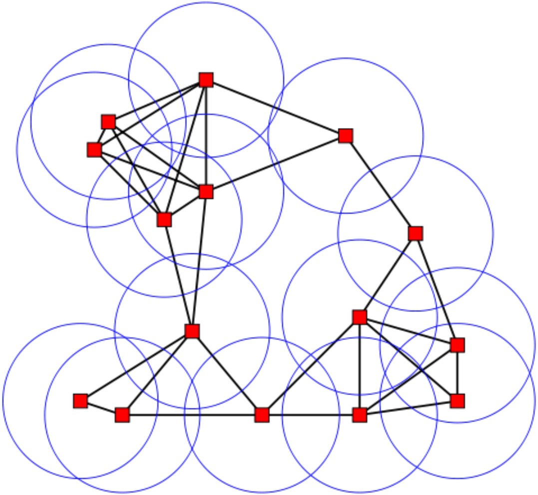
Ein Graph ist ein Tupel (E, K), wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



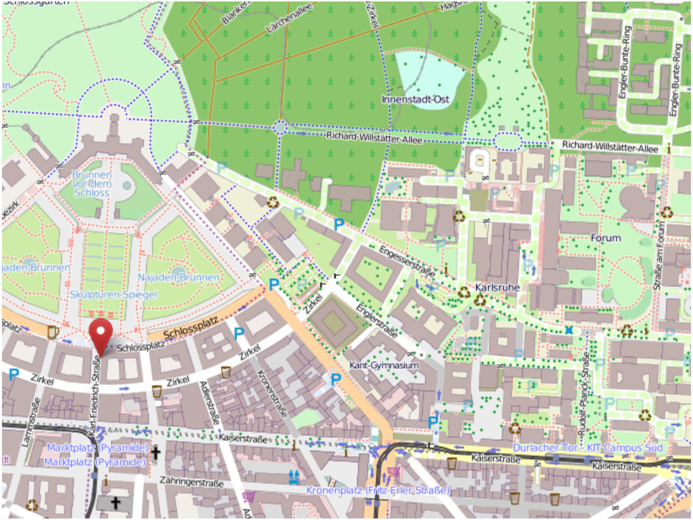
Synonyme

Knoten $\Leftrightarrow$ Ecken

Modellierung, Flüsse, Netzwerke

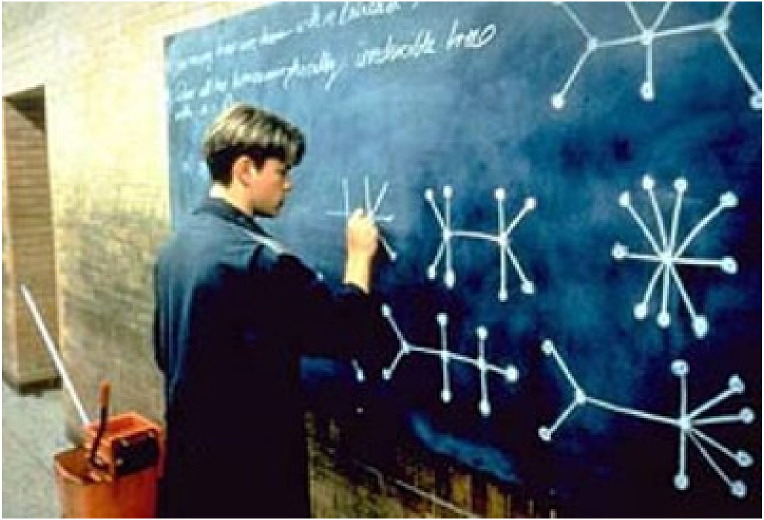


Karten



Innenstadt-Ost
Richard-Willstätter-Allee
Richard-Willstätter-Allee
Lärchenallee
Engler-Bunte-Ring
Engler-Bunte-Ring
Brunnen vor dem Schloss
Forum
Straße am Forum
Engesserstraße
Karlsruhe
Najaden-Brunnen
Skulpturen-Spiegel
Schlossplatz
Schlossplatz
Zirkel
Zirkel
Zirkel
Zirkel
Englerstraße
Kant-Gymnasium
Karl-Friedrich-Straße
Adlerstraße
Kronenstraße
Kaiserstraße
Kaiserstraße
Kaiserstraße
Marktplatz (Pyramide)
Marktplatz (Pyramide)
Zähringerstraße
Kronenplatz (Fritz-Erler-Straße)
Durlacher Tor - KIT-Campus Süd
Rudolf-Plank-Straße

Good Will Hunting



Isomorphe Graphen

martin-thoma.de/uni/graph.html

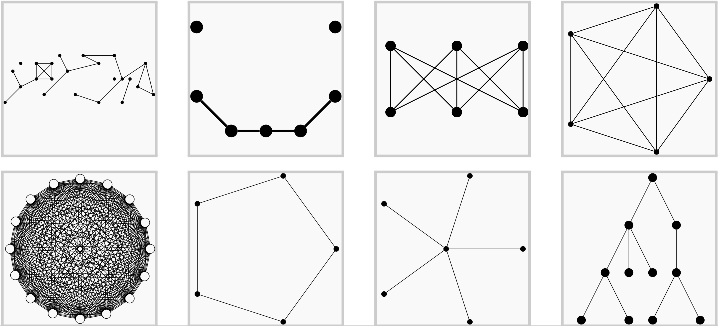
Grad einer Ecke

Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecke

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

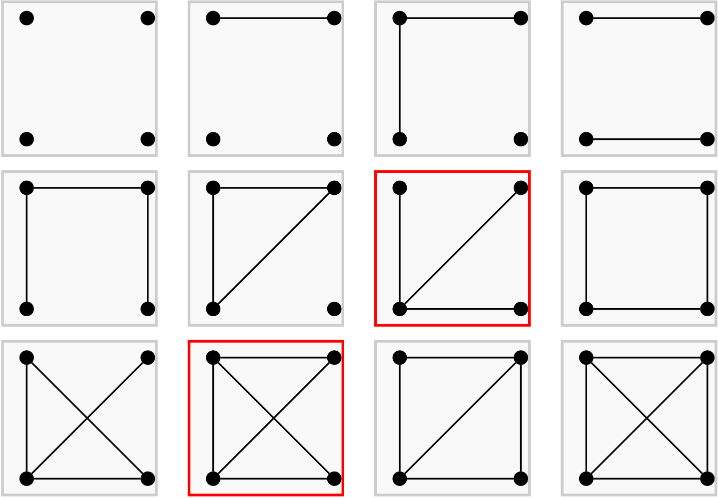


Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.

Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.



Inzidenz

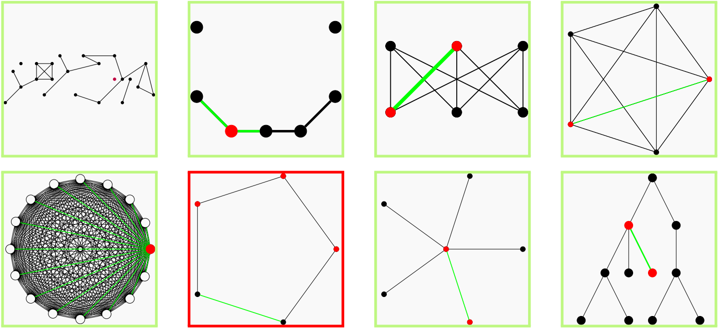
Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{ e_1, e_2 \} \in K$.
e heißt **inzident** zu $k :\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

Inzidenz

Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{ e_1, e_2 \} \in K$.
e heißt **inzident** zu k $:\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ e \in E : \{ e, e \} \}$

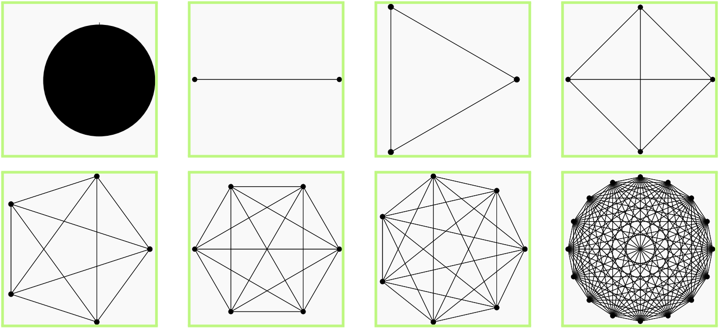
Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ e \in E : \{ e, e \} \}$

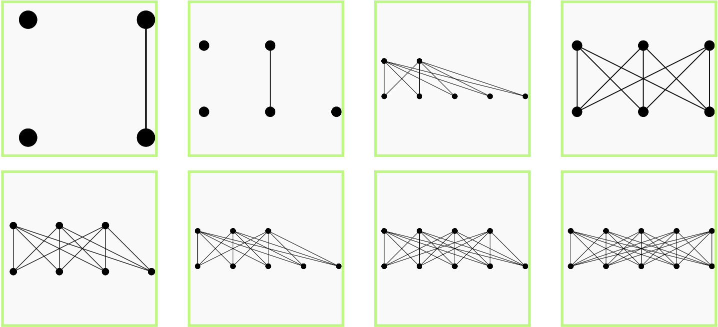
Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.



Bipartiter Graph

Bipartiter Graph

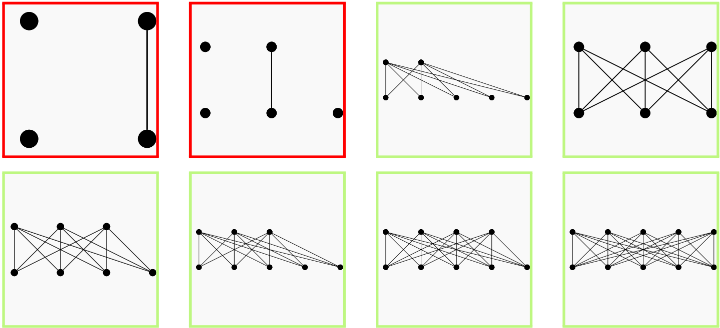
Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.
G heißt **bipartit**
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1,e_2\}\in K} : (e_1 \in A$ und $e_2 \in B)$ oder $(e_1 \in B$ und $e_2 \in A)$



Vollständig bipartiter Graph

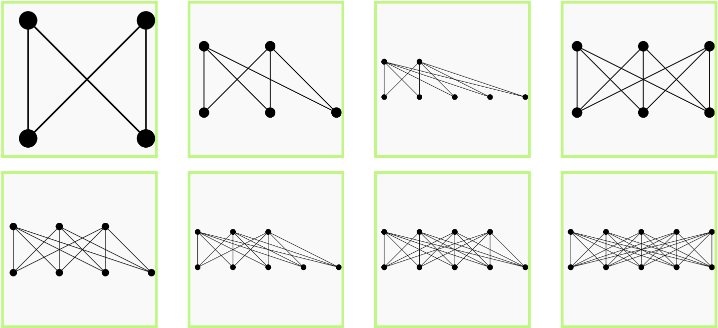
Vollständig bipartiter Graph

Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{ A, B \}$ bezeichne die Bipartition.
G heißt **vollständig bipartit** $:\Leftrightarrow A \times B = K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{ A, B \}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



Aufgabe 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Aufgabe 2

Karlsruher Institut für Technologie

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

$$\text{Ecken: } m + n \tag{1}$$

$$\text{Kanten: } m \cdot n \tag{2}$$

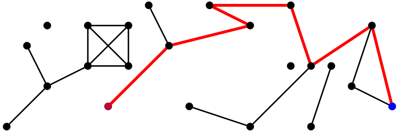
Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
Dann heißt eine Folge $k_1, k_2, \ldots, k_s$ von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_s$ gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- $\ldots$
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

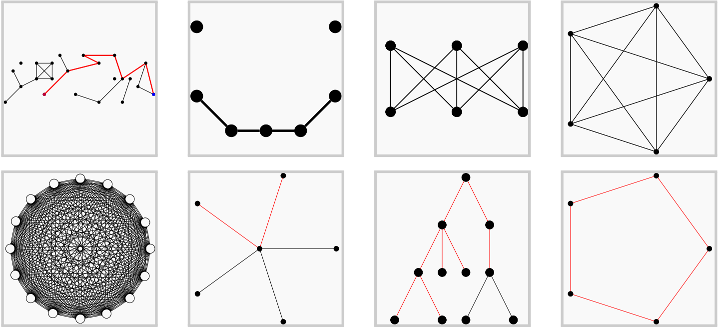
gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.



Geschlossener Kantenzug

Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (e_0, e_1, \ldots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **geschlossen** $:\Leftrightarrow e_s = e_0$.



Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\dots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\dots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\dots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.

Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

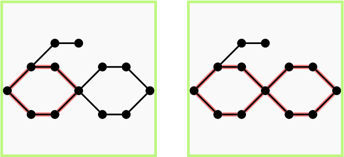
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.

Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow$ A ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

Aufgabe 5

Karlsruher Institut für Technologie

Zeigen Sie:

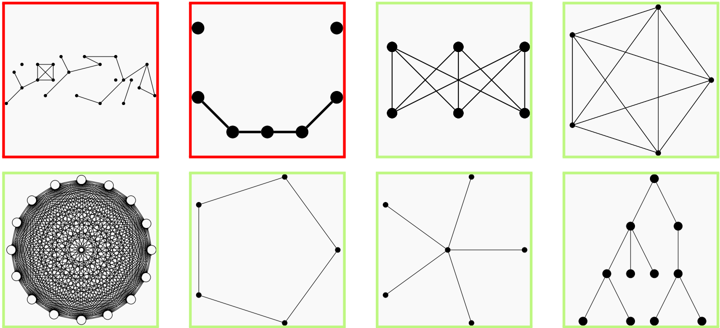
Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.
Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.
G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

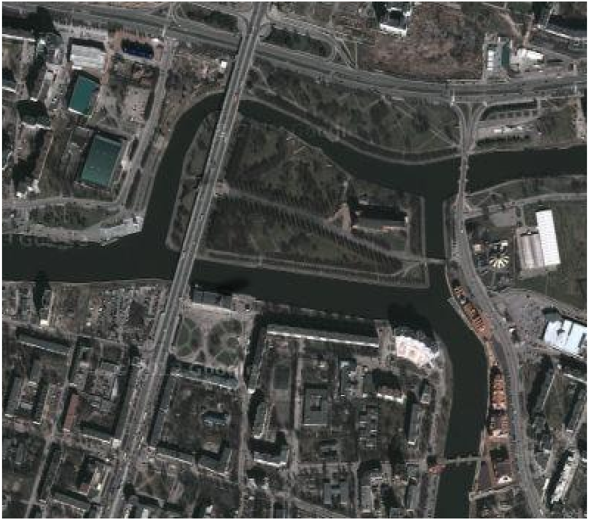
Zusammenhängender Graph

Zusammenhängender Graph

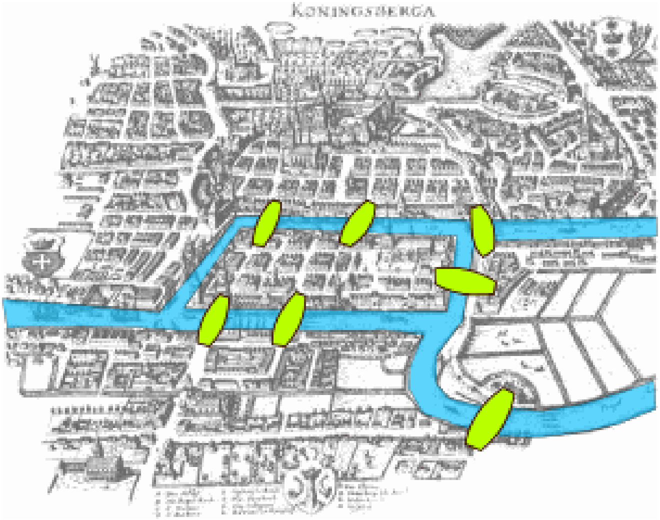
Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet



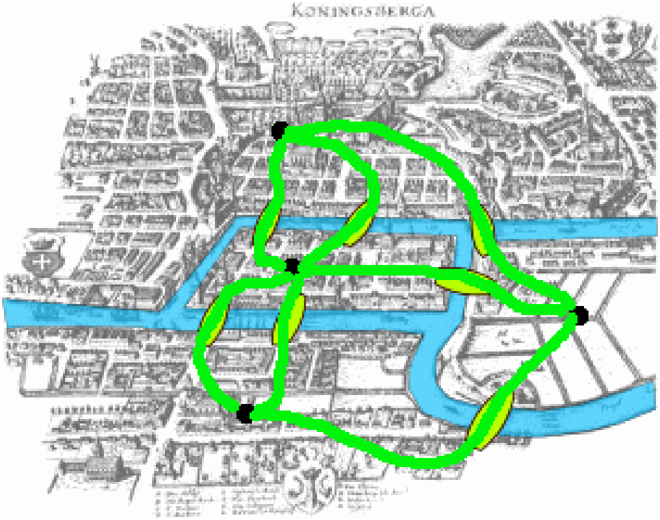
Königsberg heute



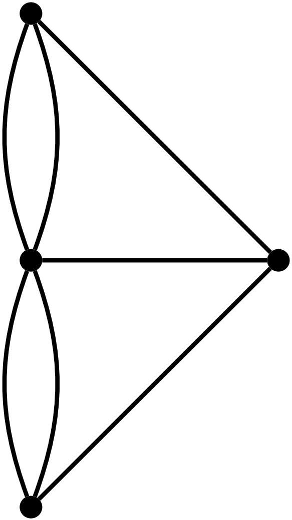
Königsberger Brückenproblem



Übersetzung in einen Graphen



Übersetzung in einen Graphen



Eulerscher Kreis

Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Hamiltonkreis

ACHTUNG, VERWECHSLUNGSGEFAHR:

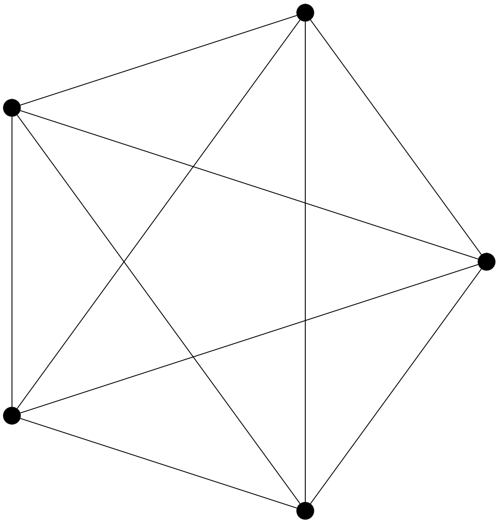
Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **Hamilton-Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

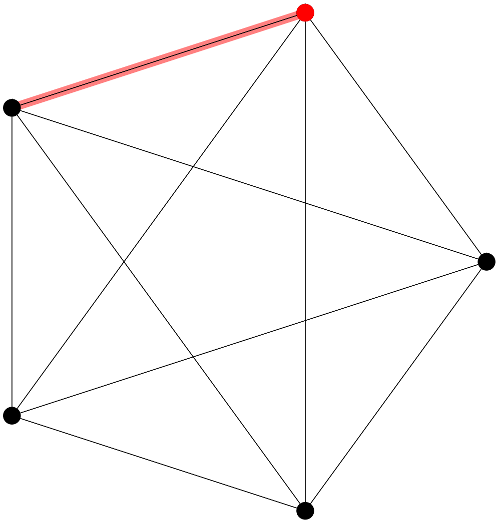
Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

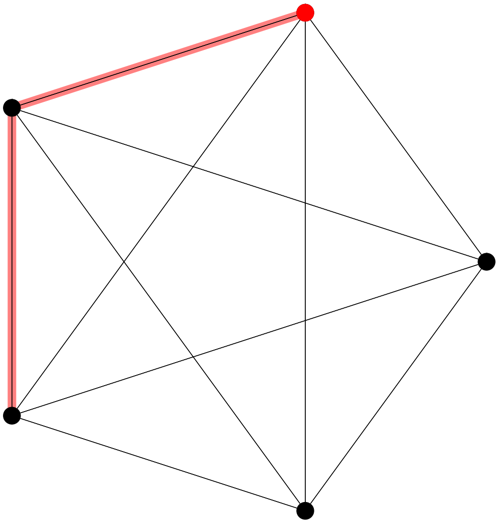
Eulerscher Kreis



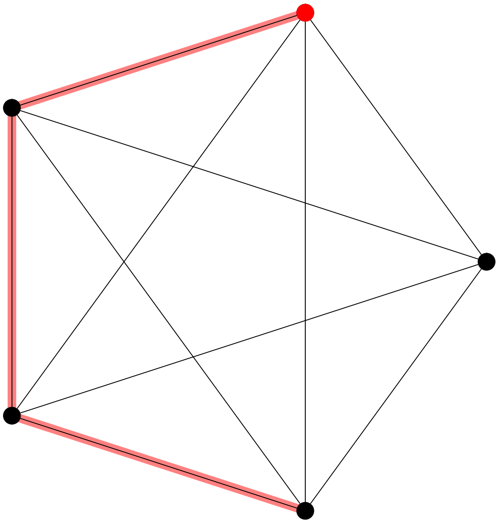
Eulerscher Kreis



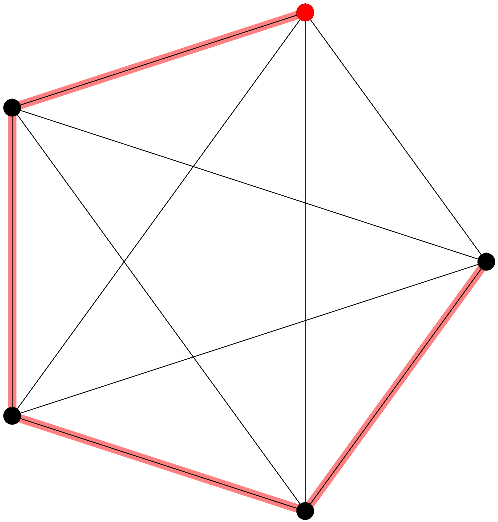
Eulerscher Kreis



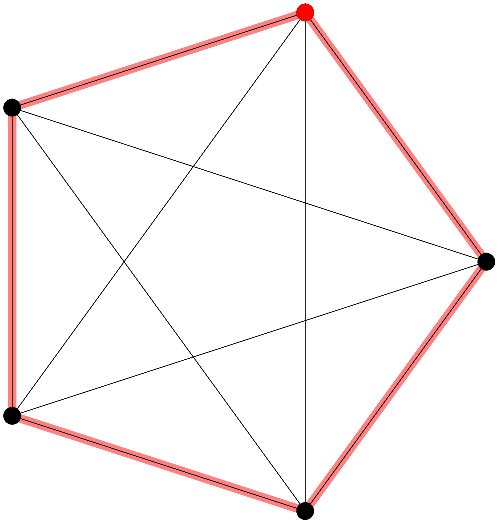
Eulerscher Kreis



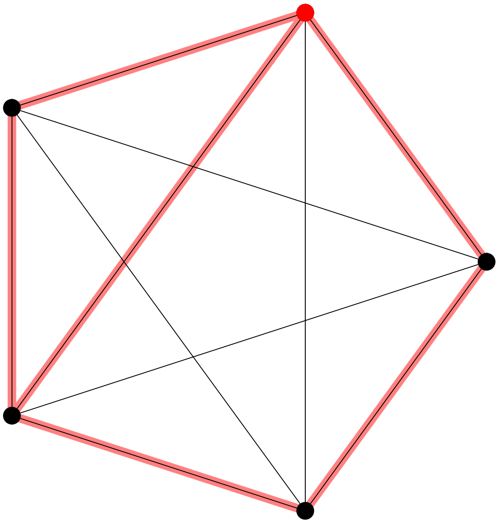
Eulerscher Kreis



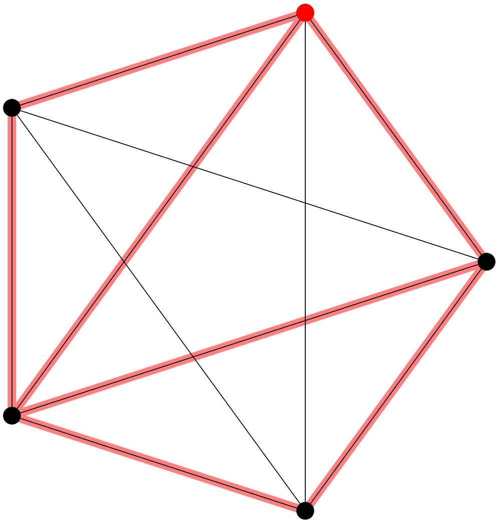
Eulerscher Kreis



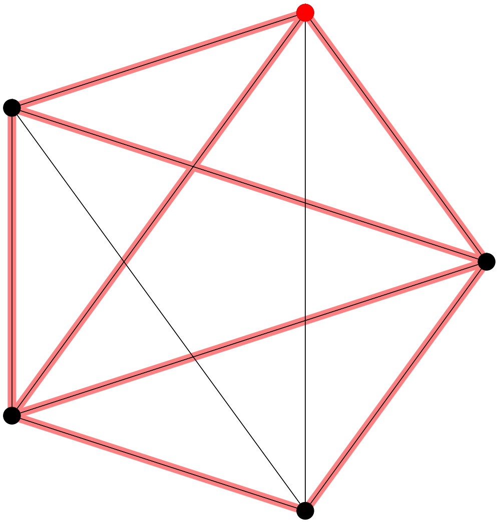
Eulerscher Kreis



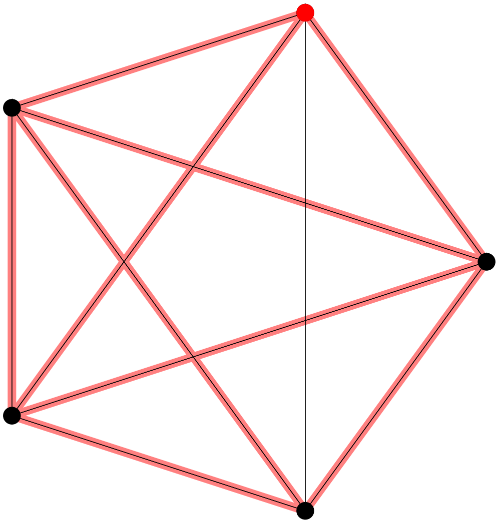
Eulerscher Kreis



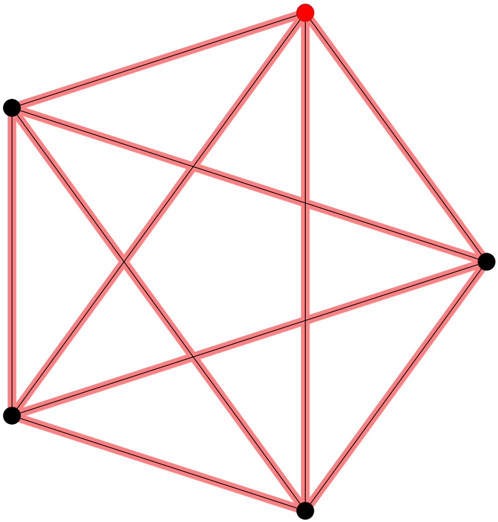
Eulerscher Kreis



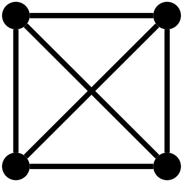
Eulerscher Kreis



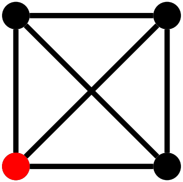
Eulerscher Kreis



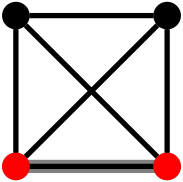
Hamilton-Kreis, kein EK



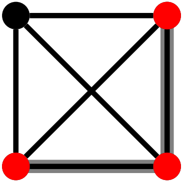
Hamilton-Kreis, kein EK



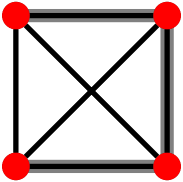
Hamilton-Kreis, kein EK



Hamilton-Kreis, kein EK

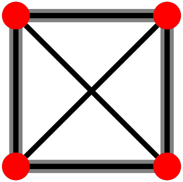


Hamilton-Kreis, kein EK

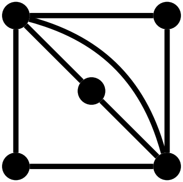


Hamilton-Kreis, kein EK

Karlsruher Institut für Technologie



Eulerkreis, kein HK



Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

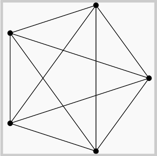
$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

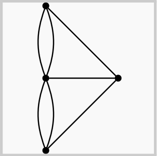
Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.





Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E :$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Umkehrung des Satzes von Euler

KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow$ $C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow$ G ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow$ $C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow$ G ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow$ G ist eulersch$\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch$\Rightarrow$ Beh.

Offene eulersche Linie

Karlsruher Institut für Technologie

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.
A heißt **offene eulersche Linie** von G :⇔ Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug" gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$"

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ∎

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

KIT – Karlsruher Institut für Technologie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Karlsruher Institut für Technologie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Karlsruher Institut für Technologie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

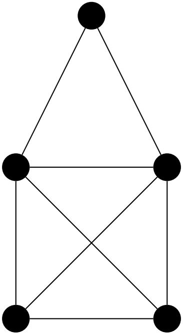
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

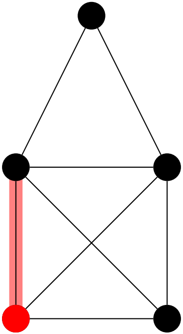
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

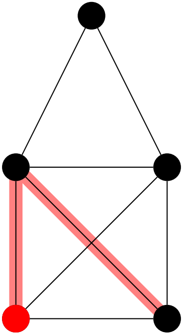
Haus des Nikolaus



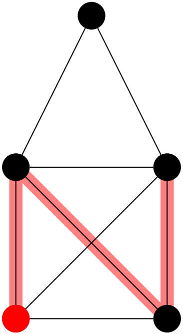
Haus des Nikolaus



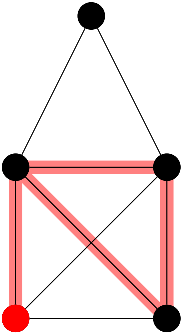
Haus des Nikolaus



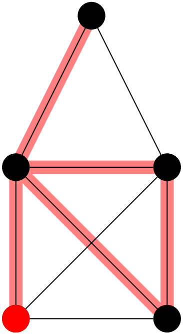
Haus des Nikolaus



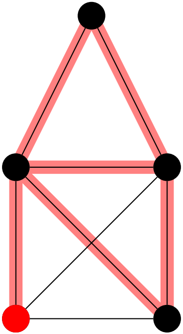
Haus des Nikolaus



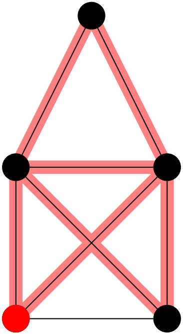
Haus des Nikolaus



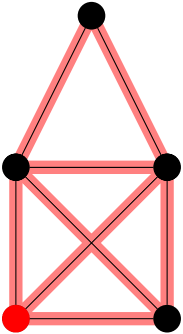
Haus des Nikolaus



Haus des Nikolaus



Haus des Nikolaus

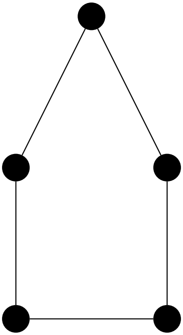


Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

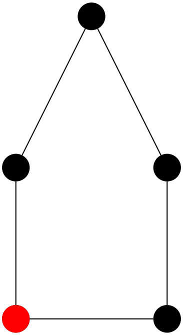
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



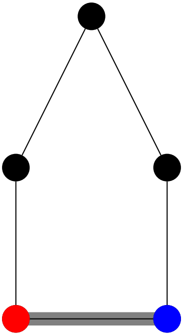
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



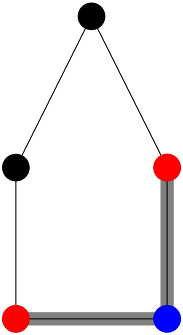
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



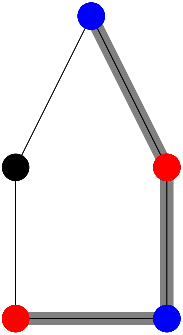
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



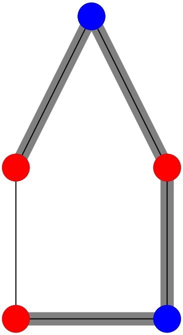
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



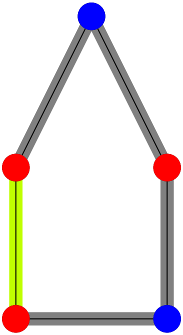
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 4

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit"
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\overset{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\overset{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit"
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\overset{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow$ G ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

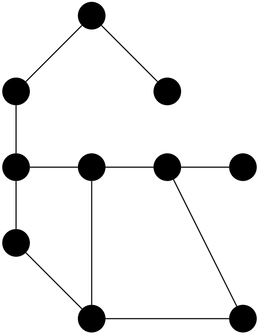
Karlsruher Institut für Technologie

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche ■

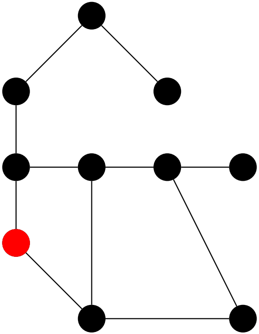
Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow$ G ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche $\blacksquare$

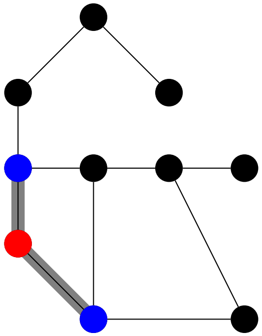
Aufgabe 4 - Beispiel



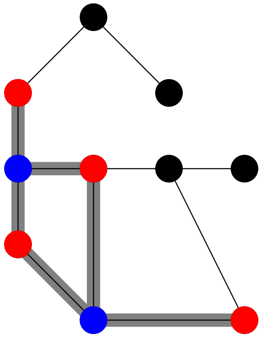
Aufgabe 4 - Beispiel



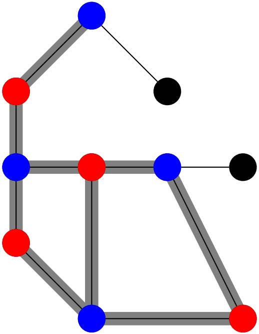
Aufgabe 4 - Beispiel



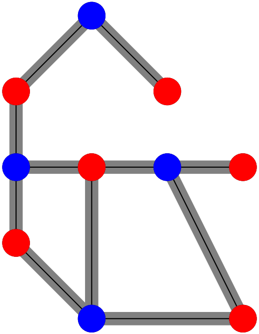
Aufgabe 4 - Beispiel



Aufgabe 4 - Beispiel

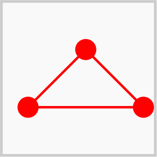
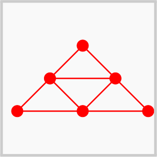
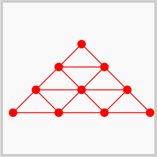


Aufgabe 4 - Beispiel

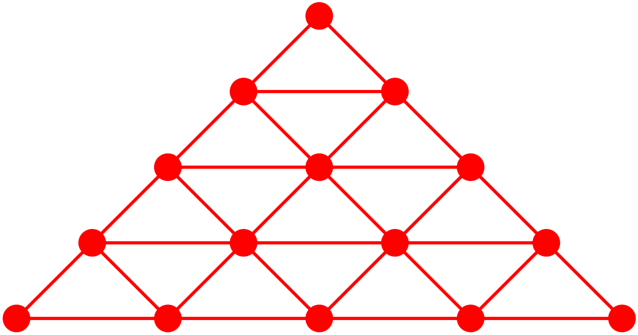


Aufgabe 9, Teil 1

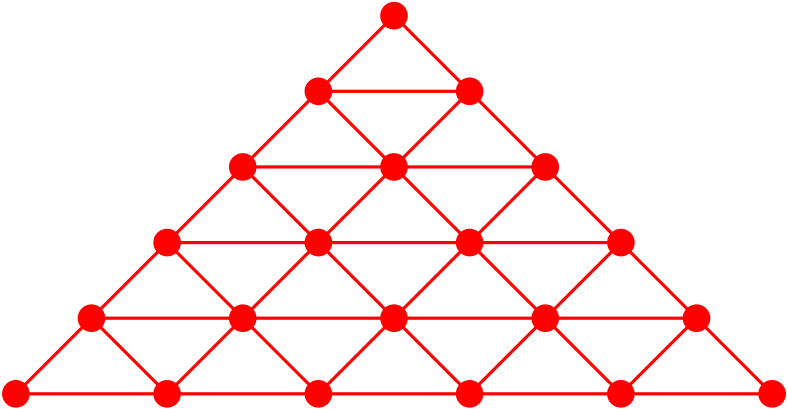
Im folgenden sind die ersten drei Graphen G_1, G_2, G_3 einer Folge (G_n) aus Graphen abgebildet. Wie sieht G_4 aus?

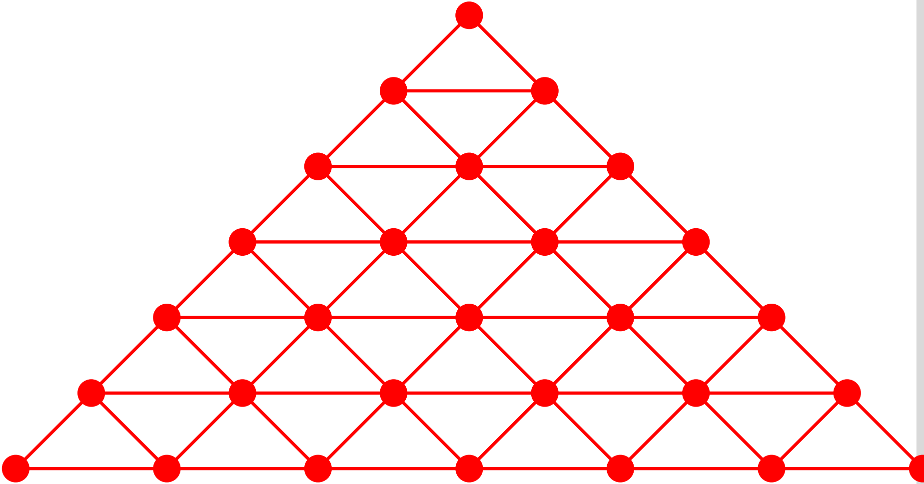
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)

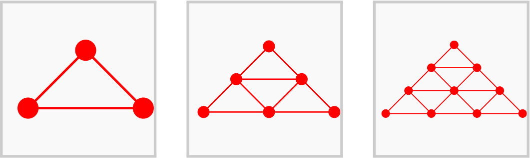


Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat G_i?



Aufgabe 9, Teil 2: Antwort

Ecken:

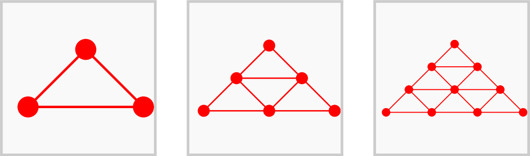
$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{2}$$

Kanten:

$$\begin{aligned}
|K_n| &= |K_{n-1}| + \underbrace{((n+1)-1)+2}_{\text{außen}} + (n-1)\cdot 2 && (3)\\
&= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2 && (4)\\
&= |K_{n-1}| + 3n && (5)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i && (6)\\
&= 3\frac{n^2+n}{2} && (7)
\end{aligned}$$

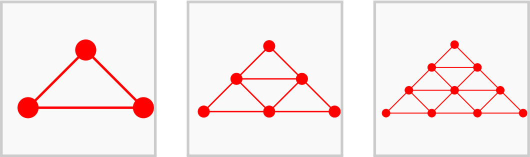
Aufgabe 9, Teil 3

Gebe G_i formal an.



Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)

Gebe G_n formal an.



$$E_n = \{\, e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n;\ x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \mod 2 \,\}$$
$$K_n = \left\{ \{\, e_{x,y}, e_{i,j} \,\} \in E_n^2 \;\middle|\; (x + 2 = i \land y = j) \lor (x + 1 = i \land y \pm 1 = j) \right\}$$
$$G_n = (E_n, K_n)$$

Bildquelle

- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_disk_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

Literatur

- A. Beutelspacher: *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3