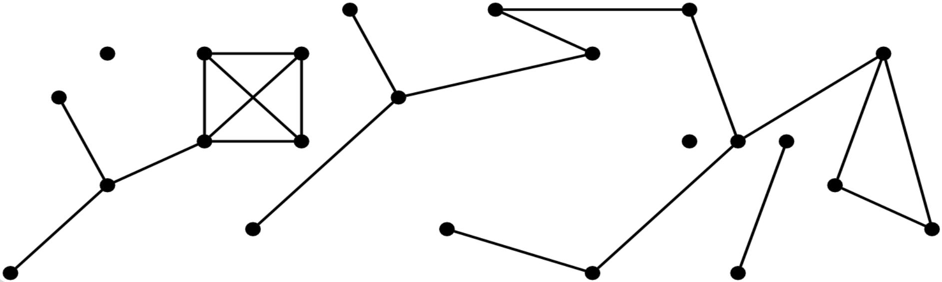
Karlsruher Institut für Technologie

Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK



Contents

Graph

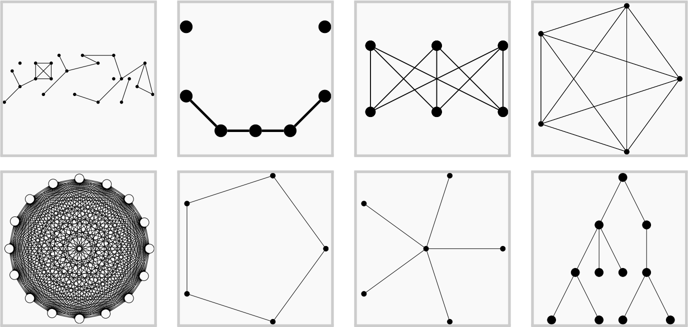
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (V, E), wobei $V \neq \emptyset$ die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenmenge bezeichnet.

Graph

Graph

Ein Graph ist ein Tupel (V, E), wobei $V \neq \emptyset$ die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenmenge bezeichnet.



Synonyme

Knoten $\Leftrightarrow$ Ecken

Inzidenz

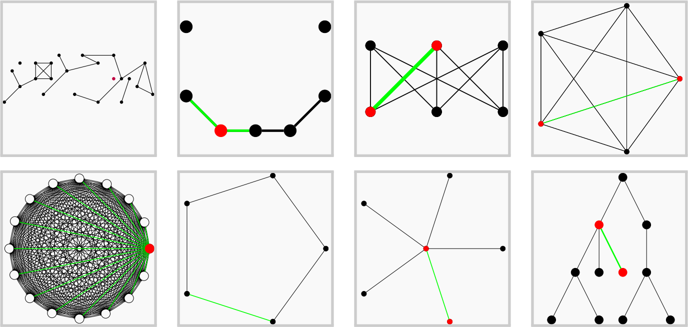
Inzidenz

Sei $v \in V$ und $e = \{ v_1, v_2 \} \in E$.
v heißt **inzident** zu e $:\Leftrightarrow v = v_1$ oder $v = v_2$

Inzidenz

Inzidenz

Sei $v \in V$ und $e = \{ v_1, v_2 \} \in E$.
v heißt **inzident** zu $e :\Leftrightarrow v = v_1$ oder $v = v_2$



Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow E = V \times V \setminus \{ v \in V : \{ v, v \} \}$

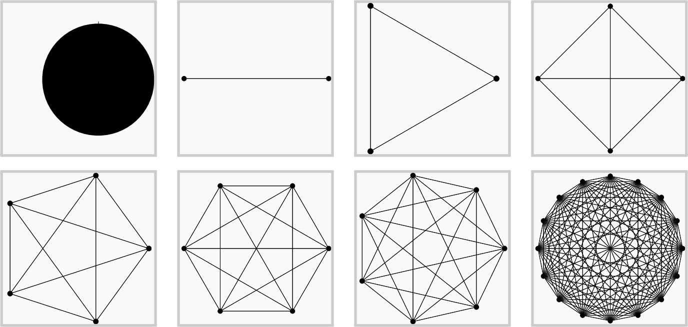
Ein vollständiger Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.

Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow E = V \times V \setminus \{ v \in V : \{ v, v \} \}$

Ein vollständiger Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



Bipartite Graphen

Bipartite Graph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subset V$ zwei disjunkte Knotenmengen mit $V \setminus A = B$.
G heißt **bipartit**
$:\Leftrightarrow \forall_{e=\{\, v_1, v_2 \,\} \in E} : (v_1 \in A$ und $v_2 \in B)$ oder $(v_1 \in B$ und $v_2 \in A)$

TODO: 8 Bilder von Graphen

Vollständig bipartite Graphen

Vollständig bipartite Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph und $\{ A, B \}$ bezeichne die Bipartition.
G heißt **vollständig bipartit** $:\Leftrightarrow \forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : \{ a, b \} \in E$

TODO: 8 Bilder von Graphen

Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{ A, B \}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.
TODO: $K_{2,2}$ TODO: $K_{2,3}$ TODO: $K_{3,3}$

Kantenzug

Kantenzug

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Dann heißt eine Folge $e_1, e_2, \dots, e_s$ von Kanten, zu denen es Knoten $v_0, v_1, v_2, \dots, v_s$ gibt, so dass

- $e_1 = \{ v_0, v_1 \}$
- $e_2 = \{ v_1, v_2 \}$
- $\dots$
- $e_s = \{ v_{s-1}, v_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der v_0 und v_s **verbindet** und s seine **Länge**.

TODO: 8 Bilder

Geschlossener Kantenzug

Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2 \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **geschlossen** $:\Leftrightarrow v_s = v_0$.

TODO: 8 Bilder

Weg

Weg

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2 \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in [1,s] \cap \mathbb{N}} : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$.

TODO: 8 Bilder

Kreis

Kreis

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2 \ldots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

TODO: 8 Bilder

Zusammenhängender Graph

Zusammenhängender Graph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V$: Es ex. ein Kantenzug, der v_1 und v_2 verbindet

TODO: 8 Bilder

Grad eines Knotens

Grad eines Knotens

Der **Grad** eines Knotens ist die Anzahl der Kanten, die von diesem Knoten ausgehen.

Isolierte Knoten

Hat ein Knoten den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

TODO: 8 Bilder

Königsberger Brückenproblem

TODO: Allgemeine Beschreibung

Übersetzung in einen Graphen

TODO: Übersetzung in Graph

Eulerscher Kreis

Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Eulerscher Kreis

TODO: K_5 eulerkreis animieren

Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jeder Knoten von G geraden Grad.

Wenn G einen Knoten mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jeder Knoten geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis per Induktion
TODO

Offene eulersche Linie

Karlsruher Institut für Technologie

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.
A heißt **offene eulersche Linie** von G $:\Leftrightarrow$ Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

TODO: Haus des Nikolaus-Animation. TODO: Beweis