

Geometrie und Topologie

Siehe [GitHub](#)

27. Oktober 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Grundbegriffe	2
1.1	Vorgeplänkel	2
1.2	Topologische Räume	2
1.3	Metrische Räume	6
	Symbolverzeichnis	8
	Stichwortverzeichnis	8

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum \mathbb{R}^2 oder zu einem Torus. Für den \mathbb{R}^2 müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

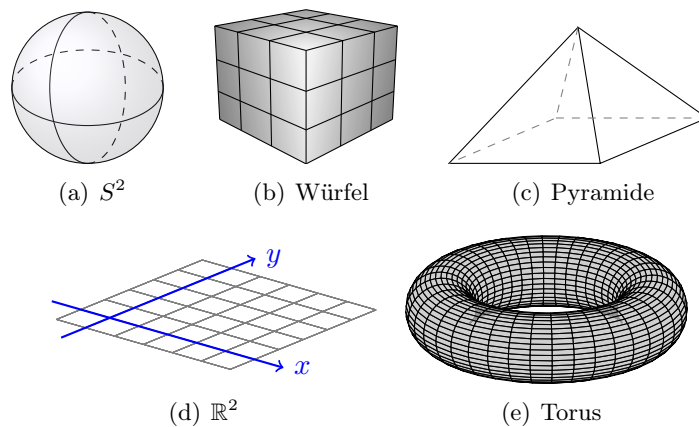


Abbildung 1.1: Beispiele für verschiedene Formen

1.2 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathfrak{T}) bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von \mathfrak{T} heißen **offene Teilmengen** von X .

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Beispiel 1

- 1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.
 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen \Leftrightarrow für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$
 Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$
- 2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum
- 3) X Menge, $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, X \}$ heißt „triviale Topologie“
- 4) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“
- 5) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
 Beobachtung: $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X], \text{ sodass } \mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- 6) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{ U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r) \}$
- 7) $X = \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$
 abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x , wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

- a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M .
- b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M .
- c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M .
- d) M heißt **dicht** in X , wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

- 1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie
 $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$
- 2) $X = \mathbb{R}, M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$
- 3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$
 $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum.

- a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie \mathfrak{T} , wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} ist.

- b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus \mathfrak{B} ist.

Beispiel 3

Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie \mathfrak{T} . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von \mathfrak{T} .

Bemerkung 1

Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie \mathfrak{T} auf X , für die \mathfrak{B} Subbasis ist.

Definition 5

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y .

\mathfrak{T}_Y heißt **Spurtopologie** und (Y, \mathfrak{T}_Y) heißt ein **Teilraum** von (X, \mathfrak{T})

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.

$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$ ist eine Basis von \mathfrak{T} .

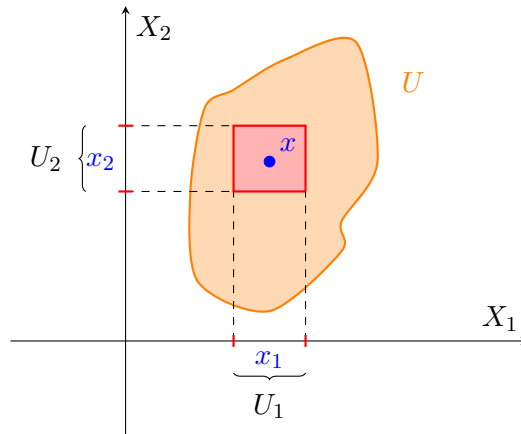


Abbildung 1.2: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

- 1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
 \Rightarrow Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf \mathbb{R}^2 überein.
- 2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. \mathfrak{T} Produkttopologie auf \mathbb{R}^2 : $U_1 \times U_2$
 (Siehe Abb. 1.3)

Definition 7

Sei X topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X , $\overline{X} = X / \sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \rightarrow \overline{x}, x \mapsto [x]_\sim, U \subseteq \overline{X}$ heißt offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf \overline{X} definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

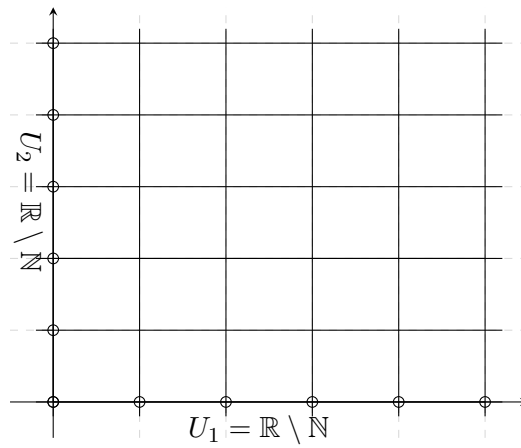
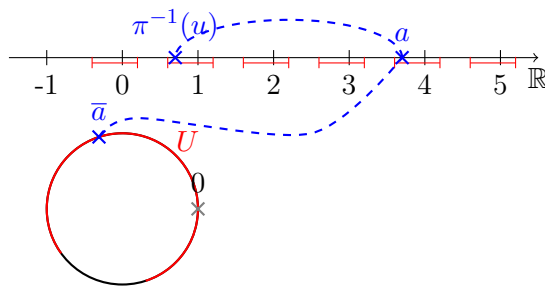


Abbildung 1.3: Zariski-Topologie auf \mathbb{R}^2

Beispiel 5

$$X = \mathbb{R}, a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

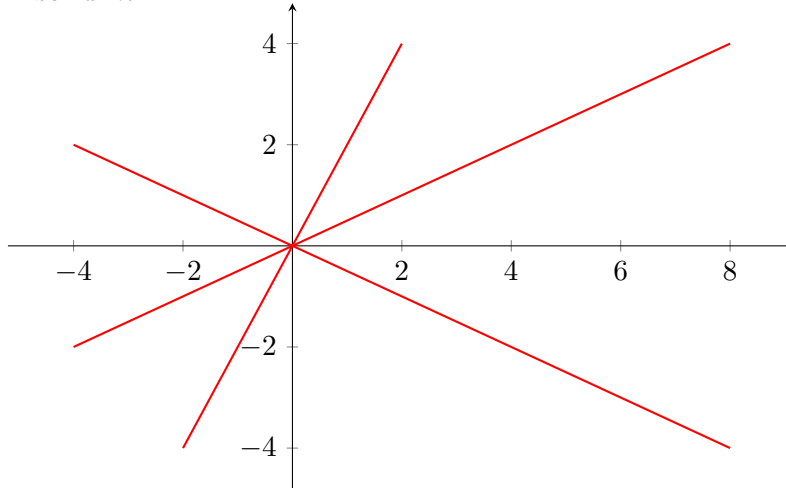
X/\sim ist ein Torus.

Beispiel 6

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \end{aligned}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für $n = 1$:



1.3 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

\mathfrak{B} ist Basis einer Topologie auf X .

Beispiel 7

Sei V ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird V durch $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ zum metrischen Raum.

Beispiel 8 (diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 9

$X = \mathbb{R}^2$ und $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

Beobachtung: d erzeugt die euklidische Topologie.

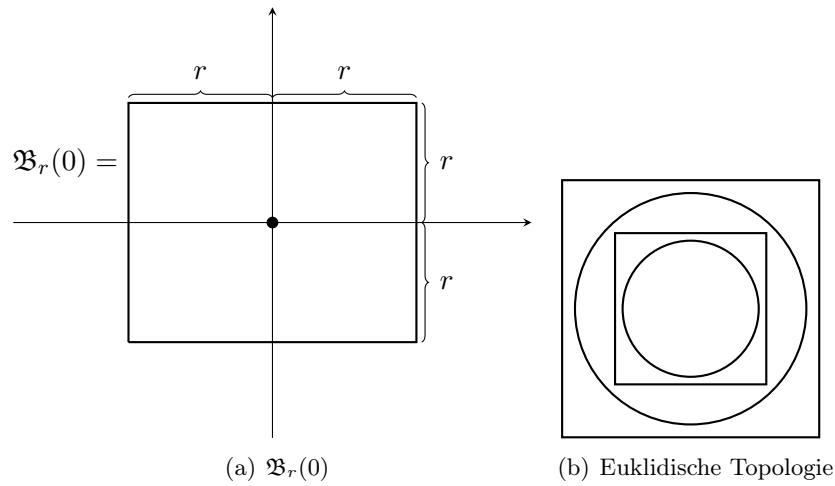
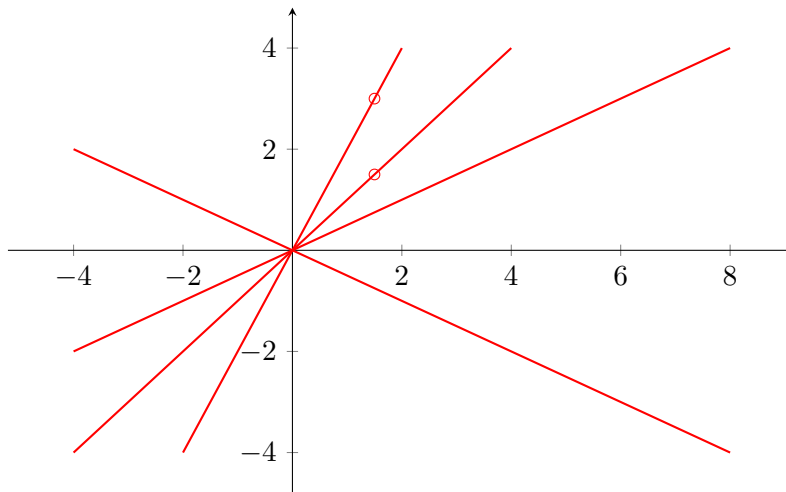


Abbildung 1.4: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 10 (SNCF-Metrik¹)

$$X = \mathbb{R}^2$$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.
- b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

TODO: Es fehlt eine „Beweisskizze“, die den \mathbb{R}^2 darstellt sowie zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sowie ihre (disjunkten) Umgebungen bzgl. der X_1 -Achse.

Symbolverzeichnis

\mathfrak{B} Basis einer Topologie.

\mathfrak{T} Topologie.

\mathbb{Z} Ganze Zahlen.

\mathbb{Q} Rationale Zahlen.

\mathbb{R} Reelle Zahlen.

\mathbb{R}^\times Multiplikative Einheitengruppe von \mathbb{R} .

\mathbb{R}^+ Echt positive reelle Zahlen.

\mathbb{P} Projektion.

\overline{M} Abschluss der Menge M .

M° Inneres der Menge M .

∂M Rand der Menge M .

$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.

$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M .

$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.

$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.

$\|x\|$ Norm von x .

$|x|$ Betrag von x .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.

Index

abgeschlossen, 2

Abschluss, 3

Basis, 3

dicht, 3

Inneres, 3

Kern

offener, 3

Metrik, 6

diskrete, 6

SNCF, 7

offen, 2

Produkttopologie, 4

Quotiententopologie, 4

Rand, 3

Raum

hausdorffscher, 7

metrischer, 6

topologischer, 2

Spurtopologie, 4

Subbasis, 3

Teilraum, 4

Topologie

diskrete, 3, 6

euklidische, 3

triviale, 3

Zariski, 3

Torus, 2

Umgebung, 3