

Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -41 \\ -15 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (1)$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{1}{3} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (3)$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \cdot \frac{1}{5} \quad (4)$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} =: R \quad (5)$$

Es gilt nun:

$$P := P^{(3)} \cdot P^{(1)} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$L^{(4)} \cdot P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(1)} \cdot A = R \quad (9)$$

$$L^{-1} = L^{(4)} \cdot \hat{L}_1 \quad (10)$$

$$\hat{L}_1 = P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot (P^{(3)})^{-1} \quad (11)$$

$$= P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(3)} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$L = (L^{(4)} \cdot \hat{L}_1)^{-1} \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Überprüfung mit Wolfram|Alpha.

Aufgabe 2

Zeige die Aussage für 2×2 Matrizen durch Gauß-en mit Spaltenpivotwahl.

Lösung

Behauptung:

Für alle tridiagonalen Matrizen gilt:

- (i) Die Gauß-Elimination erhält die tridiagonale Struktur
- (ii) $\rho_n(A) := \frac{\alpha_{\max}}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2$

Beweis:

Teil 1: (i)

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & \\ * & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & * & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cdot \frac{-a_{21}}{a_{11}} \\ \leftarrow + \end{array} \right. \end{array} \quad (16)$$

Offensichtlich ändert diese Operation nur Zeile 2. a_{21} wird zu 0, a_{22} ändert sich irgendwie, alles andere bleibt unverändert. Die gesamte Matrix ist keine tridiagonale Matrix mehr, aber die um Submatrix in $R^{(n-1) \times (n-1)}$ ist noch eine.

Muss man zuvor Zeile 1 und 2 tauschen (andere Zeilen kommen nicht in Frage), so ist später die Stelle $a_{21} = 0$, a_{22} ändert sich wieder irgendwie und a_{23} ändert sich auch. Dies ändert aber nichts an der tridiagonalen Struktur der Submatrix.

Teil 2: (ii) für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Sei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ beliebig.

O.B.d.A sei die Spaltenpivotwahl bereits durchgeführt, also $|a_{11}| \geq |a_{21}|$.

Nun folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{-a_{21}}{a_{11}} \\ + \end{array} \quad (17)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Wegen $|a_{11}| \geq |a_{21}|$ gilt:

$$\left\| \frac{a_{21}}{a_{11}} \right\| \leq 1 \quad (19)$$

Also insbesondere

$$\underbrace{a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}}_{\leq \alpha_{\max}} \leq 2 \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (20)$$

Damit ist Aussage (ii) für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gezeigt.

Teil 3: (ii) für allgemeinen Fall Aus Teil 2 folgt die Aussage auch direkt für größere Matrizen. Der worst case ist, wenn man beim Addieren einer Zeile auf eine andere mit $\max_{i,j} |a_{ij}|$ multiplizieren muss um das erste nicht-0-Element der Zeile zu entfernen und das zweite auch $\max_{i,j} |a_{ij}|$ ist. Dann muss man aber im nächsten schritt mit einem Faktor $\leq \frac{1}{2}$ multiplizieren, erhält also nicht einmal mehr $2 \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Aufgabe 3

Teilaufgabe i

relativer Fehler:

$$\frac{\left| \frac{x}{y} - \frac{x \cdot (1 + \epsilon_x)}{y \cdot (1 + \epsilon_y)} \right|}{\left| \frac{x}{y} \right|} = \dots = \left| \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{1 + \epsilon_y} \right| \leq \frac{|\epsilon_y| + |\epsilon_x|}{|1 + \epsilon_y|} \leq \frac{2 \cdot \text{eps}}{|1 + \epsilon_y|} \quad (21)$$

Der letzte Ausdruck ist ungefähr gleich $2 \cdot \text{eps}$, da $1 + \epsilon_y$ ungefähr gleich 1 ist. Also: Der relative Fehler kann sich maximal verdoppeln.

Teilaufgabe ii

Die zweite Formel ist vorzuziehen, also $f(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, da es bei Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen zur Stellenauslöschung kommt. Bei der ersten Formel, also $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, tritt genau dieses Problem auf: x und $\sqrt{x^2 - 1}$ sind für große x ungefähr gleich groß.

Bei der zweiten Formel tritt das Problem nicht auf: x ist positiv und $\sqrt{x^2 - 1}$ auch, also gibt es in dem Ausdruck keine Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen.

Aufgabe 4

TODO

Aufgabe 5

TODO