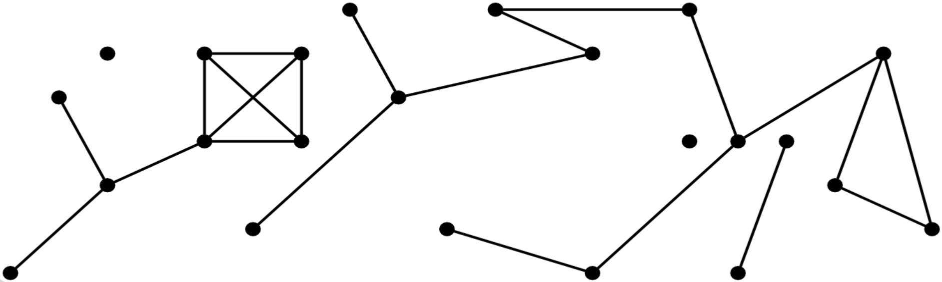
Karlsruher Institut für Technologie

Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK



Inhalte

Graph

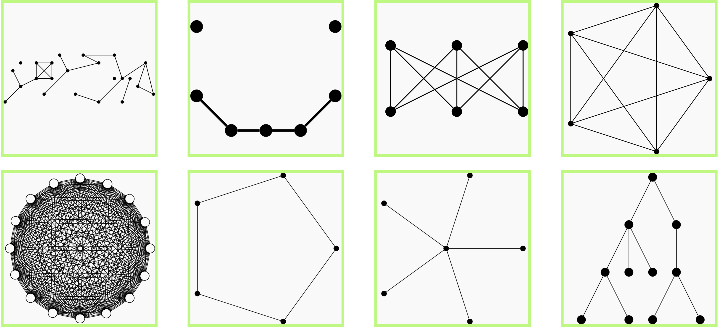
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K), wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

Graph

Graph

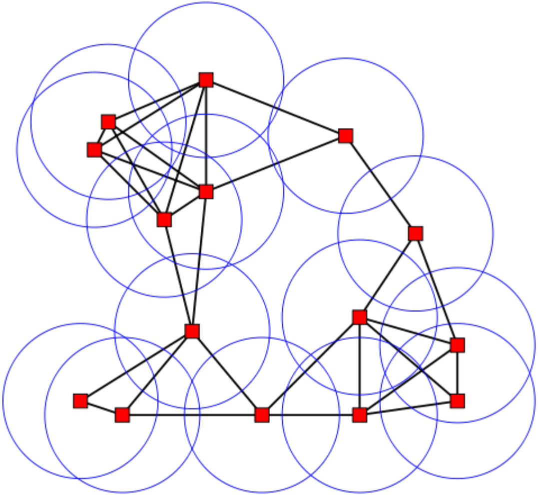
Ein Graph ist ein Tupel (E, K), wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



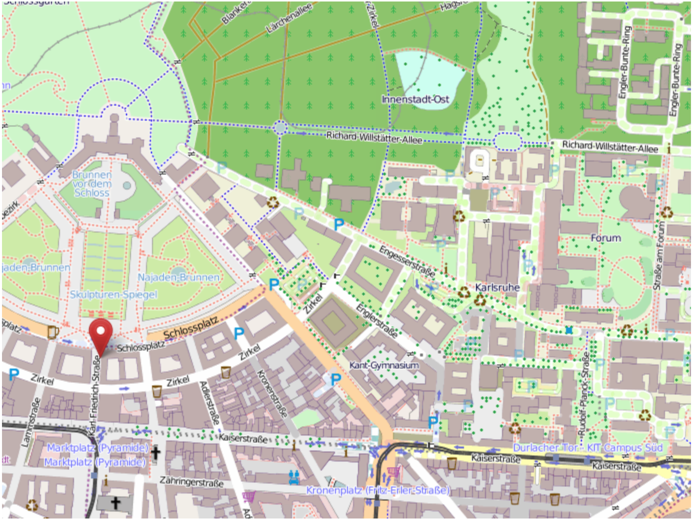
Synonyme

$$\text{Knoten} \Leftrightarrow \text{Ecken}$$

Modellierung, Flüsse, Netzwerke

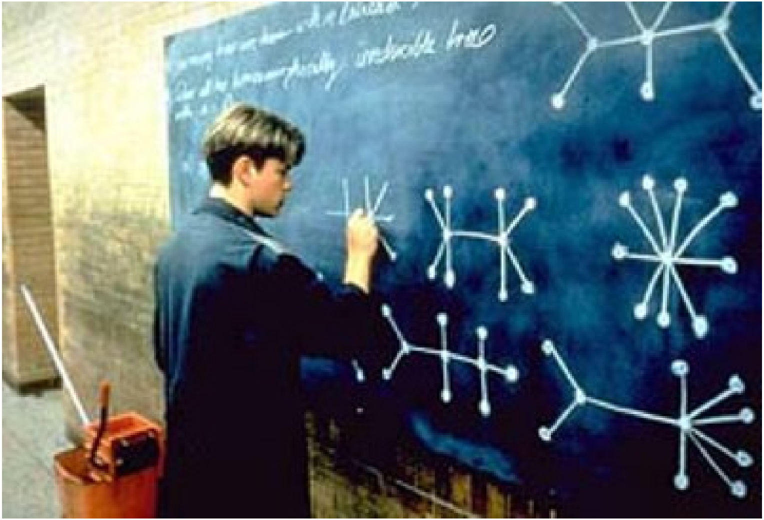


Karten

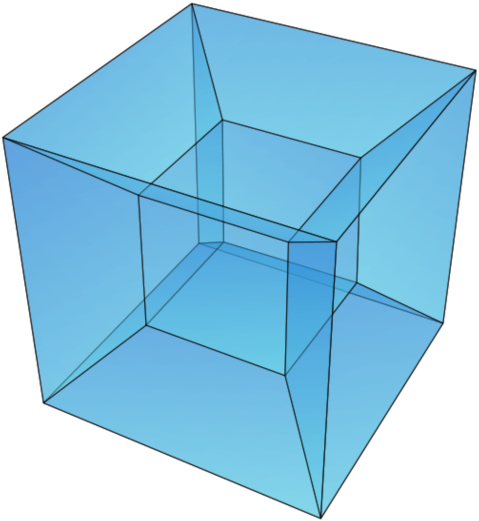


Innenstadt-Ost
Richard-Willstätter-Allee
Lärchenallee
Brunnen vor dem Schloss
Najaden-Brunnen
Skulpturen-Spiegel
Schlossplatz
Zirkel
Engesserstraße
Englerstraße
Karlsruhe
Forum
Kant-Gymnasium
Karl-Friedrich-Straße
Kronenstraße
Adlerstraße
Kaiserstraße
Marktplatz (Pyramide)
Zähringerstraße
Kronenplatz (Fritz-Erler-Straße)
Durlacher Tor - KIT-Campus Süd
Rudolf-Planck-Straße
Straße am Forum
Engler-Bunte-Ring

Good Will Hunting



Graham's Number



Isomorphe Graphen

martin-thoma.de/uni/graph.html

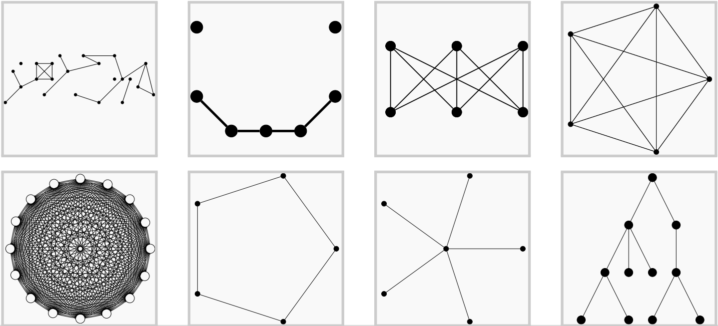
Grad einer Ecke

Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecke

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

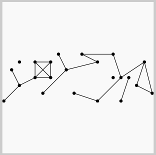


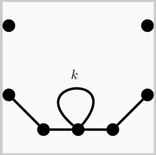
Schlinge

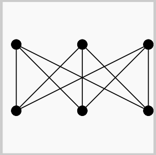
Schlinge

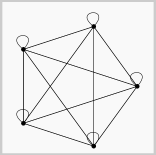
Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $k = \{ e_1, e_2 \} \in K$ eine Kante.
k heißt **Schlinge** $:\Leftrightarrow e_1 = e_2$

Ein Graph ohne Schlingen heißt „schlingenfrei“







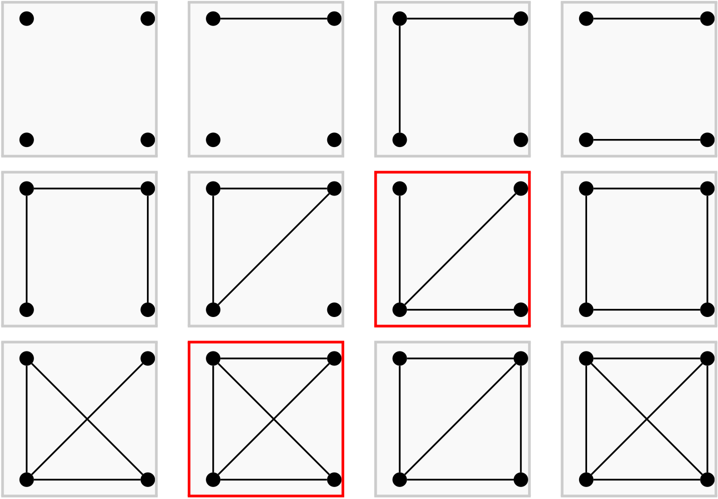


Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.

Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.



Inzidenz

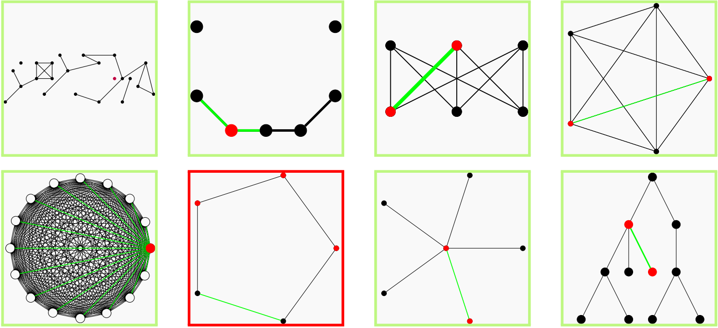
Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{ e_1, e_2 \} \in K$.
e heißt **inzident** zu $k :\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

Inzidenz

Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{ e_1, e_2 \} \in K$.
e heißt **inzident** zu k $:\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{\, \{\, e, e \,\} \mid e \in E \,\}$

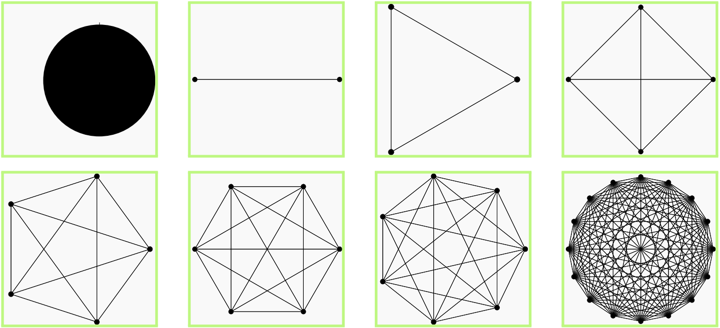
Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

Vollständige Graphen

Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{\, \{\, e, e \,\} \mid e \in E \,\}$

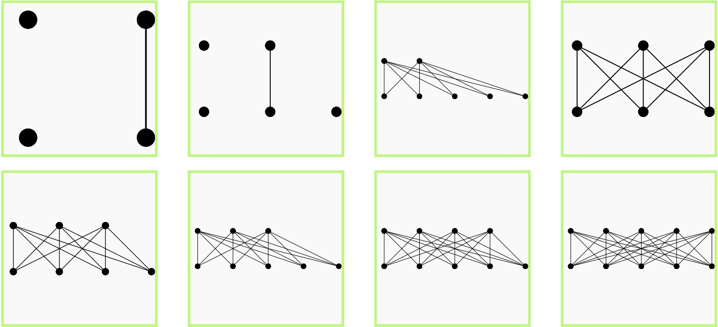
Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.



Bipartiter Graph

Bipartiter Graph

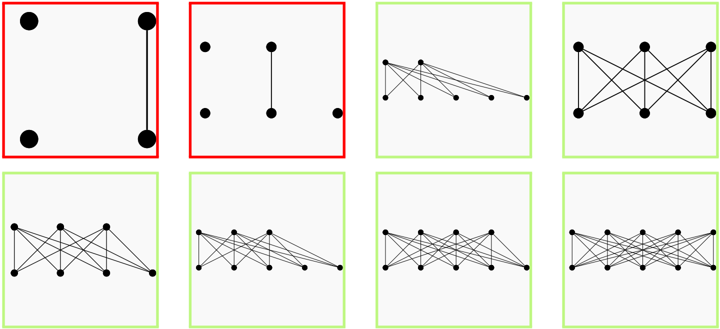
Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.
G heißt **bipartit**
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{\, e_1, e_2 \,\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$



Vollständig bipartiter Graph

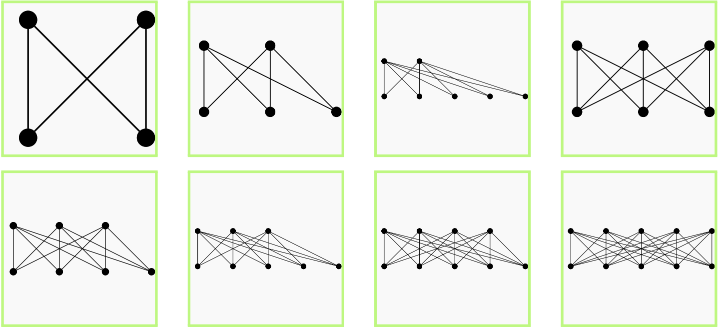
Vollständig bipartiter Graph

Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{ A, B \}$ bezeichne die Bipartition.
G heißt **vollständig bipartit** $:\Leftrightarrow A \times B = K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



Aufgabe 2

Karlsruher Institut für Technologie

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Aufgabe 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

$$\text{Ecken: } m + n \tag{1}$$
$$\text{Kanten: } m \cdot n \tag{2}$$

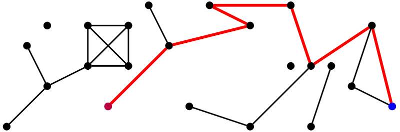
Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
Dann heißt eine Folge $k_1, k_2, \dots, k_s$ von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$ gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- $\dots$
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.

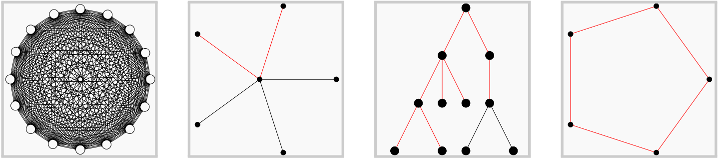


Geschlossener Kantenzug

Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug mit $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$ und $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$.
A heißt **geschlossen** $:\Leftrightarrow e_0 = e_s$.

Ein Kantenzug wird durch den Tupel $(e_0, \dots, e_s) \in E^{s+1}$ charakterisiert.



Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \ldots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\ldots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \ldots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\ldots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \ldots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,\ldots,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \ldots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.

Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

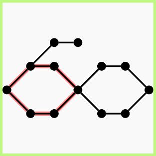
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis" genannt.

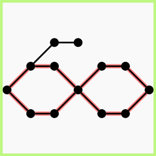
Kreis

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow$ A ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.





Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.
Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.
G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis $\blacksquare$

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis ■

Aufgabe 5

Karlsruher Institut für Technologie

Zeigen Sie:

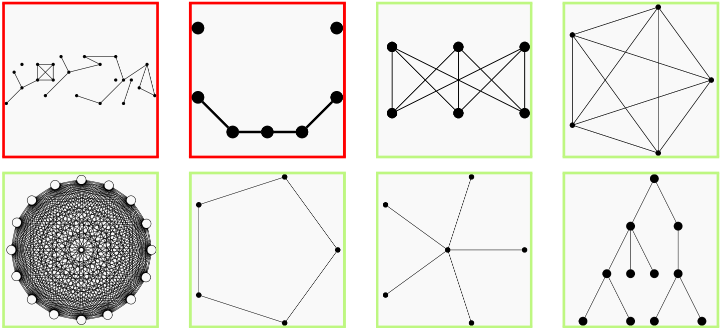
Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0.
Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1, die wiederum min. Grad 2 hat usw.
G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j, die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis $\blacksquare$

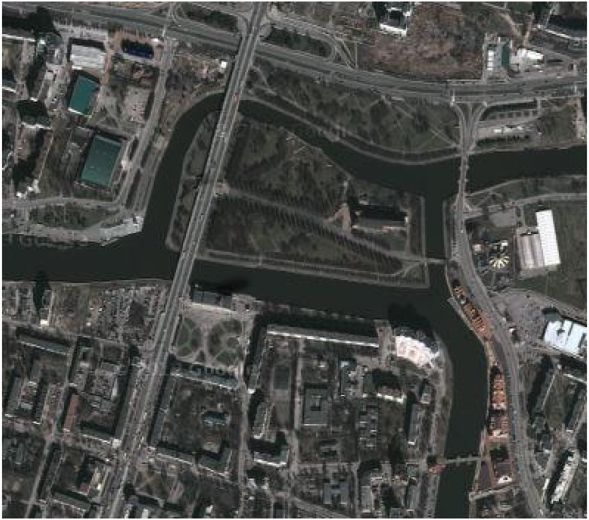
Zusammenhängender Graph

Zusammenhängender Graph

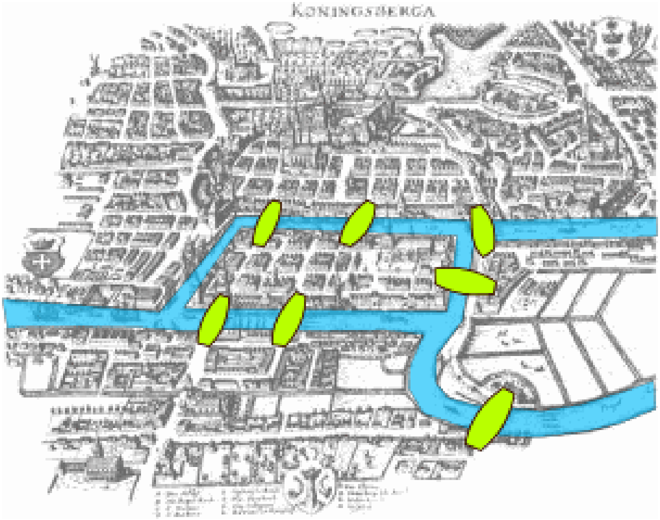
Sei $G = (E, K)$ ein Graph.
G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet



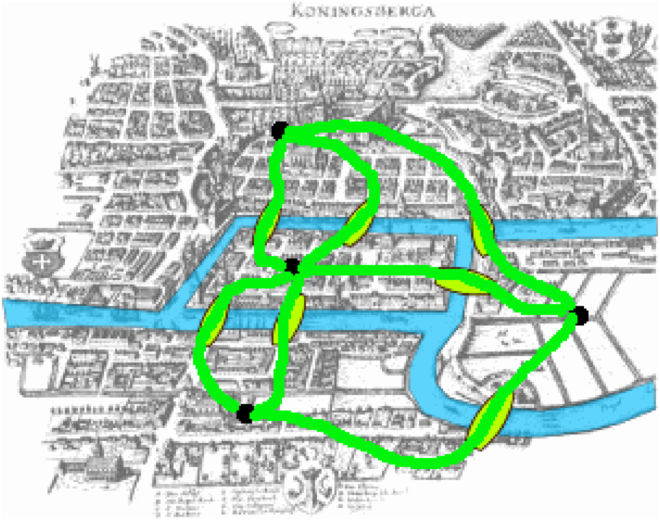
Königsberg heute



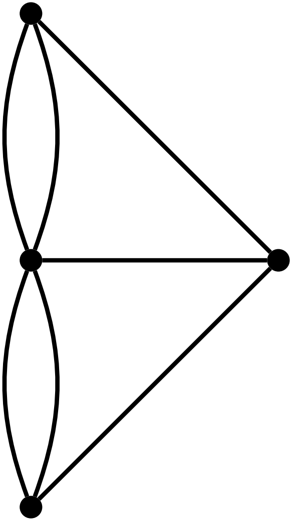
Königsberger Brückenproblem



Übersetzung in einen Graphen



Übersetzung in einen Graphen



Eulerscher Kreis

Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Hamiltonkreis

Achtung

Verwechslungsgefahr: Hamiltonkreis $\neq$ Eulerkreis

Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **Hamilton-Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e$ ist genau ein mal in A.

Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Hamiltonkreis

Karlsruher Institut für Technologie

Achtung

Verwechslungsgefahr: Hamiltonkreis $\neq$ Eulerkreis

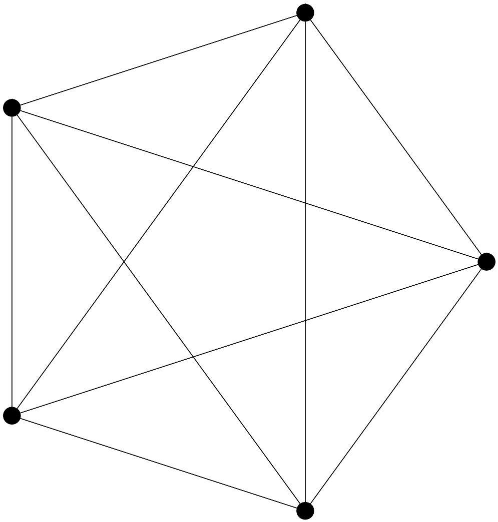
Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **Hamilton-Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e$ ist genau ein mal in A.

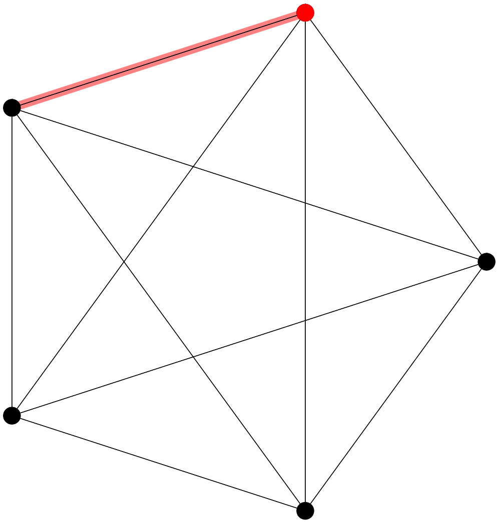
Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

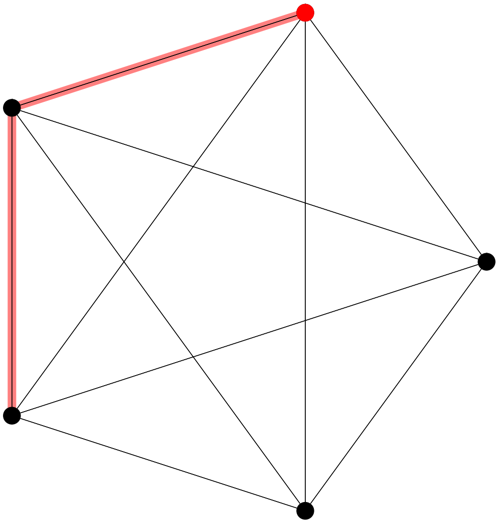
Eulerscher Kreis



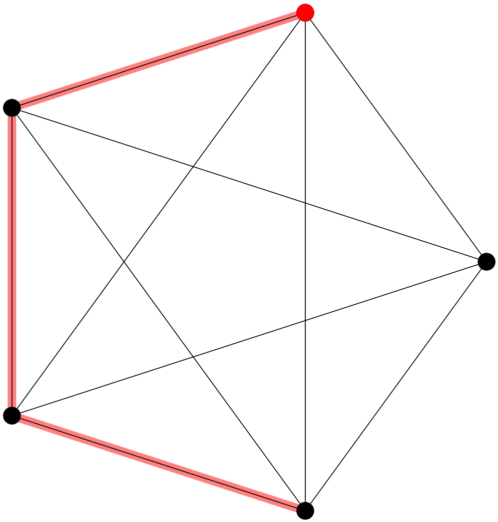
Eulerscher Kreis



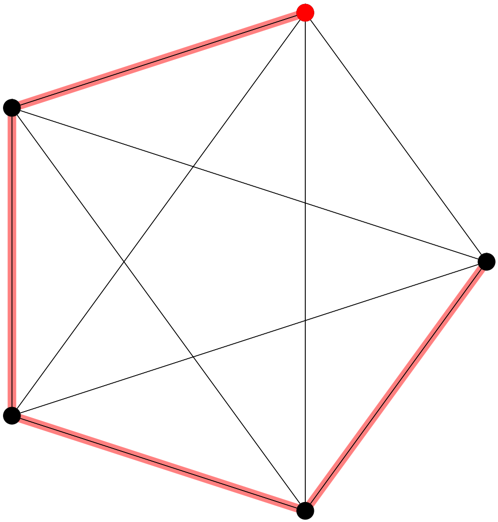
Eulerscher Kreis



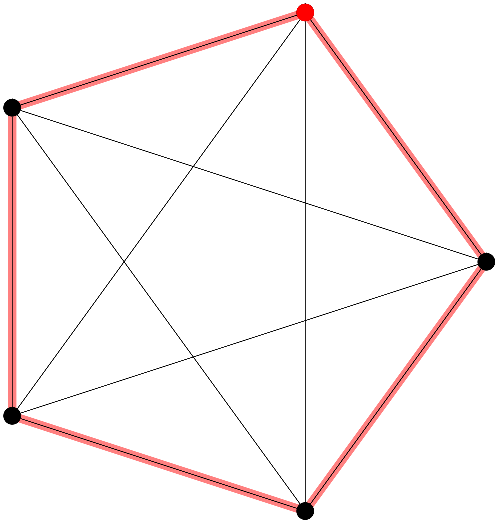
Eulerscher Kreis



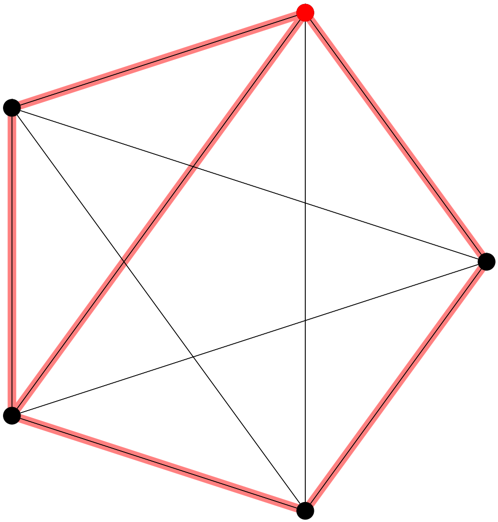
Eulerscher Kreis



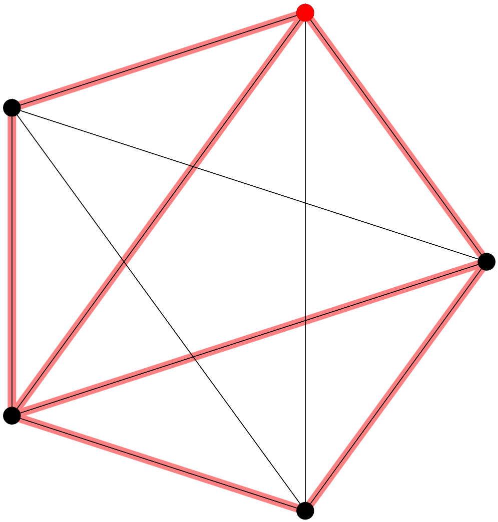
Eulerscher Kreis



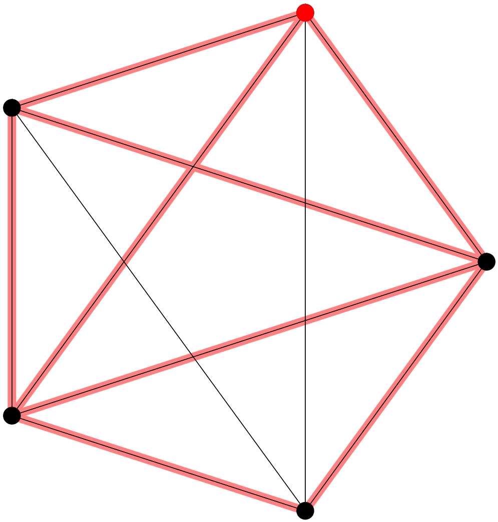
Eulerscher Kreis



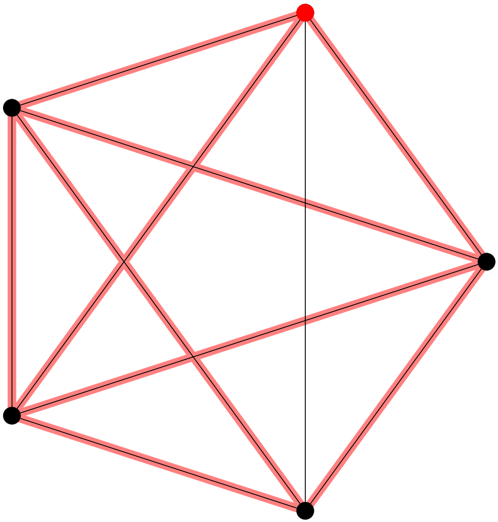
Eulerscher Kreis



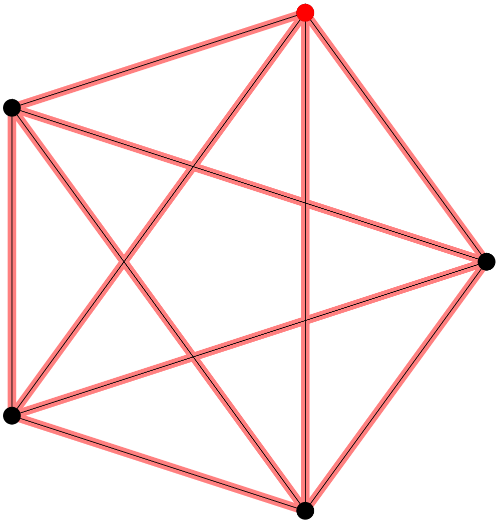
Eulerscher Kreis



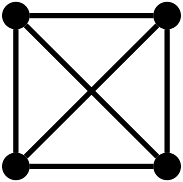
Eulerscher Kreis



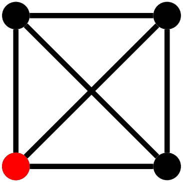
Eulerscher Kreis



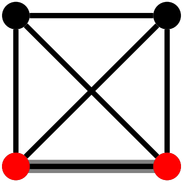
Hamilton-Kreis, kein EK



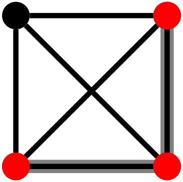
Hamilton-Kreis, kein EK



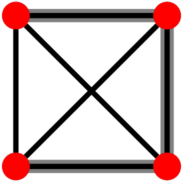
Hamilton-Kreis, kein EK



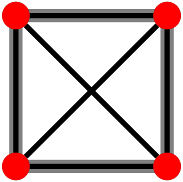
Hamilton-Kreis, kein EK



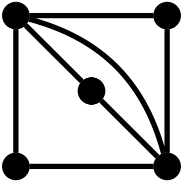
Hamilton-Kreis, kein EK



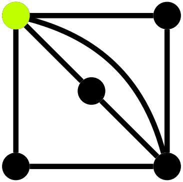
Hamilton-Kreis, kein EK



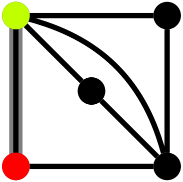
Eulerkreis, kein HK



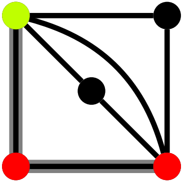
Eulerkreis, kein HK



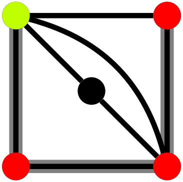
Eulerkreis, kein HK



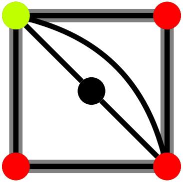
Eulerkreis, kein HK



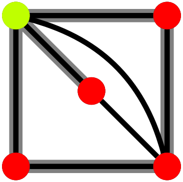
Eulerkreis, kein HK



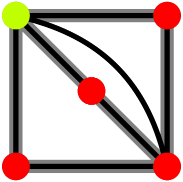
Eulerkreis, kein HK



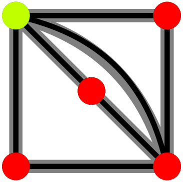
Eulerkreis, kein HK



Eulerkreis, kein HK



Eulerkreis, kein HK



Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

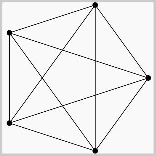
$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

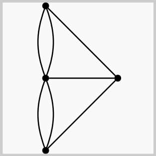
Satz von Euler

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

$\Rightarrow$ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.





Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Beweis: Satz von Euler

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E$: Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$
Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
$\Rightarrow$ Grad$(e) \equiv 0 \mod 2$

Umkehrung des Satzes von Euler

KIT – Karlsruher Institut für Technologie

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\overset{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.
...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\overset{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\overset{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten
I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓
$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓
$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓
I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.
I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. $\Rightarrow$ Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xRightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G.
...

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\xRightarrow{I.V.}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\xRightarrow{I.V.}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow$ $C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow$ G ist eulersch$\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\xRightarrow{I.V.}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow$ $C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow$ G ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\xRightarrow{I.V.}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...
Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad
$\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$
$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden
$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

$\Rightarrow$ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\overset{I.V.}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise $C_1, \dots, C_n$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt" werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch $\Rightarrow$ Beh.

Wie findet man Eulerkreise?

Algorithmus 1 Algorithmus von Hierholzer

Require: $G = (E, K)$ ein eulerscher Graph.

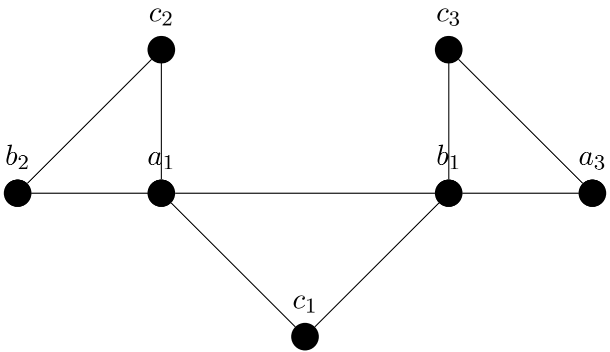
$C \leftarrow$ leerer Kreis
repeat
  $C_{\text{tmp}} \leftarrow$ ein beliebiger Kreis ▷ vgl. Aufgabe 5
  $C \leftarrow C$ vereinigt mit C_{tmp}
  Entferne Kanten in C_{tmp} aus G
  Entferne isolierte Ecken
until C ist Eulerkreis

Ergebnis: Eulerkreis C

Sind Eulerkreise eindeutig?

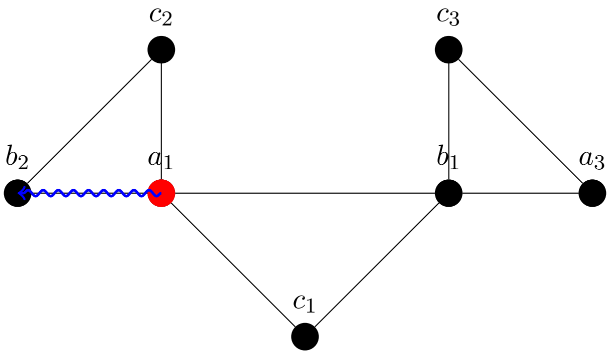
Sind Eulerkreise bis auf Rotation und Symmetrie eindeutig?

Sind Eulerkreise eindeutig?



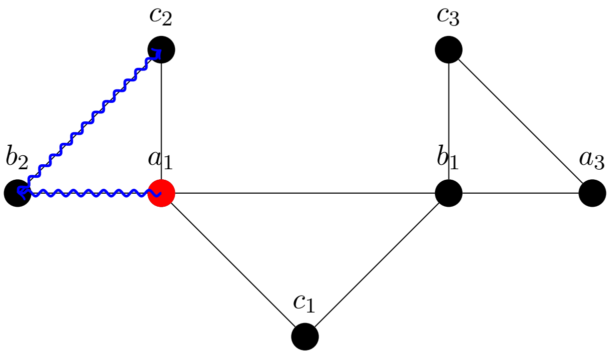
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



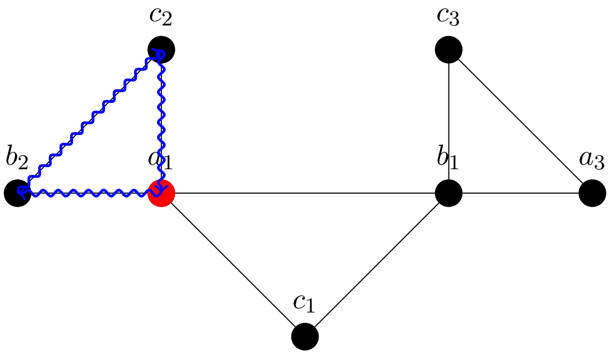
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



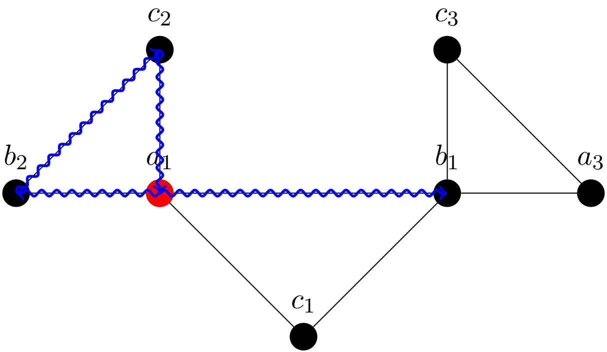
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



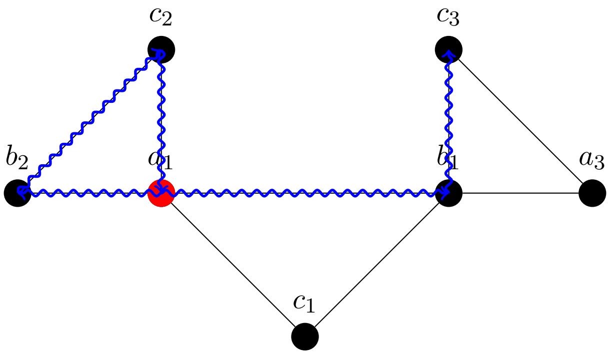
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



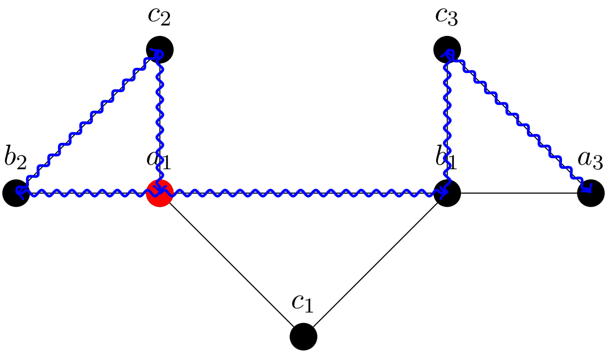
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



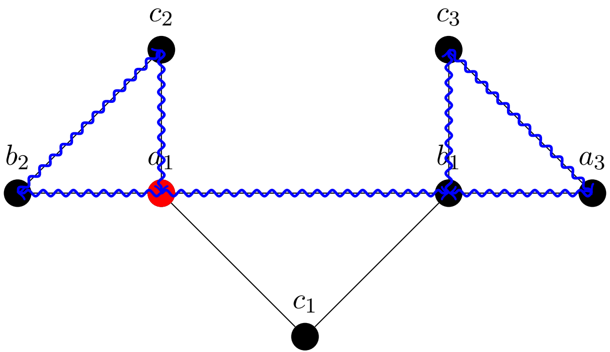
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



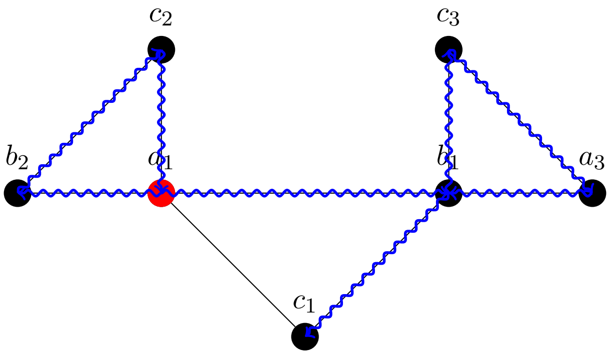
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



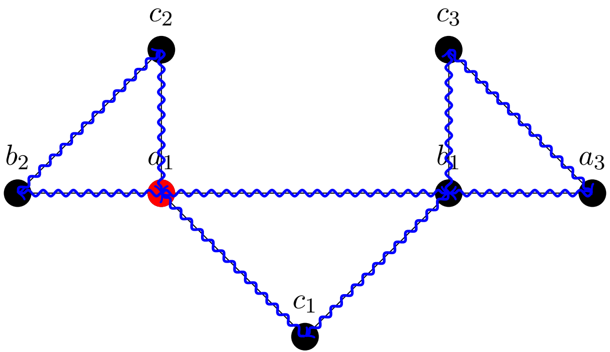
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



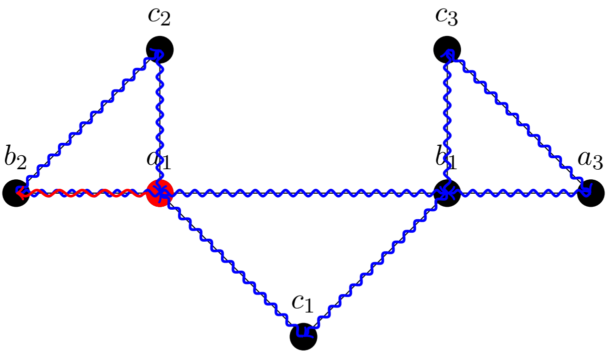
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



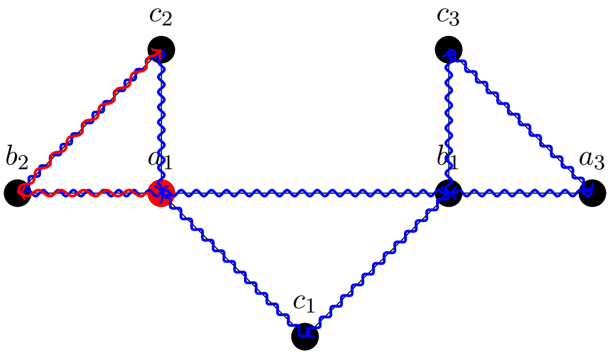
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



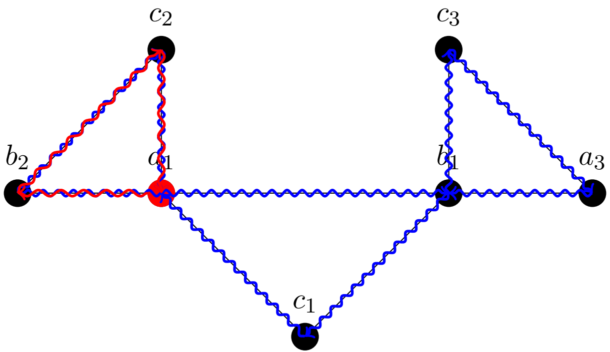
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



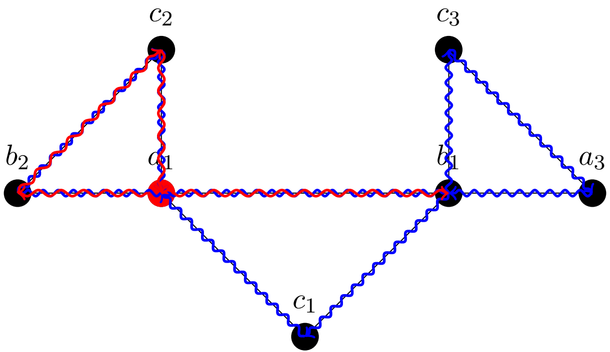
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



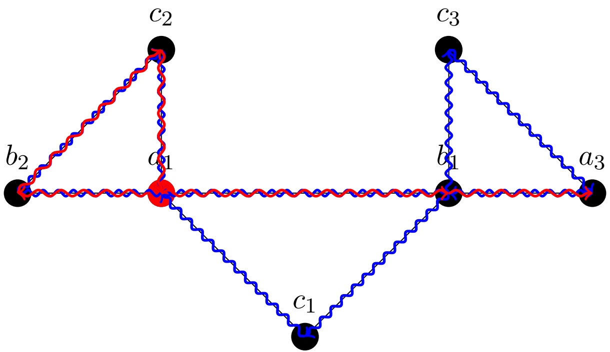
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



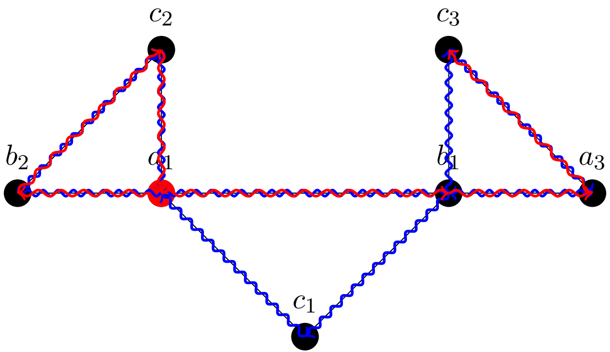
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



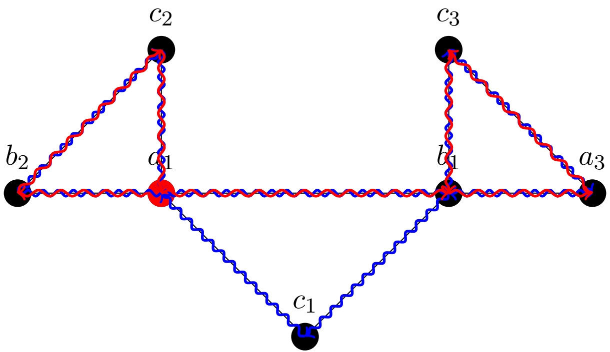
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



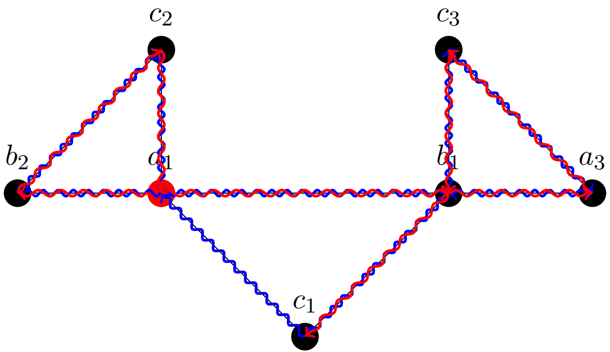
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



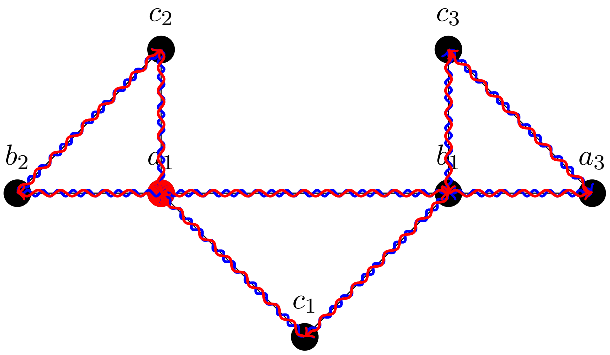
$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



$\Rightarrow$ Eulerkreise sind im Allgemeinen nicht eindeutig

Offene eulersche Linie

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.
A heißt **offene eulersche Linie** von G $:\Leftrightarrow$ Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$“

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

Offene eulersche Linie

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.
G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow$ G hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „$\Rightarrow$ "

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{ e_s, e_0 \})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

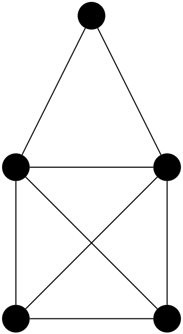
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

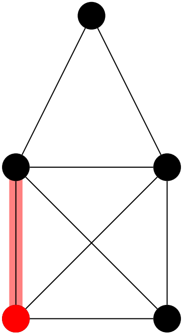
$\Leftrightarrow$ in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s. ■

Rückrichtung analog

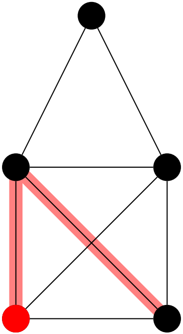
Haus des Nikolaus



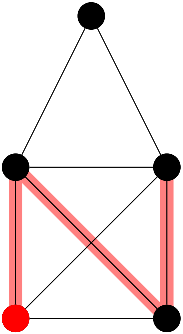
Haus des Nikolaus



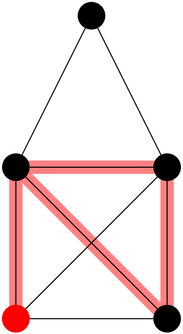
Haus des Nikolaus



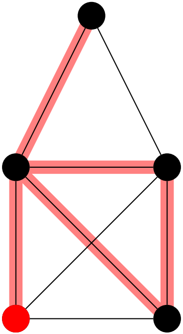
Haus des Nikolaus



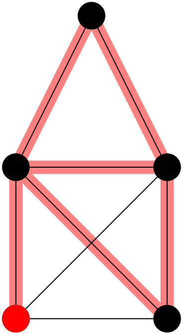
Haus des Nikolaus



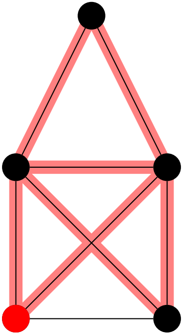
Haus des Nikolaus



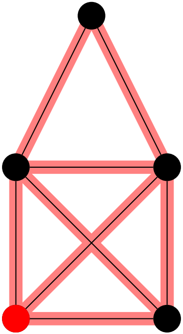
Haus des Nikolaus



Haus des Nikolaus



Haus des Nikolaus

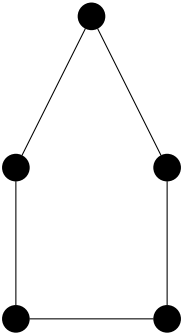


Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

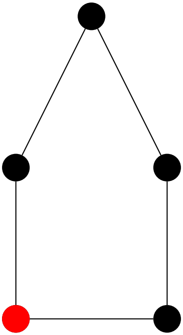
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



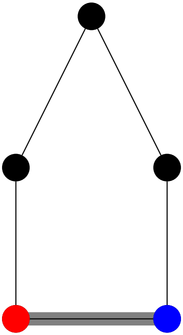
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



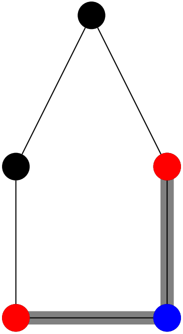
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



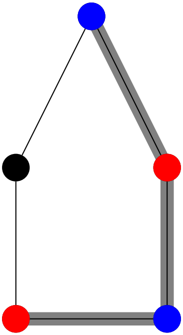
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



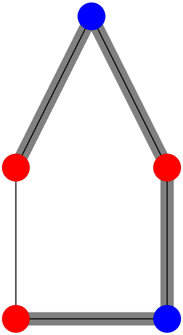
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



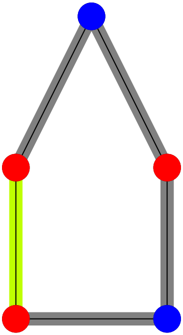
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 4

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit"
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit"
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit"
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Karlsruher Institut für Technologie

<u>Vor.:</u> Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
<u>Beh.:</u> G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
<u>Bew.:</u> durch Widerspruch
<u>Annahme:</u> G hat Kreis ungerader Länge
$\overset{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow$ G hat keine Kreis ungerader Länge
Bew.: durch Widerspruch
Annahme: G hat Kreis ungerader Länge
$\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
$\Rightarrow$ Widerspruch zu „G ist bipartit“
$\Rightarrow$ G hat keinen Kreis ungerader Länge $\blacksquare$

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow$ G ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Karlsruher Institut für Technologie

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow$ G ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche $\blacksquare$

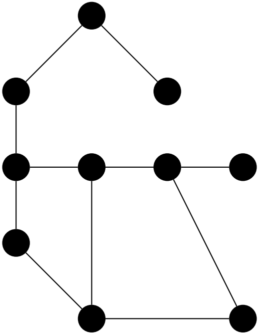
Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow$ G ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche ■

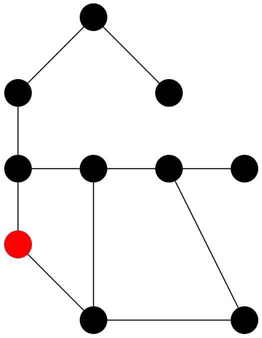
Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.
Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit
Bew.: Konstruktiv
Färbe Graphen mit Breitensuche $\blacksquare$

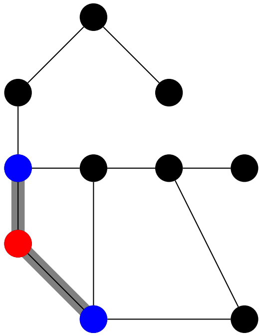
Aufgabe 4 - Beispiel



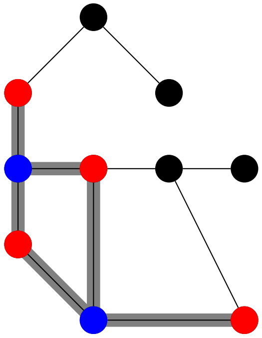
Aufgabe 4 - Beispiel



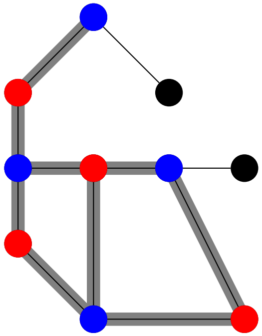
Aufgabe 4 - Beispiel



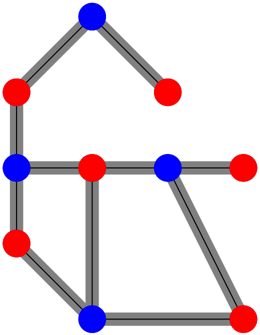
Aufgabe 4 - Beispiel



Aufgabe 4 - Beispiel

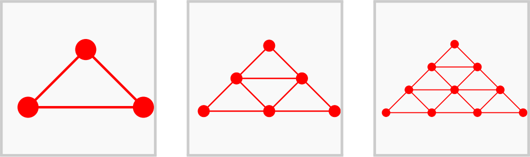


Aufgabe 4 - Beispiel

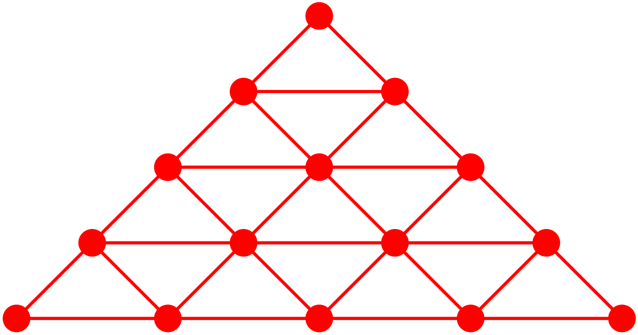


Aufgabe 9, Teil 1

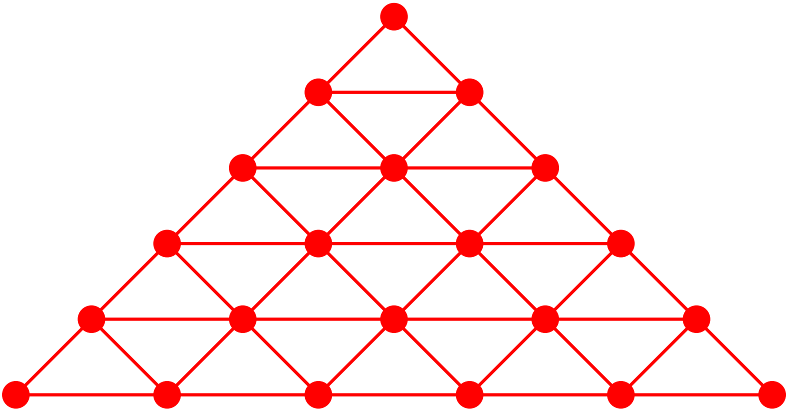
Im folgenden sind die ersten drei Graphen G_1, G_2, G_3 einer Folge (G_n) aus Graphen abgebildet. Wie sieht G_4 aus?



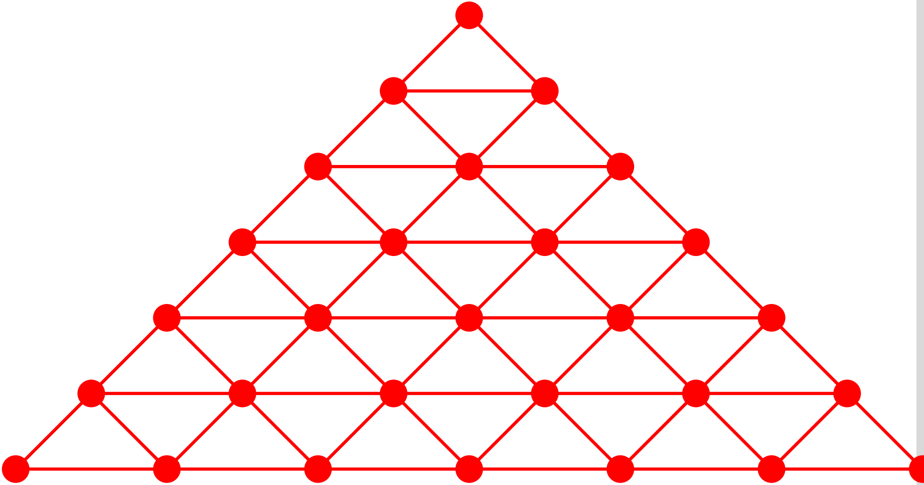
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)

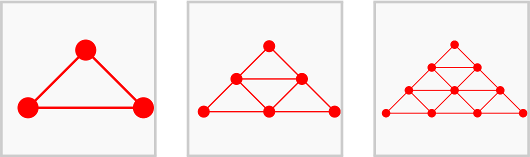


Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat G_i?



Aufgabe 9, Teil 2: Antwort

Ecken:

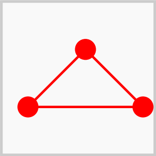
$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

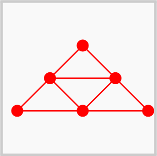
Kanten:

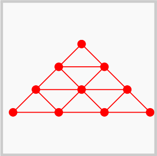
$$\begin{aligned}
|K_n| &= |K_{n-1}| + \underbrace{((n+1) - 1) + 2}_{\text{außen}} + (n-1) \cdot 2 && (3)\\
&= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2 && (4)\\
&= |K_{n-1}| + 3n && (5)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \sum_{i=1}^{n} i && (6)\\
&= 3 \frac{n^2 + n}{2} && (7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 9, Teil 3

Gebe G_i formal an.

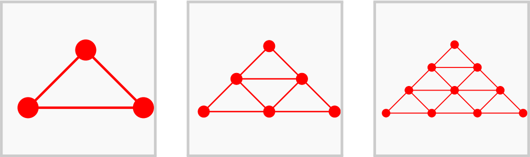






Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)

Gebe G_n formal an.



$$E_n = \{\, e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n;\ x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \mod 2 \,\}$$

$$K_n = \left\{ \{\, e_{x,y}, e_{i,j} \,\} \in E_n^2 \;\middle|\; (x + 2 = i \land y = j) \lor (x + 1 = i \land y \pm 1 = j) \right\}$$

$$G_n = (E_n, K_n)$$

RectangleFreeColoring

RectangleFreeColoring

Gegeben ist $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und ein ungerichteter Graph $G = (E, K)$ mit

$$E = \{\, e_{x,y} \mid 1 \leq x \leq n \wedge 1 \leq y \leq m \,\}$$

und

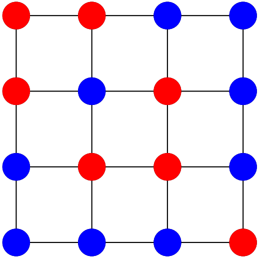
$$K = \{\, k = \{\, e_{x,y}, e_{x',y'} \,\} \in E \times E : |\, x - x'| + |y - y'| = 1 \,\}$$

Färbe die Ecken von G mit einer minimalen Anzahl von Farben so, dass gilt:

$$\forall e_{x,y}, e_{x',y'} \in E : (x \neq x' \wedge y \neq y') \Rightarrow$$
$$\neg \left(c(e_{x,y}) = c(e_{x',y'}) = c(e_{x',y}) = c(e_{x,y'})\right)$$

RectangleFreeColoring

4×4 - Instanz:



Bildquellen

- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hypercube.svg
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_disk_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)
- cf.drafthouse.com/_uploads/galleries/29140/good_will_hunting_3.jpg

Literatur

- A. Beutelspacher: *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3

Folien, LaTeX und Material

Der Foliensatz und die LaTeX und Ti*k*Z-Quellen sind unter
github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/presentations/Diskrete-Mathematik
Kurz-URL: goo.gl/uTgam