Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \leftarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \leftarrow A^{(-\frac{1}{2})} + A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \leftarrow A^{(-\frac{1}{2})} + A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^{0} = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \tag{2}$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Vorüberlegung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\dots \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

A ist pos. Definit \Leftrightarrow alle führenden Hauptminore von A sind positiv

 \Leftrightarrow es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A=GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow$$
 A ist nicht positiv definit (7)

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{21} - l_{21}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{R}$$
 (11)

$$\Rightarrow$$
 Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber A ist symmetrisch (12)

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht pos. Definit}$$
 (13)

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b$$
,

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in Ly = b

```
Require: Lower, invertable, triangular Matrix L \in \mathbb{R}^{n \times n}, Vektor b procedure SOLVE(L,b) for i \in \{1, \dots n\} do y_i \leftarrow b_i for k \in \{1, \dots, i-1\} do y_i \leftarrow y_i - l_{ik} \cdot y_k end for y_i \leftarrow \frac{y_i}{l_{ii}} end for end procedure
```

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS Ax = b

```
Require: Matrix A, Vektor b
procedure LoeseLGS(A, b)
P, L, R \leftarrow \text{LRZer}(A)
b^* \leftarrow P \cdot b
c \leftarrow \text{VorSub}(L, b^*)
x \leftarrow \text{RueckSub}(R, c)
return x
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 \frac{1}{3}n^2$
- \bullet Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- \bullet Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Berechnung

$$f'(x,y) \cdot (x_0, y_0) = f(x,y)$$

LR-Zerlegung für f'(x, y) kann durch scharfes hinsehen durchgeführt werden, da es in L nur eine unbekannte (links unten) gibt. Es gilt also ausführlich:

$$\begin{pmatrix}
3 & \cos y \\
3x^2 & e^y
\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
l_{12} & 1
\end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} \\
0 & r_{22}
\end{pmatrix}}^{R} \tag{14}$$

$$\Rightarrow r_{11} = 3 \tag{15}$$

$$\Rightarrow r_{12} = \cos y \tag{16}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\Rightarrow 3x^2 \stackrel{!}{=} l_{12} \cdot 3 + 1 \cdot 0 \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow l_{12} = x^2 \tag{19}$$

$$\Rightarrow e^y \stackrel{!}{=} x^2 \cdot \cos y + 1 \cdot r_{22} \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow r_{22} = -x^2 \cdot \cos y + e^y \tag{21}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & -x^2 \cdot \cos y + e^y \end{pmatrix}$$
 (22)

$$P = I_2 \tag{23}$$

$$-f(\frac{-1}{3},0) = \binom{2}{-\frac{1}{27}} \tag{24}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2\\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Aufgabe:

$$I(f) = \int_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x$$

- 1. Integrand am linken und am rechten Rand interpolieren
- 2. Interpolationspolynom mit Quadraturformel integrieren

Lösung:

Nutze Interpolationsformel von Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} f_i \cdot L_i(x)$$

Berechne Lagrangepolynome:

$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \tag{27}$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{28}$$

So erhalten wir:

$$p(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

Nun integrieren wir das Interpolationspolynom:

$$\begin{split} \int_{a}^{b} p(x)dx &= \int_{a}^{b} f(a)\frac{x-b}{a-b}dx + \int_{a}^{b} f(b)\frac{x-a}{b-a}dx \\ &= \int_{a}^{b} \frac{f(a) \cdot x}{a-b}dx - \int_{a}^{b} \frac{f(a) \cdot b}{a-b}dx + \int_{a}^{b} \frac{f(b) \cdot x}{b-a}dx - \int_{a}^{b} \frac{f(b) \cdot a}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a) \cdot b^{2}}{a-b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a) \cdot a^{2}}{a-b} - \frac{f(a) \cdot b^{2}}{a-b} + \frac{f(a) \cdot b \cdot a}{a-b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(b) \cdot b^{2}}{b-a} \\ &\qquad - \frac{1}{2} \cdot \frac{f(b) \cdot a^{2}}{b-a} - \frac{f(b) \cdot a \cdot b}{b-a} + \frac{f(b) \cdot a^{2}}{b-a} \end{split}$$

Teilaufgabe b)

Sei nun $f(x)=x^2$ und a=0 sowie b=4. Man soll die ermittelte Formel zwei mal auf äquidistanten Intervallen anwenden.

Lösung:

$$\int_0^4 p(x)dx = \int_0^2 p(x)dx + \int_2^4 p(x)dx = 24$$
 (29)

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\dots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p-1$ liefert.

Teilaufgabe b

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \text{ für } q = 1, \dots, p$$

Teilaufgabe c

Aufgabe Bestimmen Sie zu den Knoten $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ Gewichte, um eine Quadraturformel maximaler Ordnung zu erhalten. Wie hoch ist die Ordnung?

Lösung Als erstes stellen wir fest, dass die Knoten nicht symmetrisch (d.h. gespiegelt bei $\frac{1}{2}$) sind. TODO: Warum ist das wichtig?

 $\overset{\text{Satz 28}}{\Rightarrow}$ Wenn wir Ordnung s=2 fordern, sind die Gewichte eindeutig bestimmt.

Da $c_1 = 0$ kann es sich nicht um die Gauß-QF handeln. Somit können wir nicht Ordnung 4 erreichen.

Nach VL kann bei Vorgabe von s Knoten auch die Ordnung s durch geschickte Wahl der Gewichte erreicht werden. Also berechnen wir die Gewichte, um die Ordnung 2 zu sichern:

$$b_{i} = \int_{0}^{1} L_{i}(x) dx$$

$$b_{1} = \frac{1}{4}$$

$$b_{2} = \frac{3}{4}$$
(30)
(31)

$$b_1 = \frac{1}{4} \tag{31}$$

$$b_2 = \frac{3}{4} \tag{32}$$

Diese Gewichte b_1, b_2 erfüllen die 1. und 2. Ordnungsbedingung.

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{2} b_i \cdot c_i^2 \tag{33}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}$$
 (34)
= $\frac{1}{3}$ (35)

$$=\frac{1}{3}\tag{35}$$

Damit ist auch die 3. Ordnungsbedingung und mit den Knoten maximale Ordnung erfüllt.