1 Fragen zu Definitionen

6.) Basisbeispiele

Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?

Wie ist es mit folgendem?

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum mit $X = \{ 0, 1, 2 \}$ und $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 0, 1 \}, X \}$
Dann ist $\mathcal{S} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 2 \} \}$ eine Subbasis von $\mathfrak{T}$, da gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $\{ 0 \} = \{ 0, 1 \} \cap \{ 0, 2 \}$
- $\{ 0, 1 \} \in \mathcal{S}$
- $X = \{ 0, 1 \} \cup \{ 0, 2 \}$

Allerings ist $\mathcal{S}$ keine Basis von $(X, \mathfrak{T})$, da $\{ 0 \}$ nicht als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$ erzeugt werden kann.

9.) Mannigfaltigkeit mit Rand

Definition 1

Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine n-dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ), wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Ein n-dimensionaler **Atlas** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

c) X heißt (topologische) n-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n-dimensionalen Atlas besitzt.

Definition 2

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R^n_{+,0} := \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\color{red}m} \geq 0 \,\}$$

ist.

Sind Mannigfaltigkeiten mit Rand auch Mannigfaltigkeiten? Sollte das rote m eventuell n sein? Oder sollte es ein i sein, mit $i = 1..n$?

Laut https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit_mit_Rand:

„Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist mathematisches Objekt aus der Differentialgeometrie. Es handelt sich hierbei nicht um einen Spezialfall einer Mannigfaltigkeit, sondern ganz im Gegenteil um eine Verallgemeinerung.“

Ist die Aussage auf Wikipedia korrekt? Für mich sieht das so aus, also ob folgende Definition auch richtig wäre:

Definition 3

Sei X eine Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$ und

$$\mathbb{R}^n_{+,0} := \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \,\}$$

X heißt **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn gilt:

$$\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n_{+,0}$$

11.) Produkttopologie

Definition 4

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{\, U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \,\}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**. $\mathfrak{B} = \{\, U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

Gibt es ein Beispiel, das zegit, dass nicht $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$ gilt?

12.) Δ^2 explizit

Wie sieht der Standard-Simplex der dim. 2, also Δ^2, explizit notiert aus? Praktisch ist das ja die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren e_0, e_1, e_2 (also $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$), also ein Polyeder mit vier Flächen im $\mathbb{R}^3$ (jedoch kein regelmäßiges Tetraeder, oder?)

Das ist dann nur das Gitter dieses Polyeders, aber nicht die Flächen oder sogar etwas innerhalb vom Polyeder, oder?

13.) Normalenvektor

Definition 5
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ sei $n(t)$ **Normalenvektor** an γ in t, d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t)\rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

und $\det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$

b) Nach **??** sind $n(t)$ und $\gamma''(t)$ linear abhängig, d. h. es gibt $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$ heißt **Krümmung** von γ in t.

Definition 6
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ heißt $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ die **Krümmung** von γ in t.

b) Ist für $t \in I$ die Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$, so heißt $\gamma''(t)$ **Normalenvektor** an γ in t.

c) $b(t)$ sei ein Vektor, der $\gamma'(t), n(t)$ zu einer orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt. Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$ heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

Die beiden Definitionen eins Normalenvektors / der Krümmung scheinen mir äquivalent zu sein. Warum haben wir beide? Ich würde die zweite bevorzugen.

15.) Existenz der Parallelen

Definition 7

§5) **Parallelenaxiom**: Für jedes $g \in G$ und jedes $P \in X \setminus g$ gibt es höchstens ein $h \in G$ mit $h \cap g = \emptyset$. h heißt **Parallele zu g durch P**.

Soll hier wirklich „mindestens“ stehen? Wie beweist man, dass es genau eine gibt?

17.) Simpliziale Abbildungen

Wenn man Simpliziale Abbildungen wie folgt definiert

Definition 8

Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

a) $f(\Delta) \in L$

b) $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

dann ist die Forderung „$f(\Delta) \in L$“ doch immer erfüllt, oder? Gibt es eine Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

mit $f(\Delta) \notin L$?

18.) ÜB 1, Aufgabe 2

Vor.: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Weiter bezeichne $\mathfrak{T}$ die von d auf X erzeugte Topologie $\mathfrak{T}'$, die von der auf $A \times A$ eingeschränkten Metrik $d|_{A \times A}$ erzeugte Topologie.

Beh.: Die Topologie $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}|_A$ (Spurtopologie) stimmen überein.

Bew.:

„$\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$“:

Sei $U \in \mathfrak{T}|_A = \{\, V \cap A \mid V \in \mathfrak{T} \,\}$.
Dann ex. also $V \in \mathfrak{T}$ mit $U = V \cap A$.
Sei $x \in U$.
Da $V \in \mathfrak{T}$, ex. nach Bemerkung 3 ein $r > 0$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_r(x) &:= \{\, y \in X \mid d(x,y) < r \,\} \subseteq V \\ &\{\, y \in A \mid d(x,y) < r \,\} \subseteq V \cap A = U \end{aligned}$$

also ist U offen bzgl. $d|_{A \times A}$.

Wieso ist U offen bzgl. $d|_{A \times A}$?

Da $x \in U$ beliebig gewählt war gilt: $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$