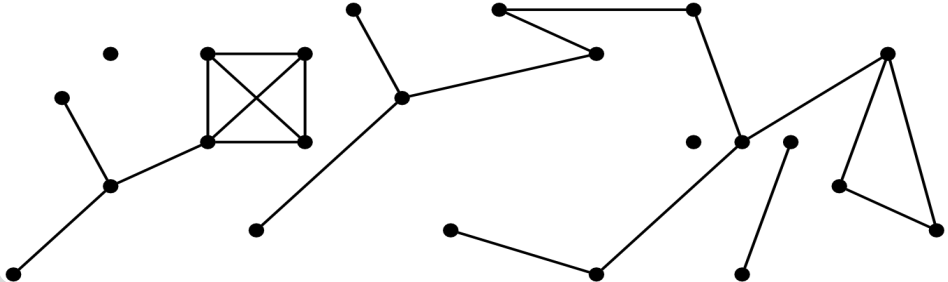


Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

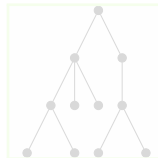
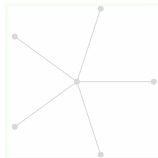
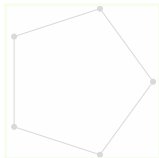
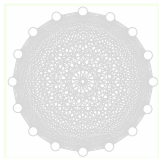
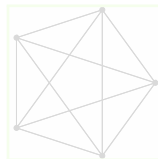
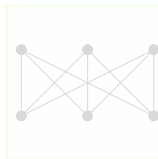
INSTITUT FÜR STOCHASTIK



- 1 Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

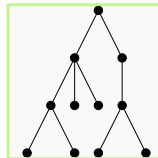
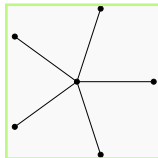
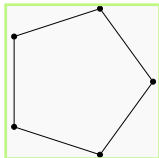
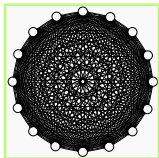
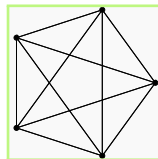
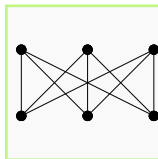
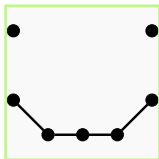
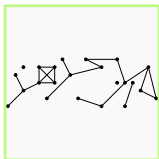
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

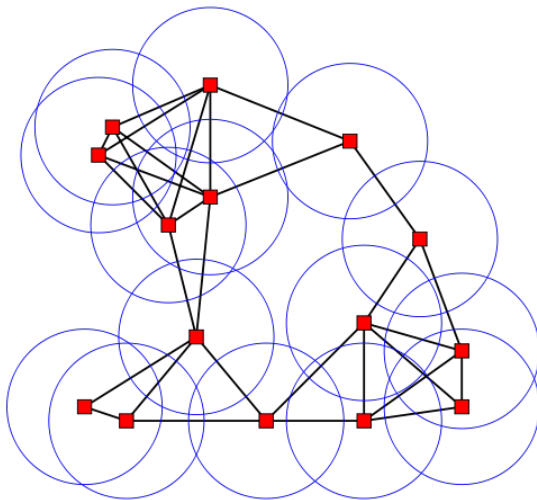


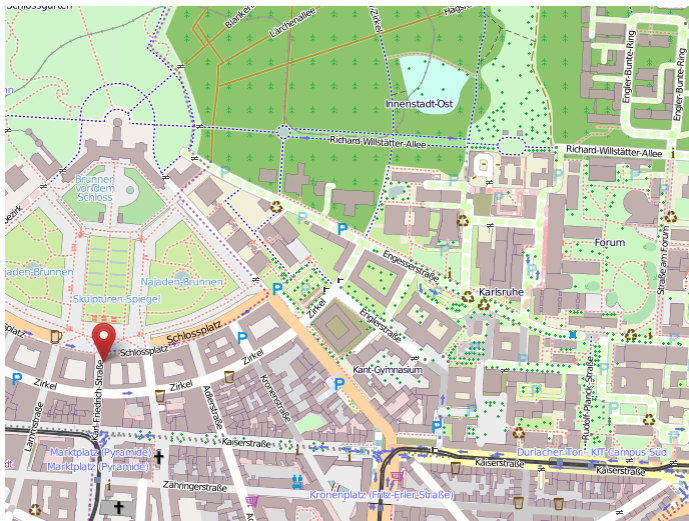
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



Knoten \Leftrightarrow Ecken





Good Will Hunting



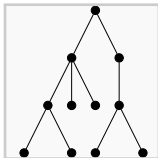
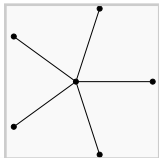
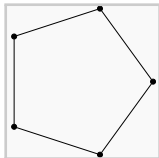
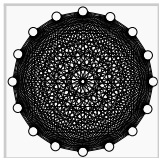
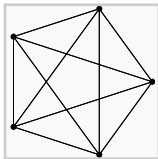
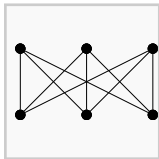
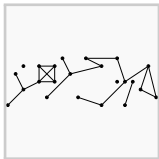
martin-thoma.de/uni/graph.html

Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecke

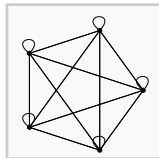
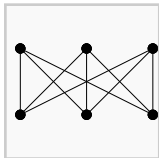
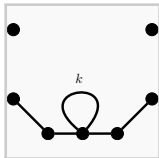
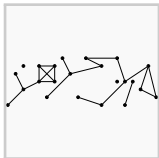
Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.



Schlinge

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $k = \{e_1, e_2\} \in K$ eine Kante.
 k heißt **Schlinge** : $\Leftrightarrow e_1 = e_2$

Ein Graph ohne Schlingen heißt „schlingenfrei“

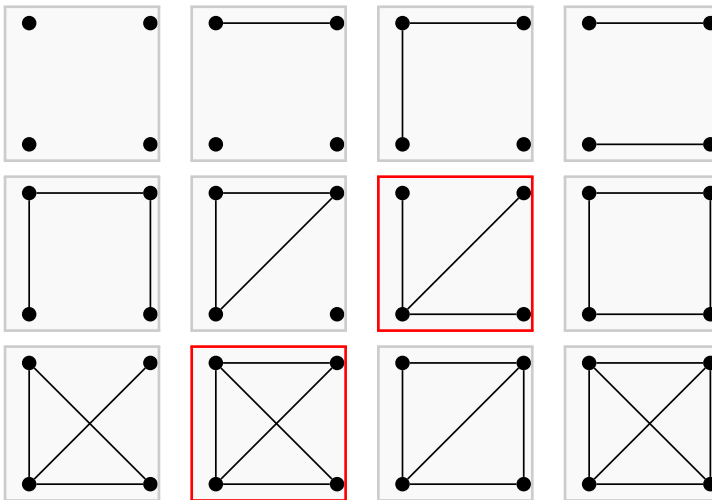


Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.

Aufgabe 1

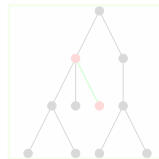
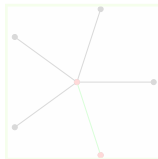
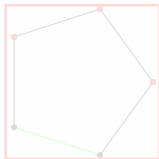
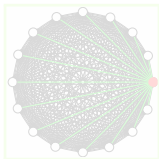
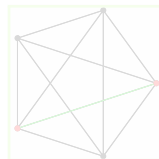
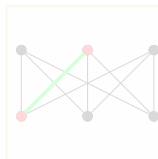
Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

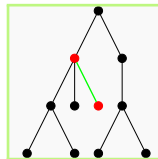
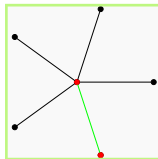
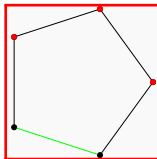
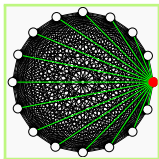
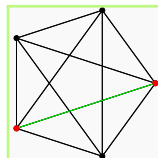
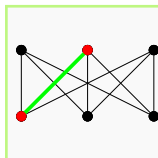
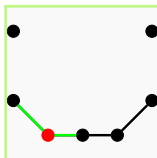
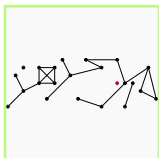
e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

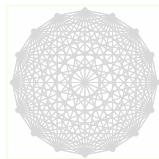
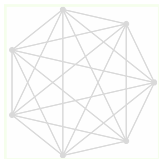
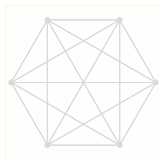
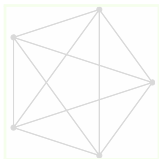
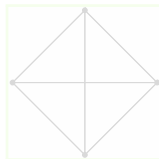
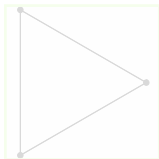
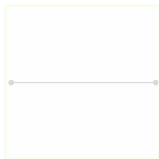
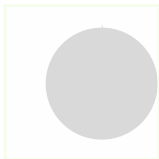


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

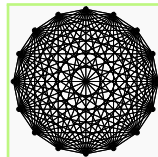
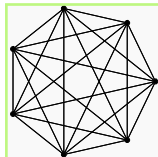
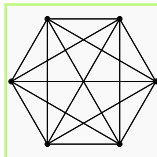
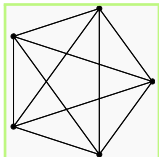
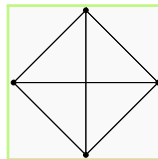
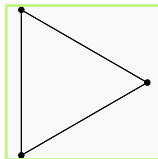
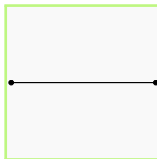
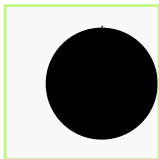


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

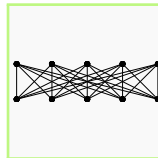
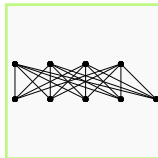
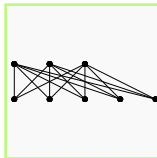
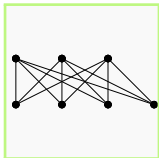
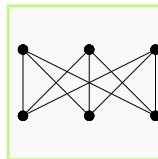
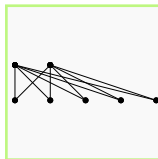
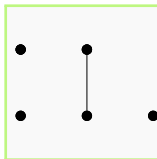
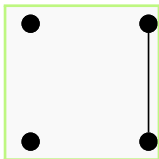


Bipartiter Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.

G heißt **bipartit**

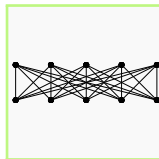
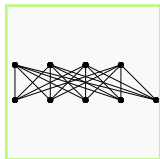
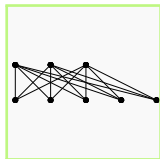
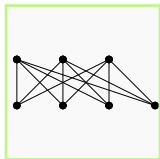
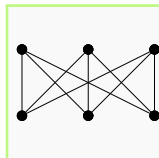
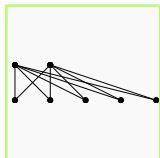
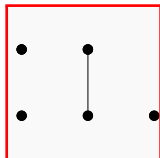
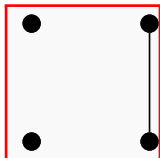
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1, e_2\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$



Vollständig bipartiter Graph

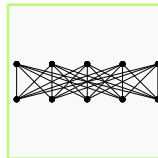
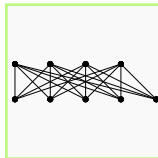
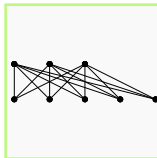
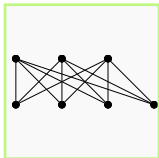
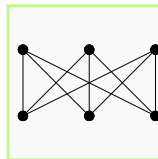
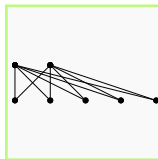
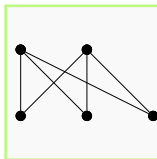
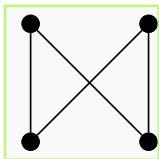
Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{A, B\}$ bezeichne die Bipartition.

G heißt **vollständig bipartit** $\Leftrightarrow A \times B = K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

$$\text{Ecken: } m + n \quad (1)$$

$$\text{Kanten: } m \cdot n \quad (2)$$

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

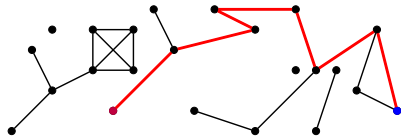
Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

Dann heißt eine Folge k_1, k_2, \dots, k_s von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$ gibt, so dass

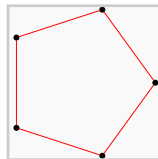
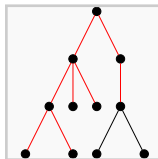
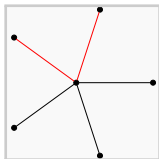
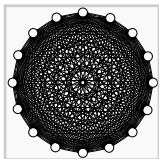
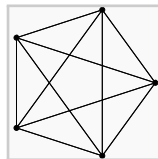
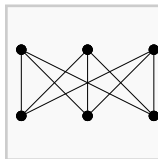
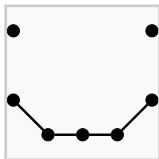
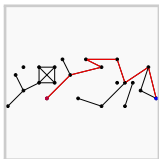
- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- ...
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.



Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (e_0, e_1, \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_s = e_0$.



Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

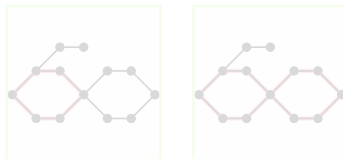
Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

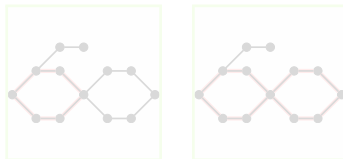
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

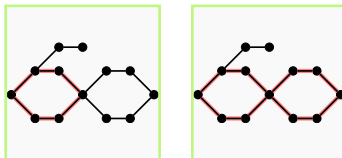
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug. A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

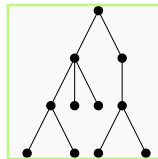
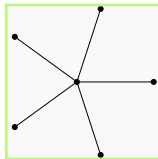
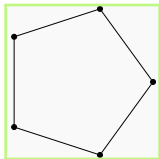
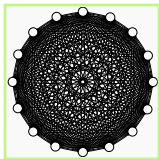
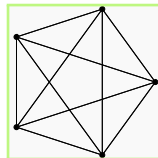
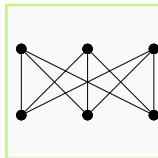
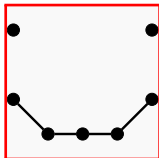
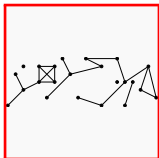
Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zusammenhängender Graph

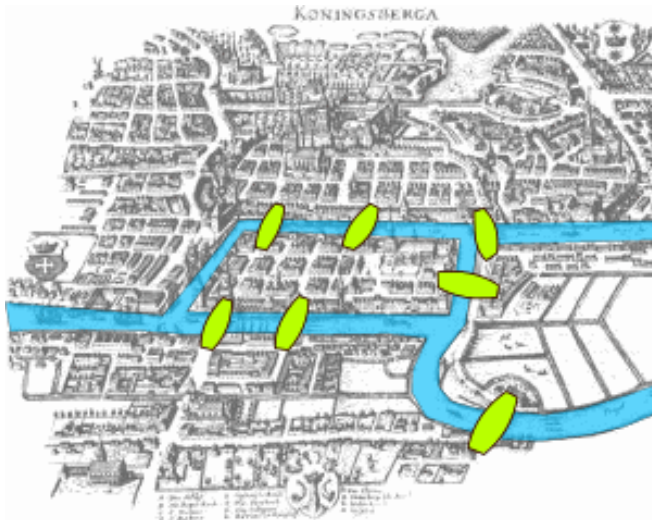
Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet

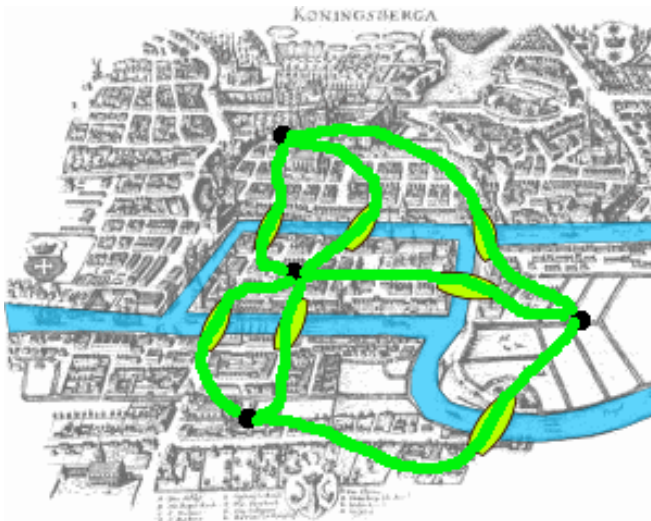




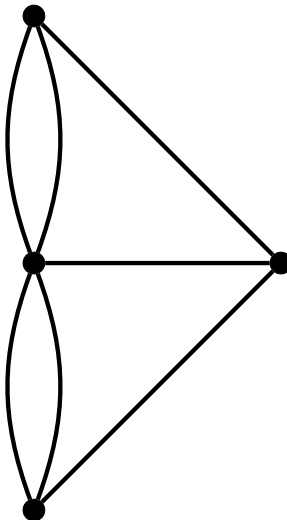
Königsberger Brückenproblem



Übersetzung in einen Graphen



Übersetzung in einen Graphen



Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

ACHTUNG, VERWECHSLUNGSGEFAHR:

Hamiltonkreis

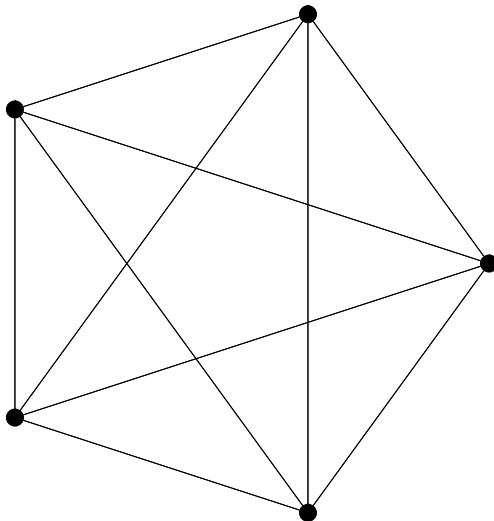
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

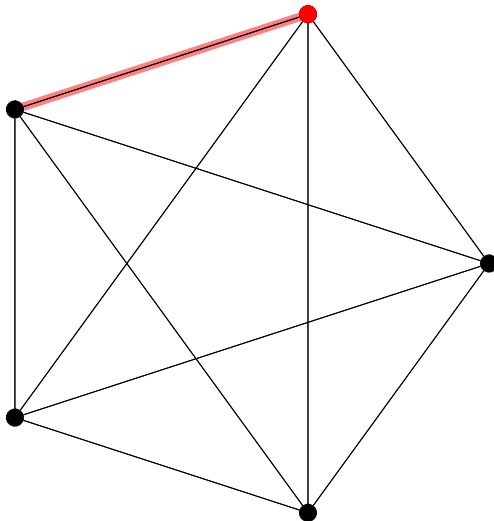
A heißt **Hamilton-Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

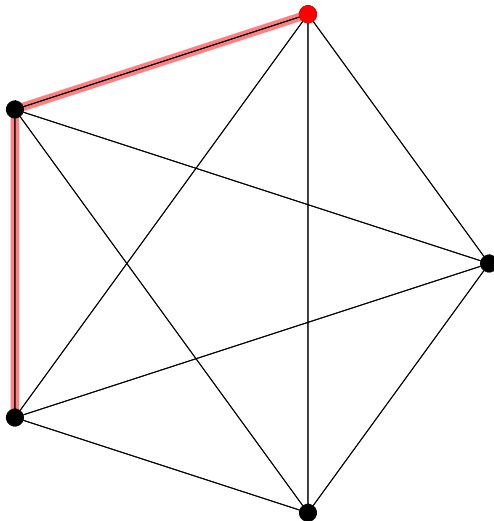
Eulerscher Kreis

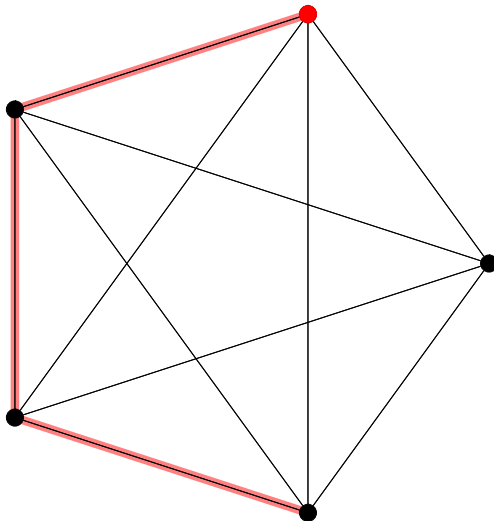
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

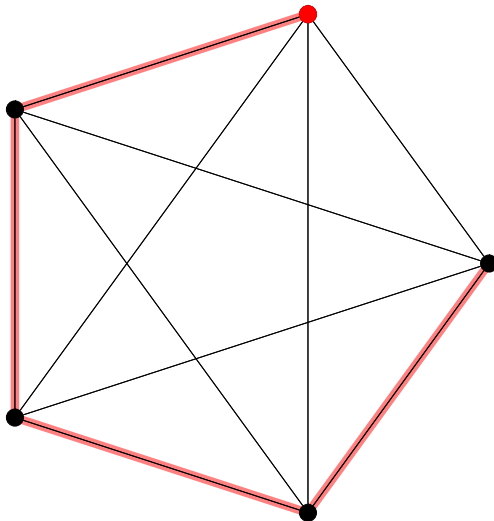
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

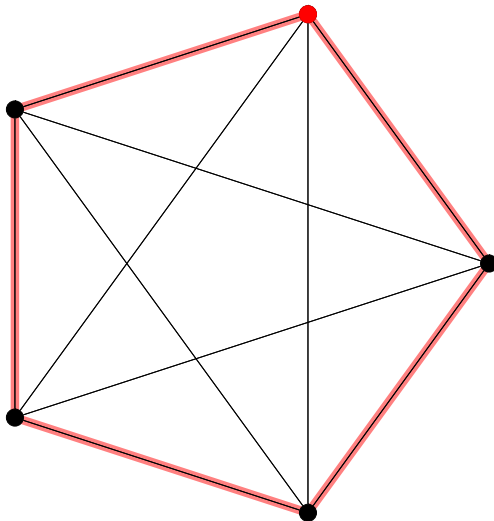


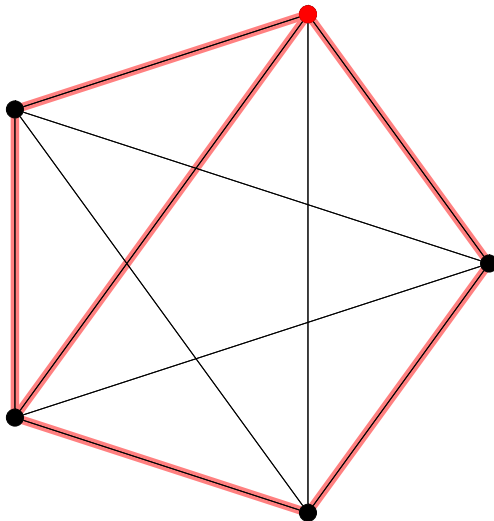


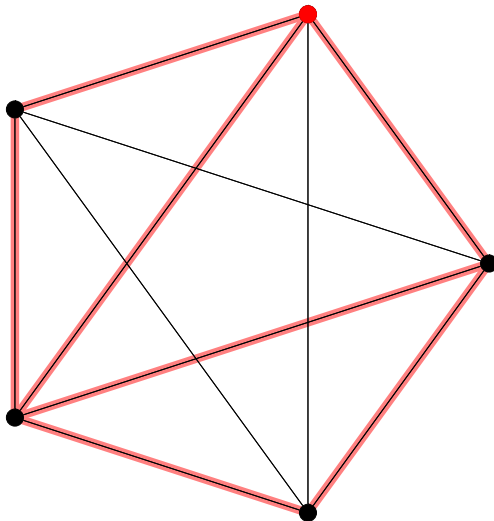


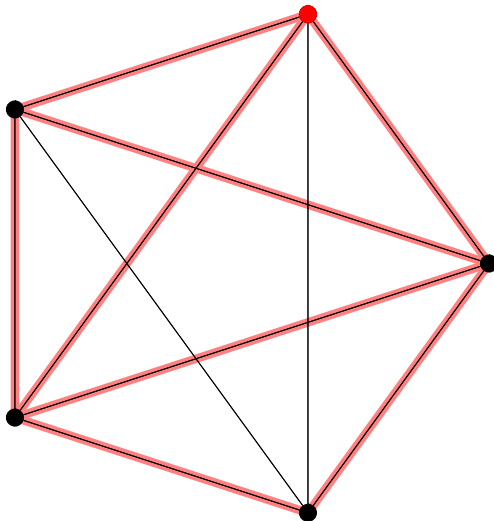


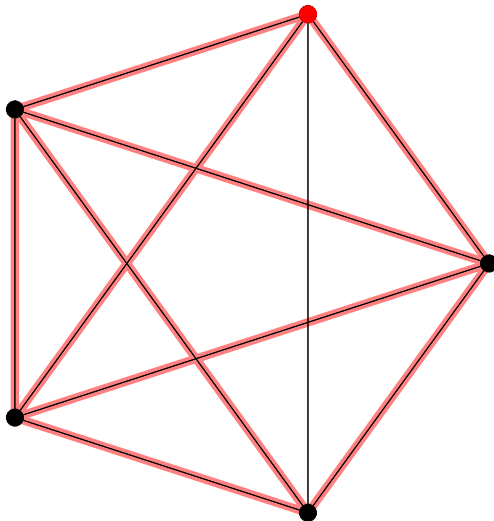


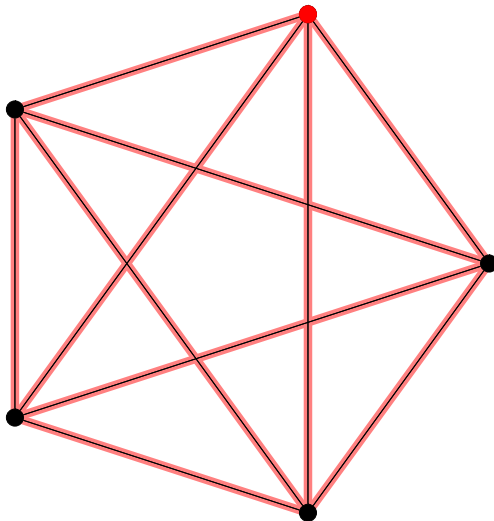




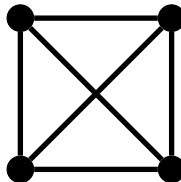




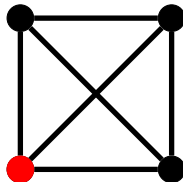




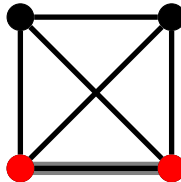
Hamilton-Kreis, kein EK



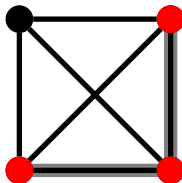
Hamilton-Kreis, kein EK



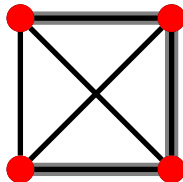
Hamilton-Kreis, kein EK



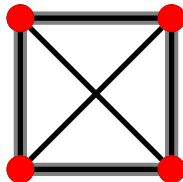
Hamilton-Kreis, kein EK



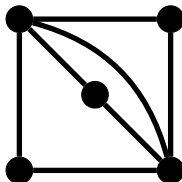
Hamilton-Kreis, kein EK



Hamilton-Kreis, kein EK



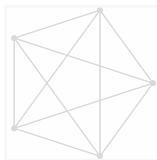
Eulerkreis, kein HK



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

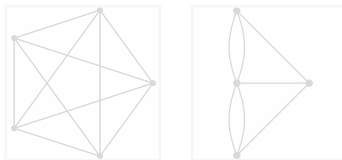
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

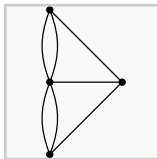
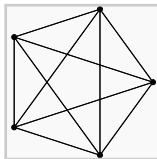
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

$\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

⇒ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

⇒ C_1, \dots, C_n können in C „eingehängt“ werden

⇒ G ist eulersch ⇒ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

\xRightarrow{IV} Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von G : \Leftrightarrow Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Leftrightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

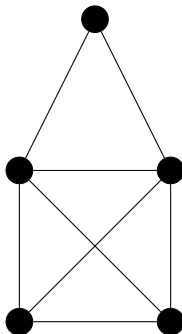
Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

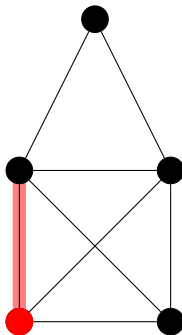
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

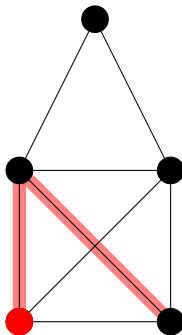
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

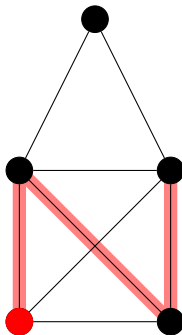
\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

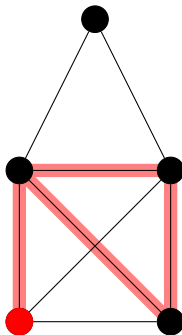
Rückrichtung analog

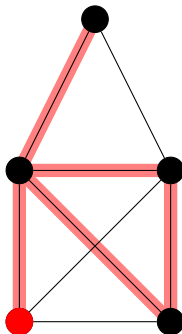


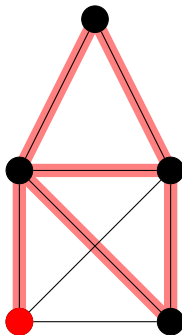


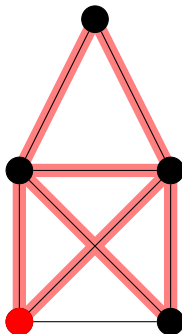


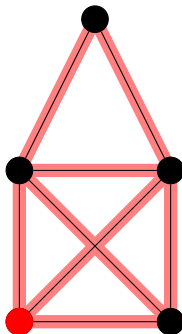










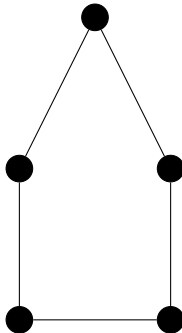


Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

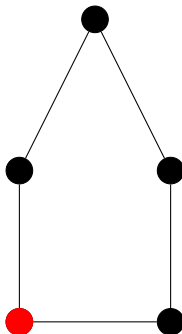
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



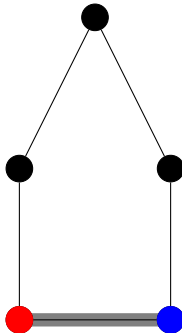
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



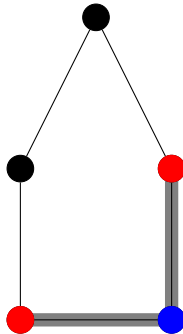
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



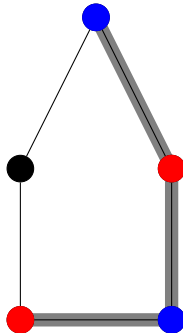
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



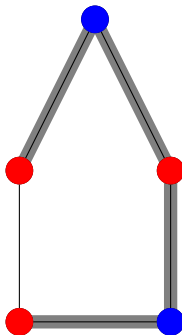
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



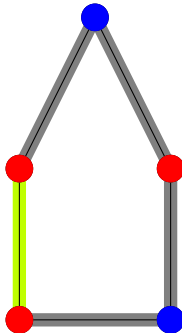
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

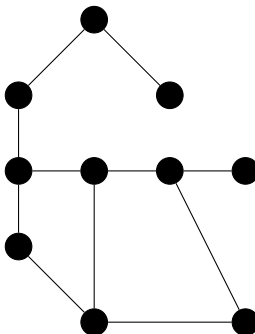
Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

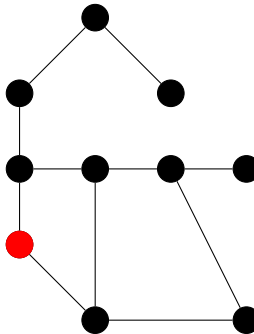
Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

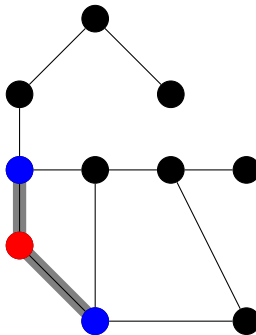
Aufgabe 4 - Beispiel



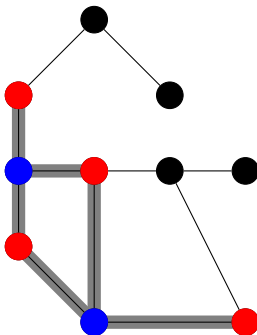
Aufgabe 4 - Beispiel



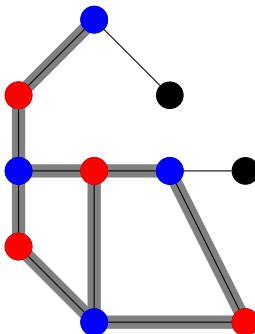
Aufgabe 4 - Beispiel



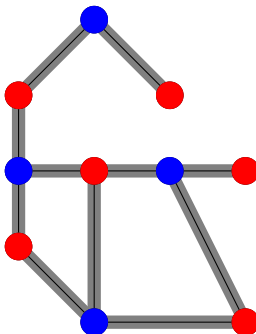
Aufgabe 4 - Beispiel



Aufgabe 4 - Beispiel

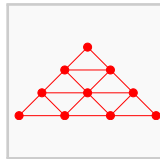
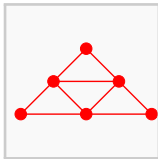
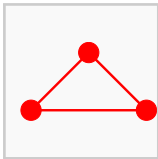


Aufgabe 4 - Beispiel

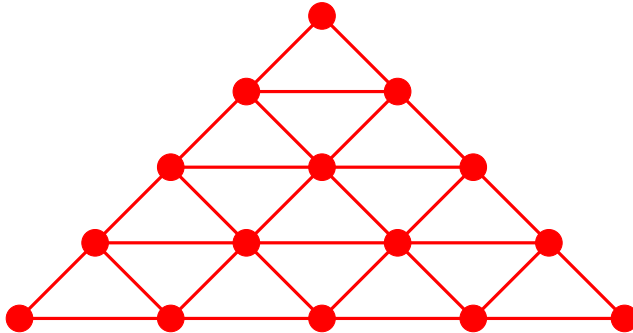


Aufgabe 9, Teil 1

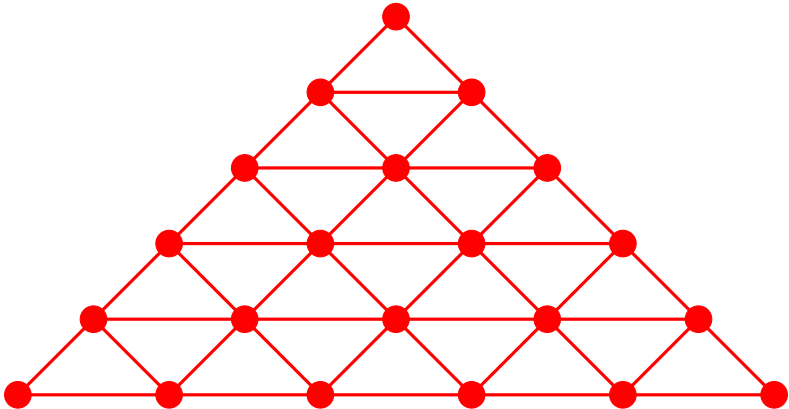
Im folgenden sind die ersten drei Graphen G_1, G_2, G_3 einer Folge (G_n) aus Graphen abgebildet. Wie sieht G_4 aus?



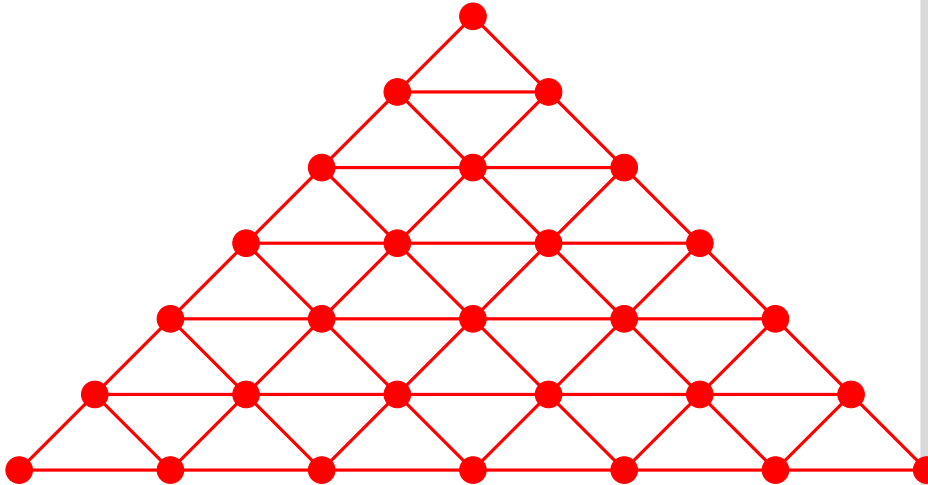
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)

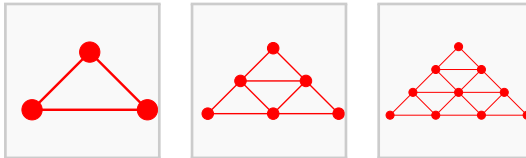


Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat G_i ?



Aufgabe 9, Teil 2: Antwort

Ecken:

$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n + 1) = \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

Kanten:

$$|K_n| = |K_{n-1}| + \underbrace{((n + 1) - 1) + 2}_{\text{außen}} + (n - 1) \cdot 2 \quad (3)$$

$$= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2 \quad (4)$$

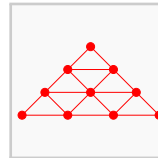
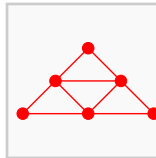
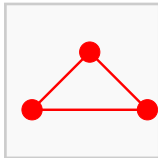
$$= |K_{n-1}| + 3n \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^n 3i = 3 \sum_{i=1}^n i \quad (6)$$

$$= 3 \frac{n^2 + n}{2} \quad (7)$$

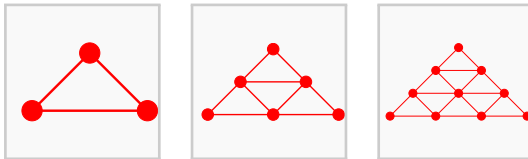
Aufgabe 9, Teil 3

Gebe G_i formal an.



Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)

Gebe G_n formal an.



$$E_n = \{ e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n; x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \pmod{2} \}$$

$$K_n = \left\{ \{ e_{x,y}, e_{i,j} \} \in E_n^2 \mid (x + 2 = i \wedge y = j) \vee (x + 1 = i \wedge y \pm 1 = j) \right\}$$

$$G_n = (E_n, K_n)$$

- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_disk_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

- A. Beutelspacher: *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3

Der Foliensatz und die \LaTeX und TikZ-Quellen sind unter
github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/presentations/Diskrete-Mathematik
Kurz-URL: goo.gl/uTgam