

## Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

## Definition 2

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

### Definition 3

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

$$\text{a) } M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$$

heißt **Inneres** oder **offener Kern** von  $M$ .

$$\text{b) } \overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A \text{ heißt } \mathbf{abgeschlossene H\u00fclle} \text{ oder}$$

**Abschluss** von  $M$ .

$$\text{c) } \partial M := \overline{M} \setminus M^\circ \text{ heißt } \mathbf{Rand} \text{ von } M.$$

$$\text{d) } M \text{ heißt } \mathbf{dicht} \text{ in } X, \text{ wenn } \overline{M} = X \text{ ist.}$$



### Definition 4

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.
- b)  $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathcal{S}$  ist.

### Definition 5

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Teilraumtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$

### Definition 6

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen} \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

### Definition 7

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : x \rightarrow \overline{x}$ ,  $x \mapsto [x]_{\sim}$ .

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{ U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$  heißt **Quotiententopologie**.



### Definition 8

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) Definitheit:  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- (ii) Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

### Definition 9

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $\varphi : X \rightarrow Y$  eine Abbildung mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

Dann heißt  $\varphi$  eine **Isometrie** von  $X$  nach  $Y$ .

**Definition 10**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

### Definition 11

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .  $x \in X$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0$  gibt, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

## Definition 12

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- a)  $f$  heißt **stetig**, wenn für jedes offene  $U \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.
- b)  $f$  heißt **Homöomorphismus**, wenn  $f$  stetig ist und es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Definition 13

Ein Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen  $U_1, U_2$  von  $X$  gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  und  $U_1 \cup U_2 = X$ .

### Definition 14

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

Für  $x \in X$  sei  $Z(x) \subseteq X$  definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente**.

**Definition 15**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

$\mathfrak{U}$  heißt eine **Überdeckung** von  $X$ , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in \mathfrak{U} : x \in M$$



### Definition 16

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$

$$\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I} \text{ mit } U_i \text{ offen in } X$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i \in J \subseteq I} U_i = X \text{ mit } |J| \in \mathbb{N}$$

besitzt.

### Definition 17

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a) Ein **Weg** in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .
- b)  $\gamma$  heißt **geschlossen**, wenn  $\gamma(1) = \gamma(0)$  gilt.
- c)  $\gamma$  heißt **einfach**, wenn  $\gamma|_{[0,1)}$  injektiv ist.

### Definition 18

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

### Definition 19

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in  $X$  ist ein Homöomorphismus  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C \subseteq X$  ( $\gamma : S^1 \rightarrow C \subseteq X$ )

## **Definition 20**

Eine geschlossene Jordankurve in  $\mathbb{R}^3$  heißt **Knoten**.

## Definition 21

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z)$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z)$$

und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

## Definition 22

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens  $\gamma$  ist eine Projektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  auf eine Ebene  $E$ , sodass  $|(\pi|C)^{-1}(x)| \leq 2$  für jedes  $x \in D$ .

Ist  $(\pi|C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so **liegt**  $y_1$  **über**  $y_2$ , wenn  $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$  für ein  $\lambda > 1$  ist.

### Definition 23

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von  $D$  so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

### Definition 24

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .



- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .
- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

### Definition 25

Seien  $X, Y$   $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten,  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus  $Z = (X \dot{\cup} Y)/\sim$  mit der von  $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$  erzeugten Äquivalenzrelation und der von  $\sim$  induzierten Quotiententopologie.

$Z$  heißt **Verklebung** von  $X$  und  $Y$  längs  $U$  und  $V$ .  $Z$  besitzt einen Atlas aus  $n$ -dimensionalen Karten. Falls  $Z$  hausdorffsch ist, ist  $Z$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

## Definition 26

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.  $R_{+,0}^n$  ist ein „Halbraum“.

**Definition 27**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas  $(U_i, \varphi_i)$ . Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{i \in I} \{ x \in U_i \mid \varphi_i(x)_n = 0 \}$$

**Rand** von  $X$ .

**Definition 28**

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für  $i, j \in I$  mit  $U_i, U_j \neq \emptyset$  heißt

$$\begin{aligned}\varphi_{ij} &:= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)\end{aligned}$$

**Kartenwechsel oder Übergangsfunktion.**

## Definition 29

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ .

- a)  $X$  heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$** , wenn jede Kartenwechselabbildung  $\varphi_{ij}$ ,  $i, j \in I$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist.
- b)  $X$  heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^\infty$  ist.

### Definition 30

Sei  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ .

- a) Eine Karte  $(U, \varphi)$  auf  $X$  heißt **verträglich** mit  $\mathcal{A}$ , wenn alle Kartenwechsel  $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$  und  $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$  ( $i \in I$  mit  $U_i \cap U \neq \emptyset$ ) differenzierbar von Klasse  $C^k$  sind.
- b) Die Menge aller mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten auf  $X$  bildet einen maximalen Atlas der Klasse  $C^k$ . Er heißt  $C^k$ -**Struktur** auf  $X$ .

Eine  $C^\infty$ -Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf  $X$ .

### Definition 31

Seien  $X, Y$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $m$ ,  $x \in X$ .

- a) Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **differenzierbar** in  $x$  (von Klasse  $C^k$ ), wenn es Karten  $(U, \varphi)$  von  $X$  mit  $x \in U$  und  $(V, \psi)$  von  $Y$  mit  $f(U) \subseteq V$  gibt, sodass  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  stetig differenzierbar von Klasse  $C^k$  in  $\varphi(x)$  ist.
- b)  $f$  heißt **differenzierbar** (von Klasse  $C^k$ ), wenn  $f$  in jedem  $x \in X$  differenzierbar ist.



- c)  $f$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  differenzierbar von Klasse  $C^\infty$  ist und es eine differenzierbare Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  von Klasse  $C^\infty$  gibt mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Definition 32

$S \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **reguläre Fläche**  $:\Leftrightarrow \forall s \in S \exists$  Umgebung  
 $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3 \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen:  $\exists$  differenzierbare Abbildung  $F :$   
 $U \rightarrow V \cap S: \operatorname{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U.$

$F$  heißt (lokale) reguläre Parametrisierung von  $S$ .

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

### Definition 33

Sei  $G$  eine Mannigfaltigkeit,  $\circ : G \times G \rightarrow G$  eine Abbildung,  $(g, h) \mapsto g \cdot h$ , sodass  $(G, \circ)$  eine Gruppe ist.

- a)  $G$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen  $\circ : G \times G \rightarrow G$  und  $\iota : G \rightarrow G$ .

$$(g, h) \mapsto g \cdot h \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

- b) Ist  $G$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt  $G$  **Lie-Gruppe**, wenn  $(G, \circ)$  und  $(G, \iota)$  differenzierbar sind.

### Definition 34

Seien  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  Punkte.

a)  $v_0, \dots, v_k$  sind **in allgemeiner Lage**  $\Leftrightarrow$  es gibt keinen  $(k-1)$ -dimensionalen affinen Untervektorraum, der  $v_0, \dots, v_k$  enthält  $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sind linear unabhängig.

b)  $\text{conv}(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$

### Definition 35

- a) Sei  $\Delta^k = \text{conv}(e_0, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, \dots, e_k$ .

Dann heißt  $\Delta^k$  **Standard-Simplex** und  $k$  die Dimension des Simplex.

- b) Für Punkte  $v_0, \dots, v_k$  im  $\mathbb{R}^n$  in allgemeiner Lage heißt  $\delta(v_0, \dots, v_k) = \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$  ein  **$k$ -Simplex** in  $\mathbb{R}^n$ .
- c) Ist  $\Delta(v_0, \dots, v_k)$  ein  $k$ -Simplex und  $I = \{i_0, \dots, i_r\} \subseteq \{0, \dots, k\}$ , so heißt  $s_{i_0, \dots, i_r} := \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$  **Teilsimplex** oder **Seite** von  $\Delta$ .
- $s_{i_0, \dots, i_r}$  ist  $r$ -Simplex.

### Definition 36

- a) Eine endliche Menge  $K$  von Simplizes im  $\mathbb{R}^n$  heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:
- (i) Für  $\Delta \in K$  und  $S \subseteq \Delta$  Teilsimplex ist  $S \in K$
  - (ii) Für  $\Delta_1, \Delta_2 \in K$  ist  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  leer oder ein Teilsimplex von  $\Delta_1$  und von  $\Delta_2$
- b)  $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$  (mit Teilraumtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von  $K$ .
- c) Ist  $d = \max \{ k \mid K \text{ enthält } k - \text{Simplex} \}$ , so heißt  $d$  **Dimension** von  $K$ .

### Definition 37

Seien  $K, L$  Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

- a)  $f(\Delta) \in L$
- b)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

**Definition 38**

Sei  $K$  ein endlicher Simplicialkomplex. Für  $n \geq 0$  sei  $a_n(K)$  die Anzahl der  $n$ -Simplizes in  $K$ .

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

**Eulerzahl** (oder Euler-Charakteristik) von  $K$ .



### **Definition 39**

- a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.
- b) Ein Graph, der homöomorph zu  $S^1$  ist, heißt **Kreis**.
- c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

### Definition 40

Sei  $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$  und  $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$ .

- a)  $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n/B_n$  heißt  $n$ -te **Homotopiegruppe** von  $K$ .
- b)  $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$  heißt  $n$ -te **Betti-Zahl** von  $K$ .

### Definition 41

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege von  $a$  nach  $b$ , d. h.  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

- a)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $H : I \times I \rightarrow X$  mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: IH(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

und  $H(0, s) = a$  und  $H(1, s) = b$  für alle  $s \in I$  gibt. Dann schreibt man:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

- b)  $\gamma_s : I \rightarrow X, \gamma_s(t) = H(t, s)$  ist Weg in  $X$  von  $a$  nach  $b$  für jedes  $s \in I$ .

### Definition 42

Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Wege in  $X$  mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in  $X$ . Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ .

**Definition 43**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch  $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$  wird  $\pi_1(X, x)$  zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** von  $X$  im Basispunkt  $x$ .

### Definition 44

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn  $\pi_1(X, x) = \{ e \}$  für ein  $x \in X$ .

### Definition 45

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ .

$f$  und  $g$  heißen **homotop** ( $f \sim g$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

gibt.

### Definition 46

Es seien  $X, Y$  zusammenhängende topologische Räume und  $p : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung.

$p$  heißt **Überlagerung**, wenn jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U = U(x) \subseteq X$  besitzt, sodass  $p^{-1}(U)$  disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen  $V_j \subseteq Y$  ist ( $j \in I$ ) und  $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.



### Definition 47

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

$f$  heißt **offen**  $:\Leftrightarrow \forall V \subseteq X$  offen:  $f(V)$  ist offen in  $Y$ .

**Definition 48**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ .

$M$  heißt **diskret** in  $X$ , wenn  $M$  in  $X$  keinen Häufungspunkt hat.

### Definition 49

Sei  $p : Y \rightarrow X$  Überlagerung,  $Z$  ein weiterer topologischer Raum,  $f : Z \rightarrow X$  stetig.

Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  heißt **Liftung** von  $f$ , wenn  $p \circ \tilde{f} = f$  ist.

**Definition 50**

Eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt **universell**, wenn  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

### Definition 51

Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus.

$f$  heißt **Decktransformation** von  $p : \Leftrightarrow p \circ f = p$ .

Ist  $p$  eine Decktransformation und  $|\text{Deck}(Y/X)| = \deg p$ ,  
so heißt  $p$  **regulär**.

## Definition 52

Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge.

Eine **Gruppenoperation** von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $\circ$ :

$$\circ : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

für die gilt:

a)  $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$

b)  $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

### Definition 53

Sei  $G$  eine Gruppe,  $X$  ein topologischer Raum und  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenoperation.

- a)  $G$  operiert durch Homomorphismen, wenn für jedes  $g \in G$  die Abbildung

$$m_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$$

ein Homöomorphismus ist.

- b) Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation  $\circ$  **stetig**, wenn  $\circ : G \times X \rightarrow X$  stetig ist.

### Definition 54

Das Tripel  $(X, d, G)$  heißt genau dann eine **Geometrie**, wenn  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$  die Menge aller **Geraden** ist.



## Definition 55

Eine **euklidische Ebene** ist ein metrischer Raum  $(X, d)$  zusammen mit einer Teilmenge  $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$ , sodass die Axiome §1 - §5 erfüllt sind:

### §1) Inzidenzaxiome:

- (i) Zu  $P \neq Q \in X$  gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $\{P, Q\} \subseteq g$ .
- (ii)  $|g| \geq 2 \quad \forall g \in G$
- (iii)  $X \notin G$

§2) **Abstandsaxiom:** Zu  $P, Q, R \in X$  gibt es genau dann ein  $g \in G$  mit  $\{P, Q, R\} \subseteq g$ , wenn gilt:

- $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$  oder
- $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$  oder
- $d(Q, R) = d(Q, P) + d(P, R)$

### Definition 56

- a)  $P, Q, R$  liegen **kollinear**, wenn es  $g \in G$  gibt mit  $\{P, Q, R\} \subseteq g$ .
- b)  $Q$  **liegt zwischen**  $P$  und  $R$ , wenn  $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$
- c) **Strecke**  $\overline{PR} := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R\}$
- d) **Halbgeraden:**  
 $PR^+ := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \text{ oder } R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q\}$   
 $PR^- := \{Q \in X \mid P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R\}$

## Definition 57

### §3) Anordnungsaxiome

- (i) Zu jedem  $P \in X$  jeder Halbgerade  $H$  mit Anfangspunkt  $P$  und jedem  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gibt es genau ein  $Q \in H$  mit  $d(P, Q) = r$ .
- (ii) Jede Gerade zerlegt  $X \setminus g = H_1 \dot{\cup} H_2$  in zwei nichtleere Teilmengen  $H_1, H_2$ , sodass für alle  $A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt:  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ .

Diese Teilmengen  $H_i$  heißen **Halbebenen** bzgl.  $g$ .

- §4) **Bewegungsaxiom:** Zu  $P, Q, P', Q' \in X$  mit  $d(P, Q) = d(P', Q')$  gibt es Isometrien  $\varphi_1, \varphi_2$  mit  $\varphi_i(P) = P'$  und  $\varphi_i(Q) = Q', i = 1, 2$ <sup>1</sup>
- §5) **Parallelenaxiom:** Für jedes  $g \in G$  und jedes  $P \in X \setminus g$  gibt es höchstens ein  $h \in G$  mit  $h \cap g = \emptyset$ .<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Die „Verschiebung“ von  $P'Q'$  nach  $PQ$  und die Isometrie, die zusätzlich an der Gerade durch  $P$  und  $Q$  spiegelt.

<sup>2</sup> $h$  heißt „Parallele zu  $g$  durch  $P$ “.

## Definition 58

- a) Ein **Winkel** ist ein Punkt  $P \in X$  zusammen mit 2 Halbgeraden mit Anfangspunkt  $P$ .

Man schreibt:  $\angle R_1 P R_2$  bzw.  $\angle R_2 P R_1$ <sup>3</sup>

- b) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn es eine Isometrie gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet.

---

<sup>3</sup>Für dieses Skript gilt:  $\angle R_1 P R_2 = \angle R_2 P R_1$ . Also sind insbesondere alle Winkel  $\leq 180^\circ$ .

- c)  $\angle R'_1 P' R'_2$  heißt **kleiner** als  $\angle R_1 P R_2$ , wenn es eine Isometrie  $\varphi$  gibt, mit  $\varphi(P) = P'$ ,  $\varphi(PR'_1+) = P'R_1+$  und  $\varphi(R'_2)$  liegt in der gleichen Halbebene bzgl.  $PR_1$  wie  $R_2$  und in der gleichen Halbebene bzgl.  $PR_2$  wie  $R_1$
- d) Im Dreieck  $\triangle PQR$  gibt es Innenwinkel und Außenwinkel.

### Definition 59

„Simplizialkomplexe“ in euklidischer Ebene  $(X, d)$  heißen **flächengleich**, wenn sie sich in kongruente Dreiecke zerlegen lassen.



## Definition 60

Sei

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und  $G = G_1 \cup G_2$  mit

$$G_1 = \{ g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{ z \in \mathbb{H} : |z - m| = r \}$$

$$G_2 = \{ g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{ z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x \} \}$$

Die Elemente von  $\mathbb{H}$  heißen **hyperbolische Geraden**.

**Definition 61**

Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$  und  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung definiert durch

$$\sigma(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

$\sigma$  heißt **Möbiustransformation**.

**Definition 62**

Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden.

Dann heißt

$$\text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2}}{\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}} = \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

**Doppelverhältnis** von  $z_1, \dots, z_4$ .

### Definition 63

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  sei  $g_{z_1, z_2}$  die eindeutige hyperbolische Gerade durch  $z_1$  und  $z_2$  und  $a_1, a_2$  die „Schnittpunkte“ von  $g_{z_1, z_2}$  mit  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann sei  $d(z_1, z_2) := \frac{1}{2} \ln |DV(a_1, z_4, a_2, z_2)|$  und heiße **hyperbolische Metrik**.

### Definition 64

Sei  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^\infty$ -Funktion.

- a)  $\gamma$  heißt **durch Bogenlänge parametrisiert**, wenn  $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$  für alle  $t \in I$ . Dabei ist  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$
- b)  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  heißt **Länge von  $\gamma$**

### Definition 65

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a) Für  $t \in I$  sei  $n(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ ,  
d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

$$\text{und } \det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$$

- b) Nach ?? sind  $n(t)$  und  $\gamma''(t)$  linear abhängig, d. h.  
es gibt  $\kappa(t) \in \mathbb{R}$  mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$  heißt **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .

## Definition 66

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a) Für  $t \in I$  heißt  $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$  die **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .
- b) Ist für  $t \in I$  die Ableitung  $\gamma''(t) \neq 0$ , so heißt  $\gamma''(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ .
- c)  $b(t)$  sei ein Vektor, der  $\gamma'(t), n(t)$  zu einer orientierten Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  ergänzt. Also  $\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$ ;  $b(t)$  heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis  $\{\gamma'(t), n(t), b(t)\}$  heißt **begleitendes Dreibein**.

### Definition 67

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $s \in S$ ,  $F : U \rightarrow V \cap S$  eine lokale Parametrisierung um  $s$  (d. h.  $s \in V$ )

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Für  $p = F^{-1}(s) \in U$  sei

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

und  $D_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die durch  $J_F(p)$  definierte lineare Abbildung.

Dann heißt  $T_s S := \text{Bild}(D_p F)$  die **Tangentialebene** an  $S \in s$ .

### Definition 68

- a) Ein **Normalenfeld** auf der Fläche  $S$  ist eine Abbildung  $n : S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $n(s) \in T_s S^\perp$  für jedes  $s \in S$ .
- b)  $S$  heißt **orientierbar**, wenn es ein stetiges Normalenfeld auf  $S$  gibt.



### Definition 69

In der Situation aus ?? heißt die Krümmung  $\kappa_\gamma(0)$  der Kurve  $\gamma$  in der Ebene  $(s + E)$  im Punkt  $s$  die **Normalenkrümmung**<sup>4</sup> von  $S$  in  $s$  in Richtung  $x = \gamma'(0)$ .

Man schreibt:  $\kappa_\gamma(0) := \kappa_{\text{Nor}}(s, x)$