

# Geometrie und Topologie

Siehe [GitHub](#)

26. Oktober 2013

# Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet [tinyurl.com/GeoTopo](http://tinyurl.com/GeoTopo).

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>ii</b>
<b>I. Topologische Grundbegriffe</b>	<b>2</b>
I.1. Vorgeplänkel . . . . .	2
I.2. Topologische Räume . . . . .	2
I.3. Metrische Räume . . . . .	5
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>8</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>8</b>

# I. Topologische Grundbegriffe

## I.1. Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche  $S^2$  lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum  $\mathbb{R}^2$  oder zu einem Torus. Für den  $\mathbb{R}^2$  müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

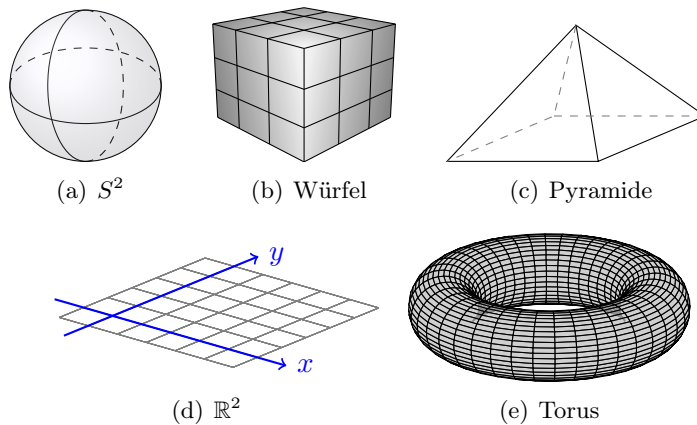


Abbildung I.1.: Beispiele für verschiedene Formen

## I.2. Topologische Räume

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B.  $[0, 1)$ . Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

**Beispiel 1**

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik.  
 $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in U$  gibt es  $r > 0$ , sodass  $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$   
 Also:  $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$
- 2) Allgemeiner:  $(X, d)$  metrischer Raum
- 3)  $X$  Menge,  $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, X \}$  heißt „triviale Topologie“
- 4)  $X$  Menge,  $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$  heißt „diskrete Topologie“
- 5)  $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$  heißt „Zariski-Topologie“  
 Beobachtung:  $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X], \text{ sodass } \mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- 6)  $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{ U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r) \}$
- 7)  $X = \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$   
 abgeschlossene Mengen:  $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

**Definition 2**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

**Definition 3**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- a)  $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$  heißt **Inneres** oder **offener Kern**

von  $M$ .

- b)  $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von  $M$ .

- c)  $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$  heißt **Rand** von  $M$ .

- d)  $M$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\overline{M} = X$  ist.

**Beispiel 2**

- 1)  $X = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie  
 $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$
- 2)  $X = \mathbb{R}, M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$
- 3)  $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$   
 $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

**Definition 4**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.

- b)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis**, wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.

**Beispiel 3**

Gegeben sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit euklidischer Topologie  $\mathfrak{T}$ . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von  $\mathfrak{T}$ .

**Bemerkung 1**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$ , für die  $\mathfrak{B}$  Subbasis ist.

**Definition 5**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Spurtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$

**Definition 6**

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$$

ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.

$$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$$

ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

**Beispiel 4**

- 1)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.
- 2)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie.  $\mathfrak{T}$  Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^2$ :  $U_1 \times U_2 \Rightarrow$  Die Produkttopologie auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$  überein.

**Definition 7**

Sei  $X$  topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X / \sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : x \rightarrow \overline{x}, x \mapsto [x]_\sim, U \subseteq \overline{X}$  heißt offen, wenn  $\pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf  $\overline{X}$  definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

**Beispiel 5**

$X = \mathbb{R}, a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

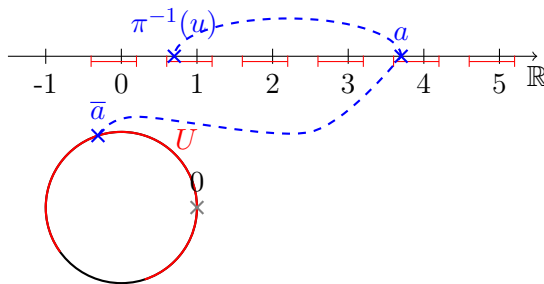


Bild  
einfü-  
gen

$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

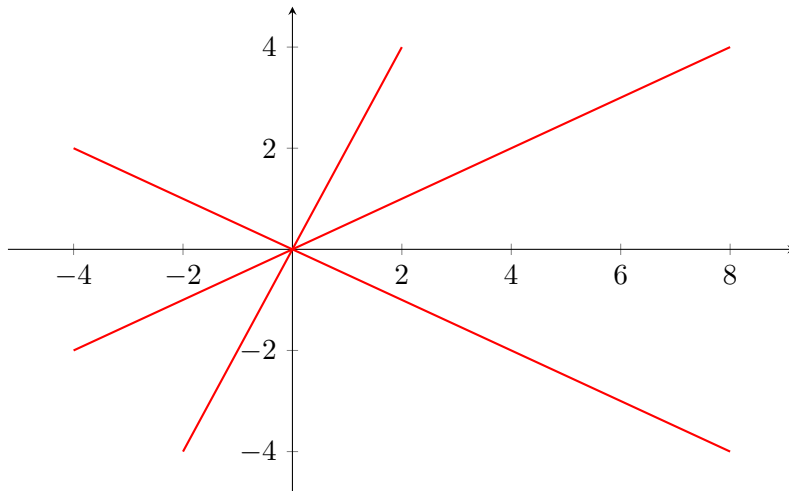
$X/\sim$  ist ein Torus.

### Beispiel 6

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \end{aligned}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für  $n = 1$ :



## I.3. Metrische Räume

### Definition 8

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i)  $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$
- (ii)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

### Bemerkung 2

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ .

### Beispiel 7

Sei  $V$  ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird  $V$  durch  $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  zum metrischen Raum.

### Beispiel 8 (diskrete Metrik)

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = y \\ 1 & , \text{ falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik  $d$  induziert die **diskrete Topologie**.

### Beispiel 9

$X = \mathbb{R}^2$  und  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}$  ist Metrik.

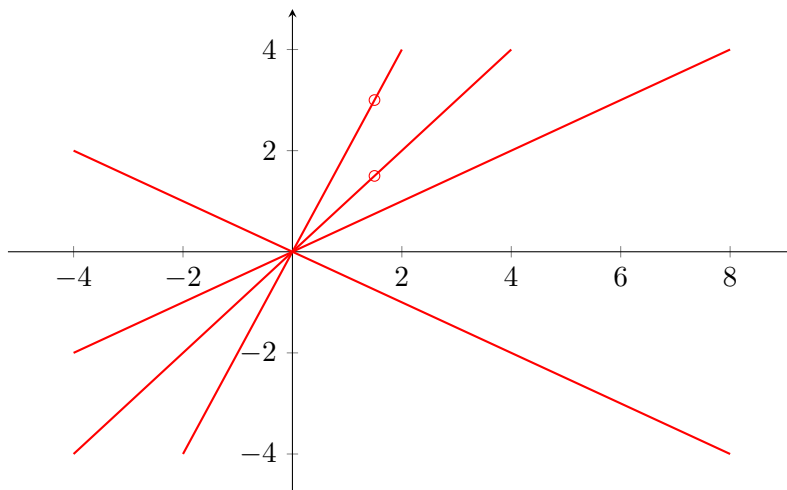
Bild von  $\mathfrak{B}_r(0)$  erstellen und einfügen (Quadrat der Seitenlänge  $2r$ )

*Beobachtung:*  $d$  erzeugt die euklidische Topologie.

Bild von Quadrat in Kreis in Quadrat ... erstellen und einfügen.

### Beispiel 10 (SNCF-Metrik)

$X = \mathbb{R}^2$  <sup>1</sup>



### Definition 9

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **Hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

### Bemerkung 3

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$ .

### Bemerkung 4

Seien  $X, X_1, X_2$  Hausdorff-Räume.

a) Jeder Teilraum um  $X$  ist Hausdorffsch.

<sup>1</sup>Diese Metrik wird auch „**französische Eisenbahnmeterik**“ genannt.



## I. Topologische Grundbegriffe

b)  $X_1 \times X_2$  ist Hausdorffsch.

TODO: Es fehlt eine „Beweisskizze“, die den  $\mathbb{R}^2$  darstellt sowie zwei Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  sowie ihre (disjunkten) Umgebungen bzgl. der  $X_1$ -Achse.

# Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$  Basis einer Topologie. 7

$\mathfrak{T}$  Topologie. 7

$\mathbb{Z}$  Ganze Zahlen. 7

$\mathbb{Q}$  Rationale Zahlen. 7

$\mathbb{R}$  Reelle Zahlen. 7

$\mathbb{R}^\times$  Multiplikative Einheitengruppe von  $\mathbb{R}$ . 7

$\mathbb{R}^+$  echt positive reelle Zahlen. 7

$\overline{M}$  Abschluss der Menge  $M$ . 7

$M^\circ$  Inneres der Menge  $M$ . 7

$\partial M$  Rand der Menge  $M$ . 7

$A \times B$  Kreuzprodukt zweier Mengen. 7

$A \subseteq B$  Teilmengenbeziehung. 7

$A \subsetneq B$  echte Teilmengenbeziehung. 7

# Stichwortverzeichnis

abgeschlossen, 2

Abschluss, 3

Basis, 3

dicht, 3

Inneres, 3

Kern

offener, 3

Metrik, 5

diskrete, 6

SNCF, 6

offen, 2

Produkttopologie, 4

Quotiententopologie, 4

Rand, 3

Raum

hausdorffscher, 6

metrischer, 5

topologischer, 2

Spurtopologie, 4

Subbasis, 3

Teilraum, 4

Topologie

diskrete, 3, 6

euklidische, 3

triviale, 3

Zariski, 3

Umgebung, 3