Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Gegeben: Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Gesucht: Cholesky-Zerlegung $A = L \cdot L^T$

Rechnung: Erste Spalte:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \tag{1}$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \tag{2}$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Zweite Spalte:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2} \tag{5}$$
$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}}{l_{22}} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Dritte Spalte:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{32}^2 - {l_{31}}^2} \tag{8}$$

Teilaufgabe b)

$$l_{11} = 2 \tag{9}$$
$$l_{21} = 1 \tag{10}$$
$$l_{31} = -2 \tag{11}$$
$$l_{22} = 3 \tag{12}$$
$$l_{32} = 1 \tag{13}$$
$$l_{33} = 1 \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

Die restlichen Einträge sind 0. (L ist immer eine untere Dreiecksmatrix)

Teilaufgabe c)

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow L \cdot L^T \cdot x = b \tag{16}$$
$$L \cdot c = b \tag{17}$$

Löse 17 mit Vorwärtssubstitution.

$$L^T \cdot x = c \tag{18}$$

Löse 18 mit Rückwärtssubstitution.

$$x_3 = 3 \tag{19}$$
$$x_2 = 1 \tag{20}$$
$$x_1 = 2 \tag{21}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot r_{kj} \tag{22}$$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot r_{kj}}{r_{jj}} \tag{23}$$

for $d \in \{ 1, \dots n \}$ **do**
    berechne d-te Zeile von R
    berechne d-te Spalte von L
end for

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

1. Selbstabbildung:
   Sei $x \in D := [1.75, 2]$.

   Dann:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{1.75^2} = 1 + \frac{44}{49} \leq 2 \tag{24}$$

und:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75 \tag{25}$$

2. Abgeschlossenheit: D ist offentsichtlich abgeschlossen.
3. Kontraktion:
   F ist Lipschitz-stetig auf D und für alle $x \in D$ gilt:

   $$|F'(x)| = |-\frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}| \leq \frac{240}{343} =: \theta < 1 \tag{26}$$

   Also gilt auch $\forall x, y \in D$:

   $$|F(x) - F(y)| \leq \theta \cdot |x - y| \tag{27}$$

   Somit ist die Lipschitz- bzw. Kontraktions-Konstante θ.

Insgesamt folgt, dass F die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Aufgabe 4

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+4x} dx = \int_0^{0.5} \frac{1}{1+4x} dx + \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+4x} dx =$$
$$(0.5 - 0) * \frac{f(0) + f(0.5)}{2} + (1 - 0.5) * \frac{f(1) + f(0.5)}{2} = \frac{7}{15}$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\ldots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p - 1$ liefert.

Teilaufgabe b

Für die ersten 3. Ordnungsbedingungen gilt:

$$1 = \sum_{i=0}^{s} b_i$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=0}^{s} b_i * c_i$$
$$\frac{1}{3} = \sum_{i=0}^{s} b_i * c_i^2$$

Teilaufgabe c

Da die Ordnung 4 gewünscht ist müssen nach VL die Knoten der QF symmetrisch sein. Damit folgt sofort $c_2 = \frac{1}{2}$. Sind die Knoten gewählt, so sind die Gewichte eindeutig bestimmt. Die Berechnung erfolgt mit den Lagrangepolynomen. Es gilt $b_0 = b_2 = \frac{1}{6}, b_1 = \frac{4}{6}$. Entweder man setzt alles in die 4. Ordnungsbedingung ein oder aber argumentiert, dass es sich hierbei um die Simpson-Regel handelt und diese die Ordnung 4 hat.