**Raum, topologischer**
**Menge, offene**
**Menge, abgeschlossene**

**Umgebung**
**lokal**

**Inneres**
**Kern, offener**
**Abschluss**
**Rand**
**dicht**

**Basis**
**Subbasis**

**Spurtopologie**
**Teilraum**
**Teilraumtopologie**
**Unterraumtopologie**

**Produkttopologie**

**Quotiententopologie**

**Metrik**
**Raum, metrischer**

Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x$, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.
Gilt eine Eigenschaft in einer Umgebung, so sagt man, dass die Eigenschaft **lokal** gilt.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X,\mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge $X$ und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften
(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
(iii) Ist $I$ eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von $X$.
$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.
a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.
b) $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$ ist.

Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.
a) $M^\circ := \{\, x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \,\} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von $M$.
b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von $M$.
c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von $M$.
d) $M$ heißt **dicht** in $X$, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Seien $X_1, X_2$ topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen $U_i$ um $x_i$ mit $i = 1,2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.
$\mathfrak{T} = \{\, U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \,\}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.
$\mathfrak{B} = \{\, U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1,2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{\, U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \,\}$ ist eine Topologie auf $Y$.
$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Teilraumtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X,\mathfrak{T})$.

Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik**, wenn gilt:
(i) Definitheit: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in X$
(ii) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
(iii) Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Das Paar $(X,d)$ heißt ein **metrischer Raum**.

Sei $X$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \to \overline{X}, \quad x \mapsto [x]_\sim$.

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \left\{\, U \subseteq \overline{X} \;\middle|\; \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \,\right\}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$ heißt **Quotiententopologie**.

**Isometrie**

**Raum, hausdorffscher**

**Grenzwert**
**Limes**

**Abbildung, stetige**
**Homöomorphismus**

**zusammenhängender**
**zusammenhängende**

**Zusammenhangskomponente**

**Uberdeckung**

**Raum, kompakter**

Ein topologischer Raum $X$ heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in $X$ Umgebungen $U_x$ um $x$ und $U_y$ um $y$ gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

Dann heißt $\varphi$ eine **Isometrie** von $X$ nach $Y$.

Seien $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) $f$ heißt **stetig** $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X$.
b) $f$ heißt **Homöomorphismus**, wenn $f$ stetig ist und es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Sei $X$ ein topologischer Raum und $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von $(x_n)$, wenn es für jede Umgebung $U$ von $x$ ein $n_0$ gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $X$ ein topologischer Raum.
Für $x \in X$ sei $Z(x) \subseteq X$ definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente**.

a) Ein Raum $X$ heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen $U_1, U_2$ von $X$ gibt mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$.
b) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn $Y$ als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Ein topologischer Raum $X$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von $X$

$$\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I} \text{ mit } U_i \text{ offen in } X$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i \in J \subseteq I} U_i = X \text{ mit } |J| \in \mathbb{N}$$

besitzt.

Sei $X$ eine Menge und $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
$\mathfrak{U}$ heißt eine **Überdeckung** von $X$, wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in \mathfrak{U} : x \in M$$

**Weg**
**Weg, geschlossener**
**Weg, einfacher**

**Wegzusammenhang**

**Jordankurve**
**Jordankurve, geschlossene**

**Knoten**

**Knoten, äquivalente**
**Isotopie**

**Knotendiagramm**

**Färbbarkeit**

**Karte**
**Atlas**
**Mannigfaltigkeit**

Ein topologischer Raum $X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Sei $X$ ein topologischer Raum.

a) Ein **Weg** in $X$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$.
b) $\gamma$ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt.
c) $\gamma$ heißt **einfach**, wenn $\gamma|_{[0,1)}$ injektiv ist.

Eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ heißt **Knoten**.

Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in $X$ ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0,1] \to C \subseteq X$ bzw. $\gamma : S^1 \to C \subseteq X$, wobei $C := \operatorname{Bild} \gamma$.

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ ein Knoten, $E$ eine Ebene und $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ eine Projektion auf $E$.
$\pi$ heißt **Knotendiagramm** von $\gamma$, wenn gilt:

$$\left|\pi^{-1}(x)\right| \leq 2 \quad \forall x \in \pi(\gamma)$$

Ist $(\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** $y_1$ **über** $y_2$, wenn gilt:

$$\exists \lambda > 1 : (y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$$

Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z,0) = \gamma_1(z) \quad \forall z \in S^1$$
$$H(z,1) = \gamma_2(z) \quad \forall z \in S^1$$

und für jedes feste $t \in [0,1]$ ist

$$H_z : S^1 \to \mathbb{R}^3, z \mapsto H(z,t)$$

ein Knoten. Die Abbildung $H$ heißt **Isotopie** zwischen $\gamma_1$ und $\gamma_2$.

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine $n$-dimensionale **Karte** auf $X$ ist ein Paar $(U, \varphi)$, wobei $U \in \mathfrak{T}$ und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von $U$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
b) Ein $n$-dimensionaler **Atlas** $\mathcal{A}$ auf $X$ ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf $X$, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
c) $X$ heißt (topologische) $n$-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn $X$ hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und einen $n$-dimensionalen Atlas besitzt.

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von $D$ so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

**Verklebung**

**Mannigfaltigkeit, mit Rand**

**Rand**

**Ubergangsfunktion**

**Mannigfaltigkeit, differenzierbare**
**Mannigfaltigkeit, glatte**

**verträglich**
$C^k$**-Struktur**
**Struktur, differenzierbare**

**Abbildung, differenzierbare**
**Diffeomorphismus**

**Fläche, reguläre**
**Parametrisierung, reguläre**

Sei $X$ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. $X$ heißt $n$-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas $(U_i, \varphi_i)$ gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und $\varphi_i$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$\mathbb{R}^n_{+,0} := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$$

ist.

Seien $X, Y$ $n$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $\Phi : U \to V$ ein Homöomorphismus $Z = (X \dot\cup Y)/_\sim$ mit der von $u \sim \Phi(u)\ \forall u \in U$ erzeugten Äquivalenzrelation und der von $\sim$ induzierten Quotiententopologie. $Z$ heißt **Verklebung** von $X$ und $Y$ längs $U$ und $V$. $Z$ besitzt einen Atlas aus $n$-dimensionalen Karten. Falls $Z$ hausdorffsch ist, ist $Z$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei $X$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$
Für $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ heißt

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$
$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

**Kartenwechsel** oder **Übergangsfunktion**.

Sei $X$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas $\mathcal{A}$. Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} \{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \}$$

**Rand** von $X$.

Sei $X$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$) mit Atlas $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) Eine Karte $(U, \varphi)$ auf $X$ heißt **verträglich** mit $\mathcal{A}$, wenn alle Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ und $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ ($i \in I$ mit $U_i \cap U \neq \emptyset$) differenzierbar von Klasse $C^k$ sind.
b) Die Menge aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten auf $X$ bildet einen maximalen Atlas der Klasse $C^k$. Er heißt **$C^k$-Struktur** auf $X$.
Eine $C^\infty$-Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf $X$.

Sei $X$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) $X$ heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse** $C^k$, wenn jede Kartenwechselabbildung $\varphi_{ij},\ i, j \in I$ $k$-mal stetig differenzierbar ist.
b) $X$ heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn $X$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^\infty$ ist.

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche** $:\Leftrightarrow \forall s \in S\ \exists$ Umgebung $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3\ \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen: $\exists$ differenzierbare Abbildung $F : U \to V \cap S$: $\mathrm{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$.
$F$ heißt (lokale) **reguläre Parametrisierung** von $S$.

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$
$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

Seien $X, Y$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $n$ bzw. $m$, $x \in X$.

a) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **differenzierbar** in $x$ (von Klasse $C^k$), wenn es Karten $(U, \varphi)$ von $X$ mit $x \in U$ und $(V, \psi)$ von $Y$ mit $f(U) \subseteq V$ gibt, sodass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar von Klasse $C^k$ in $\varphi(x)$ ist.
b) $f$ heißt **differenzierbar** (von Klasse $C^k$), wenn $f$ in jedem $x \in X$ differenzierbar ist.
c) $f$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn $f$ differenzierbar von Klasse $C^\infty$ ist und es eine differenzierbare Abbildung $g : Y \to X$ von Klasse $C^\infty$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

**Gruppe, topologische**
**Lie-Gruppe**

**Lage, allgemeine**
**Punkt**
**Hülle, konvexe**

**Standard-Simplex**
**Simplex**
**Teilsimplex**
**Seite**

**Simplizialkomplex**
**Realisierung, geometrische**
**Dimension**

**Abbildung, simpliziale**

**Eulerzahl**

**Graph**
**Kreis**
**Baum**

**Triangulierung**

Seien $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte.

a) $v_0, \dots, v_k$ sind **in allgemeiner Lage**
   $\Leftrightarrow$ es gibt keinen $(k-1)$-dimensionalen affinen Untervektorraum, der $v_0, \dots, v_k$ enthält
   $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ sind linear unabhängig.
b) $\operatorname{conv}(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$
   heißt die **konvexe Hülle** von $v_0, \dots, v_k$.

Sei $G$ eine Mannigfaltigkeit und $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) $G$ heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen $\circ : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$ definiert durch

$$g \circ h := g \cdot h \text{ und } \iota(g) := g^{-1}$$

   stetig sind.
b) Ist $G$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt $G$ **Lie-Gruppe**, wenn $(G, \circ)$ und $(G, \iota)$ differenzierbar sind.

a) Eine endliche Menge $K$ von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:
   (i) Für $\Delta \in K$ und $S \subseteq \Delta$ Teilsimplex ist $S \in K$.
   (ii) Für $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ leer oder ein Teilsimplex von $\Delta_1$ und von $\Delta_2$.
b) $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$ (mit Teilraumtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von $K$.
c) Ist $d = \max \{ k \in \mathbb{N}_0 \mid K \text{ enthält } k\text{-Simplex} \}$, so heißt $d$ die **Dimension** von $K$.

a) Sei $\Delta^n = \operatorname{conv}(e_0, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren $e_0, \dots, e_n$.
   Dann heißt $\Delta^n$ **Standard-Simplex** und $n$ die Dimension des Simplex.
b) Für Punkte $v_0, \dots, v_k$ im $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage heißt $\Delta(v_0, \dots, v_k) = \operatorname{conv}(v_0, \dots, v_k)$ ein **$k$-Simplex** in $\mathbb{R}^n$.
c) Ist $\Delta(v_0, \dots, v_k)$ ein $k$-Simplex und $I = \{ i_0, \dots, i_r \} \subseteq \{ 0, \dots, k \}$, so ist $s_{i_0, \dots, i_r} := \operatorname{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$ ein $r$-Simplex und heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von $\Delta$.

Sei $K$ ein endlicher Simplizialkomplex. Für $n \geq 0$ sei $a_n(K)$ die Anzahl der $n$-Simplizes in $K$.
Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

**Eulerzahl** (oder Euler-Charakteristik) von $K$.

Seien $K, L$ Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

a) $f(\Delta) \in L$
b) $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Sei $X$ ein topologischer Raum, $K$ ein Simplizialkomplex und

$$h : |K| \to X$$

ein Homöomorphismus von der geometrischen Realisierung $|K|$ auf $X$. Dann heißt $h$ eine **Triangulierung** von $X$.

a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.
b) Ein Graph, der homöomorph zu $S^1$ ist, heißt **Kreis**.
c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

**Homologiegruppe**
**Betti-Zahl**

**Weg, homotope**
**Homotopie**

**Weg, zusammengesetzter**

**Inklusionsabbildung**
**Retraktion**
**Deformationsretrakt**

**Fundamentalgruppe**

**einfach zusammenhängend**

**Abbildung, homotope**

**Uberlagerung**

Sei $X$ ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ Wege von $a$ nach $b$, d. h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

$\gamma_1$ und $\gamma_2$ heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \ \forall t \in I$$
$$H(t, 1) = \gamma_2(t) \ \forall t \in I$$

und $H(0, s) = a$ und $H(1, s) = b$ für alle $s \in I$ gibt. Dann schreibt man: $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$H$ heißt **Homotopie** zwischen $\gamma_1$ und $\gamma_2$.

Sei $K$ ein Simplizialkomplex, $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$ und $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$.

a) $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$ heißt $n$-te **Homologiegruppe** von $K$.

b) $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$ heißt $n$-te **Betti-Zahl** von $K$.

Sei $X$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$, $r : X \to A$ eine stetige Abbildung und $\iota = (\text{id}_X)|_A$.

a) $\iota : A \to X$ mit $\iota(x) = x$ heißt die **Inklusionsabbildung** und man schreibt: $\iota : A \hookrightarrow X$.

b) $r$ heißt **Retraktion**, wenn $r|_A = \text{id}_A$ ist.

c) $A$ heißt **Deformationsretrakt**, wenn es eine Retraktion $r$ auf $A$ mit $\iota \circ r \sim \text{id}_X$ gibt.

Seien $\gamma_1, \gamma_2$ Wege in $X$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in $X$. Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$.

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum $X$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(X, x) = \{ e \}$ für ein $x \in X$.

Sei $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$ wird $\pi_1(X, x)$ zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** von $X$ im Basispunkt $x$.

Es seien $X, Y$ zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung.
$p$ heißt **Überlagerung**, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subseteq X$ besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $V_j \subseteq Y$ ist ($j \in I$) und $p|_{V_j} : V_j \to U$ ein Homöomorphismus ist.
$|I|$ heißt **Grad der Überlagerung** $p$ und man schreibt:

$$\deg p := |I|$$

Seien $X, Y$ topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.
$f$ und $g$ heißen **homotop** ($f \sim g$), wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit

$$H(x, 0) = f(x) \ \forall x \in X$$
$$H(x, 1) = g(x) \ \forall x \in X$$
$$H(x_0, s) = y_0 \ \forall s \in I$$

gibt.

**Abbildung, offene**

**diskret**

**Liftung**

**Überlagerung, universelle**

**Umgebungsbasis**

**Überlagerung, reguläre**
**Decktransformationsgruppe**

**Gruppenoperation**

**Gruppe operiert durch Homöomorphismen**
**Gruppenoperation, stetige**

Sei $X$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.
$M$ heißt **diskret** in $X$, wenn $M$ in $X$ keinen Häufungspunkt hat.

Seien $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
$f$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_X : f(U) \in \mathfrak{T}_Y$.

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt **universell**, wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Es seien $X, Y, Z$ topologische Räume, $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ stetig.
Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \to Y$ heißt **Liftung** von $f$, wenn $p \circ \tilde{f} = f$ ist.

Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to Y$ ein Homöomorphismus.

a) $f$ heißt **Decktransformation** von $p :\Leftrightarrow p \circ f = p$.
b) Die Decktransformationen von $p : Y \to X$ bilden mit der Verkettung eine Gruppe, die sog. **Decktransformationsgruppe**. Man schreibt: $\operatorname{Deck}(p)$, $\operatorname{Deck}(Y/X)$ oder $\operatorname{Deck}(Y \to X)$.
c) $p$ heißt **regulär**, wenn $|\operatorname{Deck}(Y/X)| = \deg p$ gilt.

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.
$U \subseteq \mathfrak{T}$ heißt eine **Umgebungsbasis** von $x$, wenn jede offene Umgebung von $x$ eine Teilmenge von $U$ enthält.

Sei $G$ eine Gruppe, $X$ ein topologischer Raum und $\circ : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

a) $G$ **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung
$$m_g : X \to X, x \mapsto g \circ x$$
ein Homöomorphismus ist.
b) Ist $G$ eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation $\circ$ **stetig**, wenn
$$\forall g \in G : m_g \text{ ist stetig}$$
gilt.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $X$ eine Menge.
Eine **Gruppenoperation** von $G$ auf $X$ ist eine Abbildung $\circ : G \times X \to X$ für die gilt:

a) $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$
b) $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

**Geometrie**
**Gerade**

**Ebene, euklidische**
**Inzidenzaxiome**
**Abstandsaxiom**

**kollinear**
**liegt zwischen**
**Strecke**
**Halbgerade**

**Anordnungsaxiome**
**Halbebene**
**Bewegungsaxiom**
**Parallele**

**Winkel**
**Innenwinkel**
**Außenwinkel**

**Simplizialkomplexe, flächengleiche**

**Gerade, hyperbolische**

**Möbiustransformation**

Eine **euklidische Ebene** ist eine Geometrie $(X, d, G)$, die Axiome §1 - §5 erfüllt:

§1) **Inzidenzaxiome**:
   (i) Zu $P \neq Q \in X$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $\{ P, Q \} \subseteq g$.
   (ii) $|g| \geq 2 \quad \forall g \in G$
   (iii) $X \notin G$

§2) **Abstandsaxiom**: Zu $P, Q, R \in X$ gibt es genau dann ein $g \in G$ mit $\{ P, Q, R \} \subseteq g$, wenn gilt:
- $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ oder
- $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ oder
- $d(Q, R) = d(Q, P) + d(P, R)$

Das Tripel $(X, d, G)$ heißt genau dann eine **Geometrie**, wenn $(X, d)$ ein metrischer Raum und $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt. Dann heißt $G$ die Menge aller **Geraden**.

§3) **Anordnungsaxiome**
   (i) Zu jeder Halbgerade $H$ mit Anfangspunkt $P \in X$ und jedem $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es genau ein $Q \in H$ mit $d(P, Q) = r$.
   (ii) Jede Gerade zerlegt $X \setminus g = H_1 \dot\cup H_2$ in zwei nichtleere Teilmengen $H_1, H_2$, sodass für alle $A \in H_i$, $B \in H_j$ mit $i, j \in \{ 1, 2 \}$ gilt: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$.
   Diese Teilmengen $H_i$ heißen **Halbebenen** bzgl. $g$.

§4) **Bewegungsaxiom**: Zu $P, Q, P', Q' \in X$ mit $d(P, Q) = d(P', Q')$ gibt es mindestens 2 Isometrien $\varphi_1, \varphi_2$ mit $\varphi_i(P) = P'$ und $\varphi_i(Q) = Q'$ mit $i = 1, 2$.[a]

§5) **Parallelenaxiom**: Zu jeder Geraden $g \in G$ und jedem Punkt $P \in X \setminus g$ gibt es höchstens ein $h \in G$ mit $P \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. $h$ heißt **Parallele zu $g$ durch $P$**.

[a] Die „Verschiebung“ von $P'Q'$ nach $PQ$ und die Isometrie, die zusätzlich an der Gerade durch $P$ und $Q$ spiegelt.

Sei $(X, d, G)$ eine Geometrie und seien $P, Q, R \in X$.

a) $P, Q, R$ liegen **kollinear**, wenn es $g \in G$ gibt mit $\{ P, Q, R \} \subseteq g$.
b) $Q$ **liegt zwischen** $P$ und $R$, wenn $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$
c) **Strecke** $\overline{PR} := \{ Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \}$
d) **Halbgeraden**:
   $PR^+ := \{ Q \in X \mid Q$ liegt zwischen $P$ und $R$ oder $R$ liegt zw
   $PR^- := \{ Q \in X \mid P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R \}$

„Simplizialkomplexe“ in euklidischer Ebene $(X, d)$ heißen **flächengleich**, wenn sie sich in kongruente Dreiecke zerlegen lassen.

a) Ein **Winkel** ist ein Punkt $P \in X$ zusammen mit 2 Halbgeraden mit Anfangspunkt $P$.
   Man schreibt: $\angle R_1 P R_2$ bzw. $\angle R_2 P R_1$[a]
b) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn es eine Isometrie gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet.
c) $\angle R_1' P' R_2'$ heißt **kleiner** als $\angle R_1 P R_2$, wenn es eine Isometrie $\varphi$ gibt, mit $\varphi(P') = P$, $\varphi(P' R_1'^+) = P R_1^+$ und $\varphi(R_2')$ liegt in der gleichen Halbebene bzgl. $PR_1$ wie $R_2$ und in der gleichen Halbebene bzgl. $PR_2$ wie $R_1$
d) Im Dreieck $\triangle PQR$ gibt es **Innenwinkel** und **Außenwinkel**.

[a] Für dieses Skript gilt: $\angle R_1 P R_2 = \angle R_2 P R_1$. Also sind insbesondere alle Winkel $\leq 180°$.

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch

$$\sigma(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

$\sigma$ heißt **Möbiustransformation**.

Sei

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und $G = G_1 \cup G_2$ mit

$$G_1 = \{ g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{ z \in \mathbb{H} : | z - m| = r \} \}$$
$$G_2 = \{ g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{ z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x \} \}$$

Die Elemente aus $G$ heißen **hyperbolische Geraden**.

**Doppelverhältnis**

**Metrik, hyperbolische**

**Kurve**

**parametrisiert, durch Bogenlänge**
**Kurve, Länge einer**

**Normalenvektor**
**Krümmung**

**Krümmung**
**Normalenvektor**
**Binormalenvektor**
**Dreibein, begleitendes**

**Tangentialebene**

**Normalenfeld**
**Fläche, orientierbare**

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ sei $g_{z_1,z_2}$ die eindeutige hyperbolische Gerade durch $z_1$ und $z_2$ und $a_1, a_2$ die „Schnittpunkte“ von $g_{z_1,z_2}$ mit $\mathbb{R} \cup \{ \infty \}$.
Dann sei $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) := \frac{1}{2} |\ln \mathrm{DV}(a_1, z_1, a_2, z_2)|$ und heiße **hyperbolische Metrik**.

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.
Dann heißt

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1-z_4}{z_1-z_2}}{\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}} = \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

**Doppelverhältnis** von $z_1, \dots, z_4$.

Sei $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

a) Die Kurve $\gamma$ heißt **durch Bogenlänge parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\gamma'(t)\|_2 = 1 \quad \forall t \in I$$

Dabei ist $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$.

b) $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$ heißt **Länge von** $\gamma$.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine eine Funktion aus $C^\infty$. Dann heißt $f$ **Kurve**.

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ heißt $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ die **Krümmung** von $\gamma$ in $t$.

b) Ist für $t \in I$ die Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$, so heißt $\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$ **Normalenvektor** an $\gamma$ in $t$.

c) $b(t)$ sei ein Vektor, der $\gamma'(t), n(t)$ zu einer orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt. Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$ heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ sei $n(t)$ **Normalenvektor** an $\gamma$ in $t$ wenn gilt:

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \ \|n(t)\| = 1 \text{ und } \det((\gamma'(t), n(t))) = +1$$

b) Seit $\kappa : I \to \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

Dann heißt $\kappa(t)$ **Krümmung** von $\gamma$ in $t$.

a) Ein **Normalenfeld** auf der regulären Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $n : S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $n(s) \in T_s S^\perp$ für jedes $s \in S$.

b) $S$ heißt **orientierbar**, wenn es ein stetiges Normalenfeld auf $S$ gibt.

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $s \in S$, $F : U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um $s \in V$:

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Für $p = F^{-1}(s) \in U$ sei

$$J_F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

und $D_p F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch $J_F(p)$ definierte lineare Abbildung.

Dann heißt $T_s S := \mathrm{Bild}(D_p F)$ die **Tangentialebene** an $s \in S$.

**Normalkrümmung**

**Normalkrümmung**

**Hauptkrümmung**
**Gauß-Krümmung**

**Fundamentalform, erste**

**Flächenelement**

**Fundamentalform, zweite**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $s \in S$ und $n$ ein stetiges Normalenfeld auf $S$.
$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ($\varepsilon > 0$) mit $\gamma(0) = s$ und $\gamma''(0) \neq 0$.
Sei $n(0) := \frac{\gamma''(0)}{\|\gamma''(0)\|}$. Zerlege

$$n(0) = n(0)^t + n(0)^\perp \text{ mit } n(0)^t \in T_sS \text{ und } n(0)^\perp \in (T_sS)^\perp$$

Dann ist $n(0)^\perp = \langle n(0), n(s)\rangle \cdot n(s)$
$\kappa_{\mathrm{Nor}}(s,\gamma) := \langle \gamma''(0), n(s)\rangle$ die **Normalkrümmung**.

In der Situation aus **??** heißt die Krümmung $\kappa_\gamma(0)$ der Kurve $\gamma$ in der Ebene $(s + E)$ im Punkt $s$ die **Normalkrümmung** von $S$ in $s$ in Richtung $x = \gamma'(0)$.
Man schreibt: $\kappa_{\mathrm{Nor}}(s,x) := \kappa_\gamma(0)$

Sei $I_S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert als

$$\begin{aligned} I_S :&= \begin{pmatrix} g_{1,1}(s) & g_{1,2}(s) \\ g_{1,2}(s) & g_{2,2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(s) & F(s) \\ F(s) & G(s) \end{pmatrix} \\ \text{mit } g_{i,j} &= g_s(D_pF(e_i), D_pF(e_j)) \\ &= \langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(p), \frac{\partial F}{\partial u_j}(p)\rangle \quad i,j \in \{1,2\} \end{aligned}$$

Die Matrix $I_S$ heißt **erste Fundamentalform** von $S$ bzgl. der Parametrisierung $F$.

Sei $S$ eine reguläre Fläche und $n = n(s)$ ein Normalenvektor an $S$ in $s$.

a) $\kappa_1^n(s) := \min \{ \kappa_{\mathrm{Nor}}^n(s,x) \mid x \in T_s^1 S \}$ und $\kappa_2^n(s) := \max \{ \kappa_{\mathrm{Nor}}^n(s,x) \mid x \in T_s^1 S \}$ heißen **Hauptkrümmungen** von $S$ in $s$.
b) $K(s) := \kappa_1^n(s) \cdot \kappa_2^n(s)$ heißt **Gauß-Krümmung** von $S$ in $s$.

Die durch $-d_sn$ definierte symmetrische Bilinearform auf $T_sS$ heißt **zweite Fundamentalform** von $S$ in $s$ bzgl. $F$.
Man schreibt: $II_s(x,y) = \langle -d_sn(x), y\rangle = I_s(-d_sn(x), y)$

a) Das Differential $\mathrm{d}A = \sqrt{\det(I)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$ heißt **Flächenelement** von $S$ bzgl. der Parametrisierung $F$.
b) Für eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ heißt

$$\int_V f\mathrm{d}A := \int_U f(\underbrace{F(u_1,u_2)}_{=:s})\sqrt{\det I(s)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$$

der **Wert des Integrals** von $f$ über $V$, falls das Integral rechts existiert.