Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Definition 2

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$

heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Definition 4

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$ ist.

Definition 5

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Teilraumtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**. $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i$ offe
ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

Definition 7

Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \to \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_\sim$.

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \left\{ U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \right\}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$ heißt **Quotiententopologie**.

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) Definitheit: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

(ii) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x$
X

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Definition 9

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

Dann heißt φ eine **Isometrie** von X nach Y.

Definition 10

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definition 11

Sei X ein topologischer Raum und $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n), wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Definition 12

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt **stetig**, wenn für jedes offene $U \subseteq Y$ auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Definition 13

Ein Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen U_1, U_2 von X gibt mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$.

Definition 14

Sei X ein topologischer Raum.

Für $x \in X$ sei $Z(x) \subseteq X$ definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ X \in A}} A$$

$Z(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente**.

Definition 15

Sei X eine Menge und $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$\mathfrak{U}$ heißt eine **Überdeckung** von X, wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in \mathfrak{U} : x \in M$$

Definition 16

Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X

$$\mathfrak{U} = \{\, U_i \,\}_{i \in I} \text{ mit } U_i \text{ offen in } X$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i \in J \subseteq I} U_i = X \text{ mit } |J| \in \mathbb{N}$$

besitzt.

Definition 17

Sei X ein topologischer Raum.

a) Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$.

b) γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt.

c) γ heißt **einfach**, wenn $\gamma|_{[0,1)}$ injektiv ist.

Definition 18

Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Definition 19

Sei X ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in X ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0, 1] \to C \subseteq X$ ($\gamma : S^1 \to C \subseteq X$)

Definition 20

Eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ heißt **Knoten**.

Definition 21

Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z,0) = \gamma_1(z)$$
$$H(z,1) = \gamma_2(z)$$

und für jedes feste $t \in [0,1]$ ist

$$H_z : S^1 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z,t)$$

ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

Definition 22

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens γ ist eine Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ auf eine Ebene E, sodass $|(\pi|C)^{-1}(x)| \leq 2$ für jedes $x \in D$.

Ist $(\pi|C)^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** y_1 **über** y_2, wenn $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$ für ein $\lambda > 1$ ist.

Definition 23

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von D so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

Definition 24

Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine n-dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ), wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Ein n-dimensionaler **Atlas** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

c) X heißt (topologische) n-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n-dimensionalen Atlas besitzt.

Definition 25

Seien X, Y n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $\Phi : U \to V$ ein Homöomorphismus $Z = (X \dot{\cup} Y)/_\sim$ mit der von $u \sim \Phi(u)\ \forall u \in U$ erzeugten Äquivalenzrelation und der von $\sim$ induzierten Quotiententopologie.

Z heißt **Verklebung** von X und Y längs U und V. Z besitzt einen Atlas aus n-dimensionalen Karten. Falls Z hausdorffsch ist, ist Z eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Definition 26

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R^n_{+,0} := \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist. $R^n_{+,0}$ ist ein „Halbraum“.

Definition 27

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas (U_i, φ_i). Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{i \in I} \{\, x \in U_i \mid \varphi_i(x)_n = 0 \,\}$$

Rand von X.

Definition 28

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für $i, j \in I$ mit $U_i, U_j \neq \emptyset$ heißt

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$
$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Kartenwechsel oder **Übergangsfunktion**.

Definition 29

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse** C^k, wenn jede Kartenwechselabbildung $\varphi_{ij},\ i, j \in I$ k-mal stetig differenzierbar ist.

b) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

Definition 30

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$) mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) Eine Karte (U, φ) auf X heißt **verträglich** mit $\mathcal{A}$, wenn alle Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ und $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ ($i \in I$ mit $U_i \cap U \neq \emptyset$) differenzierbar von Klasse C^k sind.

b) Die Menge aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten auf X bildet einen maximalen Atlas der Klasse C^k. Er heißt C^k**-Struktur** auf X.

   Eine C^∞-Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf X.

Definition 31

Seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, $x \in X$.

a) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **differenzierbar** in x (von Klasse C^k), wenn es Karten (U, φ) von X mit $x \in U$ und (V, ψ) von Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, sodass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar von Klasse C^k in $\varphi(x)$ ist.

b) f heißt **differenzierbar** (von Klasse C^k), wenn f in jedem $x \in X$ differenzierbar ist.

c) f heißt **Diffeomorphismus**, wenn f differenzierbar von Klasse C^∞ ist und es eine differenzierbare Abbildung $g : Y \to X$ von Klasse C^∞ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Definition 32

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche** $:\Leftrightarrow \forall s \in S\ \exists$ Umgebung $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3\ \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen: $\exists$ differenzierbare Abbildung $F: U \to V \cap S$: $\mathrm{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$.

F heißt (lokale) reguläre Parametrisierung von S.

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

Definition 33

Sei G eine Mannigfaltigkeit, $\circ : G \times G \to G$ eine Abbildung, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, sodass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

a) G heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen $\circ : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$.

$$(g, h) \mapsto g \cdot h \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

b) Ist G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt G **Lie-Gruppe**, wenn $(G, \circ)$ und (G, ι) differenzierbar sind.

Definition 34

Seien $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte.

a) $v_0, \dots, v_k$ sind **in allgemeiner Lage** $\Leftrightarrow$ es gibt keinen $(k-1)$-dimensionalen affinen Untervektorraum, der $v_0, \dots, v_k$ enthält $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ sind linear unabhängig.

b) $\operatorname{conv}(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$

Definition 35

a) Sei $\Delta^k = \text{conv}(e_0, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren $e_0, \dots, e_k$.

Dann heißt Δ^k **Standard-Simplex** und k die Dimension des Simplex.

b) Für Punkte $v_0, \dots, v_k$ im $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage heißt $\delta(v_0, \dots, v_k) = \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$ ein ***k*-Simplex** in $\mathbb{R}^n$.

c) Ist $\Delta(v_0, \dots, v_k)$ ein k-Simplex und $I = \{ i_0, \dots, i_r \} \subseteq \{ 0, \dots, k \}$, so heißt $s_{i_0, \dots, i_r} := \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$ **Teilsimplex** oder **Seite** von Δ.

$s_{i_0, \dots, i_r}$ ist r-Simplex.

Definition 36

a) Eine endliche Menge K von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

   (i) Für $\Delta \in K$ und $S \subseteq \Delta$ Teilsimplex ist $S \in K$

   (ii) Für $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ leer oder ein Teilsimplex von Δ_1 und von Δ_2

b) $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$ (mit Teilraumtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von K.

c) Ist $d = \max \{ k \mid K \text{ enthält } k - \text{Simplex} \}$, so heißt d **Dimension** von K.

Definition 37

Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

a) $f(\Delta) \in L$

b) $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Definition 38

Sei K ein endlicher Simplizialkomplex. Für $n \geq 0$ sei $a_n(K)$ die Anzahl der n-Simplizes in K.

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

Eulerzahl (oder Euler-Charakteristik) von K.

Definition 39

a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.

b) Ein Graph, der homöomorph zu S^1 ist, heißt **Kreis**.

c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

Definition 40

Sei $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$ und $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$.

a) $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$ heißt n-te **Homotopiegruppe** von K.

b) $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$ heißt n-te **Belti-Zahl** von K.

Definition 41

Sei X ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ Wege von a nach b, d. h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

a) γ_1 und γ_2 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ mit

$$H(t,0) = \gamma_1(t)\ \forall t \in [0,1] =: I$$
$$H(t,1) = \gamma_2(t)\ \forall t \in [0,1] =: I$$

und $H(0,s) = a$ und $H(1,s) = b$ für alle $s \in I$ gibt. Dann schreibt man: $\gamma_1 \sim \gamma_2$

H heißt **Homotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

b) $\gamma_s : I \to X, \gamma_s(t) = H(t,s)$ ist Weg in X von a nach b für jedes $s \in I$.

Definition 42

Seien γ_1, γ_2 Wege in X mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in X. Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$.

Definition 43

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$ wird $\pi_1(X, x)$ zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** von X im Basispunkt x.

Definition 44

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(X, x) = \{ e \}$ für ein $x \in X$.

Definition 45

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.

f und g heißen **homotop** ($f \sim g$), wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \ \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) \ \forall x \in X \\ H(x_0, s) &= y_0 \ \forall s \in I \end{aligned}$$

gibt.

Definition 46

Es seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung.

p heißt **Überlagerung**, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subseteq X$ besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $V_j \subseteq Y$ ist ($j \in I$) und $p|_{V_j} : V_j \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Definition 47

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

f heißt **offen** $:\Leftrightarrow \forall V \subseteq X$ offen: $f(V)$ ist offen in Y.

Definition 48

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

M heißt **diskret** in X, wenn M in X keinen Häufungspunkt hat.

Definition 49

Sei $p : Y \to X$ Überlagerung, Z ein weiterer topologischer Raum, $f : Z \to X$ stetig.

Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \to Y$ heißt **Liftung** von f, wenn $p \circ \tilde{f} = f$ ist.

Definition 50

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt **universell**, wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Definition 51

Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to Y$ ein Homöomorphismus.

f heißt **Decktransformation** von $p :\Leftrightarrow p \circ f = p$.

Ist p eine Decktransformation und $|\operatorname{Deck}(Y/X)| = \deg p$, so heißt p **regulär**.

Definition 52

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und X eine Menge.

Eine **Gruppenoperation** von G auf X ist eine Abbildung $\circ$:

$$\circ : G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

für die gilt:

a) $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$

b) $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

Definition 53

Sei G eine Gruppe, X ein topologischer Raum und $\circ : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

a) G operiert durch Homomorphismen, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$m_g : X \to X, x \mapsto g \cdot X$$

ein Homöomorphismus ist.

b) Ist G eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation $\circ$ **stetig**, wenn $\circ : G \times X \to X$ stetig ist.

Definition 54

Das Tripel (X, d, G) heißt genau dann eine **Geometrie**, wenn (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge aller **Geraden** ist.

Definition 55

Eine **euklidische Ebene** ist ein metrischer Raum (X, d) zusammen mit einer Teilmenge $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass die Axiome §1 - §5 erfüllt sind:

§1) **Inzidenzaxiome**:

(i) Zu $P \neq Q \in X$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $\{ P, Q \} \subseteq g$.

(ii) $|g| \geq 2 \quad \forall g \in G$

(iii) $X \notin G$

§2) **Abstandsaxiom**: Zu $P, Q, R \in X$ gibt es genau dann ein $g \in G$ mit $\{ P, Q, R \} \subseteq g$, wenn gilt:

- $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ oder
- $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ oder
- $d(Q, R) = d(Q, P) + d(P, R)$

Definition 56

a) P, Q, R liegen **kollinear**, wenn es $g \in G$ gibt mit $\{ P, Q, R \} \subseteq g$.

b) Q **liegt zwischen** P und R, wenn $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$

c) **Strecke** $\overline{PR} := \{ Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \}$

d) **Halbgeraden**:
$PR^+ := \{ Q \in X \mid Q$ liegt zwischen P und R oder R lieg
$PR^- := \{ Q \in X \mid P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R \}$

Definition 57

§3) **Anordnungsaxiome**

(i) Zu jedem $P \in X$ jeder Halbgerade H mit Anfangspunkt P und jedem $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es genau ein $Q \in H$ mit $d(P, Q) = r$.

(ii) Jede Gerade zerlegt $X \setminus g = H_1 \dot\cup H_2$ in zwei nichtleere Teilmengen H_1, H_2, sodass für alle $A \in H_i$, $B \in H_j$ mit $i, j \in \{ 1, 2 \}$ gilt: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$.

Diese Teilmengen H_i heißen **Halbebenen** bzgl. g.

§4) **Bewegungsaxiom**: Zu $P, Q, P', Q' \in X$ mit $d(P,Q) = d(P', Q')$ gibt es Isometrien φ_1, φ_2 mit $\varphi_i(P) = P'$ und $\varphi_i(Q) = Q', i = 1, 2$[1]

§5) **Parallelenaxiom**: Für jedes $g \in G$ und jedes $P \in X \setminus g$ gibt es höchstens ein $h \in G$ mit $h \cap g = \emptyset$.[2]

[1] Die „Verschiebung" von $P'Q'$ nach PQ und die Isometrie, die zusätzlich an der Gerade durch P und Q spiegelt.

[2] h heißt „Parallele zu g durch P".

Definition 58

a) Ein **Winkel** ist ein Punkt $P \in X$ zusammen mit 2 Halbgeraden mit Anfangspunkt P.
Man schreibt: $\angle R_1 P R_2$ bzw. $\angle R_2 P R_1$[3]

b) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn es eine Isometrie gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet.

[3] Für dieses Skript gilt: $\angle R_1 P R_2 = \angle R_2 P R_1$. Also sind insbesondere alle Winkel $\leq 180°$.

c) $\angle R_1' P' R_2'$ heißt **kleiner** als $\angle R_1 P R_2$, wenn es eine Isometrie φ gibt, mit $\varphi(P) = P'$, $\varphi(PR_1'+) = P'R_1+$ und $\varphi(R_2')$ liegt in der gleichen Halbebene bzgl. PR_1 wie R_2 und in der gleichen Halbebene bzgl. PR_2 wie R_1

d) Im Dreieck $\triangle PQR$ gibt es Innenwinkel und Außenwinkel.

Definition 59

„Simplizialkomplexe“ in euklidischer Ebene (X, d) heißen **flächengleich**, wenn sie sich in kongruente Dreiecke zerlegen lassen.

Definition 60

Sei

$$\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \,\} = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0 \,\right\}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und $G = G_1 \cup G_2$ mit

$$G_1 = \{\, g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{\, z \in \mathbb{H} : |\, z - m| = r$$

$$G_2 = \{\, g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{\, z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x \,\}\,\}$$

Die Elemente von $\mathbb{H}$ heißen **hyperbolische Geraden**.

Definition 61

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch

$$\sigma(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

σ heißt **Möbiustransformation**.

Definition 62

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.

Dann heißt

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2}}{\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}} = \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

Doppelverhältnis von $z_1, \dots, z_4$.

Definition 63

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ sei g_{z_1,z_2} die eindeutige hyperbolische Gerade durch z_1 und z_2 und a_1, a_2 die „Schnittpunkte“ von g_{z_1,z_2} mit $\mathbb{R} \cup \{ \infty \}$.

Dann sei $d(z_1, z_2) := \frac{1}{2} \ln |\operatorname{DV}(a_1, z_4, a_2, z_2)|$ und heiße **hyperbolische Metrik**.

Definition 64

Sei $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Funktion.

a) γ heißt **durch Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in I$. Dabei ist $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$

b) $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$ heißt **Länge von γ**

Definition 65

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ sei $n(t)$ **Normalenvektor** an γ in t, d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

und $\det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$

b) Nach **??** sind $n(t)$ und $\gamma''(t)$ linear abhängig, d. h. es gibt $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$ heißt **Krümmung** von γ in t.

Definition 66

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ heißt $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ die **Krümmung** von γ in t.

b) Ist für $t \in I$ die Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$, so heißt $\gamma''(t)$ **Normalenvektor** an γ in t.

c) $b(t)$ sei ein Vektor, der $\gamma'(t), n(t)$ zu einer orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt. Also $\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$; $b(t)$ heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis $\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$ heißt **begleitendes Dreibein**.

Definition 67

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $s \in S$, $F : U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um s (d. h. $s \in V$)

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Für $p = F^{-1}(s) \in U$ sei

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

und $D_P F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch $J_F(p)$ definierte lineare Abbildung.

Dann heißt $T_s S :=$ Bild$(D_p F)$ die **Tangentialebene** an $S \in s$.

Definition 68

a) Ein **Normalenfeld** auf der Fläche S ist eine Abbildung $n : S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $n(s) \in T_s S^\perp$ für jedes $s \in S$.

b) S heißt **orientierbar**, wenn es ein stetiges Normalenfeld auf S gibt.

Definition 69

In der Situation aus **??** heißt die Krümmung $\kappa_\gamma(0)$ der Kurve γ in der Ebene $(s+E)$ im Punkt s die **Normalenkrümmung**[4] von S in s in Richtung $x = \gamma'(0)$.

Man scheibt: $\kappa_\gamma(0) := \kappa_{\text{Nor}}(s, x)$