

Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK



Inhalte



- Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

Martin Thoma - Graphentheorie I

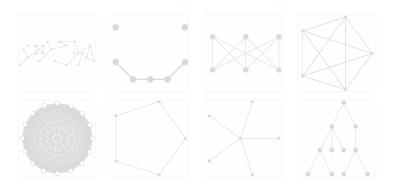
2/55

Graph



Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E,K), wobei $E\neq\emptyset$ die Eckenmenge und $K\subseteq E\times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

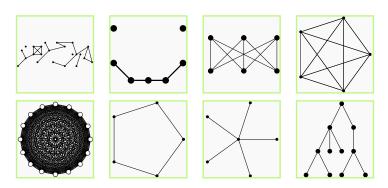


Graph



Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E,K), wobei $E\neq\emptyset$ die Eckenmenge und $K\subseteq E\times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



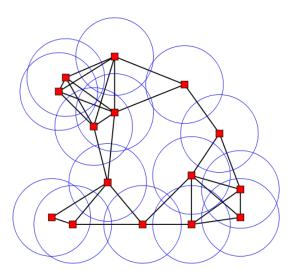
Synonyme



Knoten ⇔ Ecken

Modellierung, Flüsse, Netzwerke







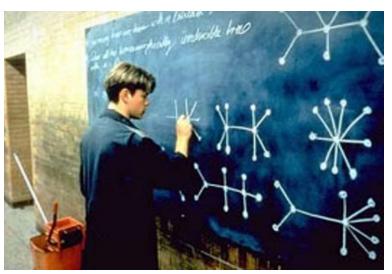
Karten





Good Will Hunting





Isomorphe Graphen



martin-thoma.de/uni/graph.html

Grad einer Ecke

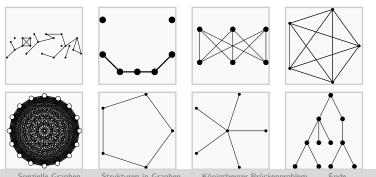


Grad einer Ecke

Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecke

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn isoliert.



Grundlagen 000000000 Martin Thoma - Graphentheorie I

Spezielle Graphen

Strukturen in Graphen

Königsberger Brückenproblem

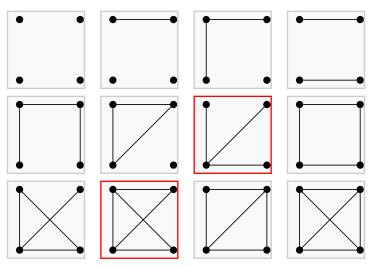


Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.

Spezielle Graphen



Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.





Spezielle Graphen

Strukturen in Graphen

Königsberger Brückenproblem

Ende

2. Juli 2013

10/55

Inzidenz



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$. e heißt **inzident** zu $k :\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$













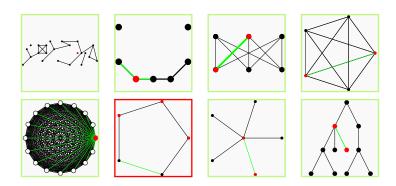


Inzidenz



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$. e heißt **inzident** zu $k :\Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Vollständige Graphen

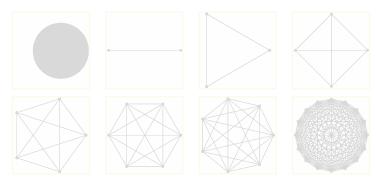


Vollständiger Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt vollständig : $\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.



Vollständige Graphen

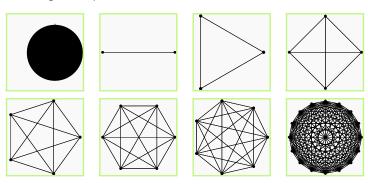


Vollständiger Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt vollständig : $\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.



Bipartiter Graph



Bipartiter Graph

Sei G=(E,K) ein Graph und $A,B\subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E\setminus A=B.$

 ${\cal G}$ heißt **bipartit**

 $:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1,e_2\}\in K}: (e_1\in A \text{ und } e_2\in B) \text{ oder } (e_1\in B \text{ und } e_2\in A)$

















Vollständig bipartiter Graph



Vollständig bipartiter Graph

Sei G=(E,K) ein bipartiter Graph und $\{\,A,B\,\}$ bezeichne die Bipartition.

G heißt vollständig bipartit : $\Leftrightarrow A \times B = K$













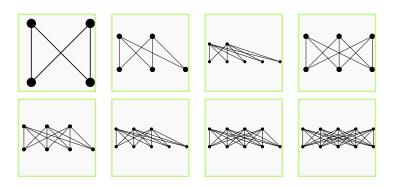




Vollständig bipartite Graphen



Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.





Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Ecken: m+n (1)

Kanten: $m \cdot n$ (2)

Ende

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken



Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei G = (E, K) ein Graph.

Dann heißt eine Folge k_1,k_2,\ldots,k_s von Kanten, zu denen es Ecken e_0,e_1,e_2,\ldots,e_s gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
-
- $\bullet k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein Kantenzug, der e_0 und e_s verbindet und s seine Länge.

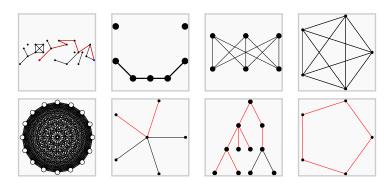


Geschlossener Kantenzug



Geschlossener Kantenzug

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (e_0, e_1, \dots, e_s)$ ein Kantenzug. A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_s = e_0$.



Weg



Weg

Sei G=(E,K) ein Graph und $A=(k_1,k_2\ldots,k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt $\mathbf{Weg}:\Leftrightarrow \forall_{i,j\in 1,...,s}: i\neq j\Rightarrow k_i\neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg



Weg

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,...,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg



Weg

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1,...,s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis



Kreis

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : \Leftrightarrow A ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.





Kreis



Kreis

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.





Kreis



Kreis

Sei G = (E, K) ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.

A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch "einfacher Kreis" genannt.





20/55



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G = (E, K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

also eine Kreis



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G = (E, K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

also eine Kreis



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G = (E, K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

also eine Kreis



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen G=(E,K) jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge >0.

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G. Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \ldots, e_j = e_i$ bilden also eine Kreis \blacksquare

Martin Thoma - Graphentheorie I

21/55

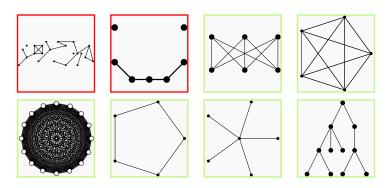
Zusammenhängender Graph



Zusammenhängender Graph

Sei G = (E, K) ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** : $\Leftrightarrow \forall e_1,e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet



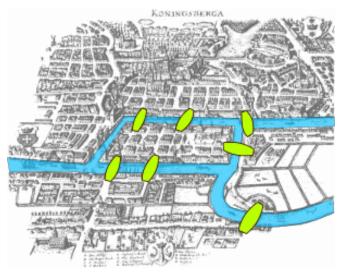
Königsberg heute





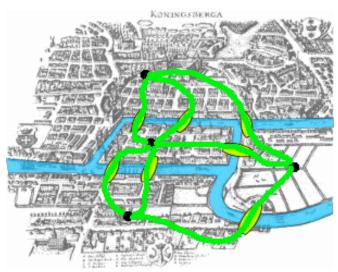
Königsberger Brückenproblem





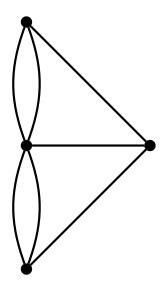
Übersetzung in einen Graphen





Übersetzung in einen Graphen





26/55



Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt eulerscher Kreis : $\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Martin Thoma - Graphentheorie I

Hamiltonkreis



ACHTUNG, VERWECHSLUNGSGEFAHR:

Hamiltonkreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt **Hamilton-Kreis** : $\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

Eulerscher Kreis

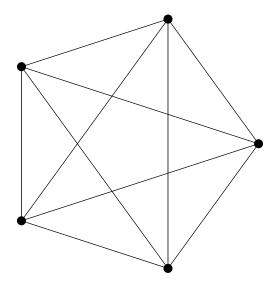
Martin Thoma - Graphentheorie I

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G.

A heißt eulerscher Kreis : $\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

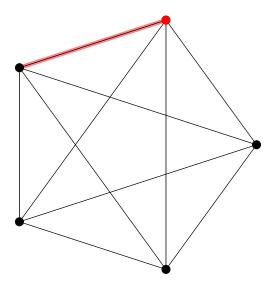
28/55





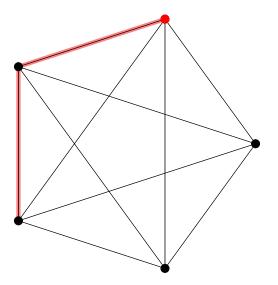
Martin Thoma - Graphentheorie I



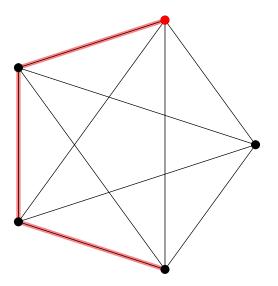


Martin Thoma - Graphentheorie I

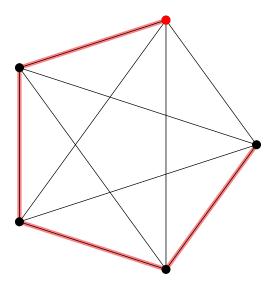






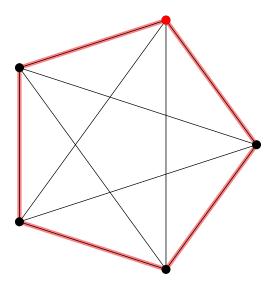




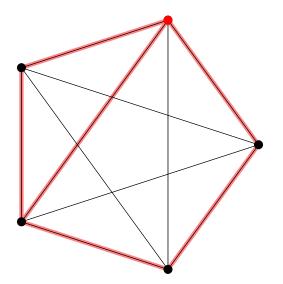


Martin Thoma - Graphentheorie I

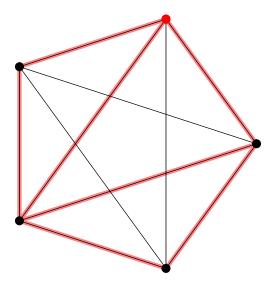




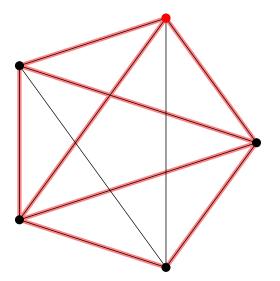




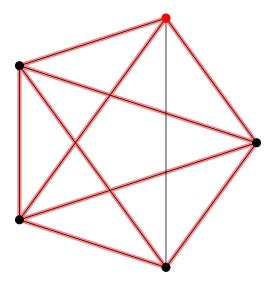




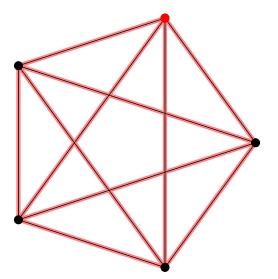






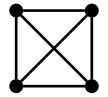




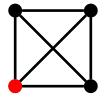


29/55

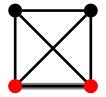




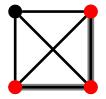




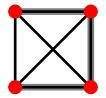




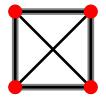










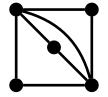


30/55

0000000000000000

Eulerkreis, kein HK





Satz von Euler



Satz von Euler

Wenn ein Graph ${\cal G}$ eulersch ist, dann hat jede Ecke von ${\cal G}$ geraden Grad.

 \Rightarrow Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.





Satz von Euler



Satz von Euler

Wenn ein Graph ${\cal G}$ eulersch ist, dann hat jede Ecke von ${\cal G}$ geraden Grad.

 \Rightarrow Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.





Satz von Euler



Satz von Euler

Wenn ein Graph ${\cal G}$ eulersch ist, dann hat jede Ecke von ${\cal G}$ geraden Grad.

 \Rightarrow Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.







Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$, also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus $\Rightarrow \operatorname{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$

Martin Thoma - Graphentheorie I



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

 $\Rightarrow \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

 $\Rightarrow \operatorname{\mathsf{Grad}}(e) \equiv 0 \mod 2$



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

 $\Rightarrow \mathsf{Grad}(e) \equiv 0 \mod 2$



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

2. Juli 2013



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei de iede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$ hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

. . .

Martin Thoma - Graphentheorie I



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$ hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

. . .

Martin Thoma - Graphentheorie I

34/55



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. $\ensuremath{\checkmark}$

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$ hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.

. . .

Martin Thoma - Graphentheorie I



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. $\ensuremath{\checkmark}$

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$ hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \text{ Sei } G = (E,K) \text{ mit } 2 \leq m = |K|. \ G \text{ ist zus.} \Rightarrow \text{Jede Ecke von } G$ hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei G = (E, K) mit $2 \le m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

<u>I.S.</u>: Sei G = (E, K) mit $2 \le m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m = 0: G ist eulersch. \checkmark

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. $\ensuremath{\checkmark}$

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

 $\underline{\text{I.V.:}}$ Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

 $\underline{\text{I.S.:}} \ \mathsf{Sei} \ G = (E,K) \ \mathsf{mit} \ 2 \leq m = |K|. \ G \ \mathsf{ist} \ \mathsf{zus.} \Rightarrow \mathsf{Jede} \ \mathsf{Ecke} \ \mathsf{von} \ G$ hat min. Grad 2. $\overset{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: m=0: G ist eulersch.

m=1: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. \checkmark

m=2: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. \checkmark

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

<u>I.S.</u>: Sei G = (E, K) mit $2 \le m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von Ghat min. Grad 2. $\stackrel{A.5}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen Kreis C in G.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- \Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

 \Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

 $\stackrel{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1,\ldots,C_n



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

 \Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

 $\stackrel{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1,\ldots,C_n

 $\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C "eingehängt" werden



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

- \Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad
- $\stackrel{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1,\ldots,C_n
- $\Rightarrow C_1, \ldots, C_n$ können in C "eingehängt" werden
- $\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.



Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

 \Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

 $\stackrel{IV}{\Longrightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1,\ldots,C_n

 $\Rightarrow C_1, \ldots, C_n$ können in C "eingehängt" werden

 $\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.



Offene eulersche Linie

Sei ${\cal G}$ ein Graph und ${\cal A}$ ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von $G:\Leftrightarrow$ Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann "in einem Zug" gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.



Satz 8.2.3

Sei ${\cal G}$ ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒ '

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup\{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

 $\xrightarrow{\mathsf{Satz} \ \mathsf{von} \ \mathsf{Euler}} \mathsf{In} \ G^* \ \mathsf{hat} \ \mathsf{jede} \ \mathsf{Ecke} \ \mathsf{geraden} \ \mathsf{Grad}$

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0,e_s .

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒ "

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup\{e_s,e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

 $\overset{\mathsf{Satz}\ \mathsf{von}\ \mathsf{Euler}}{\Longleftrightarrow}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heiße

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup\{e_s,e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

 $\overset{\mathsf{Satz}\ \mathsf{von}\ \mathsf{Euler}}{\Longleftrightarrow}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heiB0

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup\{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

 $\xrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grac

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heiß

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒ "

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup\{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

 $\xrightarrow{ \mathsf{Satz} \ \mathsf{von} \ \mathsf{Euler} } \mathsf{In} \ G^* \ \mathsf{hat} \ \mathsf{jede} \ \mathsf{Ecke} \ \mathsf{geraden} \ \mathsf{Grad}$

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s .

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒ "

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup \{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

 $\xrightarrow{\overline{\mathsf{Satz}}\ \mathsf{von}\ \mathsf{Euler}}\ \mathsf{In}\ G^*$ hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

 \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen $e_0,e_s.$ lacksquare

Rückrichtung analog



Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup \{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

 $\xrightarrow{\operatorname{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

 \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen $e_0,e_s.$ \blacksquare





Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis "⇒"

Sei G=(E,K) ein zusammenhängender Graph und $L=(e_0,\ldots,e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^*=(E,K\cup \{\,e_s,e_0\,\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

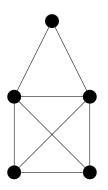
 $\xrightarrow{\operatorname{Satz\ von\ Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

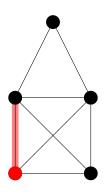
 \Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen $e_0,e_s.$ \blacksquare



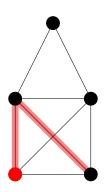




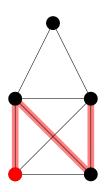




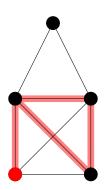




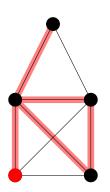




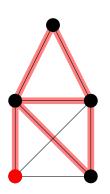




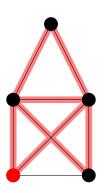




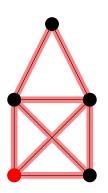












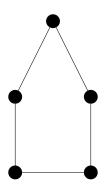
Aufgabe 3



Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

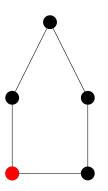


Idee: Knoten abwechselnd färben



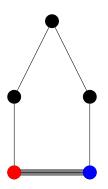


Idee: Knoten abwechselnd färben





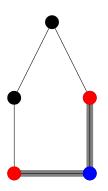
Idee: Knoten abwechselnd färben



Königsberger Brückenproblem

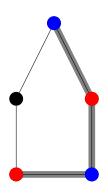


Idee: Knoten abwechselnd färben





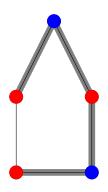
Idee: Knoten abwechselnd färben



40/55

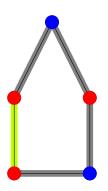


Idee: Knoten abwechselnd färben





Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 4



Zeigen Sie: Ein Graph ${\cal G}$ ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.

Königsberger Brückenproblem



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

 $\overline{\mathsf{Annahme}}$: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge lacktriangle



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh}.:}\ G$ ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge

Martin Thoma - Graphentheorie I



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

- $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit
- \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"
- $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge \blacksquare



 $\underline{\text{Vor.:}}$ Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

 $\underline{\text{Annahme:}}\ G\ \text{hat}\ \text{Kreis ungerader Länge}$

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge



Vor.: Sei G = (E, K) ein zus. Graph.

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

 $\stackrel{A.4}{\Longrightarrow}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

 \Rightarrow Widerspruch zu "G ist bipartit"

 $\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge lacktriangle



 $\underline{\mathsf{Vor.:}}\ \mathsf{Sei}\ G = (E,K)\ \mathsf{ein}\ \mathsf{zus.}\ \mathsf{Graph}.$

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche



 $\underline{\text{Vor.:}}\ \text{Sei}\ G=(E,K)\ \text{ein zus.}\ \text{Graph}.$

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche

Königsberger Brückenproblem

43/55



 $\underline{\mathsf{Vor.:}}\ \mathsf{Sei}\ G = (E,K)\ \mathsf{ein}\ \mathsf{zus.}\ \mathsf{Graph}.$

 $\underline{\mathsf{Beh.:}}\ G$ hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche



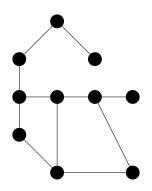
 $\underline{\text{Vor.:}}\ \text{Sei}\ G=(E,K)\ \text{ein zus.}\ \text{Graph}.$

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

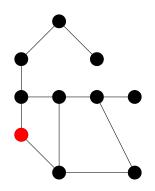
Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche



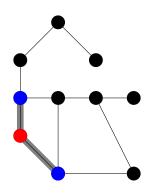




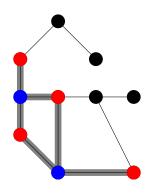


44/55

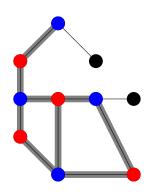






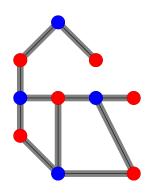






Martin Thoma - Graphentheorie I





Martin Thoma - Graphentheorie I

Aufgabe 9, Teil 1



Im folgenden sind die ersten drei Graphen G_1, G_2, G_3 einer Folge (G_n) aus Graphen abgebildet. Wie sieht G_4 aus?

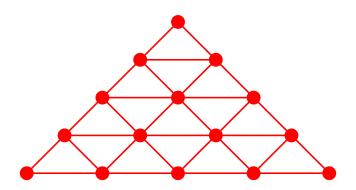






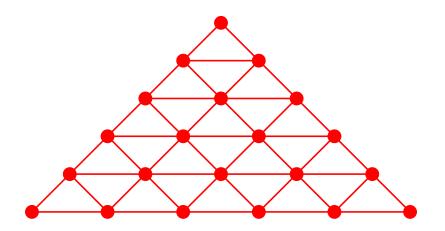
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)





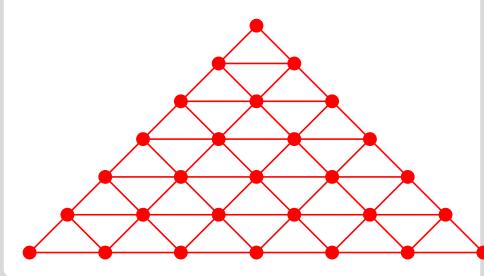
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)





Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)





Grundlagen Spezielle Graphen
00000000 0000

Martin Thoma – Graphentheorie I

Strukturen in Graphen

Aufgabe 9, Teil 2



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat G_i ?







Martin Thoma - Graphentheorie I

Aufgabe 9. Teil 2: Antwort



Ecken:

$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

Kanten:

$$|K_{n}| = |K_{n-1}| + \underbrace{((n+1)-1)+2}_{\text{auBen}} + (n-1) \cdot 2$$

$$= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2$$

$$= |K_{n-1}| + 3n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 3 \frac{n^{2} + n}{2}$$
(5)
$$(6)$$

Spezielle Graphen

Grundlagen

(7)

(3)

Aufgabe 9, Teil 3



Gebe G_i formal an.







51/55

Königsberger Brückenproblem

Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)



Gebe G_n formal an.







$$E_n = \{ e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n; \ x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \mod 2 \}$$

$$K_n = \{ \{ e_{x,y}, e_{i,j} \} \in E_n^2 \mid (x + 2 = i \land y = j) \lor (x + 1 = i \land y \pm 1 = j) \}$$

$$G_n = (E_n, K_n)$$

52/55

Bildquellen



- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_disk_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

Literatur



 A. Beutelspacher: Diskrete Mathematik für Einsteiger, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3

Königsberger Brückenproblem

Folien, LeTeXund Material



Der Foliensatz und die $\prescript{LaTeX-und Ti}kZ$ -Quellen sind unter github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/presentations/Diskrete-Mathematik Kurz-URL: goo.gl/uTgam