

SMAC03 - GRAFOS

ESTUDO DE CONECTIVIDADE E ESTRUTURA EM REDES ELÉTRICAS COM TEORIA DOS GRAFOS

2024007996 - Alex de Oliveira Alves

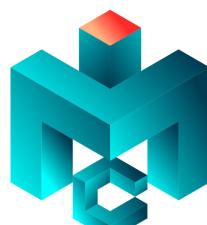
2021001961 - Leonardo Siqueira Fernandes

2024005140 - João Pedro Silva de Oliveira

2023007089 - Gabriel Barbosa Fernandes

SMAC03 - GRAFOS

Prof. Rafael Frinhani



INSTITUTO DE
MATEMÁTICA E
COMPUTAÇÃO

UNIFEI - Itajubá



Estudo de Conectividade e Estrutura em Redes Elétricas com Teoria dos Grafos

1 Introdução

A análise de sistemas complexos por meio da teoria dos grafos tem se mostrado essencial para a compreensão de estruturas interligadas presentes em diversos domínios, especialmente em redes de infraestrutura crítica. Em particular, redes elétricas modernas dependem diretamente de sua topologia para garantir estabilidade, continuidade do fornecimento e resiliência frente a falhas. Nesse contexto, compreender como os elementos da rede se conectam, quais componentes exercem maior influência no fluxo energético e quais pontos representam vulnerabilidades estruturais torna-se fundamental para o planejamento e aprimoramento operacional.

O cenário estudado envolve uma concessionária de energia que enfrenta interrupções localizadas e instabilidades não relacionadas à geração, mas possivelmente à configuração estrutural de sua rede de distribuição. Para investigar esse problema, foi conduzida uma análise detalhada da conectividade da malha elétrica disponibilizada em formato de dataset, representando usinas geradoras, subestações, transformadores, unidades consumidoras e suas interconexões. A partir dessa modelagem, aplicaram-se métricas clássicas da teoria dos grafos — como conectividade, diferentes centralidades, detecção de pontos de articulação e arestas-pontes — com o objetivo de identificar gargalos, elementos críticos e regiões suscetíveis à fragmentação.

Por fim, foram desenvolvidos algoritmos e estratégias de melhoria estrutural voltadas ao aumento da robustez topológica, à criação de caminhos alternativos e à mitigação de riscos operacionais associados à desconexão de vértices ou arestas relevantes. Desta forma, este trabalho busca oferecer uma visão abrangente da estrutura da rede, contribuindo para decisões de engenharia e apontando possíveis intervenções que elevem a eficiência e a estabilidade do sistema elétrico analisado.

2 Referencial Teórico

Como base para este trabalho, foi utilizado o [Watts & Strogatz \(1998\)](#), que mostra como redes reais, incluindo redes elétricas, podem ser analisadas através de propriedades de grafos. Apesar de o foco deles ser *small-world*, o artigo é relevante aqui porque reforça a importância de estudar estrutura, conectividade e caminhos dentro de um sistema interligado.

Neste trabalho foram utilizados diferentes conceitos sobre a teoria de grafos para chegar nas conclusões finais. Um grafo é uma estrutura matemática que oferece uma base sólida para a representação e análise de sistemas interconecta-

dos, sendo amplamente empregado nos mais diversos setores e indústrias. Sem a teoria de grafos, a internet e todo setor de telecomunicações modernos não existiriam, pois não haveria como otimizar rotas, ou ainda a indústria de energia seria inviável como a conhecemos, já que redes elétricas dependem totalmente de grafos para planejar ligações, identificar falhas e garantir redundância, por exemplo.

Um grafo $G = (V, E)$ é composto por um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E , que representam entidades e conexões de um sistema. Essa estrutura permite analisar propriedades como conectividade, centralidade e robustez do sistema. Os grafos podem ser classificados em direcionados ou não direcionados, ponderados ou não ponderados, dependendo da natureza das ligações. No contexto de sistemas elétricos, o grafo geralmente é não direcionado e não ponderado, representando apenas a existência física de cabos entre elementos como geradores, subestações e consumidores.

2.1 Conectividade em grafos

A conectividade na teoria dos grafos expressa se existem caminhos entre pares de vértices. Um grafo conectado garante que qualquer região do sistema possa interagir com as demais; caso contrário, formam-se componentes conexas isoladas. Em redes elétricas, uma componente desconexa representa uma área incapaz de receber ou fornecer energia, evidenciando riscos operacionais.

Além disso, a análise de pontos e arestas de articulação permite identificar elementos sensíveis cuja remoção fragmenta o sistema. Esses vértices e arestas funcionam como “pontes” estruturais, cuja falha pode comprometer significativamente a rede. A noção de k -conectividade complementa essa avaliação ao quantificar quantos vértices (ou arestas) precisam ser removidos simultaneamente para tornar o grafo desconexo. Quanto maior o valor de k , maior a redundância e a resiliência estrutural da rede.

2.2 Centralidade em grafos

As métricas de centralidade oferecem diferentes perspectivas sobre a importância estrutural de cada vértice na rede, permitindo identificar quem exerce maior influência no fluxo, na conectividade e na acessibilidade do sistema. A centralidade de grau mede o número de conexões diretas de um vértice, indicando hubs naturais capazes de facilitar a distribuição de fluxos. Já a centralidade de intermediação considera quantas vezes um vértice aparece nos caminhos mínimos entre pares de nós, evidenciando pontos que atuam como intermediários

estratégicos no transporte de informação ou energia. Por último, a centralidade de proximidade avalia quão rapidamente um vértice consegue alcançar os demais, baseando-se em distâncias geodésicas. Vértices com alta proximidade são essenciais para minimizar atrasos e otimizar processos de difusão ao longo da rede. Essas três propriedades permitem compreender quais vértices e arestas são estruturalmente importantes.

2.3 Árvores Geradoras Mínimas

A Árvore Geradora Mínima (AGM) é um subgrafo que conecta todos os vértices usando o menor número de arestas possível, sem formar ciclos. Mesmo em grafos não ponderados, ela mostra apenas as ligações essenciais para manter tudo conectado. Comparar a AGM com o grafo original ajuda a ver onde existem caminhos alternativos e onde a rede depende de poucas conexões para continuar funcionando.

3 Solução Proposta

3.1 Entendimento da Problemática

Com base na problemática relatada pela concessionária, as principais dificuldades observadas referem-se a interrupções localizadas e instabilidades no fornecimento de energia. Após a análise do dataset completo da rede elétrica, constatou-se que essas falhas não estão relacionadas à geração, mas sim à possível fragilidade estrutural da topologia da rede.

A hipótese levantada é que certos elementos da infraestrutura como arestas críticas, vértices altamente dependentes e ligações sem nenhuma redundância exercem influência excessiva no fluxo da rede, ocorrendo mais frequentemente nas regiões periféricas. Dessa forma, tornam-se pontos sensíveis capazes de comprometer a estabilidade da rede caso sofram falha.

Diante disso, abordamos as seguintes questões:

- Quais vértices e arestas, se removidos, podem fragmentar a rede ou comprometer regiões inteiras;
- Como a atual topologia contribui para gargalos e sobrecargas estruturais;
- Quais elementos se destacam como pontos críticos nos caminhos mínimos;
- De que forma a ausência de redundância em determinados trechos aumenta o risco de interrupção do serviço.

Esse entendimento conciso da problemática fundamenta todas as análises subsequentes, garantindo que o estudo seja conduzido de forma objetiva e alinhada às necessidades da concessionária.

3.2 Entendimento do Dataset

A rede elétrica analisada foi disponibilizada pela concessionária em formato *dataset*, contendo pares de vértices que representam conexões físicas entre elementos da infraestrutura (subestações, transformadores, unidades consumidoras e pontos de distribuição).



Figura 1: Grafo da rede elétrica

Com os dados carregados, planejamos os próximos passos para orientar as análises seguintes:

- Verificação de conectividade do grafo;
- Cálculo do grau médio da rede;
- Observação de padrões estruturais relevantes;
- Mapeamento inicial de regiões potencialmente vulneráveis.

De forma a compreender melhor a estrutura geral da rede, desenvolvemos um script python inicial (*InfosBásicas.py*) utilizando a biblioteca *networkx*, e suas funções *number_of_nodes()*, *number_of_edges()*, *is_connected()*, *number_connected_components()*.

Esse script realiza a leitura do arquivo e calcula informações estruturais básicas fundamentais. A partir dessa etapa, constatamos que o dataset possui 4.941 vértices e 6.594 arestas, sendo um grafo bidirecional e conexo, caracterizando uma rede de grande escala e potencial complexidade topológica, além de identificar o grau médio dos vértices e mapear possíveis pontos de distribuição da rede com base nos vértices de maiores índices de grau.

Tabela 1: Métricas estruturais básicas do dataset da rede elétrica

Métrica	Valor
Número de vértices	4.941
Número de arestas	6.594
Grau médio	2.66
Grafo é conexo?	Sim
Componentes conectados	1

Após essa primeira análise possuímos tudo para estabelecer a base necessária para análises mais aprofundadas, incluindo o cálculo de métricas de centralidade, a identificação de pontos críticos e o desenvolvimento de algoritmos de melhoria estrutural.

3.3 Preparação e Análise dos Dados

Nesta etapa, aplicamos métricas estruturais avançadas da biblioteca networkx para analisar a rede com maior profundidade.

Para executar essas análises, desenvolvemos o algoritmo `AnaliseCriticas.py`, desenvolvido para calcular as principais métricas de centralidade (grau, intermediação, proximidade e autovetor) e detectar pontos de articulação e arestas-ponte. Esse script utiliza as funções disponibilizadas pela biblioteca para realizar essas atividades, sendo elas:

- **Centralidade de Grau:** calculada com `nx.degree_centrality()`, utilizada para identificar vértices com maior número de conexões diretas;
- **Centralidade de Intermediação(Freeman (1977)):** obtida com `nx.betweenness_centrality()`, identificando vértices que participam de grande quantidade de caminhos mínimos;
- **Centralidade de Proximidade(Bavelas (1950)):** gerada via `nx.closeness_centrality()`, medindo o quanto próximo um vértice está dos demais na rede;
- **Centralidade por Autovetor(Bonacich (1972)):** calculada com `nx.eigenvector_centrality()`, que avalia a relevância do vértice considerando a importância de seus vizinhos;
- **Detecção de Pontos de Articulação(Hopcroft & Tarjan (1973)):** realizada por meio de `nx.articulation_points()`, identificando vértices cuja remoção desconectaria partes da rede;
- **Detecção de Arestas-Ponte(Hopcroft & Tarjan (1973)):** identificada com `nx.bridges()`, destacando arestas responsáveis por manter a conectividade entre regiões distintas.

Com essa análise aprofundada diagnosticamos diversos pontos de fragilidade na rede, além de números importantes para modelagem da problemática envolvendo as centralidades do grafo. Uma das análises mais importantes realizadas foi de que cerca de 25% dos vértices são considerados vértices de alta criticidade e 24% das arestas consideradas arestas-pontes.

3.4 Modelagem: Algoritmos de Melhoria Estrutural

Com base nas vulnerabilidades identificadas nas análises anteriores, desenvolvemos 3 algoritmos voltados à redução da dependência estrutural da rede em vértices e arestas críticas. O objetivo central é aumentar a robustez da topologia, criando caminhos alternativos e reduzindo o impacto causado pela falha de elementos essenciais.

Para isso, três estratégias principais foram aplicadas: criação de rotas alternativas entre vizinhos de vértices críticos, reforço de regiões conectadas por arestas-ponte e uma abordagem de augmentação gulosa para aumentar a robustez da topologia, criando caminhos alternativos e reduzindo o impacto causado pela falha de pontos relevantes.

• **1º algoritmo – Bypass para Vértices Críticos:** Consiste em criar conexões diretas entre vizinhos de vértices altamente críticos. A implementação percorre cada vértice crítico, coleta seus vizinhos e adiciona arestas entre pares que ainda não estão conectados. Isso reduz drasticamente a dependência da rede sobre esses vértices, criando caminhos alternativos e diminuindo o impacto de possíveis falhas futuras.

• **2º algoritmo – Redundância para Arestas-Ponte:** Para cada aresta-ponte detectada, o algoritmo verifica vizinhos dos seus vértices extremos e cria novas conexões entre eles, desde que não exista ligação prévia. Essa estratégia aumenta a redundância local e impede que a falha de uma única aresta interrompa o fluxo entre regiões distintas da rede.

• **3º algoritmo – Augmentação Gulosa:** Atua de forma mais ampla, analisando caminhos mínimos da rede e identificando trechos sobrecarregados, onde poucos vértices concentram grande parte do fluxo estrutural. A implementação seleciona pares de vértices com grande proximidade estrutural, mas sem ligação direta, e adiciona arestas que reduzam o congestionamento dos caminhos mínimos. Isso melhora a distribuição geral da conectividade e aumenta a robustez da rede.

O conjunto dessas estratégias permite fortalecer a topologia da rede sem alterar suas características essenciais, fortalecendo as análises de comparação realizadas nos tópicos adiante.

4 Resultados

Após a execução dos algoritmos de melhoria estrutural, o dataset final apresentou 4941 vértices e 7416 arestas, refletindo o acréscimo de novas conexões provenientes tanto da redundância em bridges quanto da augmentação gulosa. A Tabela 2 resume esses valores estruturais básicos e apresenta também os vértices de maior grau, destacando os nós 2617 (grau 29), 4151 (grau 20) e 4187 (grau 19), que aparecem como pontos de relevância estrutural após as intervenções.

Tabela 2: TOP 5 vértices com maior grau após as intervenções

Vértice	Grau
2617	29
4151	20
4187	19
2553	19
4458	18

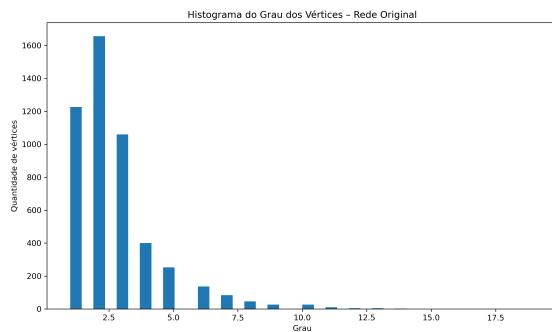


Figura 2: Histograma do grau dos vértices.

As métricas de centralidade reforçaram que, mesmo após aumento da redundância, certos vértices continuam a exercer papéis estruturalmente relevantes. Na centralidade de intermediação, o vértice 1308 apresentou o maior valor (0.11196), seguido pelos vértices 1267 e 4164, como mostrado na Tabela 3. Apesar de menores que os valores observados antes das intervenções, esses índices ainda sugerem regiões que concentram parte dos fluxos, embora agora com carga menos concentrada.

Tabela 3: TOP 10 vértices por centralidade de intermediação (betweenness)

Posição	Vértice	Intermediação
1	1308	0.11196
2	1267	0.08426
3	4164	0.07959
4	1244	0.07786
5	2606	0.07347
6	1166	0.06828
7	490	0.05633
8	1159	0.05131
9	1091	0.04583
10	426	0.04407

A centralidade de proximidade mostrou um conjunto distinto de vértices bem posicionados dentro da nova topologia. O vértice 4164 tornou-se o mais eficiente em alcançar os demais, com proximidade igual a 0.12478, seguido pelos vértices 4199, 490 e 2606, cujos valores permanecem acima de 0.119. A Tabela 4 apresenta esse conjunto de vértices.

Tabela 4: TOP 10 vértices por centralidade de proximidade

Posição	Vértice	Proximidade
1	4164	0.12478
2	4199	0.12161
3	490	0.11995
4	2606	0.11991
5	3785	0.11982
6	4219	0.11920
7	1308	0.11906
8	4218	0.11862
9	4120	0.11818
10	4179	0.11766

Já a centralidade por autovetor revelou uma região particularmente conectada da rede, centrada nos vértices 4381,

4335, 4336 e 4332, todos apresentando valores elevados dentro dessa métrica. A Tabela 5 destaca esses nós e reforça a presença de um subgrafo denso e influente na topologia final.

Tabela 5: TOP 10 vértices por centralidade de autovetor

Posição	Vértice	Autovetor
1	4381	0.28646
2	4345	0.27384
3	4336	0.24774
4	4332	0.24293
5	4352	0.23668
6	4384	0.22180
7	4402	0.21523
8	4347	0.21401
9	4395	0.19754
10	4373	0.19416

A detecção de vértices e arestas críticas evidenciou a redução das fragilidades estruturais. Os primeiros vértices identificados como pontos de articulação – como 386, 8, 98, 88 e 153 – estão listados na Tabela 6, juntamente com exemplos de arestas-ponte ainda presentes, como (386,385), (386,387) e (408,407). O número de bridges remanescentes caiu drasticamente quando comparado às 1611 identificadas antes da aplicação dos algoritmos de redundância.

Tabela 6: Exemplos de vértices críticos e arestas-ponte remanescentes após as intervenções

Tipo	Elemento	Observação
Vértice crítico	386	Ainda atua como ponto de articulação
Vértice crítico	8	-
Vértice crítico	98	-
Vértice crítico	88	-
Vértice crítico	153	-
Aresta-ponte	(386, 385)	Ponte remanescente
Aresta-ponte	(386, 387)	-
Aresta-ponte	(408, 407)	-
Aresta-ponte	(396, 397)	-
Aresta-ponte	(396, 398)	-

Com base nesse diagnóstico, a estratégia de redundância foi aplicada inicialmente às 1611 bridges detectadas. Para essas arestas foi tentada a criação de conexões alternativas entre vizinhos, resultando em 472 novas arestas válidas e contribuindo para reduzir a vulnerabilidade local. Em seguida, a abordagem de augmentação gulosa complementou essas melhorias com a criação de 300 novas conexões entre pares periféricos cuidadosamente selecionados. Esses processos estão resumidos na Tabela 7, que apresenta também exemplos das regiões reforçadas.

Tabela 7: Resumo da redundância e da augmentação gulosa aplicadas à rede

Métrica	Valor
Bridges detectadas inicialmente	1611
Novas arestas criadas pela redundância	472
Vértices periféricos elegíveis	1955
Pares candidatos gerados	5999
Arestas adicionadas pela augmentação gulosa	300
Total de novas arestas adicionadas	772

Os efeitos combinados dessas intervenções foram perceptíveis nos indicadores globais da rede. A quantidade de vértices críticos diminuiu, o conjunto de arestas-ponte foi substancialmente reduzido e a distribuição dos fluxos tornou-se mais homogênea. A augmentação reduziu o comprimento médio dos caminhos mínimos, ao passo que a redundância local reduziu o impacto potencial da remoção de vértices e arestas estruturais.

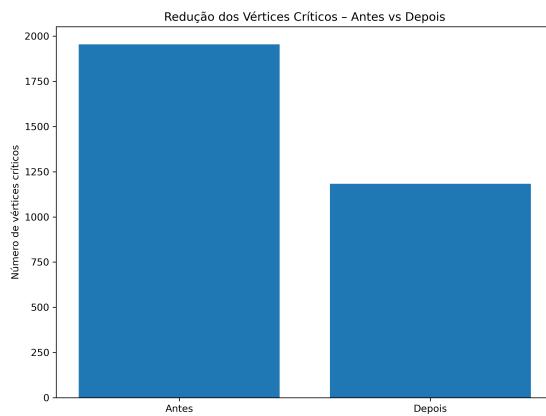


Figura 3: Redução dos vértices críticos antes/depois

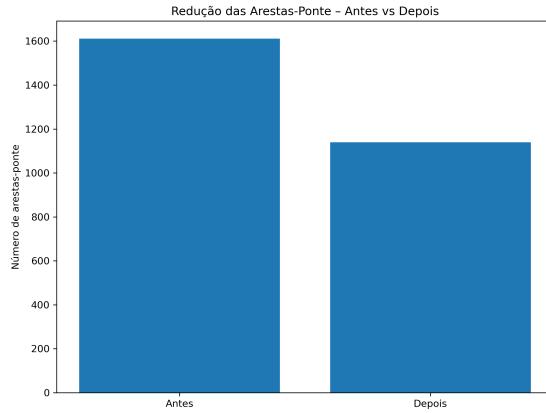


Figura 4: Redução das arestas-ponte antes/depois

5 Conclusões

As análises realizadas mostraram que, embora a rede elétrica original fosse conexa, apresentava um conjunto expressivo de fragilidades estruturais. A elevada quantidade inicial de arestas-ponte e a presença de vértices com valores muito altos de centralidade de intermediação demonstravam uma topologia excessivamente dependente de elementos específicos.

Essas características explicavam por que falhas pontuais poderiam provocar interrupções amplas no sistema.

A aplicação dos algoritmos de redundância e augmentação gulosa produziu melhorias estruturais claras. A criação de ligações adicionais entre vizinhos de arestas críticas aumentou a redundância local, reduzindo significativamente o número de bridges remanescentes. Da mesma forma, a augmentação gulosa contribuiu para aproximar regiões periféricas e diminuir a distância média entre vértices, o que favorece tanto a estabilidade quanto a eficiência da rede.

Os indicadores obtidos após as intervenções confirmam que a topologia final é mais robusta, mais redundante e menos suscetível a fragmentações causadas por falhas simples. A carga estrutural, antes muito concentrada em poucos vértices, tornou-se mais bem distribuída, reduzindo o risco de sobrecargas e interrupções inesperadas.

Além disso, o estudo evidencia como intervenções estruturais baseadas em métricas de centralidade e conectividade podem melhorar significativamente redes elétricas reais sem a necessidade de grandes reestruturações físicas. Como desdobramentos futuros, recomenda-se analisar cenários de falhas múltiplas, examinar o impacto econômico das novas conexões criadas e explorar variantes dos algoritmos empregados, buscando otimizar ainda mais a relação entre custo e benefício das intervenções.

Tabela 8: Contribuições dos integrantes

NOME	PAPEL / CONTRIBUIÇÕES
Leonardo	Estudo de caso; Referencial Teórico;
Alex	Estudo de caso; Estudo do Dataset; Resumo de dados coletados para reunião com professor; Solução Proposta; Implementação e disponibilização dos códigos.
João Pedro	Estudo de caso; Análise de resultados; Validação dos dados; Resultados; Conclusão.
Gabriel	Estudo de caso; Introdução;

Repositório do projeto:

github.com/AlexOliv17/SMAC03-PowerGrid

Referências

- Bavelas, A. (1950). Communication patterns in task-oriented groups. *Journal of the Acoustical Society of America*, 22, 725–730.
- Bonacich, P. (1972). Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, 2(1), 113–120.
- Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40(1), 35–41.
- Hopcroft, J. & Tarjan, R. (1973). Efficient algorithms for graph manipulation. *Communications of the ACM*, 16(6), 372–378.
- Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393(6684), 440–442.

