Jesús Alejandro Olivares Padilla

1.- Si V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{R}^n$ demuestre que $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Si V_1 y $V_2 \in \mathbb{R}^n$
$\therefore V_1 \cap V_2 \in \mathbb{R}^n$

Si $\underline{v}, \underline{u} \in V_1 \cap V_2$ entonces $\underline{v}, \underline{u} \in \mathbb{R}^n$
$\underline{v}, \underline{u} \in V_1$; $\underline{v}, \underline{u} \in V_2$

Tomando V_1 y V_2 como s.e. vectoriales

$\underline{v} + \underline{u} \in V_1$
$\underline{v} + \underline{u} \in V_2$
$\therefore \underline{v} + \underline{u} \in V_1 \cap V_2$

$\boxed{\checkmark}$ cumple suma

$\alpha \underline{v} \in V_1$; $\alpha \underline{v} \in V_2$; $\alpha \underline{v} \in V_1 \cap V_2$

$\boxed{\checkmark}$ multiplicación cerrada

$V_1 \cap V_2$ son subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

2 ō Sean $S = \{V_1, V_2, V_3\}$ y $T = \{W_1, W_2, W_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde $w_1 = (3,2,0)$, $W_2 = (2,1,0)$ y $W_3 = (3,1,3)$ Si la matriz de cambio de base T a la base S esta dada por:

$$P_{T \to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ¿Cuales son los vectores de la base S?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 8 & 5 & 10 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Los vectores son $(5, 8, -5)$, $(3, 5, -3)$ y $(10, 10, -1)$

Jesus Alejandro Olivares Padilla 2CV17

3.- Sean $S = \{(-1,2,1),(0,1,1),(-2,2,1)\}$

y $T = \{(-1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

dos bases para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Si $[V]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Encuentra $T_{T\to S}$ y $T_{S\to T}$

b) Usando a) encuentra $[V]_T$

c) ¿Quien es V?

$$P_{\to T} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

$P_{\to T} = V_{1_T} \quad V_{2_T} \quad V_{3_T}$

$W_1 = (3,2,0)$

$W_2 = (2,1,0)$

$W_3 = (3,1,3)$

$S = V_1, V_2, V_3$

$V_1 = 1(3,2,0) + 2(2,1,0) - 1(3,1,3) = (4,3,-3)$

$V_2 = 1(3,2,0) + 1(2,1,0) - 1(3,1,3) = (2,2,-3)$

$V_3 = 2(3,2,0) + 1(2,1,0) + 1(3,1,3) = (11,6,3)$

$T_{T\to S}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) R_3 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - 2R_3 \\ R_2 + 2R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$T_{S\to T}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) R_1(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 - R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) R_3 - R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jesús Alejandro Olivares Padilla 2CV12

4.- Considera el siguiente sistema homogéneo

$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$
$$4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 = 0$$

a) Una base para el espacio solución del sistema

b) La nulidad y el rango de la matriz de coeficientes

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_4 - 2R_1 \to R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = x_3 - 2x_4$$
$$x_2 = x_3 + x_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \to R_1 \\ R_3 + R_2 \to R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La base es $(1,1,0,0)$, $(-2,1,0,0)$

La dim = 2.

Rango = 2 Null = 2

Jesús Alejandro Olivares Padilla 2CV12

5: Construye una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de los vectores $V_1 = (1,-1,1)$ $V_2 = (-2,3,-1)$ $V_3 = (-3,5,-1)$ y $V_4 = (1,2,-4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + 2R_2 \to R_1 \\ R_3 - R_2 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} R_3(-1/8) \to R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - 7R_3 \\ R_2 - 3R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base esta formada por $V_1 = (1,-1,1)$ $V_2 = (-2,3,-1)$ y $V_4 = (1,2,-4)$

Para base ortonormal 1

(1) $V_1 = U_1$

(2) $V_2 = U_2 - \frac{U_2 \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1} V_1$ $\quad U_2 \cdot V_1 = -2 -3 -1 = -6$

$V_1 \cdot V_1 = 3$

$$V_2 = U_2 - \frac{-6}{3}(1,-1,1)$$

$$V_2 = (-2,3,-1) - \left(-6/3,\ 6/3,\ -6/3\right)$$

$$V_2 = (0,1,1)$$

③ Para V_3

$$V_3 = U_3 - \frac{U_3 \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1} V_1 - \frac{U_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} V_2$$

$$V_3 = U_3 - \left(\frac{-5}{3}\right)(1,-1,1) - \left(\frac{-2}{2}\right)(0,1,1)$$

$U_3 \cdot V_1 = -5$

$V_1 \cdot V_1 = 3$

$U_3 \cdot V_2 = -2$

$V_2 \cdot V_2 = 2$

$$V_3 = U_3 - \left(-5/3,\ 5/3,\ -5/3\right) - (0,-1,-1)$$

$$V_3 = (1,2,-4) - \left(-5/3,\ 5/3,\ -5/3\right) - (0,-1,-1)$$

$$V_3 = \left(8/3\ ,\ 4/3\ ,\ -4/3\right)$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = \frac{24}{12\sqrt{6}} = \frac{12}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

④ Normalizo ceotan

$$\|V_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|V_2\| = \sqrt{2}$$

$$\|V_3\| = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = \frac{12}{12\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$