

министерство науки и высшего образования российской федерации Φ едеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования *Дальневосточный федеральный университет» $(ДВ\Phi Y)$

Институт математики и компьютерных технологий

Департамент математического и компьютерного моделирования

Курсовой проект по дисциплине «Вычислительная математика»

на тему «Методы релаксации»

Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр. Б9119-01.03.02систпро $\frac{\Pi \text{ищиков A.A.}}{(\Phi \text{ИO})} \frac{(\text{подпись})}{(\text{подпись})}$ Проверил доцент, к.ф.-м.н. $\frac{\text{Колобов A.Г.}}{(\Phi \text{ИO})} \frac{(\text{подпись})}{(\text{подпись})}$ « 8 » июня 20 22 г.

г. Владивосток 2022

Содержание

Введение	3
Основная часть	4
Постановка задачи	4
Описание метода	4
Вычислительный эксперимент	5
Матрица размерности 2	5
Матрица размерности 3	6
Матрица размерности 4	7
Матрица размерности 5	8
Заключение	10
Приложение	11

Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач линейной алгебры, а также программное обеспечение, реализующее эти методы. Цель работы — ознакомиться с численными методами решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения обратных матриц, решения проблемы собственных значений, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, сравнить удобство использования и эффективность работы каждой использованной программы, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Изученный студентом в ходе работы материал должен способство-

вать повышению его качества знаний, закреплению полученных навыков и уверенности в выборе путей будущего развития своих профессиональных способностей.

Основная часть

Постановка задачи

Теперь рассмотрим следующую задачу: пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$Ax = f$$

где A – квадратная матрица размерности n, f – вектор правой части, x – вектор неизвестных. Необходимо найти решение данной системы, т.е. вектор x, методом релаксации.

Описание метода

Метод релаксации – итерационный метод решения СЛАУ. Суть данного метода заключается в том, чтобы вычислять элементы вектора приближения по следующей формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} + (1 - \omega) x_i^{(k)},$$

где ω – релаксационный параметр, до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. После достижения заданной точности, будет получен вектор, являющий приближённым решением СЛАУ. Известно, что данный метод сходится для релаксационного параметра $\omega \in (0,2)$, если матрица симметрична и положительно определена.

В зависимости от значения ω выделяют несколько разновидностей этого метода. При параметре $\omega=1$ данный метод называется методом Зейделя, при $\omega<1$ – методом нижней релаксации, а при $\omega>1$ – методом верхней релаксации.

Вычислительный эксперимент

В рамках данного раздела будет рассмотрены СЛАУ, для которых будет найдено численное решение методом релаксации с разными значениями релаксационного параметра ω и с разной точностью ε . Количество итераций решения будет указано в таблице. В качестве первого приближения для всех систем был выбран нулевой вектор. Точность будет определятся по длине вектора невязки.

Матрица размерности 2

Дана система:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение, полученное аналитически с помощью точного метода решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему численно методом релаксации. Для разных ω и ε получим следующее количество итераций:

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$\omega = 0.5$	38	65	92
$\omega = 1$	12	21	29
$\omega = 1.5$	6	10	14

Таблица 1: Количество итераций при разных значениях параметра ω и точности ε для системы размерности 2.

При $\varepsilon=0.001$ и $\omega=1.5$ численно было получено следующее решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.999995 \\ -1.999944 \end{pmatrix}.$$

Матрица размерности 3

Дана система:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Решение, полученное аналитически с помощью точного метода решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему численно методом релаксации. Для разных ω и ε получим следующее количество итераций:

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$\omega = 0.5$	19	30	41
$\omega = 1$	8	10	13
$\omega = 1.5$	11	16	20

Таблица 2: Количество итераций при разных значениях параметра ω и точности ε для системы размерности 3.

При $\varepsilon=0.001$ и $\omega=1$ численно было получено следующее решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.000225 \\ 0.999884 \\ -3.999997 \end{pmatrix}.$$

Матрица размерности 4

Дана система:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 106 \\ -18 \\ 34 \end{pmatrix};$$

Решение, полученное аналитически с помощью точного метода решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему численно методом релаксации. Для разных ω и ε получим следующее количество итераций:

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$\omega = 0.5$	50	82	113
$\omega = 1$	19	29	39
$\omega = 1.5$	11	14	18

Таблица 3: Количество итераций при разных значениях параметра ω и точности ε для системы размерности 4.

При $\varepsilon=0.001$ и $\omega=1.5$ численно было получено следующее решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.000116 \\ 17.999949 \\ -9.000097 \\ 6.000033 \end{pmatrix}.$$

Матрица размерности 5

Дана система:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 13 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 13 & 5 & 37 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 55 \\ 8 \\ 17 \\ 57 \end{pmatrix};$$

Решение, полученное аналитически с помощью точного метода решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему численно методом релаксации. Для разных ω и ε получим следующее количество итераций:

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$\omega = 0.5$	230	477	725
$\omega = 1$	53	134	216
$\omega = 1.5$	41	66	90

Таблица 4: Количество итераций при разных значениях параметра ω и точности ε для системы размерности 5.

При $\varepsilon=0.001$ и $\omega=1.5$ численно было получено следующее решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.000250 \\ 10.001379 \\ 0.000605 \\ -3.000542 \\ 12.998493 \end{pmatrix}.$$

Заключение

В рамках курсового проекта был реализован и исследован на матрицах разной размерности численный метод решения СЛАУ, а конкретно — метод релаксации. Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что релаксационный параметр ω может влиять на скорость сходимости метода как положительно, так и отрицательно, причём значения релаксационного параметра могут оказывать большее влияние на скорость сходимости, чем изменения точности вычисления.

В результате работы над курсовым проектом приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач линейной алгебры;
- основами алгоритмизации для численного решения задач линейной алгебры на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач линейной алгебры;
- а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Приложение

Реализация численного алгоритма.

```
1 extern crate nalgebra as na;
2
3 use na::{DMatrix, DVector};
pub fn sor(a : DMatrix<f32>, f : DVector<f32>, n : usize,
            omega: f32, epsilon : f32) -> DVector<f32> {
        let mut xs = DVector::from_element(n, 0.0);
        let mut xs_prev = xs.clone();
 8
9
       let mut it_counter = 0;
10
11
12
        loop {
            it_counter += 1;
13
            for i in 0..n {
14
                 let mut sum1 = 0.0;
15
                 let mut sum2 = 0.0;
16
                 for k in 0..i {
17
                      sum1 += a[(i, k)] * xs[k];
18
19
                 for k in (i + 1)..n {
20
                      sum2 += a[(i, k)] * xs_prev[k];
21
22
                 xs[i] = omega * (f[i] - sum1 - sum2) / a[(i, i)]
23
24
                      + (1.0 - omega) * xs_prev[i];
25
26
            xs_prev = xs.clone();
27
28
            if (&a * &xs - &f).norm() < epsilon {</pre>
29
                 break;
30
31
32
33
       println!("x_{\sqcup}=_{\sqcup}\{\}", xs);
34
35
        println!("omega_{\sqcup}=_{\sqcup}\{\},_{\sqcup}epsilon_{\sqcup}=_{\sqcup}\{\},_{\sqcup}iterations_{\sqcup}=_{\sqcup}\{\}\backslash n",
36
            omega, epsilon, it_counter);
37
38
39
        return xs;
40 }
```

Код программы для решения СЛАУ размерности 2 методом релаксации для разных значений ω и ε .

```
1 extern crate nalgebra as na;
use na::{DMatrix, DVector};
4 use crate::sor::sor;
6 pub fn sor2x2() {
      let n = 2;
7
       let matrix_row = [3.0, 4.0,
8
                          4.0, 7.0];
9
10
      let vector_row = [7.0, 6.0];
11
12
13
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
14
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
15
16
       let epsilon : f32 = 0.1;
17
18
      let omega = 0.5;
19
20
21
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
22
23
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
24
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
25
26
      let omega = 1.0;
27
28
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
29
30
31
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
32
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
33
34
       let omega = 1.5;
35
36
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
37
38
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
39
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
40
41
       let epsilon : f32 = 0.01;
42
43
       let omega = 0.5;
44
45
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
46
```

```
47
48
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
49
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
50
51
       let omega = 1.0;
52
53
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
54
55
56
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
57
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
58
59
       let omega = 1.5;
60
61
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
62
63
64
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
65
66
       let epsilon : f32 = 0.001;
67
       let omega = 0.5;
69
70
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
71
72
73
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
74
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
75
76
       let omega = 1.0;
77
78
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
79
80
81
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
82
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
83
       let omega = 1.5;
85
86
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
87
88 }
```

Код программы для решения СЛАУ размерности 3 методом релаксации для разных значений ω и ε .

```
1 extern crate nalgebra as na;
use na::{DMatrix, DVector};
4 use crate::sor::sor;
6 pub fn sor3x3() {
      let n = 3;
7
      let matrix_row = [5.0, 4.0, 2.0,
8
                          4.0, 8.0, 4.0,
9
                          2.0, 4.0, 6.0];
10
11
      let vector_row = [11.0, 4.0, -14.0];
12
13
14
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
15
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
16
17
       let epsilon : f32 = 0.1;
18
19
      let omega = 0.5;
20
21
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
22
23
24
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
25
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
26
27
28
       let omega = 1.0;
29
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
30
31
32
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
33
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
34
35
36
       let omega = 1.5;
37
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
38
39
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
40
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
41
42
       let epsilon : f32 = 0.01;
43
44
       let omega = 0.5;
45
46
```

```
sor(a, f, n, omega, epsilon);
47
48
49
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
50
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
51
52
       let omega = 1.0;
53
54
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
55
56
57
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
58
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
59
60
       let omega = 1.5;
61
62
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
63
64
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
65
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
66
67
       let epsilon : f32 = 0.001;
68
69
       let omega = 0.5;
70
71
72
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
73
74
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
75
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
76
77
       let omega = 1.0;
78
79
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
80
81
82
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
83
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
84
85
       let omega = 1.5;
86
87
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
88
89 }
```

Код программы для решения СЛАУ размерности 4 методом релаксации для разных значений ω и ε .

```
1 extern crate nalgebra as na;
use na::{DMatrix, DVector};
4 use crate::sor::sor;
6 pub fn sor4x4() {
      let n = 4;
7
       let matrix_row = [8.0, 1.0, 3.0, 1.0,
8
                          1.0, 5.0, 0.0, 2.0,
9
10
                          3.0, 0.0, 6.0, 4.0,
                          1.0, 2.0, 4.0, 5.0];
11
12
      let vector_row = [29.0, 106.0, -18.0, 34.0];
13
14
15
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
16
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
17
18
      let epsilon : f32 = 0.1;
19
20
21
       let omega = 0.5;
22
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
23
24
25
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
26
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
27
28
       let omega = 1.0;
29
30
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
31
32
33
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
34
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
35
36
       let omega = 1.5;
37
38
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
39
40
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
41
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
42
43
       let epsilon : f32 = 0.01;
44
45
      let omega = 0.5;
46
```

```
47
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
48
49
50
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
51
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
52
53
       let omega = 1.0;
54
55
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
56
57
58
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
59
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
60
61
       let omega = 1.5;
62
63
64
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
65
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
66
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
67
68
       let epsilon : f32 = 0.001;
69
70
       let omega = 0.5;
71
72
73
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
74
75
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
76
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
77
78
       let omega = 1.0;
79
80
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
81
82
83
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
84
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
85
86
       let omega = 1.5;
87
88
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
89
90 }
```

Код программы для решения СЛАУ размерности 5 методом релаксации для разных значений ω и ε .

```
1 extern crate nalgebra as na;
use na::{DMatrix, DVector};
4 use crate::sor::sor;
6 pub fn sor5x5() {
      let n = 5;
7
       let matrix_row = [10.0, 1.0, 5.0, 1.0, 1.0,
8
                          1.0, 7.0, 2.0, 13.0, 2.0,
9
10
                          5.0, 2.0, 5.0, 5.0, 1.0,
                          1.0, 13.0, 5.0, 37.0, 0.0,
11
                          1.0, 2.0, 1.0, 0.0, 2.0];
12
13
       let vector_row = [0.0, 55.0, 8.0, 17.0, 44.0];
14
15
16
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
17
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
18
19
       let epsilon : f32 = 0.1;
20
21
       let omega = 0.5;
22
23
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
24
25
26
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
27
28
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
29
      let omega = 1.0;
30
31
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
32
33
34
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
35
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
36
37
       let omega = 1.5;
38
39
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
40
41
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
42
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
43
44
       let epsilon : f32 = 0.01;
45
46
```

```
let omega = 0.5;
47
48
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
49
50
51
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
52
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
53
54
       let omega = 1.0;
55
56
57
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
58
59
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
60
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
61
62
       let omega = 1.5;
63
64
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
65
66
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
67
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
68
69
       let epsilon : f32 = 0.001;
70
71
       let omega = 0.5;
72
73
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
74
75
76
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
77
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
78
79
       let omega = 1.0;
80
81
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
82
83
84
       let a : DMatrix<f32> = DMatrix::from_row_slice(n, n, &matrix_row);
85
       let f = DVector::from_row_slice(&vector_row);
86
87
       let omega = 1.5;
88
89
       sor(a, f, n, omega, epsilon);
90
91 }
```

Код программы, запускающей вычислительный эксперемент.

```
1 mod sor;
3 mod sor2x2;
4 use crate::sor2x2::sor2x2;
6 mod sor3x3;
7 use crate::sor3x3::sor3x3;
9 mod sor4x4;
use crate::sor4x4::sor4x4;
11
12 mod sor5x5;
use crate::sor5x5::sor5x5;
14
15 fn main() {
     sor2x2();
16
     sor3x3();
17
    sor4x4();
sor5x5();
18
19
20 }
```