Рассмотрим геометрический интеграл:

$$\prod_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \prod_{i=1}^n f(x_i)^{\Delta x}$$

Данный интеграл имеет следующую связь с обычным интегралом

$$\prod_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} e^{\sum\limits_{i=1}^n \ln f(x_i)\cdot\Delta x} = e^{\int\limits_a^b \ln f(x)\ dx}$$

Теперь рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Назовём этот предел геометрической производной и обозначим f^*. Вычислив этот предел, можно получить связь с обыкновенной производной:

$$f^* = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = e^{\ln \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln f(x+\Delta x) - \ln f(x)}{\Delta x}} = e^{\ln' f(x)} = e^{\frac{f'}{f}}$$

Теперь поищем обратный оператор с f^*. Для этого попробуем выразить f. Обозначим $u = e^{\frac{f'}{f}}$. Тогда

$$f^*(x) = u(x)$$

$$\ln' f(x) = \ln u(x)$$

$$\ln f(x) = \int\limits_0^x \ln u(s)\ ds + \ln f(0)$$

$$f(x) = f(0) \cdot e^{\int\limits_0^x \ln u(s)\ ds}$$

Получили геометрический интеграл с переменным верхним пределом.

$$\prod_{\tilde{C}}^{x} f(s)^{ds} = e^{\int\limits_{\tilde{C}}^{x} \ln f(s)\ ds} = e^{F(x)-F(\tilde{C})} = \frac{e^{F(x)}}{e^{F(\tilde{C})}} = Ce^{F(x)}$$

$$\left(\prod_{\tilde{C}}^{x} f(s)^{ds}\right)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{\tilde{C}}^{x+\Delta x} \ln f(s)\ ds - \int\limits_{\tilde{C}}^{x} \ln f(s)\ ds}{\Delta x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{\tilde{C}}^{x+\Delta x} \ln f(s)\ ds + \int\limits_{x}^{\tilde{C}} \ln f(s)\ ds}{\Delta x}} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \ln f(s)\ ds}{\Delta x}} = e^{\ln f(x)} = f(x)$$

Прикольные штуки для производных

$$C^* = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{C}{C}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = 1^\infty = 1$$

$$(x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(x^n)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln((x+\Delta x)^n) - \ln x^n}{\Delta x}} = e^{\frac{nx^{n-1}}{x^n}} = e^{\frac{n}{x}}$$

$$(e^x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln e^{x+\Delta x} - \ln e^x}{\Delta x}} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x}} = e$$

$$(e^{x^n})^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln e^{(x+\Delta x)^n} - \ln e^{x^n}}{\Delta x}} = e^{nx^{n-1}}$$

$$\left(e^{e^x}\right)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln e^{e^{x+\Delta x}} - \ln e^{e^x}}{\Delta x}} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}} = e^{(e^x)'} = e^{e^x}$$

$$(\ln x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(\ln(x+\Delta x)) - \ln(\ln x)}{\Delta x}} = e^{\frac{1}{x \ln x}}$$

$$(\sin x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\sin(x+\Delta x)-\ln\sin x}{\Delta x}} = e^{\frac{\sin' x}{\sin x}} = e^{\cot x}$$

$$(\cos x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\cos(x+\Delta x)-\ln\cos x}{\Delta x}} = e^{\frac{\cos' x}{\cos x}} = e^{-\tan x}$$

$$(\tan x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\tan(x+\Delta x)-\ln\tan x}{\Delta x}} = e^{\frac{\tan' x}{\tan x}} = e^{\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}} = e^{\frac{2}{\sin(2x)}}$$

$$(\cot x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\cot(x+\Delta x)-\ln\cot x}{\Delta x}} = e^{\frac{\cot' x}{\cot x}} = e^{-\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}} = e^{-\frac{2}{\sin(2x)}}$$

$$(\sinh x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\sinh(x+\Delta x)-\ln\sinh x}{\Delta x}} = e^{\frac{\sinh' x}{\sinh x}} = e^{\coth x}$$

$$(\cosh x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\cosh(x+\Delta x)-\ln\cosh x}{\Delta x}} = e^{\frac{\cosh' x}{\cosh x}} = e^{\tanh x}$$

$$(\tanh x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\tanh(x+\Delta x)-\ln\tanh x}{\Delta x}} = e^{\frac{\tanh' x}{\tanh x}} = e^{\frac{1}{\cosh x\cdot\sinh x}} = e^{\frac{2}{\sinh(2x)}}$$

$$(\coth x)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\coth(x+\Delta x)-\ln\coth x}{\Delta x}} = e^{\frac{\coth' x}{\coth x}} = e^{-\frac{1}{\cosh x\cdot\sinh x}} = e^{-\frac{2}{\sinh(2x)}}$$

$$(e^{\sin x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\sin x+\Delta x} - \ln e^{\sin x}}{\Delta x}} = e^{\cos x}$$

$$(e^{\cos x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\cos x+\Delta x} - \ln e^{\cos x}}{\Delta x}} = e^{-\sin x}$$

$$(e^{\tan x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\tan x+\Delta x} - \ln e^{\tan x}}{\Delta x}} = e^{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$(e^{\cot x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\cot x+\Delta x} - \ln e^{\cot x}}{\Delta x}} = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$(e^{\sinh x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\sinh x+\Delta x} - \ln e^{\sinh x}}{\Delta x}} = e^{\cosh x}$$

$$(e^{\cosh x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\cosh x+\Delta x} - \ln e^{\cosh x}}{\Delta x}} = e^{\sinh x}$$

$$(e^{\tanh x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\tanh x+\Delta x} - \ln e^{\tanh x}}{\Delta x}} = e^{\frac{1}{\cosh^2 x}}$$

$$(e^{\coth x})^{*} = e^{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln e^{\coth x+\Delta x} - \ln e^{\coth x}}{\Delta x}} = e^{-\frac{1}{\sinh^2 x}}$$

Прикольные штуки для интегралов

$$\prod A^{dx} = CA^x$$

$$\prod x^{dx} = Ce^{x(\ln x - 1)}$$

$$\prod e^{\frac{1}{x}}{}^{dx} = Cx$$

$$\prod e^{x^n dx} = Ce^{\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$\prod e^{e^x dx} = Ce^{e^x}$$

$$\prod \sinh(\ln x)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{x^2-1}{2x} - x + 2 \operatorname{artanh} x}$$

$$\prod \cosh(\ln x)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{x^2+1}{2x} - x + 2 \arctan x}$$

$$\prod \tanh(\ln x)^{dx} = \prod \left(\frac{\sinh(\ln x)}{\cosh(\ln x)} \right)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} - 2 \arctan x + 2 \operatorname{artanh} x}$$

$$\prod \coth(\ln x)^{dx} = \prod \left(\frac{\cosh(\ln x)}{\sinh(\ln x)} \right)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + 2 \arctan x - 2 \operatorname{artanh} x}$$

$$\prod \operatorname{sech}(\ln x)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{2x}{x^2+1} + x - 2 \arctan x}$$

$$\prod \operatorname{cosech}(\ln x)^{dx} = Ce^{x \ln \frac{2x}{x^2-1} + x - 2 \operatorname{artanh} x}$$

$$\prod \left(f(x)^{\ln f^*} \right)^{dx} = Ce^{\frac{\ln^2 f(x)}{2}}$$

Другие прикольные штуки для производных

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x))-\ln(f(x)g(x))}{\Delta x}} =$$

$$= e^{\ln' f(x)+\ln' g(x)} = e^{\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}} = f^*(x)\cdot g^*(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}} = e^{\ln' f(x)-\ln' g(x)} = e^{\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}} = \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$$

$$\big(f(x)+g(x)\big)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-\ln(f(x)+g(x))}{\Delta x}} =$$

$$= e^{\frac{((f(x)+g(x))'}{f(x)+g(x)}} = e^{\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}} = \left(e^{f'(x)}\cdot e^{g'(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)+g(x)}} =$$

$$= \left(e^{\frac{f(x)\cdot f'(x)}{f(x)}}\cdot e^{\frac{g(x)\cdot g'(x)}{g(x)}}\right)^{\frac{1}{f(x)+g(x)}} = \left(f^*(x)^{f(x)}\cdot g^*(x)^{g(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)+g(x)}}$$

$$\big(f(g(x))\big)^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\big(f(g(x+\Delta x))\big)-\ln\big(f(g(x))\big)}{\Delta x}} = e^{\frac{f'(g(x))\cdot g'(x)}{f(g(x))}} = f^*(g(x))^{g'(x)}$$

$$(f(x)^{g(x)})^* = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln f^{g(x+\Delta x)}(x+\Delta x)-\ln f^{g(x)}(x)}{\Delta x}} = e^{\ln' f^{g(x)}(x)} =$$

$$= e^{\frac{(f^{g(x)}(x))'}{f^{g(x)}(x)}} = e^{\frac{f^{g(x)-1}(x)\cdot g(x)\cdot f'(x)+f^{g(x)}(x)\cdot g'(x)\cdot\ln f(x)}{f^{g(x)}(x)}} = e^{\frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}}\cdot e^{g'(x)\cdot\ln f(x)}$$

$$= f^*(x)^{g(x)}\cdot(e^{\ln f(x)})^{g'(x)} = f^*(x)^{g(x)}\cdot f(x)^{g'(x)}$$

Другие прикольные штуки для интегралов

Внесение под знак дифференциала

$$\prod f(x)^{g'(x)^{dx}} = \prod f(x)^{d(g(x))}$$

$$\prod f(x)^{dx} = \prod f(x)^{\frac{1}{g'(x)}^{d(g(x))}}$$

Замена переменной

$$\prod f(x)^{u'^{dx}} = \prod f(u)^{du}$$

$$\prod f(x)^{dx} = \prod f(u)^{\frac{1}{u'}^{du}}$$

Интегрирование по частям для степеней

$$(f(x)^{g(x)})^* = f^*(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g'(x)}$$

$$f(x)^{g(x)} = \prod \left(f^*(x)^{g(x)}\right)^{dx} \cdot \prod \left(f(x)^{g'(x)}\right)^{dx}$$

$$\prod \left(f^*(x)^{g(x)}\right)^{dx} = \frac{f(x)^{g(x)}}{\prod \left(f(x)^{g'(x)}\right)^{dx}}$$

$$\prod \left(f(x)^{g'(x)}\right)^{dx} = \frac{f(x)^{g(x)}}{\prod \left(f^*(x)^{g(x)}\right)^{dx}}$$

Интегрирование по частям для сумм