ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А. В. Куприн, С. А. Маненков, С. М. Фроловичев

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Москва 2018

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А. В. Куприн, С. А. Маненков, С. М. Фроловичев

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

для бакалавров

Учебное пособие по направлениям
11.03.01, 11.03.02, 09.03.01, 09.03.02

Москва 2018

УДК 51 (075.8)

Куприн А. В., Маненков С. А., Фроловичев С. М. Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре для бакалавров: учебное пособие / МТУСИ. – М., 2018. – 82 с.

Пособие является сборником типовых примеров с решениями и задач для самостоятельной работы. Темы занятий соответствуют рабочим программам по курсу аналитической геометрии и линейной алгебры для направлений подготовки 11.03.01, 11.03.02, 09.03.01, 09.03.02. Предназначено для проведения практических занятий, самостоятельной работы студентов и подготовки к тестированию и экзамену.

Список лит. 6 назв.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол №1 от 16.10.2018 г.

Рецензенты:
А. Г. Кюркчан, д. ф.-м. н., профессор (МТУСИ)
Р. К. Гайдуков, к. ф.-м. н., ст. преподаватель (МИЭМ НИУ ВШЭ)

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для бакалавров МТУСИ, обучающихся по программам направления подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Целью издания является получение практических навыков в решении задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Количество и содержание разделов практикума полностью соответствует количеству и темам практических занятий в рабочих программах дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», поэтому данное пособие можно использовать для подготовки к промежуточному тестированию и экзамену, а также для самостоятельного изучения материала в случае пропуска практического занятия. Теоретические сведения, необходимые для решения задач, содержатся в «Курсе лекций по аналитической геометрии и линейной алгебре» [1], а также в учебниках [2; 3]. В начале каждого раздела указаны страницы пособия [1], которые следует прочитать, прежде чем приступить к решению задач. Каждый раздел пособия включает типовые примеры с решениями для аудиторных занятий и задачи с ответами для самостоятельной работы. Упражнения, использованные в пособии, составлены авторами или взяты из задачников [4–6]. Отметим, что освоение материала в объёме данного практикума является минимально необходимым. Задачи повышенной сложности, требующие нестандартного подхода и углублённого знания теории, следует искать в дополнительной литературе.

1. Вычисление определителей

См. [1, с. 7–11].

1.1. Решение типовых задач

1.1.1. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычисляем $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$. Здесь мы воспользовались формулой $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

1.1.2. Вычислить определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по первой строке:

$$|B| = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-17) - 2 \cdot (-8) + 5 \cdot (-5) = -51 + 16 - 25 = -60.$$

1.1.3. Вычислить определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по второму столбцу:

$$|C| = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 39 + 42 = 19.$$

1.1.4. Вычислить определитель матрицы $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Будем вычислять определитель разложением по третьей строке (здесь больше нулевых элементов). Имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$ Последний определитель равен нулю, т. к. его первый и второй столбцы пропорциональны.

1.1.5. Вычислить определитель матрицы $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Проведём вычисление, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = -24.$$

Здесь мы умножили вторую строку на (-1) и прибавили к остальным строкам. Определитель не изменился. Затем умножили первую строку на три и прибавили ко второй строке.

1.1.6. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Решение. Разложим определитель по первой строке. Имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x+10 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x+10 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получим квадратное уравнение $x^2 + 8x - 6 = 0$, решениями которого являются $x_1 = -4 + \sqrt{22}$, $x_2 = -4 - \sqrt{22}$.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1.2.1. Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.2. Найти определители

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.2.3. Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения

1.2.4. $\begin{vmatrix} 2 & -x & x \\ 2 & -2 & 5 \\ x+1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0.$ **1.2.5.** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

Решить неравенства

1.2.6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0.$ **1.2.7.** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

Ответы. **1.2.1.** 1) -23, 2) 41, 3) 2. **1.2.2.** 1) -2, 2) -14, 3) 4, 4) 0. **1.2.3.** 1) 0, 2) 48. **1.2.4.** $x_1 = 1$, $x_2 = -6$. **1.2.5.** $x \in \mathbf{R}$. **1.2.6.** $x > 4$. **1.2.7.** $-6 < x < -4$.

2. Действия над матрицами

См. [1, с. 11–14].

2.1. Решение типовых задач

2.1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить $A + B$, $A - B$, $2A - 3B$.

Решение. Матрицы складываются поэлементно:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$2A-3B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 14 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -2 \\ 5 & -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

Решение. Элементы произведения матриц $C = AB$ определяются формулой $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Здесь n – количество столбцов матрицы A, равное количеству строк матрицы B. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{\cdot}2+2{\cdot}7 & 3{\cdot}3+2{\cdot}(-1) \\ 5{\cdot}2+1{\cdot}7 & 5{\cdot}3+1{\cdot}(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}3+3{\cdot}5 & 2{\cdot}2+3{\cdot}1 \\ 7{\cdot}3-1{\cdot}5 & 7{\cdot}2-1{\cdot}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $AB \neq BA$, но $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

2.1.3. Даны матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц CD.

Решение. $CD = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -7 \\ -8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Вычислить $3A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2.2. Перемножить матрицы

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

2.2.3. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.4. Вычислить:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2.5. Найти произведение $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.2.6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вычислить: 1) AB; 2) BA.

2.2.7. Найти произведение $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2.8. Вычислить: 1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Найти $AB - BA$:

2.2.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

2.2.12. $f(\lambda) = 3\lambda^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2.13. $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2.14. $f(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы. **2.2.1.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$. **2.2.2.** 1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **2.2.4.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

2.2.5. $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$. **2.2.6.** 1) 31, 2) $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2.7. $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$. **2.2.8.** 1) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.9. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$. **2.2.10.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$. **2.2.11.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.12. $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$. **2.2.13.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.2.14.** $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

3. Обратная матрица. Матричные уравнения. Правило Крамера

См. [1, с. 14–17].

3.1. Решение типовых задач

3.1.1. Дана матрица $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти обратную к ней.

Решение. 1) Находим $|W| = -6 \neq 0$. Матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную.

2) Находим алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы W:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -15$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$.

Строим матрицу D, состоящую из алгебраических дополнений A_{ij}:

$$D = \begin{pmatrix} 10 & -15 & -14 \\ -8 & 9 & 10 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3) Получаем обратную матрицу $W^{-1} = \frac{1}{|W|} D^T = -\dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & -8 & 2 \\ -15 & 9 & -3 \\ -14 & 10 & -4 \end{pmatrix}$.

4) Проверкой убеждаемся, что $WW^{-1} = E$. Здесь E – единичная матрица.

3.1.2. Дано матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X.

Решение. Поскольку произведение матриц некоммутативно ($AB \neq BA$), умножим наше уравнение на матрицу $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ слева, после чего имеем $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$. Найдём $Q = 1/5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (см. **3.1.1.**). В итоге получим $X = 1/5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Замечание. Обратная матрица второго порядка строится по правилу: элементы главной диагонали меняем местами, элементы побочной диагонали берём с противоположным знаком, умножаем полученную матрицу на число, обратное определителю исходной матрицы.

3.1.3. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 6, \\ x_1 & +5x_2 & & = & -3 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right), \; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Находим $d = |A| = -2$. Вычисляем $d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4$ (здесь определитель d_1 вычисляется от матрицы A, у которой первый столбец заменён на столбец B свободных членов). Аналогично, для d_2 сделаем замену во втором столбце и в d_3 – в третьем столбце:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_1 = d_1/d = 2, x_2 = d_2/d = -1, x_3 = d_3/d = 1$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Для данных матриц найти обратные:

3.2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.2.2.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **3.2.3.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.2.4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **3.2.5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения

3.2.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **3.2.8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$.

3.2.9. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. **3.2.10.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}$.

3.2.11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Найти значение функции $w(x)$ при $x = A$:

3.2.12. $w(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.13. $w(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решить системы уравнений по правилу Крамера:

3.2.14. $\begin{cases} 3x_1 & -5x_2 & = & 13, \\ 2x_1 & +7x_2 & = & 81. \end{cases}$ **3.2.15.** $\begin{cases} 3x_1 & -4x_2 & = & 6, \\ 3x_1 & +4x_2 & = & -18. \end{cases}$

3.2.16. $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & = & 5, \\ x_1 & & +3x_3 & = & 16, \\ & 5x_2 & -x_3 & = & 10. \end{cases}$ **3.2.17.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 & = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 16. \end{cases}$

3.2.18. $\begin{cases} 4x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & & +3x_3 & -x_4 & = & 10, \\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & = & 7, \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1. \end{cases}$

3.2.19. $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 4, \\ 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & -x_2 & & -2x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 6. \end{cases}$

3.2.20. $\begin{cases} 5x_1 & +8x_2 & +x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -5. \end{cases}$ **3.2.21.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = -1, \\ x_1 - 4x_2 & = -5. \end{cases}$

Ответы.

3.2.1. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. **3.2.2.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. **3.2.3.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.2.4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. **3.2.5.** $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2.6. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.2.7.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **3.2.8.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.9. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **3.2.10.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. **3.2.11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2.12. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.2.13.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.14. $x_1 = 16, x_2 = 7$. **3.2.15.** $x_1 = -2, x_2 = -3$.

3.2.16. $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$. **3.2.17.** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$.

3.2.18. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

3.2.19. $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

3.2.20. $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1$. **3.2.21.** $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2$.

4. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

См. [1, с. 18–27].

4.1. Решение типовых задач

4.1.1. Решить систему $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = & -9, \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & -6x_2 & -x_3 & = & 25. \end{cases}$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right).$$

Приведём матрицу $\bar{A}$ к ступенчатому виду.

Первый шаг. Так как элемент $a_{11} = 1 \neq 0$, то с помощью элементарных преобразований над строками матрицы добьёмся того, чтобы элементы $a_{21} = 1$, $a_{31} = 3$ обратились в ноль. Для этого из второй строки вычтем первую; умножим первую строку на -3 и сложим с третьей. В итоге получим матрицу, у которой элементы первого столбца равны нулю, кроме первого.

Второй шаг. Умножим вторую строку на -4 и сложим с третьей, чтобы последний элемент второго столбца был равен нулю. В итоге приведём матрицу $\bar{A}$ к ступенчатому виду:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Последняя матрица определяет систему, которая эквивалентна исходной :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & =- & 9, \\ & -3x_2 & -2x_3 & = & 11, \\ & & -8x_3 & = & 8. \end{array}\right.$$

Из этой системы легко находим, что $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$.

4.1.2. Решить систему линейных уравнений, заданную расширенной матрицей $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)$.

Решение. Приведем матрицу $\bar{A}$ с помощью элементарных преобразований над строками к ступенчатому виду:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В итоге имеем, что $\operatorname{rang} \bar{A} = r = 2$ (число ненулевых строк матрицы $\bar{A}$). Следовательно, количество базисных переменных равно $r = 2$. В качестве базисных выберем переменные x_1 и x_2. Остальные переменные в количестве $n - r$, где $n = 4$ – порядок системы, будут свободными. Это x_3 и x_4. Перенесём свободные переменные в правую часть и решим т. н. *укороченную* систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & = & -3 - x_4, \\ 5x_2 & = & 10 + 2x_3 + 3x_4. \end{array}\right.$$

Отсюда $x_2 = 2 + (2/5)x_3 + (3/5)x_4$, $x_1 = 1 + (4/5)x_3 + (1/5)x_4$. Положим $x_3 = 5c_1$, $x_4 = 5c_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Тогда $x_2 = 2 + 2c_1 + 3c_2$, $x_1 = 1 + 4c_1 + 5c_2$. Теперь запишем общее решение в матричном виде:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 1 + 4c_1 + 5c_2 \\ 2 + 2c_1 + 3c_2 \\ 5c_1 \\ 5c_2 \end{pmatrix} = (1 + 4c_1 + 5c_2, 2 + 2c_1 + 3c_2, 5c_1, 5c_2)^T.$$

4.1.3. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 -2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 +11x_2 -12x_3 + 34x_4 -5x_5 = 0, \\ x_1 -5x_2 + 2x_3 -16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдём фундаментальную систему решений данной однородной системы. Элементарными преобразованиями приведём матрицу A к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, т. е. $\operatorname{rang} A = 2$. Количество базисных переменных $r = 2$, а свободных $n{-}r = 5{-}2 = 3$. Рассмотрим укороченную систему из первых двух уравнений исходной системы с перенесёнными в правую часть свободными переменными:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5. \end{cases}$$

Здесь переменные x_1, x_2 – базисные, а x_3, x_4, x_5 – свободные. Положим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$. Решим укороченную систему по формулам Крамера:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8,\ d_1 = \begin{vmatrix} 8c_1 - 2c_2 - c_3 & 1 \\ 3c_1 + 7c_2 - 2c_3 & -2 \end{vmatrix},\ d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8c_1 - 2c_2 - c_3, \\ 2 & 3c_1 + 7c_2 - 2c_3. \end{vmatrix},$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = -\frac{1}{8}(-19c_1{-}3c_2{+}4c_3), \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = -\frac{1}{8}(-7c_1{+}25c_2{-}4c_3).$$

Теперь строим фундаментальную систему решений данной однородной системы. Для этого положим $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ и найдём E_1. Далее, положим $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ и получим E_2; положим $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$, получим E_3. В итоге имеем:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы E_1, E_2, E_3 образуют фундаментальную систему решений (ФСР), т. е. являются $n-r$ линейно независимыми решениями однородной системы линейных уравнений. Общее решение имеет вид $X_{\text{одн}} = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $c_i \in \mathbf{R}$.

4.1.4. Найти общее решение неоднородной системы уравнений с расширенной матрицей $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$.

Решение. Приводим матрицу к ступенчатому виду и убеждаемся, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$. Следовательно, исходная система совместна (теорема Кронекера-Капелли). Так как $\operatorname{rang} A = r = 2$, то число базисных неизвестных равно двум; тогда $n - r = 2$ – число свободных неизвестных. Разыскиваем минор второго порядка, отличный от нуля. Выберем $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ (можно взять любой другой минор второго порядка, отличный от нуля). Тогда x_1, x_2 – базисные переменные, x_3, x_4 – свободные переменные. В итоге имеем укороченную систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 2 + x_3 + 3x_4, \\ 4x_1 &= 3 - x_3 + 7x_4. \end{cases}$ Решая укороченную систему, получаем общее решение:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 3/4 - c_1/4 + 7c_2/4 \\ 1/2 + 3c_1/2 - c_2/2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = X_{\text{ одн}} + X_{\text{ч. неодн}}.$$

Здесь $X_{\text{одн}} = c_1E_1 + c_2E_2$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ – общее решение однородной системы, соответствующей данной, а $X_{\text{ч. неодн}} = (3/4, 1/2, 0, 0)^T$ – частное решение неоднородной системы (получающееся из общего решения при $c_1 = c_2 = 0$). E_1 и E_2 – ФСР однородной системы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на совместность и найти общее решение систем

4.2.1. $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -2, \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & -1, \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = & 3. \end{cases}$

4.2.2. $$\left\{\begin{array}{llllcl} x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & +x_2 & -5x_3 & = & -1, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & -2. \end{array}\right.$$

4.2.3. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} 3x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & -3, \\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & = & -3, \\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & +9x_4 & = & 22. \end{array}\right.$$

4.2.4. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} x_1 & +x_2 & -6x_3 & -4x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & -x_2 & -6x_3 & -4x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & +3x_2 & +9x_3 & +2x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = & -7. \end{array}\right.$$

4.2.5. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 4, \\ 9x_1 & +4x_2 & +x_3 & +7x_4 & = & 2. \end{array}\right.$$

4.2.6. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 2, \\ 7x_1 & -4x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 5, \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -6x_4 & = & 3. \end{array}\right.$$

4.2.7. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & 3, \\ 9x_1 & +x_2 & +4x_3 & -5x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 5, \\ 7x_1 & +x_2 & +6x_3 & -x_4 & = & 7. \end{array}\right.$$

4.2.8. $$\left\{\begin{array}{llllllcl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 2, \\ 6x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +5x_5 & = & 3, \\ 6x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +8x_4 & +13x_5 & = & 9, \\ 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 1. \end{array}\right.$$

Найти фундаментальную систему решений и общее решение:

4.2.9. $$\left\{\begin{array}{llllcl} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

4.2.10. $$\left\{\begin{array}{lllllcl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

4.2.11. $$\left\{\begin{array}{llllllcl} 5x_1 & +6x_2 & -2x_3 & +7x_4 & +4x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +2x_5 & = & 0, \\ 7x_1 & +9x_2 & -3x_3 & +5x_4 & +6x_5 & = & 0, \\ 5x_1 & +9x_2 & -3x_3 & +x_4 & +6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

4.2.12. Найти все a, при которых система $\left\{\begin{array}{rrrrr} a^2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0, \\ ax_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 8x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

имеет нетривиальное решение, и построить это решение.

Ответы. **4.2.1.** Несовместна. **4.2.2.**$(2c{-}1, c{+}1, c)^T$. **4.2.3.**$(-1, 3, -2, 2)^T$. **4.2.4.** $(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2})^T$. **4.2.5.** $(-2/11 + c_1 - 9c_2, 10/11 - 5c_1 + c_2, 11c_1, 11c_2)^T$. **4.2.6.** Несовместна. **4.2.7.** $(-6/7 + 8c/7,\ 1/7 - 13c/7,\ 15/7 - 6c/7,\ c)^T$. **4.2.8.**$(-1/2 + c_1 + c_2,\ 2c_1,\ 3 - 8c_2,\ 0,\ 2c_2)^T$. **4.2.9.** Система имеет только тривиальное решение. **4.2.10.** $E_1 = (8,\ -6,\ 1,\ 0)^T$, $E_2 = (-7,\ 5,\ 0,\ 1)^T$. **4.2.11.** $E_1 = (0,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0)^T$, $E_2 = (0,\ -2,\ 0,\ 0,\ 3)^T$. **4.2.12.** $a = 2$, $E_1 = (1, 0,\ -2)^T$ и $a = -4$, $E_1 = (5,\ -24,\ -4)^T$

5. Прямая на плоскости

См. [1, с. 40–42].

5.1. Решение типовых задач

5.1.1.Через данную точку $M(2;\ 5)$ провести прямые, проходящие параллельно и перпендикулярно прямой $3x - 4y + 15 = 0$.

Решение. Запишем заданную прямую в виде $y = 3x/4 + 15/4$. Уравнение параллельной прямой будем искать в виде $y = kx + b$, где $k = 3/4$. Величину b найдём, подставив координаты точки M в уравнение искомой прямой: $5 = (3/4) \cdot 2 + b$. Отсюда $b = 7/2$. В итоге уравнение примет вид $y = 3x/4 + 7/2$, или $3x - 4y + 14 = 0$.

Для перпендикулярной прямой $y = k_1x + b_1$ угловой коэффициент найдём из условия $kk_1 = -1$, откуда $k_1 = -4/3$. Далее, подставив координаты точки M, определим $b_1 = 23/3$ и запишем уравнение в виде $4x{+}3y{-}23 = 0$.

5.1.2. В треугольнике ABC с заданными координатами вершин $A(3; -7)$, $B(5;\ 2)$, $C(-1;\ 0)$ найти уравнение медианы AD и её длину.

Решение. Найдём координаты точки D — середины стороны BC: $x = \dfrac{5-1}{2}$, $y = \dfrac{2+0}{2}$, т. е. $D(2; 1)$. По двум точкам запишем уравнение прямой (AD): $\dfrac{x-3}{2-3} = \dfrac{y-(-7)}{1-(-7)}$, или $8x + y - 17 = 0$. Длина медианы равна $|AD| = \sqrt{(2-3)^2 + (1+7)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.

5.1.3. Найти точку C, симметричную $A(-1;\ 5)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(3;\ 4)$ и $D(1; -4)$.

Решение. Уравнение прямой (BD): $\dfrac{x-3}{1-3}{=}\dfrac{y-4}{-4-4}$, или $4x - y - 8 = 0$.

Как в примере **5.1.1**, проведём через точку A прямую, перпендикулярную прямой (BD): $x + 4y - 19 = 0$. Теперь найдём точку O – основание перпендикуляра из точки A на прямую BD. Координаты т. O являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x - y - 8 = 0, \\ x + 4y - 19 = 0, \end{cases}$ откуда $O(3;\,4)$. Далее воспользуемся формулами деления отрезка пополам, поскольку точка O – это середина отрезка AC. Пусть $C(a;\,b)$, тогда $\dfrac{a-1}{2} = 3$, $\dfrac{b+5}{2} = 4$ и $C(7;\,3)$.

5.1.4. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC, где $A(3;-1)$, $B(-1;\,7)$, $C(5;-2)$.

Решение. 1-й способ. По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника $BD : DC = AB : AC$, где точка D – основание биссектрисы. Вычислим $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{5}$, т. е. $BD : DC = 4 : 1$. Применим формулы деления отрезка BC в отношении $\lambda = 4$: $x_D = \dfrac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \dfrac{-1 + 4 \cdot 5}{5} = \dfrac{19}{5}$, $y_D = \dfrac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \dfrac{7 + 4 \cdot (-2)}{5} = -\dfrac{1}{5}$. По двум точкам $A(3;-1)$ и $D\left(\dfrac{19}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$ найдём уравнение искомой биссектрисы: $\dfrac{x-3}{19/5-3} = \dfrac{y+1}{-1/5+1}$, т. е. $x-y-4=0$.

2-й способ. Согласно свойству биссектрисы она состоит из тех и только тех точек, которые одинаково удалены от сторон угла. Уравнения сторон AB и AC – это $2x + y - 5 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$ соответственно. Теперь найдём и приравняем расстояния от некоторой точки $M(x;\,y)$ до этих прямых: $\dfrac{|2x + y - 5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}}$, т. е. $2x + y - 5 = \pm(x + 2y - 1)$. Мы получили уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A: $x - y - 4 = 0$ и $x + y - 2 = 0$. Чтобы понять, какое уравнение отвечает биссектрисе внутреннего, а какое – внешнего угла, подставим координаты точек B и C в каждое из этих уравнений. Эти точки лежат по разные стороны от биссектрисы внутреннего угла, и при подстановке в левую часть уравнения получаются числа разных знаков. При подстановке в уравнение биссектрисы внешнего угла левая часть даёт величины одного знака, поскольку эти точки лежат по одну сторону от этой прямой. Таким образом, $x - y - 4 = 0$ – уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A, а $x + y - 2 = 0$ – уравнение биссектрисы внешнего угла.

5.1.5. Через данную точку $M(3{,}4)$ провести прямую под углом 60° к прямой $2x + 3y + 6 = 0$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку M, имеет вид $y - 4 = k \cdot (x - 3)$. Угловой коэффициент k найдём из формулы угла между прямыми $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k-k_1}{1+k_1k}\right|$. Здесь $\varphi = 60^\circ$, $k_1 = -2/3$ (находим из прямой $2x+3y+6=0$). Имеем $\operatorname{tg}60^\circ = \left|\dfrac{k+2/3}{1-2k/3}\right|$, т. е. $\dfrac{k+2/3}{1-2k/3} = \pm\sqrt{3}$. Это уравнение имеет два решения: 1) $k = \dfrac{24-13\sqrt{3}}{3}$ и 2) $k = \dfrac{24+13\sqrt{3}}{3}$. Подставив найденные значения k, получим уравнения искомых прямых: 1) $(24-13\sqrt{3})x-3y-60+39\sqrt{3}=0$ и 2) $(24+13\sqrt{3})x-3y-60-39\sqrt{3}=0$.

5.1.6. Даны две противоположные вершины квадрата $A(2;\,1)$ и $C(4;\,5)$. Найти координаты двух других вершин B и D.

Решение. Пусть $B(x_1;\,y_1)$. Вычислим $|AB| = \sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-1)^2}$, $|BC| = \sqrt{(x_1-4)^2+(y_1-5)^2}$, но $\mid AB \mid = \mid BC \mid$, отсюда $x_1+2y_1=9$. Угловой коэффициент прямой (AB) равен $k_1 = \dfrac{y_1-1}{x_1-2}$, а угловой коэффициент прямой (BC) равен $k_2 = \dfrac{y_1-5}{x_1-4}$. Стороны AB и BC перпендикулярны, следовательно, $k_1k_2=-1$, т. е. $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_1-5}{x_1-4} = -1$. Упростив, получим уравнение $x_1^2+y_1^2-6x_1-6y_1+13=0$. В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2y_1=9, \\ x_1^2+y_1^2-6x_1-6y_1+13=0. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1=1, y_1=4$ и $x_1=5, y_1=2$. Это и есть координаты вершин B и D, поскольку для вершины D из тех же соображений получится точно такая же система уравнений.

5.1.7. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти уравнение прямой, отстоящей от неё на три единицы.

Решение. Запишем уравнение искомой прямой в виде $4x+3y+C=0$. Найдём C по формуле расстояния от точки до прямой. Возьмём на данной прямой точку $M(-1;\,1)$ (можно взять любую другую точку), тогда расстояние от точки M до прямой $4x+3y+C=0$ равно $\left|\dfrac{4\cdot(-1)+3\cdot1+C}{\sqrt{16+9}}\right| = 3$, откуда $|C-1|=15$. Уравнение имеет два корня $C_1=16$ и $C_2=-14$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют прямые $4x+3y+16=0$ и $4x+3y-14=0$.

5.1.8. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $A(2,-1)$ и уравнения высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведённых из различных вершин.

Решение. Прежде всего проверим, что данные высота и биссектриса не проходят через точку A. Пусть высота проведена через вершину B, а биссектриса – через вершину C. Сразу можно записать уравнение стороны AC, поскольку прямая (AC) проходит через данную точку A перпендикулярно высоте $3x - 4y + 27 = 0$. Угловой коэффициент высоты равен $k = 3/4$, следовательно, угловой коэффициент прямой (AC) равен $k_\perp = -1/k = -4/3$. Уравнение записываем по точке A и угловому коэффициенту $k_\perp$: $y + 1 = (-4/3)(x - 2)$, или $4x + 3y - 5 = 0$. Теперь найдем координаты вершины C как точки пересечения прямой (AC) и биссектрисы. Для этого решим систему $\left\{\begin{array}{r} 4x + 3y - 5 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{array}\right.$ откуда $C(-1, 3)$. Прямая (BC) симметрична прямой (AC) относительно биссектрисы. Найдём какую-нибудь точку этой прямой, отличную от точки C. Например, вычислим координаты точки A_1, симметричной точке A относительно биссектрисы. О том, как это сделать, смотрите в решении примера **5.1.3.** Поэтому приведём только результат: $A_1(4, 3)$. Теперь по двум точкам C и A_1 запишем уравнения стороны BC: $\dfrac{x+1}{4+1} = \dfrac{y-3}{3-3}$, или $y - 3 = 0$. Пересечение прямой (BC) и данной высоты даёт вершину B: $\left\{\begin{array}{r} y - 3 = 0, \\ 3x - 4y + 27 = 0. \end{array}\right.$ Решение системы — точка $B(-5, 3)$. И, наконец, по точкам A и B записываем уравнение стороны AB: $4x + 7y - 1 = 0$.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать взаимное расположение прямых L_1 и L_2. В случае параллельности найти расстояние между прямыми, а в случае пересечения – косинус угла и точку пересечения:

5.2.1. L_1: $-2x + y - 1 = 0$, L_2: $2y - 1 = 0$.

5.2.2. L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2 = 0$.

5.2.3. L_1: $x + y - 1 = 0$, L_2: $2x - 2y + 1 = 0$.

5.2.4. L_1: $3x + 4y + 1 = 0$, L_2: $6x + 8y - 3 = 0$.

5.2.5. Найти расстояние от точки $M(1;\ 1)$ до прямой L: $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t, \\ y = 2 + t. \end{array}\right.$

5.2.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2)$ и удалённой от точки $A(-2;\ 5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1;\ 8)$.

5.2.7. Составить уравнение прямой, проходящей на расстоянии $\sqrt{10}$ от точки $A(5;\ 4)$ перпендикулярно прямой $2x + 6y - 3 = 0$.

5.2.8. В уравнении прямой $4x + \lambda y - 20 = 0$ подобрать λ, так чтобы угол между этой прямой и прямой $2x - 3y + 6 = 0$ равнялся $\pi/4$.

5.2.9. Составить уравнение прямой, параллельной прямым L_1, L_2 и проходящей посередине между ними:

1) $L_1 : 3x - 2y - 1 = 0, \quad L_2 : 3x - 2y - 13 = 0,$

2) $L_1 : 3x - 15y - 1 = 0, \quad L_2 : x - 5y - 2 = 0.$

5.2.10. Даны две вершины $A(3; -1)$ и $B(5;\ 7)$ треугольника ABC и точка $O(4; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

5.2.11. Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5;\ 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, проведённого из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

5.2.12. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известна вершина $A(1;\ 3)$ и уравнения двух его медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

5.2.13. Составить уравнения сторон треугольника по вершине $A(2; -7)$ и уравнениям высоты $3x+y+11 = 0$ и медианы $x+2y+7 = 0$, проведённых из различных вершин.

5.2.14. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1, 3), C(-1, 1)$. Найти координаты двух других вершин и написать уравнения его сторон.

Ответы. **5.2.1.** Пересекаются в точке $M(-1/4;\ 1/2)$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$.
5.2.2. Пересекаются в точке $M(-2;\ 3/2)$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$.
5.2.3. Пересекаются в точке $M(1/4;\ 3/4)$, $\cos\varphi = 0$.
5.2.4. Параллельны, $\rho(L_1{,}L_2) = 1/2$. **5.2.5.** $\rho = 4/\sqrt{5}$.
5.2.6. $5x + y - 7 = 0$ или $3x - y - 1 = 0$. **5.2.7.** $3x - y - 1 = 0$ или $3x - y - 21 = 0$. **5.2.8.** $\lambda_1 = 20; \lambda_2 = -4/5$. **5.2.9.** 1) $3x - 2y - 7 = 0$, 2) $6x - 30y - 7 = 0$. **5.2.10.** $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. **5.2.11.** $x - 5 = 0$. **5.2.12.** $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **5.2.13.** $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **5.2.14.** $B(1;\ 1), D(-1;\ 3)$; $AB : x - 1 = 0$, $BC : y - 1 = 0$, $CD : x + 1 = 0$, $AD : y - 3 = 0$.

6. Кривые второго порядка

См. [1, с. 49–53].

6.1. Решение типовых задач

6.1.1. Какое множество точек определяет каждое из уравнений:
1) $x^2 - y^2 = 0$, 2)$x^2 + y^2 = 0$, 3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$?

Решение. 1) Уравнение можно записать в виде $(x - y)(x + y) = 0$. Оно задаёт пару прямых $x = y$ и $x = -y$. 2) Уравнение задает точку $O(0{,}0)$. 3) Уравнение не определяет ни одной точки.

6.1.2. Определить тип кривой $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты по x и по y: $(x^2+4x+4)-4+$ $+(y^2-6y+9)-9+12=0$, $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. Это окружность с центром в точке $C(-2,3)$ единичного радиуса.

6.1.3. Определить тип кривой $7x^2 - 5y^2 - 14x - 20y + 22 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты по x и по y: $7(x^2-2x+1)-7-$ $-5(y^2+4y+4)+20+22=0$, $7(x-1)^2-5(y+2)^2=-35$, $\dfrac{(x-1)^2}{5}-$ $-\dfrac{(y+2)^2}{7}=-1$. Положим $x-1=\tilde{x}$, $y+2=\tilde{y}$. Тогда уравнение принимает канонический вид $\dfrac{\tilde{x}^2}{5}-\dfrac{\tilde{y}^2}{7}=-1$. Это гипербола.

6.1.4. Привести уравнение $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$ к каноническому виду, определить тип кривой, найти координаты её центра и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Выделив полные квадраты, получим $9(x-1)^2+4(y+2)^2=36$. Обозначим $x-1=\tilde{x}$, $y+2=\tilde{y}$, разделим уравнение на 36, получим каноническое уравнение $\dfrac{\tilde{x}^2}{4}+\dfrac{\tilde{y}^2}{9}=1$, определяющее эллипс с полуосями a=2 и b=3. Тогда c^2=b^2−a^2=5, c=$\sqrt{5}$. Эксцентриситет равен отношению расстояния между фокусами к длине большой оси $\varepsilon=\dfrac{2c}{2b}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Центр кривой имеет координаты $\tilde{x}=\tilde{y}=0$, откуда $x=1$, $y=-2$. Фокусы расположены на большой оси эллипса и имеют координаты $\tilde{x}=0$, $\tilde{y}=\pm c=\pm\sqrt{5}$. В исходной системе координат это точки $F_1(1,-2-\sqrt{5})$ и $F_2(1,-2+\sqrt{5})$. Директрисы задаются уравнениями $\tilde{y}=\pm b/\varepsilon=\pm 9/\sqrt{5}$, чему соответствует $y=-2\pm 9/\sqrt{5}$.

6.1.5. Найти уравнение гиперболы, если её действительная полуось равна $a=5$, эксцентриситет $\varepsilon=1{,}4$, а фокусы расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат.

Решение. Так как действительная полуось гиперболы $a=5$ и $\varepsilon=c/a$, то $a^2=25$ и $c=\varepsilon a=7$. Далее, $c^2=49$ и $b^2=c^2-a^2=49-25=24$. Отсюда сразу получаем уравнение гиперболы $x^2/25-y^2/24=1$.

6.1.6. Составить уравнение эллипса, если его большая ось равна 26 и фокусы расположены в точках $F_1(-10,0)$, $F_2(14,0)$.

Решение. Расстояние между фокусами $F_1F_2=2c=24$, откуда $c=12$. По условию $a=13$, тогда $b=\sqrt{a^2-c^2}=5$. Центр эллипса совпадает с серединой отрезка F_1F_2, т. е. находится в точке $O(2,0)$. Учитывая, что фокусы расположены на оси абсцисс, составим каноническое уравнение $\dfrac{(x-2)^2}{13^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$, или $25x^2+169y^2-100x-4125=0$.

6.1.7. Составить уравнение гиперболы, если её центр расположен в точке $(2,1)$, одна из директрис задана уравнением $x+1=0$, а угол между асимптотами равен 60°.

Решение. Директрисы расположены симметрично относительно центра гиперболы, следовательно, вторая директриса определяется уравнением $x-5=0$. Расстояние между директрисами равно $2a/\varepsilon=6$, отсюда $a^2=3c$. Угол между асимптотами равен 60°, т. е. $a/b=\sqrt{3}$ или $b/a=\sqrt{3}$. Учитывая, что $a^2+b^2=c^2$, получим два возможных набора параметров: 1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$ и 2) $a=6$, $b=6\sqrt{3}$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют две гиперболы с уравнениями $\dfrac{(x-2)^2}{12}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ и $\dfrac{(x-2)^2}{36}-\dfrac{(y-1)^2}{108}=1$.

6.1.8. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $A(2,-1)$, если даны его фокус $F(-1,3)$ и соответствующая директриса $x-y+6=0$.

Решение. Отношение расстояния r от любой точки кривой второго порядка до фокуса к расстоянию d до соответствующей директрисы равно эксцентриситету: $\varepsilon=\dfrac{r}{d}$. Для точки A найдём $r_A=AF=5$ и $d_A=9/\sqrt{2}$, откуда $\varepsilon=5\sqrt{2}/9$. Для произвольной точки $M(x,y)$ эллипса получим $r=MF=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$, $d=\dfrac{|x-y+6|}{\sqrt{2}}$. Но $9r=5\sqrt{2}d$, что после возведения в квадрат и упрощения даёт искомое уравнение $28x^2+28y^2+25xy-69x-93y-45=0$.

6.1.9. Парабола $y^2=2px$ проходит через точку $M(2{,}4)$. Найти координаты её фокуса.

Решение. Подставим в уравнение параболы координаты точки M: $4^2=2p\cdot 2$. Следовательно, параметр $p=4$ и $F(p/2;\,0)=F(2;\,0)$.

6.1.10. Найти координаты фокуса параболы, директриса которой задана уравнением $4x-3y+12=0$, а вершина совпадает с точкой $O(2;0)$. Составить уравнение этой параболы.

Решение. Вершина параболы является серединой отрезка перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису. Пусть основание перпендикуляра — точка A. Угловой коэффициент директрисы равен $k=4/3$, значит, угловой коэффициент перпендикуляра равен $-1/k=-3/4$. Уравнение перпендикуляра составим по известному угловому коэффициенту и координатам точки O: $y = -\dfrac{3}{4}(x-2)$, или $3x+4y-6=0$. Для нахождения координат точки A решим систему: $\begin{cases} 4x-3y+12 &= 0, \\ 3x+4y-6 &= 0. \end{cases}$ Отсюда $x=-1{,}2$, $y=2{,}4 \Longrightarrow A(-1{,}2;\,2{,}4)$. А теперь воспользуемся формулами деления отрезка пополам. Если искомый фокус F имеет координаты (a,b), то $\dfrac{-1{,}2+a}{2}=2$, $\dfrac{2{,}4+b}{2}=0$, откуда получим: $a=5{,}2$, $\quad b=-2{,}4$.

Теперь, когда мы знаем фокус и директрису, нетрудно составить уравнение этой параболы, исходя из соотношения $r=d$ (см. пример **6.1.8**), а именно $\sqrt{(x-5{,}2)^2+(y+2{,}4)^2} = \dfrac{|4x+3y+12|}{5}$, откуда $9x^2+16y^2+$ $+\,24xy-356x+192y+676=0$.

6.2. Задачи для самостоятельного решения

6.2.1. Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнение директрис.

6.2.2. Составить каноническое уравнение эллипса с фокусами, расположенными на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если: 1) $a=3$, $b=2$; 2) $a=5$, $c=4$; 3) $c=3$, $\varepsilon=3/5$; 4) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; 5) $c=2$ и расстояние между директрисами равно 5; 6) $\varepsilon=1/2$ и расстояние между директрисами равно 32.

6.2.3. Построить гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

6.2.4. Написать каноническое уравнение гиперболы с фокусами, расположенными на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если: 1) $a=2$, $b=3$; 2) $b=4$, $c=5$; 3) $c=3$, $\varepsilon=3/2$; 4) $a=8$, $\varepsilon=5/4$; 5) $c=10$ и уравнения асимптот $y=\pm(4/3)x$; 6) $\varepsilon=3/2$ и расстояние между директрисами равно $8/3$.

6.2.5. Построить параболы, найти их параметры, координаты фокусов и уравнения директрис: 1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

6.2.6. Написать уравнение параболы, если известны : 1) фокус $F(4,3)$ и директриса $y+1=0$; 2) фокус $F(2,-1)$ и директриса $x-y-1=0$

6.2.7. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon=2/3$, фокус $F(2,1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x-5=0$.

6.2.8. Точка $A(1,-2)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F_1(-2,2)$, а соответствующая директриса дана уравнением $2x-y-1=0$. Найти уравнение этой гиперболы и координаты второго фокуса.

Ответы. **6.2.1.** 1) $a = 5$, $b = 3$; 2) $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$; 3) $\varepsilon = 4/5$; 4) $D_1 : x = -25/4$; $D_2 : x = 25/4$. **6.2.2.** 1) $x^2/9 + y^2/4 = 1$, 2) $x^2/25 + y^2/9 = 1$, 3) $x^2/25 + y^2/16 = 1$, 4) $x^2/169 + y^2/25 = 1$, 5) $x^2/5 + y^2/1 = 1$, 6) $x^2/64 + y^2/48 = 1$. **6.2.3.** 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $F_1(-5{,}0)$, $F_2(5{,}0)$; 3) $\varepsilon = 5/3$; 4) $y = \pm 4/3x$; 5) $x = \pm 9/5$. **6.2.4.** 1) $x^2/4 - y^2/9 = 1$; 2) $x^2/9 - y^2/16 = 1$; 3) $x^2/4 - y^2/5 = 1$; 4) $x^2/64 - y^2/36 = 1$; 5) $x^2/36 - y^2/64 = 1$; 6) $x^2/4 - y^2/5 = 1$. **6.2.5.** 1) $p = 3$, $F(3/2, 0)$, $2x + 3 = 0$; 2) $p = 5/2$, $F(0, 5/4)$, $4y + 5 = 0$; 3) $p = 2$, $F(-1, 0)$, $x - 1 = 0$; 4) $p = 1/2$, $F(0, -1/4)$, $4y - 1 = 0$. **6.2.6.** 1) $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$, 2) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **6.2.7.** $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$. **6.2.8.** $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$, $F_2(117/29, -59/58)$.

7. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение

См. [1, с. 27–30, 32–34, 36–37].

7.1. Решение типовых задач

7.1.1. Даны точки $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(2;\ -3;\ 7)$ и $C(1;\ 6;\ 9)$. Определите координаты вектора $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$.

Решение. Координаты вектора, соединяющего две точки, вычислим как разность соответствующих координат конца этого вектора и его начала: $\overrightarrow{AB} = \{-1;\ -7;\ 2\}$, $\overrightarrow{CA} = \{2;\ -2;\ -4\}$. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, а при сложении соответствующие координаты векторов-слагаемых складываются, отсюда $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA} = \{2\cdot(-1)+3\cdot 2;\ 2\cdot(-7)+3\cdot(-2);\ 2\cdot 2+3\cdot(-4)\} = \{4;\ -20;\ -8\}$.

7.1.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса внутреннего угла при вершине A. Пусть D — точка пересечения этой биссектрисы со стороной BC. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Решение. По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника $BD : DC = c : b$. Отсюда $\overrightarrow{BD} = \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC}$. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{b}{b+c} \cdot \vec{c} + \frac{c}{b+c} \cdot \vec{b}.$$

7.1.3. Разложите вектор $\vec{m} = 4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}$ по векторам $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$, $\vec{r} = 2\vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три линейно независимых вектора.

Решение. Пусть $\vec{m} = \{x;\ y;\ z\} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$. Подставим разложения векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ по базису, состоящему из трёх линейно независимых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\quad \vec{m} = x(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+y(\vec{a}+2\vec{c})+z(2\vec{b}-\vec{c})$. Поскольку разложение по базису единственно, составим систему, приравняв коэффициенты при векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\quad \vec{m} = (2x+y)\vec{a}+(2z-x)\vec{b}+(x+2y-z)\vec{c} = 4\vec{a}+5\vec{b}+2\vec{c}$, то есть $\quad 2x+y=4$, $\ 2z-x=5$, $\ x+2y-z=2$. Система имеет единственное решение $x=1, y=2, z=3$. Это значит, что векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ также являются линейно независимыми и образуют базис в пространстве геометрических векторов. Мы нашли координаты вектора $\vec{m}$ в новом базисе: $\ \vec{m} = \vec{p}+2\vec{q}+3\vec{r}$.

7.1.4. На стороне AD и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AK}$, $\ \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AL}$. Проверьте, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны, и найдите λ такое, что $\overrightarrow{KL} = \lambda \cdot \overrightarrow{LB}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})$. Далее, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = -\dfrac{\vec{a}}{30}+\dfrac{\vec{b}}{6}$. Но $\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AL} = -\dfrac{\vec{a}}{6}+\dfrac{5\vec{b}}{6} = 5\overrightarrow{KL}$. Это соотношение доказывает коллинеарность векторов с коэффициентом пропорциональности $\lambda = 1/5$.

7.1.5. Найдите вектор $\vec{x}$, образующий с ортом $\vec{j}$ угол 60°, с ортом $\vec{k}$ — угол 120°, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{2}$.

Решение. Координаты вектора $\vec{x}$ в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равны $|\vec{x}|\cos\alpha$, $|\vec{x}|\cos\beta$, $|\vec{x}|\cos\gamma$, где α, β, γ — углы, которые вектор $\vec{x}$ образует с осями координат. Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, отсюда $\cos^2\alpha = 1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma = 1-\cos^2 60^\circ-\cos^2 120^\circ = 1-(1/2)^2-(-1/2)^2 = 1/2$. $\quad$ Значит, $\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\alpha = 45^\circ$ или $\alpha = 135^\circ$. Вычислим координаты искомого вектора:

$x_1 = 2\sqrt{2}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm 2$, $\ x_2 = 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$, $\ x_3 = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}$.

Получаем два возможных ответа: $\ \vec{x} = \{\pm 2;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\}$.

7.1.6. Пусть $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между ними равен $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$. Вычислите 1) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $\ 2)(\vec{a}-2\vec{b}, 2\vec{a}+3\vec{b})$.

Решение. 1) Используя алгебраические свойства скалярного произведения, получим $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})$. По определению скалярного произведения $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = 4$, $(\vec{b},\vec{b}) = |\vec{b}|^2 = 9$, $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = 3$. Итак, $(\vec{a}+\vec{b})^2 = 4+2\cdot 3+9 = 19$. 2) Аналогично, $(\vec{a}-2\vec{b}, 2\vec{a}+3\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2-6|\vec{b}|^2-(\vec{a},\vec{b}) = -49$.

7.1.7. Какой угол образуют векторы $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m}+4\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$ и $(\vec{m},\vec{n}) = -1$?

Решение. Скалярное произведение служит удобным инструментом вычисления угла по его косинусу: $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Найдём длины векторов: $|\vec{a}|^2 = (2\vec{m}+\vec{n})^2 = 4|\vec{m}|^2 + 4(\vec{m},\vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 4+4-4 = 4$, $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}|^2 = (3\vec{m}+4\vec{n})^2 = 9|\vec{m}|^2 + 24(\vec{m},\vec{n}) + 16|\vec{n}|^2 = 9-24+64 = 49$, $|\vec{b}| = 7$. Далее, скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b}) = (2\vec{m}+\vec{n}, 3\vec{m}+4\vec{n}) = 6|\vec{m}|^2 + 4|\vec{n}|^2 + {}$ $+11(\vec{m},\vec{n}) = 6+16-11 = 11$. Отсюда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{11}{2\cdot 7}$. Угол равен $\arccos\dfrac{11}{14}$.

7.1.8. Найдите такое значение α, при котором векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ортогональны.

Решение. Критерием ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения (тогда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/2$). Скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b}) = 2\alpha + 10 - 4 = 0$, откуда $\alpha = -3$.

7.1.9. Определите вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-1;\ 0;\ 1\}$ и $\vec{b} = \{1;\ -2;\ 2\}$, если проекция вектора $\vec{c}$ на ось ординат равна 6.

Решение. Проекция вектора на координатную ось равна его соответствующей координате, поэтому искомый вектор имеет вид $\vec{c} = \{x;\ 6;\ z\}$. Составим скалярные произведения $(\vec{a},\vec{c})$ и $(\vec{b},\vec{c})$ и приравняем их к нулю по критерию ортогональности. Получим уравнения $-x+z = 0$, $x-12+2z = 0$. Решение $x = z = 4$, и $\vec{c} = \{4;\ 6;\ 4\}$.

7.1.10. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = 4\vec{k}$. Точка P — центр грани BCC_1B_1, точка Q делит ребро DD_1 в отношении $DQ : QD_1 = 1:3$. Найдите длину ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{PQ}$ на прямую AC_1.

Решение. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ находится по формуле $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами. Рассчитаем координаты интересующих нас точек в параллелепипеде, полагая вершину A расположенной в начале координат. Тогда $P(3;\ 1;\ 2)$, $Q(0;\ 2;\ 1)$, $C_1(3;\ 2;\ 4)$. Найдем $\overrightarrow{AC_1} = \{3;\ 2;\ 4\}$, $\overrightarrow{PQ} = \{-3;\ 1;\ -1\}$. Скалярное произведение $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{AC_1}) = -9+2-4 = -11$. Длина вектора $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{3^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$. Проекция вектора $\overrightarrow{PQ}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC_1}$ равна $-11/\sqrt{29}$, а длина этой проекции $11/\sqrt{29}$.

7.1.11. Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Выразить вектор $\vec{h} = \overrightarrow{AH}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если H — основание высоты треугольника, проведенной из вершины A.

Решение. По правилу треугольника $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BH}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$ и равен $\overrightarrow{BH} = \frac{\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|}\cdot\overrightarrow{BC}$. Эта формула следует из того, что проекцией вершины A на прямую BC является точка H, и остаётся верной также и в случае, когда внутренний угол треугольника при вершине B является тупым (тогда $\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} < 0$). Теперь легко находим $\overrightarrow{BA} = -\vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}$, $\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \dfrac{(-\vec{c}, \vec{b} - \vec{c})}{|\vec{b} - \vec{c}|}$, и

$$\overrightarrow{AH} = \vec{c} + \frac{-(\vec{c}, \vec{b}) + |\vec{c}|^2}{(\vec{b} - \vec{c})^2} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \frac{|\vec{c}|^2\vec{b} + |\vec{b}|^2\vec{c} - (\vec{b} + \vec{c})(\vec{b}, \vec{c})}{(\vec{b} - \vec{c})^2}.$$

7.1.12. Вычислите косинус внутреннего угла при вершине A треугольника ABC, где $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3; -1;\ 7)$, $C(7;\ 4; -2)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, как в задаче **7.1.1**: $\overrightarrow{AB} = \{2; -3;\ 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6;\ 2; -3\}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 12 - 6 - 18 = -12$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$. Отсюда $\cos\alpha = -12/49$.

7.2. Задачи для самостоятельного решения

7.2.1. Определите начало вектора $\vec{a} = \{3;\ 1;\ 2\}$, если его конец совпадает с точкой $B(0;\ 1;\ -1)$.

7.2.2. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Точка D делит сторону BC в отношении $BD : DC = 3 : 7$. Выразите $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

7.2.3. Даны векторы $\vec{a} = \{2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{-3;\ -5\}$, $\vec{c} = \{1;\ -3\}$. При каком значении $\beta \neq 0$ векторы $\vec{a} - \beta\vec{c}$ и $\vec{a} + \beta\vec{b}$ коллинеарны?

7.2.4. Даны последовательные вершины параллелограмма $A(1; -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 4;\ 4)$. Найдите координаты его четвертой вершины D.

7.2.5. Радиус-вектор точки $M(x; y; z)$ образует с осью Ox угол $\alpha = 60°$, с осью Oz угол $\gamma = 45°$, $|\overrightarrow{OM}| = 8$ и $y > 0$. Найдите координаты точки M.

7.2.6. Два вектора $\vec{a} = \{7; -4; -4\}$ и $\vec{b} = \{-2; -1;\ 2\}$ приложены к одной точке. Определите координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 6\sqrt{6}$.

7.2.7. Представьте вектор $\vec{x} = \{2;\ 3;\ 1\}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1 = \{1;\ 2; -1\}$, $\vec{e}_2 = \{2;\ 0;\ 3\}$, $\vec{e}_3 = \{-1;\ 1; -1\}$.

7.2.8. Вычислите длину меньшей диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$ и угол $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \pi/4$.

7.2.9. Дано: $\vec{a} = \{3;\ 1;\ 2\}$, $\vec{b} = \{2;\ 0;\ 4\}$, $\vec{c} = \{1;\ 2;\ 1\}$. Вычислите $(2\vec{c}, \vec{c} + 3\vec{a}) + (\vec{b} - 2\vec{a}, \vec{a} + \vec{c})$.

7.2.10. Найдите значение α, при котором векторы $\vec{a} = \{2;\ 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1 + 4\alpha;\ 3 + \alpha;\ \alpha - 3\}$ перпендикулярны.

7.2.11. Определите вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален двум векторам $\vec{a} = \{2;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{b} = \{3; -4;\ 2\}$, при условии, что $|\vec{x}| = 15$.

7.2.12. Найдите проекцию вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на направление вектора $\vec{c}$, если $\vec{a} = \{3; -6; -1\}$, $\vec{b} = \{1;\ 4; -5\}$, $\vec{c} = \{6; -8;\ 24\}$.

7.2.13. Определите вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален вектору $\vec{a} = \{1; -2;\ 1\}$, его проекция на вектор $\vec{b} = \{-2;\ 1;\ 2\}$ равна 1, $|\vec{x}| = 3\sqrt{3}$ и он составляет с осями координат тупые углы.

7.2.14. Вычислите косинус внутреннего угла при вершине A треугольника ABC, где $A(1;\ 2; -1)$, $B(5;\ 5;\ 11)$, $C(13;\ 18;\ 20)$.

7.2.15. Вычислите в прямоугольном параллелепипеде из задачи **7.1.10** угол между векторами $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{BD}$.

7.2.16. В треугольнике ABC выразите вектор $\vec{h} = \overrightarrow{AH}$, где AH — высота, через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$.

Ответы. **7.2.1.** $(-3;\ 0; -3)$. **7.2.2.** $\overrightarrow{AD} = 0{,}3 \cdot \vec{b} + 0{,}7 \cdot \vec{c}$. **7.2.3.** $\beta = 5/7$. **7.2.4.** $(4;\ 0;\ 6)$. **7.2.5.** $(4;\ 4;\ 4\sqrt{2})$. **7.2.6.** $\{2; -14;\ 4\}$. **7.2.7.** $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. **7.2.8.** 15. **7.2.9.** 32. **7.2.10.** $\alpha{=}-1$. **7.2.11.** $\vec{x} = \{-10; -2;\ 11\}$. **7.2.12.** -4. **7.2.13.** $\vec{x} = \{-4{,}2; -2{,}76; -1{,}32\}$. **7.2.14.** 12/13. **7.2.15.** $\arccos\sqrt{11/13}$. **7.2.16.** $\vec{h} = \dfrac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} - \vec{m}$.

8. Векторное и смешанное произведение

См. [1, с. 37–40].

8.1. Решение типовых задач

8.1.1. Упростите выражение $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}] + [\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}] + [\vec{b} - \vec{c}, \vec{a}]$.

Решение. Учтем алгебраические свойства векторного произведения, а именно, распределительный закон и «антикоммутативность» умножения, и раскроем скобки: $[\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}] + \underbrace{[\vec{c},\vec{c}]}_{=0} + [\vec{a},\vec{b}] + \underbrace{[\vec{b},\vec{b}]}_{=0} + \underbrace{[\vec{c},\vec{b}]}_{=-[\vec{b},\vec{c}]} + \underbrace{[\vec{b},\vec{a}]}_{=-[\vec{a},\vec{b}]} \underbrace{-[\vec{c},\vec{a}]}_{+[\vec{a},\vec{c}]}$.

После приведения подобных слагаемых получим $2[\vec{a},\vec{c}]$.

8.1.2. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/6$. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях. Следовательно, площадь треугольника составляет половину модуля векторного произведения: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|[\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}]\right| = \dfrac{1}{2}|8[\vec{a}, \vec{b}]| = 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 40$.

8.1.3. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(1; -1;\ 2)$, $B(5; -6;\ 2)$, $C(1;\ 3; -1)$ и его высоту $h = BD$.

Решение. Найдем площадь треугольника через векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, которое вычислим, предварительно определив координаты векторов $\overrightarrow{AB}$=$\{4; -5; 0\}$, $\overrightarrow{AC}$=$\{0; 4; -3\}$. Тогда $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$ $= \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \{15;\ 12;\ 16\}$. Искомая площадь равна половине длины этого вектора: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 12{,}5$.

Далее, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Отсюда $h = \dfrac{2S_\Delta}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{25}{5} = 5$.

8.1.4. Решить задачу **7.1.9** при помощи векторного произведения.

Решение. Как известно, векторное произведение направлено перпендикулярно каждому вектору-сомножителю, поэтому искомый вектор $\vec{c}$ коллинеарен векторному произведению $[\vec{a},\vec{b}]$,то есть $\vec{c} = \mu[\vec{a},\vec{b}]$, где μ – некоторое действительное число. Вычислим $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \{2;\ 3;\ 2\}$. Значит, $\vec{c} = \{2\mu;\ 3\mu;\ 2\mu\}$, но его y-координата равна 6, откуда $\mu = 2$ и $\vec{c} = \{4;\ 6;\ 4\}$.

8.1.5. Для заданных векторов $\vec{a} = \{2;\ 0;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 1; -1\}$, $\vec{c} = \{3;\ 4; -1\}$ вычислите проекцию вектора $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$ на вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Решение. Вычислим векторное $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1;\ 4;\ 2\}$ и скалярное $(\vec{a}, \vec{b}) = 4 - 1 = 3$ произведения. Тогда $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} = \{9;\ 12; -3\}$. Проекция $\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} = \dfrac{([\vec{a}, \vec{b}], (\vec{a}, \vec{b})\vec{c})}{|[\vec{a}, \vec{b}]|} = \dfrac{-1 \cdot 9 + 4 \cdot 12 - 2 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{33}{\sqrt{21}} = \dfrac{11\sqrt{21}}{7}$.

8.1.6. Найдите $\vec{x}$, удовлетворяющий уравнению $[\vec{x}, \vec{a}] + (\vec{a}, \vec{b})\vec{x} = \vec{b}$, где $\vec{a} = \{1;\ 0; -1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 3;\ 1\}$.

Решение. Будем искать вектор $\vec{x}$ в виде $\vec{x} = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$, тогда $[\vec{x}, \vec{a}] =$ $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x_2\vec{i} + (x_1 + x_3)\vec{j} - x_2\vec{k}$. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Запишем равенство $-x_2\vec{i} + (x_1 + x_3)\vec{j} - x_2\vec{k} + x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ в виде

$(x_1-x_2-2)\vec{i}+(x_1+x_2+x_3-3)\vec{j}+(x_3-x_2-1)\vec{k}=0$. Все компоненты нулевого вектора равны нулю, отсюда получим систему $\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & -x_2 & & = & 2, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3, \\ & -x_2 & +x_3 & = & 1. \end{array}\right.$

Её решение $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=1$. Искомый вектор равен $\vec{x}=2\vec{i}+\vec{k}$.

8.1.7. Проверьте тождество $\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ (*двойное векторное произведение*) на примере векторов $\vec{a}=\{1;\,2;\,3\}$, $\vec{b}=\{2;-1;\,3\}$, $\vec{c}=\{3;\,1;-2\}$

Решение. $(\vec{a},\vec{c})=-1$, $(\vec{a},\vec{b})=9$, $[\vec{b},\vec{c}]=\{-1;\,13;\,5\}$. Левая часть тождества равна $\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 13 & 5 \end{vmatrix}=\{-29;-8;\,15\}$. С другой стороны, $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})=-\vec{b}-9\vec{c}=\{-2-27;\,1-9;\,-3+18\}=\{-29;-8;\,15\}$.

8.1.8. Заданы векторы $\vec{a}=\{1;-1;\,3\}$, $\vec{b}=\{-2;\,2;\,1\}$, $\vec{c}=\{3;-2;\,5\}$. Вычислите смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Решение. В правой прямоугольной системе координат смешанное произведение равно определителю, в строках которого расположены координаты векторов-сомножителей: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-7$. Здесь мы прибавили ко второй строке определителя первую строку, умноженную на два, а затем разложили определитель по второй строке.

8.1.9. Установить, являются ли векторы $\vec{a}=\{1;2;-3\}$, $\vec{b}=\{3;-4;7\}$, $\vec{c}=\{2;-1;2\}$ компланарными.

Решение. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Вычислим $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 16 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}=0$. Итак, векторы компланарны.

8.1.10. При каких λ векторы $\vec{a}=\{1;\,2\lambda;\,1\}$, $\vec{b}=\{1;\,\lambda;\,0\}$, $\vec{c}=\{0;\,\lambda;\,1\}$ будут компланарны?

Решение. Вычислим смешанное произведение и приравняем его к нулю, требуя компланарности векторов: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Очевидно, это верно при любом λ.

8.1.11. Найдите объём V параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с вершинами в точках $A(-5;\ 1;\ 1)$, $B(1; -2; -2)$, $D(1; -1; -3)$ и $C_1(11; -9; -8)$.

Решение. Объём параллелепипеда равен абсолютной величине смешанного произведения векторов, соответствующих рёбрам, исходящим из одной вершины. Вычислим координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}=\{6; -3; -3\}$, $\overrightarrow{AD}=\{6; -2; -4\}$. По правилу сложения векторов найдём $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC_1} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \{16; -10; -9\} - \{12; -5; -7\} = \{4; -5; -2\}$. Теперь составим и вычислим определитель для смешанного произведения: $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -18$. Следовательно, $V = 18$. Отрицательный знак указывает на то, что векторы образуют левую тройку.

8.1.12. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки $A(5;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 5;\ 0)$, $C(1;\ 2;\ 4)$.

Решение. Будем искать расстояние от точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до плоскости ABC как высоту треугольной пирамиды, проведённую из вершины O. Для этого найдём площадь основания пирамиды $S_{\text{осн}}$ и её объем $V_{\text{пир}}$. Тогда расстояние $d = \dfrac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}$. Вычислим векторы $\overrightarrow{AB}=\{-3;\ 3;\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-4;\ 0;\ 4\}$. Векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 12\vec{j} + 12\vec{k}$. Площадь основания равна половине длины этого вектора: $S_{\text{осн}} = 6\sqrt{3}$. Третье ребро пирамиды с началом в точке A — это вектор $\overrightarrow{AO}=\{-5; -2;\ 0\}$. Смешанное произведение $\overrightarrow{AO}\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -84$. Объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах как на рёбрах, равен одной шестой части модуля смешанного произведения: $V_{\text{пир}} = 14$. Искомое расстояние $d = \dfrac{3 \cdot 14}{6\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

8.1.13. Проверьте, лежат ли точки $A(1;\ 2; -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$ и $D(2;\ 1;\ 3)$ в одной плоскости.

Решение. Четыре точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{-1; -1;\ 6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2;\ 0;\ 2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1; -1;\ 4\}$. Их смешанное произведение равно $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Векторы компланарны, значит, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

8.2. Задачи для самостоятельного решения

8.2.1. Упростите выражение $[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}-\vec{a}] + [\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}]$.

8.2.2. Даны векторы $\vec{a}=\{3;\,-1;\,2\}$, $\vec{b}=\{1;\,-2;\,1\}$. Найдите $[\vec{a}+3\vec{b}, \vec{b}-2\vec{a}]$.

8.2.3. Найдите вектор $\vec{x}$, если он ортогонален векторам $\vec{a}=\{2;\,0;\,-1\}$ и $\vec{b}=\{1;\,3;\,-2\}$, а также удовлетворяет условию $(\vec{c}, \vec{x}) = 2$, где $\vec{c}=\{-3;\,1;\,2\}$.

8.2.4. Для заданных векторов $\vec{a}=\{2;\,1;\,-1\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,1\}$, $\vec{c}=\{2;\,-1;\,3\}$, $\vec{d}=\{3;\,-1;\,2\}$ определите проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $[\vec{b}-\vec{d}, \vec{c}]$.

8.2.5. Вычислите площадь треугольника ABC с вершинами $A(1;\,1;\,1)$, $B(2;\,3;\,4)$, $C(4;\,3;\,2)$.

8.2.6. Найдите $\vec{x}$, удовлетворяющий уравнению $6[\vec{a}, \vec{b}] + 2\vec{x} = [\vec{b}, \vec{x}]$, где $\vec{a}=\{2;\,1;\,-1\}$, $\vec{b}=\{1;\,-2;\,3\}$.

8.2.7. Найдите $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{x}, \vec{i}) = 3$, $[\vec{x}, \vec{i}] = -2\vec{k}$.

8.2.8. Вычислите $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, если $\vec{a} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

8.2.9. Найдите все значения λ, при которых векторы $\vec{a} = \{\lambda;\,3;\,1\}$, $\vec{b} = \{5;\,-1;\,2\}$, $\vec{c} = \{-1;\,5;\,4\}$ компланарны.

8.2.10. Вычислите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с вершинами в точках $A(2;\,-3;\,5)$, $B(0;\,2;\,1)$, $C(-2;\,-2;\,3)$ и $D_1(3;\,2;\,4)$.

8.2.11. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;\,4;\,-3)$ вычислите длину высоты, проведённой из вершины D к грани ABC.

8.2.12. Объём тетраэдра равен пяти. Три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найдите координаты четвёртой вершины D, расположенной на оси ординат.

Ответы. **8.2.1.** $[\vec{a}, \vec{c}]$. **8.2.2.** $\{21;-7;-35\}$. **8.2.3.** $\vec{x}=\{1;\,1;\,2\}$. **8.2.4.** $\sqrt{6}$. **8.2.5.** $2\sqrt{6}$. **8.2.6.** $\vec{x}=\{-11;\,2;\,5\}$. **8.2.7.** $\vec{x}=\{3;\,2;\,0\}$. **8.2.8.** 18. **8.2.9.** $\lambda=-3$. **8.2.10.** 36. **8.2.11.** $3\sqrt{2}$. **8.2.12.** $D(0;\,8;\,0)$ или $D(0;-7;\,0)$.

9. Применение векторной алгебры и формулы деления отрезка в данном отношении

См. [1, с. 32–35, 36–40].

9.1. Решение типовых задач

9.1.1. Пусть точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$. Докажите, что равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{1+\lambda} \cdot \overrightarrow{OA} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \overrightarrow{OB}$ верно для любой точки O.

Решение. Задача обобщает пример **7.1.2.** Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, причём $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$. Подставим в это равенство векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$, выраженные по правилу треугольника: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$. Получим $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, откуда и следует приведённое в условии равенство.

Замечание. Необходимым и достаточным условием принадлежности точки M прямой AB служит векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \mu\overrightarrow{OA} + (1-\mu)\overrightarrow{OB}$. Здесь O — любая точка пространства, μ — любое число. Если $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, точка M лежит на отрезке AB; в противном случае — на прямой AB за пределами этого отрезка.

9.1.2. Найдите точку пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника с вершинами $A(3; -2)$, $B(3; 5)$, $C(0; 4)$, $D(-1; -1)$.

Решение. Воспользуемся замечанием к решению задачи **9.1.1** и запишем условие принадлежности искомой точки $M(a; b)$ пересечения диагоналей четырёхугольника как прямой AC, так и прямой BD. В качестве точки O удобно взять начало координат, тогда координаты радиус-векторов совпадают с координатами их концов. Имеем $\overrightarrow{OM} = \mu\overrightarrow{OA} + (1-\mu)\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = \nu\overrightarrow{OB} + (1-\nu)\overrightarrow{OD}$, где μ и ν — некоторые числа. Запишем векторные равенства в координатах: $a = 3\mu$, $b = -2\mu + 4(1-\mu)$, $a = 3\nu - (1-\nu)$, $b = 5\nu - (1-\nu)$. Решив эту систему, получим $\mu = 1/3$, $\nu = 1/2$, $a = 1$, $b = 2$. Итак, диагонали четырёхугольника пересекаются в точке $M(1; 2)$.

9.1.3. Найдите точку Q, симметричную точке $P(2; -1)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(7; 2)$ и $B(-1; 4)$.

Решение. Найдём сначала точку C пересечения отрезка PQ с прямой AB. Точка C принадлежит прямой AB, значит, $\overrightarrow{PC} = \mu\overrightarrow{PA} + (1-\mu)\overrightarrow{PB}$. Здесь мы в качестве точки O из замечания к решению задачи **9.1.1** взяли точку P. Вычислив координаты векторов $\overrightarrow{PA} = \{5; 3\}$ и $\overrightarrow{PB} = \{-3; 5\}$, запишем координаты вектора $\overrightarrow{PC} = \{8\mu - 3; 5 - 2\mu\}$. Но вектор $\overrightarrow{PC}$ по условию ортогонален вектору $\overrightarrow{AB} = \{-8;\,2\}$. Их скалярное произведение равно нулю: $(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB}) = -64\mu + 24 + 10 - 4\mu = 0$. Отсюда $\mu = 1/2$ и $\overrightarrow{PC} = \{1;\,4\}$. Из условия симметрии $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PC} = \{2;\,8\}$. По известному началу этого вектора (точке P) найдём его конец $Q(4;\,7)$.

9.1.4. Зная две противоположные вершины ромба $A(8;-3)$, $C(10;\,11)$ и длину его стороны $AB = 10$, определите координаты его вершин B и D.

Решение. Центр ромба O делит диагональ AC пополам. По формулам деления отрезка найдём $O(9;\,4)$. Диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, вектор $\overrightarrow{AC} = \{2;\,14\}$ ортогонален как вектору $\overrightarrow{OB}$, так и вектору $\overrightarrow{OD}$. Пусть $B(a;\,b)$, тогда $\overrightarrow{OB} = \{a-9;\,b-4\}$. Условие ортогональности эквивалентно равенству нулю скалярного произведения $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}) = 2a - 18 + 14b - 56 = 0$, отсюда $a + 7b = 37$. Выразим теперь длину стороны ромба: $AB = \sqrt{(a-8)^2 + (b+3)^2} = 10$. Подставив $a = 37 - 7b$, получим $(29-7b)^2 + (b+3)^2 = 100$, или $b^2 - 8b + 15 = 0$, откуда $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $a_1 = 16$, $a_2 = 2$. Мы нашли координаты двух вершин ромба $B(16;\,3)$ и $D(2;\,5)$.

9.1.5. Определите координаты концов отрезка, который разделён на три равные части точками $C(2;\,0;\,2)$ и $D(5;-2;\,0)$.

Решение. Пусть точки расположены в последовательности A, C, D и B. Тогда C — середина отрезка AD, а точка D — середина отрезка CB. Координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов. Пусть $A(a;\,b;\,c)$, тогда $2 = \dfrac{a+5}{2}$, $0 = \dfrac{b-2}{2}$, $2 = \dfrac{c+0}{2}$, откуда $a = -1$, $b = 2$, $c = 4$ и координаты точки $A(-1;\,2;\,4)$. Аналогично найдём $B(8;-4;-2)$.

9.1.6. Вершины треугольника $A(-1;-2;\,4)$, $B(-4;-1;\,2)$, $C(-5;\,6;-4)$, BH — его высота. Найдите координаты основания высоты (точки H).

Решение. Многие задачи аналитической геометрии можно решить несколькими способами. Так, в этом примере точка H аналогична точке C из примера **9.1.3** (вычислите её координаты самостоятельно в качестве упражнения). Но мы применим выведенную в **7.1.11** формулу, куда подставим $\vec{b} = \overrightarrow{BA} = \{3;\,-1;\,2\}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC} = \{-1;\,7;-6\}$, $\vec{b} - \vec{c} = \{4;-8;\,8\}$, $|\vec{b}|^2 = 14$, $|\vec{c}|^2 = 86$, $(\vec{b}-\vec{c})^2 = 144$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 7 + 2\cdot(-6) = -22$, $\vec{b} + \vec{c} = \{2;\,6;-4\}$. Тогда $\overrightarrow{BH} = \{2;\,1;\,0\}$. Теперь, зная вектор $\overrightarrow{BH}$ и его начало B, найдём координаты его конца: $H(-2;\,0;\,2)$.

9.1.7. Найдите двугранный угол φ при ребре AB в тетраэдре $ABCD$, если $A(1;\,0;\,2)$, $B(2;-1;\,0)$, $C(-2;\,3;\,1)$, $D(2;\,1;\,3)$.

Решение. Вычисление угла, образованного двумя полуплоскостями с общей границей, может быть заменено вычислением угла между нормальными векторами этих полуплоскостей. Чтобы сохранился правильный знак косинуса угла, один нормальный вектор надо направить вовнутрь двугранного угла, а другой — вовне. В нашем примере для этого достаточно взять $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]$ и $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}]$. Проведём вычисления:

$$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \{-7; -7; 0\}; \qquad \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{-1; 3; -2\}.$$

Далее, $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{(-7)\cdot(-1)+(-7)\cdot 3}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{14}} = -\dfrac{14}{14\sqrt{7}}, \quad \varphi = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{7}}{7}.$

9.1.8. Найдите координаты точки пересечения биссектрис треугольника ABC, если $A(3;\ 0;\ 6)$, $B(9;\ 12;\ -6)$, $C(-7;\ 28;\ 2)$.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулами деления отрезка в заданном отношении. Вычислим $AB = 18$, $AC = 30$. По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника точка D (основание биссектрисы) делит сторону BC в отношении $BD : DC = AB : AC = 3 : 5$. Тогда координаты точки D можно найти по формулам с $\lambda = 0{,}6$:

$$x_D = \frac{9 + 0{,}6\cdot(-7)}{1 + 0{,}6} = 3, \quad y_D = \frac{12 + 0{,}6\cdot 28}{1 + 0{,}6} = 18, \quad z_D = \frac{-6 + 0{,}6\cdot 2}{1 + 0{,}6} = -3.$$

Теперь рассмотрим треугольник ABD, в котором BO — биссектриса. Точка O лежит на биссектрисе AD треугольника ABC и является искомой точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдем $BD = 9$. По теореме о биссектрисе $AO : OD = AB : BD = 18 : 9 = 2$. Тогда координаты точки O (здесь $\lambda = 2$):

$$x_O = \frac{3 + 2\cdot 3}{1 + 2} = 3, \quad y_O = \frac{0 + 2\cdot 18}{1 + 2} = 12, \quad x_O = \frac{6 + 2\cdot(-3)}{1 + 2} = 0.$$

Итак, биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке $O(3;\ 12;\ 0)$.

9.1.9. Известны вершины треугольника $A(2;\ 0)$, $B(6;\ 8)$ и точка пересечения высот $H(4;\ 0)$. Вычислите координаты третьей вершины C.

Решение. Вычислим $\overrightarrow{AH} = \{2;\ 0\}$, тогда из условия ортогональности ($\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$) запишем $\overrightarrow{BC}$ в виде $\overrightarrow{BC} = \{0;\ \mu\}$, где μ — любое число. Аналогично, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BH} = \{-2; -8\}$, откуда $\overrightarrow{AC} = \{4\lambda;\ -\lambda\}$, $\lambda \in R$. Введём координаты точки $C(x_c;\ y_c;\ z_c)$, тогда $\overrightarrow{BC} = \{x_c - 6; y_c - 8\}$, $\overrightarrow{AC} = \{x_c - 2; y_c\}$. Составим систему, приравняв координаты одинаковых векторов: $x_c - 6 = 0$, $y_c - 8 = \mu$, $x_c - 2 = 4\lambda$, $y_c = -\lambda$. Решение системы $\lambda = 1, \mu = -9, x_c = 6, y_c = -1$. Третья вершина треугольника находится в точке $C(6; -1)$.

9.1.10. Даны точки $A(5;11;4)$, $B(-10;23;-2)$, $C(10;13;9)$, $D(8;17;13)$. На прямой CD найдите такую точку M, расстояние от которой до прямой AB является наименьшим из возможных. Найдите это расстояние.

Решение. Зададим на прямой CD произвольную точку $M(a;\ b;\ c)$. Для этого воспользуемся утверждением: точка M тогда и только тогда принадлежит прямой CD, когда вектор $\overrightarrow{CM} = \{a-10;\ b-13;\ c-9\}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{CD} = \{-2;\ 4;\ 4\}$. Коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, т. е. $\dfrac{a-10}{-2} = \dfrac{b-13}{4} = \dfrac{c-9}{4} = \dfrac{\mu}{2}$. Для удобства мы выбрали коэффициент пропорциональности в виде $\dfrac{\mu}{2}$, где $\mu \in R$. Выразим координаты точки M: $a = 10-\mu$, $\ b = 13+2\mu$, $\ c = 9+2\mu$. Теперь найдём такое значение μ, при котором площадь треугольника ABM минимальна. Это и означает, что его высота, равная расстоянию от точки M до прямой AB, принимает наименьшее значение. Вычислим векторное произведение

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -15 & 12 & -6 \\ 5-\mu & 2+2\mu & 5+2\mu \end{vmatrix} = \{72+36\mu;\ 45+36\mu; -90-18\mu\}.$$

Площадь треугольника ABM равна половине длины $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]$: $S_\Delta = \dfrac{9}{2}\sqrt{(8+4\mu)^2+(5+4\mu)^2+(10+2\mu)^2} = \dfrac{27}{2}\sqrt{4\mu^2+16\mu+21}$. Минимум этой функции достигается при $\mu = -2$ и равен $S_{\min} = 27\sqrt{5}/2$. Координаты точки M при этом равны $a = 12$, $\ b = 9$, $\ c = 5$. Значение минимального расстояния d найдём, вычислив $AB = 9\sqrt{5}$ и применив формулу площади треугольника $S_{\min} = \dfrac{1}{2}AB \cdot d$, откуда $d = 3$.

9.2. Задачи для самостоятельного решения

9.2.1. В параллелограмме известны три последовательные вершины $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найдите его четвёртую вершину D.

9.2.2. Найдите на стороне AC такую точку D, чтобы треугольник ABD был подобен треугольнику ABC, если $A(1,-2)$, $B(5,1)$, $C(-11,7)$.

9.2.3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AN : NC = 3 : 5$. В каком отношении делится каждый из отрезков BN и CM их точкой пересечения K?

9.2.4. В каком отношении медиана AM треугольника ABC делит биссектрису BL, если $A(-11;\ 7)$, $B(1;-2)$, $C(5;\ 1)$?

9.2.5. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;8;3)$ и $B(9;-7;-2)$, разделён на пять равных частей точками C, D, E, F. Найдите координаты этих точек.

9.2.6. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найдите угол между его высотой, проведённой из вершины B, и стороной AB.

9.2.7. Треугольник задан координатами вершин $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$. Вычислите расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

9.2.8. Найдите угол между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы три его вершины $A(1;-2;0)$, $B(0;1;4)$ и $C(3;2;4)$.

9.2.9. В тетраэдре $ABCD$ с вершинами в точках $A(0;\ 1;-1)$, $B(1;\ 4;-2)$, $C(2;\ 2;-3)$, $D(3;-1;\ 3)$ определите угол наклона ребра AB к плоскости грани ACD.

9.2.10. Даны вершины $A(4;-4;-12)$, $B(8;4;-8)$, $C(-20;8;-24)$ треугольника. Найдите длину биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

9.2.11. Найдите координаты основания биссектрисы AD треугольника ABC, если $A(3;5;-4)$, $B(5;7;-2)$, $C(2;6;-3)$.

9.2.12. Проверьте, что точки $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 4;-3)$, $C(-2;\ 3;-5)$, $D(2;-3;\ 1)$ являются вершинами трапеции, и найдите точку O пересечения её диагоналей.

9.2.13. Решите пример **9.1.6** по формуле, полученной в задаче **7.2.16**.

Ответы. **9.2.1.** $D(4;\ 0;\ 6)$. **9.2.2.** $D(-1/3;-1)$. **9.2.3.** $CK{:}KM = 25:9$, $BK{:}KN{=}12{:}5$. **9.2.4.** 4:3. **9.2.5.** $C(1;5;2)$,$D(3;2;1)$,$E(5;-1;0)$,$F(7;-4;-1)$. **9.2.6.** $\arccos(5/\sqrt{41})$. **9.2.7.** $\sqrt{182}/3$. **9.2.8.** $\arccos(4/9)$. **9.2.9.** $\arcsin\sqrt{5/11}$. **9.2.10.** $3\sqrt{10}$. **9.2.11.** $D\,(3;\ 19/3;-8/3)$. **9.2.12.** $O\,(2/3;\ 5/3;-5/3)$.

10. Уравнение плоскости

См. [1, с. 42–44].

10.1. Решение типовых задач

10.1.1. Составьте уравнение плоскости ABC по трём точкам $A(-1;2;2)$, $B(3;\ 1;2)$, $C(0;\ 2;-1)$.

Решение. По формуле уравнения плоскости, проходящей через три данные точки: $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$. Разложим определитель по первой строке: $(x+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Вычислив определители второго порядка и приведя подобные слагаемые, получим $3x+12y+z-23=0$.

10.1.2. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек $A(2;3;5)$ и $B(0;-1;\ 1)$.

Решение. В курсе элементарной геометрии доказывается, что таким геометрическим местом является плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку. Для написания уравнения плоскости достаточно знать одну точку, принадлежащую плоскости, и нормальный (перпендикулярный плоскости) вектор. Таким вектором является, например, $\overrightarrow{AB}=\{-2;-4;-4\}$. Середина отрезка AB имеет координаты $(1;\ 1;\ 3)$. Тогда $-2(x-1)-4(y-1)-4(z-3)=0$. После приведения подобных слагаемых и сокращения на -2 получим $x+2y+2z-9=0$.

Замечание. Задачу можно было решить, пользуясь только формулой расстояния между точками. А именно, найдём расстояние от произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ до точек A и B и приравняем их. Получится $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$, что после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых и даёт искомое уравнение.

10.1.3. Найдите точку пересечения плоскостей $2x-y+3z-2=0$, $x+3y+z-4=0$, $x-2y-5z+7=0$.

Решение. Решим систему, составленную из уравнений этих плоскостей. Если три плоскости пересекаются в точке (а не по прямой линии), то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. В этом примере решение системы $x=0$, $y=1$, $z=1$.

10.1.4. Найдите α, если известно, что плоскости $3x+\alpha y+2z-1=0$ и $(\alpha-1)x-2y-z+3=0$ перпендикулярны.

Решение. Воспользуемся условием перпендикулярности плоскостей: $3\cdot(\alpha-1)+\alpha\cdot(-2)+2\cdot(-1)=0$, откуда $\alpha=5$.

10.1.5. Найдите значения A и B, при которых плоскости $Ax-3y+z+3=0$ и $2x+By-2z+1=0$ параллельны.

Решение. По условию параллельности плоскостей $\dfrac{A}{2}=\dfrac{-3}{B}=\dfrac{1}{-2}$. Отсюда $A=-1$ и $B=6$.

Замечание. В этой и предыдущей задачах важно понимать, откуда возникли условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Плоскости параллельны или перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы соответственно коллинеарны или ортогональны. Координаты нормального вектора — это коэффициенты при x, y и z в уравнении плоскости. При ортогональности векторов их скалярное произведение равно нулю, а при коллинеарности координаты векторов пропорциональны.

10.1.6. Определите ортогональную проекцию прямой пересечения плоскостей $x+2y+z+1=0$ и $2x-y-z+2=0$ на плоскость $x+5y-7z+3=0$.

Решение. Чтобы спроектировать прямую на плоскость, надо через эту прямую провести плоскость, перпендикулярную плоскости проекции. Такая плоскость называется *проектирующей*. Проектирующая плоскость принадлежит пучку $\alpha(x+2y+z+1)+\beta(2x-y-z+2)=0$. Перепишем это уравнение по-другому: $(\alpha+2\beta)x+(2\alpha-\beta)y+(\alpha-\beta)z+\alpha+2\beta=0$. Нормальный вектор проектирующей плоскости $\overrightarrow{N_1}=\{\alpha+2\beta, 2\alpha-\beta, \alpha-\beta\}$, нормальный вектор плоскости проекции $\overrightarrow{N_2}=\{1;\ 5;\ -7\}$. Поскольку плоскости перпендикулярны, $\left(\overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_2}\right)=\alpha+2\beta+5(2\alpha-\beta)-7(\alpha-\beta)=0$, или $4\alpha+4\beta=0$. Отсюда $\alpha=-\beta$. Подставив это в уравнение проектирующей плоскости и сократив на β, получим $x-3y-2z+1=0$, а искомая проекция — это прямая пересечения плоскостей $x-3y-2z+1=0$ и $x+5y-7z+3=0$, которую можно записать в виде системы $\left\{\begin{array}{lllllll} x & -3y & -2z & +1 & = & 0, \\ x & +5y & -7z & +3 & = & 0. \end{array}\right.$

10.1.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $x+3y-5=0$, $x-y-2z+4=0$ и отсекающей равные отрезки на осях абсцисс и ординат.

Решение. Как и в задаче **10.1.6**, будем искать плоскость среди плоскостей пучка $\alpha(x+3y-5)+\beta(x-y-2z+4)=0$. Дополнительным условием для нахождения соотношения между α и β является то, что эта плоскость проходит через точки $(a;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ a;\ 0)$ (отсекает равные отрезки $a\neq 0$ на осях Ox и Oy). Подставим координаты этих точек в уравнение пучка, получим систему $\left\{\begin{array}{lll} (\alpha+\beta)a & = & 5\alpha-4\beta, \\ (3\alpha-\beta)a & = & 5\alpha-4\beta. \end{array}\right.$ Её решение $a=\frac{1}{2}$, $\alpha=\beta$.
Уравнение искомой плоскости $2x+2y-2z-1=0$.

10.1.8. Найдите величину φ того двугранного угла между плоскостями $6x+8y-5z+10=0$ и $x-12y+10z-3=0$, в котором содержится начало координат.

Решение. Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла. Угол между плоскостями неотрицателен и не превышает 90°, а двугранный угол может быть тупым. Для правильного определения косинуса угла, содержащего указанную точку (в данном примере это точка $O(0;\ 0;\ 0)$), будем искать его как косинус угла между нормальными векторами граней, один из которых направлен вовнутрь двугранного угла, а другой — вовне (см. пример **9.1.7**). Выберем на каждой грани по одной точке. Например, точка $M_1(0;\ 0;\ 2)$ принадлежит первой плоскости, а $M_2(3;\ 0;\ 0)$ — второй. Нормальный вектор первой плоскости $\overrightarrow{N_1}=\{6;\ 8;\ -5\}$ составляет тупой угол с вектором $\overrightarrow{OM_1}=\{0;\ 0;\ 2\}$, так как скалярное произведение

$(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{OM_1}) = -10 < 0$, поэтому он направлен вовнутрь двугранного угла. Нормаль второй плоскости $\overrightarrow{N_2} = \{1; -12; 10\}$, $(\overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{OM_2}) = 3 > 0$ — направлена вовне угла. Теперь находим $\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} = \dfrac{-140}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{245}} = -\dfrac{4}{5}$. Итак, $\varphi = \pi - \arccos(4/5)$.

10.1.9. Даны точки $A(0; 0; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(-2; 0; 3)$, $D(2; 1; -1)$, одинаково удалённые от некоторой плоскости ω. Сколько существует таких плоскостей? Составьте уравнение плоскости ω, если 1) по одну сторону лежит точка A, а по другую — точки B, C и D; 2) по одну сторону от неё лежат точки A и B, а по другую — точки C и D.

Решение. Если понимать точки A, B, C и D как вершины тетраэдра, то легко понять, что таких плоскостей существует ровно семь. Плоскость ω может проходить параллельно грани тетраэдра, пересекая рёбра, не принадлежащие этой грани, в их серединах. Таких плоскостей четыре. Ещё плоскость ω может быть параллельна паре скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекая остальные рёбра в их серединах. Таких плоскостей три.

1) Вычислим $\overrightarrow{BC} = \{-1; -2; 2\}$, $\overrightarrow{BD} = \{3; -1; -2\}$. Середина AB — точка $M_1(-1/2; 1; 1)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 параллельно векторам $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\begin{vmatrix} x + 1/2 & y - 1 & z - 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Разложив определитель, получим $6x + 4y + 7z - 8 = 0$.

2) Вычислим $\overrightarrow{AB} = \{-1; 2; 0\}$, $\overrightarrow{CD} = \{4; 1; -4\}$. Середина AC — точка $M_1(-1; 0; 2)$. Можно воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через точку параллельно данным векторам, как в пункте 1), а можно найти нормальный вектор плоскости ω — это векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] =$ $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \{-8; -4; -9\}$. Тогда по уравнению плоскости, проходящей через данную точку с известным нормальным вектором, получим $-8(x + 1) - 4y - 9(z - 2) = 0$, или $8x + 4y + 9z - 10 = 0$.

10.1.10. Найдите точку B, симметричную точке $A(1; 5; -2)$ относительно плоскости $x - 3y + 3z + 1 = 0$.

Решение. Вычислим расстояние от точки A до плоскости: $d(A) = \dfrac{|1 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \dfrac{19}{\sqrt{19}} = \sqrt{19}$. Очевидно, $d(B) = d(A) = \sqrt{19}$ и $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен плоскости, т. е. коллинеарен вектору $\overrightarrow{N} = \{1; -3; 3\}$. Пусть $B(a;\ b;\ c)$, тогда $\overrightarrow{AB} = \{a - 1;\ b - 5;\ c + 2\}$. Из условия коллинеарности $\dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-5}{-3}=\dfrac{c+2}{3}$. Отсюда $b=8-3a,\ c=3a-5$. Теперь найдём расстояние от точки $B(a;\ 8-3a;\ 3a-5)$ до плоскости $x-3y+3z+1=0$: $d(B)=\dfrac{|a-3\cdot(8-3a)+3\cdot(3a-5)+1|}{\sqrt{19}}=\sqrt{19}$, или $|19a-38|=19$. Уравнение имеет два решения: $a=1$ (соответствует координатам точки A) и $a=3$, которое и даёт искомую точку $B(3;\ -1;\ 4)$.

10.1.11. Даны точки $A(3;1;2)$ и $B(-2;1;-5)$. В каких двугранных углах, образованных плоскостями $x+3y-z+2=0$ и $2x-3y-4z+1=0$, лежат эти точки – вертикальных, смежных, или они принадлежат одному углу?

Решение. Подставим координаты точек в уравнения плоскостей и определим знаки левых частей этих уравнений. Для точки A получим $+\ -$, а для точки B $+\ +$. Это означает, что точки лежат по одну сторону от первой плоскости и по разные стороны относительно второй, т. е. они расположены в смежных двугранных углах.

10.1.12. Составьте уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $2x+y+2z+1=0$, в котором лежит точка $M(-1;1;2)$.

Решение. Метод получения уравнений биссектральных плоскостей следует из того, что все точки этих плоскостей одинаково удалены от граней двугранного угла: $\dfrac{|x-2y+2z-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+2z+1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$. Здесь мы приравняли расстояния от произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ до граней двугранного угла. Отсюда следует, что $x-2y+2z-3=\pm(2x+y+2z+1)$, что даёт две биссектральных плоскости $x+3y+4=0$ или $3x-y+4z-2=0$ (заметим, что они взаимно перпендикулярны). Возьмём на первой плоскости точку (например $A(-4;\ 0;\ 0)$) и выясним, в каких углах лежат точки M и A, как это было сделано в примере **10.1.11.** Проверьте, что они лежат в смежных углах. Значит, искомой плоскостью является вторая из найденных плоскостей: $3x-y+4z-2=0$.

10.1.13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;\ 0;\ 0)$, $N(0;\ 0;\ 2)$ и составляющей угол 60° с плоскостью $x-y+2=0$.

Решение. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку M, имеет вид $A(x-1)+By+Cz=0$. Подставив координаты точки N, найдём $-A+2C=0$, т. е. уравнение примет вид $2Cx+By+Cz-2C=0$. Непосредственной проверкой убедимся, что $C\neq 0$, поэтому разделим уравнение на C и обозначим $\frac{B}{C}=\mu$, тогда $2x+\mu y+z-2=0$. Теперь по формуле угла между плоскостями $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{|2-\mu|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\mu^2+5}}$. После возведения в квадрат и упрощения: $\mu^2-8\mu+3=0$, откуда $\mu_{1,2}=4\pm\sqrt{13}$. Итак, условию задачи удовлетворяют две плоскости: $2x+(4\pm\sqrt{13})y+z-2=0$.

10.1.14. Составьте уравнение плоскости, равноудалённой от плоскостей $x+2y-z+3=0$ и $3x+6y-3z+1=0$.

Решение. Данные плоскости параллельны. Равноудалённая плоскость проходит параллельно этим плоскостям через середину M любого отрезка AB, где точка A лежит на первой плоскости, а точка B — на второй. Выберем $A(-3;\ 0;\ 0)$, $B(-1/3;\ 0;\ 0)$, тогда $M(-5/3;\ 0;\ 0)$, а уравнение искомой плоскости $(x+5/3)+2y-z=0$, или $3x+6y-3z+5=0$.

10.1.15. Найдите координаты центра сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный плоскостью $2x-3y+6z+12=0$ и координатными плоскостями.

Решение. Указанная плоскость отсекает от координатных осей отрезки $a=-6$, $b=4$, $c=-2$. Отсюда следует, что центр сферы (это точка, равноудалённая от граней тетраэдра) имеет кооординаты $S(-\lambda;\ \lambda;\ -\lambda)$, где $\lambda>0$. Расстояние от точки S до каждой из координатных плоскостей равно λ. Теперь потребуем, чтобы расстояние до четвёртой грани тетраэдра было таким же: $\dfrac{|-2\lambda-3\lambda-6\lambda+12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\dfrac{|-11\lambda+12|}{7}=\lambda$. Уравнение имеет два корня: $\lambda=3$ и $\lambda=2/3$. Очевидно, λ не может быть больше абсолютной величины наименьшего из отрезков ($\lambda\leqslant2$), поэтому $S(-2/3;\ 2/3;\ -2/3)$.

Замечание. При $\lambda=3$ получим координаты *вневписанной* сферы.

10.2. Задачи для самостоятельного решения

10.2.1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ -1)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{-1;\ 2;\ 2\}$.

10.2.2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ -1;\ 1)$ перпендикулярно плоскостям $2x+y-z-1=0$ и $x+3y+2z+5=0$.

10.2.3. Найдите точку пересечения плоскостей $x+y+3z+2=0$, $2x-2y+5z+3=0$, $3x-y+z-2=0$.

10.2.4. Найдите плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $3x-y+5z+2=0$ и $x+2y-3z-1=0$ параллельно вектору $\vec{a}=\{1;\ -1;\ 2\}$.

10.2.5. Найдите плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $2x+y+4=0$, $x-3y-2z+2=0$ и точку $M(-1;\ 2;\ -3)$.

10.2.6. Определите угол между плоскостями $2x-3y+6z+4=0$ и $x+2y-2z-1=0$.

10.2.7. Составьте уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $x+2y-z+3=0$ и $2x-7y-z+2=0$.

10.2.8. В условиях задачи **10.1.9** найдите уравнение плоскости ω, если 1) по одну сторону лежит точка B, а по другую — точки A, C и D; 2) по одну сторону от неё лежат точки B и C, а по другую — точки A и D.

10.2.9. Плоскость $3x+y-2z-18=0$ вместе с координатными плоскостями образует тетраэдр. Вычислите ребро куба, три грани которого лежат в координатных плоскостях, а вершина, противоположная началу координат, принадлежит данной плоскости.

10.2.10. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $P(7;-5;\ 1)$ и отсекающей на координатных осях положительные равные отрезки.

10.2.11. Выясните, как расположены точки $A(2;\ 3;-1)$ и $B(-2;\ 4;\ 3)$ относительно плоскости $5x+2y-3z+7=0$ — в одной или в разных полуплоскостях.

10.2.12. Через точку $M(-5;\ 16;\ 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox, другая — ось Oy. Вычислите угол между этими плоскостями.

10.2.13. Найдите уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-6y-3z+14=0$ и отстоящих от неё на расстояние, равное трём.

10.2.14. Решите задачу **8.1.12**, составив уравнение плоскости ABC и применив формулу расстояния от точки до плоскости.

Ответы. **10.2.1.** $2x+y-3=0$. **10.2.2.** $x-y+z-4=0$. **10.2.3.** $(1;0;-1)$. **10.2.4.** $5x+3y-z=0$. **10.2.5.** $2x-13y-8z+4=0$. **10.2.6.** $\arccos(16/21)$. **10.2.7.** $x+13y-2z+7=0$, $5x-y-4z+11=0$. **10.2.8.** 1) $2x+2z-1=0$, 2) $2x+2y+3z-4=0$. **10.2.9.** 3. **10.2.10.** $x+y+z-3=0$. **10.2.11.** В разных. **10.2.12.** $\arccos(4/13)$. **10.2.13.** $2x-6y-3z-7=0$, $2x-6y-3z+35=0$.

11. Прямая линия в пространстве

См. [1, с. 45–49].

11.1. Решение типовых задач

11.1.1. Даны точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 0;\ 2)$, $C(7;\ 4;\ 6)$. Составьте канонические уравнения 1) стороны AB; 2) медианы AM треугольника ABC.

Решение. 1) По двум точкам составим уравнения прямой AB:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \text{ т. е. } \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

2) Найдём координаты середины стороны BC: $M(5;\ 2;\ 4)$. Направляющий вектор медианы $\vec{s} = \{5-1;\ 2-2;\ 4-3\} = \{4;\ 0;\ 1\}$. Теперь по точке M и вектору $\vec{s}$ запишем канонические уравнения прямой AM: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-4}{1}$.

Ноль в знаменателе указывает на то, что соответствующая координата вектора нулевая, и не означает деление на ноль. Числитель дроби при этом также тождественно равен нулю.

Замечание. При записи уравнений прямой можно использовать любую её точку. Так, если взять точку A, уравнения медианы примут вид $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{1}$.

11.1.2. Проверьте, что прямая $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ пересекается с прямой $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{3}$, и составьте параметрические уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми.

Решение. Проверим выполнение условия принадлежности двух прямых некоторой плоскости. Для этого составим определитель, в строках которого расположены координаты направляющих векторов $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ прямых и вектора, соединяющего точку первой прямой и точку, лежащую на второй прямой: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 6-(-2) & 1-(-1) & 2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Определитель равен нулю, а это означает, что вектор, соединяющий точку первой и точку второй прямой, компланарен с направляющими векторами прямых, т. е. прямые лежат в одной плоскости. Очевидно, они не параллельны, следовательно, пересекаются. Найдём точку пересечения. Из уравнений первой прямой получим $2x + 4 = y + 1$, из уравнений второй прямой $-2x + 12 = 6y - 6$. Решение системы $x = 0$, $y = 3$, откуда $z = -1$. Теперь найдём направляющие векторы биссектрис углов, образованных данными прямыми. Вычислим $|\vec{s_1}| = 3$, $|\vec{s_2}| = 7$. В ромбе диагонали являются биссектрисами его углов, поэтому возьмём векторы, коллинеарные векторам $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$, но имеющие одинаковую длину, и найдём их сумму и разность. По правилу параллелограмма мы получим направляющие векторы биссектрис: $7\vec{s_1} + 3\vec{s_2} = \{7; 14; -14\} + \{18; -6; 9\} = \{25; 8; -5\}$; $7\vec{s_1} - 3\vec{s_2} = \{7; 14; -14\} - \{18; -6; 9\} = \{-11; 20 - 23\}$. Составим уравнения первой $\begin{cases} x = 25t, \\ y = 3 + 8t, \\ z = -1 - 5t \end{cases}$ и второй $\begin{cases} x = 11t, \\ y = 3 - 20t, \\ z = -1 + 23t \end{cases}$ биссектрисы.

11.1.3. Запишите ответ к задаче **10.1.6** в виде канонических уравнений.

Решение. Запись уравнений прямой в форме пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x & -3y & -2z & +1 & = & 0, \\ x & +5y & -7z & +3 & = & 0 \end{cases}$ может быть приведена к параметрическому или каноническому виду. Для этого надо найти направляющий вектор прямой по формуле $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \{31;\ 5;\ 8\}$ и какую-нибудь точку (решение системы). Например, системе удовлетворяет точка (6; 1; 2). Тогда канонические уравнения $\dfrac{x-6}{31} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{8}$.

Замечание. Можно поступить иначе: найти общее решение системы методом Гаусса. Это и будут параметрические уравнения, где параметром t является свободная переменная. От параметрических уравнений легко перейти к каноническим, исключив параметр t.

11.1.4. Найдите ортогональную проекцию точки $M(1;\ 4; -4)$ на прямую $\begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$

Решение. Найдём направляющий вектор прямой, как в примере **11.1.3**: $\vec{s} = \{-5; 10; 5\}$. Проведём через точку M плоскость перпендикулярно прямой. В качестве нормального вектора плоскости можно взять $\vec{s}$ или любой ненулевой коллинеарный вектор: $\overrightarrow{N} = \{1; -2; -1\}$. Уравнение плоскости примет вид $(x-1) - 2(y-4) - (z+4) = 0$, т. е. $x - 2y - z + 3 = 0$. Теперь найдём точку пересечения прямой и плоскости, добавив в систему полученное уравнение. Решением будет $P(-1;\ 1;\ 0)$.

Замечание. Для вычисления координат точки пересечения прямой и плоскости удобно прямую записать в параметрическом виде.

11.1.5. Решите задачу **10.1.10** методом ортогонального проектирования точки на плоскость.

Решение. Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;\ 5; -2)$ перпендикулярно плоскости $x - 3y + 3z + 1 = 0$ (проектирующий луч). Направляющим вектором будет нормаль прямой, поэтому $x = 1+t$, $y = 5-3t$, $z = -2+3t$. Теперь подставим эти выражения координат в уравнение плоскости; получим $t = 1$, т. е. проекцией точки A на плоскость является точка $P(2;\ 2;\ 1)$. Координаты точки $B(x_0;\ y_0;\ z_0)$, симметричной A относительно плоскости, найдём по формулам деления отрезка пополам, ведь P — это середина отрезка AB. Имеем $\dfrac{x_0+1}{2} = 2$, $\dfrac{y_0+5}{2} = 2$, $\dfrac{z_0-2}{2} = 1$, откуда $B(3; -1;\ 4)$.

11.1.6. Найдите A и B, при которых плоскость $Ax + 6y + Bz + 2 = 0$ и прямая $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ перпендикулярны.

Решение. Если прямая перпендикулярна плоскости, её направляющий вектор коллинеарен нормальному вектору плоскости: $\dfrac{A}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{B}{-4}$, отсюда $A = -4$, $B = 8$.

11.1.7. Прямые $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + At, \\ z = 1 - t \end{cases}$ и $\begin{cases} Bx + y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ параллельны. Найдите значения A и B.

Решение. Выпишем направляющие векторы прямых $\vec{s}_1 = \{1;\ A; -1\}$ и $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \{5;\ -3B{+}4;\ -B{-}2\}$; $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Rightarrow \dfrac{5}{1} = \dfrac{4 - 3B}{A} = \dfrac{-B - 2}{-1}$; $A = -1$, $B = 3$.

11.1.8. Проверьте, что прямые $\dfrac{x{+}5}{1} {=} \dfrac{y{+}7}{1} {=} \dfrac{z{+}12}{2}$ и $\dfrac{x{+}5}{4} {=} \dfrac{y}{-3} {=} \dfrac{z{+}9}{5}$ лежат в одной плоскости, и найдите точку их пересечения.

Решение. Условие принадлежности прямых одной плоскости (см. пример **11.1.2**) выполнено. Решив совместно уравнения прямых, найдём $x{=}-1$, $y = -3$, $z = -4$.

11.1.9. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;\ 0;\ 2)$ и $B(7;\ 4;\ 6)$. Найдите 1) расстояние от начала координат до этой прямой; 2) расстояние и угол между осью абсцисс и этой прямой.

Решение. Запишем канонические уравнения прямой: $\dfrac{x{-}3}{4} {=} \dfrac{y}{4} {=} \dfrac{z{-}2}{4}$, или, после сокращения знаменателей, $\dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z - 2}{1}$.

1) Расстояние от точки $O(0;\ 0;\ 0)$ найдём по формуле $d = \dfrac{|[\overrightarrow{OA}, \vec{s}]|}{|\vec{s}|}$. Здесь $\vec{s} = \{1;\ 1;\ 1\}$, $|\vec{s}| = \sqrt{3}$, $[\overrightarrow{OA}, \vec{s}] = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $|[\overrightarrow{OA}, \vec{s}]| = \sqrt{14}$. Отсюда $d = \sqrt{14/3}$.

2) Канонические уравнения оси абсцисс имеют вид $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$. Её направляющим вектором является вектор $\vec{i}$. По формуле расстояния между скрещивающимися прямыми $d_1 = \dfrac{|\overrightarrow{OA}\,\vec{s}\,\vec{i}|}{|[\vec{s}, \vec{i}]|}$. Вычислим $[\vec{s}, \vec{i}] = \vec{j} - \vec{k}$,

$|[\vec{s},\vec{i}]| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}\,\vec{s}\,\vec{i} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$, откуда $d_1 = \dfrac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Угол между осью абсцисс и прямой равен $\varphi = \arccos \dfrac{|(\vec{s},\vec{i})|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{i}|} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

11.1.10. Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-11; -9; 19)$ и пересекающей прямую $x = 2t - 6$, $y = 6t - 6$, $z = 9t - 11$ под углом 90°.

Решение. Поступим так же, как в задаче **11.1.4**, и вычислим координаты ортогональной проекции точки A на прямую. Найдём пересечение прямой и плоскости $2(x + 11) + 6(y + 9) + 9(z - 19) = 0$ (эта плоскость проходит через точку A и перпендикулярна данной прямой). Используем параметрические уравнения: $2(2t + 5) + 6(6t + 3) + 9(9t - 30) = 0$, откуда $121t - 242 = 0$, $t = 2$. Найденному значению параметра отвечает точка $B(-2; 6; 7)$. По двум точкам запишем ответ $\dfrac{x + 11}{3} = \dfrac{y + 9}{5} = \dfrac{z - 19}{-4}$.

11.1.11. Решите задачу **9.1.10** по формуле расстояния между скрещивающимися прямыми.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=\{-15; 12; -6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5; 2; 5\}$, $\overrightarrow{CD}=\{-2; 4; 4\}$. Векторное произведение $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}] = \{72; 72; -36\}$, смешанное произведение $([\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}],\overrightarrow{AC}) = 324$. Расстояние $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}]|}=\dfrac{324}{36\sqrt{2^2+2^2+1}} = 3$.

11.2. Задачи для самостоятельного решения

11.2.1. В условиях задачи **11.1.1** найдите канонические уравнения 1) высоты AH; 2) биссектрисы AL.

11.2.2. Дана прямая $\begin{cases} 2x + 3y - 9z + 13 = 0, \\ 4x - 7y - 8z + 19 = 0. \end{cases}$ Определите её канонические уравнения.

11.2.3. Дана прямая $\begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0, \\ 3x + y - 5z + 16 = 0. \end{cases}$ Определите её параметрические уравнения.

11.2.4. Найдите ортогональную проекцию точки $M(7; 2; -7)$ на плоскость $3x + y - 4z + 1 = 0$.

11.2.5. Плоскость $Ax + 2y - 3z + 4 = 0$ и прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$ параллельны. Найдите A.

11.2.6. Прямые $\dfrac{x-1}{A} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ перпендикулярны. Найдите A.

11.2.7. Определите угол между прямыми $\begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$.

11.2.8. Определите взаимное расположение: 1) прямой $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{4}$ и прямой, проходящей через точки $A(8;-10;-7)$ и $B(-7;\ 5;\ 13)$; 2) прямой AB и прямой CD, где $A(-8;-1;-7)$, $B(4;8;2)$, $C(-2;6;0)$, $D(14;10;16)$.

11.2.9. Найдите расстояние от $M(2;\ -1;\ 3)$ до прямой $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{3}$.

11.2.10. Найдите расстояние между прямыми $\begin{cases} x+y-z+15=0, \\ 2x-y+2z-13=0 \end{cases}$ и $x=t-5,\ y=-4t-1,\ z=1-3t$.

Ответы. **11.2.1.** 1) $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{-2}$; 2) $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$. **11.2.2.** $\dfrac{x-1}{87}=\dfrac{y-1}{20}=\dfrac{z-2}{26}$. **11.2.3.** $x=9t-1$, $y=8t+2$, $z=7t+3$. **11.2.4.** (1; 0; 1). **11.2.5.** $A=7$. **11.2.6.** $A=1$. **11.2.7.** $\arccos(\sqrt{10}/35)$. **11.2.8.** 1) совпадают; 2) скрещиваются. **11.2.9.** $2\sqrt{29}/5$. **11.2.10.** $2\sqrt{14}$.

12. Задачи на плоскость и прямую

См. [1, с. 42–49].

12.1. Решение типовых задач

12.1.1. Определите угол между прямой $\begin{cases} x-y+2=0, \\ x+y-4z+3=0 \end{cases}$ и плоскостью $x+4y-z+3=0$.

Решение. Направляющий вектор прямой $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=$ $=\{4;\ 4;\ 2\}$. Нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{1;\ 4;-1\}$. Угол между прямой и плоскостью $\varphi=\arcsin\dfrac{|(\vec{s},\vec{n})|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\arcsin\dfrac{18}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{18}}=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

12.1.2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(5;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{1;\ 2;\ 2\}$ и пересекающей прямую $\begin{cases} 3x+5y+5z-27=0, \\ x-5y+5z-9=0. \end{cases}$

Решение. Запишем уравнение плоскости ω с нормальным вектором $\vec{n}$, проходящей через точку M: $x+2y+2z-9=0$. Найдём теперь точку пересечения плоскости ω и данной прямой, решив систему $\begin{cases} 3x{+}5y{+}5z{-}27{=}0, \\ x{-}5y{+}5z{-}9{=}0, \\ x{+}2y{+}2z{-}9{=}0. \end{cases}$ $\Rightarrow x = 9$, $y = z = 0$. Составим уравнения прямой MP, где $P(9;\ 0;\ 0)$ — найденная точка: $\dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-1}$. Это и есть искомая прямая, поскольку она лежит в плоскости ω и, следовательно, перпендикулярна вектору $\vec{n}$, а также проходит через точку P, т. е. пересекает прямую, заданную в условии задачи.

12.1.3. Определите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-3;\ 3;\ 3)$ и пересекающей прямые $\dfrac{x-9}{8} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{2}$ и $\dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$.

Решение. Проведём плоскость, проходящую через точку M и первую прямую. Это можно сделать несколькими способами, например, выбрав на прямой две точки и затем воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через три данные точки. Получим $x + 16y - 12z - 9 = 0$. Теперь найдём точку P, в которой вторая прямая пересекает построенную плоскость: $P(-3;\ 9;\ 11)$. Прямая MP — искомая, поскольку удовлетворяет всем условиям. Осталось составить её параметрические уравнения по двум известным точкам: $x = -3$, $y = 3t + 3$, $z = 4t + 3$.

12.1.4. Луч света исходит из точки $A(-1;\ 2;\ 0)$ и, отразившись от плоскости $x{-}y{-}z{-}6 = 0$, попадает в точку $B(1; -1; -1)$. Найдите канонические уравнения прямых, содержащих исходящий и отражённый лучи.

Решение. Пользуясь методом, применённым в решении задачи **10.1.11**, найдём, что точки A и B находятся по одну сторону от данной плоскости. Угол падения равен углу отражения, поэтому точку C, в которой падающий луч отразится от плоскости, будем искать как пересечение отражающей плоскости и прямой AB_1, где B_1 — точка, симметричная B относительно отражающей плоскости. (Дайте обоснование, почему так можно сделать.) Координаты B_1 найдём, как это было вычислено в примере **10.1.10** или **11.1.5**. Получим $B_1(3; -3; -3)$. Параметрические уравнения прямой AB_1: $x = 4t - 1$, $y = -5t + 2$, $z = -3t$. Подставив в уравнение плоскости, найдём $t = 3/4$. Следовательно, $C(2;\ -7/4;\ -9/4)$. Теперь по двум известным точкам составим уравнения искомых прямых. После преобразований получим AC: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z}{-3}$; BC: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{-5}$.

12.1.5. При каких A и D прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

Решение. Выберем на прямой две точки и потребуем, чтобы они принадлежали плоскости. При $t = 0$ получим точку $(3;\ 1; -3)$, при $t = 1$ —

точку $(7;-3;-2)$. Подставим их поочерёдно в уравнение плоскости, получим $3A+2+12+D=0$, $7A-6+8+D=0$, откуда $A=3$, $D=-23$.

12.1.6. Найдите общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым $\begin{cases} x=3-t, \\ y=2t-3, \\ z=t \end{cases}$ и $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z-5}{1}$.

Решение. Существует единственная прямая, которая перпендикулярна обеим скрещивающимся прямым и пересекает каждую из них. (Длина её отрезка между точками пересечения равна расстоянию между скрещивающимися прямыми.) Направляющий вектор этой прямой вычисляется через векторное произведение: $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix}=\{9;\,6;-3\}$. Теперь проведём плоскость через первую прямую параллельно вектору $\vec{s}$. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $(3;-3;\,0)$ параллельно двум известным векторам $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ (направляющий вектор первой прямой): $\begin{vmatrix} x-3 & y+3 & z \\ 9 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=12x-6y+24z-54=0$. Сократим на 6: $2x-y+4z-9=0$ — и найдём точку пересечения этой плоскости и второй прямой. Получим $M(1;\,9;\,4)$. По точке M и направляющему вектору $\vec{s}$ запишем канонические уравнения общего перпендикуляра $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

12.1.7. К непересекающимся диагоналям двух смежных граней куба проведён общий перпендикуляр. В каком отношении основания этого перпендикуляра делят каждую диагональ?

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом в одной из вершин куба O и осями, направленными вдоль его рёбер, исходящих из вершины $O(0;\,0;\,0)$. Тогда остальные вершины имеют координаты $A(1;\,0;\,0)$, $B(0;\,1;\,0)$, $C(0;\,0;\,1)$, $D(1;\,1;\,0)$, $E(0;\,1;\,1)$, $F(1;\,0;\,1)$ и $G(1;1;1)$. Рассмотрим скрещивающиеся диагонали OF и BC граней $OAFC$ и $BOCE$ соответственно. Составим их параметрические уравнения: $x=t$, $y=0, z=t\,(OF)$; $x=0, y=1-t, z=t\,(BC)$. Найдём, как в задаче **12.1.6**, уравнения их общего перпендикуляра: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1/3}{-1}=\dfrac{z-2/3}{-1}$. Координаты оснований перпендикуляра $M(0;\,1/3;\,2/3)\in[BC]$ и $P(1/3;\,0;\,1/3)\in[OF]$. Нетрудно видеть, что $OP:PF=CM:MB=1:2$.

12.1.8. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ и пересекающей прямые $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$, $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

Решение. Направляющий вектор искомой прямой ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей, поэтому его можно вычислить как векторное произведение $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 32\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k} \parallel$ $\parallel \vec{s}_1 = \{8; -3; -4\}$. Проведём плоскость через первую прямую параллельно вектору $\vec{s}_1$: $\begin{vmatrix} x+5 & y-3 & z+1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 8 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 25x + 32y + 26z + 55 = 0$. Запишем вторую прямую параметрически $x = 3 - 2t, \quad y = 3t - 1, \quad z = 2 + 4t$ и подставим в уравнение плоскости, чтобы найти точку пересечения. Получим $t = -1$ и $M(5; -4; -2)$. По известной точке M и вектору $\vec{s}_1$ составим параметрические уравнения $\begin{cases} x = 5 + 8t, \\ y = -4 - 3t, \\ z = -2 - 4t. \end{cases}$

12.2. Задачи для самостоятельного решения

12.2.1. Определите угол между прямой $x = 1+2t$, $y = 1+2t$, $z = -2-t$ и плоскостью $x + y + z + 1 = 0$.

12.2.2. Найдите канонические уравнения прямой, пересекающей прямые $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+3}{4}$, $\begin{cases} x = 15 - 13t, \\ y = 9 - 5t, \\ z = 4 + t \end{cases}$ и лежащей в плоскости $4x - 7y - 7z + 31 = 0$.

12.2.3. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2;\ 2)$ параллельно плоскости $x+2y+2z+1 = 0$ и пересекающей прямую $x = 5+8t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + 2t$.

12.2.4. Запишите уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; -1; 2)$ и пересекающей прямые $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 1 = 0, \\ x - z - 2 = 0. \end{cases}$

12.2.5. На плоскости $2x-3y+3z-17 = 0$ найдите точку P с наименьшей суммой расстояний до точек $A(3; -4;\ 7)$ и $B(-5; -14;\ 17)$.

12.2.6. Найдите точку Q, симметричную $P(-3;\ 2;\ 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$

12.2.7. Составьте параметрические уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым $\begin{cases} x=1+t, \\ y=3+2t, \\ z=2-t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+4z-5=0, \\ x-y-2z-3=0. \end{cases}$

12.2.8. Прямые $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+3}{0}$ и $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$ симметричны относительно некоторой прямой. Найдите её уравнения. *Указание.* Искомая прямая проходит через середину общего перпендикуляра и составляет одинаковые углы с обеими прямыми.

12.2.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ параллельно прямой $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

12.2.10. Через точку M провести прямую параллельно плоскости ω так, чтобы она пересекала прямую L, если

1) $M(1;\,0;\,7)$, $\quad\omega$: $3x-y+2z-15=0$, L: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$;

2) $M(3;\,-2;\,-4)$, $\quad\omega$: $3x-2y-3z-7=0$, L: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Ответы. **12.2.1.** $\arcsin(\sqrt{3}/3)$. **12.2.2.** $\frac{x-8}{7}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-1}{3}$. **12.2.3.** $\frac{x-1}{4}=$ $=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. **12.2.4.** $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-18}=\frac{z-2}{1}$. **12.2.5.** $(-2;-2;5)$. **12.2.6.** $(1;-6;3)$. **12.2.7.** $x{=}18{+}t$, $y{=}22$, $z{=}t$. **12.2.8.** $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ или $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$. **12.2.9.** $23x{-}16y{+}10z{-}153{=}0$. **12.2.10.** 1) $x=1+68t$, $y=70t$, $z=7-67t$; 2) $x=3+5t$, $y=-2-6t$, $z=-4+9t$.

13. Поверхности второго порядка

См. [1, с. 54–58].

13.1. Решение типовых задач

13.1.1. Составить уравнение сферы, если известно, что точки $M(1,2,3)$ и $N(-1,2,5)$ являются концами одного из ее диаметров.

Решение. Находим центр сферы как середину отрезка MN, то есть вычисляя среднее арифметическое координат точек M и N. В результате $O(0,2,4)$ – центр сферы. Далее находим радиус сферы как расстояние между точками O и M, т. е. $r=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$. В итоге получаем следующее уравнение: $x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=2$.

13.1.2. Какую поверхность определяют в пространстве уравнения: 1) $x^2+2y^2=1$; 2) $x^2-y^2-z^2=1$; 3) $z^2=z(x+y)$?

Решение. 1) Уравнение не содержит переменной z, поэтому оно определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz, а именно, уравнение эллиптического цилиндра. 2) Запишем уравнение поверхности в виде: $y^2+z^2-x^2=-1$. Видим, что это уравнение двуполостного гиперболоида вращения, ось которого совпадает с осью Ox. 3) Уравнение $z^2 = z(x + y)$ может быть переписано в виде $z(z - x - y) = 0$, т. е. оно определяет две плоскости: $z = 0$ и $z = x + y$.

13.1.3. По какой линии пересекается поверхность $x^2 + y^2 - z^2/2 = -1$ и плоскость $y = 1$?

Решение. Исключим из уравнений поверхности и плоскости переменную y. В результате получим систему $\left\{\begin{array}{rcl} x^2/2 - z^2/4 & = & -1, \\ y & = & 1. \end{array}\right.$ Таким образом, имеем гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Oz.

13.1.4. Найти точки пересечения поверхности $x^2 - y^2 = 4z$ и прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{-1}$.

Решение. Перейдём к параметрическим уравнениям прямой $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = -t - 3$. Подставим эти выражения в уравнение поверхности. В результате получим $(2t + 1)^2 - (3t + 2)^2 + 4(t + 3) = 0$, или $5t^2 + 4t - 9 = 0$. Корни этого уравнения: $t_1 = 1$; $t_2 = -9/5$. Подставив эти корни в уравнения прямой, найдём координаты искомых точек: $M_1(3, 5, -4)$, $M_2\,(-13/5, -17/5, -6/5)$.

13.1.5. Какие из приведённых уравнений задают конические поверхности с вершиной в начале координат: 1) $xy + x^2 = z^2$, 2) $x^2 + 4y^2 = z$, 3) $x^3 + y^3 = z^3$?

Решение. Уравнения 1) и 3) задают конические поверхности с вершиной в начале координат, так как они имеют вид $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z)$ — однородная функция своих переменных. Действительно: $kx \cdot ky + (kx)^2 - (kz)^2 = k^2(xy + x^2 - z^2)$ и $(kx)^3 + (ky)^3 - (kz)^3 = k^3(x^3 + y^3 - z^3)$. Уравнение 2) задает эллиптический параболоид, который не является конической поверхностью.

13.1.6. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2/4 & = & 1, \\ z & = & 1; \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{rcl} y^2 - 8z + 4 & = & 0, \\ x - z + 1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Решение. 1) Составим уравнение образующей OM, где т. $M(x_0,y_0,z_0)$ лежит на направляющей (эллипсе). Уравнения образующей в параметрической форме имеют вид: $x = x_0t, y = y_0t, z = z_0t$. Подставим x_0,y_0,z_0 в уравнения направляющей. Тогда получим $\left\{\begin{array}{rcl} (x/t)^2 + (y/2t)^2 & = & 1, \\ z/t & = & 1. \end{array}\right.$ Исключая из полученной системы параметр t, получим уравнение конической поверхности $x^2 + y^2/4 - z^2 = 0$.

2) Аналогично 1), запишем систему: $\left\{\begin{array}{rcl} (y/t)^2 - 8z/t + 4 & = & 0, \\ (x - z)/t + 1 & = & 0. \end{array}\right.$ Из вто-

рого уравнения получаем $t = z - x$. Подставляя в первое уравнение, получаем $4x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$.

13.1.7. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz кривой: 1) $z = e^{-x},\ y = 0$; 2) $z = 1/x^2,\ y = 0$

Решение. Для построения поверхности вращения в уравнении линии заменяем переменную x на $\sqrt{x^2 + y^2}$. В результате получим 1) $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $z = 1/(x^2 + y^2)$.

13.1.8. Следующие уравнения поверхностей второго порядка привести к каноническому виду: 1) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 72z - 5 = 0$, 2) $4y^2 + 2z^2 - x^2 + 8y - 8z - 6x + 7 = 0$.

Решение. 1) Выделим в уравнении поверхности полные квадраты по переменным x, y и z: $4(x^2{-}2x{+}1{-}1) - 9(y^2{+}2y{+}1{-}1) - 72z - 5{=}0$, или $(x-1)^2/9 - (y+1)^2/4 = 2z$. Таким образом, имеем гиперболический параболоид. Вершина поверхности расположена в точке $(1, -1, 0)$.

2) Аналогично 1), запишем: $(y{+}1)^2{-}(z{-}2)^2/2{-}(x{+}3)^2/4{=}{-}1$. В результате получаем двуполостный гиперболоид. Центр поверхности расположен в точке $(-3, -1, 2)$, а ось симметрии параллельна оси Ox.

13.2. Задачи для самостоятельного решения

13.2.1. Составить уравнение сферы, если известно, что её центр лежит на оси Ox и точки $M(1, 2, -4)$, $N(2, 2, 3)$ лежат на сфере.

13.2.2. Какую поверхность определяет в пространстве уравнение: 1) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz = 0$; 2) $z^2 = xy$; 3) $x = yz$?

13.2.3. Найти уравнения линии пересечения поверхностей $z = 2-x^2-y^2$ и $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

13.2.4. Найти точки пересечения поверхности $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{3} = -1$ и прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{4}$.

13.2.5. Какие из приведённых уравнений задают конические поверхности с вершиной в начале координат: 1) $x+y^2+4z^2 = 0$; 2) $x^2+4y^2 = 1$; 3) $x^2 + y^2\,\mathrm{tg}(x/y) = z^2$?

13.2.6. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

$$1)\ \begin{cases} x^2 = 2y, \\ y - z + 1 = 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x = 2. \end{cases}$$

13.2.7. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой 1) $2x + 3y = 2,\ z = 0$; 2) $x = \ln y,\ z = 0$.

13.2.8 Следующие уравнения поверхностей второго порядка привести к каноническому виду: 1) $x^2 - z^2 - 4x + 8z - 2y = 0$; 2) $x^2 - y^2 + 4z^2 - - 24z - 4x + 2y + 39 = 0$; 3) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$.

Ответы. **13.2.1.** $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 29$. **13.2.2.** 1) пара плоскостей: $x - y - z = 0, x + y + z = 0$; 2) конус второго порядка. *Указание*: сделать замену $x = \dfrac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}, z = z_1$; 3) гиперболический параболоид. **13.2.3.** $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4, \\ z &= -2. \end{cases}$ **13.2.4.** $M_1(2;\, 3;\, 3)$, $M_2(-10/19;\, 33/19;\, -39/19)$. **13.2.5.** 3). **13.2.6.** 1) $x^2 + 2y^2 - 2yz = 0$, 2) $y^2 + z^2 - x^2 = 0$. **13.2.7.** 1) $9(y^2 + z^2) = 4(x-1)^2$, 2)$x = \ln\sqrt{y^2 + z^2}$. **13.2.8.** 1) гиперболический параболоид, вершина $(2, 6, 4)$; 2) конус второго порядка, вершина $(2, 1, 3)$; 3) трёхосный эллипсоид, центр $(1, 0, -2)$.

14. Линейные пространства. Исследование линейной зависимости. Разложение вектора по базису

См. [1, с. 58–60].

14.1. Решение типовых задач

14.1.1. Проверить, является ли множество симметричных матриц второго порядка с обычными операциями сложения и умножения на число линейным пространством.

Решение. Симметричная матрица второго порядка имеет вид: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Вначале нужно показать, что рассматриваемое множество замкнуто относительно операций сложения и умножения на число (то есть при выполнении этих операций матрицы остаются симметричными). Имеем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ b+f & c+g \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix}.$$

Так как симметричные матрицы являются подмножеством матриц второго порядка, то для них справедливы все аксиомы линейного пространства (коммутативный закон, сочетательное свойство и т.д.). Нулевым элементом будет служить нулевая матрица, а противоположным элементом для элемента A матрица $-A$. Таким образом, множество симметричных матриц второго порядка образует линейное пространство.

14.1.2. Задано множество положительных чисел. Сложение и умножение определены по следующим правилам: $\vec{a} \oplus \vec{b} = ab$, $\alpha\vec{a} = a^{\alpha}$. Проверить, является ли данное множество линейным пространством.

Решение. В данном случае достаточно проверить аксиомы линейного пространства. Имеем

$$1) \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = ab; \quad \vec{b} \oplus \vec{a} = ab.$$

$$2) \quad \left(\vec{a} \oplus \vec{b}\right) \oplus \vec{c} = abc; \quad \vec{a} \oplus \left(\vec{b} \oplus \vec{c}\right) = abc.$$

3) Рассмотрим нулевой элемент: $\vec{0} = 1$, так как $\vec{a} \oplus \vec{0} = a \cdot 1 = a = \vec{a}$.

4) Противоположный элемент $-\vec{a} = \dfrac{1}{a}$, так как $\vec{a} \oplus (-\vec{a}) = a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 = \vec{0}$.

$$5) \quad 1 \cdot \vec{a} = a^1 = a = \vec{a}.$$

$$6) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = \left(a^{\beta}\right)^{\alpha} = a^{\alpha\beta}, \quad (\alpha\beta)\,\vec{a} = a^{\alpha\beta}.$$

$$7) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = a^{\alpha+\beta}, \quad \alpha\vec{a} \oplus \beta\vec{a} = a^{\alpha} \oplus a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

$$8) \quad \alpha\left(\vec{a} \oplus \vec{b}\right) = (ab)^{\alpha}, \quad \alpha\vec{a} \oplus \alpha\vec{b} = a^{\alpha} \oplus b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}.$$

Таким образом, рассматриваемое множество является линейным пространством.

14.1.3. Рассматривается множество n-компонентных векторов арифметического пространства вида $\vec{a} = (1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Выяснить, является ли это множество линейным пространством, если операции сложения и умножения на число определены стандартным образом.

Решение. Проверим замкнутость данного множества относительно операций сложения и умножения на число. Имеем $\vec{a} + \vec{b} = (2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Очевидно, полученный вектор не принадлежит рассматриваемому множеству. Значит, данное множество не является линейным пространством.

14.1.4. Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. В нем заданы элементы $p_1(t) = 1 + 2t + 2t^2$, $p_2(t) = -t + t^2$, $p_3(t) = 1 + 4t^2$. Определить, являются ли эти векторы линейно зависимыми.

Решение. Приравняем линейную комбинацию этих векторов нулевому многочлену: $c_1(1 + 2t + 2t^2) + c_2(-t + t^2) + c_3(1 + 4t^2) = 0$. Группируем слагаемые с одинаковыми степенями t: $(c_1 + c_3) + (2c_1 - c_2)t + (2c_1 + c_2 + 4c_3)t^2 = 0$.

Так как два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях t, то получаем однородную линейную систему для определения коэффициентов c_1, c_2, c_3:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_3 & = & 0, \\ 2c_1 - c_2 & = & 0, \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

Частным решением этой системы является $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1$. Поскольку не все коэффициенты равны нулю, данная система векторов линейно зависима.

14.1.5. Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. В нём заданы векторы $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Определить, являются ли эти векторы линейно зависимыми.

Решение. Аналогично предыдущей задаче получаем:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножив матрицы на соответствующие коэффициенты и сложив полученные матрицы, получим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 & c_4 \\ 2c_1 - c_2 + c_4 & c_1 + 2c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что две матрицы равны только в том случае, когда у них равны соответствующие элементы, получаем линейную систему:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 & = & 0, \\ c_4 & = & 0, \\ 2c_1 - c_2 + c_4 & = & 0, \\ c_1 + 2c_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Из этой системы видно, что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ является единственным решением. Следовательно, рассматриваемые векторы линейно независимы.

14.1.6. Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. В нем заданы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что они образуют базис, и найти разложение вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ по этому базису.

Решение. Так как рассматриваемое линейное пространство четырёхмерное, то достаточно доказать линейную независимость данных векторов. Как и в задаче **14.1.5**, имеем линейную систему для неизвестных коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + 3c_3 & = & 0, \\ -c_2 + c_4 & = & 0, \\ 2c_2 + c_4 & = & 0, \\ c_3 & = & 0, \end{array} \right.$$

которая имеет только тривиальное решение $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Следовательно, рассматриваемые векторы образуют базис этого линейного пространства. Далее найдем разложение вектора $\vec{x}$ по этому базису. Запишем

$$\vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где α_1, α_2, α_3, α_4 - неизвестные числа (координаты вектора $\vec{x}$ в данном базисе). Написанное равенство эквивалентно линейной неоднородной системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 3, \\ -\alpha_2 + \alpha_4 &= 0, \\ 2\alpha_2 + \alpha_4 &= -3, \\ \alpha_3 &= 1. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, получим $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1$.

14.2. Задачи для самостоятельного решения

14.2.1. Выясните, образует ли данное множество линейное пространство. В случае положительного ответа укажите нулевой элемент данного пространства.

1) Множество геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}| = 1$, если операции сложения и умножения векторов на число определены обычным образом.

2) Множество всех геометрических векторов, коллинеарных некоторой прямой.

3) Множество геометрических векторов, сумма которых определена как $\vec{a} \oplus \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, а умножение на число обычным образом.

4) Множество пар положительных чисел вида $\vec{a}(x_1,x_2)$, $\vec{b}(y_1,y_2)$, если $\vec{a} \oplus \vec{b} = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$ и $\alpha \cdot \vec{a} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)$.

5) Множество двухкомпонентных векторов $\vec{a}(x_1, x_2)$, $\vec{b}(y_1, y_2)$, если $\vec{a} \oplus \vec{b} = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$ и $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot x_2)$.

6) Множество всех положительных функций $\vec{a} = f(t)$, $\vec{b} = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, 1]$, если сложение и умножение на число определены как $\vec{a} \oplus \vec{b} = f(t) \cdot g(t)$ и $\alpha \cdot \vec{a} = f^\alpha(t)$.

14.2.2. Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. В нем заданы векторы $p_1(t) = 1+t+t^2$, $p_2(t) = 1-2t+3t^2$, $p_3(t) = 1 + 4t - t^2$. Определить, являются ли эти векторы линейно зависимыми.

14.2.3. Рассматривается линейное пространство геометрических векторов. В нем заданы векторы $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$. Определить, являются ли эти векторы линейно зависимыми.

14.2.4. Рассматривается линейное пространство трёхкомпонентных арифметических векторов R^3. В нем заданы векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что эти векторы образуют базис указанного пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

14.2.5. Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. В нем заданы векторы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что эти матрицы образуют базис пространства матриц второго порядка и найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

14.2.6. Рассматривается линейное пространство, состоящее из пар положительных чисел вида $\vec{a}(x_1, x_2)$, $\vec{b}(y_1, y_2)$, причём $\vec{a} \oplus \vec{b} = (x_1 {\cdot} y_1, x_2 {\cdot} y_2)$ и $\alpha \cdot \vec{a} = (x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha})$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1(10, 1)$, $\vec{e}_2(1, 10)$ образуют базис этого пространства и найти координаты вектора $\vec{x} = (100, 1/10)$ в этом базисе.

Ответы. **14.2.1.** 1), 3), 5) не образуют; 2), 4), 6) образуют линейное пространство. **14.2.2.** Линейно зависимы. **14.2.3.** Линейно зависимы. **14.2.4.** $\vec{x}\ (4, 5, -6)$. **14.2.5.** $\vec{x}\ (-1, 1, 2, -1)$. **14.2.6.** $\vec{x}\ (2, -1)$.

15. Матрица перехода к новому базису. Матрица линейного оператора

См. [1, с. 61–62, 67–69].

15.1. Решение типовых задач

15.1.1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3\}$, если он задан в базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ и связь между базисами даётся формулами

$$\begin{cases} \vec{e}\,'_1 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_2 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_3 & = & \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3. \end{cases}$$

При этом вектор $\vec{x}$ имеет следующее разложение по базису $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$: $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}^{\,'}_1,\ \vec{e}^{\,'}_2,\ \vec{e}^{\,'}_3$: $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе найдутся из матричного уравнения $T \cdot X' = X$, где $X = \big(x_1,\ x_2,\ x_3\big)^T$ и $X' = \big(x_1',\ x_2',\ x_3'\big)^T$ — столбец координат вектора $\vec{x}$ в старом и новом базисах соответственно. Матричное уравнение можно решать с помощью обратной матрицы или рассматривать как систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' + x_2' + x_3' & = & 6, \\ x_1' + x_2' + 2x_3' & = & 9, \\ x_1' + 2x_2' + 3x_3' & = & 14. \end{array} \right.$$

Решив данную систему методом Гаусса, получим $x_1' = 1, x_2' = 2, x_3' = 3$, или $\vec{x} = \vec{e}^{\,'}_1 + 2\vec{e}^{\,'}_2 + 3\vec{e}^{\,'}_3$.

15.1.2. Найти матрицу перехода от канонического базиса $1, t, t^2, ..., t^{n-1}$ к базису $1, t-1, (t-1)^2, ..., (t-1)^{n-1}$, доказав, что последние многочлены образуют базис в пространстве многочленов степени не выше $n-1$.

Решение. Обозначим $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2, ..., \vec{e}_n = t^{n-1}$. Запишем очевидные формулы

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \vec{e}_1, \\ t-1 & = & -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ (t-1)^2 & = & \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ (t-1)^3 & = & -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ ... & = & ... \\ (t-1)^{n-1} & = & (-1)^{n-1}\vec{e}_1 + (-1)^{n-2}(n-1)\vec{e}_2 ... + \vec{e}_n. \end{array}$$

В результате получаем матрицу:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & ... & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & ... & (-1)^{n-2}(n-1) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель этой матрицы равен единице, то есть её ранг равен n, полученная матрица является матрицей перехода и рассматриваемые многочлены образуют базис в пространстве многочленов степени не выше $n-1$.

15.1.3. Найти матрицу перехода от базиса $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, доказав, что последние матрицы образуют базис в пространстве матриц второго порядка.

Решение. Обозначим $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Запишем $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$. Получим матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Так как определитель этой матрицы равен единице, то есть ее ранг равен четырём, полученная матрица является матрицей перехода и рассматриваемые векторы образуют базис в пространстве матриц второго порядка.

15.1.4. Проверить, является ли отображение $\hat{A}\vec{x} = (\vec{x},\vec{e})\vec{e}$ линейным оператором, действующим в пространстве геометрических векторов. Здесь $\vec{e}$ – заданный единичный вектор.

Решение. Оператор является линейным, если выполнены два свойства: 1) $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}\vec{x}+\hat{A}\vec{y}$ для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и 2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$, где α – действительное число. Проверим эти свойства для нашего оператора:

$$1)\ \hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y},\vec{e})\vec{e} = (\vec{x},\vec{e})\vec{e} + (\vec{y},\vec{e})\vec{e} = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y},$$

$$2)\ \hat{A}(\alpha\vec{x}) = (\alpha\vec{x},\vec{e})\vec{e} = \alpha(\vec{x},\vec{e})\vec{e} = \alpha\hat{A}\vec{x}.$$

Следовательно, данный оператор является линейным оператором.

15.1.5. Найти матрицу линейного оператора дифференцирования $\hat{D}$ в пространстве многочленов степени не выше третьей в базисе

$$\{1, (t+1), (t+1)^2, (t+1)^3\}.$$

Решение. Обозначим $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = (t+1)$, $\vec{e}_3 = (t+1)^2$, $\vec{e}_4 = (t+1)^3$. Подействуем оператором дифференцирования на каждый базисный вектор. Тогда получим: $\hat{D}\vec{e}_1 = \vec{0}$, $\hat{D}\vec{e}_2 = \vec{e}_1$, $\hat{D}\vec{e}_3 = 2\vec{e}_2$, $\hat{D}\vec{e}_4 = 3\vec{e}_3$. Видим, что вектор $\hat{D}\vec{e}_1$ имеет все нулевые координаты в рассматриваемом базисе, поэтому первый столбец матрицы оператора дифференцирования состоит из нулей. Аналогично вектор $\hat{D}\vec{e}_2$ имеет координаты (1,0,0,0) в рассматриваемом базисе, поэтому второй столбец матрицы оператора будет состоять из чисел 1, 0, 0, 0. Продолжая находить столбцы, запишем матрицу линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.1.6. Найти матрицу линейного оператора проектирования $\hat{P}$ геометрических векторов на плоскость $x + 2y + 3z = 0$ и координаты образа вектора $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ при действии данного оператора.

Решение. Оператор проектирования векторов на плоскость α определяется равенством $\hat{P}\vec{x} = \vec{x}_\alpha$, где $\vec{x}_\alpha$ – ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость α. При этом $\vec{x}_\alpha = \vec{x} - \vec{x}_n = \vec{x} - \dfrac{(\vec{x},\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$. Здесь $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости α. В рассматриваемом случае $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Следовательно,

$$\hat{P}\vec{i} = \vec{i} - \frac{1}{14}\vec{n} = \frac{13}{14}\vec{i} - \frac{2}{14}\vec{j} - \frac{3}{14}\vec{k},$$

$$\hat{P}\vec{j} = \vec{j} - \frac{2}{14}\vec{n} = -\frac{2}{14}\vec{i} + \frac{10}{14}\vec{j} - \frac{6}{14}\vec{k},$$

$$\hat{P}\vec{k} = \vec{k} - \frac{3}{14}\vec{n} = -\frac{3}{14}\vec{i} - \frac{6}{14}\vec{j} + \frac{5}{14}\vec{k}.$$

Запишем матрицу линейного оператора: $\begin{pmatrix} 13/14 & -1/7 & -3/14 \\ -1/7 & 5/7 & -3/7 \\ -3/14 & -3/7 & 5/14 \end{pmatrix}$.

Для нахождения образа вектора $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ при действии данного оператора необходимо умножить матрицу оператора на столбец координат вектора $\vec{x}$ в стандартном базисе:

$$\begin{pmatrix} 13/14 & -1/7 & -3/14 \\ -1/7 & 5/7 & -3/7 \\ -3/14 & -3/7 & 5/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/14 \\ -17/7 \\ 19/14 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый вектор имеет вид $\hat{P}\vec{x} = \dfrac{11}{14}\vec{i} - \dfrac{17}{7}\vec{j} + \dfrac{19}{14}\vec{k}$.

15.1.7. Линейный оператор каждой квадратной матрице X второго порядка ставит в соответствие квадратную матрицу Y по правилу: $Y = CX$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в каноническом базисе.

Решение. Подействуем данным оператором на все четыре базисных вектора канонического базиса $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получим

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3,$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4,$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_3,$$

$$\hat{A}\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_4.$$

Далее выпишем матрицу линейного оператора (не путать с матрицей C):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

15.2. Задачи для самостоятельного решения

15.2.1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\left\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3\right\}$, если он задан в базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ и связь между базисами даётся формулами $\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. При этом вектор $\vec{x}$ имеет следующее разложение по базису $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$: $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$.

15.2.2. Найти матрицу перехода от канонического базиса $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ к базису $1,\ t-2,\ \dfrac{(t-2)^2}{2!},\ \dfrac{(t-2)^3}{3!}$ в пространстве многочленов степени не выше третьей.

15.2.3. В трехмерном пространстве геометрических векторов V_3 заданы векторы $\vec{e}\,'_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{e}\,'_3 = \vec{j} - 7\vec{k}$. Найти матрицу перехода от канонического базиса этого пространства к базису $\left\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3\right\}$ и найти координаты вектора $\vec{x} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}$ в этом новом базисе.

15.2.4. В двумерном линейном пространстве в некотором базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ заданы две системы векторов: $\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{g}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1 = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Требуется написать матрицу перехода от базиса $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2\}$ к базису $\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2\right\}$.

15.2.5. Проверить, является ли данное отображение линейным оператором, действующим в пространстве геометрических векторов: 1) $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, где λ – фиксированное число; 2) $\hat{A}\vec{x} = [\vec{a},\vec{x}]$, где $\vec{a}$ – фиксированный вектор; 3) $\hat{A}\vec{x} = a^2\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, если $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

15.2.6. Найти матрицу линейного оператора A и координаты образа вектора $\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$ при действии этого оператора, если A: 1) оператор ортогонального проектирования геометрических векторов плоскости на прямую $y = 5x$; 2) оператор симметрии геометрических векторов плоскости относительно прямой $y = 5x$.

15.2.7. Линейный оператор каждой квадратной матрице X второго порядка ставит в соответствие матрицу Y по правилу: $Y = CXC$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в каноническом базисе.

15.2.8. Линейный оператор $\hat{A}p = p''(t) + p'(t) + p(t)$ действует в пространстве многочленов степени не выше третьей. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{1, t, t^2, t^3\}$.

15.2.9. Найти матрицу линейного оператора поворота геометрических векторов относительно оси z на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z. Найти координаты образа вектора $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ при действии этого оператора.

Ответы. **15.2.1.** $\vec{x} = \vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3$. **15.2.2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4/3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.

15.2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = 2\vec{e}\,'_1 + 3\vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3$. **15.2.4.** $\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 8/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

15.2.5. 1) является; 2) является; 3) не является. **15.2.6.** 1) $\begin{pmatrix} 1/26 & 5/26 \\ 5/26 & 25/26 \end{pmatrix}$, $-\frac{2}{13}\vec{i} - \frac{10}{13}\vec{j}$; 2) $\begin{pmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{pmatrix}$, $-\frac{17}{13}\vec{i} - \frac{7}{13}\vec{j}$. **15.2.7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

15.2.8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **15.2.9.** $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}\,' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$.

16. Матрица линейного преобразования в новом базисе. Собственные значения и собственные векторы

См. [1, с. 69–75].

16.1. Решение типовых задач

16.1.1. Матрица линейного оператора в базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе 1) $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_2\}$; 2) $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\}$.

Решение. 1) Рассмотрим матрицу перехода от старого к новому базису. Запишем равенства $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1,\ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_2$, откуда $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Далее элементарными преобразованиями находим матрицу, обратную матрице перехода: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Таким образом, $T^{-1} = T$. Для вычисления матрицы оператора в новом базисе применяем формулу $A^{'} = T^{-1}AT$:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Аналогично предыдущему выписываем матрицу перехода к новому базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Находим матрицу, обратную матрице перехода: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для вычисления матрицы оператора в новом базисе снова применяем формулу $A^{'} = T^{-1}AT$. В результате

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

16.1.2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим собственные значения, используя характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, то есть $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0$, откуда $\lambda=1$ или $\lambda=2$. Собственные векторы находим, подставляя найденные собственные значения в матрицу $(A-\lambda E)$ и решая соответствующие линейные однородные системы:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4x_1+10x_2 & = & 0, \\ -2x_1+5x_2 & = & 0 \end{array}\right. \text{ при } \lambda=1 \quad \text{и} \left\{\begin{array}{rcl} -5x_1+10x_2 & = & 0, \\ -2x_1+4x_2 & = & 0 \end{array}\right. \text{ при } \lambda=2.$$

В результате получим собственные векторы оператора $\vec{s}_1=c_1\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ и $\vec{s}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, где $c_1\neq 0$ и $c_2\neq 0$.

16.1.3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора проектирования геометрических векторов на прямую $x=y=z$. Оператор проектирования задается формулой $\hat{A}\vec{x}=(\vec{x},\vec{e})\vec{e}$. Здесь $\vec{e}$ – единичный направляющий вектор прямой.

Решение. 1-й способ. Выпишем матрицу оператора проектирования в базисе $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, учитывая, что $\vec{e}=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$: $A=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix}=0.$

Для вычисления определителя вычитаем из первой строки вторую: $\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix}=0$. Затем прибавляем ко второму столбцу первый: $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix}=0$. Раскрывая определитель по первой строке, получаем собственные значения $\lambda_1=\lambda_2=0$ или $\lambda_3=1$.

Собственные векторы находим, как и в задаче **16.1.2**, решая однородные системы (при этом мы сократили уравнения на $1/3$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 0, \\ x_1+x_2+x_3 & = & 0, \\ x_1+x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right. \text{при } \lambda=0 \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x_1+x_2+x_3 & = & 0, \\ x_1-2x_2+x_3 & = & 0, \\ x_1+x_2-2x_3 & = & 0. \end{array}\right. \text{при } \lambda=1.$$

Получим $\vec{s}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{s}_2=d\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, где $c_1^2+c_2^2\neq 0$ и $d\neq 0$.

2-й способ. Очевидно, что рассматриваемый оператор оставляет без изменения векторы, коллинеарные оси $x = y = z$. Поэтому все такие векторы (кроме нулевого) являются собственными векторами, отвечающими собственному значению $\lambda = 1$. С другой стороны, все векторы, лежащие в плоскости $x + y + z = 0$, которая перпендикулярна рассматриваемой прямой, проектируются в нулевой вектор, то есть являются собственными векторами, отвечающими собственному значению $\lambda = 0$. Для нахождения данных векторов можно взять линейную комбинацию двух линейно независимых векторов, лежащих в плоскости $x+y+z = 0$, например комбинацию векторов $(1, -1, 0)$ $(1, 0, -1)$.

16.1.4. Привести к диагональному виду матрицу $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим собственные значения, используя характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $\lambda = -2$ или $\lambda = 3$. Составим системы для определения собственных векторов:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \text{при } \lambda = -2 \quad \text{и} \quad \begin{cases} -6x_1 + x_2 = 0, \\ -6x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \text{при } \lambda = 3.$$

В результате получим собственные векторы $\vec{s}_1 = (1{,}1)$ и $\vec{s}_2 = (1{,}6)$, из которых составим матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Далее находим каноническое разложение матрицы A: $A = T\Lambda T^{-1}$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица в базисе из собственных векторов. В результате $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

16.1.5. Найти матрицу A^{10} для матрицы A из задачи **16.1.4.**

Решение. Используем каноническое разложение матрицы A. Тогда можем записать $A^n = T\Lambda T^{-1} \cdot T\Lambda T^{-1} \cdot \ldots \cdot T\Lambda T^{-1}$. Очевидно, что все сомножители вида $T^{-1} \cdot T$ будут равны единичной матрице, поэтому могут быть опущены. Кроме того, диагональная матрица возводится в n-ю степень по формуле $\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. В результате получим

$$A^{10} = T\Lambda^{10}T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 59049 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10581 & 11605 \\ -69630 & 70654 \end{pmatrix}.$$

16.2. Задачи для самостоятельного решения

16.2.1. Матрица линейного оператора в базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2=\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \ \vec{e}\,'_3=\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

16.2.2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного матрицей 1) $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ -4 & -4 & 3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

16.2.3. Найти собственные значения и собственные векторы операторов, заданных в пространстве геометрических векторов V_3:

1) $\hat{A}\vec{x}=[\vec{a},\vec{x}]$, где $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$;

2) оператор проектирования векторов на плоскость $x+2y+2z=0$.

При этом решить задачу двумя способами — геометрическим и аналитическим (выписав матрицу оператора в каноническом базисе).

16.2.4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ построить её каноническое разложение.

16.2.5. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -4 & 3 & -1\\ -4 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A^{10}-A^9$, не используя непосредственное умножение матриц.

Ответы. **16.2.1.** $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 5/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **16.2.2.** 1) $(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,4)$ — собственные векторы, $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=1$ — собственные значения; 2) $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_{3,4}=-1$ — собственные значения, $(1,0,0,1),(0,1,1,0)$, $(1,0,0,-1)$, $(0,1,-1,0)$ — собственные векторы. **16.2.3.** 1) $(1,1,1)$ — собственный вектор, $\lambda_1=0$ — собственное значение; 2) $(1,2,2)$ и $(-2,1,0)$, $(-2,0,1)$ — собственные векторы, $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=0$ — собственные значения. **16.2.4.** $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 4 & -1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **16.2.5.** $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1024 & 0 & 512\\ -1024 & 0 & 512\end{pmatrix}$.

17. Евклидовы пространства. Ортогонализация произвольного базиса

См. [1, с. 62–66].

17.1. Решение типовых задач

17.1.1. Может ли скалярное произведение в двумерном линейном пространстве быть задано в виде $(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$?

Решение. Проверим четыре аксиомы скалярного произведения. 1) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$. Очевидно, что $(\vec{y},\vec{x}) = 2y_1x_1 + 3y_2x_2$, то есть равенство верное. 2) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z})$. Действительно, пусть координаты вектора $\vec{z}$ есть (z_1, z_2). Тогда $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = 2(x_1+y_1)z_1 + 3(x_2+y_2)z_2 = (2x_1z_1+3x_2z_2)+(2y_1z_1+3y_2z_2)$. Но последняя формула дает правую часть доказываемого равенства. 3) $(\alpha\vec{x},\vec{y}) = \alpha\,(\vec{x},\vec{y})$. Действительно, $(\alpha\vec{x},\vec{y}) = 2(\alpha x_1)y_1 + 3(\alpha x_2)y_2 = \alpha(2x_1y_1 + 3x_2y_2) = \alpha\,(\vec{x},\vec{y})$. 4) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ и $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Имеем $(\vec{x},\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$, $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$.

17.1.2. Может ли скалярное произведение в линейном пространстве многочленов степени не выше n быть задано в виде $(\vec{x},\vec{y}) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$? Здесь $\vec{x} = f(t)$ и $\vec{y} = g(t)-$ многочлены степени не выше n.

Решение. Как и в предыдущей задаче, проверим четыре аксиомы скалярного произведения.

1) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$. Очевидно, $(\vec{y},\vec{x}) = \int\limits_{-1}^{1} g(t)f(t)dt$, т. е. равенство верное.

2) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z})$. Действительно, пусть $\vec{z} = p(t)$. Тогда $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = \int\limits_{-1}^{1}(f(t)+g(t))p(t)dt = = \int\limits_{-1}^{1} f(t)p(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} g(t)p(t)dt$. Но последняя формула даёт правую часть доказываемого равенства.

3) $(\alpha\vec{x},\vec{y}) = \alpha\,(\vec{x},\vec{y})$. Имеем $(\alpha\vec{x},\vec{y}) = \int\limits_{-1}^{1}(\alpha f(t))g(t)dt = \alpha\int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, то есть равенство верное.

4) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ и $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Действительно, $(\vec{x},\vec{x}) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)^2dt \geq 0$, $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0$, так как если предположить, что $f(t) \neq 0$ в какой-либо точке интервала $[-1,1]$, то в силу непрерывности функция была бы положительной в некоторой окрестности этой точки и, следовательно, интеграл от неё не был бы равен нулю, то есть имели бы противоречие.

17.1.3. Найти угол между векторами $\vec{a}(1,1,1,1)$, $\vec{b}(0,2,0,2)$, заданными в ортонормированном базисе.

Решение. Угол между векторами евклидова пространства находится по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||}$, где скалярное произведение векторов определяется как $(\vec{a},\vec{b}) = \sum\limits_{i=1}^{4} a_i b_i$ и $||\vec{a}|| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ — норма вектора. По этой формуле найдём $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2}{\sqrt{(1^2+1^2+1^2+1^2)}\sqrt{(0^2+2^2+0^2+2^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. В результате $\varphi = \pi/4$.

17.1.4. Дополнить векторы $\vec{a}_1(0,1,0,1)$, $\vec{a}_2(1,0,1,0)$ до ортогонального базиса в R^4.

Решение. Будем искать требуемые векторы в виде (x_1,x_2,x_3,x_4). Из условия ортогональности этих векторов к $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имеем $\begin{cases} x_2+x_4 &= 0, \\ x_1+x_3 &= 0. \end{cases}$ Таким образом, мы получили линейную систему для определения координат искомых векторов. Построив её фундаментальную систему решений, находим два вектора: $\vec{a}_3(-1,0,1,0)$, $\vec{a}_4(0,-1,0,1)$. Легко видеть, что эти векторы ортогональны, поэтому вместе с векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ они образуют ортогональный базис в R^4.

17.1.5. Применить процесс ортогонализации к векторам $\vec{a}_1=(1,-2,2)$, $\vec{a}_2=(3,0,3)$, $\vec{a}_3=(3,9,-6)$, заданным в ортонормированном базисе.

Решение. $\vec{g}_1=\vec{a}_1$, $\vec{g}_2=\vec{a}_2-\dfrac{(\vec{a}_2,\vec{g}_1)}{(\vec{g}_1,\vec{g}_1)}\vec{g}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}-\dfrac{3+6}{1+4+4}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$,

$$\vec{g}_3=\vec{a}_3-\frac{(\vec{a}_3,\vec{g}_1)}{(\vec{g}_1,\vec{g}_1)}\vec{g}_1-\frac{(\vec{a}_3,\vec{g}_2)}{(\vec{g}_2,\vec{g}_2)}\vec{g}_2=\begin{pmatrix}3\\9\\-6\end{pmatrix}-\frac{-27}{9}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-\frac{18}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

В результате получаем три взаимно ортогональных вектора $\vec{g}_1(1,-2,2)$, $\vec{g}_2(2,2,1)$, $\vec{g}_3(2,-1,-2)$.

17.1.6. Применить процесс ортогонализации к многочленам $\vec{f}_1=1$, $\vec{f}_2=t$, $\vec{f}_3=t^2$, если скалярное произведение векторов определяется по формуле $(\vec{x},\vec{y})=\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

Решение. В качестве первого вектора ортогональной системы берем вектор $\vec{g}_1=\vec{f}_1=1$. Далее найдем следующие скалярные произведения:

$$(\vec{g}_1,\vec{g}_1)=\int\limits_0^1 dt=1,\quad (\vec{f}_2,\vec{g}_1)=\int\limits_0^1 tdt=\frac{1}{2}.$$

Тогда $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \dfrac{(\vec{f}_2,\vec{g}_1)}{(\vec{g}_1,\vec{g}_1)} \cdot \vec{g}_1 = t - \dfrac{1}{2}$. Далее $(\vec{g}_2,\vec{g}_2) = \int\limits_0^1 \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 dt = \dfrac{1}{12}$, $(\vec{f}_3,\vec{g}_1) = \int\limits_0^1 t^2 dt = \dfrac{1}{3}$, $(\vec{f}_3,\vec{g}_2) = \int\limits_0^1 t^2 \left(t - \dfrac{1}{2}\right) dt = \int\limits_0^1 t^3 dt - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t^2 dt = \dfrac{1}{12}$. В результате $\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \dfrac{(\vec{f}_3,\vec{g}_1)}{(\vec{g}_1,\vec{g}_1)}\vec{g}_1 - \dfrac{(\vec{f}_3,\vec{g}_2)}{(\vec{g}_2,\vec{g}_2)}\vec{g}_2 = t^2 - t + \dfrac{1}{6}$.

17.2. Задачи для самостоятельного решения

17.2.1. Может ли скалярное произведение в двумерном линейном пространстве быть задано в виде: 1) $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$; 2) $(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$?

17.2.2. Может ли скалярное произведение в линейном пространстве многочленов степени не выше n быть задано в виде: $(\vec{x},\vec{y}) = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$? Здесь $\vec{x} = f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ и $\vec{y} = g(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$.

17.2.3. Найти угол между векторами, заданными в ортонормированном базисе: 1) $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,-2,1)$; 2) $\vec{a}(2,1,\sqrt{2},1)$, $\vec{b}(0,2,0,2)$.

17.2.4. При каком λ векторы $\vec{a}_1(0,1,\lambda)$, $\vec{a}_2(1,-1,1)$, $\vec{a}_3(-2,-1,\lambda)$ составляют ортогональный базис в пространстве R^3.

17.2.5. Дополнить заданные векторы до ортогонального базиса в R^4: 1) $\vec{a}_1(1,-2,1,3)$, $\vec{a}_2(2,1,-3,1)$; 2) $\vec{a}_1(1,-1,1,-3)$, $\vec{a}_2(-4,1,5,0)$; 3) $\vec{a}_1(1,1,1,2)$, $\vec{a}_2(1,2,3,-3)$.

17.2.6. Применить процесс ортогонализации к векторам, заданным в ортонормированном базисе: 1) $\vec{a}_1(1,-2,2)$, $\vec{a}_2(-1,0,-1)$, $\vec{a}_3(5,-3,-7)$; 2) $\vec{a}_1(1,1,1,1)$, $\vec{a}_2(3,3,-1,-1)$, $\vec{a}_3(-2{,}0{,}6{,}8)$.

17.2.7. Применить процесс ортогонализации к многочленам $\vec{f}_1 = 2$, $\vec{f}_2 = -t$, $\vec{f}_3 = 6t^2$, если скалярное произведение векторов определяется по формуле $(\vec{x},\vec{y}) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

Ответы. **17.2.1.** 1) нет; 2) да. **17.2.2.** Может. **17.2.3.** 1) векторы ортогональны; 2) 60°. **17.2.4.** $\lambda = 1$. **17.2.5.** 1) $(1,1,1,0)$, $(-1,1,0,1)$; 2) $(2,3,1,0)$, $(1,-1,1,1)$; 3) $(1,-2,1,0)$, $(-25,-4,17,6)$. **17.2.6.** 1) $(1,-2,2)$, $(2,2,1)$, $(6,-3,-6)$; 2) $(1,1,1,1)$, $(2,2,-2,-2)$, $(-1,1,-1,1)$. **17.2.7.** $\vec{f}_1 = 2, \vec{f}_2 = 1/2 - t$, $\vec{f}_3 = 6t^2 - 6t + 1$.

18. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду методом Лагранжа и ортогональным преобразованием

См. [1, с. 75–83]

18.1. Решение типовых задач

18.1.1. Составьте матрицу квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3) = 6x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$$

и запишите квадратичную форму в матричном виде.

Решение. Запишем смешанные члены $6x_1x_2$, $4x_1x_3$ и $-x_2x_3$ в виде суммы двух равных слагаемых: $3x_1x_2 + 3x_1x_2$, $2x_1x_3 + 2x_1x_3$ и $-0{,}5x_2x_3 - 0{,}5x_2x_3$. В результате получаем матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

В матричной форме получаем $f(x_1,x_2,x_3) = X^TAX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$.

18.1.2. Приведите квадратичную форму

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. Коэффициент при x_2^2 не равен нулю. Поэтому соберем слагаемые, содержащие x_2, в одну группу $3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$. Дополним это выражение до полного квадрата, вычитая и добавляя необходимые слагаемые:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + 3x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Обозначим $y_2 = \left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)$. Приведя подобные члены, получим

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3y_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{16}{3}x_1x_3 = 3y_2^2 + W(x_1,x_3).$$

К квадратичной форме $W(x_1,x_3)$ снова применим метод выделения полного квадрата. Для этого запишем

$$W(x_1,x_3) = -\frac{4}{3}\left(x_1 - 2x_3\right)^2 + \frac{16}{3}x_3^2 + \frac{8}{3}x_3^2.$$

Обозначим $y_1 = x_1 - 2x_3$. Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму в виде

$$f(x_1,x_2,x_3) = -\frac{4}{3}y_1^2 + 3y_2^2 + 8x_3^2.$$

Обозначим $y_3 = x_3$. Тогда получим следующий канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3) = -\frac{4}{3}y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3^2,$$

где $y_1 = x_1 - 2x_3, \quad y_2 = \left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right), \quad y_3 = x_3.$

18.1.3. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3 + 2x_3x_4$$

к каноническому виду.

Решение. Обозначим $x_1 = y_1 + y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1 - y_3, \quad x_4 = y_4.$ Тогда квадратичная форма примет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = y_1^2 - y_3^2 + 2y_1y_4 - 2y_3y_4.$$

К полученной квадратичной форме применим метод выделения полного квадрата. Как в предыдущей задаче, получаем

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1 + y_4)^2 - (y_3 + y_4)^2.$$

Обозначим $z_1 = y_1 + y_4, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3 + y_4, \quad z_4 = y_4$. Тогда получим следующий канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = z_1^2 - z_3^2,$$

где $z_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_3 + x_4, \quad x_2 = z_2, \quad z_3 = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_3 + x_4, \quad z_4 = x_4.$

18.1.4. Приведите квадратичную форму

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём ее собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda = -2$ и $\lambda = 4$. Это позволяет сразу же написать канонический вид квадратичной формы $f(y_1{,}y_2{,}y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$. Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. С этой целью найдём собственные векторы матрицы A. Получаем следующие линейные алгебраические системы для определения собственных векторов

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{array} \right. \text{при}\,\lambda{=}{-2}\,\text{и} \left\{ \begin{array}{rcl} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \text{при}\,\lambda{=}4.$$

Находим собственные векторы, для чего находим фундаментальную систему решений для каждой из написанных линейных систем. Для первой системы: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, для второй: $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что собственные векторы X_2 и X_3 матрицы A ортогональны собственному вектору X_1, но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. С этой целью запишем: $Y_2 = X_2$, $Y_3 = X_3 - qY_2$. Коэффициент q определяется из условия ортогональности Y_2 и Y_3. Он равен $q = 1/5$. В результате получаем три ортогональных собственных вектора

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируем эти векторы и составляем матрицу, столбцами которой являются полученные векторы. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Полученное преобразование переменных приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду $f(y_1{,}y_2{,}y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$.

18.1.5. Определить, является ли данная квадратичная форма

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

знакоопределённой.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычисляем ее угловые миноры. Они равны $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9$, $\Delta_3 = 0$. В силу критерия Сильвестра данная форма не является знакоопределённой.

18.1.6. Определить, при каком a данная квадратичная форма

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + ax_3^2.$$

является знакоопределённой.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$. Вычисляем ее угловые миноры: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 2(a-3)$. В силу критерия Сильвестра данная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда $a > 3$.

18.1.7. Приведите уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы $5x^2 - 6xy + 5y^2$: $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ и найдём её собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Решая соответствующее квадратное уравнение, получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$. Обычным образом находим собственные векторы: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Нормируем эти векторы и составляем из них матрицу, определяющую ортогональное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

В новых переменных уравнение кривой примет вид:

$$2(x')^2 + 8(y')^2 = 8, \text{ или } \frac{(x')^2}{4} + (y')^2 = 1,$$

то есть получаем уравнение эллипса.

18.2. Задачи для самостоятельного решения

18.2.1. Приведите квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и запишите соответствующее преобразование переменных: 1) $4x_1x_2+4x_3x_4$; 2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$; 3) $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+ + 4x_2^2+x_3^2$.

18.2.2. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием и запишите это преобразование: 1) $2x_1^2+4x_1x_2- - 2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$; 2) $11x_1^2+4x_1x_2-16x_1x_3+2x_2^2+20x_2x_3+5x_3^2$; 3) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

18.2.3. Определите, является ли данная квадратичная форма знакоопределенной: 1) $8x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3+4x_3^2$; 2) $4x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3- - 2x_2x_3+x_3^2$.

18.2.4. Найти все значения параметра b, при которых квадратичная форма $-2x_1^2-6x_1x_2+6x_1x_3-5x_2^2+10x_2x_3+bx_3^2$ является знакоопределенной.

18.2.5. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования:
1) $5x^2+12xy=36$; 2) $4x^2+4\sqrt{6}xy+14y^2=9$;
3) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$; 4) $x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2-\sqrt{3}x=0$.

Ответы. **18.2.1.** 1) $2y_1^2-2y_2^2+2y_3^2-2y_4^2$, где $y_1=0{,}5(x_1+x_2)$, $y_2= =0{,}5(x_1-x_2)$, $y_3=0{,}5(x_3+x_4)$, $y_4=0{,}5(x_3-x_4)$; 2) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, где $y_1=x_1+ +x_2$, $y_2=x_2+2x_3$, $y_3=x_3$; 3) $-y_1^2+y_2^2+y_3^2$, где $y_1=x_1$, $y_2=x_1-2x_2$, $y_3= =x_1+x_3$. **18.2.2.** 1) $-y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $X=\sqrt{\dfrac{1}{30}}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1\\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2\\ \sqrt{5} & 0 & 5\end{pmatrix}Y$, 2) $9y_1^2+ +18y_2^2-9y_3^2$, $X=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}Y$, 3) $4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$, $X=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}Y$, где $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$. **18.2.3.** 1) нет; 2) нет. **18.2.4.** Отрицательно определённая при $b<-5$. **18.2.5.** 1) гипербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, где $x'=\dfrac{3x+2y}{\sqrt{13}}$, $y'=\dfrac{-2x+3y}{\sqrt{13}}$; 2) эллипс $\dfrac{x'^2}{9/16}+\dfrac{y'^2}{9/2}=1$, где $x'=\dfrac{x+\sqrt{6}y}{\sqrt{7}}$, $y'=\dfrac{-\sqrt{6}x+y}{\sqrt{7}}$; 3) парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'$, где $x'=\dfrac{x+y-3}{\sqrt{2}}$, $y'=\dfrac{x-y-1}{\sqrt{2}}$; 4) парабола $y'^2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x'$, где $x'=\dfrac{\sqrt{2}x-y}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{12\sqrt{2}}$, $y'=\dfrac{x-\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{6}$.

Список литературы

[1] Куприн А. В., Фроловичев С. М. Курс лекций по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие / МТУСИ. – М., 2016. – 88 с.

[2] Блох Э. Л., Лошинский Л. И., Турин В. Я. Основы линейной алгебры и некоторые её приложения: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1971. – 256 с.

[3] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учебник для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с.

[4] Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для вузов. – 15-е изд. – М.: Физматлит, 1998. – 222 с.

[5] Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Кожухов И. Б., Поспелов А. С., Прокофьев А. А. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1: учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. — 288 с.

[6] Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – 31-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2003. – 336 с.

Содержание

План УМД на 2018/19 уч.г.
С. 2, п. 7

Андрей Валентинович Куприн

Сергей Александрович Маненков

Сергей Михайлович Фроловичев

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Подписано в печать 02.09.2018 г. Формат 60х90 1/16.

Объём 5,2 усл.п.л. Тираж 300 экз. Изд. № 78. Заказ .

акадо
телеком

ВЫГОДНО. УДОБНО. НАДЕЖНО.

ИНТЕРНЕТ

WI-FI
СТАБИЛЬНАЯ СКОРОСТЬ
НАДЕЖНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

ТЕЛЕВИДЕНИЕ

ИНТЕРЕСНЫЕ ТЕЛЕКАНАЛЫ СО ВСЕГО МИРА НА РАЗНЫХ ЯЗЫКАХ
HDTV

WWW.AKADO.RU

ОАО «КОМКОР», 117535, РОССИЯ, МОСКВА, ВАРШАВСКОЕ ШОССЕ, 133
ЛИЦЕНЗИИ № 123058, 123059, 123056, 123057, 153190, 153191, 153189, 123060