ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра математического анализа

Р.В. Арутюнян, И.А.Гудкова, А.В.Куприн, А.Р. Лакерник, А.М. Райцин

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Москва 2016

План УМД 2015/2016 уч. г.

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Авторы: Р.В. Арутюнян, канд. физ-мат наук, доцент
И.А.Гудкова, ст. преподаватель
А.В.Куприн, доцент
А.Р. Лакерник, канд. физ-мат наук, доцент
А.М. Райцин, доктор тех. наук, профессор

Издание утверждено методическим советом ОТФ. Протокол № от 27.03.2016г.

Ответственный редактор: Арутюнян Р.В.

Рецензент: Зайцев А.А. , доцент кафедры ВТ и АОАИ МИИГАиК
Рецензент: Данилов В.Г., доктор физ. мат. наук, профессор МТУСИ

Введение

Предлагаемое учебное пособие «Практикум по высшей математике для бакалавров Дифференциальное и интегральное исчисление» направлен на получение практических навыков по математике в соответствии с первым семестром рабочей программы по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Каждый раздел практикума содержит опорный конспект, отражающий в сжатой форме основные теоретические сведения изучаемой темы, необходимые для практического применения материала. В каждый раздел включены типовые задачи для аудиторных занятий с решениями и задачи для самостоятельной работы. Структура практикума такова, что каждому его разделу соответствует тема рабочей программы, что представляется полезным, так как позволяет самостоятельно изучать материал, в случае пропуска студентом аудиторного занятия и, что отличает, дано пособие от существующих. Кроме того, практикум позволяет при уменьшении числа аудиторных часов по программе для бакалавров уделять большее внимание самостоятельной работе, разбирая типовые решения и выполняя предлагаемые задания. Задачи, предлагаемые к решению взяты из Бермана Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 20-е изд.;
М.: Наука,1985. 384с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1.

1. ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ ЗАДАНИЯ

1.1. Функция

Определение 1.1 Величину y называют функцией переменной величины x, если каждому числовому значению x, принадлежащему некоторой области его изменения D $(x \in D)$, соответствует по данному закону (правилу) единственное определенное значение величины y.

Переменную величину x называют независимой переменной (или аргументом x).

Область изменения аргумента x *называют областью определения функции* y, а множество числовых значений функции y *называют областью ее значений* и обозначают E.

Тот факт, что величина y является функцией величины x, обозначают символической записью $y = f(x)$, $x \in D$, где буква f – обозначение закона (правила), применив который к аргументу x, находят соответствующее ему значение функции y. Говорят также, что функция f отображает множество D на множество Е. Область определения функции D должна быть задана. Если этого нет, то в таких случаях подразумевают так называемую естественную область определения, т.е. множество тех значений аргумента x, при которых функция y будет существовать.

Например, пусть $y = \log_2(x-1)$. Из элементарной математики, известно, что $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Это и будет естественная область определения $D: x \in (1;\infty)$.

Если функция f отображает множество D на множество E, а функция g отображает множество E на множество G, то можно рассматривать функцию $z = g\big(f(x)\big)$, которую называют *сложной функцией* переменной z от аргумента x, или *суперпозицией* функций f и g. Она определена на D и отображает D на G.

Определения 1.2

а) Функцию $y = f(x)$ называют четной, если $f(-x) = f(x)$.

б) Функцию $y = f(x)$ называют нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ или $\big(-f(-x) = f(x)\big)$.

в) Функцию $y = f(x)$, определенную на всей числовой оси, называют периодической, если существует такое постоянное число l, что при всяком x будет верно $f(x+l) = f(x)$. Наименьшее из таких положительных значений l называют *основным периодом* T функции или просто периодом.

1.2. Основные способы задания функции

К ним относятся: табличный, описательный, графический, аналитический (явное, неявное), параметрическое задание функций. Рассмотрим два из них.

Описательный способ

При таком способе зависимость между аргументом x и функцией y выражается словесным описанием. Например, $y -$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Эту функцию обозначают $y = [x]$ и называют функция *антье* (*entier*), т.е. целый.

Так имеем: $\begin{cases} x = 2 \\ y = [2] = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4,2 \\ y = [4,2] = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1,5 \\ y = [-1,5] = -2 \end{cases}$

Параметрический способ

При таком способе и аргумент x и функция y связаны между собой через третью переменную величину – параметр t (наиболее употребительное обозначение). $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$

Здесь каждому числовому значению параметра t_0 из области его изменения $t \in [\alpha; \beta]$ ставятся в соответствие числовые значения $\begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \end{cases}$ величин x и y. Это соответствие можно рассматривать как функцию y от x (или x как функцию y). Предлагается следующий способ схематического (эскизного) построения такого графика. Пусть $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$.

1-ый шаг: строим график $x = t^2$. Это известная парабола (Рис. 1.1).

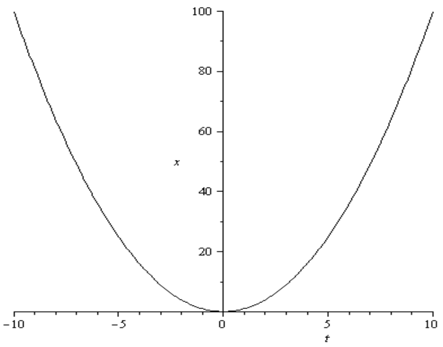


Рис. 1.1

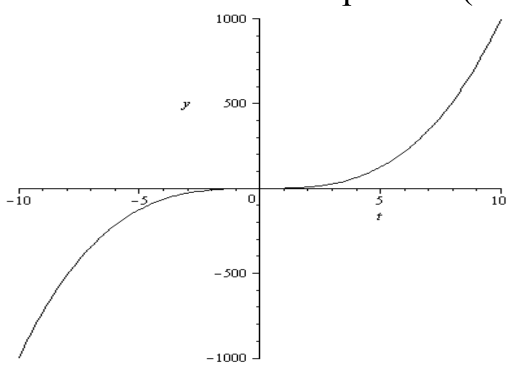


Рис. 1.2

2-ой шаг: строим график $y = t^3$. (Кубическая парабола) (Рис.1.2).

3-ий шаг: составляем таблицу изменений всех переменных

t	x	y

$(-\infty;0]$	$(\infty;0]$	$(-\infty;0]$
Возрастает	Убывает	Возрастает
$[0;\infty)$	$[0;\infty)$	$[0;\infty)$
Возрастает	Возрастает	Возрастает

Замечаем также, что $x \geq 0$ при всех значениях t, а значит, при двух противоположных значениях t (т.е. при одном и том же значении x) будем получать два противоположных значения y.

Следовательно, график зависимости y от x будет представлять так называемую двузначную функцию и будет симметричен относительно оси OX. Рассматривая только два последних столбца таблицы (тем самым изменение y от x), можно построить следующий схематический график зависимости y от x (Рис. 1.3).

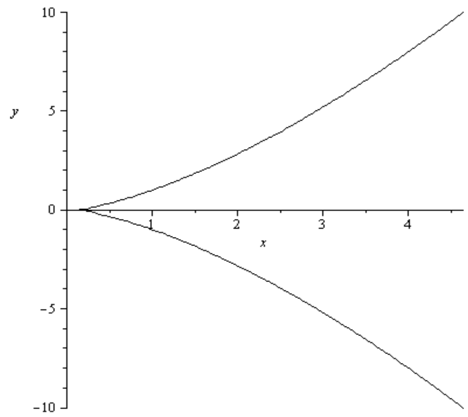
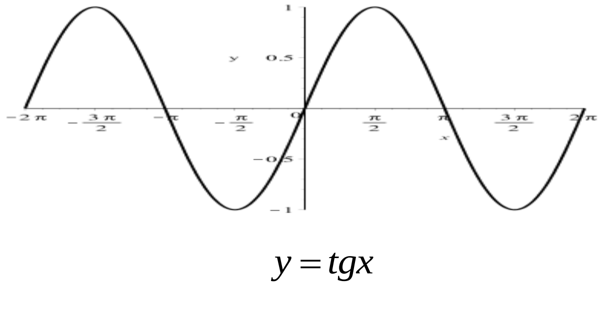


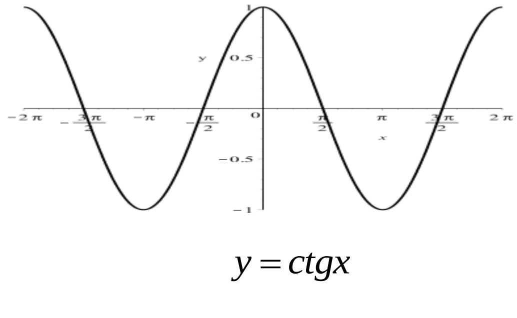
Рис. 1.3

1.3. Графики элементарных функций

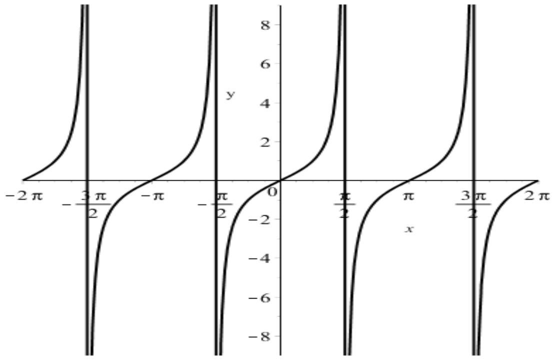
Приведем графики основных элементарных функций.

$y = \sin x \quad (-1 \leq y \leq 1)$ $\qquad$ $y = \cos x$ $(-1 \leq y \leq 1)$

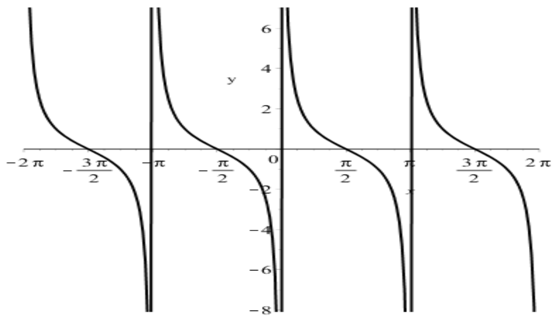




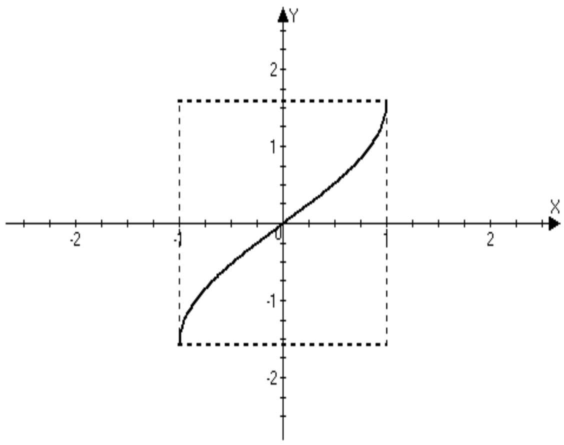
$y = tgx$ $\qquad$ $y = ctgx$



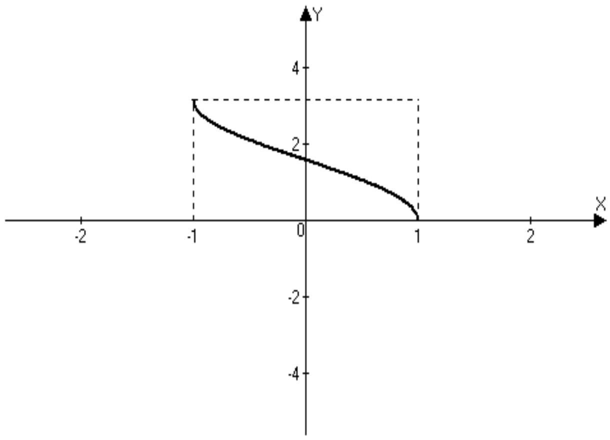
$y = \arcsin x \quad \left(-\pi / 2 \le y \le \pi / 2\right)$



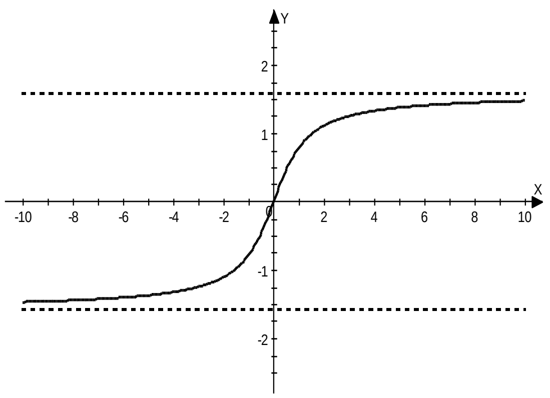
$y = \arccos x \quad \left(0 \le y \le \pi\right)$



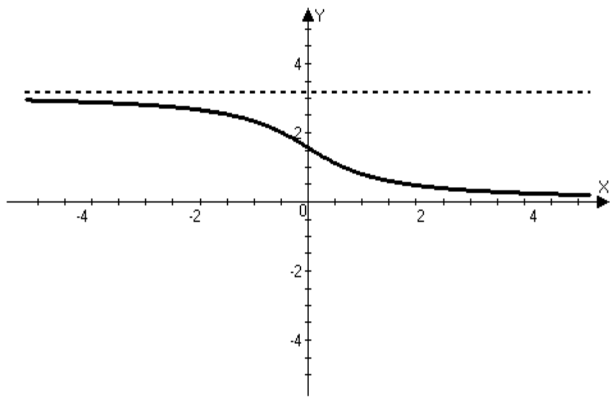
$y = arctgx \quad \left(-\pi / 2 < y < \pi / 2\right)$



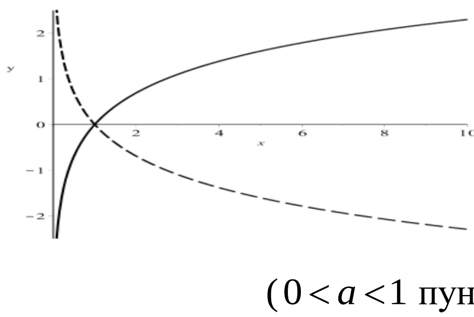
$y = arcctgx \quad \left(0 < y < \pi\right)$

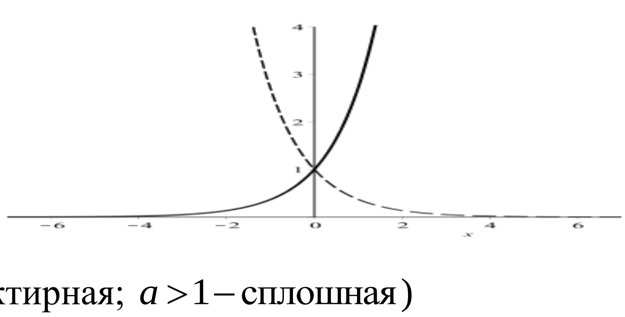


$y = \log_a x$



$y = a^x$





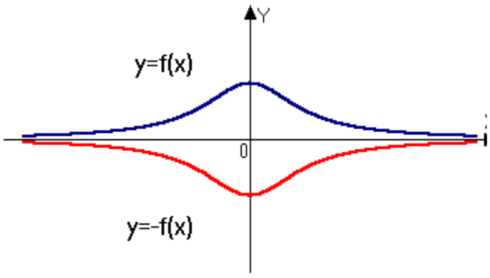
$(0 < a < 1$ пунктирная; $a > 1 -$ сплошная$)$

1.4 Основные приемы построения графиков функций.

Пусть нам задан график функции $y = f(x)$.

Вопрос 1. Как построить график функции $y = -f(x)$?

Ответ. График функции $y = -f(x)$. может быть получен из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отображением относительно оси OX (Рис.1.4).



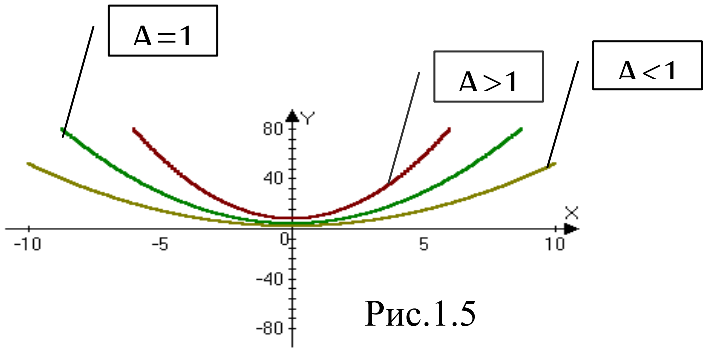


Рис.1.5

Рис.1.4

Вопрос 2. Как построить график функции $y = Af(x)$?

Ответ. График функции $y = Af(x)$. получается из графика функции $y = f(x)$ умножением всех ее значений на A (если A > 1 - растяжение в A раз, если A < 1 - сжатие в A раз по оси OY) (Рис. 1.5)

Вопрос 3. Как построить график функции $y = f(x) + A$?

Ответ. Данный график получается из графика функции $y = f(x)$ его сдвигом вдоль оси OY на A единиц вверх, если A > 0 или – вдоль оси OY на A единиц вниз, если A < 0.

Проще перемещать не график, а ось OX по правилу:

A > 0	Ось OX сдвигается вниз ↓
A < 0	Ось OX сдвигается вверх ↑

Вопрос 4. Как построить график функции $y = f(x + a)$?

Ответ. Данный график получается из графика $y = f(x)$ его сдвигом вдоль оси OX на a единиц влево, если a > 0, или – вдоль оси OX на a единиц вправо, если a < 0.

Проще перемещать не график, а ось OY по правилу:

a > 0	Ось OYсдвигается вправо →
a < 0	Ось OY сдвигается влево ←

Вопрос 5. Как построить график функции $y = |f(x)|$?

Ответ. График функции $y = f(x)$ в верхней полуплоскости остается без изменений, а часть графика, лежащая в нижней полуплоскости, симметрично отображается относительно оси OX в верхнюю полуплоскость (Рис.1.6).

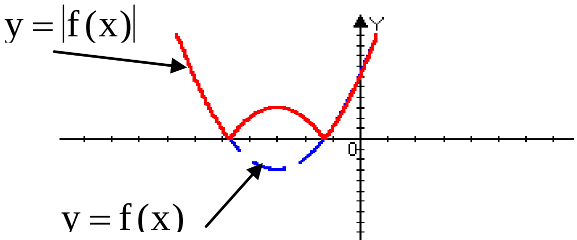


Рис.1.6

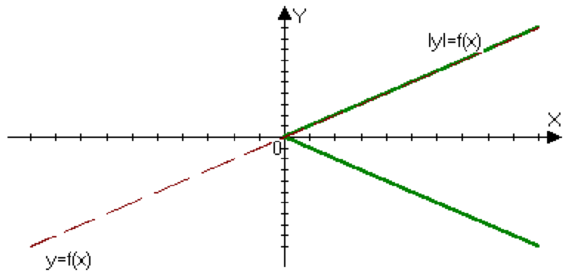


Рис. 1.7

Вопрос 6. Как построить график выражения $|y| = f(x)$?

Ответ. Строится график в верхней полуплоскости $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.

Далее строится график в нижней полуплоскости, который симметричен построенному графику в верхней полуплоскости относительно оси OX $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y = -f(x) \end{cases}$ (Рис.1.7).

Вопрос 7. Как построить график функции $y = f\left(|x|\right)$?

Ответ. График, расположенный в правой полуплоскости остается без изменений, а график - в левой полуплоскости, заменяется на график, симметричный графику в правой полуплоскости относительно оси OY (Рис.1.8).

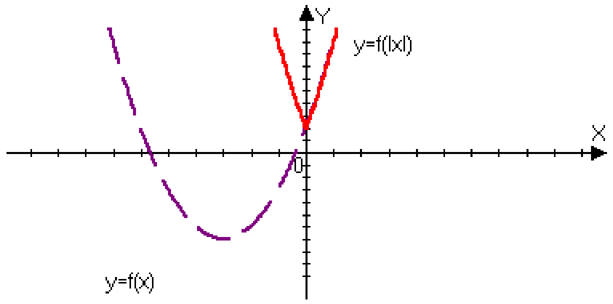


Рис.1.8

1.5. Бесконечные числовые последовательности

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n. Тогда говорят, что задана бесконечная числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, где числа (члены последовательности) отделяются друг от друга запятыми и число x_n $n = 1, 2, \ldots$ стоит в этой строке на $n -$ ом месте. Очевидно, что последовательности можно считать функциями. Их принято называть функциями целочисленного аргумента.

Аргумент x в такой функции – это номер места. Область определения – множество N (или часть его) натуральных чисел. Функция y - это число x_n, стоящее на месте n. Общепринятое функциональное равенство $y=f(x)$ в этом случае будет иметь вид $x_n=f(n)$ (формула общего члена). Обозначают последовательность $\{x_n\}$. Члены последовательности не обязательно должны только возрастать или убывать или быть связанными друг с другом, связь членов последовательности определяется только номером места, которые они занимают, т.е. аргументом. Некоторые последовательности (как и функции) можно задать только описательным способом.

Например, $\{x_n\}$: $1,4,1,5,9,2,6...$

Здесь каждый член последовательности, стоящей на месте n, совпадает с числом, стоящем на месте n после запятой в разложении числа π $(\pi=3{,}1415926...)$

Например, для последовательности 0,3,8,15,24…, нетрудно найти формулу общего члена $x_n=f(n)\Rightarrow x_n=n^2-1$.

1.6. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

1.6.1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$.

Решение. $\begin{cases}1-x>0\\ 1-x\neq 1\\ x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\ x\neq 0\\ x\geq -2\end{cases}\Rightarrow x\in[-2;0)\cup(0;1)$.

1.6.2. Определить, какие из указанных функций являются четными, нечетными или общего вида.

а) $y=f(x)=x-x^2$

Решение. $f(-x)=-x-(-x)^2=-(x+x^2);-f(-x)=x+x^2$.

Замечаем, что $f(x)\neq f(-x); f(x)\neq -f(-x)$, следовательно, заданная функция – функция общего вида.

1.6.3. Какие из указанных функций периодические

а) $y=\sin^2 x$

Решение. Найдем наименьшее (не зависящее от x) положительное действительное число T, для которого $f(x+T)=f(x)$.

Пусть $\sin^2(x+T)=\sin^2 x$.

Тогда $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0\Rightarrow\sin T\cdot\sin(2x+T)=0$.

Отсюда $\sin T=0\Rightarrow T=\pi n; n=1; T=\pi$, либо $\sin(2x+T)=0\Rightarrow 2x+T=\pi k$.

Замечаем, что только в первом случае найденное T удовлетворяет определению периода функции. Итак, $y=\sin^2 x$- периодическая функция с периодом $T=\pi$.

б) $y=\sin x^2$

Решение.

Пусть $\sin(x+T)^2=\sin x^2 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{(x+T)^2-x^2}{2}\right)\cos\left(\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\right)=0.$

Откуда следует: $\sin\left(\frac{(x+T)^2-x^2}{2}\right)=0 \Rightarrow (x+T)^2-x^2=2\pi n \Rightarrow 2xT+T^2=2\pi n$,

Либо $\cos\left(\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\right)=0 \Rightarrow (x+T)^2+x^2=\pi+2\pi k \Rightarrow 2x^2+2xT=\pi+2\pi k$,

$n,k\in Z$. Замечаем, что в обоих случаях T зависит от x, следовательно, функция не может быть периодической.

в) $y=x\cdot\sin x$

Решение. Пусть существует период T, тогда $(x+T)\cdot\cos(x+T)=x\cdot\cos x$,

при всяком x и при, следовательно, при $x=0$. Но тогда $T\cdot\cos T=0$, Так как $T\neq 0$, то $\cos T=0 \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$ (наименьший период).

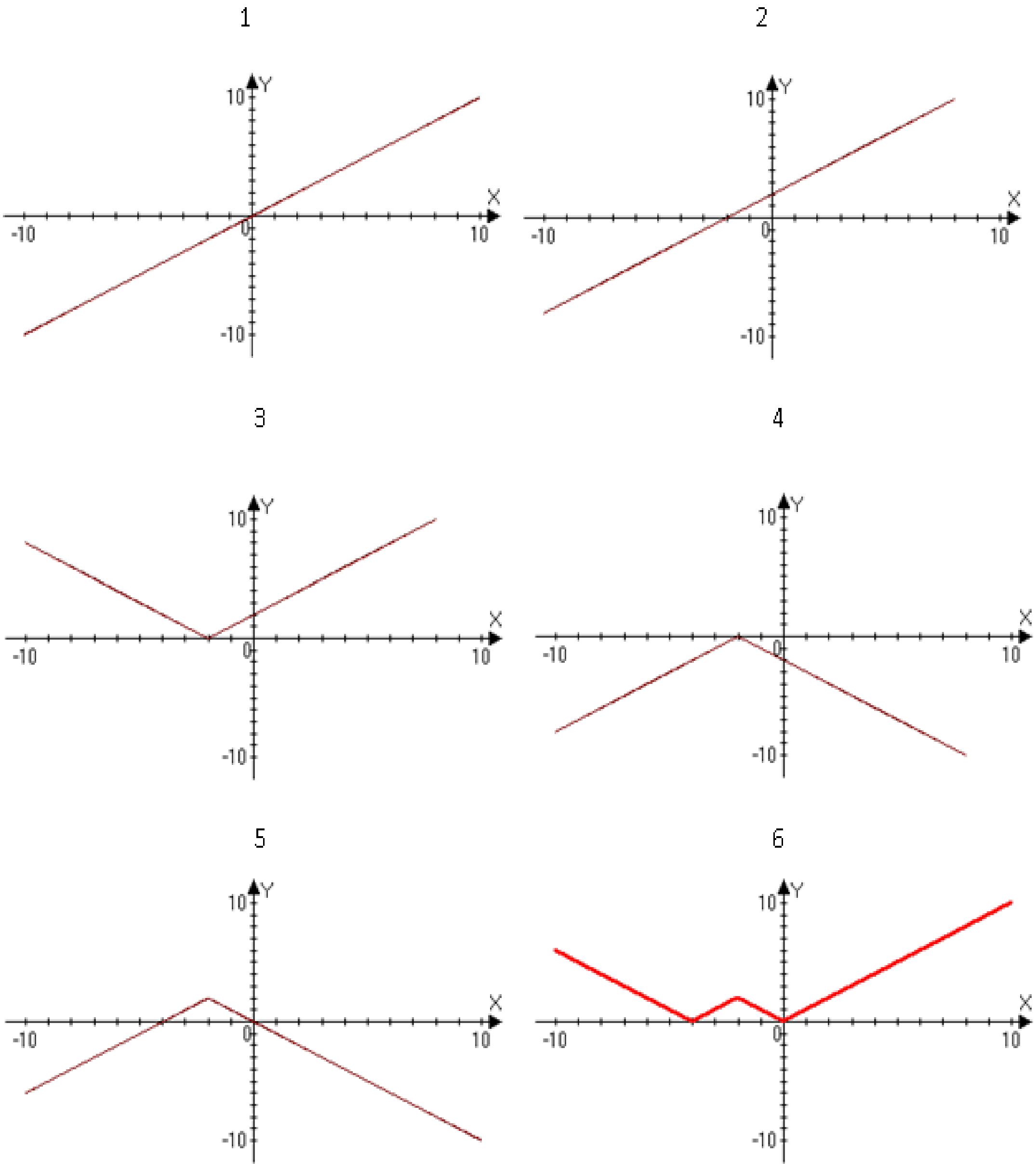
Получим, что $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=x\cdot\cos x$, данное равенство должно быть верно, для любого x, а, следовательно, и для $x=\frac{\pi}{2}$. Тогда получим выражение $\pi\cos\pi=\frac{\pi}{2}\cdot 0$, которое не является верным равенством.

Следовательно, функция не является периодической.

1.6.4. Построить график $y=\left|2-|x+2|\right|$.

Решение. Ниже последовательно представлены этапы построения данного графика:

1. $y=x$ 2. $y=x+2$ 3. $y=|x+2|$ 4. $y=-|x+2|$ 5. $y=2-|x+2|$ 6. $y=\left|2-|x+2|\right|$



Построение графика производится в соответствии с основными приемами, описанными выше.

1.6.5. Построить схематический график функции

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$

Решение. Построим графики $x = t^2 - 2t$ (Рис. 1.9) и $y = t^2 + 2t$ (Рис. 1.10)

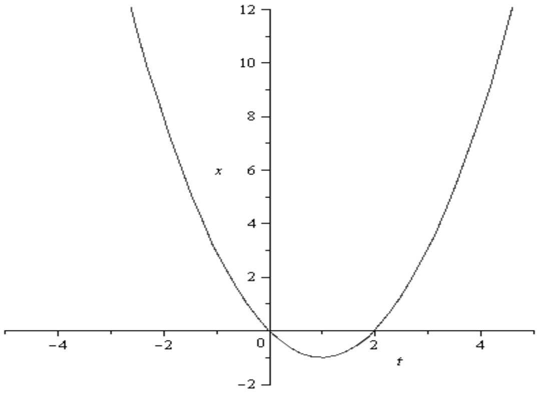


Рис. 1.9

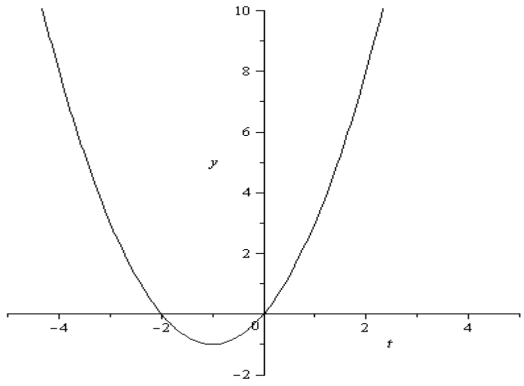


Рис. 1.10

Составим таблицу, которая позволит построить схематический график функции в координатах xoy (Рис. 1.11).

t	x	y
$(-\infty;-2]$ возрастает	$(\infty;8]$ убывает	$(\infty;0]$ убывает
$[-2;-1]$ возрастает	$[8,3]$ убывает	$[0;-1]$ убывает
$[-1;0]$ возрастает	$[3,0]$ убывает	$[-1;0]$ возрастает
$[0;1]$ возрастает	$[0;-1]$ убывает	$[0;3]$ возрастает
$[1;2]$ возрастает	$[-1;0]$ возрастает	$[3;8]$ возрастает
$[2;\infty)$ возрастает	$[0;\infty)$ возрастает	$[8;\infty)$ возрастает

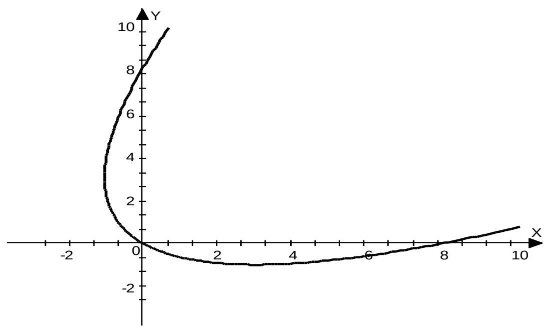


Рис. 1.11

1.6.6. Дана последовательность $0,1,0,1,0,1...$ Найти формулу $x_n = f(n)$.

Решение. Здесь ответ допускает разные формы $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ или $x_n=\left|\sin\frac{\pi}{2}(n-1)\right|$, или $x_n=\left|\cos\frac{\pi}{2}(n-2)\right|$.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.7.1. Дана сложная функция $y=\sin x,\ v=\lg y,\ u=\sqrt{1+v^2}$.

Выразить u как функцию x.

1.7.2. Найти область определения функций:

а) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$; б) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

в) $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg\left(x^3-x\right)$.

1.7.3. Какие из указанных ниже функций четны, какие нечетны, какие не являются ни четными, ни нечетными?

а) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$; б) $y=\frac{x}{a^x-1}$; в) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$.

1.7.4. Какие из нижеследующих функций будут периодическими?

а) $y=\sin(1/x)$; б) $y=1+tgx$; в) $y=5$; г) $y=[x]$.

1.7.5. Построить схематический график $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$;

1.7.6. Построить схематичный график функции $y=\left|5-\left|3+\ln|x|\right|\right|$.

1.7.7. Дана последовательность $\frac{1}{3},\frac{1}{8},\frac{1}{15},\frac{1}{24},\ldots$. Найти формулу для $x_n=f(n)$

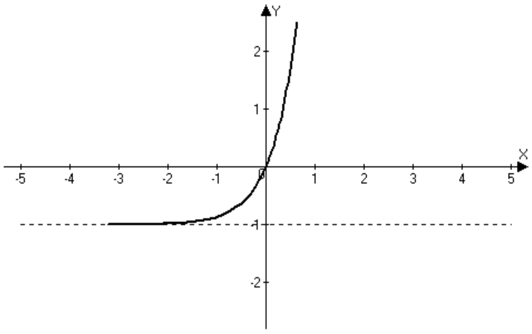
Ответы:

1.7.1. $y=\sqrt{1+\lg^2\sin x}$; 1.7.2. а) $\left[\begin{array}{l} 3/2<x<2 \\ 2<x<\infty \end{array}\right.$; б) $x=1$; в) $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 1<x<2 \\ 2<x<\infty \end{array}\right.$

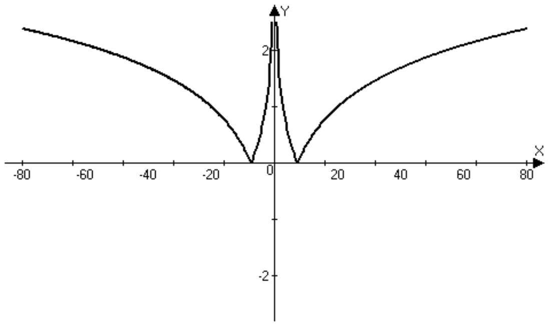
1.7.3. а) нечетная; б) ни четная, ни нечетная; в) нечетная.

1.7.4. (б и в).

1.7.5.



1.7.6.



1.7.7. $x_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$

ЗАНЯТИЕ 2

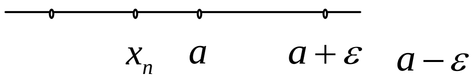
2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1 Предел последовательности

В основе математического анализа лежит важнейшее понятие предела переменной величины. Рассмотрим это понятие на простейшем случае, когда переменной величиной является функция целочисленного аргумента, т.е. числовая последовательность.

Пусть задана некоторая бесконечная числовая последовательность $\{x_n\}$. Изобразив ее члены точками на числовой прямой, в некоторых случаях можно заметить, что с возрастанием номера членов последовательности эти точки начинают все ближе и ближе «подбираться» к одной точке, изображающей некоторое постоянное число «a» (не обязательно являющееся членом последовательности), т.е. расстояние на числовой прямой между числом «a» и членами последовательности становится все меньше. Известно, что расстояние на числовой прямой между точками, изображающими числа x и a, равно $|x-a|$, $|x-a| = \begin{cases} x-a, \text{если } x \geq a \\ a-x, \text{если } x < a \end{cases}$.

Определение 2.1. Число a называют пределом бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такой номер M, зависящий от ε $\left(M = M(\varepsilon)\right)$, начиная с которого все члены x_n с номерами большими $M\left(n > M\right)$, будут удовлетворять неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ (т.е. окажутся в ε - окрестности точки a).



На языке логико-математической символики это определение записывают:

$$x_n = f(n), n \in N; \lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M\left(M = M(\varepsilon)\right): n > M \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения и соотношения:

А) $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ (n факториал); например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$;

$(n+1)! = n!(n+1)$;

Б) Формула бинома Ньютона:

$\forall a, b \in R, \forall n \in N,$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... C_n^i a^{n-i} b^i + ... + C_n^n b^n$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};\ \text{например, } C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$$

С) Неравенство Бернулли:

из формулы бинома Ньютона следует: $(1+b)^n \geq 1 + nb$.

2.2 Предел функции

Несмотря на тот факт, что последовательность – частный случай функции (функция целочисленного аргумента), определение предела функции в общем смысле будет несколько другим, так как аргумент x у функции $y = f(x)$ может стремиться к любому числу (тогда как у последовательности n стремится только к ∞). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a,кроме, быть может самой точки a.

Определение 2.2. Число b называют *пределом* функции $y=f(x)$ при $x \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такое число $\delta(\delta=\delta(\varepsilon))>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.
Записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon): 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$,
т.е. $x\in(a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x)\in(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, это геометрически означает, что для аргументов, попавших в $\delta-$окрестность точки a, значения функции попадают в $\varepsilon-$окрестность точки b.

Рассмотрим понятия *односторонних пределов* функции.

Определение 2.3. Если $y=f(x)$ стремится к пределу b при $x\to a$ только с одной стороны (справа $(x>a)$ или слева $(x<a)$), то b называют пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ справа или слева и обозначают:
$b=f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $b=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Существует понятие о *бесконечном пределе* (бесконечно большая функция), хотя это и означает отсутствие предела как числа.

Определение 2.4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, если для любого числа $M>0$ можно указать такое число $\delta(\delta=\delta(M))>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta=\delta(M): 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$

Приведите в качестве иллюстраций к ниже приведенным равенствам графики функций $f(x)$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty; \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

Приведенные выше определения пределов не являются рабочими правилами для их отыскания. Поэтому, рекомендуется использовать следующие основные теоремы о пределах переменных величин, а также известные пределы, их следствия и некоторые распространенные приемы алгебраических преобразований, например, освобождение от иррациональности в знаменателе или в числителе дроби и др.

Основные теоремы о пределах

Теорема 2.1 $\lim\limits_{x\to a} c = c, c - const$,

Теорема 2.2 $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

Теорема 2.3 $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

Теорема 2.4 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

При этом предполагается, что пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существуют.

Теорема 2.5 (о пределе «зажатой последовательности»). Если члены последовательностей $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, удовлетворяют неравенствам $x_n \le y_n \le z_n$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится к числу a.

Таблица известных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $e \approx 2,71828...$ (второй замечательный предел).

Следствия из первого и второго замечательных пределов (3 – 6)

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}tgx}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{a^x} = 0 \ (a>1)$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + ... + a_{p-1}x + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + ... + b_{q-1}x + b_q} = \begin{cases} 0, если\ p<q \\ \infty, если\ \mathrm{p}>\mathrm{q} \\ \dfrac{a_0}{b_0}, если\ p=q \end{cases}$$

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. 11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x} = \infty; \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x} = -\infty$.

Условные, но вполне понятные символические выражения $\frac{\to 0}{\to 0};\frac{\to\infty}{\to\infty};(\to 1)^{\to\infty};(\to\infty-\to\infty);(\to 0\cdot\to\infty);\left(\to 0^{\to 0}\right);(\to\infty)^{\to 0}$ - обозначают кратко $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};1^{\infty};(\infty-\infty);(0\cdot\infty);0^0;\infty^0$ и называют неопределенностями.

Неопределенности
$\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};(\infty-\infty);(0\cdot\infty);1^{\infty};0^0;\infty^0$
Для раскрытия неопределенности типа 1^{∞}
12. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=1;\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\right)$
имеет место известное соотношение $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$.

Далее рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей (т.е. доведение их до вполне определенного ответа).

2.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

2.3.1. Показать, что последовательность $-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{9},\frac{1}{16},\ldots\frac{(-1)^n}{n^2},\ldots$ имеет своим пределом нуль, определив для каждого $\varepsilon>0$ число $M=M(\varepsilon)$, такое, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при всех $n>M(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	$0{,}25$	$0{,}01$	$0{,}0025$
$M(\varepsilon)$			

Решение. Зададимся некоторым малым положительным числом ε (тем самым зададим окрестность точки 0) и определим, с какого номера все члены последовательности окажутся в ε-окрестности точки 0.

Имеем $|x_n-0|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Rightarrow n^2>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Объявим искомым номером M ближайшее натуральное число, лежащее правее числа $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (или совпадающее с ним, если оно окажется целым). Тогда при

$n \geq M$, т.е. при $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ будет выполняться неравенство $\left| \dfrac{(-1)^n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$, следовательно, по определению $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

ε	$0,25$	$0,01$	$0,0025$
$M(\varepsilon)$	2	10	20

2.3.2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3} \right)$.

Решение. Применяя теорему 2.2 и 2.4 о пределах и предел 9 из таблицы известных пределов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7} - \lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0.$$

2.3.3. Показать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Решение. Из соотношений $0 < x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Видно, что последовательность зажата последовательностями, пределы которых равны нулю при $n \to \infty$, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = 0$.

2.3.4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$.

Решение. Данную задачу можно решить и с помощью основных теорем о пределах. Имеем неопределенность типа $\infty - \infty$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$, применяя теорему 2.4, и предел 10 из таблицы известных пределов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)} = 0.$$

2.3.5. Показать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

Решение. При $q=0$ это очевидно. Пусть $0<|q|<1$. Исходя из неравенства Бернулли (свойство С, раздел 2.2), запишем

$\dfrac{1}{|q|^n}=\left(1+\left(\dfrac{1}{|q|}-1\right)\right)^n \geq 1+n\left(\dfrac{1}{|q|}-1\right)>n\left(\dfrac{1}{|q|}-1\right)$, откуда следует, что

$$\left|q^n-0\right|=|q|^n<\frac{1}{n\left(\dfrac{1}{|q|}-1\right)}<\varepsilon \Rightarrow\ n>\frac{1}{\varepsilon\left(1/|q|-1\right)}=M(\varepsilon).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

2.3.6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$. **Решение.** Пусть $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$, тогда

$0<x_n<\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\ldots\dfrac{2}{n}\leq 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$ на основании примера 2.3.5.

Таким образом, последовательность зажата последовательностями, пределы которых при $n\to\infty$ равны нулю. По теореме 2.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

2.3.7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$. **Решение.** Из оценки $0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\ldots\dfrac{n}{n}\leq\dfrac{1}{n}$,

верной для любого $n\in N$, следует, что последовательность $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ зажата последовательностями, имеющими предел ноль при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

2.3.8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n^k, где $k-$наибольший показатель степени, из показателей степеней числителя и знаменателя. В данном примере $k=1$ $\left(\sqrt{n^3+2n-1}\sim n\right)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n}}=1$.

2.3.9. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. Применяя свойство факториала $(n+1)!=n!(n+1)$, запишем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}=0$$

2.3.10. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Решение. В числителе выражения стоит арифметическая прогрессия, сумма которой равна $1+2+3+...+n=n(n+1)/2$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(\dfrac{n+1}{n+2}-1\right)=$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=-\frac{1}{2}.$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

2.4.1. Доказать, что $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ стремится к 1 при $n\to\infty$. Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и 1 не превышает 10^{-4}.

Вычислить пределы последовательностей:

2.4.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. 2.4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. 2.4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

2.4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$. 2.4.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

2.4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}+\sqrt{n^3-2n^2+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$. 2.4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

2.4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$. 2.4.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$. 2.4.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

2.4.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{1/n}-1}{2^{1/n}+1}$.

Ответы: 2.4.2. ∞; 2.4.3. $15/17$; 2.4.4. 1; 2.4.5. 0; 2.4.6. 4; 2.4.7. 1; 2.4.8. 0;

2.4.9. 1; 2.4.10. $4/3$; 2.4.11. 1; 2.4.12. 0.

ЗАНЯТИЕ 3.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

3.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

3.1.1. Доказать, что $f(x)=3x-2$ в точке $x=1$ имеет предел, равный 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Решение. $\forall \varepsilon>0$ $|3x-2-1|=|3(x-1)|=3|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon/3$, если взять $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, то из $|x-1|<\delta \Rightarrow |(3x-2)-1|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

3.1.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x+4}$.

Решение. Пользуясь теоремами о пределах для нахождения данного предела достаточно подставить в функцию предельное значение аргумента: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x+4}=\dfrac{5\cdot 1+3}{2\cdot 1+4}=\dfrac{4}{3}$.

3.1.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}$. **Решение**. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5\cdot 1+3}{1-1}=\left|\dfrac{8}{0}\right|=\infty$

Предел отношения многочленов $P_n(x)$, $Q_m(x)$, содержащих неопределенность.

3.1.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Следует разделить оба многочлена на $(x-3)$. Тогда, получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ следует в числителе и знаменателе вынести и сократить наименьшую степень, а в случае $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наибольшую.

Аналогичный прием применяется и при вычислении пределов некоторых иррациональных выражений.

3.1.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-5}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которую можно раскрыть, вынося в числителе и в знаменателе x^3 или, используя предел 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-2/x^2+3/x^3\right)}{x^3\left(1/x-5/x^3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^2+3/x^3}{1/x-5/x^3}=\infty.$$

3.1.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^7+2x^3+x}{x^5+x^2+2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^7+2x^3+x}{x^5+x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^6+2x^2+1}{x^4+x+2}=\dfrac{1}{2}$.

3.1.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

Решение. Приводя выражение к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, далее воспользуемся пределом 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\left\{\begin{matrix}\text{степень числителя } p=1\\ \text{степень знаменателя } q=2\end{matrix}\right\}=0.$$

Предел отношения некоторых иррациональных выражений

3.1.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(2x\sqrt{x}+x+1\right)}=1$.

3.1.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

3.1.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию также получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

В этом случае можно ее раскрыть:

а) умножением числителя и знаменателя на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2};$$

б) заменой переменной $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x=t^2-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}.$$

Применение первого замечательного предела

3.1.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение. Данную задачу можно свести к первому замечательному пределу, если сделать замену $y=x-\pi\Rightarrow x=y+\pi$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{(2y)\sin 3y}{(3y)\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{2y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}.$$

3.1.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.

Решение. Имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$. Можно преобразовать данное выражение в неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и свести задачу к первому замечательному пределу. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}$. Сделаем замену $y=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{tgy}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim\limits_{y\to0}\cos y=1.$

Применение второго замечательного предела

3.1.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

Решение. Определяем, что этот предел содержит неопределенность типа 1^∞. ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)=1;\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$). Воспользуемся формулой (12) таблицы неопределенностей.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}\right)}=e^2.$$

Можно также решить данный пример, сведя его к второму замечательному пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-2}{x^2-4x+2}\right)^x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^2$$

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций:

3.2.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. 3.2.2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. 3.2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

3.2.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgkx}{x}$. 3.2.5. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. 3.2.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

3.2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tgx}}$. 3.2.8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

3.2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+a\sin bx\right)^{1/x}$.3.2.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\mathrm{x}}$. 3.2.11. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\mathrm{x}^2/\pi^2}$.

3.2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{\mathrm{x}^4}$. 3.2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(a+x\right)-\ln a}{x}$.

Ответы: 3.2.1. $-2/5$; 3.2.2. -1; 3.2.3. $1/4$; 3.2.4. k; 3.2.5. $\sqrt{2}/2$; 3.2.6. $\sqrt{2}/8$; 3.2.7. 1; 3.2.8. 0, если $x\to\infty$; ∞,если $x\to-\infty$. 3.2.9. e^{ab}; 3.2.10. $a-b$; 3.2.11. $\pi/2$; 3.2.12. $1/8$; 3.2.13. $1/a$.

ЗАНЯТИЕ 4.
4. СРАВНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН
4.1. Бесконечно малые функции и их сравнение

Определение 4.1. Функцию $\alpha\left(x\right)$ называют бесконечно малой при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha\left(x\right)=0 \text{ или } \lim_{x\to\infty}\alpha\left(x\right)=0.$$

Если $\lim\limits_{a\to 0}\alpha\left(x\right)=0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\left|x-a\right|<\delta$, будет удовлетворяться неравенство $\left|\alpha\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

Например, функция $\alpha\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\alpha\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)^2=0$.

Функция $\alpha\left(x\right)=1/x$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0$.

4.1.1.Основные свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций – функция бесконечно малая.

2. Произведение ограниченной функции (или константы) на функцию бесконечно малую - функция бесконечно малая.

3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций - функция бесконечно малая.

4.1.2. Сравнение бесконечно малых функций

Заметим, что частное двух бесконечно малых функций, может быть какой угодно функцией, даже – бесконечно большой.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые (б.м.) функции при $x \to a$.

Определение 4.1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ - б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ называют б.м. более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=q\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м. одного порядка малости.

Если $q=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* (или равносильными) б.м. и обозначают знаком $\sim$, т.е. $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Определение 4.4. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-$ не существует (конечный или бесконечный), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми б.м.

Пример. $\alpha(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x)=x$- б.м. при $x\to 0$. Но их отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $x\to 0$.

В этом случае $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Определение 4.5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=q\neq 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ - б.м. $k-$го порядка малости относительно $\beta(x)$.

4.1.3. Связь бесконечно малых функций с функциями бесконечно большими

Теорема 4.1. Если функция $f(x)$- бесконечно-большая при $x\to a$, то функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ при $x\to a$ - будет бесконечно малой.

Теорема 4.2. Если $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x\to a$ и в некоторой окрестности $(a-\delta,a+\delta)$ точки a(кроме, быть может, самой точки a) $\alpha(x)\neq 0$, то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}-$бесконечно большая при $x\to a$.

4.1.4. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях

Теорема 4.3. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x), \beta_1(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to a$ и $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$; $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Теорема 4.4. Для того, чтобы две б.м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x \to a$ была бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем каждая из них.

Заметим, что теорема 4.3. имеет место не только для б.м. функций. Так, при вычислении предела частного двух функций полезна следующая обобщающая теорема

Теорема 4.5. Если при $x \to a$ и $f(x) \sim f_1(x)$; $g(x) \sim g_1(x)$, и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (конечный или бесконечный) то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Таблица наиболее известных эквивалентных б.м. функций при $x \to 0$

$\sin x \sim x;\ \ tgx \sim x;\ \ arc\sin x \sim x;\ \ arctgx \sim x;$

$\ln(1+x) \sim x;\ \ a^x - 1 \sim x\ln a;\ \ e^x - 1 \sim x;$

$(1+x)^m - 1 \sim mx;\ \ \cos(x) \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$

4.1.5. О символе o (символ Ландау)

Пусть $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b), содержащем точку a и $f(x) \neq 0$ в точках этого интервала, кроме может быть самой точки a. Тогда под символом $o(f(x))$, $x \to a$ (читают: «о малое от $f(x)$ при $x \to a$») понимают такую функцию, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. Очевидно, таких функций будет не одна. Например, это будет и $(x-a)f(x)$ и $(x-a)^2 f(x)$ при $x \to a$ и т.д. Таким образом, $o(f(x))$ при $x \to a$ это собирательный образ множества всех функций, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. В частном случае, когда $f(x) = x$, символ $o(x)$ выражает множество б.м. функций более высокого порядка малости при $x \to a$ по сравнению с x.

Пользуясь таблицей эквивалентных б.м. функций и теоремой 4.4, можно получить полезные формулы, справедливые при $x \to 0$

$$\sin(x)=x+o(x);\quad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2);$$
$$tg(x)=x+o(x);\quad e^x=1+x+o(x);$$
$$\ln(1+x)=x+o(x);\ (1+x)^m=1+mx+o(x).$$

Эти формулы называют асимптотическими, поскольку эти равенства имеют место лишь при $x\to 0$.

4.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

4.2.1. Доказать утверждение $\sin x^3=o(x^2)$ при $x\to 0$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=0$, ч.т.д.

4.2.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^3 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{(3x+o(3x))^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{6o(3x)}{x}+\frac{o^2(3x)}{x^2}\right)}=\frac{1}{9}$.

Обратите внимание, что в случае разности бесконечно малых, отдельные слагаемые менять на эквивалентные при вычислении предела отношения в общем случае нельзя. Такая замена может привести к неправильному результату.

4.2.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Решение. Если использовать эквивалентности из таблицы известных эквивалентностей, то при $x\to 0$, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$, что неправильно.

Если записать $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+o_1(x))-(x+o_2(x))}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o_1(x)-o_2(x)}{x^3}$, то видно, что последний предел не обязательно равен нулю, так как числитель не является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^3.

На самом деле $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2/2)}{x^3}=\frac{1}{2}$.

4.2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\sin 3x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1/2+o\left(x^2\right)/x^2\right)}{x\left(3+o\left(x\right)/x\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1/2+o\left(x^2\right)/x^2\right)}{\left(3+o\left(x\right)/x\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}}_{0}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1/2+o\left(x^2\right)/x^2}{3+o\left(x\right)/x}}_{1/6}=0.$$

4.2.5. Определить порядок относительно x функции $f\left(x\right)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$, бесконечно малой при $x\to 0$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1-2\sqrt{x}-x}{x^k\left(\sqrt{1+2x}+1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-2\sqrt{x}}{x^k}=$$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{x^k}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x^k}=-1$ при $k=\dfrac{1}{2}$; в других случаях предел равен 0 или ∞.

Таким образом, порядок малости функции относительно x равен $1/2$.

4.2.6. Исходя из эквивалентности при $x\to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\dfrac{1}{2}x$, вычислить приближенно $\sqrt{1632}$.

Решение. Представим $\sqrt{1632}=\sqrt{1600+32}=40\sqrt{1+\dfrac{32}{1600}}$.

Так как $\sqrt{1+x}\sim 1+\dfrac{x}{2}$, $40\sqrt{1+\dfrac{32}{1600}}\approx 40\left(1+\dfrac{16}{1600}\right)=40\left(1+0.01\right)=40{,}4$.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.3.1. Исходя из эквивалентности при $x\to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\dfrac{x}{2}$, вычислить приближенно: а) $\sqrt{105}$; б) $\sqrt{0{,}021}$.

Вычислить пределы функций:

4.3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 4.3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 4.3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt[3]{\left(1-\cos x\right)^2}}$;

4.3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$. 4.3.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; 4.3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Определить порядок относительно x данной функции, бесконечно малой при $x\to 0$

4.3.8. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$; 4.3.9. $\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right)$; 4.3.10 $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$; 4.3.11. $e^{\sin x}-1$;

4.3.12. $\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Ответы: 4.3.1. а) 10,25; б) 0,145; 4.3.2. $1/2$; 4.3.3. $3/4$; 4.3.4. ∞; 4.3.5. -1;

4.3.6. $\sqrt{e}$; 4.3.7. $3/2$; 4.3.8. $1/3$; 4.3.9. 1; 4.3.10. 2; 4.3.11. 1; 4.3.12. 1.

ЗАНЯТИЕ 5.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

5.1 Непрерывность функции в точке

Определение 5.1.1. Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $y=f\left(x\right)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1. существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
2. этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

При определении предела подчёркивалось, что $f\left(x\right)$ может быть не определена в точке x_0, а если она определена в этой точке, то значение $f\left(x_0\right)$ никак не участвует в определении предела. При определении непрерывности принципиально, что $f\left(x_0\right)$ существует, и это значение должно быть равно $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Определение 5.1.2. Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f\left(x\right)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall\varepsilon>0$ существует положительное число δ, такое что для всех x из $\delta-$ окрестности точки x_0 (т.е. $\left|x-x_0\right|<\delta$) выполняется неравенство

$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$.

Здесь учитывается, что значение предела должно быть равно $f(x_0)$, поэтому, по сравнению с определением предела, снято условие проколотости $\delta-$окрестности $0 < |x - x_0|$.

Дадим ещё одно (равносильное предыдущим) определение в терминах приращений. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, эту величину будем называть приращением аргумента. Так как $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$, т.е. Δx – б.м. (бесконечно малая) величина. Обозначим $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, эту величину будем называть приращением функции, так как $|\Delta y|$ должно быть (при достаточно малых $|\Delta x|$) меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$, то $\Delta y -$ тоже б.м. величина, поэтому

Определение 5.1.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Ещё одно равносильное определение на языке последовательностей:

Определение 5.1.4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек области определения, сходящейся к $\boldsymbol{x}_0$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$.

Определение 5.1.5. Функция $f(x)$ не являющаяся непрерывной в точке x_0, называется разрывной в этой точке.

Определение 5.1.6. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.2. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 5.2.1. (О непрерывности суммы, произведения, частного). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (частное - в случае, когда

$g(x_0) \neq 0$).

Теорема 5.2.2. (О переходе к пределу под знаком непрерывной функции). Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t)$, равный x_0. Пусть точка $x_0 = \varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$, и $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Тогда существует $\lim\limits_{t \to t_0} f(\varphi(t))$, и $\lim\limits_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = f\left(\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t)\right) = f(x_0)$.

Теорема 5.2.3. (О непрерывности суперпозиции непрерывных функций). Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке t_0. Пусть точка $x_0 = \varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.

Односторонняя непрерывность

Определение 5.2.4. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$ слева, если $\exists f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 5.2.4. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$ справа, если $\exists f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 5.2.4. Если одно из этих условий не выполнено, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв, соответственно, слева или справа.

Если функция определена на отрезке $[a,b]$, то в левом конце отрезка $x_0 = a$ можно говорить только о непрерывности справа, в правом конце $(x_0 = b)-$ о непрерывности слева. Для внутренней точки отрезка функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа (доказать самостоятельно).

5.3. Непрерывность и разрывы монотонной функции.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 5.3.1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна на этом отрезке. Тогда $f(x)$ может иметь на этом отрезке только точки разрыва первого рода.

Следствие 1. Если множество значений монотонно возрастающей на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ полностью заполняет отрезок $[f(a), f(b)]$ (т.е. для $\forall y \in [f(a), f(b)]$ $\exists x \in [a,b]$ такой, что $f(x) = y$), то эта функция непрерывна, легко доказать теперь от противного. Если в точке x_0 имеется скачок, то $f(x)$ не может принимать значений, попадающих в интервал $(f(x_0 - 0), f(x_0))$.

Теорема 5.3.2. (Об обращении функции в нуль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения **разных** знаков, то найдётся точка $c \in [a,b]$, в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$, $a < c < b$.

Теорема 5.3.3. (О промежуточном значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, и в двух точках a и b $(a < b)$ принимает **неравные** значения $A = f(a) \neq B = f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдётся точка $c \in [a,b]$, в которой значение функции равно C: $f(c) = C$.

Теорема 5.3.4. (Об ограниченности непрерывной функции на отрезке). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5.3.5. (О достижении минимального и максимального значений). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои нижнюю и верхнюю грани.

Следствие 2. Из предыдущих теорем следует: множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции заполняет весь отрезок $[m,M]$, где

$M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\} = \max\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, а $m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\} = \min\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$.

Теорема 5.3.6. (О непрерывности обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$. Тогда на отрезке $[m,M]$ существует обратная функция $x = g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) на $[m,M]$ и непрерывная.

5.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

5.4.1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x^2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

Решение. Функция непрерывна при $0 \le x < 1$ и при $1 < x \le 2$, а так как $f(1-0) = f(1+0) = f(0) = 1$, то функция непрерывна и при $x = 1 \Rightarrow$ Функция непрерывна на всей числовой оси.

5.4.2. Построить пример функции, определенной для всех значений x и непрерывной только при $x = 0$.

Решение. Функция $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x - \text{рационально}, \\ -x, \text{ если } x - \text{иррационально} \end{cases}$

будет непрерывна при $x = 0$ и разрывна во всех остальных точках, т.к. $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, следовательно функция непрерывна при $x = 0$.

Пусть $x = x_0$ – любое рациональное число. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$, если x стремясь к x_0 принимает рациональные значения, и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -x_0$, если x стремясь к x_0 принимает иррациональные значения. Но т.к. $x_0 \ne -x_0$, то функция разрывна в точке x_0 $\Rightarrow$

функция $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x - \text{рационально}, \\ -x, \text{ если } x - \text{иррационально} \end{cases}$ непрерывна только при $x = 0$.

5.4.3. При каком значении числа a функция $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \ge 0 \end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна при $x < 0$ и при $x > 0$, а так как $f(+0) = 1$, $f(-0) = a$, $f(0) = a$, то функция $f(x)$ будет непрерывной и в точке $x = 0$, если $a = 1$.

5.4.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}0,2\cdot\left(2x^2+3\right), & -\infty<x\le 1,\\ 6-5x, & 1<x<3\\ x-3\ , & 3\le x<\infty\end{cases}$$

Решение. На интервалах $(-\infty,1)$, $(1,3)$ и $(3,\infty)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны только в точках $x=1$ и $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. В точке $x=1$ имеем: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right)=1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(6-5x)=1$, поэтому в точке $x=0$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x=3$: $f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0}(6-5x)=-9$ и $f(3+0)=\lim\limits_{x\to 3+0}(x-3)=0$, поэтому в точке $x=3$ функция терпит разрыв первого рода (односторонние пределы в точке $x=3$ конечны, но не равны между собой). Скачок функции в точке разрыва $x=3$ равен $f(3+0)-f(3-0)=0-(-9)=9$.

5.4.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases}4\cdot 3^x, & x<0,\\ 2a+x, & x\ge 0\end{cases}$

Решение. Так как $f(-0)=4$, а $f(+0)=2a$, то равенство

$f(-0)=f(+0)=f(0)$ будет выполнено, если положить $2a=4$, т.е. $a=2$.

5.4.6. При каком значении числа *a* функция $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\ge 5,\\ x^2-3x, & x<5\end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Областью определения функции является все множество действительных чисел, причем по обе стороны точки $x = 5$ функция является элементарной, то есть непрерывной. Для обеспечения непрерывности в точке $x = 5$ поставим условие $5+a=25-15\Rightarrow a=5$.

5.4.7. Каким числом можно доопределить функцию $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. Найдем предел данной функции в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\Rightarrow$

если принять $f(0) = 3$, функция станет непрерывной точке $x = 0$.

5.4.8. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = x\sin\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. При $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow x - б.м.$, $\left|\sin\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \sin\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}$ – ограниченная функция.

Как известно, произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}\right) = 0$, то есть предел существует и конечен. Поэтому можно доопределить функцию так: $f(0) = 0$.

5.4.9. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = arcctg\dfrac{3}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение.

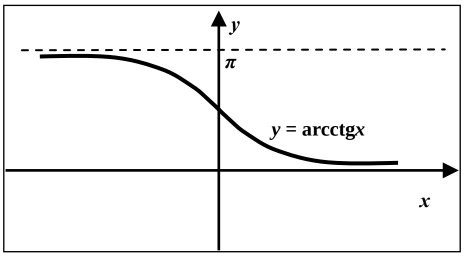


Рис. 5.1

Найдем односторонние пределы данной функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to -\infty} arcctgt = \pi \quad \left(t = \frac{3}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to +0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to +\infty} arcctgt = 0 \ne \lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x}.$$

Следовательно, предел данной функции в точке $x = 0$ в обычном смысле не существует, поэтому добиться ее непрерывности в этой точке невозможно.

5.4.10. Определить значения параметров s и t, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ x^2 + sx + t, & |x| > 1 \end{cases}$$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если предел справа равен пределу слева и равен значению функции в этой точке:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$. Данная функция неэлементарная и на трех интервалах меняет свое аналитическое выражение: при $|x|\le 1$ $(-1\le x\le 1)$ задана функция вида x, на интервалах $|x|>1$ ($x>1$ и $x<-1$) функция имеет вид x^2+sx+t (см. схему на рис. 5.1).

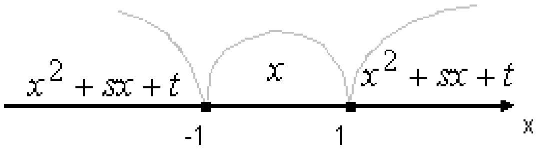


Рис. 5.2

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to -1-0}\left(x^2+sx+t\right)=1-s+t$,

$$\lim_{x\to -1+0} x=-1,\ \lim_{x\to 1-0} x=1,\ \lim_{x\to 1+0}\left(x^2+sx+t\right)=1+s+t.$$

Так как для непрерывной функции выполняются условия

$$\lim_{x\to -1-0}\left(x^2+sx+t\right)=\lim_{x\to -1-0} x \text{ и } \lim_{x\to 1+0}\left(x^2+sx+t\right)=\lim_{x\to 1+0} x,$$

то, приравнивая значения односторонних пределов, получим систему

$\begin{cases}1-s+t=-1,\\ 1+s+t=1,\end{cases}$ решив которую получим $s=1,\ t=-1$.

5.5. Задачи для самостоятельного решения

5.5.1. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3}$ не определена при $x=3$. Как следует доопределить функцию в точке $x=3$, чтобы она стала непрерывной?

5.5.2. Функция $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-1}$ не определена при $x=1$. Можно ли доопределить функцию в точке $x=1$ так, чтобы она стала непрерывной?

5.5.3. Подобрать числа a и b такие, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной, если:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & 0\le x\le 1,\\ 2+bx, & 1<x\le 2\end{cases}$, б) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\le 0,\\ ax+b, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

5.5.4. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Определить значение $f(0)$ так, чтобы функция стала непрерывной при $x=0$, если:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, б) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{2tgx}$

Ответы. 5.5.1. $y(3)=6$. **5.5.2.** нет. **5.5.3.** а) $a=0$, $b=-1$. б) $a=2$, $b=-1$ **5.5.4.** а) $f(0)=3/2$. б) $f(0)=1/2$.

ЗАНЯТИЕ 6.

6. ТОЧКИ РАЗРЫВА

6.1.Точки разрыва и их классификация

Определение 6.1.1. Точка разрыва x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и они равны между собой (т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$).

Определение 6.1.2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода (иногда применяется термин «скачок»), если существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, но они не равны между собой.

Определение 6.1.3. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует (в частности, он может быть бесконечным).

6.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

6.2.1. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

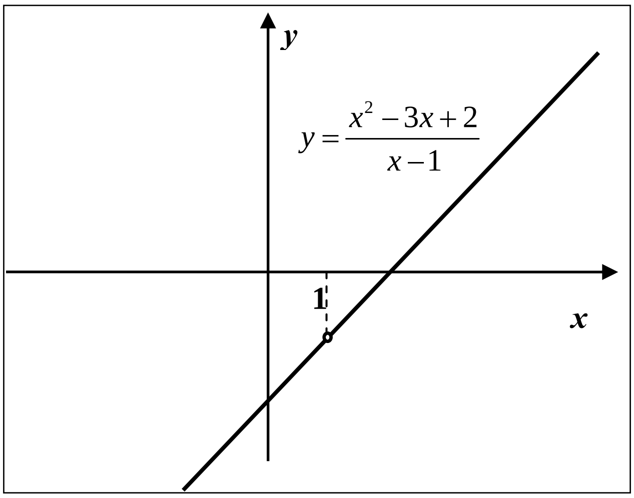


Рис. 6.1

Решение. Функция не определена при $x=1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y=x-2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=1-2=-1,$$

то есть $x=1$ – устранимая особенность.

6.2.2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{|x|}{x}$.

Решение.

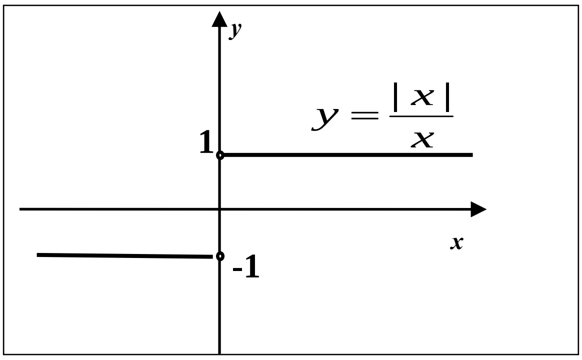


Рис. 6.2

Решение. Из определения модуля следует, что y = 1 при x > 0, y = -1 при x < 0, а при x = 0 функция не определена. При этом

$$\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1.$$

Следовательно, x = 0 –точка разрыва 1-го рода.

6.2.3. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{1}{x^2}$.

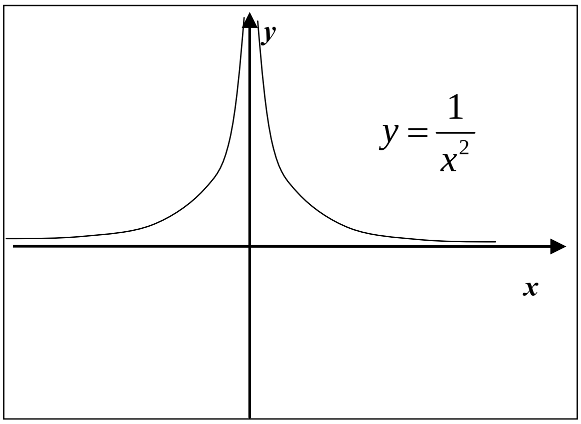


Рис. 6.3

Решение. Функция не определена при $x=0$, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Поэтому $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.4. Исследовать на непрерывность функцию $y = e^{\frac{1}{x}}$.

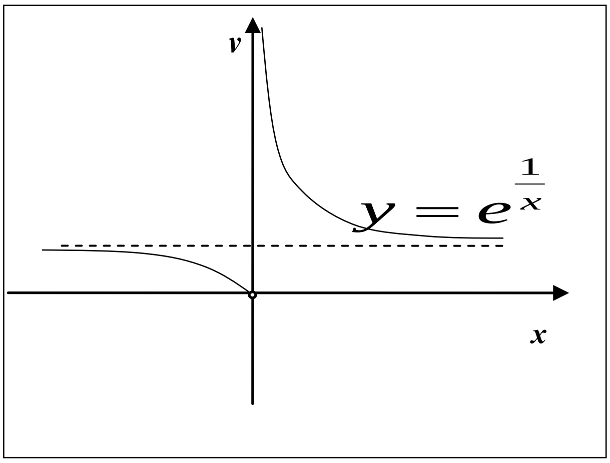


Рис. 6.4

Решение. $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$

то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.5. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

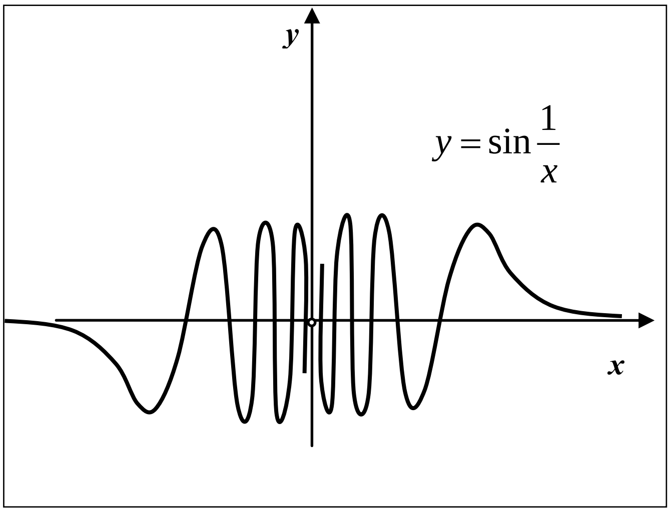


Рис. 6.5

Решение. Функция не определена при $x = 0$ и не имеет предела при $x \to 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

6.2.6. Найти количество точек разрыва функции $y = \dfrac{2x-3}{\log_2|x|}$.

Решение. Функция не существует при трех значениях аргумента: x = 0 (знаменатель не существует) и x = $\pm$1 (он равен 0). Все три точки являются внутренними точками области определения и, поэтому, точками разрыва.

Исследуем характер точек разрыва:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{\log_2|x|}=\lim\limits_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2|x|}=-3\cdot 0=0.$

Следовательно, x = 0 – устранимая особенность.

2) *При* $x\to\pm 1\quad |x|\to 1\Rightarrow\log_2|x|\to 0\Rightarrow\dfrac{1}{\log_2|x|}\Rightarrow\infty.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{2x-3}{\log_2|x|}=\infty,$ и x = $\underline{+}$1 – точки разрыва 2-го рода

$\Rightarrow$3 точки разрыва.

6.2.7. Среди функций 1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, 2) $f(x)=\dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$, 3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$, 4) $f(x)=\dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ точки разрыва 1-го рода имеют?

Решение. Найдем точки разрыва каждой функции и исследуем их характер.

1) Функция $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ не определена при x = 0. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty,$ следовательно, единственная точка разрыва этой функции – это точка разрыва 2-го рода.

2) Функция $f(x)=\dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ не определена при x = 0 (заметим, что знаменатель основной дроби не равен нулю ни при каком значении x).

Найдем односторонние пределы $f(x)$ в точке x = 0:

$$\lim_{x\to -0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{-\infty}}=\frac{5}{1-0}=5;\qquad \lim_{x\to +0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{+\infty}}=\frac{5}{-\infty}=0\neq 5.$$

Следовательно, x = 0 – точка разрыва 1-го рода.

3) Функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ не определена при x = 5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=\infty,$

следовательно, точка x = 5 – точка разрыва 2-го рода.

4) Функция $f(x)=\dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ не определена при x = -0,5. При этом

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x+1}=1,\quad x>-0{,}5 \text{ и } =-\frac{2x+1}{2x+1}=-1, x<-0{,}5.$$

Таким образом, односторонние пределы в точке x = -0,5 равны соответственно 1 и -1, то есть эта точка – точка разрыва 1-го рода $\Rightarrow 2{,}4$.

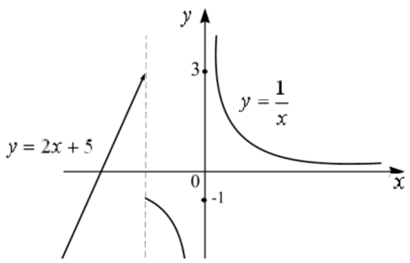


Рис. 6.6

6.2.8. Найти точки разрыва функции $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x+5 & \text{при} \quad -\infty<x<-1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad -1\le x<+\infty \end{cases}$ и определить их характер.

Решение. Неэлементарная функция $f\left(x\right)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$ (Рис. 6.6).

Так как $f\left(0-\right)=\lim\limits_{x\to 0-} f\left(x\right)= =\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $f\left(0+\right)=\lim\limits_{x\to 0+} f\left(x\right)= =\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, то в точке $x=0$ функция терпит разрыв второго рода. Исследуем поведение функции в точках, где меняется аналитическое выражение функции:

$$f\left(-1-0\right)=\lim_{x\to -1-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to -1-0}\left(2x+5\right)=3,\ f\left(-1+0\right)=\lim_{x\to -1+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой, поэтому в точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва равен

$$f\left(-1+0\right)-f\left(-1-0\right)=\lim_{x\to -1+0} f\left(x\right)-\lim_{x\to -1-0} f\left(x\right)=-4.$$

6.2.9. Найти точки разрыва функции $f\left(x\right)=\dfrac{|x-a|}{x-a}$ и определить их характер.

Решение. Функция $f\left(x\right)=\dfrac{|x-a|}{x-a}=\begin{cases} 1, & x>a, \\ -1, & x<a, \end{cases}$ следовательно, функция $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=a$. Так как $f\left(a+0\right)=\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)=1$, $f\left(a-0\right)=\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)=-1$, то в точке $x=a$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва $x=a$ равен

$$f(a+0)-f(a-0)=\lim_{x\to a+0} f(x)-\lim_{x\to a-0} f(x)=1-(-1)=2.$$

6.2.10. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной. Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-1, x<0, \\ x^2-1, 0\le x\le 1, \\ 2, x>1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1=x-1$ непрерывна для $x<0$, функция $y_2=x^2-1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3=2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1,\infty)$. Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x=0$ и $x=1$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} y=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1)=-1$, $y(0)=-1 \Rightarrow$ точка $x=0$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1+0} 2=2$, $y(1)=0$.

Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x=1$ равен $d=\left|\lim\limits_{x\to 1+0} y-\lim\limits_{x\to 1-0} y\right|=|2-0|=2$.

Сделаем схематический чертеж

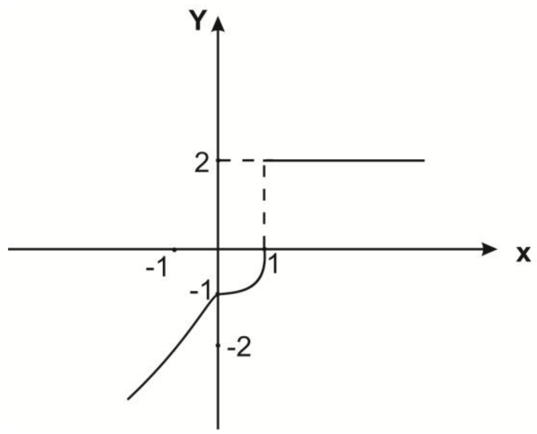


Рис. 6.7

6.3. Задачи для самостоятельного решения

Найти точки разрыва функции и установить их характер:

6.6.1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. **6.3.2.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. **6.3.3.** $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x|}$.

6.3.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$. **6.6.5.** $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$. **6.3.6.** $f(x)=3^{\frac{2}{1+x}}$.

6.3.7. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$. **6.3.8.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<0,\\ (x+2)^2, 0\le x\le 1, & .\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$

Ответы. 6.3.1. $x=0-$ устранимый разрыв; **6.3.2.** $x=0-$ разрыв 2-го рода; **6.3.3.** $x=0-$ устранимый разрыв, $x=\pm1-$ разрыв 2-го рода; **6.3.4.** $x=0-$ разрыв 1-го рода; **6.3.5.** $x=0-$ разрыв 1-го рода; **6.3.6.** $x=-1-$ разрыв 2-го рода; **6.3.7.** $x=3-$ устранимый разрыв, $x=-3-$ разрыв 2-го рода; **6.3.8.** $x=0$ и $x=1-$разрывы 1-го рода.

ЗАНЯТИЕ 7.

7. ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

7.1. Вычисление производных. Производная сложной функции

Определение 7.1.1. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется число

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

если этот предел существует и конечен (если предел бесконечен, то иногда говорят про бесконечную производную).

Обозначение: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента**, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – **приращением функции**. Таким образом, можно определить производную как $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной

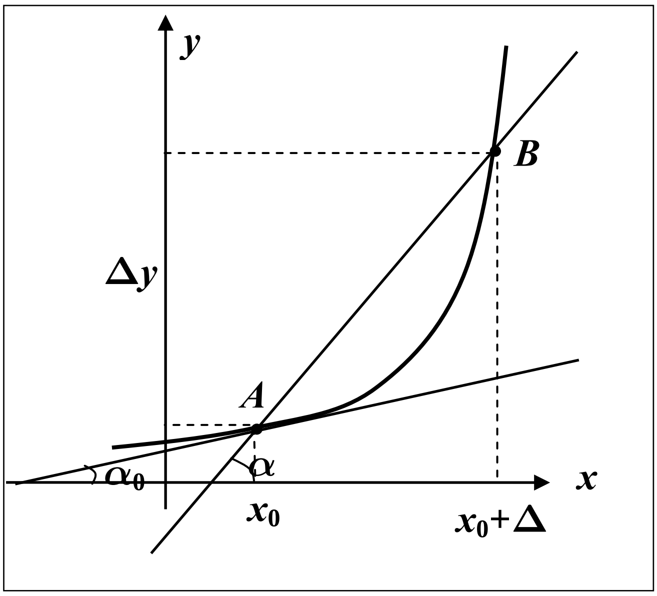


Рис. 7.1

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и проведем секущую через точки A с абсциссой x_0 и B с абсциссой $x_0 + \Delta x$. Если обозначить разность ординат этих точек Δy, то тангенс угла α, образованного секущей с осью О*х*, можно представить так: $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \to 0$, точка B перемещается по кривой, приближаясь к точке A, и секущая при совпадении точек B и A превращается в касательную к графику функции, образующую с осью *Ox* угол α_0.

При этом $tg\alpha_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Значение производной при данном значении x равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением x с положительным направлением оси *Ox*.

Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: $s = f(t)$. Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле: $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = s'(t_0)$.

Таким образом, **производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент.** Соответственно,

Производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом x.

Необходимое условие существования производной

Теорема 7.1.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Тогда эта функция непрерывна в точке x_0.

Основные правила дифференцирования

Теорема 7.1.2. Пусть в некоторой точке существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, тогда в этой точке справедливы следующие равенства:

1) $c' = 0$, где $c = const$.

2) $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$

3) $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $\left(c \cdot u(x)\right)' = c \cdot u'(x)$, при $c = const$

5) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ в любой точке, в которой $v(x) \neq 0$.

Теорема 7.1.3. (О производной сложной функции). Пусть дана сложная функция $z = f\left(g(x)\right)$. Пусть функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $z_0 = f(y_0)$. Тогда сложная функция $z = f\left(g(x)\right)$ также имеет производную в точке x_0 и $z'_x(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Или $z'_x = z'_y y'_x$.

Теорема 7.1.4. (Производная обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет конечную и отличную от 0 производную $f'(x_0)$; пусть для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в точке y_0 эта обратная функция имеет производную, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$. Или $x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)} \Leftrightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

№	$y(x)$	$y'(x)$		№	$y(x)$	$y'(x)$
1	$y = C$	**0**		**12**	$y = \arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$y = x^n$	nx^{n-1}		**13**	$y = \mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
3	$y = a^x$	$a^x \ln a$		**14**	$y = \mathrm{arcctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
4	$y = e^x$	e^x		**15**	$y = \mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$
5	$y = \log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$		**16**	$y = \mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$
6	$y = \ln x$	$\frac{1}{x}$		**17**	$y = \mathrm{th}x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
7	$y = \sin x$	$\cos x$		**18**	$y = \mathrm{cth}x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
8	$y = \cos x$	$-\sin x$		**19**	$y = \mathrm{arcsh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
9	$y = \mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$		**20**	$y = \mathrm{arcch}x$ $\lvert x\rvert > 1$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
10	$y = \mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		**21**	$y = \mathrm{arcth}x$ $\lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{1-x^2}$
11	$y = \arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		**22**	$y = \mathrm{arccth}x$ $\lvert x\rvert > 1$	$\frac{1}{1-x^2}$

7.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

7.2.1. Найти приращение функции $y = 2x^2 - 5$

в точке $x_0 = -3$, если приращение независимой переменной Δx = 0,3.

Решение. $\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x) = y(-3+0,3) - y(-3) = y(-2,7) - y(-3) =$

$= \left(2\cdot(-2,7)^2 - 5\right) - \left(2\cdot(-3)^2 - 5\right) = 2\left(2,7^2 - 3^2\right) = 2(7,29-9) = -3,42.$

7.2.2. Найти приращение независимой переменной Δx, для которого приращение функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$ равно $\dfrac{1}{18}$.

Решение. По определению приращения функции

$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{4+\Delta x}} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta x$ можно найти из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}} = \frac{5}{9} \Rightarrow 4+\Delta x = \frac{81}{25} = 3,24 \Rightarrow \Delta x = 3,24 - 4 = -0,76.$$

7.2.3. Вычислить производную функции $y = 3\sin x - 2\ln x$.

Решение. $y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3\cos x - \dfrac{2}{x}.$

7.2.4. Продифференцировать функцию $y = 2x^4 + \sqrt{x} + 3$.

Решение. $y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + 3\right)' = 2\left(x^4\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' + (3)' = 8x^3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

7.2.5. Продифференцировать функцию $y = x^2e^x$.

Решение. $y' = \left(x^2e^x\right)' = \left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$.

7.2.6. Продифференцировать функцию $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Применим правило вычисления производной частного от деления двух функций:

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\,x - x'\arcsin x}{x^2} = \frac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

7.2.7. Продифференцировать функцию $y = \cos\left(\ln^{12} 2x\right)$.

Решение. Функцию $y = \cos\left(\ln^{12} 2x\right)$ представим в виде цепочки элементарных функций: $y=\cos u$, $u=t^{12}$, $t=\ln z$, $z=2x$. Производную данной функции вычислим по правилу дифференцирования сложной функции: $y'_x=y'_u u'_t t'_z z'_x$, так как $y'_u=-\sin u$, $u'_t=12t^{11}$, $t'_z=\frac{1}{z}$, $z'_x=2$, тогда $y'_x=-\sin u\cdot 12t^{11}\frac{1}{z}2$. Подставляя вместо u, t и z их выражения через переменную x, окончательно получим: $y'_x=-\frac{12}{x}\sin\left(\ln^{12}2x\right)\ln^{11}2x$.

7.2.8. Продифференцировать функцию $y=\ln^5\left(\operatorname{tg}3x\right)$.

Решение. Сложную функцию $y=\ln^5\left(\operatorname{tg}3x\right)$ представим в виде цепочки элементарных функций: $y=u^5$, $u=\ln t$, $t=\operatorname{tg} z$, $z=3x$. По правилу вычисления производной сложной функции имеем $y'=y'_u u'_t t'_z z'_x$, т. е. $y'=5u^4\frac{3}{t\cos^2 z}$, так как $y'_u=5u^4$, $u'_t=\frac{1}{t}$, $t'_z=\frac{1}{\cos^2 z}$, $z'_x=3$. Подставив вместо u, t и z их выражения через переменную x, получим: $y'=30\ln^4\left(\operatorname{tg}3x\right)\frac{1}{\sin 6x}$

7.2.9. Продифференцировать функцию $y=\sin^3\frac{x}{3}$.

Решение. Сложную функцию $y=\sin^3\frac{x}{3}$ представим в виде цепочки элементарных функций: $y=u^3$, $u=\sin t$, $t=\frac{x}{3}$. По правилу вычисления производной сложной функции имеем $y'=y'_u u'_t t'_x$, так как $y'_u=3u^2$, $u'_t=\cos t$, $t'_x=\frac{1}{3}$, то $y'=3u^2\frac{\cos t}{3}$. Подставив вместо u и t их выражения через переменную x, получим: $y'=\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

7.2.10. Продифференцировать функцию $y=\arcsin x$.

Решение. $y=\arcsin x\Rightarrow x=\sin y$.

$$y'_x=\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\left(\sin y\right)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.2.11. Продифференцировать функцию $y=\ln x$.

Решение. $y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(e^y\right)'} = \frac{1}{y' \cdot e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$

7.2.12. Вычислить производную функции $y = \cos\left(\ln(3x^2 - 2)\right)$.

Решение.

$$y' = -\sin\left(\ln(3x^2-2)\right) \cdot (\ln(3x^2-2))' = -\sin\left(\ln(3x^2-2)\right) \cdot \frac{1}{3x^2-2}(3x^2-2)' =$$

$$= -\sin\left(\ln(3x^2-2)\right) \cdot \frac{6x}{3x^2-2}.$$

7.2.13. Вывести формулу производной функции, обратной к функции $y = shx$

Решение. Дана функция $y = sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, её производная $y' = (sh\, x)' =$ $= ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, для всех $x \in R$, следовательно, функция $y = sh\, x$ на всей действительной оси монотонно возрастает и имеет обратную функцию, обозначаемую $arshx$. Уравнение задаёт эту обратную функцию неявным образом. Продифференцируем обе части по x: $1 = ch\, y \cdot y'_x$, откуда $y'_x = {}^{1}\!/_{chy}$. Из соотношения выразим $ch^2 y - sh^2 y = 1$, а поскольку $ch\, y > 0$ для всех $x \in R$, то получим $chy = \sqrt{1 + sh^2 y}$, где $shy = x$. Таким образом, $(arsh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7.2.14. Исходя из определения, найти производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } x = 0.$$

Решение. По определению производная функции $f(x)$ в точке $x = 0$ равна $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Подставим значения функции в данный предел:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(x \sin\frac{1}{x}\right) - 0}{x}.$$

Так как функция $\sin\frac{1}{x}$ – ограниченная, а x – бесконечно малая функция при $x \to 0$, то по теореме о произведении бесконечно малой функции на ограниченную имеем бесконечно малую величину $x\sin\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to 0$. Заменяя в числителе бесконечно малую функцию $1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ эквивалентной функцией $\frac{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}{2}$ и снова используя упомянутую теорему, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2\frac{1}{x}}{2x} = 0.$$

7.3. Задачи для самостоятельного решения

7.3.1. $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$. **7.3.2.** $y=\frac{1}{x^2+x+1}$. **7.3.3.** $y=\frac{3}{\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)}$.

7.3.4. $y=\frac{2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$. **7.3.5.** $y=\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$. **7.3.6.** $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

7.3.7. $y=\left(2x^3+3x^2+6x+1\right)^4$. **7.3.8.** $y=\frac{x^3+2x}{e^x}$. **7.3.9.** $y=\frac{1}{x-\sqrt{a^2-x^2}}$.

7.3.10. $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$. **7.3.11.** $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. **7.3.12.** $y=\sin^2\left(\cos 3x\right)$.

Ответы. 7.3.1. $y=\frac{-6x^2}{\left(1+x^3\right)^2}$. **7.3.2.** $y=\frac{-\left(2x+1\right)}{x^2+x+1}$. **7.3.3.** $y=\frac{6x\left(1+3x-5x^3\right)}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-2x^3\right)^2}$ **.7.3.4.** $y=-\frac{4\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^3}$. **7.3.5.** $y=6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$ **.7.3.6.** $y=\frac{5\left(x^2+2x-1\right)\left(1+x^2\right)^4}{\left(1+x\right)^6}$. **7.3.7.** $y=24\left(x^2+x+1\right)\left(2x^3+3x^2+6x+1\right)^3$ **.7.3.8.**

$y=\frac{2^x\left(\ln 2-1\right)+3x^2-x^3}{e^x}$. **7.3.9.** $y=-\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.**7.3.10.** $y=\frac{1}{1+\cos x}$ **7.3.11.** $y=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$. **7.3.12.** $-3\sin 3x\cdot\sin\left(2\cos 3x\right)$.

ЗАНЯТИЕ 8.

8. ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

8.1. Логарифмическое дифференцирование и производная неявной функции

Логарифмическое дифференцирование

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть $f(x)>0$ на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции имеем $(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, откуда

$$f'(x)=f(x)\left(\ln f(x)\right)'$$

Дифференцирование неявных функций

Пусть значения переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое, если все его члены перенести в левую часть, может быть записано в виде $F\left(x,y\right)=0$, где $F\left(x,y\right)-$ некоторая функция двух переменных. Если для каждого значения x, принадлежащего некоторому множеству X, существует одно значение y, принадлежащее некоторому множеству Y, такое, что $F\left(x,y\right)=0$, то этим определяется некоторая функция $y=y\left(x\right)$. Такая функция называется *неявной функцией*, заданной уравнением $F\left(x,y\right)=0$. Тогда $F\left(x,y\right)=0$ $\left(\forall x\in X\right)\Rightarrow$ $F'_x\left(x,y\left(x\right)\right)=0$.

8.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

Найти производные функций:

8.2.1. $y=\sqrt[3]{\frac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

Решение. Применим метод логарифмического дифференцирования.

Логарифмируя данную функцию и применяя свойства логарифмов, получим:

$$\ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{|5-x|}}} = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{15}\ln|5-x|.$$

Продифференцируем обе части выражения и выразим y':

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{15}\frac{1}{5-x}, \quad y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{15(5-x)}\right).$$

Подставив выражения для y, получим производную заданной функции:

$$y' = \sqrt[3]{\frac{|x|^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{|5-x|}}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{15(5-x)}\right).$$

8.2.2. $y = \dfrac{(x-4)^2\cdot(x^2+2)^3\cdot(3-2x)^4}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}\cdot\sqrt{3x-1}}$. Решение. Аналогично предыдущему

примеру: $\ln y = 2\ln|x-4| + 3\ln\left(x^2+2\right) + 4\ln|3-2x| - \dfrac{2}{3}\ln(5x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(3x-1).$

$$y' = y\cdot\left(2\ln|x-4| + 3\ln\left(x^2+2\right) + 4\ln|3-2x| - \frac{2}{3}\ln(5x+1) - \frac{1}{2}\ln(3x-1)\right)' =$$

$$= \frac{(x-4)^2\cdot(x^2+2)^3\cdot(3-2x)^4}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}\cdot\sqrt{3x-1}}\left(\frac{2}{x-4} + \frac{3\cdot 2x}{x^2+2} + \frac{4\cdot(-2)}{3-2x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot 5}{5x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{3x-1}\right).$$

8.2.3. $y = (\cos x)^{\sin 2x}$.Решение. $\dfrac{y'}{y} = 2\cos 2x\ln\cos x + \sin 2x\left(\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right)$,

$y' = 2(\cos x)^{\sin 2x}\left(\cos 2x\ln\cos x - \sin^2 x\right)$. Таким образом,

$\left((\cos x)^{\sin 2x}\right)' = 2(\cos x)^{\sin 2x}\left(\cos 2x\ln\cos x - \sin^2 x\right).$

8.2.4. $y = (\sin x)^x$. Решение. Решение. Аналогично предыдущему

примеру: $y' = (\sin x)^x(x\cdot\ln\cos x)' = (\sin x)^x\cdot(\ln\sin x + x\cdot ctgx).$

8.2.5. $y = x^{x^2}$. Решение: $y' = x^{x^2}\left(x^2\cdot\ln x\right)' = x^{x^2}\cdot(2x\cdot\ln x + x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1).$

8.2.6. $x^2 + y^2 = 4$. Решение. Продифференцируем по x обе части данного уравнения, считая y зависящим от x: $2x+2yy'=0$, отсюда выразим y': $y'=-x/y$.

8.2.7. $x^2-xy+y^3=1$. Вычислить y'_x в точке $x=0$, $y=1$.

Решение. Продифференцируем по x обе части данного уравнения, считая y зависящим от x: $2x-\left(y+xy'\right)+3y^2y'=0,\Rightarrow y'_x=\dfrac{y-2x}{3y^2-x}$. Подставив значения $x=0$, $y=1$ в выражение производной, получим $y'_x\big|_{x=0,\ y=1}=1/3$.

8.2.8. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$. Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения и имея в виду, что y есть функция от x, имеем: $3x^2+\dfrac{1}{y}y'-x^2e^yy'-2xe^y=0$

$\Rightarrow y'=\dfrac{\left(2xe^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}$. $y=\sqrt[4]{x+2}^{\,ctg\frac{\pi x}{2}}$

8.2.9. $\cos y=4y^2+e^x$. Решение. Аналогично предыдущему примеру:

$$-\sin y\cdot y'=8yy'+e^x;\ \left(-\sin y-8y\right)y'=e^x\Rightarrow\ y'=\frac{-e^x}{\sin y+8y}.$$

8.2.10. $e^x+2e^y-2^{xy}-1=0$. Решение. $e^x+2e^yy'-2^{xy}\ln 2\left(y+xy'\right)=0\Rightarrow$

$$y'=\frac{y2^{xy}\ln 2-e^x}{2e^y-x2^{xy}\ln 2}$$

8.3. Задачи для самостоятельного решения

8.3.1. $x^y=y^x$. **8.3.2.** $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$. **8.3.3.** $y=(\cos 2x)^{\operatorname{tg}5x}$. **8.3.4.** $y=(x^2+2)^{sh\,x}$. **8.3.5.** $y=\dfrac{\sqrt{x-3}\cdot(x+1)^5\cdot x^6}{(2-x)^4(x-5)^2\cdot(2x-1)^3}$. **8.3.6.** $x^3+\ln y-x^2e^y=0$. **8.3.7.** $x\sin y+y\sin x=0$. **8.3.8.** $x^6+y^6-3x^2y^2+6x-12y=0$. **8.3.9.** $\dfrac{y}{x}+e^{y/x}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$. **8.3.10.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Ответы. 8.3.1. $y'=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$. **8.3.2.** $y'=y\cdot\left(\dfrac{\ln\sin 3x}{x^2+1}+3\operatorname{ctg}3x\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)$.

8.3.3. $y' = y\cdot\left(\dfrac{5\ln\cos 2x}{\cos^2 5x} - 2\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}5x\right)$. **8.3.4.** $y' = y\cdot\left(\operatorname{ch}x\cdot\ln(x^2+2) + \dfrac{2x\operatorname{sh}x}{x^2+2}\right)$.

8.3.5. $y' = y\cdot\left(\dfrac{1}{2(x-3)} + \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{2-x} - \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{6}{2x-1}\right)$.

8.3.6. $y' = \dfrac{(2xe^y - 3x^2)\cdot y}{1 - x^2ye^y}$ **. 8.3.7.** $y' = -\dfrac{\sin y + y\cos x}{\sin x + x\cos y}$ **. 8.3.8.** $y' = \dfrac{xy^2 - x^5 - 1}{y^5 - x^2y - 2}$.

8.3.9. $y' = \dfrac{y}{x}$. **8.3.10.** $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

ЗАНЯТИЕ 9.

9. ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.1. Производная параметрически заданной функции. Приложения производной.

Дифференцирование функций заданных параметрически

Если функция $y = f(x)$ задана в виде: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, причем функция $\psi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varPhi(x)$, то $y = \psi(\varPhi(x))$ и имеет место формула

$$y'(x) = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (1)$$

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

Приложения производной

Уравнение касательной к графику $y = f(x)$ функции при $x = x_0$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Уравнение нормали к графику $y = f(x)$ функции при $x = x_0$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3)$$

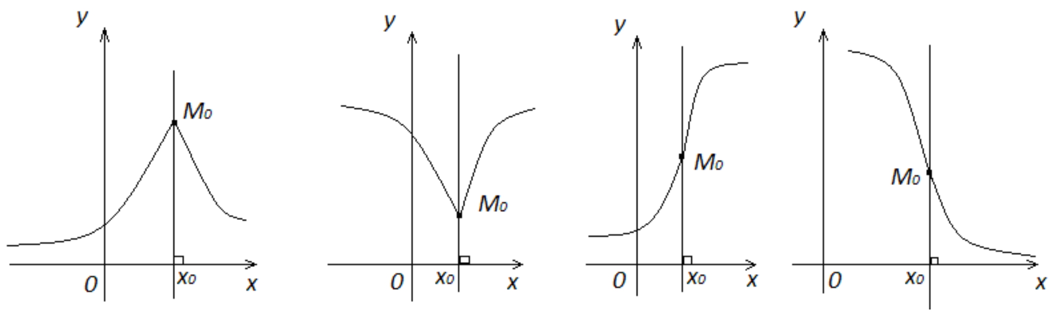
Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке $M_0(x_0, y_0)$. Этот угол находится по формуле:

$$tg\varphi = \frac{\left| f_2'(x_0) - f_1'(x_0) \right|}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}, \tag{4}$$

если $f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) \neq -1$.

Если же $f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) = -1$, то касательные перпендикулярны и $\phi = 90°$.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет бесконечную производную, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ или $+\infty$ или $-\infty$, то касательная к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 перпендикулярна оси Ox, $(\alpha = 90°)$:



Уравнение касательной в этих случаях имеет вид: $x = x_0$, а уравнение нормали – $y = f(x_0)$. Если же $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали: $x = x_0$.

9.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

Производная параметрически заданной функции

9.2.1. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.

Решение. Вычислим производную параметрически заданной функции по формуле $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$. Так как $y_t' = 3b\sin^2 t\cos t$, $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, то

$$y_x' = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\text{tg}\,t \quad \text{при} \quad t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

9.2.2. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение: Так как $y_t' = a\sin t;$, $x_t' = a(1-\cos t)$, то $y_x' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = ctg\dfrac{t}{2}$.

9.2.3. $x = a(\cos t + t\sin t)$**,** $y = a(\text{sint} - t\cos t)$**.**

Решение: Так как $y_t' = at\sin t$, $x_t{}' = at\cos t$, то $y_x' = \dfrac{at\sin t}{at\cos t} = tgt$.

9.2.4. $x = \sqrt{2t - t^2}$, $y = \arcsin(t-1)$.

Решение: $y_t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2t-t^2}}$, $x_t{}' = \dfrac{2-2t}{2\sqrt{2t-t^2}} = \dfrac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}$, то $y_x' = \dfrac{1}{1-t}$.

9.2.5. $x = 3\cos t$, $y = 4\sin^2 t$.

Решение: $y_t' = 8\sin t\cos t$, $x_t{}' = -3\sin t$, то $y_x' = \dfrac{8\sin t\cos t}{-3\sin tt} = -\dfrac{8}{3}\cos t$.

9.2.6. $x = \sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}$, $y = \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{t}+1\right)t$.

Решение: $y_t' = \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{t}\cdot t + t\right)_t' = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{t}+1 = \sqrt{t}+1$ $x_t' = \left(\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}\right)_t' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\right) \Rightarrow\ y_x' = \frac{\left(2\sqrt{t}\right)\sqrt{t}+1}{e^{\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\right)} = \frac{2\sqrt{t}}{e^{\sqrt{t}}}.$$

Приложения производной

9.2.7. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1,-1)$.

Решение. Уравнение кривой задано неявно. Продифференцируем заданное уравнение, считая y зависящим от x, и выразим y':

$$2x + 2y^2 + 4xy\,y' + 12y^3y' = 0,\ \ y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3} \Rightarrow\ y'(1) = \frac{1}{4}$$

Так как точка $M(1,-1)$ принадлежит кривой, то имеем $y(x_0) = \ = y(1) = -1$. Уравнение касательной имеет вид $y+1 = \dfrac{1}{4}(x-1)$ или $x-4y-5=0$. Уравнение нормали имеет вид $y+1 = -4(x-1)$ или $4x+y-3=0$.

9.2.8. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

Решение. За направление кривой $y=f\left(x\right)$ в данной точке принимают направление ее касательной в этой точке. Угол наклона кривой к оси Ox в данной точке есть угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к линии в этой точке. Угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой $y=f\left(x\right)$ в точке с абсциссой x_0, равен $y'\left(x_0\right)=\operatorname{tg}\alpha$. Кривая $y=\ln x$ пересекает ось Ox в точке, где $y=0$: $\ln x=0$ при $x_0=0$. Вычислим значение производной $y'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$, $y'\left(x_0\right)=\operatorname{tg}\alpha=1$, откуда $\alpha=\frac{\pi}{4}$, следовательно, кривая $y=\ln x$ пересекает ось Ox под углом $45°$.

9.2.9. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $\begin{cases} x=t^2+3t-8 \\ y=2t^2-2t-5 \end{cases}$ в точке $M\left(2,-1\right)$.

Решение. Производная функции $f\left(x\right)$ при $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0. Вычислим производную заданной кривой: $y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4t-2}{2t+3}$. Каждому значению параметра t на плоскости $\left(x,y\right)$ соответствует точка $\left(x(t),y(t)\right)$. Определим значение параметра t, соответствующее точке $M\left(2,-1\right)$. Так как точка $M\left(2,-1\right)$ принадлежит кривой, то значение параметра удовлетворяет системе уравнений: $\begin{cases} 2=t^2+3t-8, \\ -1=2t^2-2t-5. \end{cases}$ Значение $t=2$ есть решение данной системы уравнений. Вычислим значение производной в точке $M\left(2,-1\right)$: $y'\big|_{x=2}=\frac{4t-2}{2t+3}\bigg|_{t=2}=\frac{6}{7}$.

9.2.10. Найти уравнение касательной и нормали к эллипсу $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ в точке, где $t=\pi/6$.

Решение: При $t=\pi/6$: $y_0=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$; $x_0=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$, получаем точку $M_0(3,1)$. Тогда $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\cos t}{-2\sqrt{3}\sin t}=-\frac{\operatorname{ctg}t}{\sqrt{3}}$,

$y'_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-1$

Уравнение касательной: $y-1=-(x-3)\Rightarrow x+y-4=0$.

Уравнение нормали: $y-1=(x-3)\Rightarrow x-y-2=0.$

9.3. Задачи для самостоятельного решения

Найти $y_x{}'$, если:

9.3.1. $x=a\cdot \text{ch}t,\ y=b\cdot \text{sh}t$. **9.3.2.** $x=\sqrt{3-2t},\ y=5t^2-t+1$.

9.3.3. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ **9.3.4.** $x=2\cos t-\cos 2t,$ $y=2\sin t-\sin 2t$. **9.3.5.** $x=\dfrac{1-t}{1+t},\ y=\dfrac{2t}{1+t}$

9.3.6. Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\sin^3 t$, проведенных в точке $t={}^{\pi}\!/_4$.

9.3.7. Найти углы φ, под которыми график функции $y=\ln|x|$ пересекает ось Ox.

9.3.8. Провести касательную к гиперболе $y(x+5)=x+9$ так, чтобы она прошла через начало координат.

9.3.9. Под каким углом пересекаются линии: $x^2+y^2=8ax$ и $y^2(2a-x)=x$?

9.3.10. Провести нормаль к линии $y=x\ln x$ параллельно прямой $2x-2y+3=0.$

Ответы. 9.3.1. $y'_x=\dfrac{b}{a}\text{cth}t$. **9.3.2.** $y'_x=(1-10t)\cdot\sqrt{3-2t}$. **9.3.3.** $y'_x=1$. **9.3.4.** $y'_x=1$.**9.3.5.** $y'_x=-1$. **9.3.6.** $y=-x+1,\ y=x.$ **9.3.7.** При $x=1,\ \varphi={}^{\pi}\!/_4$; при $x=-1,\ \varphi={}^{3\pi}\!/_4$. **9.3.8.** $x+25y=0;\ x+y=0.$ **9.3.9.** 45^0 и 90^0. **9.3.10.** $x-y-3e^{-2}=0.$

ЗАНЯТИЕ 10.

10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. Дифференциал функции. Приложение к приближенным вычислениям

Определение 10.1.1. Если приращение функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$ где $A = const$, то $y = f(x)$ **называется дифференцируемой при** $x = x_0$, а $A\Delta x$ **называется главной линейной частью приращения или дифференциалом функции. Обозначение:** $dy = A\Delta x$**.**

Замечание 1. Т.к. при $y = x$ получаем $dx = 1\cdot\Delta x$, можно обозначать $\Delta x = dx$.

Теорема 10.1.1. Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.

Следствие. Дифференциал функции можно представить в виде $dy = f'(x_0)dx,$ а производную – в виде $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$.

Теорема 10.1.2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Замечание 2. Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала

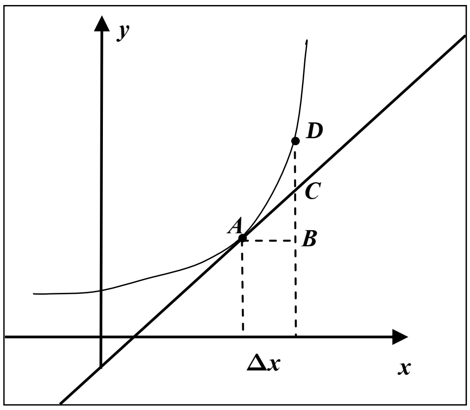


Рис. 9.1

Рассмотрим график функции $y = f\left(x\right)$ и проведем касательную к нему при $x = x_0$. Тогда при приращении аргумента Δx приращение функции Δy равно длине отрезка *BD*, а приращение ординаты касательной

$f'(x_0)\Delta x = dy$ равно длине отрезка *CD*. Следовательно, *дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.*

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при приближенных вычислениях можно заменять Δy на dy, то есть считать, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом функция $f(x)$ для значений x, близких к x_0, приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется **линеаризацией** функции.

10.2. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$.

В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию x. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции $f(x)$. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом $f'(x)$ будем называть производной первого порядка.

Определение.10.2.1. Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной) от функции $y = f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n-1)-$ой производной.

Обозначение: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y''' и т.д.

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $\left(c \cdot f(x)\right)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x)$, где $c-$const.
2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$.
3. Для $y = x^m \Rightarrow y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)$.

   Если $m-$ натуральное число, то при $n > m \Rightarrow y^{(n)} = 0$.
4. **Формула Лейбница**, позволяющая найти производную $n-$го порядка от произведения функций $f(x) \cdot g(x)$:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} v^{(n-2)} v'' + \ldots + u v^{(n)}.$$

Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной. Для n=1 эта формула была получена при изучении первой производной, для производных высших порядков ее справедливость можно доказать с помощью метода математической индукции.

5. Пусть $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt} \Rightarrow y''_{xx}=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx}=\dfrac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}$ и т.д.

Определение 10.2.2. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) называется дифференциал от дифференциала функции.

Обозначение: $d^2y=d\left(dy\right)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.

Итак, $d^2y=d\left(dy\right)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)'dx=\left(f'(x)\right)'\left(dx\right)^2=f''(x)dx^2.$

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции: $d^3y=d\left(d^2y\right)=f'''(x)dx$ и дифференциалы более высоких порядков.

Дифференциалом *n*-го порядка называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка: $d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)'=f^{(n)}(x)dx^n.$

Свойства дифференциалов высших порядков

1. Производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

2. Дифференциалы высших порядков **не обладают свойством инвариантности**.

Покажем это на примере второго дифференциала. Если $y=F\left(\varphi\left(x\right)\right)=F\left(u\right)$, где $d^2y=d\left(F'\left(u\right)du\right)$. Но $u=\varphi'\left(x\right)dx$ зависит от x, поэтому

$$d^2y=d\left(F'(u)\right)du+F'(u)d\left(du\right)=F''_{uu}(u)\left(du\right)^2+F'_u(u)d^2u,$$

где $d^2u=\varphi''(x)dx^2$.

Таким образом, форма второго дифференциала изменилась при переходе к аргументу u.

10.3.Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную, то $f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. В теореме Ферма важно, что x_0 – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $x = 1$ и $x = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$.

То внутри интервала (a,b) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

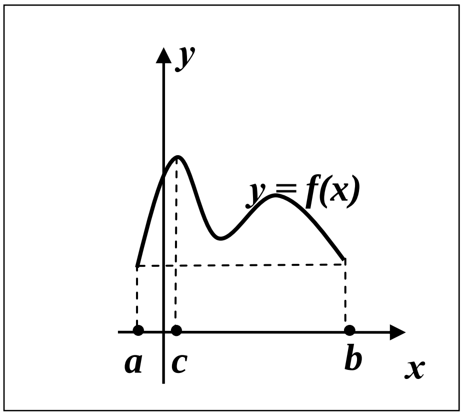


Рис. 9.2

Замечание 2. В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.

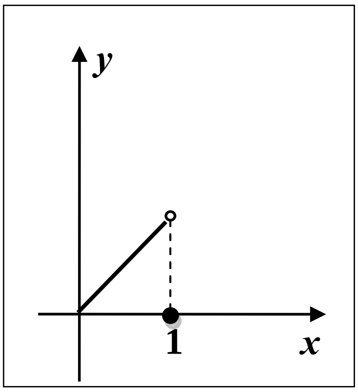


Рис. 9.3

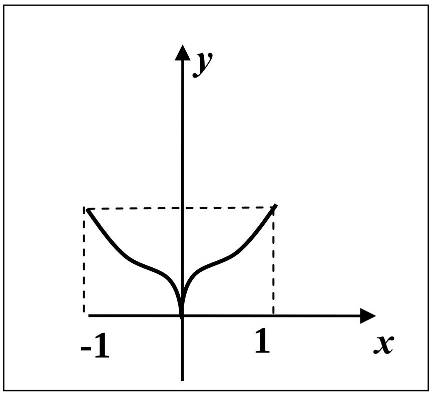


Рис. 9.4

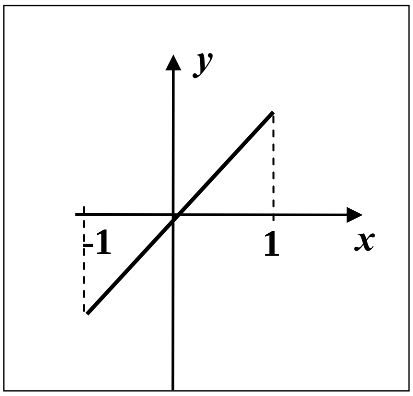


Рис. 9.5

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 9.3, $f(0)=f(1)=0$, но $x=1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис. 9.2, не дифференцируема при $x=0$, а для третьей функции $f(-1)\neq f(1)$.

Замечание 3. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

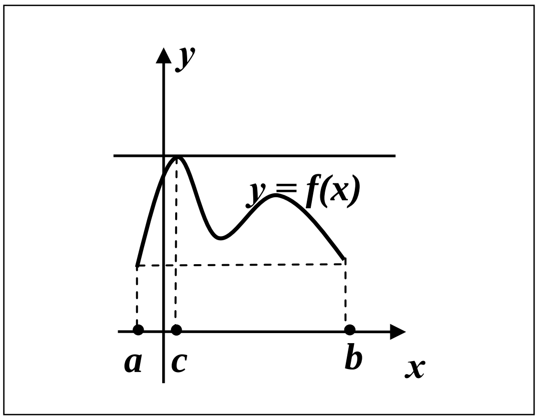


Рис. 9.6

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, $a<c<b$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Замечание 4. Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y=f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами *a* и *b*.

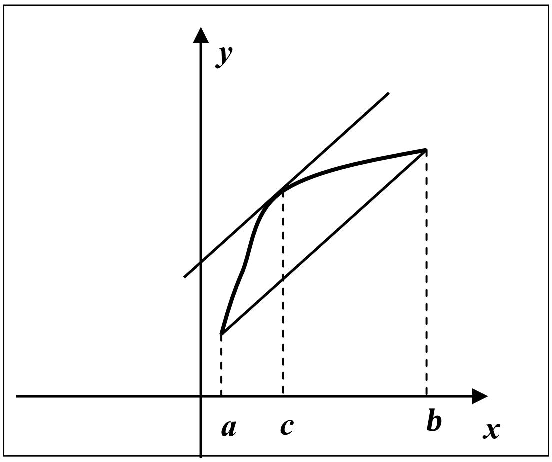


Рис. 9.7

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$ и дифференцируемые на (a,b), и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то на (a,b) найдется такая точка $x=c$, $a<c<b$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

10.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

10.4.1. Найти дифференциал функции $y=x^3-x^2+1$ в точке x.

Решение. Дифференциал функции $y=y(x)$ в точке x есть $dy(x)=y'(x)dx$, тогда для заданной функции дифференциал в точке x:

$$dy=\left(x^3-x^2\right)'dx=\left(3x^2-2x\right)dx.$$

В приведенных ниже примерах приближенные значения выражений вычисляются по формуле $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. Эта формула получена из определения дифференциала $y(x_0+\Delta x)= =y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$, или в других обозначениях $y(x)= =y(x_0)+dy(x_0)+o(x-x_0)$, $\Delta x=x-x_0$.

10.4.2. Вычислить приближенное значение $\sqrt{10}$.

Решение. Для вычисления $\sqrt{10}$ рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$, найдем рядом с точкой $x=10$ точку x_0, в которой значение $\sqrt{x_0}$ вычислялось бы точно. Этой точкой является точка $x_0=9$. Производная функции $y'=1/2\sqrt{x}$ в точке $x_0=9$ равна $y'(9)=\dfrac{1}{6}$, и значение функции $f(9)=3$, тогда по формуле вычисления приближенных значений получим: $\sqrt{10}\approx 3+\dfrac{1}{6}(10-9)\approx 3{,}16$.

10.4.3. Вычислить приближенное значение $\operatorname{arctg}1,05$.

Решение. Для вычисления $\operatorname{arctg}1,05$ рассмотрим функцию $y=\operatorname{arctg}x$. Подберем $x_0=1$, тогда $y(1)=\frac{\pi}{4}$ и значение производной $y'=(\operatorname{arctg}x)'=$ $=\frac{1}{1+x^2}$ в точке $x_0=1$ равно $y'(1)=0,5$. По формуле вычисления приближенных значений имеем: $\operatorname{arctg}1,05\approx\frac{\pi}{4}+0,5\cdot0,05=0,81$.

10.4.4. Вычислить приближенное значение $\cos31°$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\cos x$. Так как $31^0=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$, то положим $x_0=\frac{\pi}{6}$ и вычислим в этой точке значения функции и ее производной:

$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y'=(\cos x)'=-\sin x$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

По формуле для приближенных вычислений получим:

$$\cos31^0\approx\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}=0,851.$$

10.4.5. Найти производную второго порядка функции $y=x^2-3x+3$.

Решение. Производная второго порядка y'' явно заданной функции вычисляется дифференцированием первой производной. Вычислим первую производную функции: $y'=2x-3$ и, повторно дифференцируя, получим:

$$y''=(y')'=2.$$

10.4.6. Найти производную второго порядка функции $x=a\cos^3t$, $y=b\sin^3t$.

Решение. Производная второго порядка y'' параметрически заданной функции вычисляется по формуле $y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t \quad \text{при} \quad t\neq(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x'_t=-3a\cos^2t\,\sin t.$$

Вычислим $(y'_x)'_t=-\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2t}$ и подставим $(y'_x)'_t$ и x'_t в формулу для производной второго порядка параметрически заданной функции:

$$y''_{xx}=\frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{b}{3a}\frac{1}{\cos^4 t\sin t}.$$

10.4.7. Найти производные y'' и x'', если $y=x+\ln y$.

Решение. Для нахождения второй производной y'' продифференцируем функцию по x, считая y зависящим от x: $y'=1+\frac{1}{y}y'$, и выразим y' из полученного выражения $y'=\frac{y}{y-1}$. Затем повторно продифференцируем последнее равенство по x, считая y зависящим от x:

$$y''=\left(\frac{y}{y-1}\right)'=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставив в это равенство вместо производной y' ее выражение, получим:

$$y''=-\frac{y}{(y-1)^3}.$$

Найдем производную x'' функции $y=x+\ln y$. Полагая x зависящим от y, дифференцируем по аргументу y и определяем x': $1=x'+\frac{1}{y}$, затем выражаем x': $x'=\frac{y-1}{y}$. Продифференцируем полученное выражение x' по y и, подставив вместо производной x' его значение, получим:

$$x''=\frac{1y-1(y-1)}{y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

10.4.8. Укажите, для каких функций выполняется теорема Ролля: а) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1,1]$; б) $f(x)=\ln\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$; в) $f(x)=1-|x|$ на отрезке $[-1,1]$.

Решение.

а) Функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и $f(-1)=f(1)=0$. Производная функции $f'(x)=\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)'=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ существует во всех точках, кроме точки $x=0$, которая принадлежит отрезку $[-1,1]$, следовательно, условия теоремы Ролля не выполняются.

б) Функция $f(x)=\ln\sin x$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ и $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\ln 2$. Производная функции $f'(x)=(\ln\sin x)'=\operatorname{ctg} x$ существует во всех точках отрезка $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Условия теоремы Ролля выполняются: $f'(x)=0$ в точке $\xi=\frac{\pi}{2}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

в) Функция $f(x)=1-|x|=\begin{cases}1-x \text{ при } x\geq 0,\\ 1+x \text{ при } x<0\end{cases}$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $f(-1)=f(1)=2$. Производная функции $f'(x)$ в точке $x=0$ не существует, так как односторонние производные функции в точке $x=0$ не равны: $f'(0-0)=1$, $f'(0+0)=-1$. Следовательно, условия теоремы Ролля не выполняются.

10.4.9. Удовлетворяют ли функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ условиям теоремы Коши на отрезке $[1, 4]$? Найти соответствующее значение ξ.

Решение. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ непрерывны на $\mathbf{R}$, значит, и на отрезке $[1, 4]$. Функции являются дифференцируемыми $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20$ для всех $x\in\mathbf{R}$ и $g'(x)\neq 0$. Определим ξ из уравнения $\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ или $\frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}$ для $\xi\in[1, 4]$. Решив последнее уравнение, получим $\xi_1=2\in(1, 4)$, $\xi_2=4\notin(1, 4)$.

Ответ. Функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1, 4]$, значение $\xi=2$.

10.5. Задачи для самостоятельного решения

10.3.1. $y=arctg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Найти y''. **10.3.2.** $y=x^2e^{2x}$. Найти $y^{(50)}$.

10.3.3. $e^y+xy=e$. Найти $y''_{xx}(0,1)$. **10.3.4.** $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$. Найти $y''_{xx}(1,1)$. **10.3.5.** $x=(2t-t^2)/(t-1)$, $y=t^2/t-1$**.** Найти $y''_{xx}(0,4)$.

10.3.6. $x=\ln(1+\sin t)$, $y=\ln(1-\cos 2t)$**.** Найти $y''_{xx}(\ln(3/2),\ln(1/2))$.

10.3.7. $y=\left(x^2+x+1\right)e^{-x}$**.** Найти d^2y.   **10.3.8.** $y=x^x$**.** Найти d^2y.

10.3.9. Удовлетворяет ли функция $f\left(x\right)=\ln\sin x$ на отрезке $\left[\pi/6,5\pi/6\right]$ условиям теоремы Ферма?

10.3.10. Удовлетворяет ли функция $f\left(x\right)=\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$ на отрезке $\left[0,2\right]$ условиям теоремы Ролля?

10.3.11. Для функции $y=\sqrt{5}x^3+x^2$, $x\in\left[-1,1\right]$. Найти все точки ξ такие, что имеет место формула Лагранжа.

10.3.12. Удовлетворяют ли функции $f\left(x\right)=e^x$ и $g\left(x\right)=x^2/\left(1+x^2\right)$ условиям теоремы Коши на отрезке $\left[-3,3\right]$?

Ответы. **10.3.1.** $-x\left(1+x^2\right)^{-2}$. **10.3.2.** $2^{49}e^{2x}\left(2x^2+100x+1225\right)$. **10.3.3.** $-e^{-1}$.

10.3.4. $-238/27$. **10.3.5.** $0{,}5$. **10.3.6.** -12. **10.3.7.** $\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}dx^2$.

10.3.8. $\left(x\left(1+\ln x\right)^2+1\right)x^{x-1}dx^2$. **10.3.9.** Да. **10.3.10.** Нет. **10.3.11.** $\xi_1=1/\sqrt{5}$, $\xi_2=-\sqrt{5}/3$. **10.3.12.** Нет.

ЗАНЯТИЕ 11.
ТЕСТ И КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ЗАНЯТИЕ 12
ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

12.1. Формулировка теоремы

Теорема 12.1. Пусть:
а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности конечной или бесконечной точки a; б) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=0$ или $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\infty$;
в) в нашей окрестности точки a (кроме, разве что, самой точки a) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'\left(x\right)\neq 0$;
г) существует (конечный или нет) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$.
Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k,$ *т.е.* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

Замечания: Если применение правила Лопиталя опять приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно опять применить теорему 12.1., и в итоге, при соответствующих условиях, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать и тогда, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

12.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

12.2.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-2\alpha x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая равна

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+2\alpha e^{-2\alpha x}}{\frac{1}{1+x}}=\alpha+2\alpha=3\alpha$. Условия теоремы 12.1. верны; т.к. предел отношения производных существует, то наша цепочка равенств имеет место.

12.2.2. Найти $\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$.

Решение. Имеем опять неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая равна

$$-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x^2-x)\cos 3x^2\,6x}{\sin(2x^2-x)(4x-1)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x^2-x)(4x-1)}=6(-1)=-6.$$

Легко проверить, что все наши действия законны. Этот пример показывает полезность выделения из дроби той части, которая действительно дает неопределенность.

12.2.3. При $x\to+\infty$ $x^k(k>1),\log_a x\ (a>1)$ и $a^x(a>1)$ являются бесконечно большими функциями. Сравнить их между собой.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}\log_a e}{kx^{k-1}}=\dfrac{\log_a e}{k}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x(\ln a)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}{a^x(\ln a)^3}=\ldots=0.$$

(x из числителя в итоге “уйдет”) $\Rightarrow$ при $x\to+\infty$ степенная функция растет быстрее логарифмической, а показательная функция - быстрее степенной.

12.2.4. Правило Лопиталя, при всем его удобстве, не является панацеей от всех бед, что показывает следующий пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Неверное решение (правило Лопиталя не применимо, т.к. предел отношения производных не существует): $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{-\sin x}=-1.$

Верное решение: деля числитель и знаменатель на x, имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$ (произведение б.м. $\dfrac{1}{x}$ на ограниченную $\sin x$ есть б.м.).

Неопределенности другого вида (не $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$) тем или иным образом сводят к указанным неопределенностям.

12.2.5. Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$, которая равна

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\left(x-1\right)+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\ln x+x\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

В общем случае неопределенности вида $\infty-\infty$ поступают так:

$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$. Теперь раскроем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Если она не равна 1, то ответ ∞, если равна 1, то

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}},$$ и это уже $\frac{0}{0}$.

12.3. Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы: **12.3.1.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$. **12.3.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$. **12.3.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-tgx}$.

12.3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. **12.3.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$. **12.3.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

12.3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$. **12.3.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

Ответы: 12.3.1. $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **12.3.2.** $\frac{1}{3}$. **12.3.3.** $-\frac{1}{2}$. **12.3.4.** 2. **12.3.5.** 2. **12.3.6.** 2. **12.3.7.** $\frac{1}{128}$. **12.3.8.** 0.

ЗАНЯТИЕ 13

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ (продолжение)

13.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

13.1.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x$ (n - натуральное число).

Решение. Это неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая равна

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{nx^{-n}}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0.$$

13.1.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1\text{-}x)$.

Решение. Это тоже неопределенность $0\cdot\infty$, которая равна

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{cos\frac{\pi x}{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{x-1}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\frac{\pi}{2}=0.$$

Практика показывает, что по возможности, логарифмическую и обратные тригонометрические функции переносить в знаменатель не нужно.

Неопределенности вида 1^{∞}, ∞^0, 0^0 сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью предварительного логарифмирования:

13.1.3. Найти $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решение. Это неопределенность вида ∞^0. Пусть $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\Rightarrow \ln y=\sin x\ln\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to +0}\ln y=\lim_{x\to +0}\sin x\ln\frac{1}{x}=-\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0.$$

$\Rightarrow \ln y\to 0\Rightarrow y\to 1\Rightarrow \lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$. Отсюда видно, что правило Лопиталя стоит комбинировать с уже известными способами нахождения пределов.

13.1.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\mathrm{tg}x\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

Решение. Это неопределенность вида ∞^0. Запишем логарифмирование по-другому:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\mathrm{tg}x\right)^{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\mathrm{ctg}x\ln\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\exp\left\{\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x}\right\}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}\right\}=e^0=1.$$

Здесь $\exp\alpha=e^{\alpha}$.

13.1.5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}x^{\ln(1-x)}$.

Решение. Это неопределенность вида 1^∞. Обозначая $y = x^{\ln(1-x)}$, имеем:

$$\lim_{x\to1}\ln y = \lim_{x\to1}\ln(1-x)\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to1}\frac{\ln^2 x}{1-x} = \lim_{x\to1}\frac{2\ln x}{-x} = 0,$$

откуда искомый предел равен 1.

13.2. Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы: **13.2.1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\pi - 2arctgx\right)\ln x\right)$. **13.2.2.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln\left(1-x\right)}$.

13.2.3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2x-\pi}$. **13.2.4.** $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$. **13.2.5.** $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$. **13.2.6.** $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ответы: 13.2.1. 0. **13.2.2.** ∞. **13.2.3.** 1. **13.2.4.** 1. **13.2.5.** e. **13.2.6.** e^2.

ЗАНЯТИЕ 14

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

14.1. Формулировка теоремы

Теорема 14.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a все производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда в этой окрестности справедлива следующая формула (Тейлора):

$$f\left(x\right) = f\left(a\right) + \frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(x-a\right) + \frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n +$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}}_{R_n(x)-\text{остаточный член в форме Лагранжа}}, \text{ где } \xi \text{ между } a \text{ и } x.$$

Замечания:

1. Формула Маклорена – это формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{R_n(x)}_{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\,0<\theta<1}$$

2. При условии ограниченности (n+1)ой производной f (x) остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде $o(x-a)^n$. Это так называемый остаточный член в форме Пеано. Тогда формулы Тейлора и Маклорена примут соответственно вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^n,\;\; f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

На самом деле, для справедливости этих формул достаточно существование всех производных функции $f(x)$ до порядка n включительно в точке a.

3. Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций имеют вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

В частности $(\alpha=-1)$, $\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

Или, заменяя x на $-x$, $\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+o(x^n)$

Первые 3 разложения справедливы для всех x, а остальные только при $|x|<1$.

14.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

14.2.1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $x-2$.

Решение. $P(2)=11; P'(x)=3x^2-4x+3; P'(2)=7; P''(x)=6x-4; P''(2)=8;$

$P'''(x)=6; P'''(2)=6; P^{\mathrm{IV}}(x)=0 \Rightarrow$

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3+\underbrace{\frac{P^{\mathrm{IV}}(\xi)}{4!}}_{0}(x-2)^4=$$

$$=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

14.2.2. $y=\dfrac{1}{x}$. Разложить по формуле Тейлора *n*-ого порядка при $x_0=1$.

Решение.

$$y(x_0)=1, y'(x)=-\frac{1}{x^2}, y'(x_0)=-1, y''(x)=\frac{2}{x^3}, y''(x_0)=2, y'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4},$$

$$y'''(x_0)=-2\cdot 3, \ldots, y^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, y^{(n)}(x_0)=(-1)^n n!, y^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{(n+2)}}.$$

Подставляя полученные производные в формулу Тейлора, имеем:

$$\frac{1}{x}=1-1(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{2\cdot 3}{3!}(x-1)^3+\ldots+(-1)^n\frac{n!}{n!}(x-1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{\xi^{n+2}(n+1)!}(x-1)$$

Или:

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+(-1)^{n+1}\frac{1}{\xi^{n+2}}(x-1)^{n+2}.$$

Тот же результат можно было получить из приведенного выше стандартного разложения:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots$$

14.2.3. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\ln(1+x), x\in(-1,1)$.

Оценить погрешность, допускаемую при сохранении 10 членов.

Решение. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}; f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}; f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}; f^{\mathrm{IV}}(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{(1+x)^4};$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}; \frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k(1+x)^k}; \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \underbrace{\frac{x^{10}}{(1+\xi)^{10}\cdot 10}}_{\textit{остаточный член}}.$$

Если остаточный член отбросить, то погрешность
$\left|-\frac{x^{10}}{(1+\xi)^{10}10}\right| \le \frac{1}{10}\left|\frac{1}{(1+\xi)^{10}}\right| \le \frac{1}{10}.$

14.2.4. Пусть $f(x) = e^x$. Сколько нужно взять членов в формуле Маклорена, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на $[-1,1]$ с точностью до 0.001?

Решение. $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$; обозначая точку ξ в формуле Тейлора как $\xi = \theta x,\ 0 < \theta < 1$, имеем: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

$\left|e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e}{(n+1)!}$. Чтобы $\left|e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{1}{1000}$, достаточно потребовать, чтобы $\frac{e}{(n+1)!} \le \frac{1}{1000}$ Т.е. достаточно найти такое n, чтобы $(n+1)! \ge 1000e$.

$1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; 5! = 120; 6! = 720; 7! = 720 \cdot 7 > 1000e$. Т.е. $n = 6 \Rightarrow$ нужно взять 7 членов (перед остаточным членом стоит $n + 1$ член).

14.2.5. Разложить по формуле Маклорена функции $y = shx$ и $y = chx$.

Решение. $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Как указано выше, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$

Заменяя в обеих частях этой формулы x на $-x$, имеем: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$

Вычитая и складывая эти формулы, получаем: $e^{-x} - e^x = 2(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)$ и $e^{-x} + e^x = 2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)$, откуда $shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ и

$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ (сравните с разложением функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$).

14.3. Задачи для самостоятельного решения

14.3.1. $f(x) -$ многочлен 4ой степени. Зная, что

$f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{iv}(2) = 24,$ найти

$f(-1), f'(0), f''(1).$

14.3.2. Написать формулу Тейлора 3-го порядка с остаточным членом в форме

Пеано для функции $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4.$

14.3.3. Написать формулу Маклорена 2-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y = tgx.$

14.3.4. Написать формулу Маклорена 3-го порядка с статочным членом в форме Пеано для функции $y = \arcsin x.$

Ответы: 14.3.1. $f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$

14.3.2. $y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + o(x-4)^3.$

14.3.3. $y = x + \frac{1}{3}\frac{1+2\sin^2\theta x}{\cos^4\theta x}x^3, 0 < \theta < 1.$ **14.3.4.** $y = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x)^3.$

ЗАНЯТИЕ 15

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА (продолжение)

15.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

15.1.1. Разложить функцию $f\left(x\right) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$ по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до 4-го порядка малости включительно.

Решение. $f\left(x\right) = \sin^2 x - x^2 e^{-x} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - x^2 e^{-x}.$ Используя готовые разложения функций cos2*x* (с заменой *x* на 2*x*) и e^x (с заменой *x* на –*x*), имеем:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}) + o(x^4)\right) - x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$=\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)-\left(x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)=x^3-\frac{5}{6}x^4+o(x^4).$$

15.1.2. Пусть $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$. Написать разложение по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до 4-го порядка малости включительно.

Решение. Используя готовое разложение функции $\frac{1}{1+x}$, имеем:

$$f(x)=\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)-1}=\frac{1}{1+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}_{q}}=$$

$$=1-q+q^2-q^3+q^4+o(x^4)=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+$$

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{36}+2\frac{x}{2}\frac{x^2}{6}+2\frac{x}{2}\frac{x^3}{24}\right)-$$

$-\left(\frac{x^3}{8}+3\frac{x^2}{4}\frac{x^2}{6}\right)+\frac{x^4}{16}+o\left(x^4\right)$, что после приведения подобных членов даёт

$$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4).$$

Как уже было видно из примеров 14.2.3. и 14.2.4., формулу Тейлора можно применять для приближенных вычислений.

15.1.3. Найти $\cos 10^0$ с точностью до 0,001. Доказать, что для достижения указанной точности достаточно взять формулу Тейлора 2-ого порядка.

Решение. Разложение по формуле Маклорена $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$ даёт, что

$\cos 10^0=\cos\frac{\pi}{18}\approx 1-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2}\approx 1-0{,}01523=0{,}98477.$ Погрешность этого ответа

это остаточный член формулы $R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3=\frac{1}{6}\sin\xi\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$ и

$\left|R_2(\mathrm{x})\right| \le \frac{1}{6}\left|\xi\right|\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \le \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \le \frac{1}{6}\left(\frac{4}{18}\right)^4 = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{8}{19683} \le \frac{1}{1000}$, т.к. $8000 \le$ 19683.

Заметим, что приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ следует и из формулы Тейлора 3его порядка ($f'''(0) = 0$), и тогда оценка погрешности будет иметь вид $\left|R_3(x)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4\right| = \left|\frac{1}{24}\cos\xi\left(\frac{\pi}{18}\right)^4\right| \le \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4$, что уменьшает погрешность.

Формула Тейлора также бывает полезной при вычислении пределов.

15.1.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\mathrm{tg}^4 x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\mathrm{tg}^4 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}\frac{x^4}{\mathrm{tg}^4 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4} =$

(разложим числитель по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно, используя готовые разложения $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ с заменой x на x^2 и $\cos x$)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^4\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)x^4}{x^4} +$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

15.1.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Решение. Аналогично предыдущему, из готовых разложений функций $y=\cos x$ и $y=e^x$ (с заменой x на $-\frac{x^2}{2}$) до членов с x^4 включительно, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}\right)+o(x^4)\right)=$

$= =\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{12}.$

15.2. Задачи для самостоятельного решения

15.2.1. Написать формулу Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано при $x_0=1$ для функции $y=x^3\ln x$.

15.2.2. $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$. Найти первые 3 члена разложения $f(x)$ по степеням $x-1$ и вычислить приближенно $f(1{,}005)$.

15.2.3. Проверить, что для углов, меньших 28^0, ошибка, которая получится при замене $\sin x$ на $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, будет меньше $0{,}000001$. Пользуясь этим, вычислить $\sin 20^0$ с шестью верными цифрами.

15.2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right)$. **15.2.5.** Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$.

Ответы: 15.2.1. $x-1+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2\cdot 3}(x-1)^3+\frac{1}{3\cdot 4}(x-1)^4-...+(-1)^n(x-1)^n+$ $+o(x-1)^n$, $|x-1|<1$. **15.2.2.** $f(x)=1+60(x-1)+2570(x-1)^2++...$; $f(1{,}005)\approx 1{,}364$. **15.2.3.** 0,342020. **15.2.4.** $\frac{1}{3}$. **15.2.5.** $-\frac{1}{2}$.

ЗАНЯТИЕ 16

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМ

16.1. Определения и формулировки теорем

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого отрезка.

Теорема 16.1. $f(x)=\text{const}, x\in[a,b] \Leftrightarrow f'(x)=0,\ x\in(a,b)$.

Определение 16.1. $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, если $f(x_1)>f(x_2)$ $\left(f(x_1)<f(x_2)\right)$ при $x_1>x_2$ $\left(x_1,x_2\in[a,b]\right)$.

Теорема 16.2. Пусть $f(x)$ возрастающая (убывающая) на $[a,b] \Rightarrow f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right), x\in(a,b)$. Пусть $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right), x\in(a,b) \Rightarrow f(x)$ возрастающая (убывающая) на $[a,b]$.

Определение 16.2. $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, что в этой окрестности $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума этой функции.

Теорема 16.3. (необходимое условие экстремума). Пусть $f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0\in(a,b)$ $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ равна 0 или не существует (в частности равна ∞).

Точки, где производная функции равна 0 или не существует, называются критическими точками функции. Пример $y=x^3$ показывает, что критические точки не обязательно являются точками экстремума.

Теорема 16.4. (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, разве что, самой точки x_0) имеет конечную производную $f'(x)$. Тогда, если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$ (с $-$ на $+$), то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (минимум); если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ знака не меняет, то в точке x_0 экстремума у функции $f(x)$ нет.

Теорема 16.5. (достаточное условие экстремума в терминах второй производной).

Пусть $f'(x)$ существует в окрестности точки x_0 и $f'(x_0)=0$, и существует $f''(x_0)$. Тогда если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума $f(x)$; если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума $f(x)$.

Теорема 16.6. (достаточное условие экстремума в терминах производных высших порядков).

Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\ne 0$. Тогда при n четном, если $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума, если $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума $f(x)$; при n нечетном экстремума у $f(x)$ в точке x_0 нет.

Теорема 16.7. (метод нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке). Для этого нужно найти все критические точки функции на этом отрезке, вычислить значения функции в этих точках и на краях отрезка и взять наибольшее и наименьшее из этих значений.

16.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

16.2.1. Найти интервалы возрастания/убывания и точки экстремума функции $f\left(x\right)=x^2e^{-x}$.

Решение. $f^{'}\left(x\right)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}x(2-x)\Rightarrow$ $f^{'}\left(x\right)=0$ при $x=0$ и при $x=2$. Т.к. $f^{'}(x)$ всюду непрерывна, знак $f^{'}(x)$ может меняться лишь при переходе через эти точки. Знаки $f^{'}(x)$:

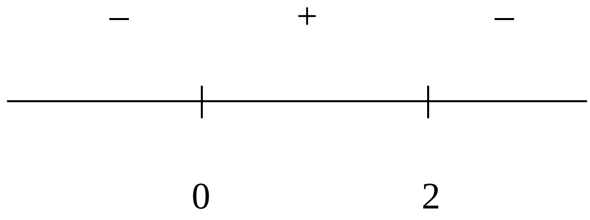


Рис. 16.1

$\Rightarrow$ $\left(-\infty,0\right)$ – функция убывает; $\left(0,2\right)$ – функция возрастает; $(2,+\infty)$ – функция убывает; $x=0$ – точка минимума; $x=2$ – точка максимума функции.

16.2.2. Найти точки экстремума функции $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

Решение. $y^{'}=3\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-2x=2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)=2\dfrac{1-x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}}$; $1-x^{\frac{4}{3}}=0\Rightarrow$ $x^4=1$;

$x=\pm1$. Критические точки: $x=\pm1$, $x=0$ (в этой точке производная не существует. Знаки производной:

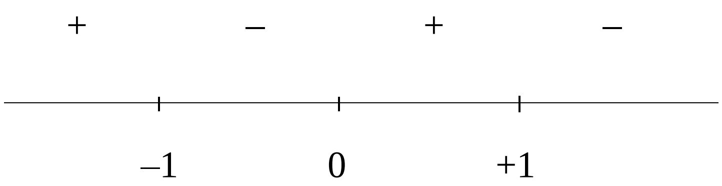


Рис. 16.2

$\Rightarrow x=-1$ – точка максимума $\left\{f\left(-1\right)=2\right\}$; $x=0$ – точка минимума, в которой касательная вертикальна $\left\{f\left(0\right)=0\right\}$; $x=1$ – точка максимума $\left\{f\left(1\right)=2\right\}$.

16.2.3. Найти точки экстремума функции $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Решение. В силу периодичности $f(x)$ рассмотрим только отрезок $\left[0, 2\pi\right]$.
$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x\cos x = 2\cos x(1-2\sin x) = 0$; $\cos x = 0 \Rightarrow$
$x_1 = \dfrac{\pi}{2}, x_2 = \dfrac{3\pi}{2}; 1-2\sin x = 0, \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{6}, x_4 = \dfrac{5\pi}{6}$;
$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x$;

$y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2+4>0$; $y''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2+4>0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ – точки минимума;
$y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -1-2<0$; $y''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -1-2<0 \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{6}$ и $x_4 = \dfrac{5\pi}{6}$ – точки максимума.

16.2.4. Пусть $y = f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$. $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x \Rightarrow x = 0$ - стационарная точка, т.е. $f'(0) = 0$ (могут быть и другие стационарные точки). Исследовать функцию на экстремум в этой точке.

Решение. $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$; $f''(0) = 0$ – теорема 16.5. ответа на вопрос не дает; применим теорему 16.6.: $f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$; $f'''(0) = 0$; $f^{\mathrm{IV}}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$; $f^{\mathrm{IV}}(0) = 4 > 0 \Rightarrow x = 0$ – точка минимума.

16.2.5. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

Решение. Пусть R – радиус шара. Нужно найти r – радиус основания цилиндра и h – высоту цилиндра.

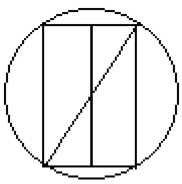


Рис. 16.3

$$\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4R^2 - h^2}{4},\ 0 \le h \le 2R;$$
$$S(h) = 2\pi rh = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} = \pi\sqrt{4R^2h^2 - h^4}.$$

Достаточно найти значение $h \in \left[0, 2R\right]$, при котором подкоренное выражение $f(h)=4R^2h^2-h^4$ достигает наибольшего значения на $\left[0,2R\right]$. $f'\left(h\right)=8R^2h-4h^3$; критические точки: $h=0$ *и* $h^2=2R^2 \Rightarrow h=R\sqrt{2}$; $f\left(0\right)=0$; $f\left(2R\right)=0$; $f\left(R\sqrt{2}\right)>0 \Rightarrow f(h)$ достигает своего наибольшего

значения при $h=R\sqrt{2}$ и $r=\dfrac{\sqrt{4R^2-h^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{4R^2-2R^2}}{2}=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

16.2.6. Найти размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество плитки. Решение. Пусть размеры бассейна $x\times x\times h$. $V=x^2h=32 \Rightarrow h=\dfrac{32}{x^2}$.

Площадь облицовываемой поверхности $S(x)=\underbrace{x^2}_{\text{площадь дна}}+\underbrace{4xh}_{\text{площадь боковой поверхности}}=$

$=x^2+4x\dfrac{32}{x^2}=x^2+\dfrac{128}{x}$. Нужно найти такое $x>0$, чтобы $S(x)$ была наименьшей. $S'=2x-\dfrac{128}{x^2}=\dfrac{2x^3-128}{x^2}=2\dfrac{x^3-4^3}{x^2}=2\dfrac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2}$.

Критическая точка: $x=4$, знак производной при переходе через эту точку слева направо меняется с – на + , значит это точка минимума функции. Т.к. на всем промежутке изменения переменной $x\in\left(0;\infty\right)$ других критических точек у функции нет, в этой точке функция принимает наименьшее значение. $h=\dfrac{32}{x^2}=\dfrac{32}{16}=2 \Rightarrow$ искомые размеры бассейна это $4\times4\times2$.

16.3. Задачи для самостоятельного решения

16.3.1. Найти экстремумы функции $y=\left(x-5\right)^2\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}$.

16.3.2. Найти экстремумы функции $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

16.3.3. При каком значении *a* функция $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ будет иметь экстремум в точке $x=\dfrac{\pi}{3}$? Будет ли это максимум или минимум?

16.3.4. Имеет ли функция $y=6\ln x-2x^3+9x^2-18x$ экстремум в точке

$x=1$? **16.3.5.** Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

16.3.6. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

16.3.7. Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать гонца в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость гонца пешком 5 км/час, а на веслах 4 км/час. В каком пункте берега должен пристать гонец, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Ответы: 16.3.1. Максимум: $\left(\frac{1}{2},\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}\right)$, минимумы: $(-1,0)$ и $(5,0)$. **16.3.2.** Максимум: $\left(1,\frac{5}{2}\right)$, минимум: $\left(\mathrm{e},\frac{e(4-e)}{2}\right)$. **16.3.3.** При $a=2$ максимум. **16.3.4.** Максимум, равный -11. **16.3.5.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **16.3.6.** $4R$. **16.3.7.** В 3 км от лагеря.

ЗАНЯТИЕ 17

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

17.1. Определения и формулировки теорем

Определение 17.1. Кривая $y=f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, если в некоторой окрестности точки M_0 все точки кривой лежат под (над) касательной, проведенной в точке M_0 (то есть ординаты точек кривой $\leq$ ($\geq$) ординат соответствующих, точек касательной). Кривая выпукла (вогнута) на интервале, если она выпукла (вогнута) в каждой точке этого интервала.

Определение 17.2. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в каждой ее окрестности есть и точки кривой, лежащие над касательной, и точки кривой, лежащие под касательной (проведенной в точке M_0). В точке перегиба кривая пересекает касательную.

Теорема 17.1. Пусть существует $f''(x_0)$. Если $f''(x_0)>0$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ кривая $y=f(x)$ вогнута; если $f''(x_0)<0$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ кривая $y=f(x)$ выпукла.

Теорема 17.2. Пусть $f''(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0

(кроме, может быть, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то $M_0 = M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

Определение 17.3. Пусть дана кривая, которая в том или ином направлении удаляется в бесконечность. Прямая линия называется асимптотой этой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой стремится к 0 при движении M вдоль кривой в бесконечность.

Теорема 17.3. (нахождение вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот). Прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или то и другое сразу. Прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $\Leftrightarrow k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Аналогично при $x \to -\infty$.

Примерная схема исследования функции

1. Найти область определения функции и выяснить поведение функции на ее границе.
2. Выяснить, не является ли функция четной (график симметричен относительно оси *OY)*, нечетной (график симметричен относительно начала координат) или периодической (график строится на интервале длиной в период, а затем продолжается по периодичности).
3. Исследовать функцию на непрерывность.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки экстремума функции, выяснить значения функции в этих точках. Установить интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти точки перегиба графика, вычислить значения функции и ее первой производной в этих точках. Установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
7. Используя результаты исследования, построить график функции.

При необходимости можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения с осями OX и OY).

17.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

17.2.1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Решение. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$; $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}} \neq 0$ и не существует при $x = -2$.

$y'' < 0$ при $x > -2$ и $y'' > 0$ при $x < -2$ $\Rightarrow$ при $x \in (-\infty, -2)$ кривая вогнута, при $x \in (-2, +\infty)$ кривая выпукла, $M_0(-2, 0)$ – точка перегиба исходной кривой.

17.2.2. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{3x^2}{x-1}$.

Решение. Вертикальная асимптота: $x = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{3x}{x-1} = +\infty;\right.$ $\left.\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{3x}{x-1} = -\infty\right)$. Наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3;\ b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1} = 3 \Rightarrow$$

$y = 3x + 3$ – асимптота (при $x \to \pm\infty$).

17.2.3. Исследовать функцию из задачи 17.2.2. и построить ее график.

Решение. Функция определена для $x \neq 1$, в точке $x = 1$ имеет разрыв второго рода, график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и наклонную асимптоту $y = 3x + 3$ при $x \to \pm\infty$.

$y' = \dfrac{6x(x-1) - 3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$; из знаков y' видно, что функция

возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ и убывает на $(0, 2)$, $x = 0 -$ точка максимума

(в ней $y = 0$), $x = 2 -$ точка минимума (в ней $y = 12$).

$$y'' = 3\left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = 3\frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = 6\frac{(x-1)^2 - (x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$= \dfrac{6}{(x-1)^3}$; $y'' > 0$ при $x > 1$ (кривая вогнута) и $y'' < 0$ при $x < 1$ (кривая выпукла), точек перегиба график не имеет, т.к. наша функция разрывна в точке $x = 1$. График функции имеет вид:

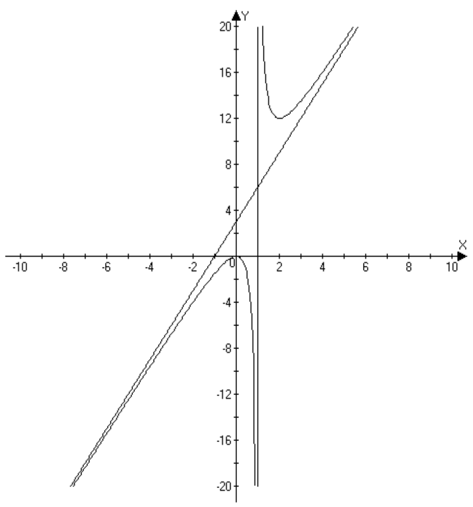


Рис. 17.1

График не пересекает наклонную асимптоту (в противном случае он бы имел точки перегиба при $x > 1$ или при $x < 1$, а таких точек нет).

17.2.4. Исследовать функцию $y = x/2 - arctg\ x$ и построить ее график.

Решение. Функция определена для всех x и является нечетной; она всюду непрерывна – вертикальных асимптот нет. Наклонные и горизонтальные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{arctgx}{x}\right) = \frac{1}{2} - \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}arctgx = \frac{1}{2}$, т.к. произведение б.м. функции на ограниченную функцию есть функция б.м.,
$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x/2 - arctgx - x/2\right) = -\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctgx$, что равно $-\pi/2$ при $x \to +\infty$ и $\pi/2$ при $x \to -\infty$; значит, асимптотами графика будут прямые $y = x/2 \mp \pi/2$ при $x \to \pm\infty$ соответственно.

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$; из знаков y' видно, что функция возрастает на $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ и убывает на $(-1,1)$; $x = -1$ – точка максимума, в ней $y = -1/2 + \pi/4$; $x = 1$ – точка минимума, в ней $y = 1/2 - \pi/4$.

$y'' = \frac{2x(1+x^2)-(x^2-1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$, а это выражение > 0 при $x > 0$ (вогнутость) и < 0 при $x < 0$ (выпуклость), (0;0) – точка перегиба графика. График функции имеет вид:

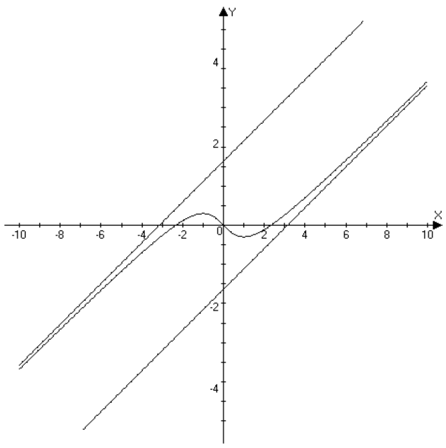
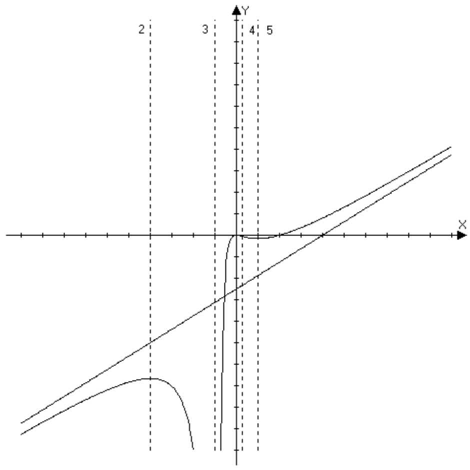


Рис. 17.2

17.2.5. По данному графику функции (см. рис. 17.3) построить график ее производной.



Решение:

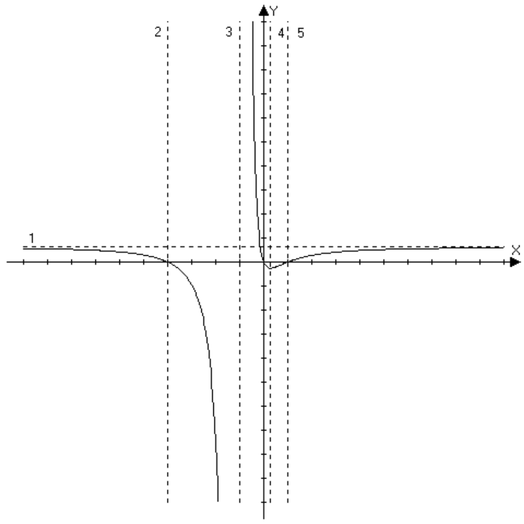


Рис. 17.3

Там, где функция возрастает (убывает), ее производная положительна (отрицательна); в двух точках максимума и одной точке минимума производная равна 0; точки перегиба графика функции - точки экстремума производной (при переходе через них вторая производная - производная от первой производной, меняет знак); в точках бесконечного разрыва функции ее производная тоже имеет бесконечный разрыв; если $y = kx + b$ асимптота графика функции, то $y = k$ асимптота графика производной.

17.3. Задачи для самостоятельного решения

17.3.1. При каких значениях a и b точка (1,3) будет точкой перегиба кривой $y = ax^3 + bx^2$? **Исследовать функции и построить их графики:**

17.3.2. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$. **17.3.3.** $y = x^3 e^{-x}$. **17.3.4.** $y^2 = \left(1 - x^2\right)^3$.

17.3.5. По графику функции построить график её производной:

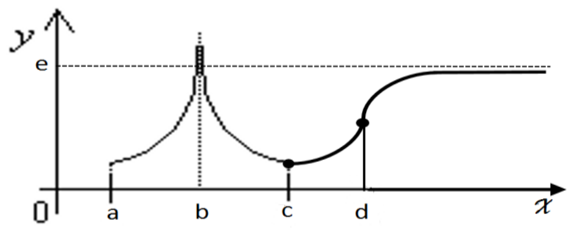


Рис. 17.4.

Ответы: **17.3.1.** $a=-\frac{3}{2},\ \ b=\frac{9}{2}.$ **17.3.2.** Определена при $x\neq 1$, асимптоты $x=1$ и $y=x$, точки максимума и минимума $(0,0)$ и $\left(\sqrt[3]{4},\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\right)$, точка перегиба $\left(-\sqrt[3]{2},-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. **17.3.3.** Определена всюду, асимптота $y=0$, точка максимума $\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$, абсциссы точек перегиба 0 и $3\pm\sqrt{3}$. **17.3.4.** Определена при $x\in[-1,1]$, график симметричен относительно обеих осей координат, асимптот нет, точка максимума $(0,1)$, точка минимума $(0,-1)$, точки перегиба $\left(\pm\sqrt{2}/2,\pm\sqrt{2}/2\right)$. **17.3.5.** График производной имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to+\infty$, разрыв второго рода в точке $x=b$, $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to b+0} f'(x)=-\infty$, $f'(c)=0$,в точке $x=d$ у графика производной максимум.

ЗАНЯТИЕ 18.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ . НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

18.1. Основные понятия.

18.1. Основные понятия.

Определение 18.1.1. Переменная u называется *функцией* n *переменных* $x_1,x_2,...,x_n$, если каждой совокупности чисел (точке) $M(x_1,x_2,\dots x_n)$ из множества $D\subset R^n$ ($D-$ *область определения*) ставится в соответствие одно значение переменной $u\in U$ ($U-$*множество значений*).

Обозначения: $u=u(x_1,x_2,\dots x_n), u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ и др.

Определение 18.1.2. Областью определения функции называется совокупность всех точек, в которых она принимает действительные значения.

Простейшим случаем функции нескольких переменных является функция *двух переменных*.

Определение 18.1.3. *Графиком* функции двух переменных $u = f(x;y)$ называется множество точек пространства R^3, удовлетворяющих условию: $(x;y;f(x,y))$.

Определение 18.1.4. *Линией уровня функции двух переменных* называется линия на плоскости *XOY*, принадлежащая области определения, в каждой точке которой функция принимает одно и то же значение: $f(x,y)=c$.

Определение 18.1.4.1. Для функции трех переменных $u = f(x,y,z)$ вводится понятие *поверхности уровня, как поверхности определяемой уравнением* $f(x,y,z)=c$.

Пример 1. Линии уровня функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ представляют окружности $x^2+y^2=R^2-c^2$ $(|c|\le|R|)$, $z=0$.

*Пример 2.*Поверхностями уровня для функции $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$ будут параболоиды $z-x^2-y^2=c$ или $z-c=x^2+y^2(c\le z)$.

Определение 18.1.5. Число А называется пределом функции $u = f(x;y)$ в точке $M_0(x;y)$, если для любого $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, такое что, как только расстояние $M_0M<\delta(\varepsilon)$, выполняется условие $|F(M)-F(M_0)|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{M\to M_0} F(M)=A$.

Определение 18.1.6. Функция $z = f(x;y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0;y_0)$если определена в окрестности точки и $\lim\limits_{M\to M_0} F(M)=F(M_0)$.

Определение 18.1.7. Функция $z = f(x;y)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области**.**

Определение 18.1.8. Если функция непрерывна в окрестности точки, а в самой точке не выполняется условие непрерывности, то точка называется *точкой разрыва*.

18.2. Частные производные.

Определение 18.2.1. Производная от функции $u = f(x, y, z \ldots t)$, взятая по x, в предположении, что все остальные аргументы являются постоянными, называется частной производной от u по x, и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots t) - f(x, y, z, \ldots t)}{\Delta x}$$

Аналогично определяются частные производные по каждому из остальных аргументов.

Определение 18.2.2. Частные производные от частных производных (если они существуют) называются частными производными *второго порядка* (вторыми частными производными) от данной функции.

Обозначения: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}'' = \left(f_x'\right)_x'$ – вторая производная по переменной x;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}'' = \left(f_x'\right)_y'$ – вторая смешанная производная.

Определение 18.2.3. Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными *третьего порядка* от данной функции (и так далее).

Теорема 18.2.4. В случае непрерывности результат повторного дифференцирования функции двух переменных не зависит от порядка дифференцирования.

Например, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right).$

18.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

18.3.1. Найти области определения 1) $z = x^2 + y^2$**;** 2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Решение. 1) Функция $z = x^2 + y^2$ определена для всех пар $(x; y)$.

2) Область определения функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – множество пар чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \le R^2$, геометрической интерпретацией которого является замкнутый круг с центром в точке (0,0) и радиусом R.

18.3.2. Построить линии уровня функции $\boldsymbol{z}^2 = \frac{\boldsymbol{x}^2}{9} + \text{y}^2$

Решение. Положив $z = const$. Линии уровня представляют семейство концентрических эллипсов.

18.3.3. Найти области определения функции: $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$

Решение. Область определения этой функции – множество точек , координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2+y^2-z^2>0$. Это множество точек трехмерного пространства, лежащих внутри конуса $z^2=x^2+y^2$.

18.3.4. Найти поверхности уровня функции трех переменных $u=x^2+y^2-z^2$**.**

Решение. Поверхностями уровня функции $u=x^2+y^2-z^2$ являются поверхности, определяемые уравнениями $x^2+y^2-z^2=C$. При $C>0$ это однополостные гиперболоиды вращения вокруг оси Oz; при $C<0$ это двуполостные гиперболоиды вращения вокруг той же оси.

Оба эти семейства разделяет конус $z^2=x^2+y^2\ (C=0)$.

18.3.5. Определить пределы: 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\dfrac{x-7y}{x^3y}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+2y}{y}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\dfrac{x-7y}{x^3y}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\dfrac{x}{x^3y}-7\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\dfrac{\cancel{y}}{x^3\cancel{y}}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2y}-7\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{1}}{x^3}=0-\dfrac{7}{27}=\underline{-\dfrac{7}{27}}.$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+2y}{y}=\left\langle y=kx\right\rangle=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2kx}{kx}=\dfrac{1+2k}{k}$. Рассмотрим изменение переменных x и y вдоль прямых $y=kx$, при этом предел принимает различные значения в зависимости от выбранного k. Предел не существует.

18.3.6. Определить частные производные первого порядка функции:

$$z(x;y)=\cos^2\left(3x^2y\right)$$

Решение. $z'_x=-6xy\cdot\sin\left(6x^2y\right)$; $z'_y=-3x^2\cdot\sin\left(6x^2y\right)$.

18.3.7. Для функции $z=8x^4y^3-3x^2y+2x-15y+1$ определить все вторые производные.

Решение. $z'_x=32x^3y^3-6xy+2$; $z'_y=24x^4y^2-3x^2-15$;

$z''_{x^2}=96x^2y^3-6y$; $z''_{y^2}=48x^4y$; $z''_{xy}=z''_{yx}=96x^3y^2-6x$.

18.4. Задачи для самостоятельного решения

18.4.1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$**.**

18.4.2. Найти область определения функции**: а)** $u= 1/\sqrt{x}+ 1/\sqrt{y}+ 1/\sqrt{z}$**;**

б) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $\left(R>r\right)$**.**

18.4.3. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$**.**

18.4.4. Найти точки разрыва функции $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$. Как ведет себя функция в окрестности точки разрыва?

18.4.5. Построить линии уровня функции $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ для $z=1;2;3;4$**.**

18.4.6. Найти поверхности уровня функции $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$**.**

18.4.7. Найти частные производные первого порядка по каждой из независимых переменных: а) $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$; в) $z=(1+xy)^y$.

18.4.8. Показать, что $z''_{xy}=z''_{yx}$ для а) $z=x^y$, б) $z=arccos\sqrt{x/y}$.

18.4.9. Найти все частные производные второго порядка для $z=e^{xe^y}$ **.**

18.4.10. Найти все частные производные второго порядка для $z=\ln\left(x^2+yx\right)$.

18.4.11. $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$**.** Показать, что $z''_{xx}+z''_{yy}=0$**.**

Ответы. 18.4.2. а) $x>0, y>0, z>0$; б) часть пространства, заключенная между сферами $x^2+y^2+z^2=r^2$ и $x^2+y^2+z^2=R^2$, включая поверхность внешней и исключая поверхность внутренней сферы**. 18.4.3.** 0**. 18.4.4.** Точка (0;0). **18.4.5**. Окружности**. 18.4.6.** Параболоиды вращения $x^2+y^2=Cz$**.**

18.4.7. а) $z'_x=\sqrt{y}-\dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$**,** $z'_y=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **; б)** $z'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$**,** $z'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ **;**

в) $z'_x = y^2(1+xy)^{y-1}$**,** $z'_y = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \ln(1+xy)$**.**

18.4.9. $z''_{xx} = e^{xe^y+2y}$**,** $z''_{yy} = x(1+xe^y)e^{xe^y+y}$**,** $z''_{xy} = (1+xe^y)e^{xe^y+y}$**. 18.4.10.**
$z''_{xx} = -\dfrac{2x^2+2xy+y^2}{\left(x^2+xy\right)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{yy} = -\dfrac{x^2}{\left(x+y\right)^2}$.

ЗАНЯТИЕ 19.

19.1.Понятие полного дифференциала.

Определение 19.1.1. Полным приращением называется изменение функции $u = f\left(x;y\right)$ при совместных изменениях независимых переменных.

$\Delta u = f\left(x+\Delta x; y+\Delta y\right) - f\left(x;y\right)$.

Определение 19.1.2. Главная (линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy) часть приращения функции называется *полным дифференциалом* функции двух переменных: $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$.

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y = z'_x dx + z'_y dy$$

19.1.3. Если x и y независимые переменные и функция имеет непрерывные частные производные, то *дифференциалы высших порядков* вычисляются

$d^n f = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n f$ (формально раскрывается по биномиальному закону). В частности, для двух переменных имеем

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

19.2. Формула Тейлора.

Формула 19.2.1. Пусть функция $u = f\left(x;y\right)$ имеет в окрестности точки $M_0\left(x;y\right)$ непрерывные частные производные до $n+1$ порядка включительно. Пусть точка $M\left(x;y\right)$ принадлежит окрестности точки M_0(x;y). Формула Тейлора $n-$ го порядка, записанная с помощью дифференциалов имеет вид:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + df\big|_{(x_0;y_0)} + \frac{1}{2!}d^2 f\big|_{(x_0;y_0)} + \frac{1}{3!}d^3 f\big|_{(x_0;y_0)} + \ldots + R_n.$$

Остаточный член $R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} z\Big|_{(x_0+\theta\Delta x; y_0+\theta\Delta y)}$, где $0 < \theta < 1$.

Частный случай формулы при $x_0 = y_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*.

19.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

19.3.1. Определить полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $(1;2)$ при $\Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = 0{,}2$.

Решение.

$$z'_x\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = \frac{y}{1+x^2y^2}\Big|_{x=1,y=2} = \frac{2}{5} = 0{,}4; \quad z'_y\Big|_{x=1,y=2} = \frac{x}{1+x^2y^2}\Big|_{x=1,y=2} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

$$dz = z'_x\Big|_{(1;2)} \cdot \Delta x + z'_y\Big|_{(1;2)} \cdot \Delta y = 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$

19.3.2. Найти дифференциал второго порядка функции $z = \ln\left(x - y^2\right)$.

Решение. **(См. 19.1.3):**

$$z'_x = \frac{1}{x-y^2};\ z'_y = -\frac{2y}{x-y^2};\ z''_{x^2} = -\frac{1}{\left(x-y^2\right)^2};\ z''_{xy} = \left(\frac{1}{x-y^2}\right)'_y = \frac{2y}{\left(x-y^2\right)^2};$$

$$z_{y^2}'' = \left(\frac{-2y}{x-y^2}\right)' = \frac{2x-2y^2}{\left(x-y^2\right)^2}. \qquad d^2z = \frac{-dx^2 + 4ydxdy + (-2x-2y^2)dy^2}{(x-y)^2}$$

19.3.3. Разложить функцию $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(-2;1)$.

Решение. Вычисляем частные производные функции и их значения в заданной точке: $f(-2;1) = 1;\ f'_x\Big|_{(-2;1)} = (-2x+2y-6)\Big|_{(-2;1)} = 0;\ f'_y\Big|_{(2;1)} = (2x+6y-2)\Big|_{(-2;1)} = 0;$

$f''_{x^2}\Big|_{(2;1)} = -2;\ f''_{xy}\Big|_{(2;1)} = 2;\ f''_{y^2}\Big|_{(2;1)} = 6$. Все дальнейшие производные тождественно равны нулю. Подставляя найденные результаты в **19.2.1,** получаем:

$$f(x;y) = 1 - \frac{1}{2!}\left(2(x+2)^2 - 4(x+2)(y-1) - 6(\mathrm{y}-1)^2\right).$$

19.3.4. Разложить функцию $f(x;y) = e^x \sin y$ по формуле Маклорена до члена 3-го порядка включительно.

Решение. Запишем формулу Маклорена до члена 3-го порядка в общем виде:

$$(*)\quad f(x;y)=f(0;0)+f'_x\big|_{(0;0)}\cdot x+f'_y\big|_{(0;0)}\cdot y+\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}\big|_{(0;0)}\cdot x^2+2f''_{xy}\big|_{(0;0)}\cdot xy+\right.$$

$$\left.+f''_{y^2}\big|_{(0;0)}\cdot y^2\right)+\frac{1}{3!}\left(f'''_{x^3}\big|_{(0;0)}\cdot x^3+3f'''_{x^2y}\big|_{(0;0)}\cdot x^2y+3f'''_{xy^2}\big|_{(0;0)}\cdot xy^2+f'''_{y^3}\big|_{(0;0)}\cdot y^3\right)+R_3.$$

Вычислим функцию и последовательные частные производные в данной точке.

$$f(0;0)=0;\quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0;0)}=e^x\sin y\big|_{(0;0)}=0;\quad f'_y\big|_{(0;0)}=e^x\cos y\big|_{(0;0)}=1;$$

$$f''_{x^2}\big|_{(0;0)}=e^x\sin y\big|_{(0;0)}=0;\quad f''_{xy}\big|_{(0;0)}=e^x\cos y\big|_{(0;0)}=1;\quad f''_{y^2}\big|_{(0;0)}=-e^x\sin y\big|_{(0;0)}=0;$$

$$f'''_{x^3}\big|_{(0;0)}=e^x\sin y\big|_{(0;0)}=0;\quad f'''_{x^2y}\big|_{(0;0)}=e^x\cos y\big|_{(0;0)}=1;$$

$$f'''_{xy^2}\big|_{(0;0)}=-e^x\sin y\big|_{(0;0)}=0;\qquad f'''_{y^3}\big|_{(0;0)}=-e^x\cos y\big|_{(0;0)}=-1.$$

Подставляя найденные частные производные в формулу $(*)$, получим:

$$e^x\sin y=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+R_3.$$

19.4. Задачи для самостоятельного решения

19.4.1. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$**.**

19.4.2. Найти значение полного дифференциала функции $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$

при $x=3$**,** $y=4$**,** $\Delta x=0{,}1$**,** $\Delta y=0{,}2$**.**

19.4.3. Доказать, что если $u=\sqrt{x^2+y^2}$, то $d^2u\ge 0.$

19.4.4. $z=\sin(2x+y)$**.** Найти d^3z в точках $(0,\pi)$**,**$(-\pi/2,\pi/2)$**.**

19.4.5. Разложить функцию $f(x+h,y+k)$ по степеням h h и k k, если $f(x,y)=x^3+3y^3-xy$**.**

19.4.6. Разложить $z=\sin x\sin y$ по степеням $x-\pi/4$ и $y-\pi/4$. Найти члены первого и второго порядка и R_2.

Ответы.

19.4.1. $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$. **19.4.2.** $0{,}08$. **19.4.4.** $-\cos(2x+y)(2dx+dy)^3$, $(2dx+dy)^3$, 0.

19.4.5. $x^3+2y^3-xy+h\left(3x^2-y\right)+k\left(6y^2-x\right)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.

19.4.6. $z=0{,}5+0{,}5h+0{,}5k-0{,}25\left(h^2-2hk+k^2\right)+R_2$, где $h=x-\pi/4$,

$k=y-\pi/4$; $R_2=-\dfrac{1}{6}(\cos\xi\cos\eta\cdot h^3+3\sin\xi\cos\eta\cdot h^2k+3\cos\xi\sin\eta\cdot hk^2+$
$+\sin\xi\cos\eta\cdot k^3)$.

ЗАНЯТИЕ 20.

20.ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ.

20.1. Сложные функции и их дифференцирование

Определение.**20.1.1.** Если $z=f(u;v)$, и $u=u(x;y)$, $v=v(x;y)$ являются функциями двух переменных x и y, то z называется *сложной функцией* двух переменных: $z=f\left(u(x;y);v(x;y)\right)$. Если $z=f(u;v)$, имеет непрерывные частные производные, и $u=u(x;y)$, $v=v(x;y)$ – дифференцируемые функции, тогда ее частные производные определяются по формулам:

$$\boxed{z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x;\quad z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y.}$$

Следствие 1. Если $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные и $x=x(t)$, $y=y(t)$ – дифференцируемые функции, то *полная производная* определяется по формуле: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t$.

Следствие 2. Если $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные и $y=y(x)$ – дифференцируемая функция, то ее полная производная определяется по формуле: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=z'_x+z'_y\cdot y'_x$.

20.2. Неявные функции и их дифференцирование

20.2.1. Если $F(x;y)=0$ задает неявно функцию $y=y(x)$, то

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}}.$$

20.2.2. Если $F(x;y;z)=0$ задает неявно функцию $z=z(x;y)$, то

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}}.$$

20.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

20.3.1. Найти частные производные z'_x и z'_y если $z=u^v$, $u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{x}{y}$.

Решение. 1) Вычисляем все производные, необходимые для решения

задачи: $z'_u=vu^{v-1}$; $z'_v=u^v\ln u$; $u'_x=2x$; $v'_x=\dfrac{1}{y}$; $u'_y=2y$; $v'_y=-\dfrac{x}{y^2}$.

По 20.1.2 частные производные равны:

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}=u^v\left(\frac{v}{u}\cdot 2x+\frac{\ln u}{y}\right)$$ и

$$z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y=vu^{v-1}\cdot 2y-u^v\ln u\cdot\frac{x}{y^2}=u^v\left(\frac{v}{u}\cdot 2y-\frac{x\ln u}{y^2}\right).$$

2) Заменив промежуточные аргументы $u=x^2+y^2$ и $v=\dfrac{x}{y}$; получим:

$$z'_x=\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{x}{y}}}{y}\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\ln\left(x^2+y^2\right)\right);\ z'_y=x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{y^2}\right).$$

20.3.2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, и $y=x^2$.

Решение. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)'_x=\dfrac{1}{1+\left(y/x\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}.$

2) (см. **20.1.2.2.**) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{1+\left(y/x\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot 2x=\dfrac{2x^2-y}{x^2+y^2}$, где

$y=x^2$. Следовательно, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x^2-x^2}{x^2+x^4}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

20.3.3. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\cos(x+y)+e^{xy}=0$.

Решение (см. **20.2.1**). $F(x;y)=\cos(x+y)+e^{xy}=0.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\cos(x+y)+e^{xy}\right)'_x}{\left(\cos(x+y)+e^{xy}\right)'_y}=-\frac{-\sin(x+y)+ye^{xy}}{-\sin(x+y)+xe^{xy}}=-\frac{\sin(x+y)-ye^{xy}}{\sin(x+y)-xe^{xy}}.$$

20.4. Задачи для самостоятельного решения

20.4.1. Найти производную $\dfrac{du}{dt}$, если $u=x^2+y^2+xy$, где $x=\sin t$, $y=e^t$.

20.4.2. $z=x^2y-y^2x$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

20.4.3. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если: а) $z=\operatorname{arctg} xy$, $y=e^x$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$.

20.4.4.Найти $\dfrac{dy}{dx}$ в точке М(1;1),если функция задана неявно

$\left(x^2+y^3\right)^2-3x^2y-y^3=0$.

20.4.5. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x\ln y-2x+y^2=5$.

20.4.6. Для неявно заданной функции $xy^3+3xz-y\sin z=1$ найти частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ в точке М(1;1;0).

20.4.7. Для неявно заданной функции $\dfrac{x}{y}-2y^2-xz-arctgz=0$ найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$

в точке (16;2;0).

Ответы.

20.4.1. $\sin 2t + 2e^t + e^t(\sin t + \cos t)$. **20.4.2.** $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$,
$\dfrac{\partial z}{\partial v} = u^3(1 - 3\sin v \cos v)(\cos v + \sin v)$. **20.4.3.** а) $\dfrac{e^x(x+1)}{1 + x^2 e^{2x}}$; б) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

20.4.4. $-1/3$. **20.4.5.** $\dfrac{y(2 - \ln y)}{x + 2y^2}$. **20.4.6.** $-\dfrac{1}{3}; -2$. **20.4.7.** 1/24.

20.5. Локальные экстремумы функции двух переменных

Определение 20.5.1.. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* (минимума) функции двух переменных функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что для всех точек $M(x; y)$, лежащих в её окрестности, выполняется условие $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0; y_0)$) Значение $f(x_0; y_0)$ называется *локальным максимумом* (минимумом) функции. Максимумы и минимумы называют экстремумами.

Теорема 20.5.2. Необходимые условия экстремума. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ точка экстремума функции $z = f(x; y)$, и в этой точке существуют конечные частные производные f'_x и f'_y, то $f'_x\big|_{(x_0; y_0)} = 0$ и $f'_y\big|_{(x_0; y_0)} = 0$.

Определение 20.5.3. Точки, принадлежащие области определения, в которых частные производные равны 0 (не существуют), называются *стационарными (критическими)* точками функции.

Теорема 20.5.4. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Пусть в стационарной точке $M_0(x_0; y_0)$ и ее окрестности функция $z = f(x; y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и пусть $A = f''_{x^2}\big|_{(M_0)}$; $B = f''_{xy}\big|_{(M_0)}$; $C = f''_{y^2}\big|_{(M_0)}$ и $D = AC - B^2$.

1) Если $D > 0$ и $A > 0$, то точка M_0 – точка минимума функции $z = f(x; y)$.

2) Если $D > 0$ и $A < 0$, то точка M_0 – точка максимума функции $z = f(x; y)$.

3) Если $D < 0$, то в точке M_0 – функция не имеет экстремума.

4) Если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

20.5.5. Наибольшее и наименьшее значение функции в некоторой области. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x;y)$ в области D нужно:

1) Найти все стационарные точки функции внутри области. Вычислить значения функции в этих точках.

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области.

3) Из всех, полученных таким образом значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Наибольшее (наименьшее)значение функции нельзя смешивать с локальным максимумом(минимумом),который является наибольшим (наимень - шим) значением только по сравнению с соседними точками.

20.6. Условный экстремум функции двух переменных

Определение 20.6.1. Пусть $z = f(x;y)$ определена на множестве D. $L \subset D-$подмножество, заданное условием $F(x;y)=0$ (*уравнение связи*). Точка $M_0(x_0;y_0)\in L$ называется точкой *условного максимума* функции $z = f(x;y)$(*условного минимума* функции), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x;y)\in L$, лежащих в этой окрестности, выполняется условие $f(x;y)< f(x_0;y_0)$ $\left(f(x;y)> f(x_0;y_0)\right)$.

Исследование функции $f(x;y)$ на условный экстремум сводится к исследованию на обычный экстремум т.н. функции Лагранжа: $\Phi(x;y;\lambda)= f(x;y)+\lambda F(x;y)$.

20.6.2.Необходимый признак условного экстремума:

$$\begin{cases}\Phi'_x = f'_x + \lambda\cdot F'_x = 0,\\ \Phi'_y = f'_y + \lambda\cdot F'_y = 0,\\ \Phi'_\lambda = F(x;y)=0.\end{cases}$$ Пусть $(x_0;y_0;\lambda)$ — любое решение системы.

20.6.3.Достаточный признак условного экстремума**:**

$$\boxed{\begin{array}{l} D_0 = \left(\Phi''_{x^2}\cdot\left(F'_y\right)^2 - 2\Phi''_{xy}\cdot F'_x\cdot F'_y + \Phi''_{y^2}\left(F'_x\right)^2\right)_{(x_0,y_0,\lambda_0)} \\ \text{Если } D_0<0, \text{то } M_0 - \text{точка условного } \mathit{max}, \\ \text{если } D_0>0, \text{то } M_0 - \text{точка условного } \mathit{min}. \end{array}}$$

20.7. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

20.7.1. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. 1) Определяем стационарные точки функции (см. **20.5.2**, **20.5.3**). Для этого приравниваем ее частные производные к нулю, составляем систему и решаем ее:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Стационарные точки функции: $P_1(0;0)$ и $P_2(1;1)$.

2) Найдем производные второго порядка данной функции:

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = -3,\ z''_{yy} = 6y$$

3) Определим $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

а) Для точки $P_1(0;0)$: $D = -9 < 0$ – экстремума нет.

б) Для точки $P_2(1;1)$: $D = 27 > 0$ – значит, в точке минимум. $z_{min} = -1$.

20.7.2. Найти условные экстремумы функции $z = 3x + 2y$ при условии $x^2 + 4y^2 = 5$.

Решение. 1) $f(x;y) = 3x + 2y$; $F(x;y) = x^2 + 4y^2 - 5$. Составляем функцию

Лагранжа (см. **20.6.1**): $\Phi(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda F(x;y) = 3x + 2y + \lambda(x^2 + 4y^2 - 5)$.

Находим $\Phi'_x = 3 + \lambda \cdot 2x$, $\Phi'_y = 2 + 8\lambda y$ и $\Phi'_\lambda = F(x;y) = x^2 + 4y^2 - 5$,

и записываем необходимый признак условного экстремума $\begin{cases} 3 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 8\lambda y = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 5 = 0. \end{cases}$

Решение системы: $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; x_1 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}; y_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = \dfrac{-3}{\sqrt{2}}; y_2 = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

2) $\Phi''_{x^2} = 2\lambda$; $\Phi''_{y^2} = 8\lambda$; $\Phi''_{xy} = 0$; $F'_x = 2x$; $F'_y = 8y$.

а) $D_{01} = \left(2\lambda \cdot 16y^2 - 2 \cdot 0 \cdot 2x \cdot 8y + 8\lambda \cdot 4x^2\right)\Big|_{(x_1;y_1;\lambda_1)} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2 - \dfrac{8}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{4 \cdot 9}{2} < 0.$

Из достаточного признака условного экстремума следует, что $M_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-$точка условного максимума. Значение функции в этой точке (условный максимум) равно $5\sqrt{2}$.

б) $D_{02}=\left(2\lambda\cdot 16y^2+8\lambda\cdot 4x^2\right)\Big|_{(x_2;y_2;\lambda_2)}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 2+\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\cdot 9}{2}>0.$

Следовательно,

Точка $M_2\left(\frac{-3}{\sqrt{2}};\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)-$ точка условного минимума. Значение функции в этой точке (условный минимум) равно $-5\sqrt{2}.$

20.8. Задачи для самостоятельного решения

20.8.1. Найти стационарные точки функции $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $0\le x\le\pi/4,\ 0\le y\le\pi/4$.

20.8.2. Найти точки экстремума функции а) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$,

б) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$, в) $z=x^3+y^3-3xy$.

20.8.3. Найти наибольшее значение функции $z=x^2y(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Ответы. 20.8.1. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$**.**

20.8.2. а) min в (-1;1), б) (-1;-1) и (1;1), в) min в (1;1)**.**

20.8.3. $z_{наиб}=z(2,\ 1)=4;\quad z_{наим}=z(4,\ 2)=-64$**.**

ЗАНЯТИЕ 21.

21.ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФМП.

21.1. Производная в данном направлении и градиент

Определение 21.1.1. *Производная* дифференцируемой функции трех переменных $u=u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *в направлении вектора* $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$ равна $\boxed{\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=u'_x\big|_{M_0}\cdot\cos\alpha+u'_y\big|_{M_0}\cdot\cos\beta+u'_z\big|_{M_0}\cdot\cos\gamma}$, где $\alpha,\beta,\gamma-$углы между направлением $\vec{l}$ и координатными осями.

Определение **21.1.2.** *Градиентом* дифференцируемой функции трех переменных $u=u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется вектор

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M_0)=u'_x\big|_{M_0}\cdot\vec{i}+u'_y\big|_{M_0}\cdot\vec{j}+u'_z\big|_{M_0}\cdot\vec{k}=\left(u'_x\big|_{M_0};u'_y\big|_{M_0};u'_z\big|_{M_0}\right)}.$$

Легко видеть, что производная по направлению равна скалярному произведению градиента в данной точке и единичного вектора данного направления: $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ u,\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}\,|}\right)$. Итак*, проекция градиента на выбранное направление равна производной функции по этому направлению. Отсюда следует, что градиент направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции в данной точке.*

21.2. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой в пространстве.

21.2.1. Если линия L в пространстве задана как пересечение двух поверхностей: $\begin{cases}F(x;y;z)=0\\ \Phi(x;y;z)=0\end{cases}$, то $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F'_y\big|_{M_0} & F'_z\big|_{M_0}\\ \Phi'_y\big|_{M_0} & \Phi'_z\big|_{M_0}\end{vmatrix}}=-\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F'_x\big|_{M_0} & F'_z\big|_{M_0}\\ \Phi'_x\big|_{M_0} & \Phi'_z\big|_{M_0}\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F'_x\big|_{M_0} & F'_y\big|_{M_0}\\ \Phi'_x\big|_{M_0} & \Phi'_y\big|_{M_0}\end{vmatrix}}$ – *уравнение касательной*, $\begin{vmatrix}(x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0)\\ F'_x\big|_{M_0} & F'_y\big|_{M_0} & F'_z\big|_{M_0}\\ \Phi'_x\big|_{M_0} & \Phi'_y\big|_{M_0} & \Phi'_z\big|_{M_0}\end{vmatrix}=0$ — *уравнение нормальной плоскости к линии*.

21.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

21.3.3. Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z)=0$, а точка координатами $(x_0;y_0;z_0)$,

то: $\boxed{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}(z-z_0)=0}$ –

уравнение касательной плоскости,

$\boxed{\dfrac{(x-x_0)}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\dfrac{(y-y_0)}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\dfrac{(z-z_0)}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}}$ – *уравнение нормали к поверхности*.

21.4. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.

Т.к. приращение функции $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$,то значение функции $f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) = f\left(x, y\right) + \Delta z$,а т.к. $dz \approx \Delta z$,то значение функции можно приближенно вычислить с помощью полного дифференциала по формуле:

$$f\left(x; y\right) \approx f\left(x_0; y_0\right) + dz = f\left(x_0; y_0\right) + z'_x\big|_{\left(x_0; y_0\right)} \Delta x + z'_y\big|_{\left(x_0; y_0\right)} \Delta y$$

21.5. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

21.5.1. Найти градиент функции $u = \ln\left(e^x + 3y + e^z\right)$в точке $M\left(0; -1; 0\right)$ и ее производную в направлении градиента. Убедиться, что эта производная равна модулю градиента.

Решение (см. **21.1.1**, **21.1.2**). 1) Найдем значения частных производных функции в точке M :

$$u'_x = \left.\frac{e^x}{e^x + 3y + e^z}\right|_M = -1; \; u'_y = \left.\frac{3}{e^x + 3y + e^z}\right|_M = -3; \; u'_z = \left.\frac{e^z}{e^x + 3y + e^z}\right|_M = -1.$$

2) $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right)_M = -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right|_M = \sqrt{\left(-1\right)^2 + \left(-3\right)^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{11}.$

3) Направляющие косинусы градиента:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-3\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \; \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{11}}; \; \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

4) Производная в точке M в направлении градиента равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l}\left(M\right) = \left(-1\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) + \left(-3\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right) + \left(-1\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = \sqrt{11} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right|_M .$$

21.5.2. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + z = 5 \end{cases}$ в точке $M_0\left(2; 2\sqrt{3}; 3\right)$.

Решение (см. **21.2.4**). $F\left(x; y; z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$; $\Phi\left(x; y; z\right) = x + z - 5.$

а) Определим частные производные этих функций:

$F'_x\big|_{M_0} = 2x\big|_{x=2} = 4;\ F'_y\big|_{M_0} = 2y\big|_{y=2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3};\ F'_z\big|_{M_0} = 2z\big|_{z=3} = 6;$

$\Phi'_x\big|_{M_0} = 1;\ \Phi'_y\big|_{M_0} = 0;\ \Phi'_z\big|_{M_0} = 1.$

б) Уравнение нормальной плоскости:

$$\begin{vmatrix} (x-2) & \left(y-2\sqrt{3}\right) & (z-3) \\ 4 & 4\sqrt{3} & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}(x-2) + 2\left(y-2\sqrt{3}\right) - 4\sqrt{3}(z-2) = 0$$

в) Уравнение касательной: $\dfrac{x-2}{4\sqrt{3}} = \dfrac{y-2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{z-3}{-4\sqrt{3}}$.

После упрощений получаем: $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z - 2 = 0$ (уравнение нормальной плоскости к линии) и $\dfrac{x-2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{y-2\sqrt{3}}{1} = \dfrac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (уравнение касательной).

21.5.3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к конусу $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ в точке (4;3;4).

Решение (см. **21.3.3**). В этой задаче $F(x;y;z) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8}$, поэтому

$$F'_x\big|_{(4;3;4)} = \frac{x}{8}\bigg|_{x=4} = 0{,}5;\ F'_y\big|_{(4;3;4)} = \frac{2y}{9}\bigg|_{y=3} = \frac{2}{3};\ F'_z\big|_{(4;3;4)} = -\frac{z}{4}\bigg|_{z=4} = -1.$$

Уравнение касательной плоскости: $\dfrac{1}{2}(x-4) + \dfrac{2}{3}(y-3) - (z-4) = 0$.

Уравнение нормали к конусу: $\dfrac{x-4}{1/2} = \dfrac{y-3}{2/3} = \dfrac{z-4}{-1}$.

После упрощений получаем: $3x + 4y - 6z = 0$ (уравнение касательной плоскости к конусу) и $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$ (уравнение нормали к конусу).

21.5.4. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{5.09^2 + 1.91}$.

Решение. Искомое число является значением функции $z=\sqrt[3]{x^2+y}$ при $x_1=5{,}09,\ y_1=1{,}91$. Пусть $x_0=5$, $y_0=2$, тогда $\Delta x=0{,}09,\ \Delta y=-0{,}09$.

$$z'_x\Big|_{(5;2)}=\frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\Big|_{(5;2)}=\frac{10}{27};\quad z'_y\Big|_{(5;2)}=\frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}}\Big|_{(5;2)}=\frac{1}{27}.$$

По формуле **п.21.4**, имеем

$$z\left(5{,}09;1{,}91\right)=\sqrt[3]{5{,}09^2+1{,}91}\approx\sqrt[3]{5^2+2}+\frac{10}{27}\cdot 0{,}09-\frac{1}{27}\cdot 0{,}09=3+0{,}03=3{,}03.$$

21.6. Задачи для самостоятельного решения

21.6.1. Найти $\mathrm{grad}\,u$ для а) $u=x^2y^2z$; б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

21.6.2. Показать, что функция $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ удовлетворяет соотношению $u=2\ln 2-\ln(\mathrm{grad}\,u)^2$.

21.6.3. Найти производную функции $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке $M(1,\ 1,\ 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60^0, 45^0, 60^0.

21.6.4. Найти производную функции $u=xyz$ $u=xyz$ в точке $A\left(5,1,2\right)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B\left(9,4,14\right)$.

21.6.5. Найти угол между градиентами функций $f_1=\sqrt{x^2+y^2}$ и $f_2=2x-2y+\sqrt{3xy}$ в точке $(3,\ 4)$.

21.6.6. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u=x(y+z)$ в точке $M_0(0,\ 1,\ 2)$.

21.6.7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x^2+3y^2+z^2=43$ в точке М(–2;1;6).

21.6.8. Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей для данных поверхностей в указанных точках: а) $z=2x^2-4y^2$; $(2,\ 1,\ 4)$;
б) $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$; $(1,\ 1,\ 1)$.

21.6.9. Вычислить приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.

21.6.10. Вычислить приближенно $0.97^{1.05}$

Ответы. 21.6.1. а) $\left\{3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2\right\}$; б) $\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **21.6.3.** 5.

21.6.4. $\dfrac{98}{13}$. **21.6.5.** $\arccos\dfrac{16}{65}$. **21.6.6.** $\vec{l}=\{1,0,0\}$, $\dfrac{\partial u}{\partial l}=3$.

21.6.7. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-6}{-6}$, $2x-3y-6z+43=0.$

21.6.8. а) $8x-8y-z=4,$ $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-4}{-1}$;

б) $3x-2y-2z+1=0,$ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}$ **21.6.9.** ≈ 0.005**; 21.6.10.** ≈ 0.97

ЗАНЯТИЕ 22

22. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ТАБЛИЧНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

22.1. Первообразная и неопределенный интеграл

22.1.1. Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на некотором интервале, если в любой точке этого интервала выполняется равенство $F'(x)=f(x)$. В дифференциалах определение первообразной выглядит так:

$$f(x)dx=F'(x)dx=dF(x).$$

22.1.2. Теорема. Разность двух дифференцируемых первообразных одной и той же функции $f(x)$ является константой.

22.1.3. Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$.

Согласно теореме **22.1.2** $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная константа.

22.2. Свойства неопределенного интеграла

22.2.1. Свойство линейности.

$$\boxed{\int\left(f_1(x)+k\cdot f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+k\cdot\int f_2(x)dx}.$$

Здесь k — постоянный множитель.

22.2.2. Замена переменной. Если $\int f(t)dt=F(t)+C$ и $t=g(x)$, где $g(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int f(g)dg=\int f(g(x))dg(x)=\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C.$$

22.2.3. Линейная подстановка. $\int f(t)dt=F(t)+C$, то

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C\ .$$

Это свойство является частным случаем **22.2.2**.

Из определений **22.1.1** и **22.1.3** следуют свойства

22.2.4. $\int dF(x)=F(x)+C$ и

22.2.5. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$, или $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$,

которые подчеркивают взаимно обратный характер операторов $\int$ и d.

22.2.6. Интегрирование по частям. Применим к формуле дифференциала произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$ оператор интегрирования:

$$\int d(uv)=\int\left(vdu+udv\right)=\int vdu+\int udv.$$

Но, согласно **22.2.4**, $\int d(uv)=uv+C$. Отсюда следует *формула интегрирования по частям*: $\int udv=uv-\int vdu$.

22.3. Таблица интегралов

Большинство табличных интегралов получается «обращением» таблицы производных согласно свойству **22.2.5**; истинность остальных легко проверить дифференцированием по определению **22.1.1**. В некоторых случаях приведены также соответствующие дифференциалы.

22.3.1. $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ **;** $x^\alpha dx=\dfrac{d(x^{\alpha+1})}{\alpha+1}$ $(\alpha\neq-1)$**.**

22.3.2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$**;** $\frac{dx}{x} = d(\ln|x|)$**.**

22.3.3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$**,** $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$**;** $a^x dx = \frac{d(a^x)}{\ln a}$ **(**$a \neq 1$**).**

22.3.4. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$**;** $\sin kx dx = -\frac{d(\cos kx)}{k}$**.**

22.3.5. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$**;** $\cos kx dx = \frac{d(\sin kx)}{k}$**.**

22.3.6. $\int \operatorname{sh} kx dx = \frac{\operatorname{ch} kx}{k} + C$**;** $\operatorname{sh} kx dx = \frac{d(\operatorname{ch} kx)}{k}$**.**

22.3.7. $\int \operatorname{ch} kx dx = \frac{\operatorname{sh} kx}{k} + C$**;** $\operatorname{ch} kx dx = \frac{d(\operatorname{sh} kx)}{k}$**.**

22.3.8. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{\operatorname{tg} kx}{k} + C$**;** $\frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{d(\operatorname{tg} kx)}{k}$**.**

22.3.9. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{\operatorname{ctg} kx}{k} + C$**;** $\frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{d(\operatorname{ctg} kx)}{k}$**.**

22.3.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 kx} = \frac{\operatorname{th} kx}{k} + C$**;** $\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 kx} = \frac{d(\operatorname{th} kx)}{k}$**.**

22.3.11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 kx} = -\frac{\operatorname{cth} kx}{k} + C$**;** $\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 kx} = -\frac{d(\operatorname{cth} kx)}{k}$**.**

22.3.12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$**.**

22.3.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$**.**

22.3.14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$**.**

22.3.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$**.**

22.3.16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$**.**

22.3.17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$.

22.3.18. $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln|\cos x| + C$.

22.3.19. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C$.

Здесь $\alpha \in R,\ \alpha \neq 1;\ a \in R,\ a > 0;\ k \in R,\ k \neq 0$.

22.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

22.4.1. Найдите $\int \frac{x^2+3x-2}{x}dx$. Решение. Поделим числитель на знаменатель, применим свойство **22.2.1**, **22.3.1** и **22.3.2**:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x}dx = \int x dx + 3\int x^0 \cdot dx - 2\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + C.$$

22.4.2. Вычислите $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Применим формулу квадрата суммы, почленное деление и табличный интеграл **22.3.1**:

$$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^{2/3}+2x^{1/3}+1}{x^{1/2}}dx = \int\left(x^{1/6}+2x^{-1/6}+x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \int x^{1/6}dx + 2\int x^{-1/6}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{7/6}}{7/6} + 2\frac{x^{5/6}}{5/6} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{6}{7}x^{7/6} + \frac{12}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} + C.$$

22.4.3. Найдите $\int\left(2^x+3^{-2x}\right)^3 dx$.

Решение. Раскроем куб суммы и по свойству **22.2.1** перейдем к сумме интегралов, которые находятся по формуле **22.3.3**:

$$\int\left(2^x+3^{-2x}\right)^3 dx = \int\left(2^{3x}+3\cdot 2^{2x}\cdot 3^{-2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^{-4x}+3^{-6x}\right)dx =$$

$$= \int\left(8^x + 3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 3\cdot\left(\frac{2}{81}\right)^x + \left(\frac{1}{729}\right)^x\right)dx = \frac{8^x}{\ln 8} + \frac{3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x}{\ln\frac{4}{9}} + \frac{3\cdot\left(\frac{2}{81}\right)^x}{\ln\frac{2}{81}} + \frac{\left(\frac{1}{729}\right)^x}{\ln\frac{1}{729}} + C$$

.

22.4.4. Найдите $\int e^x \cdot \operatorname{ch} 2x dx$.

Решение. Воспользуемся определением гиперболического косинуса и перепишем подынтегральное выражение в таком виде:

$e^x \cdot \operatorname{ch} 2x = e^x \cdot \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{1}{2} e^{3x} + \dfrac{1}{2} e^{-x}$. Далее интеграл вычисляется без труда:

$$\int e^x \cdot \operatorname{ch} 2x dx = \int \left(\frac{1}{2} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int e^{3x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{-1} + C =$$

$= \dfrac{e^{3x}}{6} - \dfrac{e^{-x}}{2} + C$. Здесь применен табличный интеграл **22.3.3**.

22.4.5. Вычислите $\int \sin x \cdot \cos 3x dx$.

Решение. Преобразуем произведение в сумму (см. **27.1.3**) и применим табличный интеграл **22.3.4**:

$$\int \sin x \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\cos 4x}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\cos 2x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

22.4.6. Найдите $\int \cos^3 x dx$.

Решение. По формуле тройного аргумента $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Выразим отсюда куб косинуса и проинтегрируем почленно по формуле **22.3.5**:

$$\int \cos^3 x dx = \int \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} dx = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3} + C = \frac{9\sin x + \sin 3x}{12} + C$$

22.4.7. Найдите $\int \sin(2x+3) dx$.

Решение. По формуле синуса суммы, свойству линейности **22.2.1** и табличным интегралам **22.3.4**, **22.3.5** получим

$$\int \sin(2x+3) dx = \int (\sin 2x \cdot \cos 3 + \cos 2x \cdot \sin 3) dx = \cos 3 \cdot \int \sin 2x dx +$$

$$+ \sin 3 \cdot \int \cos 2x dx = \cos 3 \cdot \frac{-\cos 2x}{2} + \sin 3 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + C = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + C.$$

22.4.8. Вычислите $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение.
$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 1 \cdot dx = \mathrm{tg}\, x - x + C$. Здесь мы воспользовались интегралами **22.3.8** и **22.3.1** (при $\alpha = 0$).

22.4.9. Вычислите $\int \frac{dx}{2x^2+3}$.

Решение. Вычисление по формуле **22.3.12** ($a^2 = \frac{3}{2}$, т. е. $a = \sqrt{3/2}$).

$$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3/2}} \mathrm{arctg} \frac{x}{\sqrt{3/2}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathrm{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}} \right) + C.$$

22.4.10. Найдите $\int \frac{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$.

Решение. Представим знаменатель в виде $\sqrt{x^4-1} = \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$\int \frac{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2+1}} dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = 2\ln\left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + \ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C.$$

Применили свойство линейности **22.2.1** и табличный интеграл **22.3.15**

22.4.11. Вычислите $\int \frac{x^2 dx}{1+\sqrt{1-x^2}-x^2}$.

Решение. $\int \frac{x^2 dx}{1+\sqrt{1-x^2}-x^2} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)} = \int \frac{x^2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot(-x^2)} =$

$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int dx = \arcsin x - x + C$. Здесь мы умножили на сопряженное выражение и воспользовались табличным интегралом **22.3.13**.

22.4.12. Найдите $\int \mathrm{sh}^2 5x dx$.

Решение. Многие формулы для гиперболических функций похожи на формулы тригонометрии. Например, понижение степени: $\mathrm{sh}^2 \alpha = \frac{\mathrm{ch}\, 2\alpha - 1}{2}$.
Отсюда $\int \mathrm{sh}^2 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{ch}\, 10x - 1\right) dx = \frac{\mathrm{sh}\, 10x}{20} - \frac{x}{2} + C$.

22.5. Задачи для самостоятельного решения

22.5.1. $\int x(x-1)(x+2)dx$. **22.5.2.** $\int \frac{\left(\sqrt[5]{x^2}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$. **22.5.3.** $\int \frac{2x^2+1}{x^2+x^4}dx$.

22.5.4. $\int \frac{x^2+3}{x^2-2}dx$. **22.5.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. **22.5.6.** $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{6^x}dx$.

22.5.7. $\int \sin^2 2xdx$. **22.5.8.** $\int \sin^3 3xdx$. **22.5.9.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx$.

22.5.10. $\int \mathrm{th}^2 2xdx$. **22.5.11.** $\int \frac{\cos 2x}{\sin x}dx$.

Ответы. **22.5.1.** $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+C$. **22.5.2.** $\frac{15}{22}x^{22/15}+6x^{2/3}+\frac{15}{4}x^{16/15}+C$.

22.5.3. $\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{x}+C$. **22.5.4.** $x+\frac{5\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$. **22.5.5.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+C$.

22.5.6. $\frac{2\cdot 2^{-x}}{\ln 2}-\frac{3\cdot 3^{-x}}{\ln 3}+C$. **22.5.7.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. **22.5.8.** $\frac{\cos 9x}{36}-\frac{\cos 3x}{4}+C$.

22.5.9. $-\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x+C$. **22.5.10.** $x-\frac{\mathrm{th}\,2x}{2}+C$. **22.5.11.** $2\cos x+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

ЗАНЯТИЕ 23

23. ВНЕСЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ

Дальнейшее развитие техники интегрирования основано на применении замены переменной, т.е. свойства **22.2.2** и, в частности, **22.2.3**. *Метод замены переменной* допускает два подхода, различающиеся лишь внешне.

23.1. Внесение под знак дифференциала

Вычисление неопределенного интеграла не сводится к интегрированию отдельных множителей подынтегральной функции! Однако в некоторых случаях множитель можно внести под знак дифференциала, пользуясь свойством **22.2.5** (см. также дифференциалы в **22.3.1–22.3.11**) и далее сделать замену переменной по свойству **22.2.2**. Например: $\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(t)dt$, где $t=\cos x$; $\int f(x^n)x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int f(t)dt$, где $t=x^n$.

23.2. Решение некоторых типовых примеров на внесение под знак дифференциала

23.2.1. Вычислите $\int \frac{xdx}{x^4+1}$.

Решение. По **22.3.1** $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2) \Rightarrow \int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$. Здесь $t = x^2$.

23.2.2. Найдите $\int \operatorname{tg}^3 xdx$.

Решение. Перепишем ответ к примеру **22.4.8** в виде $\operatorname{tg}^2 xdx = d(\operatorname{tg} x - x)$, тогда

$$\int \operatorname{tg}^3 xdx = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 xdx = \int \operatorname{tg} xd(\operatorname{tg} x - x) = \underbrace{\int \operatorname{tg} xd(\operatorname{tg} x)}_{\operatorname{tg} x = t} - \underbrace{\int \operatorname{tg} xdx}_{22.3.18} = \int tdt + \ln|\cos x| =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \ln|\cos x| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

23.2.3. Найдите $\int \cos^5 3xdx$.

Решение. Согласно **22.3.5** $\cos 3xdx = \frac{1}{3}d(\sin 3x)$. Внесем косинус под знак дифференциала; четвертую степень косинуса выразим, пользуясь тождеством «тригонометрическая единица»: $\cos^4 3x = (1-\sin^2 3x)^2$. Тогда

$$\int \cos^5 3xdx = \frac{1}{3}\int \cos^4 3xd(\sin 3x) = \frac{1}{3}\int \left(1-\sin^2 3x\right)^2 d(\underbrace{\sin 3x}_{\text{обозначим } t}) = \frac{1}{3}\int (1-t^2)^2 dt =$$

$= \frac{1}{3}\int (1-2t^2+t^4)dt = \frac{t}{3} - \frac{2t^3}{9} + \frac{t^5}{15} + C = \frac{\sin 3x}{3} - \frac{2\sin^3 3x}{9} + \frac{\sin^5 3x}{15} + C$. Таким же способом можно было решить пример **22.4.6**, при этом ответы выглядели бы по-разному, но при помощи формул тригонометрии легко установить их тождественность.

23.2.4. Вычислите $\int \frac{dx}{x\ln^3 2x}$.

Решение. По **22.3.2** $\frac{dx}{x} = d(\ln|x|)$. В этом примере в область определения входят лишь $x > 0 \Rightarrow |x| = x$. Дифференциал не меняется, если под его знаком прибавить любую константу, поэтому $\frac{dx}{x} = d(\ln x + \ln 2) = d(\ln 2x)$.

Итак, $\int \frac{dx}{x\ln^3 2x} = \int \frac{d(\ln 2x)}{\ln^3 2x} = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\ln^2 2x} + C$. Здесь $t = \ln 2x$.

23.2.5. Найдите $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}dx = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\, d(\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{обозначим } t}) = \int t^{1/2}dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$$

23.2.6. Вычислите $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.

Решение. Согласно свойству **22.2.5** и **22.3.3** $e^x dx = d(e^x)$. Пусть $e^x = t$, тогда $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{e^x}{2} + C$.

23.2.7. Вычислите $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

Решение. Выделим в подкоренном выражении полный квадрат: $x^2+4x+7=(x+2)^2+3$. Представим числитель $3x+1=3(x+2)-5$. Обозначим $x+2=t$, тогда $dx=dt$ и

$$\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+7}} = \int \frac{(3t-5)dt}{\sqrt{t^2+3}} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+3)}{\sqrt{t^2+3}} - 5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} - 5\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| = 3\sqrt{z} - 5\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C =$$

$= 3\sqrt{x^2+4x+7} - 5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right| + C$. Здесь $z=t^2+3=x^2+4x+7$.

23.3. Интегрирование методом подстановки

Метод подстановки основан на свойстве **22.2.2**. В самом начале решения выбирается подходящая замена $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция. Переписывая интеграл, в обязательном порядке *пересчитывают дифференциал* по формуле $dx=\varphi'(t)dt$. Выделим несколько полезных подстановок:

23.3.1. $\int f(\sqrt[n]{x})dx = n\int f(t)t^{n-1}dt$; подстановка $x=t^n$, $t=x^{1/n}$, $dx=nt^{n-1}dt$.

23.3.2. $\int f(e^x)dx = \int \frac{f(t)dt}{t}$; подстановка $t=e^x$, $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$.

23.3.3. $\int f(\sqrt{a^2-x^2},\, x)dx = a\int f(a\cos t,\, a\sin t)\cos t\,dt$;

подстановка $x=a\sin t$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

23.3.4. $\int f(\sqrt{a^2+x^2},\, x)dx = a\int f\left(\frac{a}{\cos t},\, a\,\mathrm{tg}\,t\right)\frac{dt}{\cos^2 t}$;

подстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $t = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}$.

23.3.5. $\int f(\sqrt{x^2-a^2},\, x)dx = a\int f\left(\pm a\,\mathrm{tg}\,t,\ \frac{a}{\cos t}\right)\frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$; подстановка $x = \frac{a}{\cos t}$, $t = \arccos\frac{a}{x}$, $dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{x^2-a^2} = \pm a\,\mathrm{tg}\,t$ ("+" при $x>0$, "−" при $x<0$).

Часто применяется линейная подстановка (см. свойство **22.2.3**).

23.4. Решение некоторых типовых примеров на метод подстановки

23.4.1. Найдите $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

Решение. В соответствии с **23.3.1** запишем: $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx = 2tdt$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C.$$

23.4.2. Найдите $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение. Подстановка **23.3.2**. Получим $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$, где $t = e^x$.

Дробь $\frac{1}{t(t+1)}$ представим в виде: $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{(t+1)-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

Тогда $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + C = x - \ln(e^x+1) + C$.

23.4.3. Вычислите $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Случай подстановки **23.3.3**. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt =$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t\cdot\cos t\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

23.4.4. Найдите $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx$.

Решение. Пример на подстановку **23.3.4**. Перепишем интеграл через t:
$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \int \frac{a/\cos t}{a\,\mathrm{tg}\,t} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t} = a\int \frac{dt}{\sin t\cos^2 t} = a\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt =$
$= a\int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} + a\int \frac{dt}{\sin t} = -a\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} + a\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| = \frac{a}{\cos t} + a\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C$. Возвратимся к x: $\cos t = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\mathrm{tg}\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}$,
тогда $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}\right| + C$.

23.4.5. Вычислите $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Выберем подстановку **23.3.5**:
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cos^2 t}{\pm\mathrm{tg}\,t} \cdot \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \pm\int \cos t dt = \pm\sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$. Для записи ответа через переменную x выразили $\sin t = \mathrm{tg}\,t \cdot \cos t = \pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Замечание. При использовании подстановки **23.3.5** следует учитывать знак переменной интегрирования. Здесь результат не зависит от знака; следующий пример демонстрирует обратную ситуацию.

23.4.6. Найдите $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Как и в примере **23.4.5** сделаем подстановку $x = \frac{1}{\cos t}$, получим $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cos t \cdot \sin t dt}{\pm\mathrm{tg}\,t \cdot \cos^2 t} = \pm\int dt = \pm t + C = \pm\arccos\frac{1}{x} + C$. Для $x>1$ выбирается знак "$+$"; для $x<-1$ – знак "$-$".

23.4.7. Найдите $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2(3x+4)}$.

Решение. Согласно **22.3.11** и **22.2.3** $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2(3x+4)} = -\frac{1}{3}\mathrm{cth}(3x+4) + C$.

23.4.8. Вычислите $\int \frac{x^2dx}{(2x+1)^5}$. Решение. Сделаем замену $t = 2x+1$, тогда $x = \frac{t-1}{2}$ и $dx = \frac{dt}{2}$, тогда:

$$\int \frac{x^2dx}{(2x+1)^5} = \int \frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 \frac{dt}{2}}{t^5} = \frac{1}{8}\int \frac{t^2-2t+1}{t^5}dt = \frac{1}{8}\left(\int t^{-3}dt - 2\int t^{-4}dt + \int t^{-5}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{t^{-2}}{-2} - 2\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-4}}{-4}\right) + C = -\frac{1}{16(2x+1)^2} + \frac{1}{12(2x+1)^3} - \frac{1}{32(2x+1)^4} + C.$$

23.5. Задачи для самостоятельного решения

23.5.1. $\int \left(\frac{x}{x^5+1}\right)^4 dx$. **23.5.2.** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$. **23.5.3.** $\int \frac{dx}{x\ln x \cdot \ln\ln x}$. **23.5.4.** $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$. **23.5.5.** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. **23.5.6.** $\int \frac{xdx}{\operatorname{ch}^2(x^2+1)}$. **23.5.7.** $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$.

23.5.8. $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$. **23.5.9.** $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$. **23.5.10.** $\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{ch}^2 x}dx$.

23.5.11. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-1}}$. **23.5.12.** $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$. **23.5.13.** $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

23.5.14. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. **23.5.15.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. **23.5.16.** $\int \frac{dx}{\cos(5x-2)}$.

23.5.17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+3}}$.

Ответы. **23.5.1.** $-\frac{1}{15(x^5+1)^3} + C$. **23.5.2.** $\frac{\arcsin(\sin x \cdot \sqrt{2})}{\sqrt{2}} + C$.

23.5.3. $\ln\ln\ln x + C$. **23.5.4.** $-\sin\frac{1}{x} + C$. **23.5.5.** $-2\cos\sqrt{x} + C$. **23.5.6.** $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1) + C$. **23.5.7.** $\frac{2}{5}(\cos x)^{5/2} - 2\sqrt{\cos x} + C$.

23.5.8. $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x + C$. **23.5.9.** $\operatorname{arctg}^2\sqrt{x} + C$. **23.5.10.** $\frac{\operatorname{ch}^2 x - \ln(1+\operatorname{ch}^2 x)}{2} + C$.

23.5.11. $2\sqrt{e^x-1} + C$. **23.5.12.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$.

23.5.13. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **23.5.14.** $\sqrt{x^2-1}\mp\arccos\dfrac{1}{x}+C$. **23.5.15.** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.
23.5.16. $\dfrac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{5x}{2}-1+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **23.5.17.** $\dfrac{1}{6}\sqrt{(2x+3)^3}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2x+3}+C$.

ЗАНЯТИЕ 24

24. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

24.1. Описание метода интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на формуле, выведенной в **22.2.6**: $\int u(x)v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)u'(x)dx$. Эту формулу можно применять к любым дифференцируемым функциям $u(x)$ и $v(x)$, но не всегда новый интеграл вычисляется проще исходного. Приведем основные случаи, когда способ интегрирования по частям позволяет найти исходный интеграл.

Исходный интеграл $\int udv=\int u(x)\cdot v'(x)dx$.

24.1.1. $u(x)=x^n$, $n\in N$; $v'(x)=\sin(kx+b)$ или $v'(x)=\cos(kx+b)$.

24.1.2. $u(x)=x^n$, $n\in N$; $v'(x)=a^{kx}$.

24.1.3. $u(x)=\log_a^n(kx+b)$, где $n\in N$; $v'(x)$ – рациональная или иррациональная функция, у которой первообразная $v(x)$ также рациональна или иррациональна.

24.1.4. $u(x)$ – натуральная степень обратной тригонометрической функции (например, $u(x)=\arcsin^n kx$, $u(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ и т. п.); $v'(x)$ – рациональная или иррациональная функция с известной рациональной или иррациональной первообразной $v(x)$.

Порядок интегрирования по частям следующий: 1) определяем функцию $u(x)$; 2) находим $v(x)$ по формуле $v(x)=\int v'(x)dx$, при этом *произвольную постоянную интегрирования выбираем равной нулю*; 3) вычисляем дифференциал $du=u'(x)dx$; 4) применяем формулу $\int udv=uv-\int vdu$. При необходимости применяем к полученному интегралу $\int vdu=\int v(x)u'(x)dx$ формулу интегрирования по частям повторно.

24.2. Рекуррентная формула для интеграла $\int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

Неопределенные интегралы, к которым применим метод интегрирования по частям, не исчерпываются основными случаями, указанными в **24.1.1–**

24.1.4. Выведем рекуррентную формулу для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, положив $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$, $v = \int dv = \int dx = x$, $du = u'dx = -\frac{n\cdot 2xdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$. По формуле **22.2.6**

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Выразим теперь из этого равенства I_{n+1}: $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right)$.

Очевидно, $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ (табличный интеграл **22.3.12**). Таким образом, можно последовательно найти I_2, I_3 и т. д. по формуле

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\right).$$

24.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

24.3.1. Вычислите $\int (2x+1)\sin x dx$.

Решение. Случай **24.1.1** $u = 2x+1$, $du = (2x+1)'dx = 2dx$, $dv = \sin x dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$, тогда $\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x dx =$ $= -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$.

24.3.2. Найдите $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Решение. Случай **24.1.2**. Выберем $u = x^2$, $du = u'dx = 2xdx$, $dv = e^{-2x}dx$, $v = \int e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2}$; $\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \int xe^{-2x}dx$. К вновь полученному интегралу применим интегрирование по частям повторно; на этот раз $u = x$, $du = dx$, а v не меняется. Получим

$\int xe^{-2x}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$. В итоге

$$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C = -\frac{1}{4}\left(2x^2+2x+1\right)e^{-2x} + C.$$

24.3.3. Найдите $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

Решение. Случай **24.1.3**. Примем $u(x)=\ln x$, $du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x}$, $\sqrt{x}dx=dv$, $v=\int\sqrt{x}dx=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$. По формуле интегрирования по частям $\int\sqrt{x}\ln xdx=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\int\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\dfrac{dx}{x}=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\dfrac{2}{3}\int\sqrt{x}dx=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\dfrac{4x\sqrt{x}}{9}+C$

24.3.4. Вычислите $\int x\operatorname{arctg}xdx$.

Решение. Примем, как указано в **24.1.4**, $u=\operatorname{arctg}x$. Тогда $xdx=dv$, $v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}$, $du=\left(\operatorname{arctg}x\right)'dx=\dfrac{dx}{x^2+1}$; $\int x\operatorname{arctg}xdx=\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{dx}{x^2+1}$. Последний интеграл найдем, выделив целую часть подынтегральной дроби: $\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\right)+C$. В итоге получим $\int x\operatorname{arctg}xdx=\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}+C$.

24.3.5. Вычислите $\int\arcsin\sqrt{x}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $z=\arcsin\sqrt{x}$, $x=\sin^2 z$, $dx=\sin 2zdz$ и найдем $\int z\sin 2zdz$ методом интегрирования по частям (случай **24.1.1**):

$$\int z\sin 2zdz=-\frac{1}{2}z\cos 2z+\int\frac{\cos 2z}{2}dz=-\frac{1}{2}z\cos 2z+\frac{1}{4}\sin 2z+C=$$

$$=-\frac{1}{2}z(1-2\sin^2 z)+\frac{1}{2}\sin z\cos z+C=\frac{2x-1}{2}\arcsin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}+C.$$

24.3.6. Найдите $\int\dfrac{3x^2+1}{(x^2+4)^2}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$\int\dfrac{3x^2+1}{(x^2+4)^2}dx=\int\dfrac{3(x^2+4)-11}{(x^2+4)^2}dx=3\int\dfrac{dx}{x^2+4}-11\int\dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$. Первый интеграл табличный, а второй найдем с помощью рекуррентной формулы, полученной в **24.2**:

$$\int\frac{3x^2+1}{(x^2+4)^2}dx=3\int\frac{dx}{x^2+4}-11\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-11\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{11}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}-\frac{11}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{11x}{8(x^2+4)}+C.$$

24.3.7. Найдите $\int\sin(2\ln x)dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=\ln x$, $x=e^t$, $dx=e^tdt$. В результате интеграл запишется так: $\int e^t\sin 2tdt$. Этот вид не относится ни к одному из случаев **21.4.1–21.4.4**, но к подобным интегралам дважды применяется интегрирование по частям, после чего искомый интеграл выражается из полученного уравнения. Пусть, например, $u=\sin 2t$, $du=2\cos 2tdt$, $dv=e^tdt$, $v=e^t$. Тогда $I=\int e^t\sin 2tdt=e^t\sin 2t-2\int e^t\cos 2tdt$. К новому интегралу опять применяем интегрирование по частям, выбрав $u=\cos 2t$, $du=-2\sin 2tdt$, тогда $\int e^t\cos 2tdt=e^t\cos 2t+2\int e^t\sin 2tdt=e^t\cos 2t+2I$. Итак, для интеграла I получилось уравнение $I=e^t\sin 2t-2(e^t\cos 2t+2I)=-4I+e^t(\sin 2t-2\cos 2t)$, из которого найдем $I=\dfrac{e^t(\sin 2t-2\cos 2t)}{5}+C$. Возвратимся к переменной x: $\int\sin(2\ln x)dx=\dfrac{1}{5}x\big(\sin(2\ln x)-2\cos(2\ln x)\big)+C$.

24.4. Задачи для самостоятельного решения

24.4.1. $\int x\cdot 2^x dx$. **24.4.2.** $\int x\cos(3x+1)dx$. **24.4.3.** $\int x^2\sin 2xdx$. **24.4.4.** $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 x}$.
24.4.5. $\int x\cos\sqrt{x}dx$. **24.4.6.** $\int\sqrt{x}\log_2 xdx$. **24.4.7.** $\int\ln(1+x^2)dx$.
24.4.8. $\int\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}dx$. **24.4.9.** $\int e^{ax}\cos bxdx$. **24.4.10.** $\int\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Ответы. 24.4.1. $\dfrac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\dfrac{2^x}{\ln^2 2}+C$. **24.4.2.** $\dfrac{x\sin(3x+1)}{3}+\dfrac{\cos(3x+1)}{9}+C$.
24.4.3. $\dfrac{x\sin 2x}{2}-\dfrac{(2x^2-1)\cos 2x}{4}+C$. **24.4.4.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$.
24.4.5. $2\sqrt{x}(x-6)\sin\sqrt{x}+6(x-2)\cos\sqrt{x}+C$. **24.4.6.** $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\log_2 x-\dfrac{4x\sqrt{x}}{9\ln 2}+C$.
24.4.7. $x\ln(1+x^2)+2\operatorname{arctg}x-2x+C$.

24.4.8. $2\sqrt{x+1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+C$. **24.4.9.** $\dfrac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2}+C.$

24.4.10. $\dfrac{x}{4(x^2+1)^2}+\dfrac{3x}{8(x^2+1)}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C$.

ЗАНЯТИЕ 25

25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

25.1. Элементарные дроби и их интегралы

Определим *элементарные* (или *простые*) дроби. Всего выделяют четыре типа простых дробей.

25.1.1. Дроби I типа $\dfrac{1}{kx+b}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{kx+b}=\frac{1}{k}\ln|kx+b|+C$, $(k\neq 0)$.

25.1.2. Дроби II типа $\dfrac{1}{(kx+b)^n}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{(kx+b)^n}=-\frac{1}{k(n-1)(kx+b)^{n-1}}+C$, $(k\neq 0;\ n=2,3,4,\ldots)$.

Формулы **25.1.1–25.1.2** являются табличными интегралами (см. **22.3.2**, **22.3.1** с учетом свойства **22.2.3**).

25.1.3. Дроби III типа $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$. Здесь $p^2-4q<0$ (дискриминант знаменателя отрицателен; знаменатель не может быть разложен на линейные множители вида $kx+b$). Интегралы элементарных дробей III типа вычисляются следующим образом:

1) найдем производную знаменателя $(x^2+px+q)'=2x+p$;

2) перепишем числитель в виде $Mx+N=\dfrac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)$;

3) представим интеграл в виде суммы

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q};$$

4) в первом интеграле сделаем замену $t=x^2+px+q$, тогда числитель равен $t'dx=dt$ и интеграл имеет вид $\displaystyle\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln(x^2+px+q)$;

5) второй интеграл находим методом выделения полного квадрата

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{\substack{z=x+p/2;\\ dz=dx}}+\underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{\substack{>0 \text{ по условию;}\\ \text{обозначим } a^2}}}=\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\underbrace{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}}_{\substack{\text{табличный интеграл}\\ 22.3.12}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C;$$

6) окончательно получим

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C,\ \ (p^2<4q).$$

25.1.4. Дроби IV типа $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n=2,3,...)$. Поступая точно так же, как в пункте **25.1.3** с дробями III типа, придем к равенству

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{M}{2}\int\frac{dt}{t^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^n}=-\frac{M}{2(n-1)t^{n-1}}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^n}=$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^n}.$$ Переменные t, z и параметр a определяются так же, как в **25.1.3**. Последний интеграл можно вычислить с помощью рекуррентной формулы, выведенной в **24.2**. Итак,

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=-\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dx}{\left((x+p/2)^2+q-p^2/4\right)^n}$$

.

25.2. Разложение правильной дроби в сумму элементарных дробей

25.2.1. Выделение целой части.

Определение. Рациональная функция $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены порядка m и n соответственно, называется *правильной*, если порядок числителя меньше порядка знаменателя, т.е. $m<n$. В противном случае $(m\geq n)$ дробь называется *неправильной*.

Из неправильной дроби следует выделить целую часть методом деления «уголком». В результате получается выражение $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\dfrac{S_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$, где $R_{m-n}(x)$ – многочлен порядка $m-n$ (*частное* от деления), а $S_{n-1}(x)$ –

многочлен порядка, не превышающего $n-1$ (*остаток* от деления). Таким образом, вновь полученная дробь $\dfrac{S_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ является правильной.

25.2.2. Разложение правильной дроби в сумму простых дробей. Пусть теперь знаменатель $Q_n(x)$ разложен на множители. Допускаются множители вида $(kx+b)^l$ (отвечающие действительному корню $x=-b/k$ кратности l) и вида $(x^2+px+q)^j$, где $p^2<4q$.

Множителю вида $(kx+b)^l$ отвечает l элементарных дробей вида $\dfrac{A_1}{kx+b}$, $\dfrac{A_2}{(kx+b)^2},\ldots,\dfrac{A_l}{(kx+b)^l}$, где $A_1, A_2,..., A_l$ – числа, подлежащие определению (их называют *неопределенными коэффициентами*).

Множителю вида $(x^2+px+q)^j$ отвечает j элементарных дробей вида $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}$, $\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2},\ldots,\dfrac{M_jx+N_j}{(x^2+px+q)^j}$, где $M_1,M_2,...,M_j$ и $N_1,N_2,...,N_j$ – неопределенные коэффициенты.

Вид разложения, количество дробей и неопределенных коэффициентов *определяются только знаменателем правильной дроби*. При этом полезно проверить выполнение двух правил: 1) *количество простых дробей равно сумме показателей степеней всех множителей знаменателя исходной дроби;* 2) *количество неопределенных коэффициентов равно* n *– порядку знаменателя исходной дроби.*

25.2.3. Вычисление неопределенных коэффициентов. При верном разложении (по правилам пункта **25.2.2**) все неопределенные коэффициенты находятся однозначно. Для их вычисления: 1) разложение дроби в сумму простых дробей приводят к общему знаменателю; 2) в полученном числителе коэффициенты при x^0 (свободный член), x^1, $x^2,\ldots$ приравнивают к соответствующим коэффициентам числителя исходной дроби. Получается квадратная система линейных уравнений, имеющая единственное решение.

Замечание. Уравнения для отыскания неопределенных коэффициентов можно получить и другим способом, придавая переменной x любые значения (в качестве таких значений удобно брать действительные корни знаменателя, т.е. $x=-b/k$). На практике сочетают оба способа.

25.2.4. Интегрирование полученного разложения. После того, как выделена целая часть, правильная дробь разложена в сумму простых дробей и коэффициенты вычислены, переходят к интегрированию, причем отдельные слагаемые представляют собой либо многочлен, либо дроби, которые интегрируются по формулам **25.1.1–25.1.4**.

25.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

25.3.1. Вычислите $\int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+12x-11}{3x^2+x-2}dx$.

Решение. Выделим целую часть неправильной подынтегральной дроби:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 3x^4-2x^3+3x^2+12x-11 \\ \underline{3x^4+x^3-2x^2\qquad\qquad\quad} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{3x^2+x-2} \\ \underbrace{x^2-x+2}_{\text{частное}} \end{array} \\
\multicolumn{1}{r}{-\begin{array}{l} -3x^3+5x^2+12x-11 \\ \underline{-3x^3-x^2+2x\qquad\;} \end{array}} & \\
\multicolumn{1}{r}{-\begin{array}{l} 6x^2+10x-11 \\ \underline{6x^2+2x\;-\;4} \end{array}} & \\
\multicolumn{1}{r}{\underbrace{8x-7}_{\text{остаток}}} &
\end{array}
$$

Напомним, как делить «уголком». Старший член делимого делим на старший член делителя (на первом шаге делим $3x^4$ на $3x^2$) – так получается старшее слагаемое частного, т.е. x^2. Затем умножаем делитель на это слагаемое, результат записываем под делимым и производим вычитание, получаем многочлен $-3x^3+5x^2+12x-11$; далее процесс повторяется, пока не получится остаток, т.е. многочлен, порядок которого меньше порядка делителя. В этом примере остаток равен $8x-7$. Применяем формулу пункта **25.2.1**, переписав исходную дробь по правилу:

$$\frac{\text{Делимое}}{\text{Делитель}} = \text{Частное} + \frac{\text{Остаток}}{\text{Делитель}}.$$

В нашем примере $\frac{3x^4-2x^3+3x^2+12x-11}{3x^2+x-2}=x^2-x+2+\frac{8x-7}{3x^2-x+2}$. Теперь будем следовать алгоритму, изложенному в пунктах **25.2.2–25.2.4**: $3x^2+x-2=(3x-2)(x+1)$; первому множителю отвечает дробь $\frac{A}{3x-2}$, второму $\frac{B}{x+1}$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Записываем разложение

$$\frac{8x-7}{3x^2-x+2}=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(3x-2)}{(3x-2)(x+1)}=\frac{(A+3B)x+(A-2B)}{3x^2-x+2}.$$

Знаменатели равны, следовательно, числители должны быть тождественно

равны. Приравниваем коэффициенты при x и свободные члены: $\begin{cases} A+3B=8, \\ A-2B=-7. \end{cases}$ Решив эту систему, найдем $A=-1,\ B=3$. Теперь переходим к интегрированию с использованием формулы **25.1.1** для дробей I типа:
$$\int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+12x-11}{3x^2+x-2}dx = \int\left(x^2-x+2-\frac{1}{3x-2}+\frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x-$$
$$-\frac{1}{3}\ln|3x-2|+3\ln|x+1|+C.$$

25.3.2. Вычислите $\int \frac{9x-6}{x^3+8}dx$.

Решение. Дробь правильная, поэтому выделения целой части не требуется. Разложим знаменатель по формуле суммы кубов: $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. Теперь запишем разложение на простые дроби:
$$\frac{9x-6}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+4}=\frac{A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$
$$=\frac{(A+M)x^2+(2M+N-2A)x+(4A+2N)}{x^3+8}.$$

Приравняем коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получим систему $\begin{cases} A+M=0, \\ 2M+N-2A=9, \\ 4A+2N=-6. \end{cases}$ Учтем замечание к пункту **25.2.3** и подставим в равенство числителей $x=-2$, откуда сразу получим $-24=12A$, т.е. $A=-2$. Из системы найдем $M=2$, $N=1$. Вычислим интеграл (см. **25.1.1**, **25.1.3**):
$$\int\frac{9x-6}{x^3+8}dx=\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2-2x+4}\right)dx=-2\ln|x+2|+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+$$
$$+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=-2\ln|x+2|+\ln(x^2-2x+4)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

25.3.3. Найдите $\int\frac{x^5-x^3-2x^2+3x+7}{x^4+2x^3-2x-1}dx$.

Решение**.** Дробь неправильная. Выделим целую часть:
$$\frac{x^5-x^3-2x^2+3x+7}{x^4+2x^3-2x-1}=x-2+\frac{3x^3+5}{x^4+2x^3-2x-1}.$$

Разложим знаменатель, сгруппировав слагаемые: $x^4+2x^3-2x-1=$
$$=x^4-1+2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1)+2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1+2x)=$$

$=(x-1)(x+1)(x+1)^2=(x-1)(x+1)^3$. По правилам пункта **25.2.2**, такому знаменателю отвечает сумма $1+3=4$ дробей с четырьмя неопределенными коэффициентами, а именно: $\dfrac{3x^3+5}{x^4+2x^3-2x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}+\dfrac{E}{(x+1)^3}$. Приравняем числители левой и правой (после приведения ее к общему знаменателю) частей: $3x^3+5=A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+D(x-1)(x+1)+E(x-1)$. Согласно замечанию к **25.2.3** положим $x=1 \quad\Rightarrow\quad 8=8A$; затем положим $x=-1 \quad\Rightarrow\quad 2=-2E$, откуда $A=1$, $E=-1$. Приравняем теперь коэффициенты при x^3: $3=A+B \quad\Rightarrow\quad B=2$. Приравняем свободные члены: $5=A-B-D-E$; $5=1-2-D+1 \quad\Rightarrow\quad D=-5$. Итак, разложение имеет вид

$$\frac{3x^3+5}{x^4+2x^3-2x-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}.$$

По формулам **25.1.1**, **25.1.2** легко находим интеграл:

$$\int\frac{x^5-x^3-2x^2+3x+7}{x^4+2x^3-2x-1}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+\frac{5}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

25.3.4. Найдите $\displaystyle\int\frac{2x^3+31}{(x^2+6x+10)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная, т.к. числитель третьего порядка, а знаменатель (если раскрыть скобки) – четвертого. Поэтому сразу запишем разложение в сумму элементарных дробей, согласно **25.2.2**: $\dfrac{2x^3+31}{(x^2+6x+10)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+6x+10}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+6x+10)^2}$. Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители:
$2x^3+31=(Ax+B)(x^2+6x+10)+Dx+E=Ax^3+Bx^2+6Ax^2+6Bx+10Ax+$
$+10B+Dx+E=Ax^3+(6A+B)x^2+(10A+6B+D)x+10B+E$. Составив систему, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A=2,\\ 6A+B=0,\\ 10A+6B+D=0,\\ 10B+E=31.\end{cases}$$

Решение системы: $A=2$, $B=-12$, $D=52$, $E=151$.

$$\int\frac{2x^3+31}{(x^2+6x+10)^2}dx=\int\left(\frac{2x-12}{x^2+6x+10}+\frac{52x+151}{(x^2+6x+10)^2}\right)dx=\int\frac{\overbrace{(2x+6)dx}^{dt}}{\underbrace{x^2+6x+10}_{t}}-$$

$$-18\int\frac{\overbrace{dx}^{dz}}{\underbrace{(x+3)^2}_{z^2}+1}+26\int\frac{\overbrace{(2x+6)dx}^{dt}}{\underbrace{(x^2+6x+10)^2}_{t^2}}-5\int\frac{\overbrace{dx}^{dz}}{\underbrace{\left((x+3)^2+1\right)^2}_{(z^2+1)^2}}=\ln t-18\operatorname{arctg} z-\frac{26}{t}-$$

$-5\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}$. Последний интеграл вычисляется по рекуррентной формуле из пункта **24.2**: $\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z^2+1}+\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C$.

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int\frac{2x^3+31}{(x^2+6x+10)^2}dx=\ln(x^2+6x+10)-\frac{41}{2}\operatorname{arctg}(x+3)-\frac{5x+67}{2(x^2+6x+10)}+C.$$

25.4. Задачи для самостоятельного решения

25.4.1. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$. **25.4.2.** $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$. **25.4.3.** $\int\frac{(x^2+2)dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

25.4.4. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. **25.4.5.** $\int\frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}dx$. **25.4.6.** $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$.

25.4.7. $\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$. **25.4.8.** $\int\frac{xdx}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$.

Ответы. **25.4.1.** $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$. **25.4.2.** $\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{2}{5}\cdot$ $\cdot\ln|x+2|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C$. **25.4.3.** $\frac{1}{4}\ln|x+1|+.$ $+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{2(x+1)}+C$.

25.4.4. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$. **25.4.5.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-$ $-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **25.4.6.** $\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-$ $-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **25.4.7.** $\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

25.4.8. $\frac{1}{18}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

ЗАНЯТИЕ 26

26. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

26.1. Интегрирование иррациональностей от дробно-линейных функций

В интегралах вида $\int f\left(x;\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\mu}}\right)dx$, где $\lambda^2+\mu^2\neq 0$, делают замену переменной по правилу $t=\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\mu}}$, $\boxed{x=\dfrac{\beta-\mu t^n}{\lambda t^n-\alpha},\ dx=\dfrac{(\alpha\mu-\beta\lambda)nt^{n-1}}{(\lambda t^n-\alpha)^2}dt}$.

Если $f(x;t)$ – рациональная функция двух переменных, то исходный интеграл после такой замены сводится к интегрированию рациональной дроби.

Замечание. Если подынтегральная функция содержит радикалы разных степеней $n,\ m,...$, то выполняют подстановку $\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\mu}=t^{\text{НОК}(n,m,...)}$, где $\text{НОК}(n,m,...)$ – наименьшее общее кратное чисел $n,\ m,...$.

26.2. Интегрирование дифференциальных биномов

Дифференциалы вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где a и b – действительные числа, отличные от нуля, m, n и p – рациональные числа, называются *дифференциальными биномами* или *биномиальными дифференциалами*. Интегралы дифференциальных биномов $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ вычисляются в элементарных функциях только в трех случаях. Приведем подстановки, в результате которых получается интеграл от рациональной функции:

26.2.1. $p\in Z$ (p – целое число). В этом случае делают замену $x=z^r$, где r – НОК знаменателей рациональных чисел m и n.

Если $p\in N$ (p – натуральное число), то достаточно просто применить формулу бинома Ньютона для раскрытия скобок в $(a+bx^n)^p$, независимо от того, какими числами являются m и n – целыми или дробными.

26.2.2. $\dfrac{m+1}{n}\in Z$. Замена $a+bx^n=z^s$, где s – знаменатель числа p.

26.2.3. $\dfrac{m+1}{n}+p\in Z$. Замена $\dfrac{a}{x^n}+b=z^s$, где s – знаменатель числа p.

26.3. Интегралы, содержащие квадратный корень из квадратного трехчлена

26.3.1. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$**.** Здесь $P_n(x)$– многочлен n-го порядка. При $n=0$ после выделения полного квадрата в подкоренном выражении получается табличный интеграл. При $n=1$ удобно вычислять интеграл методом подстановки, как в **23.2.7**. При $n \ge 2$ применяют формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами порядка $n-1$, λ – неопределенный коэффициент. Для нахождения числа λ и коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ составляют систему, которую получают, переходя в этом равенстве к производным (интегралы при этом превращаются в подынтегральные функции), умножив полученное выражение на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и приравняв коэффициенты многочленов в числителе левой и правой части.

26.3.2. Интегралы $\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$**,** где m – натуральное число, сводят к интегралам вида **26.3.1** заменой $\alpha x+\beta=\frac{1}{t}$.

К интегралам, содержащим под знаком квадратного корня квадратичные выражения, применяют также тригонометрические подстановки, (см. пункты **23.3.3, 23.3.4, 23.3.5**).

26.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

26.4.1. Вычислите $\int \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{3x+2}+1}dx$.

Решение. Случай, указанный в замечании к **26.1**. Здесь $m=2$, $n=3$, $\text{НОК}(n,m)=6$. Сделаем подстановку $3x+2=t^6$, $x=\frac{t^6-2}{3}$, $dx=2t^5dt$. Перепишем интеграл $\int \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{3x+2}+1}dx=\int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot 2t^5dt=2\int \frac{t^8}{t^2+1}dt=2\int \frac{t^8-1}{t^2+1}dt+$

$+2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)(t^4+1)dt}{t^2+1}+2\,\text{arctg}\,t=2\int (t^6-t^4+t^2-1)dt+2\,\text{arctg}\,t=$

$=\frac{2t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-2t+2\,\text{arctg}\,t+C$, где $t=\sqrt[6]{3x+2}$.

26.4.2. Найдите $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{5}{3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, чтобы свести ее к случаю **26.1**: $\frac{1}{(x+1)^{1/3}(x+2)^{5/3}} = \frac{1}{(x+2)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+1}}$. Замена $\frac{x+2}{x+1} = t^3$, $x = \frac{2-t^3}{t^3-1}$, $dx = x'(t)dt = \frac{-3t^2(t^3-1) - 3t^2(2-t^3)}{(t^3-1)^2}dt = -\frac{3t^2dt}{(t^3-1)^2}$, $\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(t^3-1)^2}{t^6}$.

Перепишем интеграл и вычислим его:

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+1}} \frac{dx}{(x+2)^2} = \int t \cdot \frac{-3t^2dt}{(t^3-1)^2} \cdot \frac{(t^3-1)^2}{t^6} = -3\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{2t^2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2} + C.$$

26.4.3. Вычислите $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}dx$.

Решение. Случай **26.2.1** дифференциального бинома: $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = -10$. Замена $x = z^{\text{НОК}(2,4)} = z^4$, $dx = 4z^3dz$. Переходя к z, получим $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}dx = \int z^{-2}(1+z)^{-10}4z^3dz = 4\int \frac{zdz}{(z+1)^{10}}$. Сделаем еще одну подстановку $z+1 = y$, $dz = dy$, $z = y-1$:

$$\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}dx = 4\int \frac{zdz}{(z+1)^{10}} = 4\int \frac{(y-1)dy}{y^{10}} = 4\int y^{-9}dy - 4\int y^{-10}dy = -\frac{y^{-8}}{2} + \frac{4y^{-9}}{9} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(1+x^{1/4})^8} + \frac{4}{9(1+x^{1/4})^9} + C.$$

26.4.4. Найдите $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Решение. Здесь $m = 1$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{1}{2}$, $s = 2$. Имеет место случай **26.2.2**, т.к. $\frac{m+1}{n} = \frac{2}{2/3} = 3$ – целое число. Сделаем подстановку $1 + x^{2/3} = z^2$, $x = (z^2-1)^{3/2}$, $dx = \frac{3}{2}(z^2-1)^{1/2} \cdot 2zdz$; тогда

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int\frac{(z^2-1)^{3/2+1/2}zdz}{z}=3\int(z^2-1)^2dz=$$

$$=3\int(z^4-2z^2+1)dz=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C=\frac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2}-2(1+x^{2/3})^{3/2}+3(1+x^{2/3})^{1/2}+C.$$

26.4.5. Вычислите $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Здесь $m=-3$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$, $s=3$;

$$\frac{m+1}{n}+p=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1\in Z \quad (\text{случай } \mathbf{26.2.3}) \Rightarrow \frac{2}{x^3}-1=z^3,\ x=\left(\frac{2}{z^3+1}\right)^{1/3},$$

$$dx=-\frac{2^{1/3}}{3}(z^3+1)^{-4/3}\cdot 3z^2dz,\ 2-x^3=\frac{2z^3}{z^3+1}\Rightarrow\int x^{-3}\cdot\left(2-x^3\right)^{-1/3}dx=$$

$$=\int\frac{z^3+1}{2}\cdot\left(\frac{z^3+1}{2z^3}\right)^{1/3}\cdot\left(-\frac{2^{1/3}}{3}(z^3+1)^{-4/3}\cdot 3z^2dz\right)=-\frac{1}{2}\int zdz=-\frac{z^2}{4}+C$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{(2-x^3)^{2/3}}{4x^2}+C.$$

26.4.6. Найдите $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Здесь $m=-2$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$. Случай **26.2.3**, т.к.

$\frac{m+1}{n}+p=-1$.Сделаем замену $1+\frac{4}{x^2}=z^s=z^2, x=\frac{2}{\sqrt{z^2-1}}$, $dx=-\frac{2zdz}{(z^2-1)^{3/2}}$,

$$x^2+4=\frac{4z^2}{z^2-1};\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{z^2-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{z^2-1}}{2z}\cdot\left(-\frac{2zdz}{(z^2-1)^{3/2}}\right)=-\frac{1}{4}\int dz=$$

$$=-\frac{z}{4}+C=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C.$$

26.4.7. Найдите $\int\sqrt{7+6x-x^2}dx$.

Решение. Приведем подынтегральную функцию к виду, описанному в **26.3.1**: $\int\sqrt{7+6x-x^2}dx=\int\frac{7+6x-x^2}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$. В числителе – многочлен второй степени $P_2(x)=7+6x-x^2$. По формуле из **26.3.1** $Q_1(x)=Ax+B$, где A и B –

неопределенные коэффициенты. Продифференцируем равенство $\int \frac{7+6x-x^2}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{7+6x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$ (учитывая **22.2.5**):

$$\sqrt{7+6x-x^2}=A\sqrt{7+6x-x^2}+(Ax+B)\frac{6-2x}{2\sqrt{7+6x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{7+6x-x^2}}.$$

Умножим на $\sqrt{7+6x-x^2}$: $7+6x-x^2=A(7+6x-x^2)+(Ax+B)(3-x)+\lambda$,

или $-x^2+6x+7=-2Ax^2+(9A-B)x+(7A+3B+\lambda)$. Составим систему, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части последнего равенства: $\begin{cases} -1=-2A \ \text{(при } x^2), \\ 6=9A-B \ \text{(при } x), \\ 7=7A+3B+\lambda \ \text{(при } x^0). \end{cases}$ Система имеет единственное решение $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$, $\lambda=8$. Далее,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}=\int\frac{dx}{\underbrace{\sqrt{16-(x-3)^2}}_{\substack{\text{обозначим } x-3=t;\\ 16=a^2;\ a=4;\ dx=dt}}}=\underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}}_{\text{табличный 22.3.13}}=\arcsin\frac{t}{a}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x-3}{4}+C \quad\Rightarrow\quad \int\sqrt{7+6x-x^2}dx=\frac{x-3}{2}\sqrt{7+6x-x^2}+8\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

26.4.8. Вычислите $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

Решение. Интеграл вида **26.3.2**. Сделаем подстановку $t=\frac{1}{x-2}$,

$x=2+\frac{1}{t}, dx=-\frac{dt}{t^2}$;

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2-2x+5}}=-\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\sqrt{2\left(2+\frac{1}{t}\right)^2-2\left(2+\frac{1}{t}\right)+5}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{8+\frac{8}{t}+\frac{2}{t^2}-4-\frac{2}{t}+5}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2+6t+2}}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3t+1)}{\sqrt{(3t+1)^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|3t+1+\sqrt{9t^2+6t+2}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x-2}+1+\sqrt{\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{6}{x-2}+2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2x^2-2x+5}}{x-2}\right|+C.$$

26.5. Задачи для самостоятельного решения

26.5.1. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$. **26.5.2.** $\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. **26.5.3.** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

26.5.4. $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{-3}dx$. **26.5.5.** $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **26.5.6.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$.

26.5.7. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **26.5.8.** $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Ответы. **26.5.1.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **26.5.2.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

26.5.3. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **26.5.4.** $-\frac{3}{2}(1+x^{1/3})^{-2}+C$.

26.5.5. $\frac{12}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}+C$. **26.5.6.** $-\frac{3x^3+4}{8x\cdot\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C$.

26.5.7. $-\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$.

26.5.8. $\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C$.

ЗАНЯТИЕ 27

27. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

27.1. Простейшие методы интегрирования

Некоторые интегралы от тригонометрических функций можно вычислить, опираясь только на табличные интегралы **22.3.4–5, 22.3.8–9, 22.3.16–19** и применяя тождественные преобразования (см. примеры **22.4.5–6, 22.4.8, 23.4.4**). Приведем для справок несколько формул:

27.1.1. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$;

27.1.2. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$;

27.1.3. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$;

27.1.4. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Замечание. В интегралах вида $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x\cdot\cos^m x}$, где n и m – натуральные числа, бывает полезно записать единицу в числителе в виде $(\sin^2 x+\cos^2 x)^k$, где k – подходящее натуральное число.

27.2. Тригонометрические подстановки

Рассмотрим интеграл $\int R(\sin kx,\ \cos kx)dx$, где $R(\sin kx,\ \cos kx)$ – рациональная функция от синуса и косинуса.

27.2.1. Если $R(-\sin kx,\ \cos kx) = -R(\sin kx,\ \cos kx)$ (*функция нечетна по синусу*), то переходят к новой переменной $t=\cos kx$.

27.2.2. Если $R(\sin kx, -\cos kx) = -R(\sin kx,\ \cos kx)$ (*функция нечетна по косинусу*), то переходят к новой переменной $t=\sin kx$.

27.2.3. Если $R(-\sin kx,-\cos kx) = R(\sin kx,\ \cos kx)$, то переходят к новой переменной $t=\mathrm{tg}\,kx$. В частности, $\displaystyle\int\frac{dx}{a\cos^2 kx+b\sin^2 kx+c} = \frac{1}{k(b+c)}\int\frac{dt}{t^2+\frac{a+c}{b+c}}$ – табличный интеграл **22.3.12** или **22.3.14** (полагаем, что $a+c\neq 0,\ b+c\neq 0$).

Замечание. Интегралы вида $\int \sin^p kx\cdot\cos^q kxdx$ подстановками **27.2.1–2** сводятся к интегралам от дифференциальных биномов **26.2** при любых рациональных p и q.

27.3. Универсальная тригонометрическая подстановка

Если рациональная функция $R(\sin kx,\ \cos kx)$ не удовлетворяет ни одному из условий **27.2.1–27.2.3**, то применяют *универсальную тригонометрическую подстановку* $t=\mathrm{tg}\dfrac{kx}{2}$. При этом $\sin kx = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos kx = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$x=\frac{2}{k}\mathrm{arctg}\,t,\ dx=\frac{2dt}{k(1+t^2)} \text{ и } \int R(\sin kx,\ \cos kx)dx = \frac{2}{k}\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Замечание. Применение этой подстановки к интегралам вида $\displaystyle\int\frac{dx}{a\cos kx+b\sin kx+c}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ позволяет свести их к табличным.

27.4. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

27.4.1. Найдите $\int \sin^2 x \cdot \cos 5x dx$.

Решение. Применим формулы **27.1.4** и **27.1.2**: $\int \sin^2 x \cdot \cos 5x dx =$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{\sin 5x}{10} - \frac{1}{4}\int (\cos 7x + \cos 3x) dx =$$

$$= \frac{\sin 5x}{10} - \frac{\sin 7x}{28} - \frac{\sin 3x}{12} + C.$$

27.4.2. Вычислите $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^4 x}$.

Решение. Учтем замечание к **27.1**. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 dx}{\cos x \cdot \sin^4 x} =$

$$= \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos x \cdot \sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\overbrace{(2\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1+t^2,\ t=\sin x}\overbrace{\cos x dx}^{dt}}{\underbrace{\sin^4 x}_{t^4}} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \int \frac{(t^2+1)}{t^4} dt = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

.

27.4.3. Найдите $\int \frac{dx}{(1+\sin x) \cdot \cos x}$.

Решение. Функция нечетна по косинусу (**27.2.2**), поэтому сделаем подстановку $t = \sin x$: $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cdot \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)\cdot \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1+\sin x)\cdot(1-\sin^2 x)} =$

$= \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)}$. Разложим дробь $\frac{1}{(1+t)^2(1-t)}$ в сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(1+t)^2(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{D}{1-t} = \frac{A(1-t)(1+t) + B(1-t) + D(1+t)^2}{(1+t)^2(1-t)}.$$

Приравняем числители: $A(1-t)(1+t) + B(1-t) + D(1+t)^2 \equiv 1$. Положим в этом тождественном равенстве $t = 1$, получим $4D = 1$, $D = \frac{1}{4}$. Затем положим $t = -1$, откуда $2B = 1$, $B = \frac{1}{2}$. Приравняем свободные члены $A + B + D = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$. Вычислим интеграл и вернемся к старой переменной:

$$\int\frac{dt}{(1+t)^2(1-t)}=\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^2}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{4}\ln|t-1|+C=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)-\frac{1}{2(1+\sin x)}+C.$$

27.4.4. Найдите $\int\frac{\sin 3x}{\cos x}dx$.

Решение. Запишем $\sin 3x$ по формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-\sin^3\alpha$. Таким образом, подынтегральная функция $\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\cos x}$ имеет одинаковую четность (нечетна) и по $\sin x$, и по $\cos x$, т.е. можно воспользоваться любой из подстановок **27.2.1, 27.2.2, 27.2.3**. Наиболее удобно перейти к новой переменной $t=\cos x$:

$$\int\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{(3-4\sin^2 x)}{\cos x}\sin x dx=-\int\frac{3-4(1-t^2)}{t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t}-4\int t dt=\ln|t|-2t^2+C=\ln|\cos x|-2\cos^2 x+C.$$

27.4.5. Вычислите $\int\frac{\sin^2 2x}{1+3\cos^2 2x}dx$.

Решение. Случай **27.2.3**. Сделаем подстановку $t=\operatorname{tg}2x$, $\sin^2 2x=\frac{t^2}{t^2+1}$,

$\cos^2 2x=\frac{1}{t^2+1}$, $\frac{\sin^2 2x}{1+3\cos^2 2x}=\frac{t^2}{t^2+4}$, $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{2(t^2+1)}$.

Перепишем интеграл: $\int\frac{\sin^2 2x}{1+3\cos^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+4)(t^2+1)}$.

Подынтегральную функцию разложим в сумму элементарных дробей: $\frac{t^2}{(t^2+4)(t^2+1)}=\frac{At+B}{t^2+4}+\frac{Dt+E}{t^2+1}=\frac{(At+B)(t^2+1)+(Dt+E)(t^2+4)}{(t^2+4)(t^2+1)}$. Составим систему, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числителей:

$$\begin{cases} A+D=0 \quad (\text{при } t^3),\\ B+E=1 \quad (\text{при } t^2),\\ A+4D=0 \quad (\text{при } t^1),\\ B+4E=0 \quad (\text{при } t^0).\end{cases}$$

Решение системы $A=D=0$, $B=\frac{4}{3}$, $E=-\frac{1}{3}$.

Завершим вычисление $\int \frac{\sin^2 2x}{1+3\cos^2 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+4)(t^2+1)} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+4} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+1} =$
$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} - \frac{x}{3} + C$.

27.4.6. Вычислите $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^3 x}}$.

Решение. Сведем к интегралу от дифференциального бинома при помощи подстановки $t = \cos x$, $x = \arccos t$, $dx = -(1-t^2)^{-1/2} dt$, $\sin x = (1-t^2)^{1/2}$. Интеграл примет вид $I = -\int t^{-1/2}(1-t^2)^{-5/4} dt$. Здесь $m = -\frac{1}{2}$, $n = 2$, $p = -\frac{5}{4}$. Случай **26.2.3**, т.к. $\frac{m+1}{n} = -1 \in Z$. Подстановка $z^4 = \frac{1}{t^2} - 1$, $t = \frac{1}{(1+z^4)^{1/2}}$,

$dt = -\frac{2z^3 dz}{(1+z^4)^{3/2}}$, $\quad (1-t^2)^{-5/4} = \left(\frac{z^4}{1+z^4}\right)^{-5/4} = \frac{(1+z^4)^{5/4}}{z^5}$,

$I = 2\int (1+z^4)^{1/4} \frac{(1+z^4)^{5/4}}{z^5} \cdot \frac{z^3 dz}{(1+z^4)^{3/2}} = 2\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{2}{z} + C = -\frac{2t^{1/2}}{(1-t^2)^{1/4}} + C$. Вернемся к старой переменной: $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^3 x}} = -2\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} + C = -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$.

27.4.7. Найдите $\int \frac{dx}{3+\cos 5x - 2\sin 5x}$.

Решение. Универсальная подстановка **27.3**, $t = \operatorname{tg}\frac{5x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{5(t^2+1)}$:

$$\int \frac{dx}{3+\cos 5x - 2\sin 5x} = \int \frac{\frac{2dt}{5(1+t^2)}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5(3+3t^2+1-t^2-4t)} = \int \frac{dt}{5(t^2-2t+2)} =$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t-1)^2+1} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(t-1) + C = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5x}{2} - 1\right) + C.$$

27.5. Задачи для самостоятельного решения

27.5.1. $\int \cos 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x dx$. **27.5.2.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **27.5.3.** $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$.

27.5.4. $\int \frac{dx}{2\cos^2 3x + 5\sin^2 3x - 1}$. **27.5.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \cos^{10} x}}$. **27.5.6.** $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$.

27.5.7. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$. **27.5.8.** $\int \frac{1-\sin 2x + \cos 2x}{1+\sin 2x - \cos 2x} dx$. **27.5.9.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin x - 2}$.

Ответы. 27.5.1. $\frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} - \frac{\sin 6x}{24} - \frac{\sin 10x}{40} + C$. **27.5.2.** $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$.

27.5.3. $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$. **27.5.4.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} 3x) + C$. **27.5.5.** $3\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \frac{3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^7 x}}{7} + C$

27.5.6. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C$. **27.5.7.** $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right) + C$. **27.5.8.** $-x - \ln|1 + \operatorname{ctg} x| + C$

27.5.9. $\frac{2}{3(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1)} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 20-е изд.; М.: Наука,1985. 384с.

[2] Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярева О.М. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М,2011. - 372 с. (Высшее образование).