Conjuntos Numéricos

Os Números Naturais N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...} são números inteirospositivos (não-negativos) que se agrupam num conjunto chamado de N, composto de um número ilimitado de elementos.

Quando o zero não faz parte do conjunto, é representado com um asterisco ao lado da letra N e, nesse caso, esse conjunto é denominado de Conjunto dos Números Naturais Não-Nulos: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}.

- Conjunto dos Números Naturais Pares = {0, 2, 4, 6, 8...}

- Conjunto dos Números Naturais Ímpares = {1, 3, 5, 7, 9...}

O conjunto de números naturais é infinito. Todos possuem um antecessor (número anterior) e um sucessor (número posterior), exceto o número zero (0). Assim:

- o antecessor de 1 é 0 e seu sucessor é o 2;

- o antecessor de 2 é 1 e seu sucessor é o 3;

- o antecessor de 3 é 2 e seu sucessor é o 4;

- o antecessor de 4 é 3 e seu sucessor é o 5.

Cada elemento é igual ao número antecessor mais um, exceptuando-se o zero. Assim, podemos notar que:

- o número 1 é igual ao anterior (0) + 1 = 1;

- o número 2 é igual ao anterior (1) + 1 = 2;

- o número 3 é igual ao anterior (2) + 1 = 3;

- o número 4 é igual ao anterior (3) + 1 = 4.

A função dos números naturais é contar e ordenar. Nesse sentido, vale lembrar que os homens, antes de inventarem os números, tinham muita dificuldade em realizar a contagem e ordenação das coisas.

O conjunto dos números naturais é formado por todos os números inteiros não negativos. Em outras palavras, todo número que é inteiro e positivo é natural, além disso, como o zero é inteiro, mas não é negativo, ele também é um número natural.

Assim, a lista dos números naturais é a seguinte:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

E assim por diante, seguindo esse mesmo padrão de formação.

Note que essa sequência numérica é a que usamos para contar. Cada um desses símbolos representa uma quantidade, portanto, partindo do nada, uma unidade, duas unidades etc. Uma outra maneira de representar esse conjunto é usando a notação específica para conjuntos, na qual as reticências significam que a sequência continua nessa mesma ordem e padrão de formação:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}

Nessa notação, N é o símbolo que representa o conjunto dos números naturais.

A ideia de sucessor

O conjunto dos números naturais é formado apenas por números inteiros e não contém números repetidos, por isso, é possível escolher, entre dois números naturais distintos, aquele que é maior e aquele que é menor. Quando um número natural x é maior do que um número natural y em uma unidade, dizemos que x é sucessor de y. Assim:

x é sucessor de y se x + 1 = y

Se olharmos na lista dos números naturais, colocada em ordem crescente, o sucessor de um número natural n é sempre o próximo número à sua direita. Logo:

O sucessor de 7 = 8

O sucessor de 20 = 21

etc.

Perceba também que todo número natural possui sucessor, assim, o sucessor do zero é 1, o sucessor de 1 é 2 …

Essa característica garante que, independentemente do número natural escolhido, e por maior que ele seja, sempre existirá um número natural uma unidade maior que ele. Portanto, o conjunto dos números naturais é infinito.

A ideia de antecessor

Quando um número natural x é menor que um número natural y em uma unidade, dizemos que x é o antecessor de y. Assim:

x é antecessor de y se x – 1 = y

Olhando a lista de números naturais em ordem crescente, verificamos que o antecessor de um número natural n é o número à sua esquerda. Logo:

O antecessor de 7 = 6

O antecessor de 20 = 19

etc.

Nem todo número natural possui antecessor. Na realidade, apenas o zero não possui, pois ele é o primeiro número natural e também porque 0 – 1 = – 1, que não é um número natural. Assim sendo, concluímos que o conjunto dos números naturais é limitado.

Sim, é possível que um conjunto seja limitado e infinito ao mesmo tempo. O conjunto dos números naturais é limitado inferiormente pelo zero, mas ilimitado superiormente e, por isso, é infinito.

Subconjuntos dos números naturais

O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos muito conhecidos:

1 – Conjunto dos números primos (P): é formado por todos os números que são divisíveis apenas por 1 e por si mesmo.

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, …}

2 – Conjunto dos números compostos (C): é formado por todos os números que não são primos.

C = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, …}

3 – Conjunto dos quadrados perfeitos (Q): é formado por todos os números que são resultados de uma potência em que o expoente é 2.

Q = (1, 4, 9, 16, 25, 36, …)

Números Inteiros

Os números inteiros são os números reais, positivos e negativos, representados no conjunto da seguinte maneira:

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

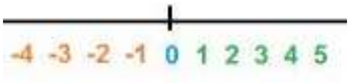
Os pontos significam a infinidade dos números anteriores e posteriores existentes.

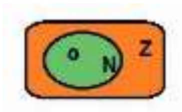
O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z (maiúscula).

Os números inteiros negativos são sempre acompanhados pelo sinal (-), enquanto os números inteiros positivos podem vir ou não acompanhados de sinal (+).

O zero é um número neutro, ou seja, não é um número nem positivo e nem negativo.

Assim, a relação de inclusão no conjunto dos inteiros envolve o conjunto dos números naturais (N) junto com os números negativos.





Classificação dos Números Inteiros (Z)

- Inteiros não-nulos: todos os números inteiros, com exceção do zero.
- São representados pelo acréscimo do '*' ao lado do Z: Z* = {-3,-2,-1, 1, 2, 3, 4, ...}
- Inteiros não-negativos: todos os números inteiros, com exceção dos negativos.
- São representados pelo acréscimo do '+' ao lado do Z: Z+ = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.
- Inteiros não-positivos : todos os números inteiros, com exceção dos positivos.
- São representados pelo acréscimo do '-' ao lado do Z: Z_= {..., -4,-3,-2,-1, 0}
- Inteiros positivos: todos os números inteiros, com exceção dos negativos e do zero.
- São representados pelo acréscimo de '*' e '+' ao lado do Z: Z*+ = {1,2,3,4, 5...}
- Inteiros negativos: todos os números inteiros, com exceção dos positivos e do zero.
- São representados pelo acréscimo de '*' e '-' ao lado do Z: Z*_= {..., -4,-3,-2,-1}

Operações entre Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é formado pelos algarismos inteiros positivos e negativos e o zero. Eles são importantes para o cotidiano, principalmente nas situações envolvendo valores negativos, como escalas de temperatura, saldos bancários, indicações de altitude em relação ao nível do mar, entre outras situações.

As adições e subtrações envolvendo estes números, requerem a utilização de regras matemáticas envolvendo os sinais positivos (+) e negativos (–). Devemos também dar ênfase ao estudo do módulo de um número, que significa trabalhar o valor absoluto de um algarismo, observe:

Vamos determinar o módulo dos números a seguir:

Módulo de + 4 = |+4| = 4
Módulo de –6 = |–6| = 6
Módulo de –10 = |–10| = 10
Módulo de +20 = |+20|=20

Adição e subtração de números inteiros sem a presença de parênteses.

1ª propriedade → sinais iguais: soma e conserva o sinal.

2ª propriedade → sinais diferentes: subtrai e conserva o sinal do número de maior módulo.

+ 5 + 6 = + 11 →1ª propriedade
+ 9 + 10 = +19 → 1ª propriedade
– 6 + 2 = – 4 → 2ª propriedade
+ 9 – 7 = +2 → 2ª propriedade
– 3 – 5 = –8 →1ª propriedade
–18 – 12 = –30 → 1ª propriedade

Adição e subtração de números inteiros com a presença de parênteses.

Para eliminarmos os parênteses devemos realizar um jogo de sinal, observe:

+ (+) = +
+ (–) = –
– (+) = –
– (–) = +

Após a eliminação dos parênteses, basta aplicarmos a 1ª ou a 2ª propriedade.

+ (+9) + (–6) → + 9 – 6 → + 3

– (– 8) – (+6) → +8 – 6 → +2
+ (– 14) – (– 8) → –14 + 8 → – 6

– (+ 22) − (– 7) → –22 + 7 → –15

– (+ 9) + (– 12) → – 9 – 12 → – 21

O conjunto dos Números Naturais N

O conjunto dos números naturais, inicialmente composto por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... O primeiro povo a fazer a representação do zero, os babilônios, a fizeram há mais de dois milênios antes de Cristo. Hoje, temos este conjunto formado da seguinte maneira: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}. A partir destes elementos podemos formar infinitas quantidades, apenas agrupando-os de maneira que cada um represente determinado valor de acordo com a sua posição.

É importante destacar, que o nosso sistema de numeração é decimal, isto é, a cada dez unidades formaremos uma dezena, a cada dez dezenas formaremos uma centena, a cada dez centenas formaremos um milhar, e assim sucessivamente.

Ancorando-se nos valores posicionais, podemos escrever números astronômicos e saber o que cada um dos seus algarismos de composição representa naquele contexto. Vejamos um exemplo de análise dos valores dos algarismos componentes de certo número.

2568 Observem →	2	5	6	8
Decompondo o número, temos:	2000	500	60	8

Observem detalhadamente, que no número 2568, o algarismo 2 tem valor 2000, o 5 vale 500, o 6 vale 60 e 8 vale 8. Tudo isso se dá de acordo com a posição ocupada por cada um: o 8 ocupa a casa das unidades simples, por isso vale apenas 8 unidades; o 6 ocupa a casa das dezenas, valendo 6 dezenas (6 x 10), 60 unidades; o 5 ocupa a casa das centenas, valendo 5 centenas (5 x 100), 500 unidades; e, por fim, o 2 ocupa a casa das unidades de milhar, valendo 2 milhares (2 x 1000), 2000 unidades.

Uma conclusão imediata deste fato é uma curiosidade que intriga a cabeça dos que com ela se depara. Imagine se alguém lhe perguntasse “quem é maior: 1 ou 3?” Os apressados responderiam “3, é claro”. Mas até que ponto isso está correto? Bem, a melhor resposta, ou pelos menos a mais cautelosa, seria responder que para saber se 1 é maior ou menor que 3 seriamos obrigados a saber do contexto no qual eles estão inseridos, por exemplo: no número 321, o 3 é maior que o 1, pois enquanto o três representa 3 centenas, o 1 representa apenas uma unidade simples; já no caso do número123, enquanto o 1 representa uma centena, o 3 representa apenas 3 unidades simples, sendo, portanto, 1 maior que 3. Veja a resposta ideal:

- Marcos, quem é maior, o 3 ou o 1?

- Isso depende, Paulo. Antes que eu responda, preciso saber em qual número eles estão inseridos.

Podemos ainda representar um subconjunto dos Números Naturais utilizando a linguagem moderna dos conjuntos. Este seria o conjunto dos Números Naturais Não-Nulos: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}. Neste novo conjunto, apenas omitimos a presença do zero.

Destaco também algumas características do conjunto dos Números Naturais, dentre elas temos: a multiplicação é sempre permitida neste conjunto – toda multiplicação ou adição entre números naturais resulta sempre outro número natural; a divisão nem sempre é permitida dentro deste conjunto – nem toda divisão entre naturais resulta em outro número natural (1/2, 3/5, 5/9 etc.); a subtração nem sempre é permitida em N – nem toda subtração entre naturais resulta em um número natural (1 - 2, 6 - 9, 5 - 8).

Muitas representações já foram feitas dos Números Naturais. Cada povo os representava de acordo com os seus sistemas de escrita, suas interpretações das quantidades e dos recursos disponíveis à época. A forma como escrevemos esses números hoje foi criada na Índia e difundida na Arábia, sendo, por isso, chamados de Números Indo-Arábicos.

Últimas Considerações

Dá pra ver que a matemática sempre esteve, assim como qualquer outra ciência, a favor do homem em suas tomadas de decisões e nas resoluções de problemas. Os artifícios matemáticos que conhecemos hoje, e que achamos tão simples de compreender, foram criados numa época em que as estruturas basilares do conhecimento, que nos levam a profundas interpretações, eram muito escassas, mas nem por isso o homem deixou de criar, de inventar.

Somos uma espécie dotada de tanta sabedoria e inteligência, porém nem mesmo somos capazes de medir essas características estampadas em nós mesmos. O fato é que raciocinamos, refletimos, comparamos e relacionamos. Tudo isso em campos reais ou fictícios, através de um poder de conversão do abstrato a ideias palpáveis, facilmente compreendidas sem muito esforço por leitores secundários.

Através da matemática, e do raciocínio aguçado que o seu estudo nos traz, podemos desenvolver ainda mais as percepções desse mundo de complexidades e realidades ainda pouco exploradas. Podemos nos fortalecer como intelectuais, autoridades naquilo que nos propusermos a defender, proprietários de um vasto conhecimento e compartilhadores dos saberes adquiridos ao longo das várias jornadas acadêmicas.

Relação de Ordem

Sejam a e b dois números reais quaisquer. Dizemos que a é menor que b e escrevemos $a < b$, quando $b - a$ é positivo. Geometricamente, isto significa que o número a está à esquerda do número b na reta numerada. Equivalentemente, dizemos que b é maior que a e escrevemos b > a . Logo, somente três casos podem acontecer: ou $a = b$, ou $a < b$ ou $b < a$.Neste sentido dizemos que o conjunto dos números reais é ordenado. O símbolo $a \leq b$, lê-se a é menor ou igual a b , (ou b a, lê-se b é maior ou igual a a) significa que ou a < b ou a = b (b > a ou b = a).

Se a , b e c são números reais, podemos demonstrar que:

(i) Se a < b e b < c então a < c .

(ii) Se a < b então $a + c < b + c$.

(iii) Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

(iv) Se $a < b$ e c > 0 então $ac < bc$.

(v) Se a < b e c < 0 então a c > b c .

(vi) Se 0 < a < b então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Regras de Divisibilidade

Dentre as propriedades operatórias existentes na Matemática, podemos ressaltar a divisão, que consiste em representar o número em partes menores e iguais. Para que o processo da divisão ocorra normalmente, sem que o resultado seja um número não inteiro, precisamos estabelecer situações envolvendo algumas regras de divisibilidade. Lembrando que um número é considerado divisível por outro quando o resto da divisão entre eles é igual a zero.

Regras de divisibilidade

Divisibilidade por 1
Todo número é divisível por 1.

Divisibilidade por 2
Todo número par é divisível por 2, para isto basta terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8. Exemplo:

24 : 2 = 12
132 : 2 = 66
108 : 2 = 54
1024 : 2 = 512

Divisibilidade por 3
Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos constitui um número múltiplo de 3. Exemplo:

33 : 3 = 11, pois 3 + 3 = 6
45 : 3 = 15, pois 4 + 5 = 9
156 : 3 = 52, pois 1 + 5 + 6 = 12
558 : 3 = 186, pois 5 + 5 + 8 = 18

Divisibilidade por 4
Um número é divisível por 4 quando for par e a metade do último algarismo adicionado ao penúltimo for um número par ou terminar com zero nas duas últimas casas. Exemplo:

48 : 4 = 12, pois 8/2 + 4 = 8
288 : 4 = 72, pois 8/2 + 8 = 12
144 : 4 = 36, pois 4/2 + 4 = 6
100 : 4 = 25, pois possui na última e antepenúltima casa o algarismo 0.

Divisibilidade por 5
É todo número terminado em 0 ou 5.

25 : 5 = 5
100 : 5 = 20
555 : 5 = 111
75 : 5 = 15

Divisibilidade por 6
São todos os números divisíveis por 2 e 3 no mesmo instante.

24 : 6 = 4, pois 24 : 2 = 12 e 24 : 3 = 8
36 : 6 = 6, pois 36 : 2 = 18 e 36 : 3 = 12
132 : 6 = 22, pois 132 : 2 = 66 e 132 : 3 = 44
564: 6 = 94, pois 564 : 2 = 282 e 546 : 3 = 188

Divisibilidade por 7
Um número é divisível por 7 quando estabelecida a diferença entre o dobro do último e os demais algarismos, constituindo um número divisível por 7. Exemplo:

161 : 7 = 23, pois 16 – 2*1 = 16 – 2 = 14
203 : 7 = 29, pois 20 – 2*3 = 20 – 6 = 14
294 : 7 = 42, pois 29 – 2*4 = 29 – 8 = 21
840 : 7 = 120, pois 84 – 2*0 = 84

Divisibilidade por 8
Um número é divisível por 8 quando termina em 000 ou os últimos três números são divisíveis por 8. Exemplo:

1000 : 8 = 125, pois termina em 000
208 : 8 = 26, pois os três últimos são divisíveis por 8

Divisibilidade por 9
Será divisível por 9 todo número em que a soma de seus algarismos constitui um número múltiplo de 9. Exemplo:

81 : 9 = 9, pois 8 + 1 = 9
1107 : 9 = 123, pois 1 + 1 + 0 + 7 = 9
4788 : 9 = 532, pois 4 + 7 + 8 + 8 = 27

Divisibilidade por 10
Todo número terminado em 0 é divisível por 10.

100 : 10 = 10
500 : 10 = 50
500 000 : 10 = 50 000
2000 : 10 = 200

Divisibilidade por 11
Um número é divisível por 11 nas situações em que a diferença entre o último algarismo e o número formado pelos demais algarismos, de forma sucessiva até que reste um número com 2 algarismos,

resultar em um múltiplo de 11. Como regra mais imediata, todas as dezenas duplas (11, 22, 33, 5555, etc.) são múltiplas de 11.

1342 : 11 = 122, pois 134 – 2 = 132 → 132 – 2 = 11
2783 : 11 = 253, pois 278 – 3 = 275 → 27 – 5 = 22
7150: 11 = 650, pois 715 – 0 = 715 → 71 – 5 = 66

Divisibilidade por 12
Se um número é divisível por 3 e 4, também será divisível por 12.

192 : 12 = 16, pois 192 : 3 = 64 e 192 : 4 = 48
672 : 12 = 56, pois 672 : 3 = 224 e 672 : 4 = 168

Divisibilidade por 15
Todo número divisível por 3 e 5 também é divisível por 15.

1470 é divisível por 15, pois 1470:3 = 490 e 1470:5 = 294.
1800 é divisível por 15, pois 1800:3 = 600 e 1800:5 = 360.

Máximo divisor comum (mdc)

O máximo divisor comum é o maior divisor entre dois números, para identificar esse máximo divisor é necessário realizar um processo de fatoração.

Para estudarmos o máximo divisor comum entre dois termos, precisamos saber o que é divisor de um número. Todo número natural possui divisores, isto é, se ao dividirmos um número A pelo número B e obtermos resto zero podemos afirmar que B é divisor de A. Por exemplo:

16 : 2 é igual a 8 e resto 0.
25 : 5 é igual a 5 e resto 0.

Podemos concluir que 2 e 5 são divisores de 16 e 25 respectivamente.

Exemplos de divisores de um número:

Divisores de:

32 = 1, 2, 4, 8, 16, 32
15 = 1, 3, 5, 15
45 = 1, 3, 5, 9, 15, 45

O MDC entre dois ou mais números é o maior divisor comum a eles.

Exemplos:

MDC(12,36)
Divisores de 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12
Divisores de 36 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Podemos verificar que o maior divisor comum entre 12 e 36 é o próprio 12.

MDC(18,24,54)
Divisores de 18 = 1, 2, 3, 6, 9, 18
Divisores de 24 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Divisores de 54 = 1, 2, 3, 6, 18, 27, 54
O maior divisor comum a 12, 24 e 54 é o 6.

Processo prático para a obtenção do máximo divisor comum

MDC(12,36)

12	36	2
6	18	2
3	9	3
1	3	3
1	1	

Os números destacados na fatoração estão dividindo os dois números ao mesmo tempo, então devemos realizar uma multiplicação entre eles para descobrirmos o máximo divisor comum.
2 x 2 x 3 = 12
MDC(12,36) = 12

MDC(70,90,120)

70	90	120	2
35	45	60	2
35	45	30	2
35	45	15	3
35	15	5	3
35	5	5	5
7	1	1	7
1	1	1	

O máximo divisor comum a 70, 90 e 120 = 2 x 5 = 10

Mínimo Múltiplo Comum

Para entendemos o que é mínimo múltiplo comum, temos que saber achar os múltiplos de um número.

Por exemplo, quais são os múltiplos de 2?

São todos os números que resultam da multiplicação de um número natural por 2. Veja:

2 x 1 = 2 → 2 é múltiplo de 2.
2 x 5 = 10 → 10 é múltiplo de 2.
2 x 12 = 24 → 24 é múltiplo de 2.
2 x 30 = 60 → 60 é múltiplo de 2
↓
Nº
Natural

E quando é dado um número como iremos fazer pra saber se esse número será múltiplo de 2,3,4,5,6, e assim por diante?
Basta fazer a operação inversa à multiplicação: divisão. Veja:

• 1232 será múltiplo de 2?
Neste caso podemos usar a operação de divisão pra descobrir ou usar a regra seguinte:
Todo número múltiplo de 2 tem que terminar em número par. Então 1232 termina em par, ele será múltiplo de 2.

• 1232 será múltiplo de 3?
Como no múltiplo de 2 podemos utilizar a operação da divisão pra descobrir ou usar a seguinte regra: todo número múltiplo de 3, a soma de seus algarismos resulta em um número múltiplo de 3.
Se somarmos os algarismos do número 1232 teremos 1+2+3+2 = 8. 8 não é múltiplo de 3, então 1232 também não vai ser.

• 1232 é múltiplo de 5?
Para descobrir se um número é múltiplo de 5 além de usar a operação da divisão, também podemos utilizar uma regra: todo número múltiplo de 5 termina em 0 ou 5. Então 1232 termina em 2, assim não é múltiplo de 5.

Para descobrir se 1232 é múltiplo de outros números devermos utilizar a divisão se essa operação der exata (resto igual a zero) é por que ele será múltiplo.

Agora o que é mmc? Calculamos o mmc de 2 ou mais números. Consistem em achar o menor múltiplo comum (tirando o zero) entre esses números. Por exemplo:

MMC(15, 20) = ?
Devemos em primeiro lugar acharmos os múltiplos de 15 e depois de 20.

M(15) = 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...
M(20) = 20, 40, 60, 80, 100, ...

Observando os seus múltiplos vemos que o menor múltiplo comum é o 60, portanto:

MMC(15, 20) = 60.

Existe outro método para acharmos o mmc de números. Ele consiste em dividir os números por números primos, veja como funciona.

Número primo é aquele número que é divisível apenas por um e por ele mesmo. Como 2,3,5,7,11,13,17,19,23, e assim por diante. É interessante ressaltar que o único número par primo é o 2, os outro são todos ímpares.

Para calcularmos o mmc(15,20) utilizando esse método ficará assim:

15 , 20	2
15 , 10	2
15 , 5	3
5 , 5	5
1 , 1	

Dividimos o 15 e 20 apenas por números primos em seqüência. Pegamos os números primos 2, 2,3 ,5 é multiplicamos: 2 x 2 x 3 x 5 = 60 então o mmc(15,20) = 60.

Decomposição em fatores primos

A fatoração está diretamente relacionada com a multiplicação, haja vista que os fatores são os termos que multiplicamos para gerar o produto. Veja:

2 → fator	26 → fator
x 3 → fator	x 7 → fator
6 → Produto	182 → Produto

Os fatores primos da decomposição são obtidos por meio de divisões sucessivas. Recorde-se de que, para um número ser primo, ele deve ser divisível somente por 1 e ele mesmo, logo, os números 2, 3, 5, 7 e 11 são primos. O número primo é considerado um fator quando ele for o divisor no algoritmo da divisão. A estrutura do algoritmo da divisão é a seguinte:

Dividendo | Divisor
Resto Quociente

Realizando a divisão de 4 por 2, temos a seguinte situação:

4 |2
0 2

Dividendo = 4
Divisor = 2
Quociente = 2
Resto = 0

2 x 2 = 4

Fator = 2
Fator = 2
Produto = 4

Utilizando as divisões sucessivas, obtemos a fatoração completa, que representa a decomposição de um número em fatores primos. Veja um exemplo de divisões sucessivas do número 112 e, em seguida, a fatoração completa.

Exemplo: Decomponha o número 112 em fatores primos:

```
112| 2
   0 56 | 2
       0  28 | 2
            0  14 | 2
                 0  7 | 7
                     0  1
```

Toda vez que for realizar a decomposição de um número em fatores primos, lembre-se de que o divisor sempre será um número primo e a ordem de sucessão desses divisores, que são fatores, é crescente. Mudamos o número primo do divisor somente quando não é mais possível utilizá-lo na divisão. No exemplo acima, houve a mudança do divisor de número 2 para sete, uma vez que o dividendo passou a ser o sete e o único divisor para 7 é o próprio 7.

Ainda sobre o exemplo acima, a fatoração completa de 121 é:

$112 = 2 . 2 . 2 . 2 . 7 = 2^4 . 7$

Além da estrutura do algoritmo da divisão, existe outra que pode ser utilizada para fatorar um número. Veja os três exemplos a seguir:

Exemplo: Encontre a forma fatorada completa dos números 234, 180 e 1620:

```
234|2
117|3
 39|3
 13|13
  1|
```

A forma fatorada completa do número 234 é: $2 . 3 . 3 . 13 = 2 . 3^2 . 13$

Observe que todos os fatores são números primos e que a sucessão dos fatores acontece de forma crescente.

```
180|2
 90|2
 45|3
 15|3
  5|5
  1|
```

A forma fatorada completa do número 180 é: $2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^2 . 3^2 . 5$

Todos os termos que compõem a fatoração são números primos.

```
1620|2
 810|2
 405|3
 135|3
  45|3
  15|3
   5|5
   1|
```

A forma fatorada completa do número 1620 é: $2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 3 . 5 = 2^2 . 3^4 . 5$

Todos os números que compõem a fatoração são primos.

Números racionais

O conjunto Q dos números racionais é formado por todos aqueles números que podem ser expressos na forma de fração a/b, em que o e b são números inteiros e b é diferente de 0.

Ao calcular a expressão decimal de um número racional, dividindo o numerador pelo denominador, obtêm-se números inteiros ou decimais.

Os números decimais podem ter:

- Um número finito de algarismos, número decimal exato, se os únicos divisores do denominador forem 2 ou 5.

- Um número infinito de algarismos, que se repetem de forma periódica.

  - a partir da vírgula, decimal periódico simples, se 2 ou 5 forem divisores do denominador;

  - a partir do algarismo dos décimos, centésimos…, decimal periódico composto, se entre os divisores do denominador estiver o 2 ou o 5 e houver, além desses, outros divisores.

Reciprocamente, qualquer número decimal exato ou periódico pode ser expresso na forma de fração.

$$\text{Números racionais} \begin{cases} \text{Números inteiros} \begin{cases} \text{positivos: } 1, 2, 3\ldots \\ \text{O número zero: } 0 \\ \text{negativos: } -1, -2, -3\ldots \end{cases} \\ \\ \text{Números decimais} \begin{cases} \text{Decimais exatos: } 0{,}2;\ 0{,}34\ldots \\ \text{Decimais periódicos: } 0{,}\overline{7};\ 0{,}\overline{894}\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Exemplo:

Expressar na forma de fração os seguintes números decimais:

a) $1{,}73 = \frac{173}{100}$

b) $1{,}\overline{73} = \frac{173-1}{99} = \frac{172}{99}$

c) $1{,}7\overline{3} = \frac{173-17}{90} = \frac{156}{90} = \frac{26}{15}$

d) $1{,}07\overline{3} = \frac{1073-107}{900} = \frac{966}{900} = \frac{161}{150}$

Representação canônica de um número racional

Dada uma fração, existem infinitas frações equivalentes a ela.

$$\left\{\ldots \frac{-6}{-9}, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9} \ldots\right\}$$

é o conjunto das frações equivalentes à fração irredutível $\frac{2}{3}$.

Um conjunto de frações equivalentes representa um único número racional.

Cada fração do conjunto é um representante do número racional, e a fração irredutível com denominador positivo é o representante canônico.

Assim, o número racional $\frac{2}{3}$, é formado pela fração $\frac{2}{3}$, e todas as suas equivalentes:

Todas elas são representantes do número racional $\frac{2}{3}$.

Portanto, $\frac{2}{3}$, e o representante canônico.

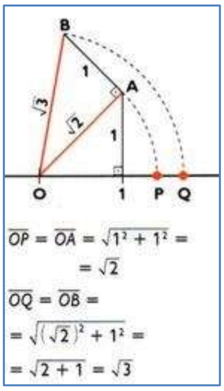
Números irracionais

O conjunto I dos números irracionais é formado pelos números que não podem ser expressos em forma de fração. São números cuja expressão decimal tem um número infinito de algarismos que não se repetem de forma periódica.

Existem infinitos números irracionais: $\sqrt{2}$. é irracional e, em geral, é irracional qualquer raiz não-exata, como $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{1{,}462}$.

π também é irracional e podem-se gerar números irracionais combinando seus algarismos decimais; por exemplo, o = 0,010010001… ou b = 0,020020002…

Com esses números, podem-se calcular soluções em equações do segundo grau (x2 = 2 —> x = $\sqrt{2}$. que não é racional), o comprimento de uma circunferência (C = 2 π r, em que π não é racional) etc.



Teorema de Pitágoras

Os números irracionais do tipo $\sqrt{a}$, sendo o um número natural, podem ser representados de maneira exata na reta numérica utilizando-se o Teorema de Pitágoras; para os demais, calcula-se sua expressão decimal e representa-se uma aproximação.

Exemplo:

Verificar se cada um dos seguintes números é racional ou irracional.

a) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$; portanto, é um numero racional.

b) $\sqrt{11}$ é um número irracional; se fosse um número racional poderia ser representado na forma de uma fração irredutível: $\frac{a}{b} = \sqrt{11}$, em que a e b não têm fatores comuns.

$\frac{a}{b} = \sqrt{11} \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 11$ que significa que a2 é divisível por b2, ou seja, têm divisores comuns, contradizendo o fato de que a fração $\frac{a}{b}$ seja irredutível. Demonstra-se essa afirmação por absurdo.

Números complexos

Os números complexos formam um conjunto numérico que é mais abrangente que os números reais. Eles surgiram após inúmeros estudos, sobretudo após tentativas de se resolver equações do segundo e do terceiro grau. Nessa época, os matemáticos se depararam raízes quadradas de números negativos, que não podem ser expressas no conjunto dos números reais. Assim, os matemáticos passaram a denotar essas raízes usando a letra “i”. A base principal foi adotar i=−1−−−√.

Definição

Quando vamos solucionar equações do tipo x2+1=0, nos deparamos com x=±−1−−−√. Como não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais, convencionou-se utilizar a notação i2=−1 para representar esse número negativo. Com isso, o resultado da equação anterior seria x=±i. Esse número “i” é conhecido como unidade imaginária.

Assim, um número complexo, que chamamos de Z, tem a forma

z=a+bi, a,b∈R

Chamamos o número a de parte real, Re(Z) = a, e b de parte imaginária, Im(Z) = b. Esta notação é chamada de forma algébrica.

Adição de números complexos

A adição de números complexos é realizada através da adição dos termos semelhantes, ou seja, somamos as partes reais de cada número e depois as partes imaginárias. Sejam z1 e z2 dois números complexos, tais que: z1=a+bi e z2=c+di.

Definiremos a adição de z1 e z2 da seguinte forma:

z1+z2=(a+bi)+(c+di)

z1+z2=(a+c)+(b+d)i

Exemplo:

Se z1=3+2i e z2=5−3i a soma será:

z1+z2=(3+5)+(2−3)i

z1+z2=8−i

Subtração de números complexos

A subtração de números complexos é análoga à adição. Calculamos a diferença entre as partes reais de cada número e depois as partes imaginárias.

Sejam z1 e z2 dois números complexos, tais que: z1=a+bi e z2=c+di.

Definiremos a subtração de z1 e z2 da seguinte forma:

z1−z2=(a+bi)−(c+di)

z1−z2=(a−c)+(b−d)i

Exemplo:

Se z1=7+10i e z2=3+6i a diferença será:

$z1-z2=(7-3)+(10-6)i$

$z1-z2=4-4i$

Multiplicação de números complexos

Para multiplicar números complexos utilizamos o mesmo método adotado na expansão de um produto notável, multiplicando cada termo do primeiro fator por todos os membros do segundo fator. Assim:

Sejam z1 e z2 dois números complexos, tais que: $z1=a+bi$ e $z2=c+di$.

Definiremos a multiplicação de z1 e z2 da seguinte forma:

$z1\cdot z2=(a+bi)\cdot(c+di)$

$z1\cdot z2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Exemplo:

Se $z1=2+5i$ e $z2=1+3i$ o produto será:

$z1\cdot z2=(2+5i)+(1+3i)$

$z1\cdot z2=2\cdot 1+2\cdot 3i+5i\cdot 1+5i\cdot 3i$

$z1\cdot z2=2+6i+5i+15i2$

$z1\cdot z2=2+6i+5i+15\cdot(-1)$

$z1\cdot z2=2+6i+5i-15$

$z1\cdot z2=(2-15)+(6+5)i$

$z1\cdot z2=-13+11i$

Divisão de números complexos

Para dividir números complexos multiplicamos o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor. O conjugado de um número complexo $z1=a+bi$ será $z1=a-bi$.

Sempre que multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, o denominador será um número real.

Sejam z1 e z2 dois números complexos, tais que: $z1=a+bi$ e $z2=c+di$

Definiremos a divisão de z1 e z2 da seguinte forma:

$z1z2=a+bic+di\cdot c-dic-di$

$z1z2=(a+bi)\cdot(c-di)c2-(di)2$

$z1z2=(ac-bd)+(ad+bc)ic2+d2=ac-bdc2+d2+ad+bcc2+d2i$

Exemplo

Se $z1=1+2i$ e $z2=2+3i$ a divisão será:

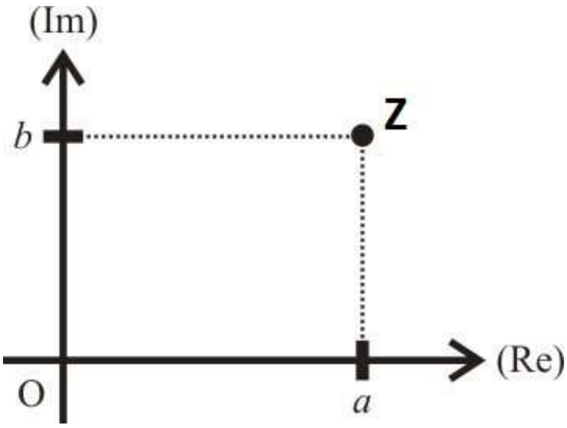
$z1z2=1+2i2+3i\cdot 2-3i2-3i$

$z1z2=(1+2i)\cdot(2-3i)22-(3i)2$

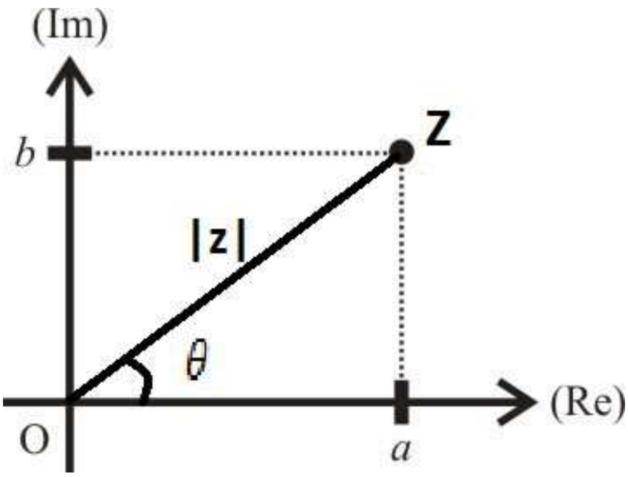
$z1z2=8-i4+9=8-i13=813-113i$

Argumento e módulo de um número complexo

Podemos representar um número complexo em um sistema de coordenadas. Esse sistema de coordenadas é chamado de Plano de Argand-Gauss. É composto por dois segmentos de reta perpendiculares. O segmento horizontal comporta as partes reais dos números complexos e o segmento vertical, as partes imaginárias. Como exemplo, observe como será representado o número complexo z=a+bi no Plano de Argand-Gauss:



O segmento de reta OZ é chamado de módulo do número complexo, representado por |z|. Na figura abaixo, o ângulo entre o eixo Ox e o segmento OZ é chamado de argumento de Z, representado por θ.



Argumento de Z

No Triângulo retângulo formado pelos vértices OâZ, temos que:

sen(θ)=b|z|

cos(θ)=a|z|

Sendo θ o argumento de Z.

Para encontrar o argumento de Z, podemos utilizar θ=arcsen(b|z|) ou θ=arcos(a|z|).

Módulo de Z

Aplicando o teorema de Pitágoras teremos:

(|z|)2=a2+b2

Então:

$|z|=a2+b2------\surd$

Forma trigonométrica de um número complexo

Cada número complexo pode ser expresso em função do seu módulo e argumento. Quando isso acontece dizemos que o número complexo está na forma trigonométrica ou polar.

Considere o número complexo $z=a+bi$, em que $z \neq 0$,

Como vimos anteriormente:

$\mathrm{sen}(\theta)=b|z| \Longrightarrow b=|z|\cdot\mathrm{sen}(\theta)$

$\cos(\theta)=a|z| \Longrightarrow a=|z|\cdot\cos(\theta)$

Substituindo os valores de a e b no complexo $z=a+bi$.

$z=a+bi$

$z=|z|\cdot\cos(\theta)+|z|\cdot\mathrm{sen}(\theta)i$

$z=|z|\cdot(\cos(\theta)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta))$

Produto de números complexos na forma polar

Considere dois números complexos na forma polar:

$z1=|z1|\cdot(\cos(\theta1)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1))$

$z2=|z2|\cdot(\cos(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta2))$

O produto entre será:

$z1\cdot z2=[|z1|\cdot(\cos(\theta1)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1))]\cdot[|z2|\cdot(\cos(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta2))]$

$z1\cdot z2=|z1|\cdot|z2|\cdot(\cos(\theta1)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1))\cdot(\cos(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta2))$

$z1\cdot z2=|z1|\cdot|z2|\cdot(\cos(\theta1)\cdot\cos(\theta2)+\cos(\theta1)\cdot i\cdot\mathrm{sen}(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1)\cdot\cos(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1)\cdot i\cdot\mathrm{sen}(\theta2))$

$z1\cdot z2=|z1|\cdot|z2|\cdot(\cos(\theta1)\cdot\cos(\theta2)+i\cdot\cos(\theta1)\cdot\mathrm{sen}(\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta0)\cdot\cos(\theta2)+i2\cdot\mathrm{sen}(\theta1)\cdot\mathrm{sen}(\theta2))$

$z1\cdot z2=|z1|\cdot|z2|\cdot(\cos(\theta1)\cdot\cos(\theta2)-\mathrm{sen}(\theta1)\cdot\mathrm{sen}(\theta2)+i(\mathrm{sen}(\theta1)\cdot\cos(\theta2)+\mathrm{sen}(\theta2)\cdot\cos(\theta1)))$

$z1\cdot z2=|z1|\cdot|z2|\cdot(\cos(\theta1+\theta2)+i\cdot\mathrm{sen}(\theta1+\theta2))$

Assim, para multiplicar dois números complexos na forma polar, basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos.

Exemplo:

Se $z1=2(\cos(\pi6)+i\cdot\mathrm{sen}(\pi6))$ e $z2=3(\cos(\pi3)+i\cdot\mathrm{sen}(\pi3))$:

$z1\cdot z2=2\cdot3(\cos(\pi6+\pi3)+i\cdot\mathrm{sen}(\pi6+\pi3))$

$z1\cdot z2=6(\cos(\pi2)+i\cdot\mathrm{sen}(\pi2))$

Potência de um número complexo

Como vimos anteriormente, para multiplicar números complexos, basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos.

Se multiplicarmos um número complexo Z por ele mesmo n vezes, teremos:

$|z|\cdot|z|\cdot|z|\cdot|z|\cdot\ldots\cdot|z|=(|z|)n$

e

$\theta+\theta+\theta+\ldots+\theta=n\cdot\theta$

Assim, elevando Z a uma potência n, teremos que:

$zn=(|z|)n\cdot(\cos(n\theta)+i\cdot sen(n\theta))$

Exemplo:

Calcular z3, sendo $z=2(\cos(\pi 4)+i\cdot sen(\pi 4))$.

$z3=23(\cos(3\cdot\pi 4)+i\cdot sen(3\cdot\pi 4))$

$z3=8(\cos(3\pi 4)+i\cdot sen(3\pi 4))$