

Progressões Geométricas

Podemos definir progressão geométrica, ou simplesmente P.G., como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q , chamada razão.

Podemos calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, dividindo entre si dois termos consecutivos. Por exemplo, na sucessão (1, 2, 4, 8,...), $q = 2$.

Cálculos do termo geral

Numa progressão geométrica de razão q , os termos são obtidos, por definição, a partir do primeiro, da seguinte maneira:

a_1	a_2	a_3	...	a_{20}	...	a_n	...
a_1	$a_1 \times q$	$a_1 \times q^2$...	$a_1 \times q^{19}$		$a_1 \times q^{n-1}$...

Assim, podemos deduzir a seguinte expressão do termo geral, também chamado enésimo termo, para qualquer progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Portanto, se por exemplo, $a_1 = 2$ e $q = 1/2$, então:

$$a_n = 2 \times (1/2)^{n-1}$$

Se quisermos calcular o valor do termo para $n = 5$, substituindo-o na fórmula, obtemos:

$$a_5 = 2 \times (1/2)^{5-1} = 2 \times (1/2)^4 = 1/8$$

A semelhança entre as progressões aritméticas e as geométricas é aparentemente grande. Porém, encontramos a primeira diferença substancial no momento de sua definição. Enquanto as progressões aritméticas formam-se somando-se uma mesma quantidade de forma repetida, nas progressões geométricas os termos são gerados pela multiplicação, também repetida, por um mesmo número. As diferenças não param aí.

Observe que, quando uma progressão aritmética tem a razão positiva, isto é, $r > 0$, cada termo seu é maior que o anterior. Portanto, trata-se de uma progressão crescente. Ao contrário, se tivermos uma progressão aritmética com razão negativa, $r < 0$, seu comportamento será decrescente. Observe, também, a rapidez com que a progressão cresce ou diminui. Isto é consequência direta do valor absoluto da razão, $|r|$. Assim, quanto maior for r , em valor absoluto, maior será a velocidade de crescimento e vice-versa.

Soma dos n primeiros termos de uma PG

Seja a PG ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$). Para o cálculo da soma dos n primeiros termos S_n , vamos considerar o que segue:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão q vem:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

Conforme a definição de PG, podemos reescrever a expressão como:

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n \cdot q$$

Observe que $a_2 + a_3 + \dots + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Logo, substituindo, vem:

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

Daí, simplificando convenientemente, chegaremos à seguinte fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Se substituirmos $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obteremos uma nova apresentação para a fórmula da soma, ou seja:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemplo:

Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1,2,4,8,...)

Temos:

$$S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$$

Observe que neste caso $a_1 = 1$.

5 - Soma dos termos de uma PG decrescente e ilimitada

Considere uma PG ILIMITADA (infinitos termos) e decrescente. Nestas condições, podemos considerar que no limite teremos $a_n = 0$. Substituindo na fórmula anterior, encontraremos:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo:

Resolva a equação: $x + x/2 + x/4 + x/8 + x/16 + \dots = 100$

O primeiro membro é uma PG de primeiro termo x e razão $1/2$. Logo, substituindo na fórmula, vem:

$$\frac{x}{1 - 1/2} = 100$$

Dessa equação encontramos como resposta $x = 50$.

Progressão Aritmética

Chamamos de progressão aritmética, ou simplesmente de PA, a toda sequência em que cada número, somado a um número fixo, resulta no próximo número da sequência. O número fixo é chamado de razão da progressão e os números da sequência são chamados de termos da progressão.

Observe os exemplos:

50, 60, 70, 80 é uma PA de 4 termos, com razão 10.

3, 5, 7, 9, 11, 13 é uma PA de 6 termos, com razão 2.

-8, -5, -2, 1, 4 é uma PA de 5 termos, com razão 3.

156, 152, 148 é uma PA de 3 termos, com razão -4.

100, 80, 60, 40 é uma PA de 4 termos, com razão -20.

6, 6, 6, 6,..... é uma PA de infinitos termos, com razão 0.

Numa PA de 7 termos, o primeiro deles é 6, o segundo é 10. Escreva todos os termos dessa PA.

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30

Numa PA de 5 termos, o último deles é 201 e o penúltimo é 187. Escreva todos os termos dessa PA.

145, 159, 173, 187, 201

Numa PA de 8 termos, o 3º termo é 26 e a razão é -3. Escreva todos os termos dessa PA.

32, 29, 26, 23, 20, 17, 14, 11

Numa PA, o 1º termo é 45 e o 2º termo é 80. Qual a razão dessa PA.

Numa PA, o 5º termo é -7 e o 6º termo é 15. Qual a razão dessa PA.

Símbolos Usados Nas Progressões

Em qualquer sequência, costumamos indicar o primeiro termo por a_1 , o segundo termo por a_2 , o terceiro termo por a_3 , e assim por diante. Generalizando, o termo da sequência que está na posição n é indicado por a_n .

Veja alguns exemplos

Na PA 2, 12, 22, 32 temos: $a_1 = 2$, $a_2 = 12$, $a_3 = 22$ e $a_4 = 32$

Quando escrevemos que, numa sequência, tem-se $a_5 = 7$, por exemplo, observe que o índice 5 indica a posição que o termo ocupa na sequência. No caso, trata-se do 5º termo da sequência. Já o símbolo a_5 indica o valor do termo que está na 5ª posição. No caso o valor do quinto termo é 7.

A razão de uma PA é indicada por r , pois ela representa a diferença entre qualquer termo da PA e o termo anterior.

Observe os exemplos:

Na PA 1856, 1863, 1870, 1877, 1884 a razão é $r = 7$, pois:

$$a_2 - a_1 = 1863 - 1856 = 7$$

$$a_3 - a_2 = 1870 - 1863 = 7$$

$$a_4 - a_3 = 1877 - 1870 = 7$$

$$a_5 - a_4 = 1884 - 1877 = 7$$

Na PA 20, 15, 10, 5 a razão é $r = -5$, pois:

$$a_2 - a_1 = 15 - 20 = -5$$

$$a_3 - a_2 = 10 - 15 = -5$$

$$a_4 - a_3 = 5 - 10 = -5$$

Classificação Das Progressões Aritméticas

Uma PA é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua razão seja positiva.

Exemplo:

(7, 11, 15, 19,...) é uma PA crescente. Note que sua razão é positiva, $r = 4$

Uma PA é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua razão seja negativa.

Exemplo:

(50, 40, 30, 20,...) é uma PA decrescente. Note que sua razão é negativa, $r = -10$

Uma PA é constante quando todos os seus termos são iguais. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que sua razão seja igual a zero.

Exemplo:

$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right)$ é constante. Note que sua razão é igual a zero, $r = 0$.

Determine x para que a sequência $(3+x, 5x, 2x+11)$ seja PA.

$$5x - (3+x) = 2x+11 - 5x$$

$$5x - 3 - x = 2x+11 - 5x$$

$$5x - x - 2x + 5x = 11 + 3$$

$$7x = 14$$

$$x = 14/7 = 2$$

Fórmula do termo geral da PA

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Determinar o 61º termo da PA (9, 13, 17, 21,...)

$$r = 4 \quad a_1 = 9 \quad n = 61 \quad a_{61} = ?$$

$$a_{61} = 9 + (61-1).4$$

$$a_{61} = 9 + 60.4 = 9 + 240 = 249$$

Determinar a razão da PA (a_1, a_2, a_3, \dots) em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_8 = a_1 + (8-1).r$$

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$3 = 2 + 7r$$

$$7r = 3 - 2$$

$$7r = 1$$

$$r = 1/7$$

Determinar o número de termos da PA (4, 7, 10, ..., 136)

$$a_1 = 4 \quad a_n = 136 \quad r = 7 - 4 = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$136 = 4 + (n-1).3$$

$$136 = 4 + 3n - 3$$

$$3n = 136 - 4 + 3$$

$$3n = 135$$

$$n = 135/3 = 45 \text{ termos}$$

Determinar a razão da PA tal que:

$$a_1 + a_4 = 12 \text{ e } a_3 + a_5 = 18$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot r \quad a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot r \quad a_5 = a_1 + 4r$$

$$a_4 = a_1 + 3r \quad a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_1 + a_1 + 3r = 12$$

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 18$$

$$2a_1 + 3r = 12$$

$$2a_1 + 6r = 18$$

$$3r = 6$$

$$r = 6/3 = 2$$

Interpoliar (inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem.

Interpoliar (ou inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem, significa determinar a PA de primeiro termo igual a 1 e último termo igual a 25.

$$(1, _, _, _, _, 25)$$

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$25 = 1 + 6r$$

$$6r = 24$$

$$r = 24/6$$

$$r = 4$$

$$(1, 5, 9, 13, 17, 21, 25)$$

Representação genérica de uma PA

PA de três termos:

$$(x, x + r, x + 2r)$$

ou

$$(x - r, x, x + r), \text{ em que a razão é } r$$

PA de quatro termos:

$$(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$$

ou

$$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r), \text{ em que a razão é } 2r$$

Cálculo Da Soma Dos N Primeiros Termos De Uma PA

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Buttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um gurizote de oito anos de idade aproximou-se da mesa do senhor Buttner e, mostrando-lhe sua

prancheta, proclamou: “ taí “. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto. Aquele gurizote viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2, com o penúltimo, 99, é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3, com o antepenúltimo, 98, é igual a 101; e assim por diante, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

1 2 3 4.....97 98 99 100

$$4 + 97 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$1 + 100 = 101$$

Como são possíveis cinquenta somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + + 97 + 98 + 99 + 100 = 50.101 = 5050$$

Esse raciocínio pode ser estendido para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Calcular a soma dos trinta primeiros termos da PA (4, 9, 14, 19,...).

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1).r$$

$$a_{30} = a_1 + 29r$$

$$a_{30} = 4 + 29.5 = 149$$

$$S_{30} = \frac{(4 + 149).30}{2}$$

$$S_{30} = \frac{153.30}{2} = 2295$$

Calcular a soma dos n primeiros termos da PA (2, 10, 18, 26,...).

$$a_n = 2 + (n - 1).8$$

$$a_n = 2 + 8n - 8$$

$$a_n = 8n - 6$$

$$S_n = \frac{(2 + 8n - 6).n}{2}$$

$$S_n = \frac{2n + 8n^2 - 6n}{2}$$

$$S_n = \frac{-4n + 8n^2}{2}$$

$$S_n = -2n + 4n^2$$

Determine a soma dos termos da PA (6, 10, 14,..., 134).

$$s_n = \frac{(6 + 134) \cdot n}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$134 = 6 + (n - 1) \cdot 4$$

$$134 = 6 + 4n - 4$$

$$4n = 134 - 6 + 4$$

$$4n = 132$$

$$n = \frac{132}{4} = 33$$

$$s_n = \frac{(6 + 134) \cdot 33}{2}$$

$$s_n = \frac{140 \cdot 33}{2} = 2310$$

Calcule a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 100 e 300.

Múltiplos de 7 (0, 7, 14, 21, 28,...).

O primeiro múltiplo de 7 compreendido entre 100 e 300 é o 105.

O último múltiplo de 7 compreendido entre 100 e 300 é o 294.

$$294 = 105 + (n - 1) \cdot 7$$

$$294 = 105 + 7n - 7$$

$$7n = 294 - 105 + 7$$

$$7n = 196$$

$$n = 196/7 = 28$$

$$s_n = \frac{(105 + 294) \cdot 28}{2}$$

$$s_n = \frac{399 \cdot 28}{2} = 5586$$

Progressão Geométrica

Denominamos de progressão geométrica, ou simplesmente PG, a toda sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, resulta no próximo número da sequência. Esse número fixo é chamado de razão da progressão e os números da sequência recebem o nome de termos da progressão.

Observe estes exemplos:

8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 é uma PG de 8 termos, com razão 2.

5, 15, 45, 135 é uma PG de 4 termos, com razão 3.

3000, 300, 30, 3 é uma PG de 4 termos, com razão 1/10

Numa PG de 5 termos o 1º termo é 2 e o 2º termo é 12. Escreva os termos dessa PG.

2, 12, 72, 432, 2592

Numa PG de 4 termos, o último termo é 500 e o penúltimo é 100. Escreva os termos dessa PG.

4,20,100,500

Numa PG de 6 termos, o 1º termo é 3 e a razão é 10. Qual o 6º termo dessa PG.

3,30,300,3000,30000,300000

$a_6 = 300000$

Numa PG de 5 termos, o 3º termo é -810 e a razão é -3. Escreva os termos dessa PG.

-90,270,-810,2430,-7290

Numa PG, o 9º termo é 180 e o 10º termo é 30. Qual a razão dessa PG.

$q = 30/180 = 3/18 = 1/6$

A razão é 1/6

Determinar $x, x \in \mathbb{R}$, de modo que a sequência :

$(4, 4x, 10x + 6)$ seja PG.

$$\frac{4x}{4} = \frac{10x + 6}{4x}$$

$$(4x)^2 = 4(10x + 6)$$

$$16x^2 = 40x + 24$$

$$16x^2 - 40x - 24 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Determinar o 15º termo da progressão geométrica (256, 128, 64,...).

$$q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 256$$

$$n = 15$$

$$a_{15} = 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15-1}$$

$$a_{15} = 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

$$a_{15} = 256 \cdot \frac{1}{2^{14}} \Rightarrow a_{15} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^{14}} \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Determinar a razão da PG tal que:

$$a_1 = \frac{1}{3^{28}} \quad \text{e} \quad a_{10} = \frac{1}{3^{10}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

$$\frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^{28}} q^9$$

$$q^9 = \frac{3^{28}}{3^{10}}$$

$$q^9 = 3^{18}$$

$$q = \sqrt[9]{3^{18}}$$

$$q = 3^{18/9} = 3^2 = 9$$

Determinar o número de termos da PG (128, 64, 32,....., 1/256).

$$q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{256}$$

$$a_1 = 128$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{1}{256} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256 \cdot 128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^7 \cdot 2^8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{15}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$$

$$n - 1 = 15$$

$$n = 15 + 1 = 16$$

Determinar a razão da PG tal que:

$$a_1 + a_4 = 252 \quad e \quad a_2 + a_5 = 84$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$a_1 + a_1 \cdot q^3 = 252$$

$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 84$$

$$a_1 (1 + q^3) = 252$$

$$a_1 \cdot q(1 + q^3) = 84$$

$$\frac{a_1 (1 + q^3)}{a_1 \cdot q(1 + q^3)} = \frac{252}{84}$$

$$\frac{1}{q} = 3 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

Representação genérica de uma PG:

a) PG de três termos, (x, xq, xq^2) em que a razão é q ;

$(x/q, x, xq)$, com razão q , se $q \neq 0$.

b) PG de quatro termos, (x, xq, xq^2, xq^3) , com razão q ;

$(x/q^3, x/q, xq, xq^3)$, com razão q^2 , se $q \neq 0$.

Determinar a PG de três termos, sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 10.

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq \right)$$

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x + xq = 10$$

$$2 + 2q = 10$$

$$2q = 10 - 2$$

$$2q = 8 \Rightarrow q = \frac{8}{2} = 4$$

$$\left(\frac{2}{4}, 2, 2 \cdot 4 \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2, 8 \right)$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG:

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q , temos:

Se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1$

$$\text{Se } q \neq 1, \text{ então } S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

Calcular a soma dos dez primeiros termos da PG (3, 6, 12,...).

$$a_1 = 3$$

$$q = 2$$

$$n = 10$$

$$S_{10} = \frac{3(1 - 2^{10})}{1 - 2}$$

$$S_{10} = \frac{3(1 - 1024)}{-1}$$

$$S_{10} = \frac{3(-1023)}{-1} = \frac{-3069}{-1} = 3069$$

Exercícios resolvidos de PA e PG

Dada a PA (a + b, 5a - b, ...) determine seu 4º termo.

$$r = 5a - b - (a + b) = 5a - b - a - b = 4a - 2b$$

$$a_4 = a_1 + 3r = a + b + 3(4a - 2b) = a + b + 12a - 6b = 13a - 5b$$

Numa PA crescente de cinco termos, a_5 e a_1 são, respectivamente, as raízes da equação $x^2 - 12x - 64 = 0$. Calcule a razão dessa PA

Solução:

$$x^2 - 12x - 64 \rightarrow x = -4 \text{ ou } x = 16$$

$$\text{Então: } a_1 = -4 \text{ e } a_5 = 16$$

Logo:

$$a_5 = a_1 + 4r \rightarrow 16 = -4 + 4r \rightarrow r = 5$$

A cada balanço uma firma tem apresentado um aumento de 10% em seu capital. A razão de progressão formada pelos capitais nos balanços é:

Solução:

Sendo C o capital inicial, temos:

$$C, 1,1C, (1,1)^2C, \dots$$

Logo a razão q é dada por:

$$q = 1,1C/C = 1,1 = 11/10$$
