Teoria Dos Conjuntos

A **teoria dos conjuntos** é a teoria matemática capaz de **agrupar elementos**.

Dessa forma, os **elementos** (que podem ser qualquer coisa: números, pessoas, frutas) são indicados por letra minúscula e definidos como um dos componentes do conjunto.

Exemplo: o elemento “a” ou a pessoa “x”

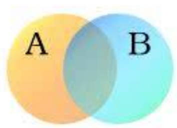
Assim, enquanto os elementos do conjunto são indicados pela letra minúscula, os **conjuntos**, são representados por letras maiúsculas e, normalmente, dentro de chaves ({ }).

Além disso, os elementos são separados por vírgula ou ponto e vírgula, por exemplo:

A = {a,e,i,o,u}

Diagrama De Euler-Vem

No modelo de Diagrama de Euler-Vem (Diagrama de Venn), os conjuntos são representados graficamente:



Relação De Pertinência

A relação de pertinência é um conceito muito importante na "Teoria dos Conjuntos".

Ela indica se o elemento **pertence** (**e**) ou **não pertence** (**∉**) ao determinado conjunto, por exemplo:

D = {w,x,y,z}

Logo,

w e D (w pertence ao conjunto D)
j ∉ D (j não pertence ao conjunto D)

Relação De Inclusão

A relação de inclusão aponta se tal conjunto está **contido** (**C**), **não está contido** (**Ȼ**) ou se um conjunto **contém** o outro (**Ɔ**), por exemplo:

A = {a,e,i,o,u}
B = {a,e,i,o,u,m,n,o}
C = {p,q,r,s,t}

Logo,

A C B (A está contido em B, ou seja, todos os elementos de A estão em B)
C Ȼ B (C não está contido em B, na medida em que os elementos do conjuntos são diferentes)
B Ɔ A (B contém A, donde os elementos de A estão em B)

Conjunto Vazio

O conjunto vazio é o conjunto em que **não há elementos**; é representado por duas chaves **{ }** ou pelo símbolo **Ø**. Note que o conjunto vazio está contido (C) em todos os conjuntos.

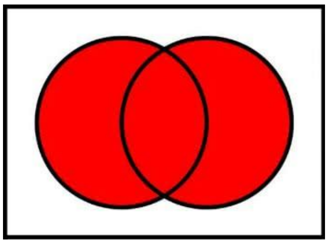
União, Intersecção E Diferença Entre Conjuntos

A **união dos conjuntos**, representada pela letra (**U**), corresponde a união dos elementos de dois conjuntos, por exemplo:

A = {a,e,i,o,u}
B = {1,2,3,4}

Logo,

AB = {a,e,i,o,u,1,2,3,4}

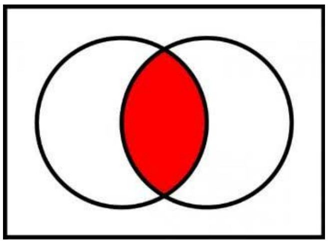


A **intersecção dos conjuntos**, representada pelo símbolo (∩), corresponde aos elementos em comum de dois conjuntos, por exemplo:

C = {a, b, c, d, e} ∩ **D** = {b, c, d}

Logo,

CD = {b, c, d}

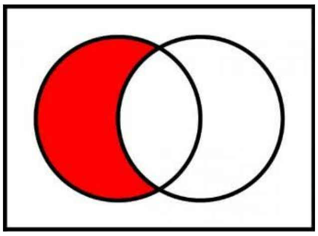


A **diferença entre conjuntos** corresponde ao conjunto de elementos que estão no primeiro conjunto, e não aparecem no segundo, por exemplo:

A = {a, b, c, d, e} **- B**={b, c, d}

Logo,

A-B = {a,e}



Igualdade Dos Conjuntos

Na igualdade dos conjuntos, os **elementos** de dois conjuntos são **idênticos**, por exemplo nos conjuntos A e B:

A = {1,2,3,4,5}
B = {3,5,4,1,2}

Logo,

A = B (A igual a B).

Entendemos por conjunto o agrupamento de elementos que possuem características semelhantes, coleção de objetos. O conjunto pode ser considerado especial no caso de termos um conjunto vazio (não possui elementos) ou conjunto universo (possui todos os elementos do estudo em questão).

A Teoria dos Conjuntos foi criada e desenvolvida pelo Matemático russo George Cantor (1845-1918), trata-se do estudo das propriedades dos conjuntos, relações entre conjuntos e relações entre os elementos e o próprio conjunto.

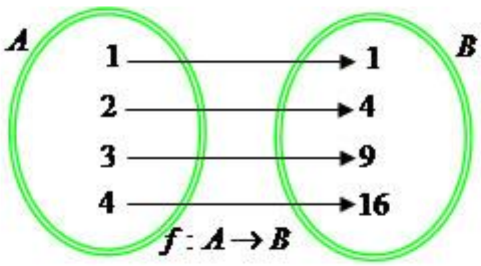
Ao trabalharmos com conjuntos usamos símbolos matemáticos capazes de demonstrar determinadas situações entre conjuntos e elementos. Se temos um elemento p pertencente ao conjunto P podemos dizer que p pertence a P, ou **p Є P**.
Caso o elemento não pertença ao conjunto, podemos utilizar a seguinte notação:

$p \notin P$

(p não pertence a P).

Um conjunto pode possuir subconjuntos, se todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B podemos dizer que A é subconjunto de B.
Qualquer conjunto possui como subconjunto um conjunto vazio representado por { } ou Ø.
A união de dois ou mais conjuntos constitui um novo conjunto com todos os elementos dos outros dois.
A intersecção entre dois ou mais conjuntos constitui um conjunto que contém simultaneamente os elementos de dois ou mais conjuntos.
A diferença entre dois conjuntos A e B tem como resultado um conjunto com os elementos de A que não pertencem a B.

Dados dois conjuntos A e B, a relação existente entre os elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B receberá o nome de função. Notação f: A→B. Observe:



Note que para cada elemento do conjunto A existe um elemento no conjunto B, essa relação pode ser definida pela seguinte lei de formação $f(x) = x^2$.

A	B
X	$F(X) = X^2$
1	$F(1) = 1^2 = 1$
2	$F(2) = 2^2 = 4$
3	$F(3) = 3^2 = 9$
4	$F(4) = 4^2 = 16$

A **Teoria dos conjuntos** é a teoria matemática dedicada ao estudo da associação entre objetos com uma mesma propriedade, elaborada por volta do ano de 1872. Sua origem pode ser encontrada nos trabalhos do matemático russo Georg Cantor (1845-1918), os quais buscavam a mais primitiva e sintética definição de conjunto. Tal teoria ficou conhecida também como "teoria ingênua" ou "teoria intuitiva" por causa da descoberta de várias antinomias (ou paradoxos) associados à ideia central da própria teoria. Tais antinomias levaram a uma axiomatização das teorias matemáticas futuras, influenciando de modo indelével as ciências da matemática e da lógica. Mais tarde, a teoria original receberia complementos e aperfeiçoamentos no início do século XX por outros matemáticos.

O conhecimento prévio de tal teoria serve como base para o desenvolvimento de outros temas na matemática, como relações, funções, análise combinatória, probabilidade, etc.

Como definição intuitiva de conjuntos, dadas por Cantor, surgiam em sua teoria exemplos como:

1. um conjunto unitário possui um único elemento

2. dois conjuntos são iguais se possuem exatamente os mesmos elementos

3. conjunto vazio é o conjunto que não possui nenhum elemento

4. Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos. Um conjunto finito pode ser definido reunindo todos os seus elementos separados por vírgulas. Já um conjunto infinito pode ser definido por uma propriedade que deve ser satisfeita por todos os seus membros.

A ideia de conjunto era um conceito primitivo e auto explicativo de acordo com a teoria; não necessitaria de definição.
Esta forma de representar um conjunto, pela enumeração de seus elementos é denominada "forma de listagem". Poderia-se representar o mesmo conjunto por uma determinada propriedade de seus elementos, sendo x, por exemplo, um número qualquer do conjunto Z representado abaixo:

Z = {1,3,5,7,9,11, ... }

teríamos, concluindo:

Z = { x | x é ímpar e positivo } = { 1,3,5, ... }.

Merece destaque outras relações básicas, que independem de um cálculo matemático mais complexo, utilizando-se lógica básica e pura. São exemplos desta afirmação as relações a seguir:

1 - Pertinência, que estabelece se um elemento pertence ou não pertence a um conjunto pré-estabelecido:

- dado um número x, caso ele pertença ao conjunto, escrevemos $x \in A$, ou "x" pertence ao conjunto A
- caso "x" não pertença ao conjunto, registra-se $x \notin A$
- um conjunto sem elementos é um conjunto vazio, representado pela letra grega φ (phi)

2 - Subconjunto:

Caso todo o elemento do conjunto A pertença também ao conjunto B, sem que todos os elementos deste segundo grupo pertençam todos a B, diremos que "A é subconjunto de B": $A \subset B$

3 - Conjuntos numéricos fundamentais:

Trata-se de qualquer conjunto cujos elementos são números, entre eles, o conjunto de números naturais N = {0,1,2,3,4,5,6...}; o conjunto de números inteiros Z = {..., -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,... } (sendo que $N \subset Z$); conjunto de números racionais Q = { 2/3, -3/7, 0,001, 0,75, 3, etc.) (sendo que $N \subset Z \subset Q$); conjunto de números irracionais, etc.

4 - União

Ocorre união quando o conjunto união contempla todos os elementos de dado conjunto A ou de dado conjunto B.

Exemplo: {0,1,3} ∪ { 3,4,5 } = { 0,1,3,4,5}

Assim, através de suas numerosas combinações, que fornecem poderosa ferramenta para a construção da matemática de base axiomática, apesar de seu conteúdo predominantemente dedutivo, logo surgiu o "Paradoxo de Russel", que é a contradição mais famosa da teoria dos conjuntos.

A teoria dos conjuntos é o ramo da matemática que estuda conjuntos, que são coleções de elementos. Vamos começar estudando os símbolos matemáticos usados neste ramo.

Símbolos

$\in$: pertence	$\exists$: existe
$\notin$: não pertence	$\nexists$: não existe
$\subset$: está contido	$\forall$: para todo (ou qualquer que seja)
$\not\subset$: não está contido	$\emptyset$: conjunto vazio
$\supset$: contém	**N**: conjunto dos números naturais
$\not\supset$: não contém	**Z** : conjunto dos números inteiros
/ : tal que	**Q**: conjunto dos números racionais
$\Rightarrow$: implica que	**Q'= I**: conjunto dos números irracionais
$\Leftrightarrow$: se, e somente se	**R**: conjunto dos números reais

A Teoria Dos Conjuntos De Cantor

Introdução

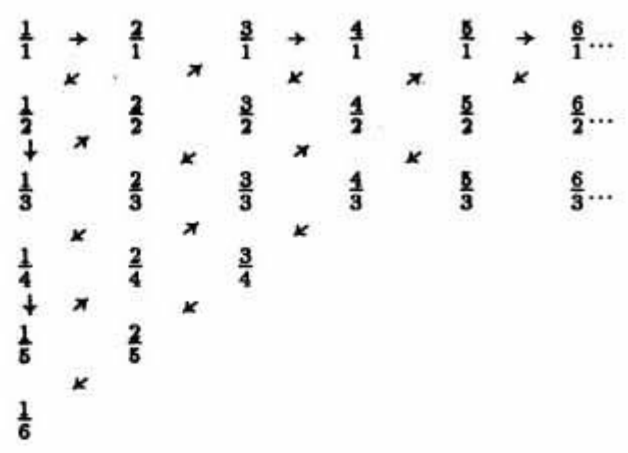
Em 1782 contribuições cruciais na direção da aritmetização da análise foram feitas por cinco grandes matemáticos Charles Meray (1835-1911) da Borgonha, Karl Weierstrass (1815-1897) de Berlin, H.Heine (1821-1881) de Halle, George Cantor (1845-1918) também de Halle e um seu amigo J.W.R.Dedekind (1831-1916) de Braunschweig. Esses homens num certo sentido representam o clima de meio século de investigação sobre a natureza da função e do número que começara em 1822 com a teoria do Calor de Fourier. Foi o estudo das séries de Fourier que levou Cantor a descrever a famosa e discutida Teoria dos Conjuntos.

George Cantor, nasceu em S.Petersburgo, de pais dinamarqueses, mas a maior parte de sua vida passou na Alemanha. Doutourou-se em Berlim em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas contribuições mais originais centram-se ao redor da provocativa palavra "infinito".

Diz-se que um conjunto S é infinito quando é semelhante a uma parte propria dele mesmo, caso contrario S se diz finito. Dois anos depois, Cantor casou-se, e na lua de mel foi a Interlaken, Suiça, onde o casal encontrou Dedekind. No mesmo ano, 1874, Cantor publicou no Journal de Crelle um de seus artigos mais revolucionários. Como Dedekind, tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas ao contrário dele, Cantor viu que os conjuntos infinitos não são todos iguais.

No caso finito, dizemos que conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se podem ser postos em correspondência biunivoca. De maneira semelhante, Cantor se propôs a construir conjuntos infinitos conforme a sua " potência".

O Conjunto dos quadrados perfeitos ou o conjunto dos números triangulares tem a mesma "potência" que o conjunto de todos inteiros positivos, pois eles podem ser postos em correspondência biunivoca. Esses conjuntos parecem menores que o conjunto de todas as frações racionais, no entanto, Cantor mostrou que também esse último conjunto é contável ou enumerável. Seguindo o caminho indicado podemos "contar" as frações:



As frações racionais são tão densas, que entre duas delas, ha sempre outra, no entanto Cantor mostrou que o conjunto das frações tem a mesma "potência" que a dos inteiros. Começa-se a pensar que os conjuntos infinitos tem a mesma "potência", porém Cantor provou categoricamente que isso não é verdade. O conjunto dos números reais, por exemplo, tem "potência" maior que o conjunto das frações racionais. Assim, se supusermos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais infinitos ($\frac{1}{3}$ seria expresso por 0,333..., $\frac{1}{2}$ por 0,4999..., e assim por diante) e que estejam dispostos em ordem:

$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...$

$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...$

$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...$

..............................., onde ab_{ij} é digito entre 0 e 9 inclusive.

Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as referidas anteriormente. Para isso, tomemos $b = 0,b_1b_2b_3...$, onde $b_k = 9$ se $a_{kk} = 1$ e $b_k = 1$ e $a_{KK} \neq 1$.

Esse número real estará entre 0 e 1 e no entanto será diferente de todos os do arranjo que se pressumia conter todos os números reais entre 0 e 1.

Mas isto é uma contradição de que todos os números do intervalo [0,1] tornassem um conjunto enumerável. Somos, pois, forçados a rejeitar essa hipótese e aceitar o fato que esse conjunto é não enumerável. Como o intervalo [0,1] é um subconjunto dos números reais, concluímos que também este conjunto é não enumerável.

Com esta descoberta, Cantor estabeleceu um fato surpreendente, qual seja, o de que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o dos conjuntos dos números inteiros e o conjunto dos números reais.

As descobertas de Cantor tiveram grande impacto no mundo matemático de fins do século passado e começo deste século. Neste momento, é bom lembrar que desde o início do século XIX era crescente a preocupação com o rigor na Análise Matemática. A partir de 1870, quando Cantor iniciava sua vida profissional, as atividades de pesquisa na área de axiomatização e fundamentos (estruturalismo) intensificavam-se rapidamente. E a sua Teoria dos Conjuntos, que então se desenvolvia, revelou-se muito adequada para ser o fundamento de toda a Matemática. Além disso, com o surgimento de novas disciplinas matemáticas, com a Topologia, a Álgebra Abstrata, a Teoria da Medida e Integração, a

Teoria da Probabilidade, a Análise Funcional, entrelaçadas e de fronteiras indistinguiveis, onde a linguagem, a notação e os resultados da Teoria dos Conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho, a ponto de ser impossível conceber o desenvolvimento de toda essa matemática sem a "Teoria dos Conjuntos de Cantor".

Queremos tentar deixar claro neste artigo que a Teoria dos Conjuntos é uma disciplina cuja importância é difícil exagerar, não só para a Matemática, mas para o conhecimento humano de um modo geral.

Contudo, ela não é tão importante para o ensino de 1º e 2º graus, onde foi introduzida de maneira forçada e artificial.

Entendemos que, a razão fundamental para a introdução da Matemática no ensino básico (1º e 2º graus), repousa no fato de que ela fornece instrumentos efetivos para compreender, atuar e criar no mundo que nos cerca.

A Teoria dos Conjuntos, herança brasileira solitária do "modelo estrutura-lista bourbakiano americano" (Matemática Moderna), sob o ponto de vista do ensino, apresenta a Matemática, na maior parte dos casos, com um exagerado formalismo, escondendo e dissimulando os mecanismo de criação.

Além disso, as distorções das próprias idéias modernistas em mãos inexperientes causaram danos ao ensino da Matemática Moderna no Brasil, onde se dá ênfase às trivialidades de manejar conjuntos, insiste-se em nuances lingüísticas irrelevantes e estimula-se a mediocridade através de exercícios rebuscados sobre o conjunto vazio, comprometendo a criatividade.

Finalmente, na secção abaixo, construímos um subconjunto infinito e não enumerável contido no intervalo [0,1].

Este é o Conjunto de Cantor, "mais infinito" que o conjunto dos números inteiros e "tão perfeito" quanto o conjunto dos números reais.

Conjunto De Cantor

"Definição 0.1: Um conjunto K é um conjunto de Cantor se ele é fechado, totalmente disconexo e um subconjunto perfeito de I = [0,1]. Um conjunto é totalmente disconexo se ele não contém nenhum intervalo; um conjunto éperfeito se for igual ao seu conjunto derivado". Vamos definir um conjunto de Cantor, que também chamaremos por conjunto K de Cantor, usando-se uma expansão ternária. Tal expansão ternária é formalmente escrita por:

$0,a_1a_2a_3....a_k......$, onde $a_k = 0, 1$ ou 2.

Esta expansão ternária representa o número para o qual a série

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} converge.$$

Exemplos 1/3 = 0,1000..., 1/3 = 0,0222...., 2/3 = 0,2000....

Lema 1.1

A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ converge para um número no intervalo [0,1]. Prova: De fato, temos:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \leq \sum_{k-1}^{\infty} 23^{-k} \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} = 1.$$

A reciproca deste resultado é dada pelo:

Lema 1.2

Todo número no intervalo [0,1] admite pelo menos uma expansão ternária. Prova: Suponhamos que, a ∈ [0, 1), a fim de evitarmos o caso em que a = 1 = 0,222...; vamos definir, por indução em k, uma seqüência a_k da seguinte forma:

$a_1 = [3a]$, é o maior inteiro menor ou igual a 3a; se $a_1,a_2,...,a_k$ estão definidos por hipóteses, seja $a^k = \sum_{n+1}^{k} a_n 3^{-n}$ tal que a_{k+1} é o maior inteiro menor ou igual a $3^{k+1}(a - a_k)$.

Desta forma é fácil ver que a_k poderá ser somente os inteiros 0,1 ou 2 e que a expansão ternária $0,a_1a_2a_3$representa o número a. Para tanto, mostraremos por indução em k que

$a_k < 3$, $3^k(a - a^k) < 1$

e que conseqüentemente a^k converge para a quando k tender para ∞.

Como $a_1 = [3a]$ com $a \in [0, 1)$ segue-se que $a_1 < 3$ e $(a - a^1) < \frac{1}{3}$ pois

$a - a^1 = a - \frac{a_1}{3} = \frac{3a - a_1}{3} < \frac{1}{3}$.

Temos que $a^k < 3$ e $3^k(a - a^k) < 1$ por hipótese de indução e então devemos mostrar que $a_{k+1} < 3$ e $3_{k+1}(a - a^{k+1}) < 1$.

Para tanto seja, $3^k(a - a^k) < 1$ tal que $33^k(a - a^k) < 3$. Como a_{k+1} é o maior inteiro menor ou igual à $3^{k+1}(a - a^k)$ segue-se que $a_{k+1} < 3$.

Por outro lado temos ainda que

$3_{k+1}(a - a^{k+1}) = 3_{k+1}(a - a^k) - 3_{k+1}(a^{k+1} - a^k) = 3_{k+1}(a - a^k) - a_{k+1} < 1$.

Conseqüentemente a seqüência a^k, com $k \to \infty$ tende para o número a; isto é

$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ o que demonstra o lema.

Definição 1.1: O conjunto K de Cantor é o conjunto de números reais no intervalo [0,1] que admite uma expansão ternária, $0,a_1a_2..a_k...$, onde a_k é ou 0 ou 2.

A definição 1.1 é equivalente a dizer que o conjunto K é o que resta do intervalo [0,1] depois da seguinte operação: retira-se o intervalo terço médio aberto (1/3,2/3).

Retira-se depois o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes [0,1/3] e [2/3,1]. Sobra então [0,1/9] U [2/9,1/3] U [2/3,7/9] U [8/9,1].

Em seguida retira-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é um conjunto de Cantor.

Lema 1.3

Todo número $a \in K$ admite uma única expansão ternária, $0,a_1a_2...a_3...$, onde a_k é ou 0 ou 2.

Observação: Todo número real $a \in K$ tem somente uma expansão ternária, isto é, se um número tiver duas expansões ternárias uma delas necessariamente conterá o 1.

Prova: Pelo Lema 1.2, cada $a \in K$ admite uma expansão ternária.

Suponhamos que $a = 0,a_1a_2...a_k... = 0,c_1c_2...c_k...$ e que exista um k tal que $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$,$a_{k-1} = c_{k-1}$,$a_k - c_k = 1$,$c_j = 2$,$a_j = 0$ para $j > k$.

Seja k o menor inteiro tal que $a_k \neq c_k$.

Suponhamos que $a_k > c_k$. Por construção temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$$

$$a_k 3^{-k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-(k+j)} = c_k 3^{-k} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-(k+j)}$$

$$a_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = c_k + \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$$

$$a_k - c_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}, \text{ onde}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$ pertencem ao intervalo [0,1].

Portanto o primeiro membro da igualdade acima é no mínimo 1 e o segundo membro é no máximo 1.

Conseqüentemente $a_k - c_k$ é um número inteiro no [0,1].

Se $a_k - c_k = 0$, $a_k = c_k$ é absurdo. Logo necessariamente temos que

$a_k - c_k = 1$ e portanto

$1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} 3^{-j}$, onde

$a_{k+j} = 0$ e $k + j = 2$ para $j = 1, 2, \ldots\infty$

Pelo Lema 1.2, temos

$a^k < 3$ e $c_k < 3$; e

como mostramos que $a_k - c_k = 1$ com $a_k > c_k$, segue-se que

i) $c_k = 0$ implica que $a_k = 1$

ii) $c_k = 1$ implica que $a_k = 2$

iii) $c_k = 2$ não pode ocorrer, e pela definição 1.1 segue-se a unicidade da representação.

Função Ternária De Cantor

Teorema 2.1

Seja F definida no conjunto K de Cantor com valores sobre o [0,1], por $F(0,a_1a_2\ldots a_k\ldots) = 0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$ onde o lado direito é uma expansão binaria com $b_k = 0$ se $a_k = 0$, $b_k = 1$ se $a_k = 2$. Então temos que:

a) F é contínua e monótona no intervalo [0,1].

b) F é constante em cada intervalo contido no conjunto complementar do conjunto de Cantor.

Prova: a) F é monótona por definição.

Mostraremos que F é contínua no intervalo [0,1]. Dado $\varepsilon > 0$, escolheremos k_0 tal que $2^{-k0} < \varepsilon$, e para tanto, basta tomarmos δ tal que $\delta = 3^{-k0}$.

Isto é, para x,y, com $x = 0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$ $y = 0,c_1c_2\ldots c_k\ldots$ $a_i = c_i$ com $i = 1,2,\ldots k_0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica que

$$|F(x)-F(y)| = |\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} - \frac{b'_n}{2^n}| = |\sum_{n=k_0+1}^{\infty} (\frac{a_n}{2} - \frac{c_n}{2}) 2^{-n}| \leq \sum_{n=k_0+1}^{\infty} 2^{-n} =$$

$$\frac{2^{-(k_0+1)}}{1-\frac{1}{2}} \leq 2^{-k_0} < \varepsilon.$$

o que demonstra a continuidade da F no intervalo [0,1].

b) Seja (a,b) o intervalo aberto pertencente ao complementar de K no [0,1]; e mostraremos que F(a) = F(b).

Na k-ésima retirada de intervalos abertos do [0,1], seja (a,b) um intervalo tal que

$$b - a = \frac{1}{3^k} = 0,00...01.$$

Segue-se que necessariamente a e b são respectivamente da forma

$a = 0,a_1a_2...a_{k-1}1$ e $b = 0,a_1a_2...a_{k-1}2$.

Como a,b pertencem ao conjunto K de Cantor segue-se que

$F(a) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}1) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}0222...) = 0,c_1c_2...c_{k-1}01111...;$

$F(b) = F(0,a_1a_2...a_{k-1}2) = 0,c_1c_2...c_{k-1}1$, onde $c_i = 0$ se $a_i = 0$ e

$c_i = 1$ se $a_i = 2$ e portanto F(a) = F(b).

"Exemplo: Para (a, b) = $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ temos:

$$F(\tfrac{1}{3}) = F(0,1) = F(0,0222...) = 0,0111... = \tfrac{1}{2} \text{ e } F(\tfrac{2}{3}) =$$

$$= F(0,2) = 0,1 = \tfrac{1}{2}."$$

Como F é monotônica segue-se que F é constante nos intervalos (a,b) pertencentes ao complementar do conjunto K de Cantor no intervalo [0,1].

Nestas condições, F é chamada de função ternária de Cantor.

Nestas condições é fácil ver que o conjunto K de Cantor é não contável e tem medida nula.

Teoria Dos Conjuntos

Na matemática consideramos o conjunto como um ente primitivo, ou seja, aceitamos o mesmo sem definição.

Podemos, no entando intuitivamente, dar exemples de conjuntos como: conjuntos de objetos, de letras, de números, de pessoas, e assim sucessivamente.

Por estes motivos damos o nome de conjunto a qualquer agrupamento, associação, junção de objetos. Esses agrupamentos terão algum caráter comum. Os objetos serão chamados de elementos do conjunto.

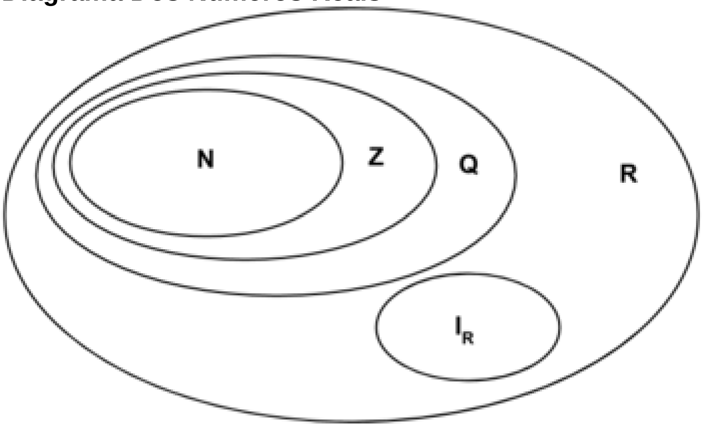
Representação De Conjuntos

Um conjunto pode ser representado por uma letra maiúscula, em geral do alfabeto latino, e os elementos são colocados entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplos

O conjunto das vogais: **V = {a, e, i, o, u}**.
Podemos também dar uma característica dos elementos do conjunto: **V = {x | x é uma vogal}**.
E ainda podemos representar o conjunto por uma figura plana fechada que chamamos de de diagrama de EULER-VENN.

Diagrama Dos Números Reais



Neste caso não há necessidade de separar os elementos com vírgula.

Para trabalharmos com conjuntos necessitamos de uma simbologia adequada que em grande parte foi elaborada pelo italiano Giuseppe Peano (1858-1932), um dos grandes estudiosos da teoria dos conjuntos, deixando uma valiosa colaboração a respeito da mesma.

Símbolos

- $\in$: pertence
- $\notin$: não pertence
- $\subset$: está contido
- $\not\subset$: não está contido
- $\supset$: contém
- $\not\supset$: não contem
- $\exists$: existe
- $\nexists$: não existe
- $\emptyset$: conjunto vazio
- $\forall$: para todo ou qualquer que seja
- $|$: tal que
- $\Rightarrow$: implica que
- $\Leftrightarrow$: se, e somente se

Símbolos Das Operações

- $A \cap B$: A intersecção B

- $A \cup B$: A união B
- $a . b$: diferença de A com B
- $a<b$: a menor que b
- $a \leq b$: a menor ou igual a b
- $a>b$: a maior que b
- $a \geq b$: a maior ou igual a b
- $a \wedge b$: a e b
- $a \vee b$: a ou b

Relação De Pertinência

Para indicar que um elemento "x" **pertence** ao conjunto "A", escreve-se: $x \in A$

Para exprimir que esse mesmo elemento **não pertence** ao conjunto "A", escreve-se: $x \notin A$

Exemplo

A = {1, 3, 9, 15}

- 3 pertence a A: $3 \in A$
- 5 não pertence a A: $5 \notin A$

Relação de Inclusão

- Para indicar que um conjunto "B" está **contido** num conjunto "A", escreve-se: $B \subset A$.
- Para exprimir que um conjunto "B" está **não contido** num conjunto "A", escreve-se: $B \not\subset A$.

Entretanto, podemos representar a ideia anterior de outra forma:

- Para indicar que um conjunto "A" está **contém** um conjunto "B", escreve-se: $B \supset A$.
- Para indicar que um conjunto "A" está **não contém** um conjunto "B", escreve-se: $B \not\supset A$.

Conjunto Unitário

É um conjunto que possui um só elemento.

Exemplos

- P = {x | x simboliza o Papa atual}
- S = {7}

Conjunto Vazio

É um conjunto que não possui elementos. Símbolo: $\emptyset$ ou { }.

Conjunto Infinito

É um conjunto que possui infinitos elementos.

Exemplos

- A = {x | x > 1}
- B = {-2, -1, 0, 1, 2, ...}

Conjunto Finito

É um conjunto que possui um número determinado de elementos.

Exemplos

- C = {-4, 0, 3, 5}
- D = {x | x é consoante}

União de Conjuntos

Dados dois conjuntos "A" e "B", chama-se união desses conjuntos, e escreve-se $A \cup B$, ao conjunto constituído pelos elementos de "A" ou de "B".

$$A \cup B = \{x | x \in A \; ou \; x \in B\}$$

Exemplos

- A = {1, 2, 3, 4} e B = {4, 5, 6}. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- A = {3, 4, 5} e B = {7, 8}. $A \cup B = \{3,4,5,7,8\}$

Intersecção De Conjuntos

Dados dois conjuntos "A" e "B", chama-se intersecção desses conjuntos, e escreve-se $A \cap B$, ao conjunto constituído pelos elementos comuns de "A" e de "B".

Exemplos

- A = {1, 4, 6, 8, 10} e B = {2, 3, 5, 8, 10}. $A \cap B = \{8,10\}$
- A = {2, 4, 6, 8, 9} e B = {4, 6}. $A \cap B = \{4,6\}$

Subconjuntos

Para calcular o número de subconjuntos de um conjunto dado podemos utilizar a relação 2^n, onde **n** representa o número de elementos do conjunto dado.

Exemplo

O conjunto A = {a, b, c} possui 8 subconjuntos: {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, $\emptyset$.

Ao conjunto formado pelos subconjuntos {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, $\emptyset$}, damos o nome de conjunto das partes de A.

Complementar

O complemento (ou coplementar) de um conjunto "A", em relação a um conjunto "B", assim se define: $C_A^B = B - A$

Exemplo

• A = {2, 4, 5} e B = {1, 2, 3, 4, 5}. $C_A^B = B - A = \{1,3\}$

Observação

O complementar de um conjunto A, por exemplo, pode ser representado por $\overline{A}$.