

Vetores, Matrizes E Determinantes

Em geometria analítica, um **vetor** ou **vector** é uma classe de equipolência de segmentos de retaorientados, que possuem todos a mesma intensidade (denominada norma ou módulo), mesma direção e mesmo sentido. Em alguns casos, a expressão **vetor espacial** também é utilizada.

Neste contexto, um vetor a pode ser representado por qualquer segmento de reta orientado que seja membro da classe deste vetor (ou seja: pode ser representado por qualquer segmento de reta orientado que possua os mesmos módulos, direção e sentido de qualquer outro segmento da referida classe). E se o segmento AB (segmento de reta orientado do ponto A para o ponto B) for um representante do vetor a então podemos dizer que o vetor a é igual ao vetor AB Temos ainda a representação do vetor como um número complexo na forma z=a+bi onde a representa a abcissa e b representa a ordenada desse vetor.

Em termos das ciências exatas, vetores são segmentos de reta orientados, responsáveis pela caraterização das grandezas definidas como vetoriais. É importante salientar que a palavra **vetor** assume significados diferentes dependendo do contexto em que é aplicada. Os agentes que disseminam doenças infectocontagiosas, por exemplo, também são chamados de vetores.

Tipos De Grandezas

Tudo aquilo que pode ser medido é considerado como sendo uma grandeza. Massa, velocidade, aceleração, forçae energia são algumas das inúmeras grandezas físicas. As grandezas são classificadas em dois grupos: escalares e vetoriais.

- Escalares: Tipo de grandeza que é definida apenas a partir da informação do seu valor numérico (módulo), seguido de uma unidade de medida. Massa, temperatura e energia são exemplos de grandezas escalares;
- **Vetoriais:** Tipo de grandeza que possui, além do valor numérico (módulo), direção e sentido. Força, velocidade e aceleração são exemplos de grandezas vetoriais.

Repare que, ao dizer que a temperatura ambiente é de 25 °C, a informação é totalmente transmitida, não há necessidade de nenhum complemento. Contudo, se dissermos que uma força de 150 N foi aplicada sobre um corpo qualquer, precisamos informar a direção de aplicação da força (horizontal, vertical ou diagonal) e seu sentido (direita, esquerda, para cima, etc.).

Vetores

Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.



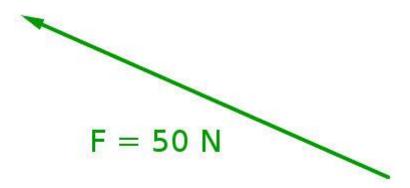
O **módulo** é o valor numérico do vetor seguido da unidade de medida que define a grandeza vetorial. A **direção** é a reta onde o vetor está localizado, e as direções possíveis são: diagonal, horizontal e vertical. O **sentido** trata-se de para onde o vetor atua de acordo com sua direção, assim, os sentidos podem ser para a direita, para a esquerda, para cima, para baixo, para o leste, para o norte, etc.

O vetor a seguir representa uma força que atua na horizontal, para a direita e que possui módulo igual a 50 N.



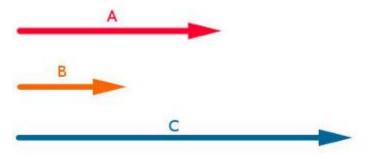
Já o vetor abaixo possui o mesmo módulo do vetor anterior (valor numérico), porém sua direção é diagonal, com sentido para cima e para esquerda.





Operações vetoriais

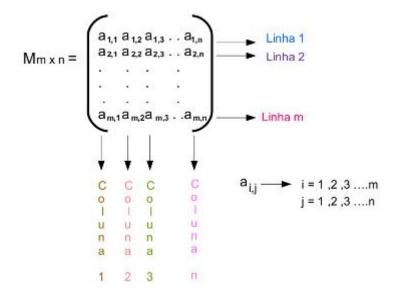
As operações vetoriais não são realizadas da mesma forma que as operações algébricas. Os módulos de dois vetores serão, literalmente, somados ou subtraídos somente se suas direções forem iguais.



Na imagem acima, o módulo do vetor C será a soma dos módulos dos vetores A e B, pois eles possuem a mesma direção e o mesmo sentido. Caso os sentidos fossem opostos, os módulos dos vetores deveriam ser subtraídos, e o vetor resultante teria o mesmo sentido do maior vetor da operação, que nesse caso é o vetor A.

Se as direções forem diferentes, deve-se aplicar as regras do polígono e paralelogramo, que determinarão as características do vetor resultante. A decomposição vetorial é uma operação realizada com vetores para definir suas componentes horizontal e vertical.

Para representar matrizes, utilizamos a disposição de uma tabela. Chamamos de matriz toda a tabela m x n (lê-se "m por n") em que números estão dispostos em linhas (m) e colunas (n). Cada elemento da matriz é indicado por a_{ii} (i indica a posição do elemento referente à linha, e **j**, a posição em relação à coluna). Acompanhe a seguir a representação de uma matriz m x n.





Nessa matriz, temos que:

 $a_{ij} \rightarrow linha (i) e coluna (j)$

 $a_{1,1} \rightarrow linha 1 e coluna 1$

 $a_{1,2} \rightarrow linha 1 e coluna 2$

 $a_{1,3} \rightarrow linha 1 e coluna 3$ $a_{1,n} \rightarrow linha 1 e coluna n$

 $a_{2,1} \rightarrow linha 2 e coluna 1$

 $a_{2,2} \rightarrow linha 2 e coluna 2$

 $a_{2,3} \,{\to}\, linha\; 2\; e\; coluna\; 3$

 $a_{2,n} \rightarrow linha 2 e coluna n$

 $a_{m,1} \rightarrow linha m e coluna 1$

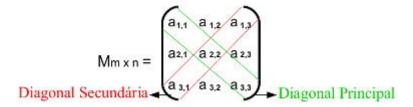
a_{m,2} → linha m e coluna 2

 $a_{m,3} \rightarrow linha m e coluna 3$

a_{m,n} → linha m e coluna n

Diagonais Da Matriz

Toda matriz possui diagonal principal e diagonal secundária. A diagonal principal é formada pelos elementos em que i = j. A diagonal secundária é composta por elementos em que a soma de i com j sempre resulta em uma mesma solução. Veja como identificamos as diagonais de uma matriz:



Diagonal Principal

 $a_{1,1} \rightarrow linha 1 e coluna 1$

 $a_{2,2} \rightarrow linha 2 e coluna 2$

a_{3,3} → linha 3 e coluna 3

Diagonal Secundária

 $a_{1,3} \rightarrow linha 1 + coluna 3 = 4$

 $a_{2,2} \rightarrow linha 2 + coluna 2 = 4$

 $a_{3,1} \rightarrow linha 3 + coluna 1 = 4$

Matrizes Especiais

Existem algumas matrizes que são consideradas especiais pela forma como são organizadas. Entre essas matrizes, podemos destacar:

• Matriz quadrada: é toda a matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.								
	_							
	_							



Exemplos:

$$M_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad M_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz acima apresenta três linhas e três colunas. Como o número de linhas é igual ao de colunas, a matriz é quadrada.

• Matriz identidade: todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, e os demais números são iguais a zero.

$$M3 \times 3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Diagonal Principal

• Matriz nula: é toda matriz em que seus elementos são iguais a zero.

$$M_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Matriz linha: é formada por uma única linha.

$$M_{1 \times 3} = \left(a_{1,1} \ a_{1,2} \ a_{1,3} \right)$$



• Matriz coluna: é formada por uma única coluna.

M3 x 1 =
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}$$

Operações Com Matrizes

As operações com matrizes são: adição, subtração e multiplicação.

• Adição: Sejam A e B duas matrizes em que a sua soma resulta em uma matriz C.

$$A + B = C$$

Cada um dos elementos da matriz C é o resultado da soma de um elemento de A com um elemento de B. Para efetuarmos a adição entre duas matrizes, elas devem possuir o mesmo número de linhas e colunas. Acompanhe o exemplo abaixo:

$$A + B = C$$

 $A_{2 \times 3} + B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3}$

Observe que as matrizes A e B possuem a mesma quantidade de linhas (m = 2) e a mesma quantidade de colunas (n = 3). A matriz C é resultante da soma de A + B e também deve possuir duas linhas e três colunas.

$$A2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} B2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} C2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} A + B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{1,1} & a_{1,2} + a_{1,2} & a_{1,3} + a_{1,3} \\ a_{2,1} + a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

• Subtração: A partir de duas matrizes A e B, definimos a sua diferença como C:

$$A - B = C$$
$$A + (-B) = C$$

A matriz diferença pode ser definida como sendo a soma de A com o oposto de B, ou seja, - B. Para realizarmos a subtração entre duas matrizes, elas devem possuir o mesmo número de linhas e colunas. Acompanhe o exemplo abaixo e verifique como é feita a subtração entre duas matrizes:



$$A2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} B2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} C2 \times 3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$A - B = C \rightarrow A + (-B) = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} - a_{1,1} & a_{1,2} - a_{1,2} & a_{1,2} - a_{2,2} \\ a_{1,1} - a_{1,1} & a_{2,2} - a_{2,2} & a_{2,3} - a_{2,3} \end{pmatrix}$$

• **Multiplicação:** Dadas as matrizes A_{m x n} e B_{n x p}, para que seja possível realizar o seu produto, o número de colunas da matriz A deve ser igual ao número de linhas da matriz B. Esse processo resulta em uma matriz C_{m x p}. Observe o exemplo abaixo e veja como isso é feito:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} B_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} \end{pmatrix} C_{2\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$a_{1,1} = a_{1,1}, a_{1,1} + a_{1,2}, a_{2,1} + a_{1,3}, a_{3,3}$$

$$a_{1,2} = a_{1,1}, a_{1,3} + a_{1,2}, a_{2,3} + a_{1,3}, a_{3,3}$$

$$a_{2,1} = a_{2,1}, a_{1,3} + a_{2,2}, a_{2,1} + a_{2,3}, a_{3,3}$$

$$a_{2,2} = a_{2,1}, a_{1,3} + a_{2,2}, a_{2,1} + a_{2,3}, a_{3,3}$$

$$a_{2,2} = a_{2,1}, a_{1,3} + a_{2,2}, a_{2,1} + a_{2,3}, a_{3,3}$$

$$a_{2,2} = a_{2,1}, a_{1,3} + a_{2,2}, a_{2,3} + a_{2,3}, a_{3,3}$$

Descrição Dos Elementos Da Matriz:

$a_{1,1} \rightarrow \text{Produto dos elementos da linha 1 da matriz A com os elementos da coluna 1 da matriz B.}$
$a_{1,2} \rightarrow$ Produto dos elementos da linha 1 da matriz A com os elementos da coluna 2 da matriz B.
$a_{1,3} \rightarrow$ Produto dos elementos da linha 1 da matriz A com os elementos da coluna 3 da matriz B.
a₂,1 → Produto dos elementos da linha 2 da matriz A com os elementos da coluna 1 da matriz B.
$\mathbf{a}_{2,2} o Produto$ dos elementos da linha 2 da matriz A com os elementos da coluna 2 da matriz B.
$\mathbf{a}_{2,3} o Produto$ dos elementos da linha 2 da matriz A com os elementos da coluna 3 da matriz B.



Determinante

Calculamos o determinante de matrizes quadradas, isto é, aquelas em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Observe:

$$M_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad M_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

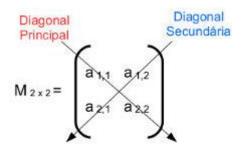
Definimos como determinante da matriz A (det A) o número que é obtido pela operação dos elementos que compõem A.

• Caso A possua uma linha e uma coluna (A_{1 x 1}), então o determinante será representado pelo único elemento que compõe A. Exemplo:

$$A = (10)$$

det $A = 10$

• Se A possuir duas linhas e colunas (A_{2 x 2}), então o determinante (det A_{2 x 2}) será dado pela diferença entre os produtos da diagonal principal da matriz A pelo produto dos elementos que compõem a sua diagonal secundária. Veja abaixo como é feito o cálculo do determinante de uma matriz 2 por 2 (A_{2 x 2}).

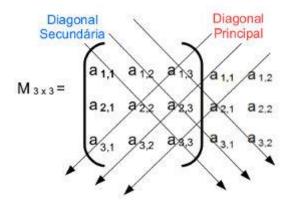


$$D = a_{1,1}. a_{2,2} - (a_{1,2}. a_{2,2})$$

Para toda matriz quadrada 2 por 2, o cálculo do determinante é realizado da forma como está demonstrado acima. Caso a matriz quadrada seja do tipo M $_{3\times3}$, M $_{4\times4}$, M $_{5\times5}$ e assim por diante, calculamos o seu determinante executando os passos descritos abaixo:

- 1. Faça o espelhamento da primeira e da segunda coluna da matriz, ou seja, repita a primeira e a segunda coluna;
- 2. Realize os produtos de cada diagonal principal e secundária separadamente;
- 3. Efetue a soma entre os termos obtidos dos produtos de cada diagonal;
- 4. Realize a diferença entre os resultados obtidos referente à soma dos termos das diagonais principais e das secundárias. No fim desses cálculos, teremos o determinante da matriz.





O determinante de uma Matriz é dado pelo valor numérico resultante da subtração entre o somatório do produto dos termos da diagonal principal e do somatório do produto dos termos da diagonal secundária. Nas matrizes quadradas de ordem 3x3 esses cálculos podem ser efetuados repetindo-se a 1ª e a 2ª coluna, aplicando em seguida a regra de Sarrus. Lembrando que uma matriz é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas.

Observe o cálculo de determinantes nas seguintes matizes quadradas de ordem 2x2 e 3x3:

Determinante De Uma Matriz A De Ordem 2 X 2.

$$Det_{A} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Diagonal principal: 2 * 6 = 12Diagonal secundária: 9 * (-1) = -9

 $Det_A = 12 - (-9)$ $Det_A = 12 + 9$

Det_A = 21

Determinante De Uma Matriz B De Ordem 3 X 3.

Regra de Sarrus

$$Det_B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Diagonal principal

2 * 6 * 3 = 36 5 * 7 * (-1) = -35

6 * 1 * 2 = 12

Soma

36 + (-35) + 12

36 - 35 + 12



Diagonal secundária

Soma

$$-36 + 28 + 15$$

$$-36 + 43$$

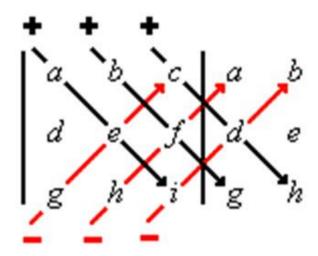
7

$$Det_B = 13 - 7$$

 $Det_B = 6$

Portanto, nas matrizes de ordem 2 x 2, calculamos o determinante de forma prática, multiplicando os elementos de cada diagonal e realizando a subtração do produto da diagonal principal do produto da diagonal secundária. Nas matrizes de ordem 3 x 3 utilizamos a regra de Sarrus descrita anteriormente.

Demonstração Geral Da Regra De Sarrus



Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo n x n). A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de determinante.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante De 1ª Ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem M=[a₁₁], o seu determinante é o número real a₁₁:

$$det M = Ia_{11}I = a_{11}$$

Observação: representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo. Por exemplo:

$$M = [5] \implies det M = 5 ou |5| = 5$$

$$M = [-3] \implies det M = -3 ou |-3| = 3$$



Determinante De 2ª Ordem

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ de ordem 2, por definição o determinante associado a } \mathbf{M}, \text{ de 2ª ordem,}$$

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

Sendo
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$
, temos:

Determinantes

Determinantes são números que se apresentam numa espécie de tabela entre barras. É um tipo de matriz conhecido como matriz quadrada, recebendo esse nome porque apresenta o mesmo número de linhas (m) e de colunas (n), ou seja, m = n.

Determinantes De 1.ª Ordem

Também conhecidos como **Matrizes de Ordem 1**, são aqueles que apresentam apenas uma linha e uma coluna. Isso quer dizer que o valor do determinante é o valor do próprio elemento.

Exemplos:

$$\det X = |8| = 8$$

 $\det Y = |-5| = 5$

Determinantes De 2.ª Ordem

Também conhecidos como **Matrizes de Ordem 2** ou **Matriz 2x2**, são aqueles que apresentam duas linhas e duas colunas.

Para calculá-los, primeiro multiplicamos os valores constantes nas diagonais, uma principal e outra secundária.

De seguida, subtraímos os resultados obtidos dessa multiplicação.

Exemplos:

$$3*2-7*5=6-35=-29$$



Determinantes De 3.ª Ordem

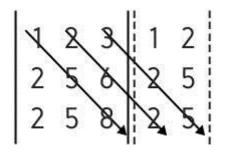
Também conhecidos como **Matrizes de Ordem 3** ou **Matriz 3x3**, são aqueles que apresentam três linhas e três colunas:

Para calculá-los, utilizamos a **Regra de Sarrus**, que consiste em repetir as duas primeiras colunas logo a seguir à terceira:

De seguida, seguimos os seguintes passos:

1) Calculamos a multiplicação em diagonal. Para tanto, traçamos setas diagonais que facilitam o cálculo.

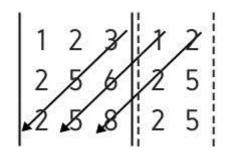
As primeiras setas são traçadas da esquerda para a direita e correspondem à diagonal principal:





2) Calculamos a multiplicação do outro lado da diagonal. Assim, traçamos novas setas.

Agora, as setas são traçadas da direita para a esquerda e correspondem à diagonal secundária:



3) Somamos cada uma delas:

$$40 + 24 + 30 = 94$$

 $32 + 30 + 30 = 92$

94 - 92 = 2

4) Subtraímos cada um desses resultados:

·		 	