Sistemas Lineares

Equação Linear

É toda equação que possui variáveis e apresenta na seguinte forma a1x1 + a2x2 + a3x3 + ...+ anxn = b, em que a1, a2, a3, ..., são os coeficientes reais e o termo independente e representado pelo número real b.

Exemplos:

x + y + z = 20
2x –3y + 5z = 6
4x + 5y – 10z = –3
x – 4y – z = 0

Sistema Linear

Um conjunto de p equações lineares com variáveis x1, x2, x3,....,xn formam um sistema linear com p equações e n incógnitas.

Exemplos:

x + y = 3
x – y = 1

Sistema linear com duas equações e duas variáveis.

2x + 5y – 6z = 24
x – y + 10z = 30

Sistema linear com duas equações e três variáveis.

x + 10y – 12z = 120
4x – 2y – 20z = 60
–x + y + 5z = 10

Sistema linear com três equações e três variáveis.

x – y – z + w = 10
2x + 3y + 5z – 2w = 21
4x – 2y – z + w = 16

Sistema linear com três equações e quatro variáveis.

Solução de um sistema linear

Dado o sistema:

x + y = 3
x – y = 1

Dizemos que a solução deste sistema é o par ordenado (2,1), pois ele satisfaz as duas equações do sistema linear. Observe:

x = 2 e y = 1

2 + 1 = 3 3 = 3
2 – 1 = 1 1 = 1

Dado o sistema:

2x + 2y + 2z = 20

2x – 2y + 2z = 8
2x – 2y – 2z = 0

Podemos dizer que o trio ordenado (5, 3, 2) é solução do sistema, pois ele satisfaz as três equações do sistema linear. Veja:

2 * 5 + 2 * 3 + 2 * 2 = 20   10 + 6 + 4 = 20   20 = 20
2 * 5 – 2 * 3 + 2 * 2 = 8   10 – 6 + 4 = 8   8 = 8
2 * 5 – 2 * 3 – 2 * 2 = 0   10 – 6 – 4 = 0   0 = 0

Classificação De Um Sistema Linear

Todo sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções apresentadas por ele.

SPD – Sistema Possível e Determinado – possui apenas uma solução.
SPI – Sistema Possível e Indeterminado – possui infinitas soluções.
SI – Sistema Impossível – não possui solução.

Associando um sistema linear a uma matriz

Um sistema linear pode estar associado a uma matriz, os seus coeficientes ocuparão as linhas e as colunas da matriz, respectivamente. Veja exemplo 1:

O sistema:

x + y = 3
x – y = 1

pode ser representado por duas matrizes, uma completa e outra incompleta.

Matriz completa

1	1	3
1	-1	1

Matriz incompleta

1	1
1	-1

Exemplo 2

x + 10y – 12z = 120
4x – 2y – 20z = 60
–x + y + 5z = 10

Matriz completa

1	10	-12	120
4	-2	-20	60
-1	1	5	10

Matriz incompleta

1	10	-12
4	-2	-20
-1	1	5

Obs.: O sistema também pode possuir uma representação matricial. Observe o sistema de equações lineares:

x + 10y – 12z = 120
4x – 2y – 20z = 60
–x + y + 5z = 10

Equação matricial do sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & -12 \\ 4 & -2 & -20 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 120 \\ 60 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Equação Linear

Equação linear é toda equação da forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$

em que $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}$ são números reais, que recebem o nome de coeficientes das incógnitas $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}$, e **b** é um número real chamado termo independente (quando b=0, a equação recebe o nome de linear homogênea).

Veja alguns exemplos de equações lineares:

$3x - 2y + 4z = 7$

$-2x + 4z = 3t - y + 4$

$x + y - 3z - \sqrt{7}\,t = 0$ (homogênea)

As equações a seguir não são lineares:

$xy - 3z + t = 8$

$x^2 - 4y = 3t - 4$

$\sqrt{x} - 2y + z = 7$

Sistema Linear

Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas.

A solução de um sistema linear é a n-upla de números reais ordenados ($r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$) que é, simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

Sistemas Lineares são conjuntos de equações associadas entre elas que apresentam a forma a seguir:

$$\begin{cases} a_m x_m + \dots + a_n x_n = b \\ a_{m_2} x_{m_2} + \dots + a_{n_2} x_{n_2} = b \\ a_{m_3} x_{m_3} + \dots + a_{n_3} x_{n_3} = b \end{cases}$$

A chave do lado esquerdo é o símbolo usado para sinalizar que as equações fazem parte de um sistema. O resultado do sistema é dado pelo resultado de cada equação.

Os coeficientes $a_m x_m$, $a_{m2} x_{m2}$, $a_{m3} x_{m3}$, ... , a_n, a_{n2}, a_{n3} das incógnitas x_1, x_{m2},x_{m3}, ... , x_n, x_{n2}, x_{n3} são números reais.
Ao mesmo tempo, b também é um número real que é chamado de termo independente.

Sistemas lineares homogêneos são aqueles cujo termo independente é igual a 0 (zero): $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Portanto, aqueles que apresentam termo independente diferente de 0 (zero) indica que o sistema não é homogêneo: $a_1x_1 + a_2x_2 = 3$.

Classificação

Os sistemas lineares podem ser classificados conforme o número de soluções possíveis. Lembrando que a solução das equações é encontrado pela substituição das variáveis por valores.

• **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: há apenas uma solução possível, o que acontece quando o determinante é diferente de zero ($D \neq 0$).

• **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: as soluções possíveis são infinitas, o que acontece quando o determinante é igual a zero ($D = 0$).

• **Sistema Impossível (SI)**: não é possível apresentar qualquer tipo de solução, o que acontece quando o determinante principal é igual a zero ($D = 0$) e um ou mais determinantes secundários são diferentes de zero ($D \neq 0$).

As matrizes associadas a um sistema linear podem ser completas ou incompletas. São completas as matrizes que consideram os termos independentes das equações.

Os sistemas lineares são classificados como normais quando o número de coeficientes é o mesmo que o número de incógnitas. Além disso, quando o determinante da matriz incompleta desse sistema não é igual a zero.

Exercícios Resolvidos

Vamos resolver passo a passo cada equação a fim de classificá-las em SPD, SPI ou SI.

Exemplo 1 - Sistema Linear com 2 Equações

$$\begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ 15x - 2y = 24 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}$$

$3 * 15 = 45$ $\qquad$ $7 * (-2) = -14$

$D = -14 - 45$
$D = -59$, ou seja $D \neq 0$ (SPD)

Exemplo 2 - Sistema Linear com 3 Equações

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 4x - 2y + 6z = -8 \end{cases}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right|$$

$2 * 2 * 6 = 24$

$-1 * (-1) * 4 = 4$

$3 * 1 * (-2) = -6$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right|$$

$-1 * 1 * 6 = -6$

$2 * (-1) * (-2) = 4$

$3 * 2 * 4 = 24$

$24 + 4 - 6 = 22$

$-6 + 4 + 24 = 22$

$D = 22 - 22$

$D = 0$

Se D = 0, podemos estar diante de um SPI ou de um SI. Assim, para saber qual a classificação correta, vamos ter de calcular os determinantes secundários.

Nos determinantes secundários são utilizados os termos independentes das equações. Os termos independentes substituirão uma das incógnitas escolhidas.

Vamos resolver o determinante secundário Dx, por isso, vamos substituir o x pelos termos independentes.

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -8 & -2 & 6 & -8 & -2 \end{array}\right|$$

$-4 * 2 * 6 = -48$

$-1 * (-1) * (-8) = -8$

$3 * 5 * (-2) = -30$

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -8 & -2 & 6 & -8 & -2 \end{array}\right|$$

$-1 * 5 * 6 = -30$

$-4 * (-1) * (-2) = -8$

$3 * 2 * (-8) = -48$

$-48 - 8 - 30 = -86$

$-30 - 8 - 48 = -86$

$D = -86 + 86$

$D= 0$

Como o determinante principal é igual a zero e um determinante secundário também é igual a zero, sabemos que esse sistema é classificado como SPI.

Em Matemática, recebe o nome de **sistema**um **conjunto** de **equações** em que as variáveis representadas por uma mesma letra possuem o mesmo valor. Uma das formas mais conhecidos e usadas para encontrar os valores numéricos dessas incógnitas é o método da substituição. Por esse método, encontramos o valor algébricode uma das incógnitas para, em seguida, substituirmos esse valor na outra equação.

Os **sistemas** com **duas equações** e duas **incógnitas** são representados por uma equação sobre a outra dentro de uma "{", como no exemplo a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Nesse exemplo, temos que x = 20 e y = 10 para ambas as **equações**.

Para demonstrar como encontrar resultados de sistemas pelo **método da substituição**, faremos o seguinte passo a passo:

Solução De Sistemas Pelo Método Da Substituição

Passo 1: Escolher uma incógnita e calcular seu valor algébrico.

O **valor algébrico** é encontrado quando uma incógnita é isolada. Qualquer incógnita, em qualquer uma das **equações**, pode ser escolhida, entretanto, escolher uma incógnita com coeficiente 1 facilita muito os cálculos.

Observe, por exemplo, o sistema abaixo. Nele, optamos por encontrar o **valoralgébrico** da incógnita y na primeira equação.

$$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$2x + y = 40$$

$$y = 40 - 2x$$

Passo 2: Substituir o valor algébrico da incógnita na outra equação.

É muito importante que essa **substituição** seja feita na **equação** que ainda não foi usada, pois, só assim o resultado será encontrado. No caso do exemplo, como usamos a primeira equação para calcular o valor algébrico de y, então usaremos a segunda equação para substituir esse valor. Assim, onde aparecer y, colocaremos (40 – 2x) no lugar:

$$2x - 2y = 10$$

$$2x - 2(40 - 2x) = 10$$

Passo 3: Calcular o valor numérico de uma das incógnitas.

Observe que, ao substituir o **valor numérico** de y na segunda equação do exemplo, o resultado foi uma **equação do primeiro grau** com **uma incógnita**. Por meio da resolução dessa equação, encontraremos o valor numérico de x.

1ª Obs.: Sempre que escolhermos uma incógnita para encontrar o **valor algébrico**, a outra terá seu valor numérico revelado primeiro.

2ª Obs.: Se o valor algébrico de y for substituído na mesma **equação** usada para encontrá-lo, o resultado será algo do tipo 0 = 0 ou 1 = 1.

$$2x - 2y = 10$$
$$2x - 2(40 - 2x) = 10$$
$$2x - 80 + 4x = 10$$
$$2x + 4x = 10 + 80$$
$$6x = 90$$
$$x = \frac{90}{6}$$
$$x = 15$$

Passo 4: Substituir o valor numérico de x em qualquer uma das duas equações e encontrar o valor numérico de y.

Sugerimos que a **equação** com coeficientes menores seja escolhida para facilitar os cálculos. No exemplo, escolhemos a primeira equação:

$$2x + y = 40$$
$$2 \cdot 15 + y = 40$$
$$30 + y = 40$$
$$y = 40 - 30$$
$$y = 10$$

A **solução** dos **sistemas** geralmente é representada por um par ordenado ou pela notação de conjuntos com a mesma ordem dos pares ordenados: S = {x,y}. No caso do exemplo acima: S = {15, 10}.

2º Exemplo: Encontre a solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 6x + 4y = 38 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, escolha uma incógnita para isolar. Para esse sistema, isolaremos y na **primeira equação**. Observe os cálculos na seguinte imagem:

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x - y = 18 \\ \hline 6x + 4y = 38 \end{array} \right\}$$
$$4x + y = 18$$
$$-y = 18 - 4x$$
$$y = -18 + 4x$$

Por meio dos passos 2 e 3, substitua y na outra **equação** e encontre o **valornumérico** de x, como na imagem:

$$6x + 4y = 38$$
$$6x + 4(-18 + 4x) = 38$$
$$6x - 72 + 16x = 38$$
$$6x + 16x = 38 + 72$$
$$22x = 110$$
$$x = \frac{110}{22}$$
$$x = 5$$

Após encontrar o valor numérico de x, escolha uma das **equações** para cumprir o quarto e último passo: obter o **valor numérico** de y. Escolhemos, para isso, a primeira **equação**. Observe:

$$4x - y = 18$$
$$4 \cdot 5 - y = 18$$
$$20 - y = 18$$
$$-y = 18 - 20$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$

A solução desse sistema é S = {5, 2}.

Um **Sistema de Equações Lineares** é um conjunto ou uma coleção de equações com as quais é possível lidar de uma única vez. **Sistemas Lineares** são úteis para todos os campos da matemática aplicada, em particular, quando se trata de modelar e resolver numericamente problemas de diversas áreas. Nas engenharias, na física, na biologia, na química e na economia, por exemplo, é muito comum a modelagem de situações por meio de sistemas lineares.

De maneira geral, um **Sistema de Equações Lineares**pode ser definido como um conjunto de **m** equações, sendo **m** ≥ 1, com **n** incógnitas x_1, x_2, x_3, … x_n, de forma que:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

…

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

Sendo que: a1, …, a_n e b são números reais. Os números a_{ij} são os **coeficientes angulares** e b_i é o **termo independente** e quando este é nulo a equação linear é chamada **homogênea**.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y - z = -7 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$$

O sistema linear acima possui três equações, três incógnitas (**x, y, z**) e os termos independentes, que são – 7, 3 e 0. Além disso, no sistema acima há uma **equação homogênea** (4x + y + z = 0).

Um sistema linear também pode ser escrito em **forma matricial**. A seguir, a função apresentada no exemplo anterior será exposta em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

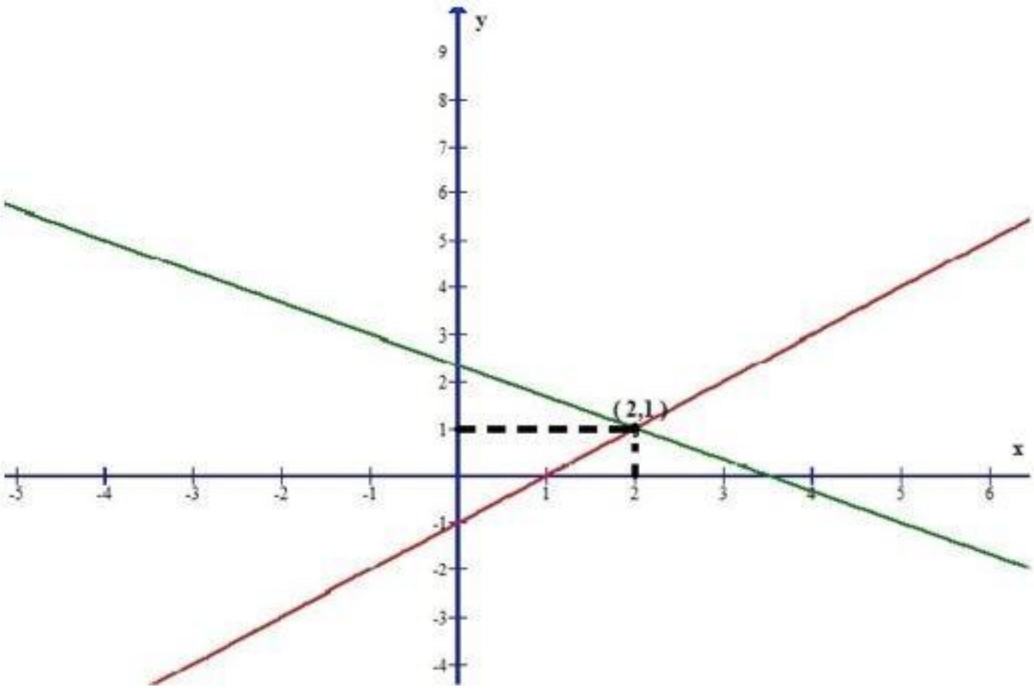
Percebe-se que a forma matricial de um sistema linear é igual ao produto matricial entre a matriz formada pelos **coeficientes angulares** e a matriz formada pelas **incógnitas**, cujo resultado é a matriz formada pelos **termos independentes**.

Solução De Um Sistema Linear

A solução de um sistema linear é um conjunto de valores que satisfaz ao mesmo tempo todas as equações de um sistema linear, ou seja, a ênupla ordenada (sequência ordenada de **n** elementos) é solução de um sistema linear **S,** se for solução de todas as equações de **S.**

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$



Os valores que satisfazem as duas equações são x = 2 e y = 1, logo, a solução do sistema é o par ordenado (2,1), como mostra a representação gráfica do sistema linear apresentado como exemplo.

Quando um ocorre um **Sistema Linear Homogênio**, aquele que possui todas as equações com termos independentes nulos, ele admite uma solução nula (0, 0, … , 0) chamada de **solução trivial.** Mas, um sistema linear homogênio pode ter outras soluções além da trivial.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 - (1) - (-1) = 0 \\ 0 - 2(1) - 2(-1) = 0 \\ 2(0) + 1 + (-1) = 0 \end{cases}$$

O sistema linear acima é homogêneo, portanto, a priori, já temos a solução trivial dada pelo conjunto (0, 0, 0). Contudo, também se admite como solução desse sistema o conjunto (0, 1, – 1).

A partir de agora, serão apresentados dois métodos para a obtenção do conjunto verdade de um sistema: a **Regra de Cramer** e o **Escalonamento**.

Regra de Cramer

É aplicável na resolução de um sistema n x n incógnitas, no qual o **determinante** diferente de zero ($D \neq 0$). Ou seja: ($x_1 = D_1 / D$, $x_2 = D_2 / D$, … , $x_n = D_n / D$). Sendo que, ao considerar o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Percebe-se que os coeficientes $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$se relacionam com a incógnita **x**, enquanto $\mathbf{b_1}$ e $\mathbf{b_2}$ e se relacionam com a incógnita **y**. Agora, a partir da matriz incompleta:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

É possível obter o determinante (**D**) desta matriz e substituindo os coeficientes de **x** e **y** que o compõe pelos **termos independentes** $\mathbf{c_1}$e $\mathbf{c_2}$ é possível encontrar os determinantes $\mathbf{D_x}$ e $\mathbf{D_y}$ para que se aplique a **Regra de Cramer.** Abaixo estão os referidos determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Então: $x = D_x/D = -10/-5 = 2$ e $y = D_y/D = -5/-5 = 1$, portanto, como foi mostrado anteriormente, inclusive graficamente, o par ordenado (2,1) é o resultado do sistema linear acima.

Escalonamento

Um sistema está **escalonado** quando de equação para equação, no sentido de cima para baixo, houver aumento dos coeficientes nulos situados antes dos coeficientes não nulos. Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad\; y + z = 2 \\ \qquad\;\; z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ou}} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$$

O sistema acima está escalonado e substituindo as incógnitas das equações pelos seus respectivos é possível encontrarmos o conjunto solução (1,1,1).

Para escalonar um sistema é necessário que se coloque como primeira equação aquela que tenha o coeficiente de valor 1 na primeira incógnita. Caso não haja nenhuma equação assim, será necessário dividir membro a membro aquela que está como primeira equação pelo coeficiente da primeira incógnita. Nas demais equações, é necessário que se obtenha zero como coeficiente da primeira incógnita, somando cada uma delas com o produto da primeira equação pelo oposto do coeficiente dessa incógnita, até que se possam verificar os valores de cada uma das incógnitas e, por fim, encontrar o conjunto solução.

Sistemas Lineares

• **Definição 1:** Seja n um inteiro positivo. Chama-se equação linear a n incógnitas toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n= b$ em que $a_1, a_2, ..., a_n$, b são constantes reais e $x_1, x_2, ..., x_n$ são incógnitas. Chamamos cada a_1 de coeficiente de x_1 e b de termo independente da equação.

• **Definição 2:**Sejam m e n inteiros positivos. Chama-se sistema linear a m equações e n incógnitas todo sistema com m equações lineares, todas às mesmas n incógnitas. Denotaremos o sistema citado como se segue:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

Chama-se solução do sistema toda lista ordenada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reais que satisfaz a todas as equações do sistema linear e chama-se conjunto solução do sistema o conjunto constituído de todas as soluções.

Dizemos que o sistema linear é, respectivamente, impossível, possível determinado ou possível indeterminado conforme seu conjunto solução seja vazio, unitário ou tenha pelo menos dois elementos.

Método Do Escalonamento

O método do escalonamento consiste em transformar uma matriz qualquer em uma matriz na forma escada através de operações elementares com linhas. O objetivo disso é resolver sistemas lineares. Para tanto, devemos saber que cada sistema linear tem duas matrizes correspondentes: uma chamada **matriz dos coeficientes ou matriz incompleta** do sistema e outra chamada matriz completa do sistema.

Listemos a seguir as matrizes referentes a um sistema genérico:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz incompleta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matriz completa

Se A é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, então o sistema pode ser representado (matricialmente) pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} A_1 . X = b_1 \\ A_2 . X = b_2 \\ \vdots \\ A_m . X = b_m \end{cases}$$

O método do escalonamento para resolver um sistema linear cuja matriz completa é C consiste em encontrar uma matriz C', tal que C' seja linha-equivalente a C e o sistema cuja matriz é C' já explicite o seu conjunto solução. Para tanto, essa matriz deverá estar na forma escada.

Exemplo: Resolvamos o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ -4x + 2z = -1 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$,que tem a seguinte matriz completa;

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Devemos operar essa matriz com linhas, de maneira a deixar a matriz dos coeficientes na forma escada.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & -1/2 & 7/2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & -1/2 & 7/2 & 3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & 0 & 7/2 & -25/12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & 0 & 1 & -25/42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/21 \\ 0 & 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & 0 & 1 & -25/42 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema inicial é equivalente a $\begin{cases} x = -1/21 \\ y = 11/6 \\ z = -25/42 \end{cases}$. Portanto, está resolvido.

Observações:

• Um sistema linear AX = B chama-se homogêneo se B = O. Isto é, se todos os termos independentes são nulos. Neste caso, uma solução óbvia é a trivial, composta apenas de zeros. (Por exemplo, para n = 3, a solução trivial é (0,0,0).)

• Se, num sistema linear homogêneo, o número de incógnitas é maior do que o número de equações, ele admite solução não trivial.

• Se m = n, então o sistema linear AX = B tem uma única solução, então A é linha equivalente a I_n.

• Se m = n, então o sistema linear AX = B tem uma única solução, então A é linha-equivalente a I_n.

Regra De Cramer

A regra de Cramer é utilizada para a resolução de um sistema linear a partir do cálculo de determinantes. Vamos considerar aqui um sistema linear Ax = B, sendo x uma matriz de incógnitas.

Seja A uma matriz invertível n x n e seja B$\in \mathbb{R}$n. Seja A_i a matriz obtida substituindo a i-ésima coluna de A por B. Se x for a única solução de Ax = B, então

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \mid \text{para } i = 1,2,\ldots,n$$

Com i variando até n, é possível encontrar as matrizes-solução do sistema, e descobrir se ele é possível determinado (quando há somente uma matriz-solução), possível indeterminado (infinitas matrizes-solução) ou impossível (nenhuma solução).

Exemplo: Considerando o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solução:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-4}{-4} = 1 \qquad x_3 = \frac{-8}{-4} = 2$$

Então temos como solução a matriz x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o sistema é possível determinado.

Questões

1) Determine os valores de k tais que o sistema nas incógnitas x, y e z tenha: (i) única solução, (ii) nenhuma solução, (iii) mais de uma solução.

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

2) Ache as soluções dos problemas dados ou prove que não existem soluções

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + 8z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + 4z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + 5y = 19 \\ x + 5y - 3z = 4 \\ 3x + 2v + 4z = 25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 7y + 4z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$

3) Dado o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo (atribua valores para x, y, z e w).

b) Resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.

c) Resolva também o sistema homogêneo associado.

d) Verifique que toda matriz-solução obtida em (b) é a soma de uma matriz-solução encontrada em (c) com a solução particular que você encontrou em (a).

4) Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a) Discuta a solução do sistema.

b) Acrescente a equação 2z + kw = 9 a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema impossível.

5) Dê o conjunto solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 21x_4 = -2 \\ 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Antes de entendermos o conceito de sistemas lineares, precisamos entender as equações lineares.

Equação Linear

Uma equação linear é aquela que possui variáveis e se apresenta da seguinte maneira:

$A_1x1 + a_2x2 + a_3x3 + \dots a_nxn = b$

Sendo que a_1, a_2, a_3, …, são coeficientes reais e b é o termo independente.

Confira abaixo alguns exemplos de equações lineares:

x + y + z = 15

2x – 3y + 5z = 2

X – 4y – z = 0

4x + 5y – 10z = -3

Sistema Linear

Tendo esse conceito em mente, agora podemos partir para a segunda parte: os sistemas lineares.

Quando falamos em sistemas lineares, estamos falando de um conjunto p de equações lineares com variáveis x1, x2, x3, …, xn que formam esse sistema.

Por exemplo:

X + y = 3

X – y = 1

Este é um sistema linear com duas equações e duas variáveis.

2x + 5y – 6z = 24

X – y + 10z = 30

Este, por sua vez, é um sistema linear com duas equações e três variáveis:

X + 10 y – 12 z = 120

4x – 2y – 20z = 60

-x + y + 5z = 10

E o sistema linear com três equações e três variáveis.

X – y – z + w = 10

2x + 3y + 5z – 2w = 21

4x – 2y – z + w = 16

Neste caso, por fim, temos um sistema linear com três equações e quatro variáveis.

Como Solucionar?

Mas como devemos resolver um sistema linear? Confira o exemplo abaixo para melhor entendimento:

X + y = 5

X – y = 1

Neste caso, a solução do sistema linear é o par ordenado (3, 2), pois consegue solucionar as duas equações. Confira:

X= 3 y = 2

3 + 2 = 5

3 – 2 = 1

Classificação Dos Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados de acordo com a quantidade de soluções que apresenta. Com isso, podem ser classificados como:

- Sistema Possível e Determinado, ou SPD: quando possui apenas uma solução;
- Sistema Possível e Indeterminado, ou SPI: quando possui infinitas soluções;
- Sistema Impossível, ou SI: quando não possui solução.

Regra De Cramer

Um sistema linear com n x n incógnitas pode ser resolvido com a regra de Cramer, desde que o determinante seja diferente de 0.

Quando temos o seguinte sistema:

Neste caso, a_1 e a_2 se relacionam com a incógnita x, e b_1 e b_2 se relacionam com a incógnita y.

A partir disso, podemos elaborar a matriz incompleta:

Ao substituirmos os coeficientes de x e y que o compõe pelos termos independentes c_1 e c_2 podemos encontrar os determinantes $D_{x \text{ e } Dy}$. Com isso será possível aplicar a regra de Cramer.

Por exemplo:

Quando temos o sistema a seguir

Podemos tirar disso que:

Com isso chegamos a: x = D_x/D, ou seja, -10/ -5 = 2; y = D_y/D = -5/-5 = 1.