

## **Geometria Plana E Especial**

A **geometria plana** ou **euclidiana** é a parte da matemática que estuda as figuras que não possuem volume.

A geometria plana também é chamada de euclidiana, uma vez que seu nome representa uma homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, considerado o “pai da geometria”.

Curioso notar que o termo geometria é a união das palavras “geo” (terra) e “metria” (medida); assim, a palavra geometria significa a “medida de terra”.

### **Conceitos De Geometria Plana**

Alguns conceitos são de suma importância para o entendimento da geometria plana, a saber:

#### **Ponto**

Conceito adimensional, uma vez que não possui dimensão. Os pontos determinam uma localização e são indicados com letras maiúsculas.

#### **Reta**

A reta, representada por letra minúscula, é uma linha ilimitada unidimensional (possui o comprimento como dimensão) e pode se apresentar em três posições:

- horizontal
- vertical
- inclinada

Dependendo da posição das retas, quando elas se cruzam, ou seja, possuem um ponto em comum, são chamadas de retas concorrentes.

Por outro lado, as que não possuem ponto em comum, são classificadas como retas paralelas.

#### **Segmento De Reta**

Diferente da reta, o segmento de reta é limitado pois corresponde a parte entre dois pontos distintos.

A semirreta é limitada somente num sentido, visto que possui início e não possui fim.

#### **Plano**

Corresponde a uma superfície plana bidimensional, ou seja, possui duas dimensões: comprimento e largura. Nessa superfície que se formam as figuras geométricas.

#### **Ângulos**

Os ângulos são formados pela união de dois segmentos de reta, a partir de um ponto comum, chamado de vértice do ângulo. São classificados em:

- ângulo reto ( $\hat{A} = 90^\circ$ )
- ângulo agudo ( $0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$ )
- ângulo obtuso ( $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ )

#### **Área**

A área de uma figura geométrica expressa o tamanho de uma superfície. Assim, quanto maior a superfície da figura, maior será sua área.

#### **Perímetro**

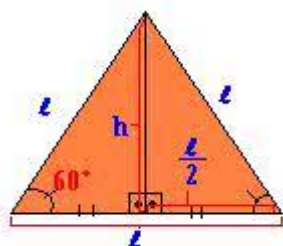
O perímetro corresponde a soma de todos os lados de uma figura geométrica.

Leia também:

- Formas Geométricas
- Área e Perímetro
- Perímetros de Figuras Planas
- Áreas de Figuras Planas

### **Figuras Da Geometria Plana**

#### **Triângulo**



Polígono (figura plana fechada) de três lados, o triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta.

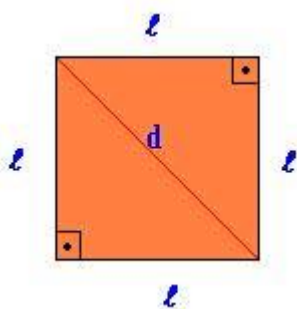
Segundo a forma dos triângulos, eles são classificados em:

- triângulo equilátero: possui todos os lados e ângulos internos iguais ( $60^\circ$ );
- triângulo isósceles: possui dois lados e dois ângulos internos congruentes;
- triângulo escaleno: possui todos os lados e ângulos internos diferentes.

No tocante aos ângulos que formam os triângulos, eles são classificados em:

- triângulo retângulo: possui um ângulo interno de  $90^\circ$ ;
- triângulo obtusângulo: possui dois ângulos agudos internos, ou seja, menor que  $90^\circ$ , e um ângulo obtuso interno, maior que  $90^\circ$ ;
- triângulo acutângulo: possui três ângulos internos menores que  $90^\circ$ .

#### **Quadrado**



Polígono de quatro lados iguais, o quadrado ou quadrilátero é uma figura geométrica plana que possuem os quatro ângulos congruentes: retos ( $90^\circ$ ).

Saiba mais sobre o tema com a leitura dos artigos:

- Perímetro do Quadrado
- Área do Quadrado

### Retângulo

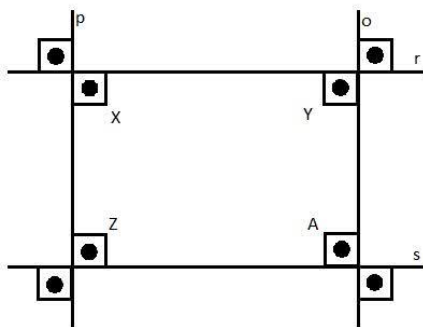


Figura geométrica plana marcada por dois lados paralelos no sentido vertical e os outros dois paralelos, no horizontal. Assim, todos os lados do retângulo formam ângulos reto ( $90^\circ$ ).

### Círculo

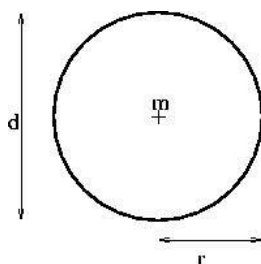
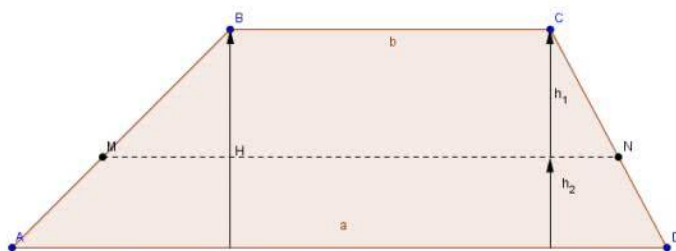


Figura geométrica plana caracterizada pelo conjunto de todos os pontos de um plano. O raio ( $r$ ) do círculo corresponde a medida da distância entre o centro da figura até sua extremidade.

### Trapézio



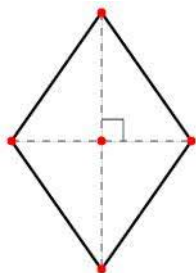
Chamado de quadrilátero notável, pois a soma dos seus ângulos internos corresponde a  $360^\circ$ , o trapézio é uma figura geométrica plana.

Ele possui dois lados e bases paralelas, donde uma é maior e outra menor. São classificados em:

- **trapézio retângulo:** possui dois ângulos de  $90^\circ$ ;

- **trapézio isósceles ou simétrico:** os lados não paralelos possuem a mesma medida;
- **trapézio escaleno:** todos os lados de medidas diferentes.

### Losango



Quadrilátero equilátero, ou seja, formado por quatro lados iguais, o losango, junto com o quadrado e o retângulo, é considerado um paralelogramo.

Ou seja, é um polígono de quatro lados os quais possuem lados e ângulos opostos congruentes e paralelos.

### Geometria Espacial

A Geometria Espacial é a área da matemática que estuda as figuras que possuem mais de duas dimensões.

Assim, o que a difere da geometria plana (que apresenta objetos bidimensionais) é o volume que essas figuras apresentam, ocupando um lugar no espaço.

A **geometria plana** estuda o comportamento de estruturas no plano, a partir de conceitos básicos primitivos como ponto, reta e plano. Estuda o conceito e a construção de figuras planas como quadriláteros, triângulos, círculos, suas propriedades, formas, tamanhos e o estudo de suas áreas e perímetro.

### Conceitos básicos

Os conceitos básicos, ou primitivos, da geometria plana, são chamados de axiomas, ou seja, são aceitos sem demonstrações. São apenas noções que auxiliam no entendimento de conceitos mais completos.

#### Ponto

Segundo “Os Elementos”, de Euclides, um ponto é definido como “o que não tem partes”. É apenas uma posição no espaço. É representado por letras maiúsculas.

#### Reta

Uma reta é a reunião de infinitos pontos. É uma “linha” com comprimento, mas sem largura. É sempre representada por uma letra minúscula.

Se tivermos dois pontos, eles determinam uma reta. Há apenas uma reta que passa por esses dois pontos. Por um ponto passam infinitas retas.

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.

#### Plano

Um plano é uma região onde há infinitos pontos e infinitas retas. É um elemento com comprimento e largura. Geralmente é representado por letras gregas.

Um plano é determinado por três pontos não colineares (pontos não alinhados). Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então esta reta está contida nesse plano.

### Segmento De Reta

Dados dois pontos distintos A e B, a união desses pontos com o conjunto de pontos compreendidos entre A e B é chamado de segmento de reta.



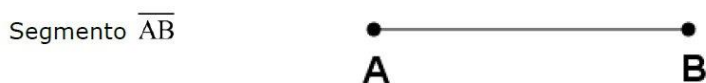
Representamos esse segmento de reta AB por  $\overline{AB}$ .

### Semirreta

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta  $\overline{AB}$  com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB, indicada por  $\overrightarrow{AB}$ .

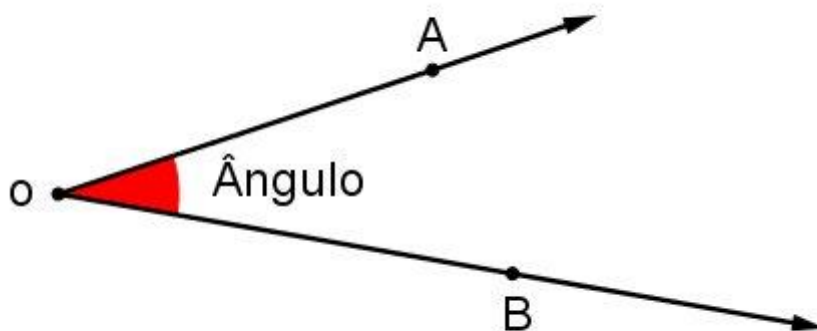


Em resumo, temos:



### Ângulos

Chama-se ângulo a região entre duas semirretas que partem de uma mesma origem. Podemos dizer, ainda que um ângulo é a medida da abertura de duas semirretas que partem da mesma origem.



Indica-se:  $\angle AOB$ ,  $\angle BOA$ ,  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{BOA}$  ou  $\hat{O}$ .

O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  são os lados do ângulo.

### **Polígonos**

Polígonos são figuras geométricas planas que são formadas por segmentos de reta a partir de uma sequência de pontos de um plano, todos distintos e não colineares, onde cada extremidade de qualquer um desses segmentos é comum a apenas um outro.

- Área de polígonos irregulares
- Área de polígonos regulares
- Área de quadrados e retângulos
- Área de setores circulares
- Área de um círculo
- Área de um losango
- Área de um paralelogramo
- Área de um triângulo
- Cálculo de perímetro
- Cálculo do perímetro e área de polígonos

### **Artigos de Geometria Plana**

- Equação reduzida da reta
- Tipos de triângulos
- Trapézio
- Área e Perímetro de figuras planas
- Circunferência
- Diagonais de um Polígono Convexo
- Geometria Plana: conceitos históricos e cálculo de áreas
- Polígonos
- Posições relativas entre duas circunferências
- Posições relativas entre reta e circunferência
- Raio e Diâmetro de uma Circunferência
- Semelhança de triângulos
- Teorema de Pitágoras

Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão.

Os princípios que levaram à elaboração da Geometria Euclidiana eram baseados nos estudos do ponto, da reta e do plano. O ponto era considerado um elemento que não tinha definição plausível, a reta era definida como uma sequência infinita de pontos e o plano definido através da disposição de retas.

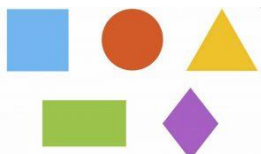
As definições teóricas da Geometria de Euclides estão baseadas em axiomas, postulados, definições e teoremas que estruturam a construção de variadas formas planas. Os polígonos são representações planas que possuem definições, propriedades e elementos.

Podemos relacionar à Geometria plana os seguintes conteúdos programáticos:

Ponto, reta e plano  
Posições relativas entre retas  
Ângulos  
Triângulos  
Quadriláteros  
Polígonos  
Perímetro  
Áreas de regiões planas

### **Geometria Plana: Conceitos E Usos**

A geometria plana é o tipo de geometria considerada clássica, também chamada de geometria euclidiana, em função de seu criador. Trata-se da parte da matemática dedicada ao estudo de figuras bidimensionais, sem volume, representadas de forma plana.



A geometria plana dedica-se ao estudos destas formas e às suas características, e é associada ao desenvolvimento da matemática como a conhecemos atualmente. É inicialmente atribuída a Euclides de Alexandria, chamado por muito de pai da geometria.

Inicialmente, era comum que a geometria fosse especialmente utilizada para a medição que coisas no mundo real, especialmente quando não era possível realizar a mensuração física direta destes objetos, terras ou distâncias. Por isso, a geometria plana é diretamente relacionada à trigonometria.

Conheça os principais conceitos desta importante área da matemática:

### **Principais Conceitos Da Geometria Plana**

Entre os principais conceitos da geometria plana, destacam-se:

#### **Ponto**

O ponto é o elemento mais básico da geometria plana, uma vez que todos os outros elementos dela são feitos de pontos subsequentes. Um ponto não possui dimensão, e é apenas uma representação de localização.

#### **Reta**

Uma reta é uma linha que possui apenas uma dimensão, formada por pontos sequenciais que a formam. Uma reta pode ser vertical, horizontal ou inclinada.

#### **Plano**

O plano é o cenário no qual a geometria plana é estudada. Trata-se de uma superfície de duas dimensões: comprimento e largura. É nestas duas dimensões que as figuras geométricas são formadas e passam a existir, com suas próprias características inseridas neste plano.

## Ângulos

Os ângulos são partes de uma figura, definidos pela união de dois segmentos retos de forma não reta, a partir de um ponto original. Essa união forma um vértice, e a angulação apontada dentro deste vértice é o que chamamos de ângulo de um vértice.

Um ângulo pode ser reto, quando possui 90 graus, agudo quando possui menos que 90 graus, e obtuso quando possui mais que 90 graus.

## Área

A área é a superfície plana ocupada por uma figura geométrica sobre o plano. Trata-se do espaço bidimensional ocupado pela figura. Uma figura é maior do que outra quando possui uma área menor do que aquela com a qual está sendo comparada.

## Perímetro

O perímetro é a soma dos lados que formam a figura, na geometria plana. O perímetro de um quadrado, por exemplo, é formado pelo comprimento dos quatro lados deste quadrado, somados.

## Figuras Geométricas Da Geometria Plana

As figuras contidas na geometria plana são todas aquelas bidimensionais. Significa que possuem verticalidade e horizontalidade, mas não possuem profundidade. Por isso, elas possuem perímetro e área, mas não possuem volume. O conceito de volume nem mesmo é tratado pela geometria plana.

Triângulos, quadrados, retângulos, losangos, círculos, e trapézios estão entre as principais figuras deste segmento da matemática. A todas as figuras geométricas planas fechadas (sem pontas de segmentos de reta desconectados de outras pontas), dá-se o nome de polígono. Algumas destas figuras possuem regras muito próprias e significativas.

Historicamente, os triângulos são os polígonos mais estudados em um viés clássico – ciência à qual deu-se o nome de trigonometria. Sem entrar em seus méritos específicos, vale distinguir os tipos de triângulos classificados na geometria plana:

**Triângulo equilátero** é aquele formado por três ângulos internos de 60 graus. O **triângulo isósceles** possui dois de seus lados iguais, enquanto o **triângulo escaleno** é aquele que possui todos os lados e ângulos internos distintos entre si.

## Geometria Espacial

A **Geometria Espacial** corresponde a área da matemática que se encarrega de estudar as figuras no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões.

De modo geral, a Geometria Espacial pode ser definida como o estudo da **geometria no espaço**.

Assim, tal qual a **Geometria Plana**, ela está pautada nos conceitos basilares e intuitivos que chamamos “**conceitos primitivos**” os quais possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.).

Pitágoras e Platão associavam o estudo da Geometria Espacial ao estudo da Metafísica e da religião; contudo, foi Euclides a se consagrar com sua obra “Elementos”, onde sintetizou os conhecimentos acerca do tema até os seus dias.

Entretanto, os estudos de Geometria Espacial permaneceram estancados até o fim da Idade Média, quando Leonardo Fibonacci (1170-1240) escreve a “Practica Geometriae”.

Séculos depois, Joannes Kepler (1571-1630) rotula o “Steometria” (stereo: volume/metria: medida) o cálculo de volume, em 1615.

## Características da Geometria Espacial

A Geometria Espacial estuda os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no



espaço. Por sua vez, esses objetos são conhecidos como "**sólidos geométricos**" ou "**figuras geométricas espaciais**". Conheça melhor alguns deles:

- prisma
- cubo
- paralelepípedo
- pirâmide
- cone
- cilindro
- esfera

Dessa forma, a geometria espacial é capaz de determinar, por meio de cálculos matemáticos, o volume destes mesmos objetos, ou seja, o espaço ocupado por eles.

Contudo, o estudo das estruturas das figuras espaciais e suas inter-relações é determinado por alguns **conceitos básicos**, a saber:

- **Ponto**: conceito fundamental a todos os subsequentes, uma vez que todos sejam, em última análise, formados por inúmeros pontos. Por sua vez, os pontos são infinitos e não possuem dimensão mensurável (adimensional). Portanto, sua única propriedade garantida é sua localização.
- **Reta**: composta por pontos, é infinita nos dois lados e determina a distância mais curta entre dois pontos determinados.
- **Linha**: possui algumas semelhanças com a reta, pois é igualmente infinita para cada lado, contudo, têm a propriedade de formar curvas e nós sobre si mesma.
- **Plano**: é outra estrutura infinita que se estende em todas as direções.

### Figuras Geométricas Espaciais

Segue abaixo algumas das figuras geométricas espaciais mais conhecidas:

#### Cubo



O cubo é um hexaedro regular composto de 6 faces quadrangulares, 12 arestas e 8 vértices sendo:

**Área lateral:**  $4a^2$

**Área total:**  $6a^2$

**Volume:**  $a \cdot a \cdot a = a^3$

#### Dodecaedro



O Dodecaedro é um poliedro regular composto de 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices sendo:

**Área Total:**  $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$

**Volume:**  $\frac{1}{4} (15+7\sqrt{5}) a^3$

#### Tetraedro



O Tetraedro é um poliedro regular composto de 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices sendo:

**Área total:**  $4a^2\sqrt{3}/4$

**Volume:**  $\frac{1}{3} Ab.h$

#### Octaedro



O Octaedro é um poliedro regular de 8 faces formada por triângulos equiláteros, 12 arestas e 6 vértices sendo:

**Área total:**  $2a^2\sqrt{3}$

**Volume:**  $\frac{1}{3} a^3\sqrt{2}$

#### Icosaedro



O Icosaedro é um poliedro convexo composto de 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices sendo:

**Área total:**  $5\sqrt{3}a^2$

**Volume:**  $\frac{5}{12} (3+\sqrt{5}) a^3$

#### Prisma



O Prisma é um poliedro composto de duas faces paralelas que formam a base, que por sua vez, podem ser triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal.

Além das faces o prisma é composto de altura, lados, vértices e arestas unidos por paralelogramos. De

acordo com sua inclinação, os prismas podem ser retos, aqueles em que a aresta e a base fazem um ângulo de  $90^\circ$  ou os oblíquos compostos de ângulos diferentes de  $90^\circ$ .

**Área da Face:**  $a.h$

**Área Lateral:**  $6.a.h$

**Área da base:**  $3.a^3\sqrt{3}/2$

**Volume:**  $Ab.h$

Onde:

**Ab:** Área da base

**h:** altura

Veja também o artigo: Volume do Prisma.

### **Pirâmide**



A pirâmide é um poliedro composto por uma base (triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo), um vértice (vértice da pirâmide) que une todas as faces laterais triangulares.

Sua altura corresponde a distância entre o vértice e sua base. Quanto à sua inclinação podem ser classificadas em retas (ângulo de  $90^\circ$ ) ou oblíquas (ângulos diferentes de  $90^\circ$ ).

**Área total:**  $Al + Ab$

**Volume:**  $1/3 Ab.h$

Onde:

**Al:** Área lateral

**Ab:** Área da base

**h:** altura

A **Geometria Espacial** estuda as figuras geométricas no espaço. Entenda espaço como um lugar onde podemos encontrar todas as propriedades geométricas em mais de duas dimensões.

É na primeira infância (até dois anos de idade) que a criança desenvolve a percepção sobre o espaço. Esse processo acontece de forma multifacetada, visto que a criança concebe uma coleção de espaços, que, de acordo com Piaget, são quatro: espaço tátil, auditivo, visual e oral. É somente dos dois aos sete anos de idade que a criança reconhece o espaço como algo comum, em que todos os espaços descritos anteriormente estão incluídos simultaneamente.

Podemos representar o espaço por meio da projeção espacial das três dimensões, que são: altura, comprimento e largura. As coordenadas cartesianas são dadas pelos eixos x, y e z. Usando a localização de pontos, é possível traçar retas no espaço que formam planos e definem formas e estruturas geométricas.

---

---

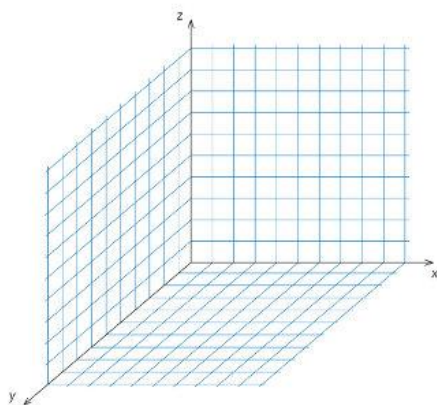
---

---

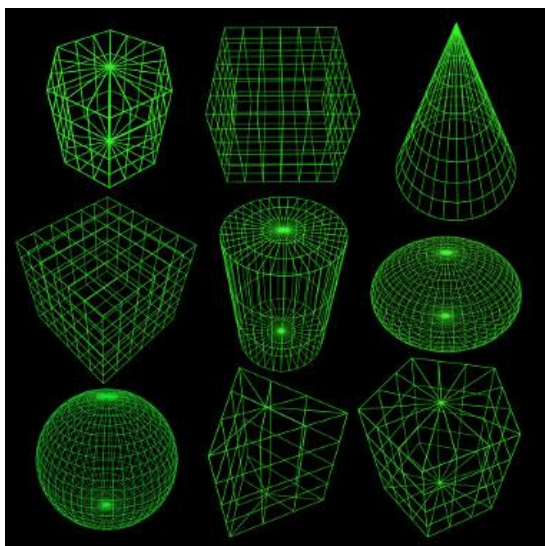
---

---

---



Outro segmento da Matemática que compõe a Geometria Espacial é a Geometria Analítica. Nessa última, a representação de uma imagem na projeção espacial é dada por vetores que possuem módulo (valor numérico positivo), direção (horizontal ou vertical) e sentido (para cima, para baixo, direita ou esquerda). O espaço também está presente ao estudarmos os sólidos geométricos, que são porções limitadas do espaço.



Grandes estudiosos das Ciências Exatas conceberam e formalizaram os estudos relacionados com a Geometria Espacial. Entre eles, podemos destacar: Pitágoras, Platão, Euclides, Leonardo Finonacci, Joannes Kepler, entre outros.

A Geometria Espacial está presente nas abstrações da Matemática e no nosso mundo cotidiano. Percebemos a sua existência todos os dias ao olharmos para objetos, estruturas e animais que estão ao nosso redor. Quando executamos essa ação, conseguimos visualizar o volume total em vez de somente a superfície, que é uma projeção bidimensional.

Na escola, a Geometria Espacial é estudada na disciplina de Matemática. Os conteúdos listados a seguir são os ministrados em sala de aula:

- O plano e o espaço;
- Volume do prisma;
- Volume da esfera;
- Volume da pirâmide;

- Posições relativas ponto, reta e plano;
- Posições relativas de duas retas;
- Posições relativas de dois planos;
- Perpendicularidade entre planos;
- Projeção ortogonal;
- Relação de Euler;
- Poliedros;
- Prismas;
- Paralelepípedos;
- Área lateral e área total dos sólidos;
- Cilindro;
- Cone;
- Pirâmide;
- Cone;
- Esfera;
- Simetria.

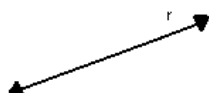
**Geometria espacial****Pontos, retas e planos**

Na geometria espacial, são conceitos primitivos (e, portanto, aceitos sem definição) os conceitos de ponto, reta e plano. Habitualmente, usamos a seguinte notação:

- **pontos:** letras maiúsculas do nosso alfabeto



- **retas:** letras minúsculas do nosso alfabeto



- **planos:** letras minúsculas do alfabeto grego

---

---

---

---

