

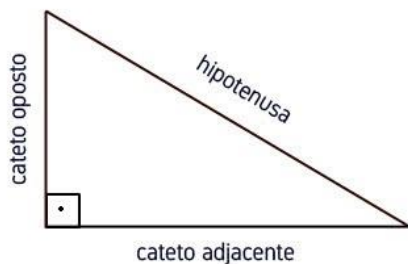
Trigonometria

A trigonometria é a parte da matemática que estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos.

Ela é utilizada também em outras áreas de estudo como física, química, biologia, geografia, astronomia, medicina, engenharia, dentre outras.

Funções Trigonômétricas

As funções trigonométricas são as funções relacionadas aos triângulos retângulos, que possuem um ângulo de 90°. São elas: seno, cosseno e tangente.



As funções trigonométricas estão baseadas nas razões existentes entre dois lados do triângulo em função de um ângulo.

Ela são formadas por dois catetos (oposto e adjacente) e a hipotenusa:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

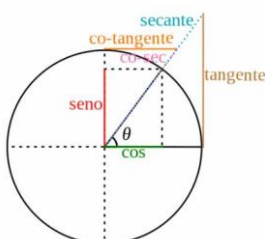
Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre cateto adjacente.

Círculo Trigonométrico

O círculo trigonométrico ou círculo unitário é usado no estudo das funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.



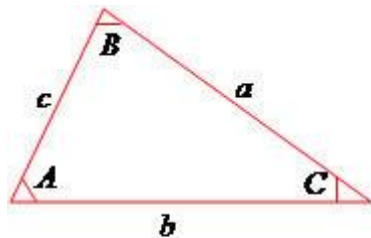
Teoria Euclidiana

Alguns conceitos importantes da geometria euclidiana nos estudos da trigonometria são:

Lei Dos Senos

A Lei dos Senos estabelece que num determinado triângulo, a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto, será sempre constante.

Dessa forma, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos é representada pela seguinte fórmula:

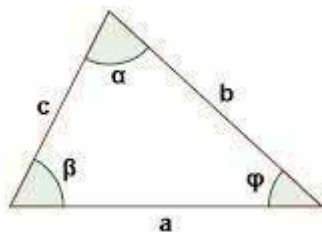


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Lei Dos Cossenos

A Lei dos Cossenos estabelece que em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados, corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.

Dessa maneira, sua fórmula é representada da seguinte maneira:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \alpha$$

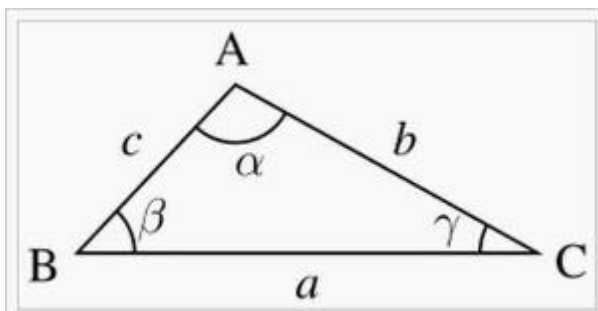
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \gamma$$

Lei Das Tangentes

A Lei das Tangentes estabelece a relação entre as tangentes de dois ângulos de um triângulo e os comprimentos de seus lados opostos.

Dessa forma, para um triângulo ABC, de lados a, b, c, e ângulos α, β e γ, opostos a estes três lados, têm-se a expressão:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]}$$

Teorema De Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, criado pelo filósofo e matemático grego, Pitágoras de Samos, (570 a.C. - 495 a.C.), é muito utilizado nos estudos trigonométricos.

Ele prova que no triângulo retângulo, composto por um ângulo interno de 90° (ângulo reto), a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa:

$$a^2 = c^2 + b^2$$

Sendo,

a: hipotenusa

c e b: catetos

História Da Trigonometria

A história da trigonometria surge na medida em que os astrônomos precisavam calcular o tempo, sendo também muito importante nas pesquisas sobre navegação.

Entretanto, Hiparco de Niceia, (190 a.C.-120 a.C.), astrônomo grego-otomano, foi quem introduziu a Trigonometria nos estudos científicos. Por isso, ele é considerado o fundador ou o Pai da Trigonometria.

Curiosidade

O termo "trigonometria", do grego, é a união das palavras trigono (triângulo) e metrein (medidas).

Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas, também chamadas de funções circulares, estão relacionadas com as demais voltas no ciclo trigonométrico.

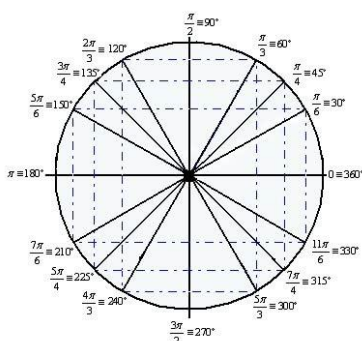
As principais funções trigonométricas são:

Função Seno

Função Cosseno

Função Tangente

No círculo trigonométrico temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência.



Funções Periódicas

As funções periódicas são funções que possuem um comportamento periódico. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo.

O período corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo p tal que

$$f(x) = f(x+p), \forall x \in A$$

O menor valor positivo de p é chamado de período de f .

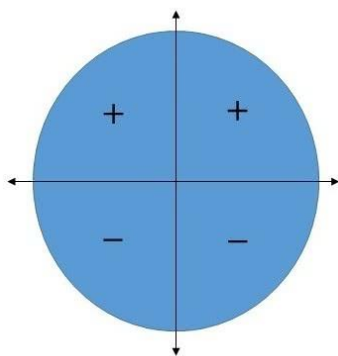
Note que as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas visto que apresentam certos fenômenos periódicos.

Função Seno

A função seno é uma função periódica e seu período é 2π . Ela é expressa por:

$$\text{função } f(x) = \sin x$$

No círculo trigonométrico, o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes. Já no terceiro e quartos quadrantes, o sinal é negativo.



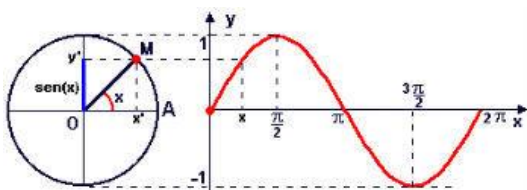
Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é crescente. Já no segundo e terceiro quadrantes a função f é decrescente.

O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a \mathbb{R} . Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $\text{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$.

Já o conjunto da imagem da função seno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Em relação à simetria, a função seno é uma função ímpar: $\sin(-x) = -\sin(x)$.

O gráfico da função seno $f(x) = \sin x$ é uma curva chamada de senoide:

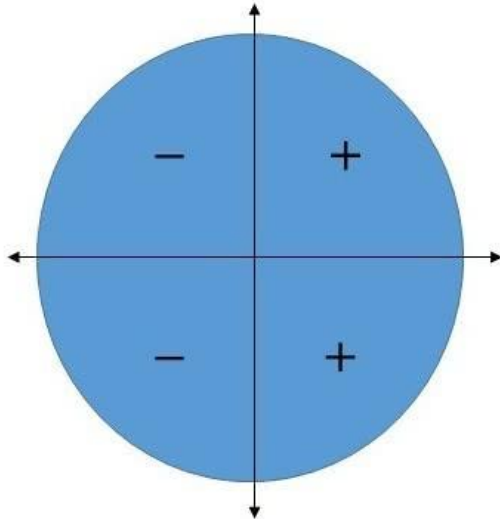


Função Cosseno

A função cosseno é uma função periódica e seu período é 2π . Ela é expressa por:

função $f(x) = \cos x$

No círculo trigonométrico, o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao primeiro e quarto quadrantes. Já no segundo e terceiro quadrantes, o sinal é negativo.



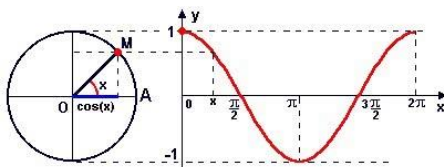
Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é decrescente. Já no terceiro e quarto quadrantes a função f é crescente.

O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a \mathbb{R} . Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$.

Já o conjunto da imagem da função cosseno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Em relação à simetria, a função cosseno é uma função par: $\cos(-x) = \cos(x)$.

O gráfico da função cosseno $f(x) = \cos x$ é uma curva chamada de cossenoide:

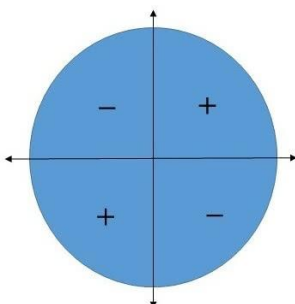


Função Tangente

A função tangente é uma função periódica e seu período é π . Ela é expressa por:

função $f(x) = \tan x$

No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positivo quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



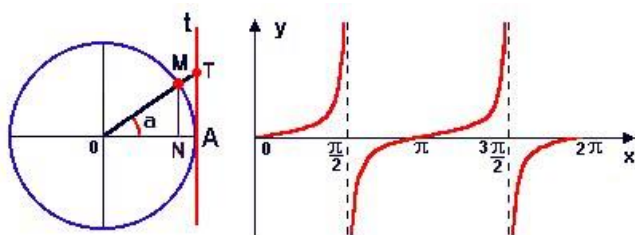
Além disso, a função f definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sempre crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico.

O domínio da função tangente é: $\operatorname{Dom}(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi; K \in \mathbb{Z}\}$. Assim, não definimos $\operatorname{tg} x$, se $x = \pi/2 + k\pi$.

Já o conjunto da imagem da função tangente corresponde a \mathbb{R} , ou seja, o conjunto dos números reais.

Em relação à simetria, a função tangente é uma função ímpar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

O gráfico da função tangente $f(x) = \operatorname{tg} x$ é uma curva chamada de tangente:



Razões Trigonômétricas

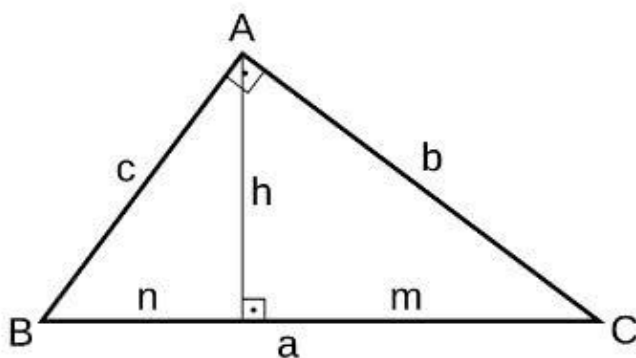
As razões (ou relações) trigonométricas estão relacionadas com os ângulos de um triângulo retângulo. As principais são: o seno, o cosseno e a tangente.

As relações trigonométricas são resultado da divisão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo, e por isso são chamadas de razões.

Razões Trigonômétricas No Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo recebe esse nome pois apresenta um ângulo chamado de reto, que possui o valor de 90° .

Os outros ângulos do triângulo retângulo são menores que 90° , chamados de ângulos agudos. A soma dos ângulos internos é de 180° .

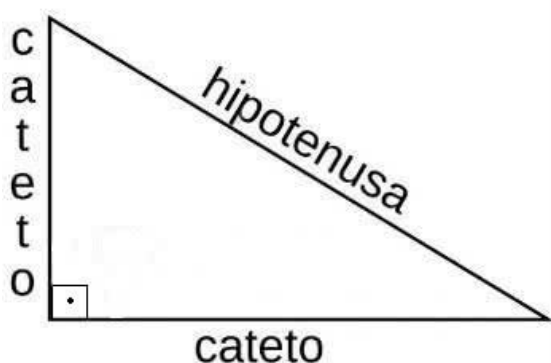


Observe que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são chamados de complementares. Ou seja, se um deles tem medida x , o outro terá a medida $(90^\circ - x)$.

Lados Do Triângulo Retângulo: Hipotenusa E Catetos

Antes de mais nada, temos que saber que no triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo. Já os catetos são os lados adjacentes e que formam o ângulo de 90° .

Note que dependendo dos lados de referência ao ângulo, temos o cateto oposto e o cateto adjacente.



Feita essa observação, as razões trigonométricas no triângulo retângulo são:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre o cateto adjacente.

Vale lembrar que pelo conhecimento de um ângulo agudo e a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, podemos descobrir o valor dos outros dois lados.

Ângulos Notáveis

Os chamados ângulos notáveis são os que surgem com maior frequência nos estudos de razões trigonométricas.

Veja a tabela abaixo com o valor dos ângulos de 30°; 45° e 60°:

Relações Trigonométricas	30°	45°	60°
Seno	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
Cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
Tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Tabela Trigonométrica

A tabela trigonométrica apresenta os ângulos em graus e os valores decimais do seno, cosseno e tangente. Confira abaixo a tabela completa:

Graus (°)	Rad	sen	cos	tg	Graus (°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0	46	0,80	0,71934	0,694658	1,03553
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455	47	0,82	0,731354	0,681998	1,072368
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921	48	0,84	0,743145	0,669131	1,110613
3	0,07	0,052336	0,998663	0,052408	49	0,86	0,75471	0,656059	1,150368
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927	50	0,87	0,766044	0,642788	1,191754
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489	51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104	52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785	53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140641	54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384	55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327	56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438	57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557	58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868	59	1,03	0,857167	0,515038	1,664278
14	0,26	0,241922	0,970296	0,248328	60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949	61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745	62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731	63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492	64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328	65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
20	0,37	0,34202	0,939893	0,36397	66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864	67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026	68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475	69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229	70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308	71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733	72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509625	73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709	74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309	75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735	76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861	77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624889	78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408	79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509	80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208	81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543	82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554	83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286	84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784	85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391	86	1,50	0,997584	0,069472	14,30067
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287	87	1,52	0,998671	0,052336	19,08114
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404	88	1,54	0,999391	0,034899	28,63825
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515	89	1,56	0,999848	0,017452	57,28996
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689	90	1,57	1	0	n existe
45	0,02	0,707107	0,707107	1	180	3,14	0	1	0
					270	4,71	-1	0	n existe
					360	6,28	0	1	0

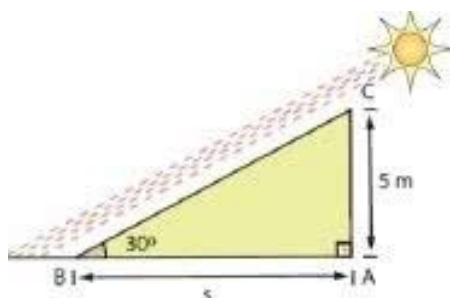
Aplicações

As razões trigonométricas possuem muitas aplicações. Assim, conhecendo os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, podemos fazer diversos cálculos geométricos.

Um exemplo notório, é o cálculo realizado para descobrir o comprimento de uma sombra ou de um prédio.

Exemplo

Qual o comprimento da sombra de uma árvore de 5m de altura quando o sol está a 30° acima do horizonte?



$$\text{Tg } B = AC / AB = 5/s$$

Uma vez que $B = 30^\circ$ temos que a:

$$\text{Tg } B = 30^\circ = \sqrt{3}/3 = 0,577$$

Logo,

$$0,577 = 5/s$$

$$s = 5/0,577$$

$$s = 8,67$$

Portanto, o tamanho da sombra é de 8,67 metros.

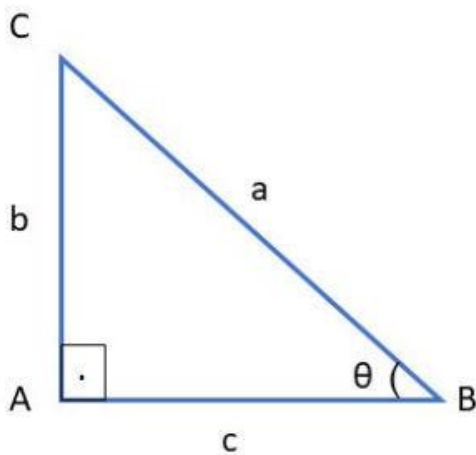
Relações Trigonométricas

As relações trigonométricas são relações entre valores das funções trigonométricas de um mesmo arco. Essas relações também são chamadas de identidades trigonométricas.

Inicialmente a trigonometria tinha como objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos dos triângulos.

Nesse contexto, as razões trigonométricas $\text{sen } \theta$, $\text{cos } \theta$ e $\text{tg } \theta$ são definidas como relações entre os lados de um triângulo retângulo.

Dado um triângulo retângulo ABC com um ângulo agudo θ , conforme figura abaixo:



Definimos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em relação ao ângulo θ , como:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{c}$$

Sendo,

a: hipotenusa, ou seja, lado oposto ao ângulo de 90°

b: cateto oposto ao ângulo θ

c: cateto adjacente ao ângulo θ

Relações Fundamentais

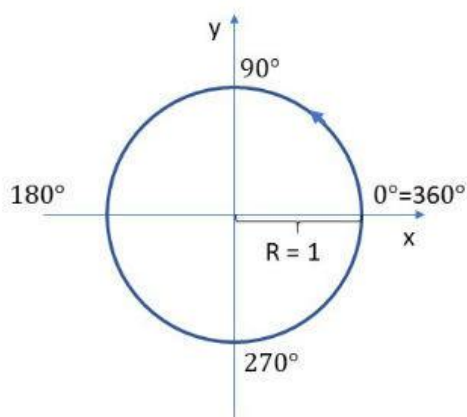
A trigonometria ao longo dos anos foi se tornando mais abrangente, não se restringindo apenas aos estudos dos triângulos.

Dentro deste novo contexto, define-se o círculo unitário, também chamado de circunferência trigonométrica. Ele é utilizado para estudar as funções trigonométricas.

Circunferência Trigonométrica

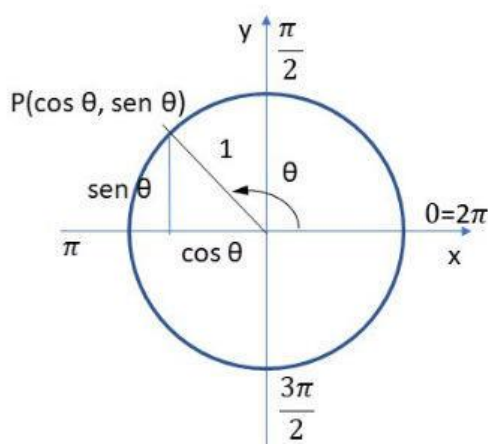
A circunferência trigonométrica é uma circunferência orientada de raio igual a 1 unidade de comprimento. Associamos a ela um sistema de coordenadas cartesianas.

Os eixos cartesianos dividem a circunferência em 4 partes, chamadas de quadrantes. O sentido positivo é anti-horário, conforme figura abaixo:



Usando a circunferência trigonométrica, as razões que a princípio foram definidas para ângulos agudos (menores que 90°), passam a ser definidas para arcos maiores de 90° .

Para isso, associamos um ponto P , cuja abscissa é o cosseno de θ e cuja ordenada é o seno de θ .



Como todos os pontos da circunferência trigonométrica estão a uma distância de 1 unidade da origem, podemos usar o teorema de Pitágoras. O que resulta na seguinte relação trigonométrica fundamental:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Podemos definir ainda a $\operatorname{tg} x$, de um arco de medida x , no círculo trigonométrico como sendo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Outras relações fundamentais:

Cotangente do arco de medida x

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Secante do arco de medida x .

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Cossecante do arco de medida x .

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

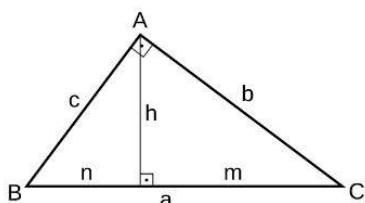
Relações trigonométricas derivadas

Partido das relações apresentadas, podemos encontrar outras relações. Abaixo, mostramos duas importantes relações decorrentes das relações fundamentais.

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	2) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
Dividindo todos os termos por $\cos^2 x$, temos:	Dividindo todos os termos por $\operatorname{sen}^2 x$, temos:
$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
sendo	sendo,
$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$ e	$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$
$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$
substituindo, temos:	Substituindo, temos:
$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$	$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$
para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	para $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é uma figura geométrica formada por três lados. Ele possui um ângulo reto, cuja medida é de 90° , e dois ângulos agudos, menores que 90° .



Principais Características**Lados do Triângulo Retângulo**

O lado oposto ao ângulo de 90° é chamado de hipotenusa. Esse é o maior dos três lados da figura.

Os demais lados são denominados de cateto adjacente e cateto oposto.

Note que a hipotenusa é representada como (a) e os catetos como (b) e (c).

Em relação aos lados dos triângulos, temos:

Triângulo Equilátero: possui os três lados iguais.

Triângulo Isósceles: possui dois lados iguais, e um diferente.

Triângulo Escaleno: possui os três lados diferentes.

Ângulos do Triângulo Retângulo

Como ocorre em todos os triângulos, a soma dos ângulos internos do triângulo retângulo é de 180°.

Os vértices dos ângulos são representados por (A), (B) e (C). Já o "h" é a altura relativa à hipotenusa.

Portanto, de acordo com a figura acima temos:

A é um ângulo reto: 90°

B e C são ângulos agudos, ou seja, são menores que 90°

Feita essa observação, o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares, donde a soma dos dois ângulos medem 90°.

Em relação aos ângulos internos dos triângulos, temos:

Triângulo Retângulo: possui um ângulo interno reto (90°).

Triângulo Acutângulo: todos os ângulos internos são agudos, ou seja, as medidas dos ângulos são menores que 90°.

Triângulo Obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, ou seja, possui um ângulo com medida maior do que 90°.

Área do Triângulo Retângulo

Para calcular a área de um triângulo retângulo, utiliza-se a seguinte expressão:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Onde,

A: área

b: base

h: altura

Perímetro Do Triângulo Retângulo

O perímetro de uma figura geométrica, corresponde a soma de todos os lados. Ela é calculada pela seguinte fórmula:

$$P = L + L + L$$

ou

$$P = 3L$$

Onde,

P: perímetro

L: lados

Trigonometria no Triângulo Retângulo

A trigonometria é a área que estuda as relações existentes nos triângulos que possuem um ângulo reto (90°). As relações trigonométricas num triângulo retângulo são:

Seno: cateto oposto/hipotenusa

Cosseno: cateto adjacente/hipotenusa

Tangente: cateto oposto/cateto adjacente

Transformações trigonométricas: fórmulas de adição

As transformações trigonométricas são **fórmulas** que podem ser usadas para calcular algumas das **operações básicas** envolvendo razões trigonométricas, como o seno da soma de dois ângulos.

Em trigonometria, o seno, cosseno ou tangente da soma (ou subtração) de dois arcos não pode ser feita com as mesmas regras dos números reais. Observe, por exemplo, o seno da adição entre dois ângulos de 30° :

$$\text{Sen}(30^\circ + 30^\circ) = \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora, se tentarmos fazer a soma separadamente, encontraremos o seguinte resultado:

$$\text{Sen}(30^\circ + 30^\circ) = \text{sen}30^\circ + \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Cada uma das **somas** tem um resultado, mas apenas uma está correta e é a primeira, em que $\text{sen}(30^\circ + 30^\circ) = \text{sen}60^\circ$. Para garantir a forma correta e possibilitar outros cálculos dentro da trigonometria, existem as **fórmulas de adição** de arcos.

Os valores dos **senos**, **cossenos** e **tangentes** dos ângulos em questão podem ser obtidos na tabela de valores trigonométricos a seguir:

α	30°	45°	60°
$\text{Sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{Cos}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{Tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{1}$

Fórmulas do seno da adição e da subtração de dois arcos

Dados dois **arcos** quaisquer, a e b, seu **seno da soma** é dado pela seguinte expressão:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sena} \cdot \text{cosb} + \text{senb} \cdot \text{cosa}$$

Já o **seno da diferença** desses dois arcos é dado pela seguinte expressão:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sena} \cdot \text{cosb} - \text{senb} \cdot \text{cosa}$$

Exemplo:

$$\text{sen}75^\circ = \text{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \text{sen}45^\circ \cdot \text{cos}30^\circ + \text{sen}30^\circ \cdot \text{cos}45^\circ$$

$$\text{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$$

$$\text{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{(2 \cdot 3)} + \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$$

$$\text{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

Fórmulas do cosseno da adição e da subtração de dois arcos

Dados dois arcos quaisquer, a e b, seu **cosseno da soma** é dado pela seguinte expressão:

$$\text{cos}(a + b) = \text{cosa} \cdot \text{cosb} - \text{sena} \cdot \text{senb}$$

Já o **cosseno da diferença** desses dois arcos é dado pela expressão:

$$\text{cos}(a - b) = \text{cosa} \cdot \text{cosb} + \text{sena} \cdot \text{senb}$$

Exemplo:

$$\text{Cos}15^\circ = \text{cos}(45^\circ - 30^\circ) = \text{cos}45^\circ \cdot \text{cos}30^\circ + \text{sen}45^\circ \cdot \text{sen}30^\circ$$

$$\text{Cos}15^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2 \cdot 2}$$

$$\text{Cos}15^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$$

$$\text{Cos}15^\circ = \frac{\sqrt{(2 \cdot 3)} + \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$$

$$\text{Cos}15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

Fórmulas da tangente da adição e da subtração de dois arcos

Dados dois arcos, a e b, sua **tangente da soma** é dada pela fórmula a seguir:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}$$

A **tangente da diferença** desses dois arcos é dada pela seguinte expressão:

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tga} - \text{tgb}}{1 + \text{tga} \cdot \text{tgb}}$$

Adição e Subtração de Arcos

Adição e Subtração de Arcos

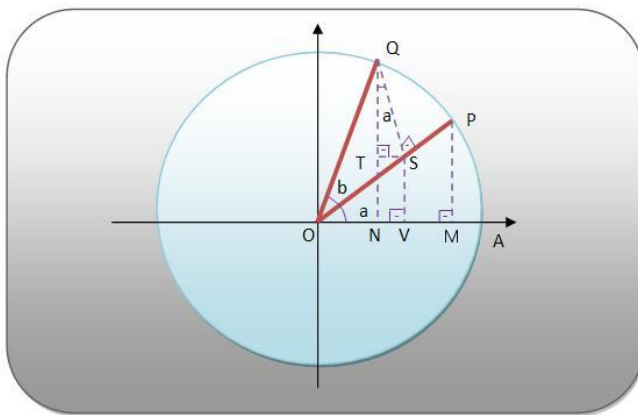
Considerando a e b como sendo as determinações de dois arcos, temos:

• Cosseno de $(a + b)$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

Demonstração

Considere um círculo trigonométrico com raio igual a 1, um arco \widehat{AP} com determinação a e outro arco \widehat{PQ} com determinação b , conseqüentemente o arco será \widehat{AQ} irá ter a determinação $(a + b)$.



Baseados nas construções geométricas mostradas na representação acima, concluímos que os triângulos OMP, OVS e QTS são retângulos e muito parecidos, ou seja:

I) $OM = \cos a$

$$PM = \sin a$$

$$OS = \cos b$$

$$QS = \sin b$$

$$ON = \cos(a + b)$$

II) $\triangle OVS \sim \triangle OMP$:

$$\frac{OV}{OM} = \frac{OS}{OP} \Rightarrow \frac{OV}{\cos a} = \frac{\cos b}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OV = \cos a \cdot \cos b$$

III) $\triangle QTS \sim \triangle OMP$:

$$\frac{TS}{PM} = \frac{QS}{OP} \Rightarrow \frac{TS}{\sin a} = \frac{\sin b}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TS = \sin a \cdot \sin b$$

Como:

$$ON = OV - NV = OV - TS, \text{ resulta em: } \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

• Cosseno de $(a - b)$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Demonstração

Como $\cos(-b) = \cos b$ $\sin(-b) = -\sin b$, temos:

$$\cos(a - b) = \cos[a + (-b)] =$$

$$= \cos a \cdot \cos(-b) - \sin a \cdot \sin(-b) =$$

$$= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

• Seno de $(a + b)$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

Demonstração

$$\text{Como } \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a, \text{ temos:}$$

$$\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] =$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b =$$

$$= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

• Seno de $(a - b)$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

Demonstração

Como $\cos(-b) = \cos b$ $\sin(-b) = -\sin b$ temos:

$$\sin(a - b) = \sin[a + (-b)] =$$

$$= \sin a \cdot \cos(-b) + \cos a \cdot \sin(-b) =$$

$$= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

• Tangente de $(a + b)$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}\end{aligned}$$

- Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a \cdot \cos b \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}\end{aligned}$$

Observação: a , b e $(a+b)$ precisam ser diferentes de $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

• **Tangente de $(a - b)$**

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Demonstração

Como $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a-b) &= \operatorname{tg}[a + (-b)] = \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}\end{aligned}$$

Observação: a , b e $(a-b)$ devem ser diferentes de $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas, também chamadas de **funções circulares**, estão relacionadas com as demais voltas no ciclo trigonométrico.

As **principais funções trigonométricas** são:

- Função Seno
- Função Cosseno
- Função Tangente

No **círculo trigonométrico** temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência.

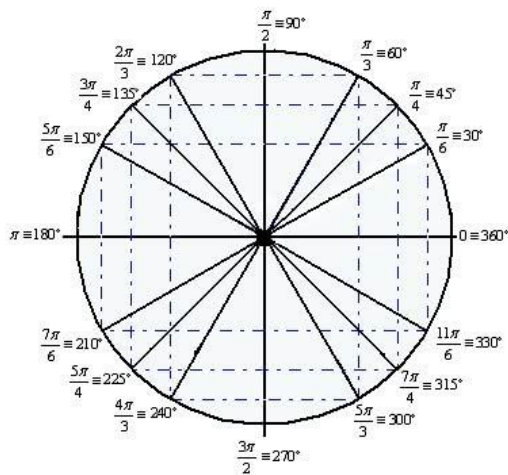


Figura do Círculo Trigonométrico dos ângulos expressos em graus e radianos

Funções Periódicas

As funções periódicas são funções que possuem um **comportamento periódico**. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo.

O **período** corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo p tal que

$$f(x) = f(x+p), \forall x \in A$$

O menor valor positivo de p é chamado de período de f .

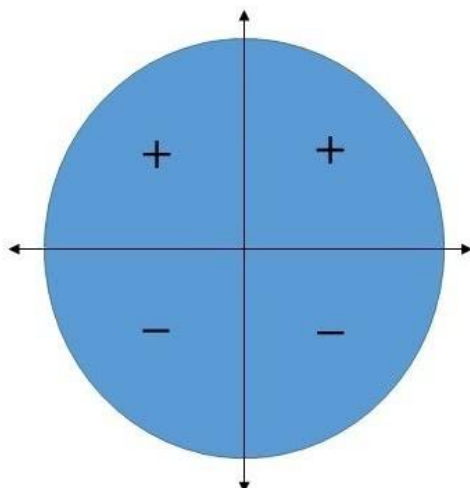
Note que as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas visto que apresentam certos fenômenos periódicos.

Função Seno

A função seno é uma função periódica e seu período é 2π . Ela é expressa por:

$$\text{função } f(x) = \sin x$$

No círculo trigonométrico, o **sinal da função seno** é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes. Já no terceiro e quartos quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é **crescente**. Já no segundo e terceiro quadrantes a função f é **decrecente**.

O **domínio** e o **contradomínio** da função seno são iguais a \mathbb{R} . Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$.

Já o conjunto da **imagem da função** seno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$: $-1 < \text{sen } x < 1$.

Em relação à simetria, a função seno é uma **função ímpar**: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.

O gráfico da função seno $f(x) = \text{sen } x$ é uma curva chamada de **senoide**:

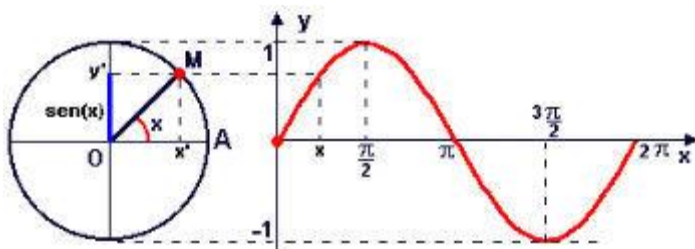


Gráfico da função seno

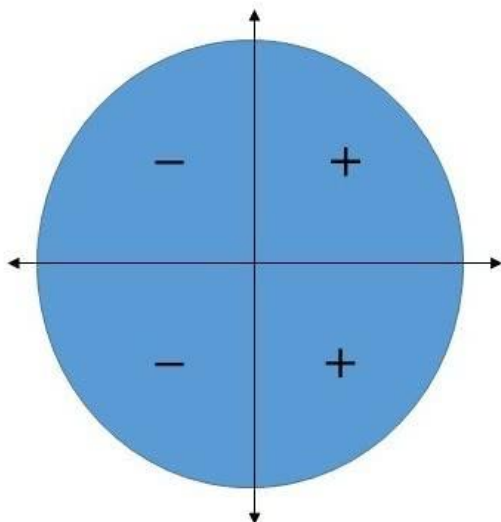
Leia também: Lei dos Senos.

Função Cosseno

A função cosseno é uma função periódica e seu período é 2π . Ela é expressa por:

função $f(x) = \cos x$

No círculo trigonométrico, o **sinal da função cosseno** é positivo quando x pertence ao primeiro e quarto quadrantes. Já no segundo e terceiro quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é **decrecente**. Já no terceiro e quartos quadrantes a função f é **crescente**.

O **domínio** e o **contradomínio** da função cosseno são iguais a \mathbb{R} . Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$.

Já o conjunto da **imagem da função** cosseno corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$: $-1 < \cos x < 1$.

Em relação à simetria, a função cosseno é uma **função par**: $\cos(-x) = \cos(x)$.

O gráfico da função cosseno $f(x) = \cos x$ é uma curva chamada de **cossenoide**:

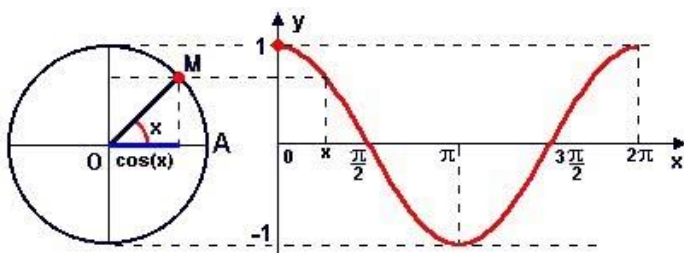


Gráfico da função cosseno

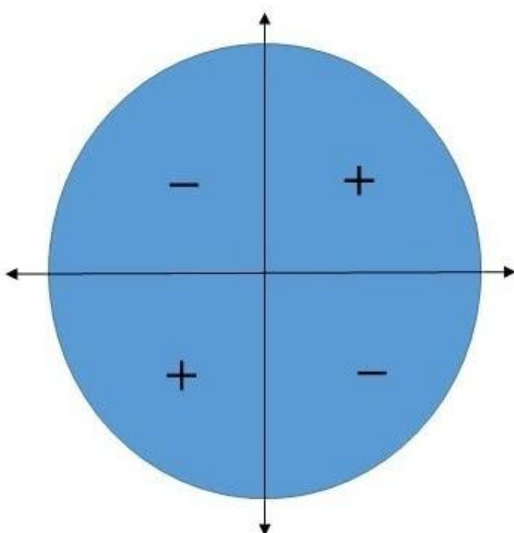
Leia também: Lei dos Cossenos.

Função Tangente

A função tangente é uma função periódica e seu período é π . Ela é expressa por:

função $f(x) = \operatorname{tg} x$

No círculo trigonométrico, o **sinal da função tangente** é positivo quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



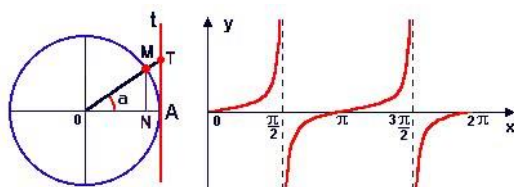
Além disso, a função f definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sempre **crescente** em todos os quadrantes do círculo trigonométrico.

O **domínio** da função tangente é: $\operatorname{Dom}(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi; K \in \mathbb{Z}\}$. Assim, não definimos $\operatorname{tg} x$, se $x = \pi/2 + k\pi$.

Já o conjunto da **imagem da função** tangente corresponde a \mathbb{R} , ou seja, o conjunto dos números reais.

Em relação à simetria, a função tangente é uma **função ímpar**: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

O gráfico da função tangente $f(x) = \operatorname{tg} x$ é uma curva chamada de **tangentoide**:



Transformação em produto

As transformações de expressões aparecem nas somas das funções trigonométricas de um ou mais arcos, podendo aparecer também como produto dessas funções destes arcos ou de outros arcos relacionados à fatoração entre as funções trigonométricas.

Observe:

- (I) $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- (II) $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- (III) $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- (IV) $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

Somando ou subtraindo as expressões:

- (I) + (II) $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$
- (I) - (II) $\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \cdot \sin a \cdot \sin b$
- (III) + (IV) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$
- (III) - (IV) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \sin b$

Estas expressões recebem o nome de **Fórmulas de Reversão** ou **Fórmulas de Werner**.

vejamos:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Quando usamos a **Fórmula de Reversão** obtemos as **Fórmulas de Transformação em Produto** ou **Fórmula de Prostaferese**. Vejamos:

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cdot \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \cdot \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p + \sin q &= 2 \cdot \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \cdot \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \end{aligned}$$

Equações e inequações trigonométricas

O que se entende por equação trigonométrica?

São equações que envolvem funções trigonométricas da incógnita.

Quando é que S é solução de uma equação trigonométrica?

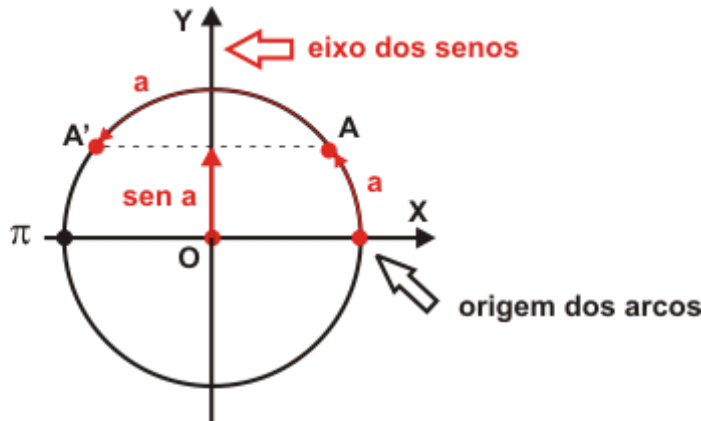
Dizemos que **S** é solução de uma equação trigonométrica

$$f(x) = g(x)$$

se **S** pertencer à intersecção $D(f)$ e $D(g)$ e $f(S) = g(S)$

Resolução de equações trigonométricas redutíveis a $\sin x = \sin a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos o **sen a** e as extremidades dos arcos **a** correspondentes.



Soluções da equação $\sin x = \sin a$

$$x = 2k\pi + a \cdots \text{ou} \cdots x = (2k+1)\pi - a$$

onde $k \in \mathbb{Z}$

Resolva as equações - exemplos:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \cdots \text{ou} \cdots x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$2) \sin(5x) = \sin(3x) \Rightarrow 5x = 2k\pi + 3x \cdots \text{ou} \cdots 5x = (2k+1)\pi - 3x$$

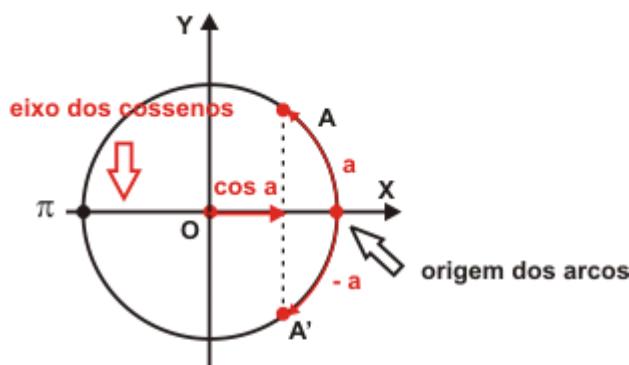
$$\sin(5x) = \sin(3x) \Rightarrow x = k\pi \cdots \text{ou} \cdots x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$3) 2\cos^2 x = 3\sin x \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \cdots \text{ou} \cdots \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2\cos^2 x = 3\sin x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \cdots \text{ou} \cdots x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

Resolução de equações trigonométricas redutíveis a $\cos x = \cos a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos o **cos a** e as extremidades dos arcos **a** correspondentes.



Soluções da equação $\cos x = \cos a$

$$x = 2k\pi \pm a$$

onde $k \in \mathbb{Z}$

Resolva as equações - exemplos:

$$1) \cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 5x = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 5x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{5}k\pi \pm \frac{\pi}{30}$$

$$2) \cos 2x = \sin 3x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\cos 2x = \sin 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow x = \frac{2}{5}k\pi + \frac{\pi}{10}$$

$$\cos 2x = \sin 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = -2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 - \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \sin^2 x = 1 - 2\sqrt{3} \cos x + 3 \cos^2 x$$

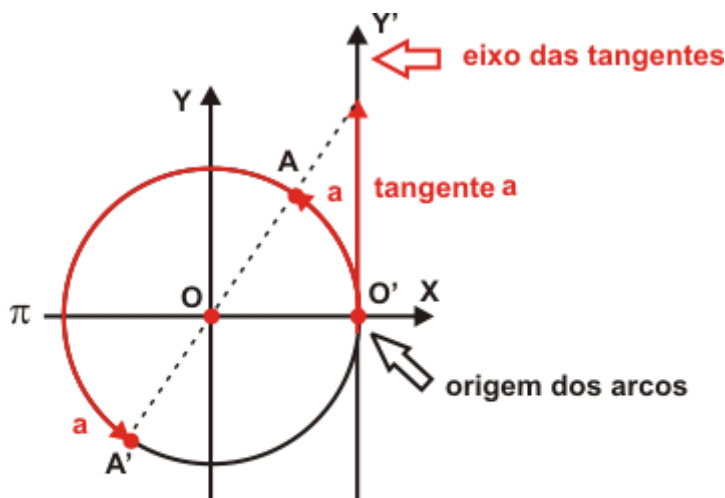
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \cos x + 3 \cos^2 x = 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

Resolução de equações trigonométricas redutíveis a $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos a $\operatorname{tg} a$ e as extremidades dos arcos a correspondentes.



Soluções da equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

$$x = k\pi + a$$

onde $k \in \mathbb{Z}$

Resolva as equações - exemplos:

$$1) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$2) 3(\operatorname{tg}^2 x - 1) = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \text{ ou } \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ou } \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

O que se entende por inequação trigonométrica ?

São inequações que envolvem funções trigonométricas da incógnita.

Quando é que S é solução de uma inequação trigonométrica ?

Dizemos que **S** é solução de uma inequação trigonométrica

$$f(x) < g(x)$$

se **S** pertencer à intersecção $D(f)$ e $D(g)$ e $f(S) < g(S)$

Resolução de inequações trigonométricas redutíveis a $\sin x > \sin a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos o valor de **sen a** sobre o **eixo dos senos**.



As extremidades dos arcos x estarão sobre o arco AA'

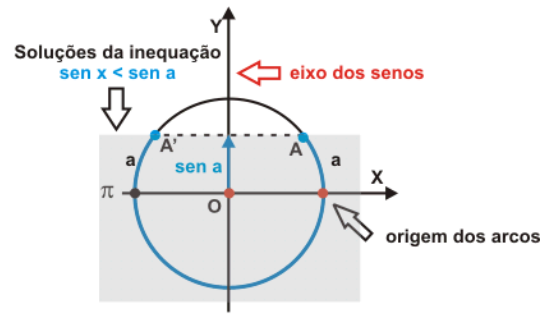
$$2k\pi + a < x < (2k+1)\pi - a \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

↑
arcos com extremidade A

↑
arcos com extremidade A'

Exemplo:
Resolver a inequação

$$\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x > \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$



As extremidades dos arcos x estarão sobre o arco AA'

$$(2k+1)\pi - a < x < 2k\pi + a \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

↑
arcos com extremidade A'

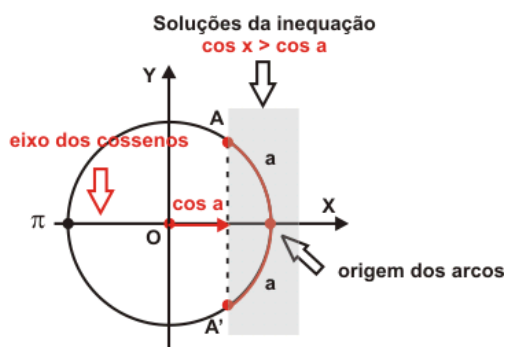
↑
arcos com extremidade A

Exemplo:
Resolver a inequação

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x < \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

Resolução de inequações trigonométricas redutíveis a $\cos x > \cos a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos o valor de **cos a** sobre o **eixo dos cossenos**.



As extremidades dos arcos x estarão sobre o arco AA'

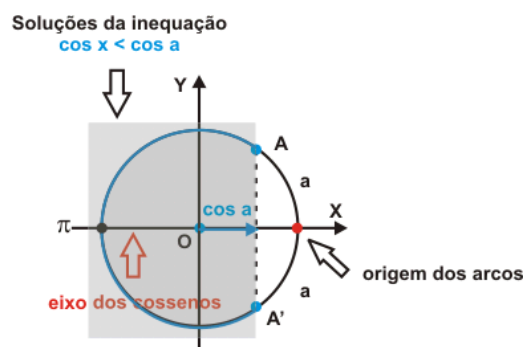
$$2k\pi - a < x < 2k\pi + a \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

↑
arcos com extremidade A'

↑
arcos com extremidade A

Exemplo:
Resolver a inequação

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x > \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$



As extremidades dos arcos x estarão sobre o arco AA'

$$2k\pi + a < x < 2k\pi - a \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

↑
arcos com extremidade A

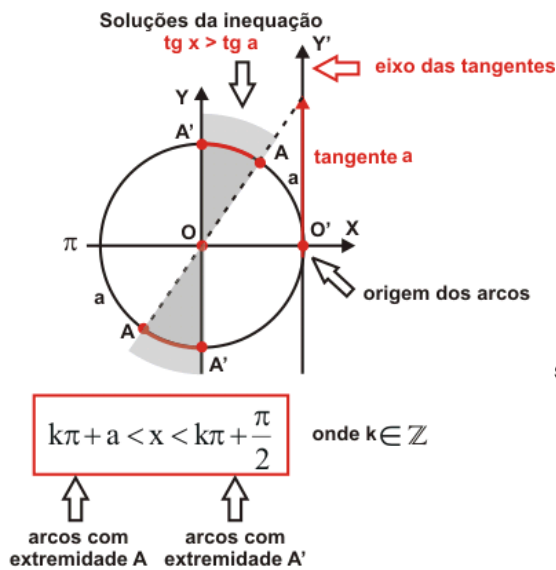
↑
arcos com extremidade A'

Exemplo:
Resolver a inequação

$$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x < \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

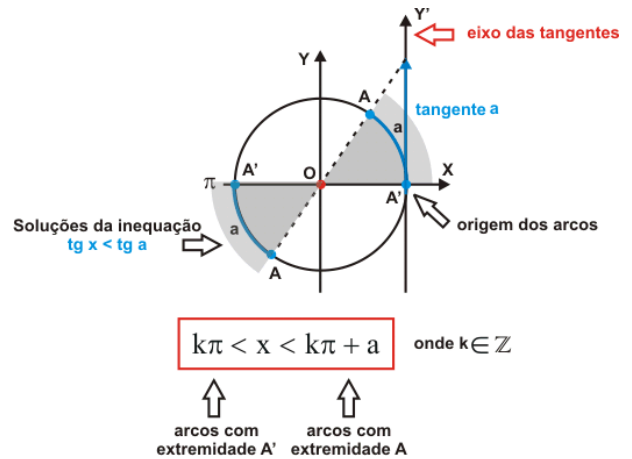
Resolução de inequações trigonométricas redutíveis a $\text{tg } x > \text{tg } a$

Considere o círculo trigonométrico da figura onde marcamos o valor de **tg a** sobre o **eixo das tangentes**.



Exemplo:
Resolver a inequação

$$\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$$



Exemplo:
Resolver a inequação

$$\operatorname{tg} x < 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$$