Polinômios

Os polinômios são expressões algébricas formadas por números (coeficientes) e letras (partes literais). As letras de um polinômio representam os valores desconhecidos da expressão.

Exemplos

a) $3ab + 5$
b) $x^3 + 4xy - 2x^2y^3$
c) $25x^2 - 9y^2$

Monômio, Binômino e Trinômio

Os polinômios são formados por termos. A única operação entre os elementos de um termo é a multiplicação.

Quando um polinômio possui apenas um termo, ele é chamado de **monômio**.

Exemplos

a) $3x$
b) $5abc$
c) $x^2y^3z^4$

Os chamados **binômios** são polinômios que possuem somente dois monômios (dois termos), separados por uma operação de soma ou subtração.

Exemplos

a) $a^2 - b^2$
b) $3x + y$
c) $5ab + 3cd^2$

Já os **trinômios** são polinômios que possuem três monômios (três termos), separados por operações de soma ou subtração.

Exemplos

a) $x^2 + 3x + 7$
b) $3ab - 4xy - 10y$
c) $m^3n + m^2 + n^4$

Grau dos Polinômios

O grau de um polinômio é dado pelos expoentes da parte literal.

Para encontrar o grau de um polinômio devemos somar os expoentes das letras que compõem cada termo. A maior soma será o grau do polinômio.

Exemplos

a) $2x^3 + y$

O expoente do primeiro termo é 3 e do segundo termo é 1. Como o maior é 3, o grau do polinômio é 3.

b) $4\ x^2y + 8x^3y^3 - xy^4$

Vamos somar os expoentes de cada termo:

$4x^2y$ => 2 + 1 = 3
$8x^3y^3$ => 3 + 3 = 6
xy^4 => 1 + 4 = 5

Como a maior soma é 6, o grau do polinômio é 6

Obs: o polinômio nulo é aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Quando isso ocorre, o grau do polinômio não é definido.

Operações com Polinômios

Confira abaixo exemplos das operações entre polinômios:

Adição de Polinômios

Fazemos essa operação somando os coeficientes dos termos semelhantes (mesma parte literal).

$(- 7x^3 + 5 x^2y - xy + 4y) + (- 2x^2y + 8xy - 7y)$
$- 7x^3 + 5x^2y - 2x^2y - xy + 8xy + 4y - 7y$
$- 7x^3 + 3x^2y + 7xy - 3y$

Subtração de Polinômios

O sinal de menos na frente dos parênteses inverte os sinais de dentro dos parênteses. Após eliminar os parênteses, devemos juntar os termos semelhantes.

$(4x^2 - 5ky + 6k) - (3x - 8k)$
$4x^2 - 5xk + 6k - 3xk + 8k$
$4x^2 - 8xk + 14k$

Multiplicação de Polinômios

Na multiplicação devemos multiplicar termo a termo. Na multiplicação de letras iguais, repete-se e soma-se os expoentes.

$(3x^2 - 5x + 8) . (-2x + 1)$
$-6x^3 + 3x^2 + 10x^2 - 5x - 16x + 8$
$-6x^3 + 13x^2 - 21x +8$

Divisão de Polinômios

$$3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 : x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^3} - 14x^2 + 23x - 10 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^3} + 12x^2 - 15x & 3x - 2 \\ \cline{1-1} \quad -\cancel{2x^2} + \cancel{8x} - \cancel{10} & \\ \quad +\cancel{2x^2} - \cancel{8x} + \cancel{10} & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Obs: Na divisão de polinômios utilizamos o método chave. Primeiramente realizamos a divisão entre os coeficientes numéricos e depois a divisão de potências de mesma base. Para isso, conserva-se a base e subtraia os expoentes.

Fatoração de Polinômios

Para realizar a fatoração de polinômios temos os seguintes casos:

Fator Comum em Evidência

$ax + bx = x (a + b)$

Exemplo

$4x + 20 = 4 (x + 5)$

Agrupamento

$ax + bx + ay + by = x . (a + b) + y . (a + b) = (x + y) . (a + b)$

Exemplo

$8ax + bx + 8ay + by = x (8a + b) + y (8a + b) = (8a + b) . (x + y)$

Trinômio Quadrado Perfeito (Adição)

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Exemplo

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Trinômio Quadrado Perfeito (Diferença)

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemplo

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Diferença de Dois Quadrados

$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$

Exemplo

$x^2 - 25 = (x + 5) . (x - 5)$

Cubo Perfeito (Adição)

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

Exemplo

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 . x^2 . 2 + 3 . x . 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$

Cubo Perfeito (Diferença)

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

Exemplo

$y^3 - 9y^2 + 27y - 27 = y^3 - 3 . y^2 . 3 + 3 . y . 3^2 - 3^3 = (y - 3)^3$

Um dos tipos mais simples de funções que se constrói mediante a aplicação repetida das operações elementares, **adição** e **multiplicação**, são as funções racionais ou polinômios.

Aplicando-se estas operações a uma variável independente **x** e a um conjunto de números reais ou complexos $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ obtém-se os polinômios:

$$P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$$

Onde **n** é um **número natural** e **x** também chamado de **variável independente**, pode assumir valores **reais** ou **complexos**.

Portanto:

$n \in N$

$a_i \in C$

$x \in C$

$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ são chamados Coeficientes.

$a_n.x^n$, $a_{n-1}.x^{n-1}$, …… , $a_1.x$, a_0 são chamados Termos.

São exemplos de polinômios as funções constante, do 1º grau e do 2º grau, assim como outras:

Exemplos:

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, onde:

a_3 **= 1**

a_2 **= - 6**

a_1 **= 11**

a_0 **= - 6**

b) $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 1$, onde:

a_4 **= 7**

a_3 **= 0**

a_2 **= - 3**

a_1 **= 0**

a_0 **= 1**

VALOR NUMÉRICO

Seja o polinômio P(x) genérico dado por $P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$, fazendo-se **x = c** , obtemos o número complexo $P(c) = a_nc^n + \cdots\cdots\cdots + a_1c + a_0$, que é denominado valor numérico de P(x) para x = c .

Chama-se raiz de um polinômio ao valor da variável x para o qual P(x) = 0 (P(x) se anula) .

Exemplo:

Seja o polinômio: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

P(0) = - 6

P(- 1) = - 24

P(1) = 0

P(2) = 0

P(3) = 0

Logo: 1, 2 e 3 **são raízes de** P(x).

Dado o polinômio: $P(x) = a_n x^n + \cdots\cdots + a_i x^i + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ que possui pelo menos um coeficiente $a_j \neq 0$, diz-se que o polinômio P(x) possui grau i se, e somente se, $a_i \neq 0$ e todos os coeficientes a_k, com $K > i$ (coeficientes maiores que i) são nulos. Quando todos os coeficientes de um polinômio P(x) são nulos, não define-se o grau de P(x) .

Exemplos:

a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

Grau de P = 3

b) $P(x) = x^{10} + 3x^7 + 5$

Grau de P = 10

c) P(x) = 0

Não $\exists$ **grau de** P

No exemplo do item c, temos P(x) = 0 , neste caso, dizemos que o polinômio é identicamente nulo e define-se P(x) identicamente nulo se e somente se, todos os seus coeficientes são nulos.

P(x) $\equiv$ **0** $\Leftrightarrow$ a_i **= 0** $\forall\, i \in \mathbb{N}$

P(x) $\equiv$ **0 lê-se** P(x) **idêntico a zero** .

P(x) $\equiv$ **0** $\Leftrightarrow$ P(x) = 0 $\forall\, x \in \mathbb{N}$

Identidade entre polinômios

Sejam os polinômios M(x) e N(x) conforme abaixo:

M(x) = $a_n . x^n + \cdots\cdots\cdots + a_1 x + a_0$

N(x) = $b_n . x^n + \cdots\cdots\cdots + b_1 x + b_0$

Podemos afirmar que M e N são idênticos e indicaremos por M(x) $\equiv$ N(x) se, e somente se, a_i **=** b_i para qualquer i $\in$ N.

$M(x) \equiv N(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \;\forall\, x \in \mathbb{N}\;\; i \in N$

Temos ainda que:

$M(x) \equiv N(x) \Leftrightarrow M(x) = N(x) \;\forall\, x \in \mathbb{N}\;\; x \in C$

Operações

Sejam M(x) e N(x) os polinômios:

M(x) = $a_n.x^n + \cdots\cdots\cdots + a_1x + a_0$

N(x) = $b_n.x^n + \cdots\cdots\cdots + b_1x + b_0$

Define-se a soma de dois polinômios P(x) = M(x) + N(x) como:

$$P(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots\cdots\cdots + (a_1 + a_n)x + a_0 + b_0$$

ou

P(x) = $\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i).x^i$

Exemplo:

M(x) = $x^6 - 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 6x + 8$

N(x) = $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

P(x) = M(x) + N(x)

P(x) = $x^7 + x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 11x + 14$

Sejam M(x) e N(x) os mesmos indicados anteriormente, define-se o produto de dois polinômios:

P(x) = M(x) . N(x) como:

P(x) = $a_0.b_0 + (a_0.b_1 + a_1.b_0).x + (a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0).x^2 + \cdots\cdots$

O qual é obtido multiplicando-se cada termo de M(x) , por todos os termos de N(x) e somando-se os resultados obtidos.

Exemplo:

M(x) = x - 1 grau 1

$N(x) = x^2 + 2x - 1$ **grau** 2

P(x) = M(x) . N(x)

$$P(x) = -x^2 - 2x + 1 + x^3 + 2x^2 - x$$

$P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ **grau** 3

Note que no produto de dois polinômios, o grau do produto é igual a soma dos graus dos polinômios multiplicandos, logo se M(x) tem grau m e N(x) grau n , então P(x) = M(x) . N(x) terá grau m + n.

Divisibilidade de polinômios

Um polinômio M(x) de grau m é divisível por outro polinômio N(x) de grau n , com $m \geq n$, se existir um polinômio Q(x) tal que **M(x)** $\equiv$ **N(x) . Q(x)** .

Exemplo:

Sejam: $M(x) = x^3 + 1$

N(x) = x + 1 **grau** 1

M(x) é divisível por N(x) pois grau M(x) = 3 , grau de N(x) = 1 e existe:

$Q(x) = x^2 - x + 1$ tal que: $x^3 + 1 \equiv (x+1).(x^2 - x + 1)$

Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de polinômios

Define-se **m.d.c. de polinômios** como o produto dos fatores comuns aos mesmos, tomando cada fator uma única vez com o **menor** expoente com que aparece na decomposição dos polinômios.Define-se **m.m.c. de polinômios** como o produto dos fatores comuns e não comuns aos mesmos, tomando cada fator uma única vez, com o **maior** expoente que aparece na decomposição dos polinômios.

Divisão de polinômios

Dados dois polinômios D(x) e d(x) $\neq$ 0 , dividir D(x) por d(x) , significa obter outros dois polinômios Q(x) e R(x) tais que: D(x) $\equiv$ d(x) . Q(x) + R(x) com: **grau** de R(x) **< grau** de d(x) **ou** R(x) $\equiv$ 0 onde:

D(x) é o dividendo.

d(x) é o divisor.

Q(x) é o quociente.

R(x) é o resto.

O grau do quociente Q(x) é dado por:

grau D(x) = **grau** (d(x) . Q(x) + R(x))

grau D(x) = **grau** (d(x) . Q(x))

pois o **grau de** R(x) < **grau de** d(x) logo:

grau D(x) = **grau** d(x) + **grau** Q(x)

grau Q(x) = **grau** D(x) - **grau** d(x)

Ou seja, o grau do quociente é igual a diferença entre os graus do dividendo e do divisor. Podemos obter o quociente e o resto da divisão de dois polinômios pelo método da chave, também conhecido como divisão EUCLIDEANA ou pelo método dos coeficientes a determinar, também conhecido como método de DESCARTES. Poderíamos citar outros métodos, porém, para este estudo bastam os que seguem.

Sejam D(x) e d(x) dois polinômios a serem divididos, com D(x) sendo o dividendo e d(x) o divisor.

Apresentamos a seguir o algorítmo de EUCLIDES:

1) Ordenar os polinômios D(x) e d(x), segundo potências decrescentes de x.

2) Dividir o primeiro termo de D(x) pelo primeiro termo de d(x), para obter o primeiro termo de Q(x).

Multiplicar o primeiro termo de Q(x) obtido por d(x) e subtrair o resultado desta operação de D(x).

3) Repetir o segundo passo até que o grau do resto seja menor que o grau de d(x).

Exemplo:

Efetuar pelo método Euclideano a divisão de:

$$x^4 - x^3 + 2x - 1 \quad \text{por} \quad x^2 + x + 1.$$

$$\begin{array}{r|l}
+x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^3 - x^2 + 0x + 0 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 2x - 1 & \\
+2x^3 + 2x^2 + 2x + 0 & \\ \cline{1-1}
x^2 + 4x - 1 & \\
- x^2 - x - 1 & \\ \cline{1-1}
3x - 2 &
\end{array}$$

Portanto:

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

R(x) = 3x - 2

Método Descartes

Este método consiste em considerar um polinômio genérico:

Q(x) = $q_k.x^k + q_{k-1}.x^{k-1} + \ldots\ldots + q_1.x + q_0$ onde q_i é indeterminado e k é conhecido, pois sabemos os graus de D(x) e d(x).

Logo: k = **grau** D(x) - **grau** d(x).

Adotaremos um resto genérico.

R(x) = $r_h.x^h + r_{h-1}.x^{h-1} + \cdots\cdots + r_1.x + r_0$

Onde r_j é indeterminadado e h é conhecido pois grau de R < grau de d .

Exemplo:

Determinar pelo método de Descartes o quociente e o resto da divisão de:

$x^4 - x^3 = 2x^2 - x + 3$ por $x^3 - 3x^2 + 2$.

$$Q(x) = q_1.x + q_0$$

$$R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0$$

pois **grau** Q(x) = **grau** D(x) **- grau** d(x)

grau Q(x) = 4 - 3 = 1 e **grau** R(x) < **grau** d(x), **grau** R(x) < 3, **grau** R(x) = 2.

Assim temos:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 3 \equiv (x^3 - 3x^2 + 2).(q_1 + q_0) + R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0$$

$$\equiv q_1x^4 - 3q_1x^3 + 2q_1x + q_0x^3 - 3q_0x^2 + 2q_0 + R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0$$

$$\equiv q_1.x^4 + (q_0 - 3q_1).x^3 + (r_2 - 3q_0).x^2 + (r_1 + 2q_1).x + r_0 + 2q_0$$

Logo:

q_1 **= 1**

$q_0 - 3q_1 = -1$

$r_2 - 3q_0 = -2$

$r_1 + 2q_1 = -1$

$r_0 + 2q_0 = 3$

então:

q_0 **= 2**

r_1 **= - 3**

r_0 **= - 1**

r_2 **= 4**

Concluindo temos:

Q(x) = x + 2

R(x) = $4x^2 - 3x - 1$

Teorema de Bézout ou Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x -**a**) é igual a P(**a**) .

Demonstração: O quociente da divisão de P(x) por (x -**a**) é um polinômio Q(x) de grau inferior de uma unidade ao do polinômio P(x) e o resto R(x) é um número constante R , assim podemos escrever:

P(x) = (x -**a**) . Q(x) + R

Para x = **a** temos:

P(**a**) = (**a** -**a**) . Q(**a**) + R

Logo: P(**a**) = R

c.q.d.

Corolário

Se é uma raiz do polinômio **P(x)** , isto é , se **P(a) = 0** , **P(x)** é divisível por **(x -a)** e pode ser posto sob a forma de produto: **P(x)** = **(x -a) . Q(x)**

Exemplo:

O polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ anula-se para x = 1 , ou seja , P(1) = 0 , logo , o polinômio **P(x)** é divisível por x - 1 .

Assim:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1).(x^2 - 5x + 6)$$

Algorítmo de BRIOT-RUFFINI

Sejam:

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1x + a_0$ e

$Q(x) = b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + b_2x + b_1$ o quociente da divisão de P(x) por (x - **a**) , cujo resto denominaremos b_0 .

Aplicando a relação fundamental da divisão, temos:

$$P(x) = \left(b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \cdots\cdots b_2.x + b_1\right)(x - \alpha) + b_0$$

Pelo princípio da identidade de polinômios, efetuando-se o produto e igualando-se membro a membro os coeficientes com a mesma potência, obtemos o algorítmo de BRIOT-RUFFINI.

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + b_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-1}$$

$$\vdots$$

⋮

$$b_1 = a_1 + b_2$$

$$b_0 = a_0 + b_1 \text{ (resto)}$$

O esquema abaixo é mais prático pois dispõe os coeficientes de forma a economizar tempo com operações:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots\cdots & a_1 & a_0 \\ \hline
\alpha & b_n & b_{n-1} & \cdots\cdots & b_1 & b_0 = \text{Resto}
\end{array}$$

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = b_n . \alpha + a_{n-1}$$

Para os passos seguintes é só repetir o passo anterior.

Este algorítmo é bastante prático e versátil, podemos aplicá-lo em situações particulares, porém bastante usuais:

Na divisão de P(x) por ax + b

P(x) = (ax + b) . Q(x) + R(x)

P(x) = (x + b/a) . a . Q(x) + R(x)

Neste caso considere **a** como sendo - b/a e $Q_1(x) = a . Q(x)$ ou seja, após obter o resultado $Q_1(x)$, divida Q(x) por a .

Exemplo:

Dividir $3x^3 - 2x + 4$ por $(2x - 1)$

P(x) = (2x - 1) . Q(x) + R

P(x) = (x - $1/2$) . 2 . Q(x) + R

2.Q(x) = $Q_1(x) \Rightarrow$ Q(x) = $Q_1(x)/2$

Logo:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & 0 & -2 & & 4 \\ \hline
\frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & & \frac{27}{8}
\end{array}$$

então:

$$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} \text{ e } R(x) = \frac{27}{8}$$

2) Divisão de $P(x)$ por: $(x-\alpha)^2$

Se P(x) é divisível por (x -**a**) e o quociente Q(x) da divisão de P(x) por (x -**a**) também é divisível por

(x - **a**), então, $P(x)$ é divisível por : $(x-\alpha)^2$.

P(x) = (x -**a**) . Q(x)

Q(x) = (x -**a**) . $Q_1(x)$

P(x) = (x -**a**) . (x -**a**) . $Q_1(x)$

$$P(x) = (x-\alpha)^2 . Q_1(x)$$

Neste caso, aplica-se o algorítmo de BRIOT-RUFFINI duas vezes.

Exemplo:

Mostre que $x^4 - x^2 - 2x + 2$ é divisível por $(x-1)^2$.

	1	0	−1	−2	2
1	1	1	0	−2	0
1	1	2	2	0	

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \equiv (x-1).(x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

Teorema fundamental da álgebra

Todo polinômio de **grau** n , com $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz real ou complexa. Este Teorema é demonstrado em álgebra superior, vamos aqui admiti-lo sem demonstração.Com base neste Teorema anterior, demonstra-se o seguinte

Teorema:

Todo polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, decompõe-se em fatores lineares da forma **(x -a)** e um fator igual ao coeficiente de x^n.

Demonstração:

Seja P(x) um polinômio de **grau** n dado por: $P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$.

Valendo-nos do Teorema Fundamental da Álgebra, este polinômio tem pelo menos uma raiz que denominaremos α_1 . Valendo-nos também do teorema de Bézout, podemos escrever:

$$P(x) = (x - \alpha_1).P(x)$$

Onde $P_1(x)$ tem grau **n - 1** e também tem uma raiz que denominaremos α_2.

$$P_1(x) = (x - \alpha_2).P_2(x)$$

Procedendo-se assim **n** vezes, teremos; $P_{n-1}(x) = (x - \alpha_n).P_n(x)$, onde $P_n(x)$ é um polinômio de **grau zero** , ou seja , uma constante. Essa constante será igual a a_n pois foi o único termo que restou de P(x). Desta forma podemos expressar P(x) da seguinte forma:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)........(x - \alpha_n)$$

Sendo $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ as raízes de P(x).

Observa-se que nenhum outro valor diferente de $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ pode ser raíz do polinômio, visto que nenhum fator do segundo membro se anula para valores diferentes destes.

Logo, todo polinômio de **grau** n **não** pode ter mais do que n raízes diferentes.

Se alguns fatores da divisão de um polinômio de **grau** n se repetem, então podemos agrupá-los e decompor o polinômio, da seguinte forma:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1)^{k_1}.(x - \alpha_2)^{k_2}.........(x - \alpha_m)^{k_m}$$

Onde: $K_1 + k_2 + \cdots\cdots\cdots k_m = n$

E neste caso dizemos que α_1 é uma raíz de multiplicidade K_1

Exemplo:

O polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ decompõe - se em fatores da seguinte forma:

P(x) = (x - 1) . (x - 1) . (x - 2)

$$P(x) = (x - 1)^2.(x - 2)$$

Logo $\alpha_1 = 1$ é uma raíz dupla e $\alpha_2 = 2$ é uma raíz simples.

Se o polinômio tem uma raíz múltipla de ordem k , então ele tem k raízes iguais.Portanto todo polinômio de **grau** n, $n \geq 1$, tem exatamente n raízes reais ou complexas , múltiplas ou não.

Nota:

Até o momento temos tratado do polinômio como função, porém o que foi dito até aqui sobre raízes, vale também para a equação algébrica:

$$a_n.x^n + \cdots\cdots\cdots + a_1x + a_0 = 0$$

As raízes de P(x) podem ser reais ou complexas e vale o seguinte Teorema:

Teorema:

Se **a + bi** é uma raíz complexa de um polinômio **P(x)** de coeficientes reais, este polinômio tem também como raíz o número conjugado **a - bi.**

Demonstração:

Seja Z = a + bi **raíz de P(x)** então: **P(Z) = 0**

P(Z) = $a_n.Z^n + a_{n-1}.Z^{n-1} + \cdots\cdots\cdots a_1.Z + a_0$

Lembrando as propriedades dos números complexos:

$$\overline{Z^n} = \overline{Z}^n$$

$$\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots\ldots + \overline{Z}_n = \overline{Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots + Z_n}$$

Ou seja a soma dos conjugados é igual ao conjugado da soma.

Assim:

$$P(\overline{Z}) = a_n.\overline{Z}^n + a_{n-1}.\overline{Z}^{n-1} + \cdots\cdots\cdots a_1.\overline{Z} + a_0$$

Utilizando-se as propriedades acima e sabendo-se que o conjugado de um número real é igual a ele mesmo, então:

$$P(\overline{Z}) = \overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 Z + a_0}$$

$$P(\overline{Z}) = \overline{P(Z)} \text{ mas } P(Z) = 0$$

Logo:

$P(\overline{Z}) = \overline{0} = 0$ **c.q.d.**

Se o número **a + bi** é uma raíz múltipla de ordem **k** de **P(x)** , então o número conjugado **a - bi** é também uma raíz múltipla de ordem **k** . Todo polinômio de coeficientes reais e grau ímpar, admite pelo menos uma raíz real ou um número ímpar de raízes reais. Uma adaptação deste Teorema permite afirmar que se o número irracional $a + \sqrt{b}$ é raíz de P(x) , então $a - \sqrt{b}$ também será raíz, desde que o polinômio tenha coeficientes racionais e a e b sejam pertencentes a Q .

Relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio

Os coeficientes de um polinômio possuem informações sobre as raízes deste à medida que os relacionam as raízes.

Seja: $P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$ dividindo-se P(x) por a_n , suas raízes não são alteradas e temos:

$$\frac{P(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}.x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}.x^{n-2} + \cdots\cdots\cdots \frac{a_1}{a_n}.x + \frac{a_0}{a_n}$$

1) Define-se a soma das raízes de P(x) , $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ como sendo igual a:

$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

2) Define-se a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas,

$$\alpha_1.\alpha_2+\alpha_1.\alpha_3+\cdots\cdots\alpha_1.\alpha_n+\alpha_2.\alpha_3+\cdots\cdots\alpha_2.\alpha_n+\cdots\cdots\alpha_{n-1}.\alpha_n$$

como sendo igual a $+\frac{a_{n-2}}{a_n}$.

À seguir teremos os produtos das raízes tomadas três a três, quatro a quatro, e assim por diante.

Produto 3 **a** 3 **igual a:** $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

Produto 4 **a** 4 **igual a :** $+\frac{a_{n-4}}{a_n}$

Finalmente o produto das **n** raízes do polinômio, $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\cdots\cdots.\alpha_n$ é igual a $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

Essas relações, associadas a outras ferramentas permitem que avaliemos possíveis raízes de P(x) .

Exemplos:

1) Sejam a , b e a as raízes de um polinômio P(x) de 3º grau, cujo coeficiente de x^3 é 1 .
Calcular P(1) dado que a + b + c = 7 , a . b + a . c + b . c = 14 e a . b . c = 8 .

$$P(x) \text{ é da forma: } x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Onde:

$$-a_2=a+b+c=7$$

$$a_1=a.b+a.c+b.c=14$$

$$-a_0=a.b.c=8$$

$$P(x)=x^3-7x^2+14x-8$$

Portanto: P(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0

x = 1 **é raíz de** P(x) .

2) Mostrar que se $P(x)=x^3+px^2+qx+r$ possuir duas raizes opostas, então, $p.q=r$

Sejam α_1,α_2 e α_3 as raízes de P(x) , se P(x) tem duas raízes opostas, então: $\alpha_1=-\alpha_2$.

Sabemos que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p$$

$$\alpha_1.\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \alpha_2.\alpha_3 = q$$

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -r$$

temos:

$$\alpha_1 - \alpha_1 + \alpha_3 = -p$$
$$+\alpha_3 = -p$$
$$\alpha_1.(-\alpha_1) + \alpha_1.\alpha_3 + (-\alpha_1).\alpha_3 = q$$
$$-(\alpha_1)^2 + \alpha_1.\alpha_3 - \alpha_1.\alpha_3 = q$$
$$-(\alpha_1)^2 = q$$

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -r$$
$$\alpha_1.(-\alpha_1).\alpha_3 = -r$$
$$-(\alpha_1)^2.\alpha_3 = -r$$
$$q.(-p) = -r$$
$$p.q = r$$

c.q.d.

DICA: Você deve ter notado que no item anterior o sinal dos coeficientes do polinômio se alterna entre + e - , para fornecer as relações entre as raízes e os coeficientes. Uma regra prática é lembrar da relação:

$$\frac{P(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}.x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}.x^{n-2} + \frac{a_{n-3}}{a_n}.x^{n-3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \quad - \qquad + \qquad - \qquad + \cdots\cdots\cdots$$

e alternar sinais + e - , partindo da maior potência com sinal + .

Um método que permite pesquisar possíveis raízes racionais, consiste em investigar se p/q com p e q inteiros e primos entre si, é raíz de P(x) **com coeficientes inteiros** sendo $P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$ com a_n e $a_0 \neq 0$.

Se p/q é raíz de P(x) então pelo Corolário do Teorema de Bézout temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por q^n temos:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}.q + \ldots + a_1 p.q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Assim podemos escrever as duas expressões que seguem:

1) $a_0 p^n = -q.\left[a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}\right]$

2) $a_0 q^n = -p.\left[a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}\right]$

Sabendo-se que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são inteiros, assim como p e q , temos que:

$\left[a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_0.q^{n-1}\right] \in \mathbb{Z}$ e $\left[a_n.p^{n-1} + \ldots + a_1.q^{n-1}\right] \in \mathbb{Z}$

Logo:

$\dfrac{a_n.p^n}{q} \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a_0.q^n}{p} \in \mathbb{Z}$

Mas p^n e q, q^n e p são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Note que se a_n **= 1** as possíveis raízes racionais de P(x) são inteiras.

Note também que o método anterior não garante a existência de raízes racionais para P(x) com coeficientes inteiros, somente sugere um critério de pesquisa das mesmas.

Exemplo:

Encontre as raízes de $P(x) = 3x^3 - 20x^2 + 23x + 10.$

Vamos aplicar o método anterior.

p é divisor de a_0

q é divisor de a_3

Divisores de a_0: $\pm 10, \pm 5, \pm 2, \pm 1$

Divisores de a_3: $\pm 3, \pm 1$

$$\frac{p}{q} = \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm 10, \pm 5, \pm 2 \text{ e } \pm 1.$$

À partir deste ponto temos que testar as possíveis raízes, vamos adotar **a** = 2 como possível raíz.

	3	−20	23	10
2	3	−14	−5	0

Logo: 2 é Raiz e $Q(x) = 3x^2 - 14x - 5$

Q(x) possui raízes iguais a $\dfrac{14 \pm 16}{6}$ ou seja: $+5$ e $-1/3$

Então: $S = \{-1/3\,,\, 2\,,\, 5\}$

Localização de Raízes Reais em um Intervalo.

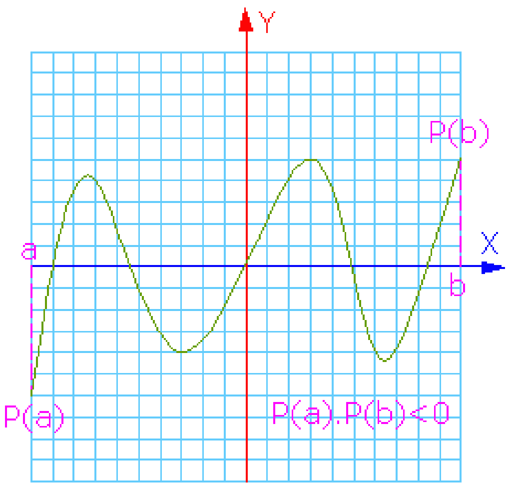
Vamos analisar o comportamento de um polinômio P(x) em um intervalo real $]a,b[$.

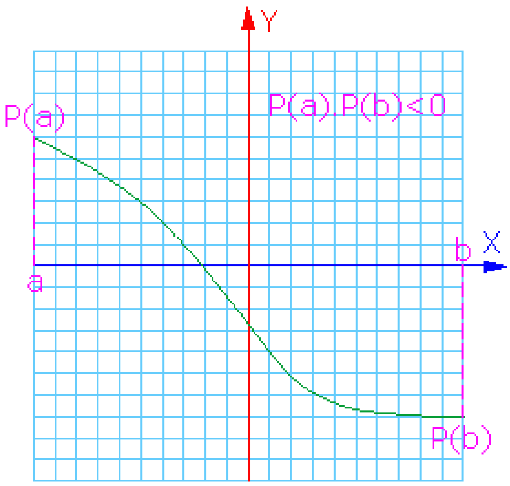
1) Se P(a) e P(b) tem sinais contrários, então P(x) possui um número ímpar de raízes reais no intervalo

$]a,b[$.

A informação acima significa que P(x) **"cruzou"** o eixo x uma vez ou um número ímpar de vezes.

Exemplos:

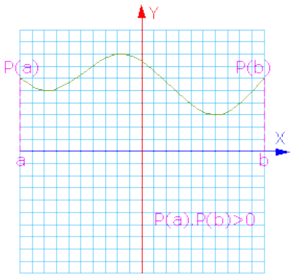


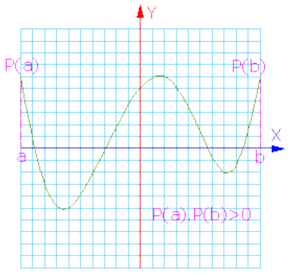


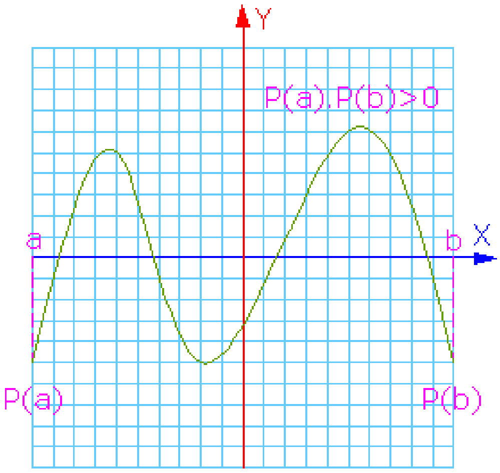
2) Se P(a) e P(b) têm o mesmo sinal, então P(x) possui um número par de raízes reais ou não existe nenhuma

raíz real no intervalo $]a,b[$.

Exemplos:







Exemplo:

Quantas raízes reais, o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$ pode apresentar no intervalo $]-1,1[$?

P(-1) = - 10

P(1) = 6

P(-1) . P(1) = - 60 < 0

Logo: existe um número ímpar de raízes entre $]-1,1[$, como o grau de P(x) é igual a 3 , o número máximo de raízes de P(x) também é igual a 3 , portanto podemos ter 1 ou 3raízes no intervalo $]-1,1[$.

Teorema fundamental da álgebra (T.F.A)

3. Teorema fundamental da álgebra (T.F.A.).

Qualquer equação algébrica, de grau restritamente positivo, aceita no campo complexo pelo menos uma raiz.

Em relação a este teorema vamos considerar apenas as observações e exemplos abaixo:

a) O teorema fundamental da álgebra apenas garante a existência de pelo menos uma raiz, ele não demonstra qual o número de raízes de uma equação algébrica nem como resolver tais raízes.

b) O T.F.A. somente tem valor para C, já para R este teorema não é válido. Isso quer dizer que em uma equação algébrica a condição de existência de raiz R é incerta, já em R é certeza que sempre terá pelo menos uma raiz.

c) Exemplo: A equação x2 + 1 = 0 não possue raiz real, porém aceita no campo complexo os números i e – i como raízes.

Teorema da decomposição de um polinômio

O teorema fundamental da álgebra para equações polinomiais garante que **“todo polinômio degraun ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa”**. A demonstração desse teorema foi feita pelo matemático Friedrich Gauss, em 1799. A partir dele, podemos demonstrar o **teorema da decomposição de um polinômio**, o qual garante que qualquer polinômio pode ser decomposto em fatores de primeiro grau. Tome o seguinte polinômio **p(x)** de grau $n \geq 1$ **e** $a_n \neq 0$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$$

Através do teorema fundamental da álgebra, podemos afirmar que esse polinômio possui pelo menos uma raiz complexa u_1, tal que $p(u_1) = 0$. O teorema de D'Alembert para a divisão de polinômios afirma que, se $p(u_1) = 0$, então **p(x)** é divisível por $(x - u_1)$, resultando em um quociente $q_1(x)$, que é um polinômio de grau $(n - 1)$, o que nos leva a afirmar:

$$p(x) = (x - u_1) . q_1(x)$$

A partir dessa equação, é preciso destacar duas possibilidades:

Se u = 1 e $q_1(x)$ é um polinômio de grau $(n - 1)$, então $q_1(x)$ possui grau **0**. Como o coeficiente dominante de **p(x)** é a_n, $q_1(x)$ é um polinômio constante do tipo $q_1(x) = a_n$. Portanto, temos:

$$p(x) = (x - u_1) . q_1(x)$$
$$(x) = (x - u_1) . a_n$$
$$p(x) = a_n . (x - u_1)$$

Mas se $u \geq 2$, então o polinômio q_1 possui grau $n - 1 \geq 1$ e vale o teorema fundamental da álgebra. Podemos afirmar que o polinômio q_1 possui pelo menos uma raiz n_2, o que nos leva a afirmar que q_1 pode ser escrito como:

$$q_1(x) = (x - u_2) . q_2(x)$$

Mas como $p(x) = (x - u_1) . q_1(x)$, podemos reescrevê-lo como:

$$p(x) = (x - u_1) . (x - u_2) . q_2(x)$$

Repetindo sucessivamente esse processo, teremos:

$$p(x) = a_n. (x - u_1) . (x - u_2) \ldots (x - u_n)$$

Dessa forma, podemos concluir que todo polinômio ou equação polinomial $p(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ possui exatamente **n** raízes complexas.

Exemplo: Seja **p(x)** um polinômio de grau **5**, tal que suas raízes sejam **– 1, 2, 3, – 2** e **4**. Escreva esse polinômio decomposto em fatores de 1° grau, considerando o coeficiente dominante igual a **1.** Ele deve ser escrito na forma estendida:

Se **– 1, 2, 3, – 2** e **4** são raízes do polinômio, então o produto das diferenças de **x** por cada uma dessas raízes resulta em **p(x)**:

$$p(x) = a_n.(x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 2).(x - 4)$$

Se o coeficiente dominante $a_n = 1$, temos:

$$p(x) = 1.(x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 2).(x - 4)$$
$$p(x) = (x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 2).(x - 4)$$
$$p(x) = (x^2 - x - 2).(x - 3).(x + 2).(x - 4)$$
$$p(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 6).(x + 2).(x - 4)$$
$$p(x) = (x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12).(x - 4)$$
$$p(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 36x^2 - 20x - 48$$