Geometria Analítica

Na matemática clássica, a geometria analítica, também chamada geometria de coordenadas e de geometria cartesiana, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise. Ela contrasta com a abordagem sintética da geometria euclidiana, em que certas noções geométricas são consideradas primitivas, e é utilizado o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obter proposições verdadeiras. É um campo matemático no qual são utilizados métodos e símbolos algébricos para representar e resolver problemas geométricos. Sua importância está presente no fato de que estabelece uma correspondência entre equações algébricas e curvas geométricas. Tal correspondência torna possível a reavaliação de problemas na geometria como problemas equivalentes em álgebra, e vice-versa; os métodos de um âmbito podem ser utilizados para solucionar problemas no outro.

A geometria analítica é muito utilizada na física e na engenharia, e é o fundamento das áreas mais modernas da geometria, incluindo geometria algébrica, diferencial, discretae computacional.

Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado para manipular equações em planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, mas, por vezes, também em três ou mais.

A geometria analítica ensinada nos livros escolares pode ser explicada de uma forma mais simples: ela diz respeito à definição e representação de formas geométricas de modo numérico e à extração de informação numérica dessa representação. O resultado numérico também pode, no entanto, ser um vector ou uma forma. O fato de que a álgebra dos números reaispode ser empregada para produzir resultados sobre o contínuo linear da geometria baseia-se no axioma de Cantor-Dedekind.

Em matemática, a expressão geometria analítica possui dois significados distintos. O significado moderno e avançado se refere à geometria das variedades analíticas.

História

Grécia Antiga

O matemático grego Menecmo resolveu problemas e provou teoremas através de um método que se assemelhava fortemente com o uso de coordenadas; tanto que alguns estudiosos já chegaram a afirmar que a geometria analítica fora introduzida por este.

Apolônio de Perga, em De Sectione Determinata, lidava com os problemas de um modo que pode ser considerado como uma "geometria analítica unidimensional"; com a finalidade de descobrir a posição de pontos em uma reta por meio de dadas razões em relação aos outros pontos, pré-determinados pelo enunciado. Além disso, em Cônicas, Apolônio desenvolveu um método tão parecido com a geometria analítica que seu trabalho é, por vezes, considerado como a antecipação do trabalho de Descartes em cerca de 1800 anos.

A utilização de linhas de referências, diâmetro e tangente é fundamentalmente análogo às utilizações modernas de um sistema de coordenadas, em que as distâncias medidas ao longo do diâmetro, a partir do ponto de tangência, são as abscissas e os segmentos paralelos à tangente e interceptados entre os eixos e a curva são as ordenadas. Mais tarde, ele desenvolveu relações entre as abscissas e as ordenadas correspondentes que são equivalentes à equações retóricas de curvas.

Entretanto, apesar de Apolônio chegar perto de desenvolver a geometria analítica, ele não conseguiu o fazer por não considerar magnitudes negativas. Devido a esta configuração, equações eram determinadas por curvas, mas as curvas não eram estabelecidas por equações.
Coordenadas, variáveis e equações eram noções auxiliares aplicadas a uma condição geométrico específico.

Pérsia

No século XI, o matemático persa Omar Khayyám observou uma forte relação entre álgebra e geometria, e estava caminhando na direção correta quando ajudou a preencher essa brecha existente entre álgebra numérica e geométrica com sua solução geral de equações cúbicas. Todavia, o passo decisivo veio mais tarde com Descartes.

Europa Ocidental

No fim do século XVI, o matemático francês François Viète adotou a primeira notação algébrica sistemática, utilizando letras para representar quantidades numéricas conhecidas e desconhecidas, e desenvolveu eficientes métodos gerais para trabalhar com expressões algébricas e solucionar equações de mesma natureza. Com o poder da notação algébrica, os matemáticos não estavam mais completamente dependentes de figuras e intuições geométricas para a resolução de problemas.

Os mais audaciosos começaram a deixar para trás o pensamento matemático padrão da época, no qual variáveis lineares (de primeira ordem) correspondiam a comprimentos, quadráticas (de segunda ordem) a áreas, cúbicas (terceira ordem) a volumes, e graus maiores careciam de interpretações "físicas". Dois franceses, o filósofo-matemático René Descartes e o matemático-advogado Pierre de Fermat, foram, dentre os primeiros, aqueles que deram esse corajoso passo.

Descartes e Fermat estabeleceram independentemente a geometria analítica na década de 1630, através da adaptação da álgebra de Viète no estudo do lugar geométrico. Entretanto, Descartes recebe, algumas vezes, o crédito exclusivo pelo desenvolvimento deste campo matemático. Os pensadores foram além das ideias de Viète quando passaram a usar letras para representar distâncias variáveis ao invés de valores fixos. Descartes manipulou equações para estudar curvas geometricamente definidas, e acentuou a necessidade de considerar curvas algébricas em geral — gráficos de equações polinomiais de todas as ordens. Ele demonstrou seu método em um problema clássico: encontrar todos os pontos P, de modo que, o produto das distâncias de P a certas linhas sejam iguais ao produto das distâncias em relação a outras linhas.

O progresso significante deste âmbito deu-se através de seus métodos em um ensaio intitulado La Geometrie, um dos três artigos publicados em 1637, anexados ao Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Este trabalho, produzido originalmente em francês, e seus princípios filosóficos, forneceram fundamentação para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal na Europa. Inicialmente, a publicação não foi bem recebida pela comunidade científica, principalmente devido às falhas argumentativas e equações complicadas. Apenas depois de ter sido traduzida para o Latim, junto à adição de comentários por van Schooten em 1649, a obra-prima de Descartes obteve reconhecimento e admiração.

Fermat enfatizou que qualquer relação entre as coordenadas x e y determina uma curva. Utilizando tal ideia, ele revisou os argumentos de Apolônio em termos algébricos e recuperou trabalho perdido. Além disso, indicou que qualquer equação quadrática entre x e y pode ser representada na forma padrão de uma das seções cônicas.

Embora não tenha sido publicado durante seu tempo em vida, um impresso do manuscrito de Ad locos planos et solidos isagoge circulava em Paris em 1637, previamente à publicação do Discurso de Descartes. Escrito de forma clara e bem recebido, o documento também configurou a base da geometria analítica. A principal diferença entre as abordagens de ambos, quanto a este estudo, se encontra no ponto de vista: Fermat sempre iniciava com uma equação algébrica e então descrevia a curva geométrica que a satisfazia, enquanto Descartes partia das curvas geométricas e produzia suas respectivas equações; como sendo estas, uma de várias propriedades da curva. Como consequência deste tratamento, Descartes tinha de lidar com equações mais complicadas e, portanto, teve de criar métodos para trabalhar com equações polinomiais de ordens elevadas.

Coordenadas

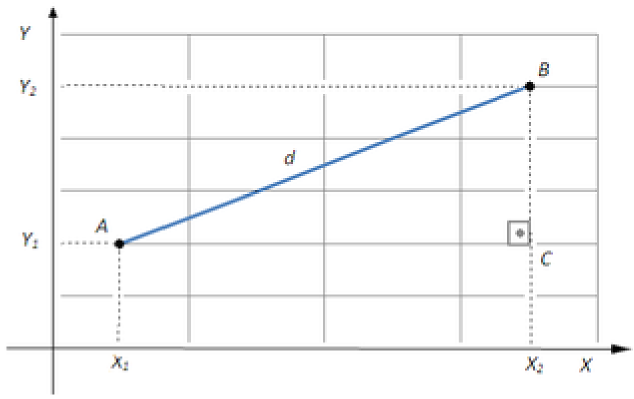
Na geometria analítica, ao plano é dado um sistema de coordenadas, no qual, cada ponto possui um par coordenadas reais. Semelhantemente, um espaço euclidiano acomoda sistemas onde cada ponto é definido por três coordenadas. Existe uma variedade de sistemas utilizados atualmente, porém os mais comuns são:

Coordenadas Cartesianas

O sistema de coordenadas mais utilizado é o plano cartesiano, onde cada ponto recebe uma coordenada x, que representa a posição horizontal, e uma coordenada y, representando sua posição vertical. Estas são geralmente escritas em um par ordenado (x, y).

Este sistema também pode ser empregado em geometria tridimensional, no qual, cada ponto no espaço euclidiano é representado por um trio ordenado de coordenadas (x, y, z).

Fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano



A distância entre dois pontos, A e B, quaisquer no plano, sendo **A** (x_1, y_1) e **B** (x_2, y_2), {\displaystyle \left(x_{1},y_{1}\right)}{\displaystyle \left(x_{2},y_{2}\right),}é dada por:

$$d_{A,B} = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Coordenadas Polares

No sistema de coordenadas polares, cada ponto no plano é representado pelo raio r, em relação à origem, e pelo ângulo θ, em relação à horizontal (grau zero).

Coordenadas Cilíndricas

Nas coordenadas cilíndricas, cada ponto no espaço é definido por: uma altura z; por um raio r, em relação ao eixo-z; por ângulo θ, em relação à sua projeção no plano-xy.

Coordenadas Esféricas

Em um sistema de coordenadas esféricas, o ponto é representado por uma distância ρ em relação à origem, um ângulo θ com respeito à projeção no plano-xy, e um ângulo φ, que esta distância determina em relação ao eixo-z. Na física, os nomes dos ângulos são geralmente invertidos.

Curvas E Equações

Na geometria analítica, qualquer equação envolvendo coordenadas descreve um subconjunto do plano, isto é, o conjunto de soluções para a dada equação, ou o lugar geométrico(locus). Por exemplo, a equação y = x corresponde ao conjunto de todos os pontos no plano cuja coordenada-x é igual à coordenada-y. Estes pontos formam uma linha, portanto, dizemos que y = x representa a equação desta linha. No geral, equações lineares envolvendo x e y descrevem retas, equações quadráticas especificam seções cônicas, e equações mais complicadas resultam em figuras mais complexas.

Normalmente, uma única equação corresponde à uma curva no plano. Este não é sempre o caso: a equação trivial x = x determina o plano inteiro, e a equação $x^2 + y^2 = 0$ determina apenas o ponto (0, 0). Em três dimensões, uma única equação gera, usualmente, uma superfície, e uma curva deve ser especificada como a intersecção entre duas superfícies, ou como um sistema de equações paramétricas.

A Geometria Analítica estabelece conexões entre geometria e álgebra, de modo que os conceitos da geometria são analisados por meio de processos algébricos. Ela foi criada pelo matemático francês René Descartes e, por isso, também é chamada de geometria cartesiana.

Todos os objetos, figuras e relações já obtidas na geometria euclidiana clássica (geometria plana e espacial) são estudados na geometria analítica por meio da álgebra. Isso expande os conceitos da geometria, que agora podem ser analisados de um modo completamente novo, e introduz conceitos que ainda não podiam ser considerados ou que não podiam ser explorados ao máximo na geometria euclidiana. Um exemplo disso é o conceito de distância entre um ponto e uma reta.

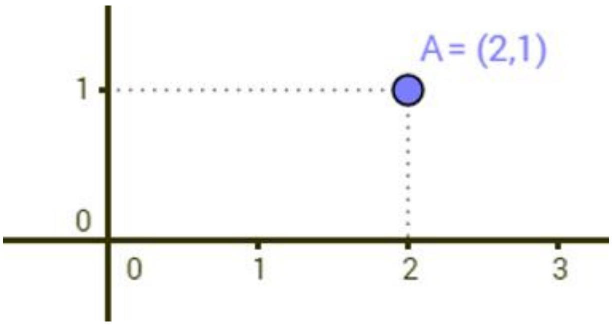
As Bases Da Geometria Analítica

A base da geometria analítica está em representar os pontos de uma reta utilizando os números reais. Cada ponto de uma reta é representado por (ou representa) um único número real. Esse número real é obtido pela distância entre o referido ponto e a origem da reta, que é o ponto relacionado com o número zero.

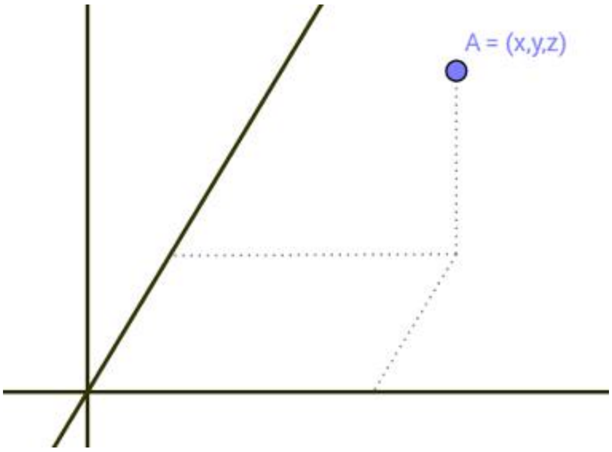
O conceito de distância, portanto, é um dos mais importantes dentro da Geometria Analítica. Por meio dele são definidos outros conceitos importantes, como os de círculo e circunferência. Além disso, a maioria das definições algébricas de figuras geométricas é obtida por intermédio do conceito de distância.

Exemplo de representação do ponto de uma reta por um número real

Posteriormente, essa ideia foi expandida para a representação de pontos no plano, de modo que cada ponto do plano é representado por um único par de números reais conhecido como par ordenado. A imagem abaixo ilustra como o par ordenado (2,1) representa o ponto A.



Já os pontos do espaço são representados por um conjunto de três números reais, conhecidos como ternos ordenados. Cada terno ordenado representa apenas um único ponto no espaço.



Exemplo da representação de um ponto no espaço por um terno ordenado

Se um ponto pertence a uma reta e é representado por um número real, dizemos que o espaço onde esse ponto está localizado (a reta) possui apenas uma dimensão e o número real é chamado de coordenada do ponto.

Caso o ponto pertença a um plano, é representado por um par de números reais. O espaço onde está localizado (o plano) possui duas dimensões e esse ponto possui duas coordenadas.

Desse modo, o número de coordenadas que um ponto possui é igual ao número de dimensões que possui o espaço onde esse ponto está localizado. O ponto pertencente ao espaço tridimensional, por exemplo, possuirá três dimensões e será representado por três coordenadas. A figura acima retrata o ponto A, que pertence ao espaço tridimensional e é representado pelo terno ordenado (x,y,z).

Geometria analítica é a área da Matemática responsável pelo estudo das geometrias plana e espacial usando processosalgébricos. Por meio da geometria analítica, os conceitos da geometria clássica puderam ser compreendidos de uma forma inteiramente nova, com novos métodos para a demonstração, uso e criação de propriedades ainda não imaginadas.

O estudo da geometria analítica no ensino médio é dividido em: estudo analítico do ponto, estudo analítico da reta, estudo analítico da circunferência, vetores e cônicas.

Estudo Analítico Do Ponto

É nesse estudo que se encontram os principais conhecimentos da geometriaanalítica. Primeiramente, a ideia de ponto que fundamenta toda a geometria é:

O ponto é uma noção primitiva da geometria.

Em outras palavras, não há como definir um ponto, sua existência somente é comprovada por meio de axiomas ou postulados (definições ou propriedades que são aceitas como válidas sem demonstração).

Não há definição para ponto, mas podemos explicá-lo: um ponto é uma figura geométrica que não possui dimensão nem formato e pode ser usado para marcar com precisão a localização no espaço.

É a partir da ideia de ponto que definimos retas, semirretas e segmentos de reta. Usando a definição de retas, podemos estabelecer o plano cartesiano, sobre o qual é possível delimitar a distância entre dois pontos, uma das mais importantes medidas da geometria analítica.

Um plano cartesiano é um plano formado por duas retas numéricas perpendiculares que se encontram em suas origens. A localização de um ponto qualquer nesse plano é dada pela coordenada da reta horizontal, chamada de eixo x, seguida da coordenada da reta vertical, chamada de y. Assim, o ponto A, por exemplo, possui localização (x, y).

Dados os pontos A(xA, yA) e B(xB, yB), a distância (dAB) entre A e B é o comprimento do segmento de reta que os liga, que pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Esse conceito é tão importante porque, por meio dele, são definidos quase todos os conceitos da geometria analítica, como a definição de circunferência.

Estudo Analítico Da Reta

A reta é uma figura geométrica que não faz curva, formada por infinitos pontos.
Na geometria analítica, uma reta pode ser representada por uma equação. Na realidade, esse é o grande avanço da geometria analítica e é aquilo que faz com que os conceitos geométricos sejam estudados algebricamente. Uma das possíveis equações da reta é:

ax + by + c = 0

Nessa equação, a, b e c são números reais chamados coeficientes e x e y são números reais desconhecidos, chamados de incógnitas.

Por meio dessas equações, é possível identificar quando duas retas são paralelas, concorrentes e perpendiculares. No caso em que são concorrentes, é possível determinar a localização do ponto de encontro entre elas por meio de suas equações.

Além disso, também é possível determinar a inclinação da reta com relação ao eixo x. Para isso, usamos a tangente. Digamos que uma reta r possui dois pontos A(xA, yA) e B(xB, yB). A inclinação dessa reta é dada por:

tgα = yB – yA
xB – xA

Nessa relação, α é o ângulo entre a reta r e o eixo x.

Estudo Analítico Da Circunferência

Uma circunferência é um conjunto de pontos cuja distância r até um ponto fixo C, chamado centro, é constante. Por meio da geometria analítica, é possível representar a circunferência por meio de uma equação. Uma das equações que podem ser usadas para isso é:

(x – a)2 + (y – b)2 = r2

Nessa equação, x e y são números reais desconhecidos, (a, b) é o centro da circunferência e r é seu raio.

A partir desse tipo de equação e dos conceitos anteriores, em especial de distânciaentre dois pontos, é possível definir as posições relativas entre circunferências, entre uma reta e uma circunferência e entre um ponto e uma circunferência.

Vetores

Vetores são segmentos de reta orientados, ou seja, é um segmento de reta que possui, além de comprimento, direção e sentido. Os vetores são representados por flechas no plano cartesiano e costumam ser usados na disciplina de Física para representar movimentos, incidência de forças etc.

Um vetor também pode ser representado por um par ordenado. Quando isso acontece, significa que esse vetor tem início na origem do plano cartesiano e finda no ponto que esse par ordenado localiza. A questão é que todo vetor pode ser trasladado no plano cartesiano para que tenha seu início na origem, portanto, todo vetor pode ser representado por um par ordenado.

É possível estabelecer todas as operações básicas matemáticas para os vetores, entretanto, essas operações podem ser um pouco diferentes por causa da definição distinta que os vetores possuem.

Cônicas

O estudo de geometria analítica plana encerra-se com o estudo das cônicas: parábola, hipérbole e elipse. A circunferência é uma elipse cujos focos coincidem, por isso não é considerada uma classe de cônicas.

Parábola, hipérbole e elipse são definidas tendo como base os pontos chamados de focos, a distância entre dois pontos e, em algumas, uma reta.

A Geometria Analítica, também denominada de coordenadas geométricas, baseia-se nos estudos da Geometria por meio da utilização da Álgebra. Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês René Descartes (1596 -1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas.

Breve Histórico

Os estudos relacionados com a Geometria Analítica datam do século XVII. Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar por meio de métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas.

Uma característica importante da Geometria Analítica apresenta-se na definição de formas geométricas de modo numérico, extraindo dados informativos da representação. Com base nesses estudos, a Matemática passa a ser vista como uma disciplina moderna, capaz de explicar e demonstrar situações relacionadas ao espaço. As noções intuitivas de vetores começam a ser exploradas de forma contundente na busca por resultados numéricos que expressem as ideias da união da Geometria com a Álgebra.

Os vetores constituem a base dos estudos do espaço vetorial e são objetos que possuem as características relacionadas com tamanho, direção e sentido. Os vetores são muito utilizados na Física como ferramenta auxiliar nos cálculos relacionados à Cinemática Vetorial, Dinâmica, Campo Elétrico, entre outros conteúdos.
Os cientistas Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz concentraram estudos na Geometria Analítica, que serviu como base teórica e prática para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, muito utilizado atualmente na Engenharia.

A equação da reta pode ser determinada representando-a no plano cartesiano (x,y). Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos pertencentes a reta podemos determinar sua equação.

Também é possível definir uma equação da reta a partir de sua inclinação e das coordenadas de um ponto que lhe pertença.

Equação Geral Da Reta

Dois pontos definem uma reta. Desta forma, podemos encontrar a equação geral da reta fazendo o alinhamento de dois pontos com um ponto (x,y) genérico da reta.

Sejam os pontos A(xa,ya) e B(xb,yb), não coincidentes e pertencentes ao plano cartesiano.

Três pontos estão alinhados quando o determinante da matriz associada a esses pontos é igual a zero. Assim devemos calcular o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante encontramos a seguinte equação:

(ya - yb) x + (xa - xb) y + xayb - xb - ya = 0

Vamos chamar:

a = (ya - yb)
b = (xa - xb)
c = xayb - xb - ya

A equação geral da reta é definida como:

ax + by + c = 0

Onde a, b e c são constantes e a e b não podem ser simultaneamente nulos.

Exemplo

Encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos A(-1, 8) e B(-5, -1).

Primeiro devemos escrever a condição de alinhamento de três pontos, definindo o matriz associada aos pontos dados e a um ponto genérico P(x,y) pertencente a reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, encontramos:

(8+1)x + (1-5)y + 40 + 1 = 0

A equação geral da reta que passa pelos pontos A(-1,8) e B(-5,-1) é:

9x - 4y + 41 = 0

Para saber mais, leia também:

- Matriz
- Determinante
- Teorema de Laplace

Equação Reduzida Da Reta

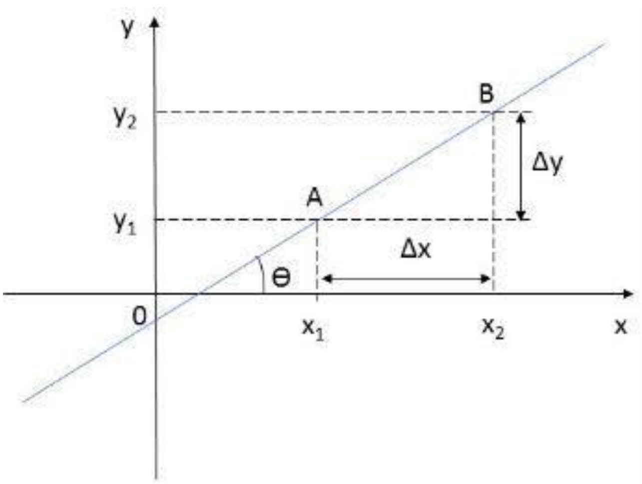
Coeficiente Angular

Podemos encontrar uma equação da reta r conhecendo a sua inclinação (direção), ou seja o valor do ângulo θ que a reta apresenta em relação ao eixo x.

Para isso associamos um número m, que é chamado de coeficiente angular da reta, tal que:

m = tg θ

O coeficiente angular m também pode ser encontrado conhecendo-se dois pontos pertencentes a reta.



Como m = tg θ, então:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo

Determine o coeficiente angular da reta r, que passa pelos pontos A(1,4) e B(2,3).

Sendo,

x1 = 1 e y1 = 4
x2 = 2 e y2 = 3

$$m = \frac{3-4}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Conhecendo o coeficiente angular da reta m e um ponto P0(x0,y0) pertencente a ela, podemos definir sua equação.

Para isso vamos substituir na fórmula do coeficiente angular o ponto conhecido P0 e um ponto P(x,y) genérico, também pertencente a reta:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Parábola (do grego: παραβολή) é uma seção cônica gerada pela interseção de uma superfície cônica de segundo grau e um plano paralelo à reta geratriz do cone, sendo que o plano não contém esta. Equivalentemente, uma parábola é a curva plana definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz). Aplicações práticas são encontradas em diversas áreas da física e da engenharia como no projeto de antenas parabólicas, radares, faróis de automóveis.

Em geometria, uma elipse é um tipo de secção cônica: se uma superfície cônica é cortada com um plano que não passe pela base e que não intersecte as duas folhas do cone, a intersecção entre o cone e o plano é uma elipse. Para uma prova elementar disto, veja esferas de Dandelin.

Em alguns contextos, pode-se considerar o círculo e o segmento de reta como casos especiais de elipses; no caso do círculo, o plano que corta o cone é paralelo à sua base.

A elipse tem dois focos, que no caso do círculo são sobrepostos. O segmento de reta que passa pelos dois focos chama-se eixo maior, e o segmento de reta que passa pelo ponto médio do eixo maior e é perpendicular a ele chama-se eixo menor.

Fixando o comprimento do eixo maior e diminuindo o comprimento do eixo menor, obtêm-se elipses cada vez mais próximas de um segmento de reta. A elipse é também a intersecção de uma superfície cilíndrica com um plano que a corta numa curva fechada.

As medidas da elipse são dadas pela metade dos eixos maior e menor sendo chamadas, respetivamente, de semieixo maior ({\displaystyle a}a) e semieixo menor ({\displaystyle b}b).

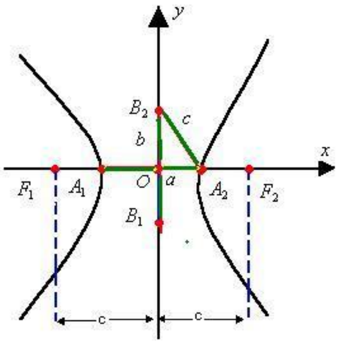
No estudo da geometria analítica, as diversas figuras geométricas são estudadas do ponto de vista algébrico. Ponto, retas, circunferências são esquematizadas com o auxílio da álgebra. As cônicas, que são figuras geométricas oriundas de secções transversais realizadas em um cone, também são muito exploradas.

A própria circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole são classificadas de cônicas. Vejamos como a hipérbole pode ser explorada do ponto de vista da geometria analítica.

Definição de hipérbole: Considere F1 e F2 como sendo dois pontos distintos do plano e 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano, tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias à F1 e F2 é a constante 2a (0 < 2a < 2c).

A hipérbole pode ter os focos sobre o eixo x ou sobre o eixo y e sua equação varia em cada um dos casos. Vamos deduzir sua equação para cada um dos casos citados.

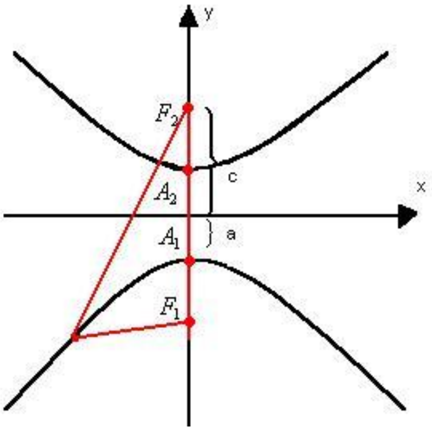
Hipérbole Com Focos Sobre O Eixo X.



Como os focos da hipérbole estão localizados sobre o eixo x, suas coordenadas serão: F2(c, 0) e F1(– c, 0). Nesse caso, a equação da hipérbole será do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole com focos sobre o eixo y.



Como os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, suas coordenadas serão: F2(0, c) e F1(0, – c). Nesse caso, a equação da hipérbole será do tipo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Elementos e propriedades da hipérbole:
2c → é a distância focal.
c2 = a2 + b2 → relação fundamental.
A1(– a, 0) e A2(a, 0) → são os vértices da hipérbole.
2a → é a medida do eixo real.
2b → é a medida do eixo imaginário.
c/a → é a excentricidade

Exemplo 1. Determine a equação da hipérbole com focos F1(– 10, 0) e F2(10, 0) e eixo real medindo 16 unidades.

Solução: De acordo com as coordenadas dos focos percebemos que eles estão sobre o eixo x, pois as coordenadas y são iguais a zero. Também podemos afirmar que c = 10.

Foi dado que o eixo real tem 16 unidades de comprimento. Logo, temos que:
2a = 16 → a = 8

Para determinar a equação da hipérbole precisamos conhecer os valores de a e b, portanto devemos utilizar a relação fundamental para encontrarmos o valor de b. Segue que:
c2 = a2 + b2
102 = 82 + b2
b2 = 100 – 64
b2 = 36
b = 6

Conhecidos os valores de a e b podemos escrever a equação da hipérbole com focos sobre o eixo x:

$$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Exemplo 2. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole de equação:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Solução: Observando a equação da hipérbole podemos constatar que seus focos estão sobre o eixo y, logo terão coordenadas do tipo F1(0, – c) e F2(0, c).
Da equação da hipérbole obtemos que:
a2 = 16 → a = 4
b2 = 9 → b = 3
Utilizando a relação fundamental, teremos:
c2 = a2 + b2
c2 = 16 + 9
c2 = 25
c = 5
Portanto, os focos da hipérbole são F1(0 , – 5) e F2(0, 5).

Geometria Analitica

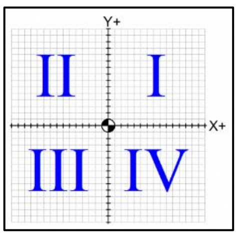
Sistemas de Coordenadas

Conceituando

“Em matemática, um sistema de coordenadas é um sistema para se especificar uma enupla de escalares a cada ponto num espaço n-dimensional”[1] Grosseiramente, podemos afirmar que um sistema de coordenadas é uma ferramenta matemática que nós utilizamos para localizar um objeto num espaço de n dimensões (n-dimensional). O mais conhecido dos sistemas de coordenadas é o cartesiano, talvez por ser bastante trabalhado na educação básica, desde o ensino fundamental até o médio.

Os sistemas de coordenadas são utilizados em diversos ramos do conhecimento humano: matemática, física, astronomia, geografia etc. É, portanto, importante a compreensão desse conceito, principalmente a diferenciação entre os vário sistemas, o que pode oferecer tranquilidade na hora de resolver um problema.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

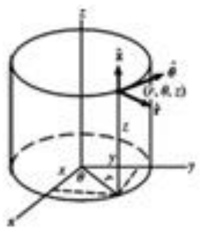


Este sistema, também conhecido com o sistema ortogonal é amplamente utilizado para determinar a posição de um ponto (objeto) no espaço de duas dimensões (plano). Para localizar um ponto no Plano de Descartes (plano cartesiano) utiliza-se dois eixos coordenados x e y, dispostos perpendicularmente um ao outro, de forma que a graduação dos eixos se relacionem entre si, indicando o objeto procurado.

No plano cartesiano, o eixo x contém as abscissas e o eixo y contém as ordenadas do par ordenado indicado por (x, y), nesta ordem. A arrumação perpendicular entre os eixos fornece quatro quadrantes, contados no sentido anti-horário:

- 1º quadrante, situado na parte superior, à direita do plano, (x, y);
- 2º quadrante, situado na parte superior, à esquerda, (– x, y);
- 3º quadrante, situado na parte inferior, à esquerda, (– x, – y);
- 4º quadrante, situado na parte inferior, à direita, (x, – y).

Sistema De Coordenadas Cilíndricas



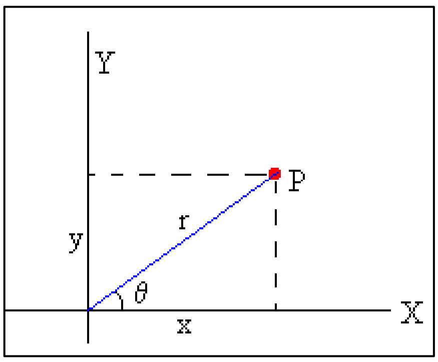
O sistema de coordenadas cilíndricas é uma versão, no espaço de três dimensões (tridimensional) do sistema de coordenadas polares. Nele, um ponto é determinado pela sua distância do eixo z um ângulo e a sua distância relacionada ao plano xy.

Um ponto P (ρ, φ, z1) no sistema cilíndrico resulta da interseção de:

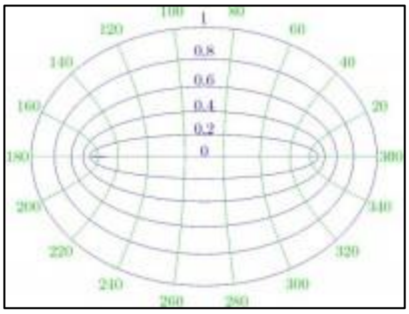
- Uma superfície cilíndrica de raio ρ cujo centro é o eixo z ou seja, o centro é (0,0, z)
- Um semiplano contendo o eixo z e fazendo um ângulo φ com o plano xz
- Um plano paralelo ao plano xy ou seja, z = z1

Sistema De Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas polares é vinculado ao sistema de coordenadas cartesianas por meio de relações trigonométricas adequadas. Tracemos os eixos x e y perpendicularmente um ao outro, o ponto O (origem) será o polo do sistema e a semirreta OP será eixo polar.



Sistema De Coordenadas Elípticas



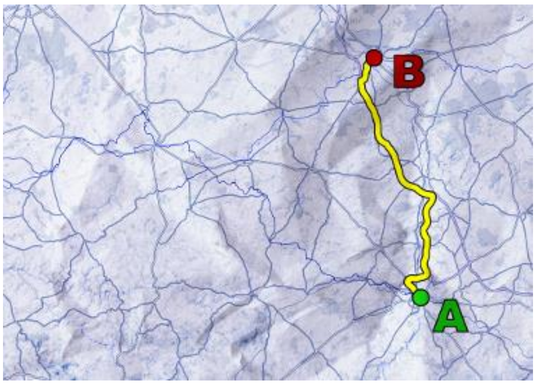
As coordenadas elípticas são na verdade um sistema de duas dimensões de coordenadas curvilíneo-ortogonais. A elíptica é utilizada pelo sistema de coordenadas elípticas em seu plano fundamental. Elíptica é, entre outros, o movimento descrito pelo Sol no céu no decorrer de um ano. Linhas elípticas e hiperbólicas com mesmo foco formam as coordenadas elípticas.

Sistema De Coordenadas Geográficas

Os astrônomos e geógrafos utilizam este sistema de coordenadas para realizar o seu trabalho. O sistema de coordenadas esféricas é montado a partir de uma esfera em três dimensões, onde graus de latitude e longitude são utilizados para medir posições no mundo real. A unidade de medida é o grau e dele derivam os minutos e os segundos (1º = 60’ = 3 600’’). Para converter coordenadas esféricas em planas distorcem-se algumas propriedades espaciais.

“O universo nos guarda de segredos tão magníficos quanto destrutivos.”
(Robison Sá)

Distância entre dois pontos no espaço



Distância entre dois pontos em um mapa

O cálculo da distância entre dois pontos no espaço é um assunto discutido na Geometria Analítica e tem suas bases no teorema de Pitágoras. Utilizando esse teorema, é possível chegar à fórmula usada para calcular o comprimento do segmento de reta que liga dois pontos.

Para calcular a distância entre dois pontos no espaço, é necessário calcular antes a distância entre dois pontos no plano. Adiante demonstraremos como esses cálculos são feitos para obter a fórmula em questão.

Fórmula Da Distância Entre Dois Pontos No Espaço

Existe uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos no espaço, dada por meio de suas coordenadas. Assim sendo, sejam os pontos A = (xA, yA, zA) e B = (xB, yB, zB), a distância entre A e B, denotada por dAB, é dada pela seguinte expressão:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Para calcular a distância entre dois pontos, basta substituir os valores numéricos das coordenadas dos pontos em questão na fórmula acima.

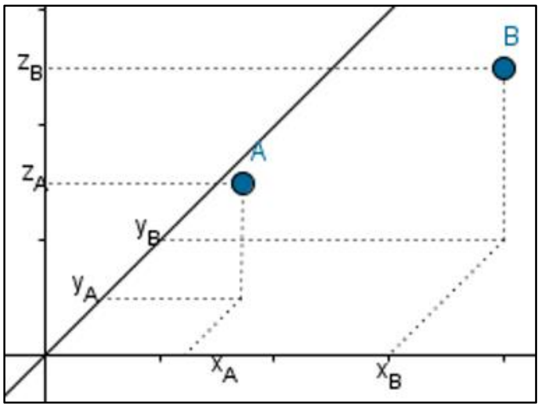
Exemplo

Calcule a distância entre os pontos A = (4, -8, -9) e B = (2, -3, -5).

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-(-8))^2 + (-5-(-9))^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-3+8)^2 + (-5+9)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{4 + (5)^2 + (4)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{4 + 25 + 16}$$
$$d_{AB} = \sqrt{45}$$
$$d_{AB} \cong 6.7$$

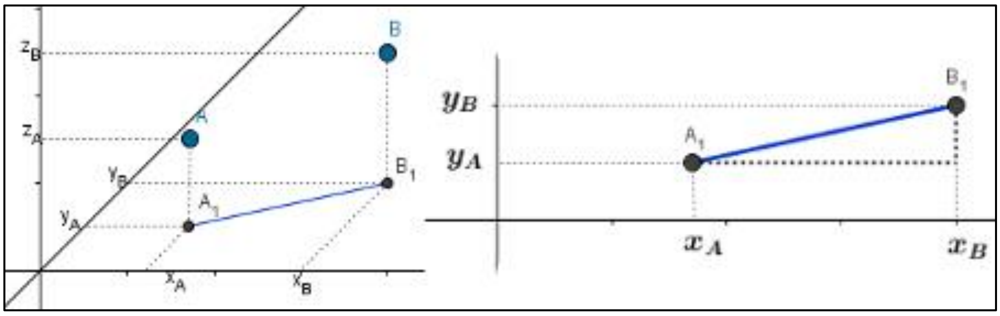
Obtendo A Distância Entre Dois Pontos No Espaço

Na imagem a seguir há três eixos coordenados que representam o que seria o equivalente ao plano cartesiano no espaço. Note que fixamos dois pontos nele:



Para calcular a distância entre esses dois pontos, é necessário calcular a distância entre os pontos no plano xy, formados pelas coordenadas (xA, yA) e (xB, yB), que serão denotados por A1 e B1, respectivamente.

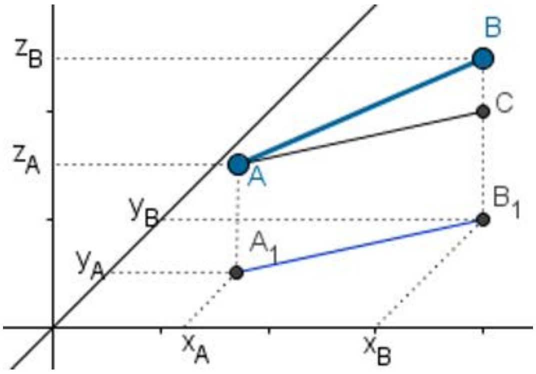
Dessa forma, observe que os pontos A1 e B1 estão localizados como ilustrado na imagem a seguir e a distância entre eles é representada pelo segmento A1B1. Além disso, a imagem da direita contém um esquema de como essa estrutura é vista por cima, o que é chamado de projeção ortogonal sobre o plano xy.



Os catetos do triângulo à direita são a diferença entre as coordenadas de seus pontos, isto é, a base tem comprimento igual a xB – xA e a altura tem comprimento yB – yA. Desse modo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(A_1B_1)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

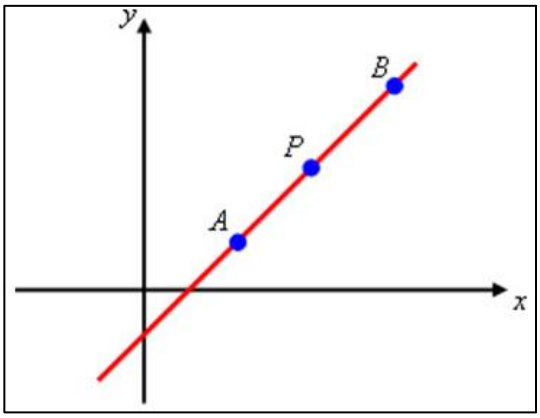
Para obter a distância entre dois pontos no plano, basta extrair a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima. Contudo, nosso objetivo é obter a fórmula para a distância no espaço. Para tanto, observe que o segmento A1B1 possui o mesmo tamanho da base do triângulo ABC, ilustrado na figura abaixo.



Note também que a distância de B até C é justamente a diferença zB – zA, pois AC é paralelo a A1B1. Desse modo, pelo teorema de Pitágoras, teremos a distânciaentre A e B, denotada por dAB:

$$(d_{AB})^2 = (AB)^2$$
$$(d_{AB})^2 = (d_{CD})^2 + (d_{BD})^2$$
$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Equação Geral da Reta no Plano



As equações na forma ax + by + c = 0são expressões representativas de retas do plano. Os coeficientes a, b e csão números reais constantes, considerando a e b valores diferentes de zero. A essa representação matemática damos o nome de equação geral da reta.

Podemos construir a equação geral da reta utilizando duas maneiras:

1ª – através da determinação do coeficiente angular da reta e utilização de uma forma geral dada por: y – y1 = m (x – x1).

2ª – através de uma matriz quadrada formada pelos pontos pertencentes à reta fornecida.

1ª Forma

Vamos determinar a equação da reta s que passa pelos pontos A(–1, 6) e B(2, –3).

Coeficiente angular da reta
m = (y2 – y1) / (x2 – x1)
m = –3 – 6 / 2 – (–1)
m = –9 / 3
m = –3

y – y1 = m (x – x1).
y – 6 = –3 (x + 1)
y – 6 = –3x – 3
y – 6 + 3x + 3 = 0
y + 3x – 3 = 0
3x + y – 3 = 0

2ª Forma

Vamos considerar o ponto genérico P(x, y), pertencente à reta s que passa pelos pontos A(–1, 6) e B(2, –3). Observe a matriz construída com as coordenadas oferecidas:

$$s = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sarrus

$$s = \left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ -1 & 6 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right|$$

Diagonal Principal
x * (–6) * 1 = 6x
y * 1 * 2 = 2y
1 * (–1) * (–3) = 3

Diagonal Secundária
1* 6 * 2 = 12
x * 1 * (–3) = –3x
y * (–1) * 1 = –y

s: 6x + 2y + 3 – (12 – 3x – y) = 0
s: 6x + 2y + 3 – 12 + 3x + y = 0
s: 9x + 3y – 9 = 0 (dividindo a equação por 3)

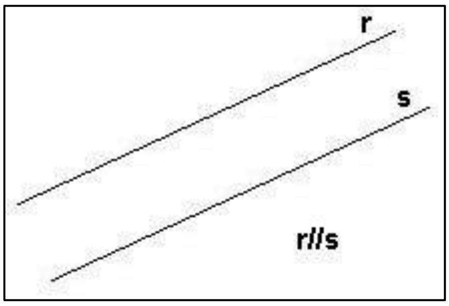
s: 3x + y – 3 = 0

Os métodos apresentados podem ser utilizados de acordo com os dados fornecidos pela situação. Os dois fornecem com exatidão a equação geral de uma reta.

Paralelismo

Postulado Das Paralelas

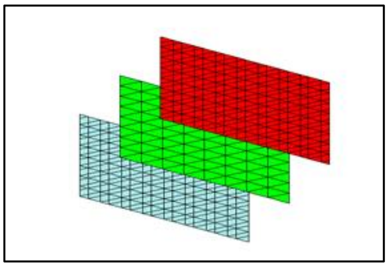
Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada. Na figura abaixo, dada a reta r, temos: P Є s, s // r, s é única.



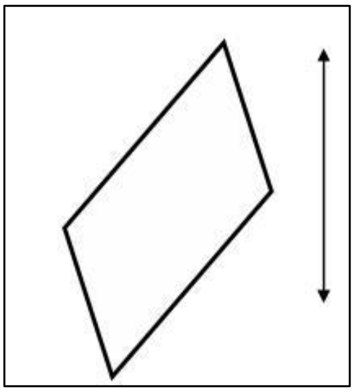
Esse postulado, conhecido também como postulado de Euclides (300 a.C.), é a propriedade que caracteriza a Geometria Euclidiana.
Duas retas distintas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto comum.

Algumas Propriedades Do Paralelismo

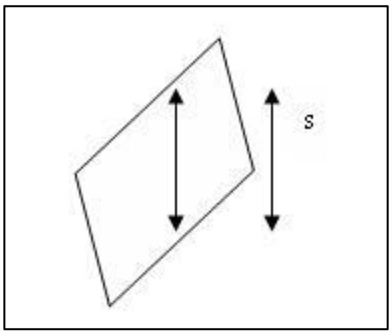
1ª Propriedade
Quando dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.



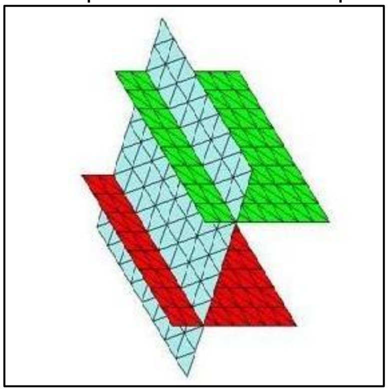
2ª Propriedade
Quando uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a pelo menos uma reta desse plano.



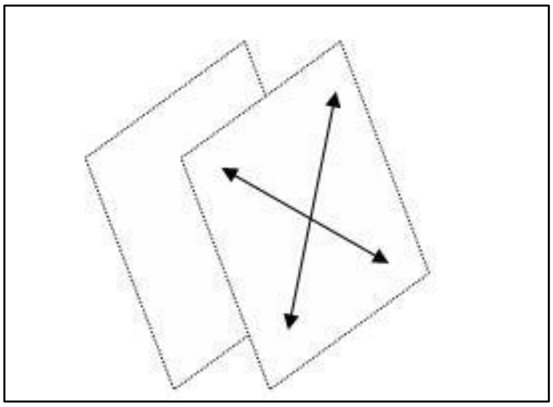
3ª Propriedade
Quando uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, ela é paralela ao plano.



4ª Propriedade
Se um plano intersecta dois planos paralelos, as intersecções são duas retas paralelas.



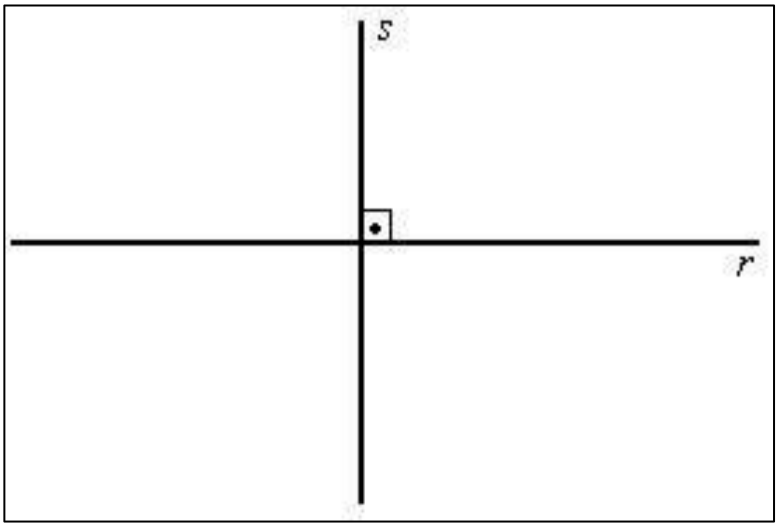
5ª Propriedade
Quando um plano contém duas retas concorrentes, paralelas a outro plano, então os planos considerados são paralelos.


.

Perpendicularidade

Retas Perpendiculares

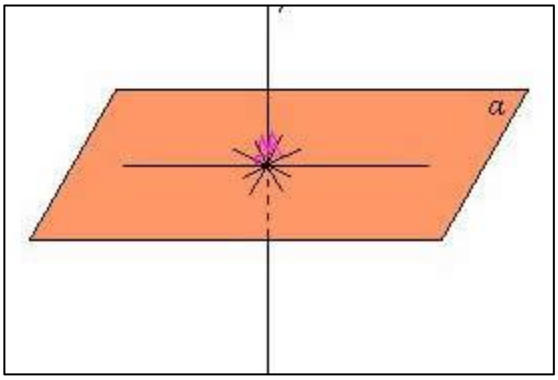
Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos “retos”.



Indicamos se são paralelas da seguinte forma:

Reta E Plano Perpendiculares

Uma reta concorrente com um plano, num determinado ponto, é perpendicular ao plano quando é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto determinado.



Indicaremos que r é perpendicular a α por r ⊥ α ou por α ⊥ r.

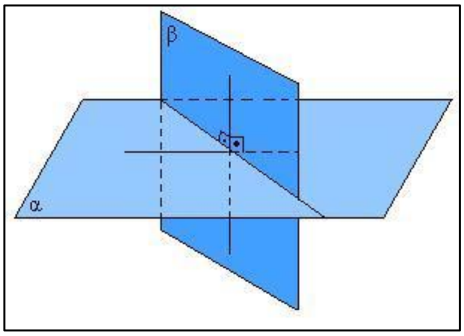
Se uma reta a é perpendicular a duas retas, b e c , concorrentes de um plano α, então ela é perpendicular ao plano.

Planos Perpendiculares

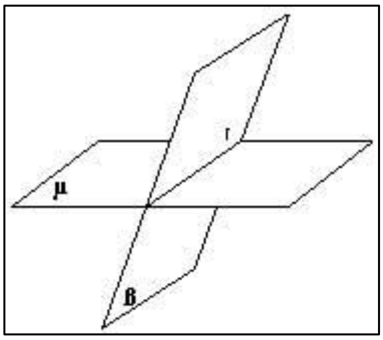
Definição

Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

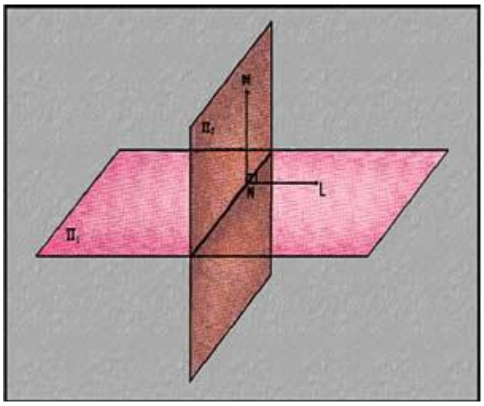
Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β pelo símbolo α ⊥ β ou β ⊥α.



Quando dois planos secantes não são perpendiculares, eles são ditos oblíquos.
Observe a figura:



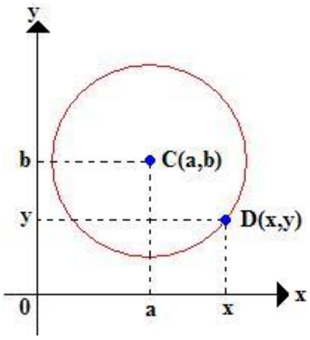
Se dois planos, α e β, são perpendiculares e uma reta r de um deles (α) é perpendicular à intersecção i dos planos, então ela é perpendicular ao outro plano (β).



A Circunferência No Plano Cartesiano - Equação Reduzida

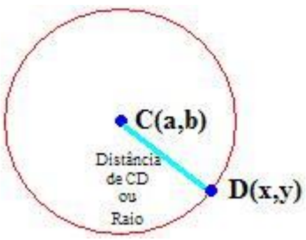
Da mesma forma que equacionamos uma reta é possível também representarmos uma circunferência na forma de equações, utilizando seu centro e um ponto genérico da circunferência.

Veja a representação em um plano cartesiano de uma circunferência de centro C de coordenadas iguais a C(a,b) e o ponto D(x,y) sendo genérico a circunferência, ou seja, ponto qualquer pertencente a circunferência.



A equação dessa circunferência será determinada pela distância do centro ao ponto genérico, que é indicado por um segmento de reta.

Relembrando a definição de raio iremos (raio é a medida de qualquer segmento de reta que vai do centro da circunferência a qualquer ponto genérico a ela) concluir que essa distância é o raio da circunferência.



A distância entre o centro de uma circunferência e um ponto genérico a ela é o mesmo que calcularmos a distância entre dois pontos, que no caso são C(a,b) e D(x,y).

$$d_{CD} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$(d_{CD})^2 = \left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)^2$$

d2CD = (x – a)2 + (y – b)2

Portanto a equação reduzida da circunferência será determinada por:

R2 = (x – a)2 + (y – b)2

Exemplo: Determine a equação reduzida da circunferência de centro C(-4,1) e R = 1/3.

Basta substituirmos esses dados na equação R2 = (x – a)2 + (y – b)2.

(x – (-4))2 + (y – 1)2 = (1/3)2
(x + 4)2 + (y – 1)2 = 1/9

Exemplo: Obtenha o centro e o raio da circunferência cuja equação é (x – 1/2)2 + (y + 5/2)2 = 9.

É preciso que seja feito à comparação das equações:

(x – 1/2)2 + (y + 5/2) 2= 9
(x – a)2 + (y – b)2 = R2

- a = -1/2
a = 1/2

- b = 5/2
b = -5/2

R2 = 9
R = 3

Portanto as coordenadas do centro da circunferência de equação (x – 1/2)2 + (y + 5/2) = 9 é igual a C(1/2, -5/2) e raio igual a R = 3

Equações E Inequações

Equações são expressões algébricas que possuem uma igualdade. Essas expressões são chamadas de algébricas porque possuem pelo menos uma incógnita, que é um número desconhecido representado por uma letra. As inequações, por sua vez, são relações semelhantes às equações, contudo, apresentam uma desigualdade.

Enquanto as equações relacionam os termos do primeiro membro aos termos do segundo, afirmando sua igualdade, as inequações mostram que os termos do primeiro membro são maiores ou menores que os elementos do segundo.

Termos De Uma Equação E De Uma Inequação

Termo é o nome que se dá ao produto de algum número por alguma letra. Para identificá-los, basta procurar pelas multiplicações separadas por sinais de adição ou subtração. Veja a equação seguinte:

4x + 2x – 7x = 16 – 5x

Os termos são: 4x, 2x, – 7x, 16 e – 5x

Membros De Uma Equação E De Uma Inequação

Primeiro e segundo membros são definidos pela igualdade nas equações e pela desigualdade nas inequações.

Todos os termos dispostos à esquerda da igualdade ou da desigualdade compõem o primeiro membro de uma equação ou inequação. Todos os termos dispostos à direta da igualdade ou desigualdade determinam o segundo membro de uma equação ou inequação.

Desse modo, dada a inequação:

2x + x – 9x ≤ 15 – 4x

Os termos 2x, x e –9x pertencem ao primeiro membro, e os termos 15 e – 4x pertencem ao segundo.

O Que É Igualdade E Desigualdade?

Ambos determinam relações de ordem entre números e incógnitas. O sinal de igual é utilizado quando se quer expressar a seguinte situação: Existe um valor para as incógnitas que faz com que o resultado dos cálculos propostos no primeiro membro seja igual ao resultado dos cálculos propostos no segundo.

A desigualdade, por sua vez, pode ser representada por um dos quatro símbolos seguintes:

<, >, ≥ e ≤

Esses símbolos mostram que o conjunto de operações do primeiro membro possui um resultado “menor”, “maior”, “maior igual” ou “menor igual” ao resultado do segundo membro.

Grau

O grau de equações e de inequações pode ser encontrado da seguinte maneira:

Se a equação ou a inequação possui apenas uma incógnita, então, o grau dela é dado pelo maior expoente da incógnita. Por exemplo: o grau da equação 4x3 + 2x2= 7 é 3.

Se a equação ou inequação possui mais de uma incógnita, então, o grau dela é dado pela maior soma entre os expoentes de um mesmo termo. Por exemplo, o grau da equação 4xyz + 7yz2 – 5x2y2z2 = 0 é 6.

Exemplos De Equações:

1) 4x = 16

2) 2x – 8 = 144

3)18x2 = 2x-8
x

Exemplos De Inequações:

1) 12x + x2 ≤ 12

2) 144 ≥ 12x + 7

3) 128 – 14x < 12x + 4

Sistemas De Equações Do Primeiro Grau Com Duas Incógnitas

Quando tratamos as equações do 1° grau com duas variáveis vimos que a equação x + y = 20 admite infinitas soluções, pois se não houver restrições como as do exemplo na página em questão, podemos atribuir qualquer valor a x, e para tornar a equação verdadeira, basta que calculemos y como sendo 20 - x.

A equação x - y = 6 pelos mesmos motivos, em não havendo restrições, também admite infinitas soluções.

Como as equações x + y = 20 e x - y = 6 admitem infinitas soluções podemos nos perguntar:

Será que dentre estas soluções existem aquelas que são comuns às duas equações, isto é, que resolva ao mesmo tempo tanto a primeira, quanto à segunda equação?

Este é justamente o tema deste tópico que vamos tratar agora.

Métodos De Resolução

Há vários métodos para calcularmos a solução deste tipo de sistema. Agora veremos os dois mais utilizados, primeiro o método da adição e em seguida o método da substituição.

Método Da Adição

Este método consiste em realizarmos a soma dos respectivos termos de cada uma das equações, a fim de obtermos uma equação com apenas uma incógnita.

Quando a simples soma não nos permite alcançar este objetivo, recorremos ao princípio multiplicativo da igualdade para multiplicarmos todos os termos de uma das equações por um determinado valor, de sorte que a equação equivalente resultante, nos permita obter uma equação com uma única incógnita.

A seguir temos outras explicações que retratam estas situações.

Quando O Sistema Admite Uma Única Solução?

Tomemos como ponto de partida o sistema composto pelas duas equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Perceba que iremos eliminar o termo com a variável y, se somarmos cada um dos termos da primeira equação com o respectivo termo da segunda equação:

Agora de forma simplificada podemos obter o valor da incógnita x simplesmente passando o coeficiente 2 que multiplica esta variável, para o outro lado com a operação inversa, dividindo assim todo o segundo membro por 2:

$$2x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{2} \Rightarrow x = 13$$

Agora que sabemos que x = 13, para encontrarmos o valor de y, basta que troquemos x por 13 na primeira equação e depois isolemos y no primeiro membro:

Escolhemos a primeira e não a segunda equação, pois se escolhêssemos a segunda, teríamos que realizar um passo a mais que seria multiplicar ambos os membros por -1, já que teríamos -y no primeiro membro e não y como é preciso, no entanto podemos escolher a equação que quisermos. Normalmente iremos escolher a equação que nos facilite a realização dos cálculos.

Observe também que neste caso primeiro obtivemos o valor da variável x e em função dele conseguimos obter o valor de y, porque isto nos era conveniente. Se for mais fácil primeiro encontrarmos o valor da segunda incógnita, é assim que devemos proceder.

Quando um sistema admite uma única solução dizemos que ele é um sistema possível e determinado.

Quando O Sistema Admite Uma Infinidade De Soluções?

Vejamos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$$

Note que somando todos os termos da primeira equação ao da segunda, não conseguiremos eliminar quaisquer variáveis, então vamos multiplicar os termos da primeira por -2 e então realizarmos a soma:

Veja que eliminamos não uma das variáveis, mas as duas. O fato de termos obtido 0 = 0 indica que o sistema admite uma infinidade de soluções.

Quando um sistema admite uma infinidade de soluções dizemos que ele é um sistema possível e indeterminado.

Quando O Sistema Não Admite Solução?

Vejamos este outro sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x - 6y = -5 \end{cases}$$

Note que se somarmos os termos da primeira equação com os da segunda, também não conseguiremos eliminar nenhuma das variáveis, mas agora veja o que acontece se multiplicarmos por 2 todos os termos da primeira equação e realizarmos a soma das equações:

Obtivemos 0 = -3 que é inválido, este é o indicativo de que o sistema não admite soluções.

Quando um sistema não admite soluções dizemos que ele é um sistema impossível.

Método Da Substituição

Este método consiste em elegermos uma das equações e desta isolarmos uma das variáveis. Feito isto substituímos na outra equação, a variável isolada pela expressão obtida no segundo membro da equação obtida quando isolamos a variável.

Este procedimento também resultará em uma equação com uma única variável.

O procedimento é menos confuso do que parece. A seguir veremos em detalhes algumas situações que exemplificam tais conceitos, assim como fizemos no caso do método da adição.

Quando o sistema admite uma única solução?

Para nos permitir a comparação entre os dois métodos, vamos utilizar o mesmo sistema utilizado no método anterior:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Vamos escolher a primeira equação e isolar a variável x:

$$x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y$$

Agora na segunda equação vamos substituir x por 20 - y:

Agora que sabemos que y = 7, podemos calcular o valor de x:

$$x = 20 - y \Rightarrow x = 20 - 7 \Rightarrow x = 13$$

Quando O Sistema Admite Uma Infinidade De Soluções?

Solucionemos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$$

Este sistema já foi resolvido pelo método da adição, agora vamos resolvê-lo pelo método da substituição.

Por ser mais fácil e gerar em um resultado mais simples, vamos isolar a incógnita y da primeira equação:

$$2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$$

Agora na outra equação vamos substituir y por 10 - 2x:

Como obtivemos 0 = 0, o sistema admite uma infinidade de soluções.

Quando o sistema não admite solução?

Novamente vamos solucionar o mesmo sistema utilizado no método anterior:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x - 6y = -5 \end{cases}$$

Observe que é mais viável isolarmos a variável x da primeira equação, pois o seu coeficiente 2 é divisor de ambos coeficientes do primeiro membro da segunda equação, o que irá ajudar nos cálculos:

$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1 - 3y}{2}$$

Agora substituímos x na segunda equação pelo valor encontrado:

Conforme explicado anteriormente, o resultado 0 = -3 indica que este sistema não admite soluções.

Exercícios

Inequações Do 1º Grau Com Duas Variáveis

1. Um das soluções da equação 3x – 4y = 7 é o par ordenado:

a) (3, 1) b) (2, 5) c) (5, 2) d) (4, 1)

2. Dada a equação 5x – 2y = 1, quando x = - 3, então:

a) y = - 8 b) y = 8 c) y = - 7 d) y =7

3. O par (x, y) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$, o valor de $x^2 - y^2$ é:

a) 120 b) 110 c) 100 d) 12

4. No sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, o valor de x é:

a. igual a zero.

b. igual ao valor de y.

c. menor que o valor de y.

d. o dobro do valor de y.

5. No sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$, podemos afirmar que:

a) x = y b) x = 0 e y = 4 c) x > y d) x = 4 e y = 0

6. O valor de x no sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$ pertence ao conjunto:

a. dos números primos.

b. dos números ímpares.

c. dos números pares.

d. dos múltiplos de 3.

7. Num quintal existem perus e coelhos, num total de 62 cabeças e 148 pés. Quantos são os perus e quantos são os coelhos?

R: (______)

8. Uma sorveteria vende picolé simples a R$ 4,00 cada um e picolé coberto com chocolate a R$ 5,50 cada um. Num dia em que vendeu 200 picolés recebeu R$ 893,00. Quantos picolés cobertos de chocolate foram vendidos?

R: (______)

9. Um motorista de táxi, em uma determinada localidade, cobra uma quantia mínima de cada passageiro, independentemente da distância a ser percorrida, mais uma certa quantia, também fixa, por quilômetro rodado. Um passageiro foi transportado 30 Km e pagou Cr$ 1.6000,00. Um outro passageiro foi transportado por 25 Km e pagou Cr$ 1.350,00. Calcule o valor de cruzeiros reais cobrado por quilômetro rodado.

R: (______)

10. Numa divisão o quociente é 8 e o resto é 24. Sabe-se que a soma do dividendo, do divisor, do quociente e do resto é 344. Então, a diferença dividendo menos divisor é:

a) 127 b) – 127 c) 100 d) 248 e) – 248

Exercícios
SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Respostas:

1. C	**4.** D	**7.** 50 perus e 12 coelhos	
2. A	**5.** A	**8.** 62 picolés cobertos com chocolate	**10.** D
3. A	**6.** C	**9.** Cr$ 50,00	

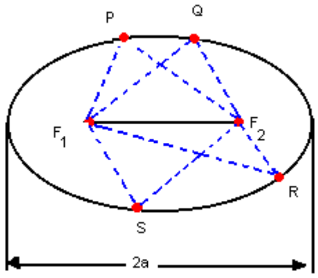
Geometria Analítica - Cónicas

Elipse

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, F1 e F2 , e sendo 2a um número real maior que a distância entre F1 e F2, chamamos de elipse o conjunto dos pontos do plano α tais que a soma das distâncias desses pontos a F1 e F2 seja sempre igual a 2a.

Por exemplo, sendo P, Q, R, S, F1 e F2 pontos de um mesmo plano e F1F2 < 2a, temos:

$$\begin{cases} d_{F_1P} + d_{F_2P} = 2a \\ d_{F_1Q} + d_{F_2Q} = 2a \\ d_{F_1R} + d_{F_2R} = 2a \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ d_{F_1S} + d_{F_2S} = 2a \end{cases}$$



A figura obtida é uma elipse.

Observações:

1ª) A Terra descreve uma trajectória elíptica em torno do sol, que é um dos focos dessa trajectória.

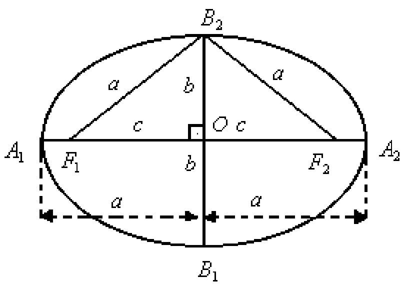
A lua em torno da terra e os demais satélites em relação a seus respectivos planetas também apresentam esse comportamento.

2ª) O cometa de Halley segue uma órbita elíptica, tendo o Sol como um dos focos.

3ª) As elipses são chamadas cónicas porque ficam configuradas pelo corte feito em um cone circular recto por um plano oblíquo em relação à sua base.

Elementos

Observe a elipse a seguir. Nela, consideramos os seguintes elementos:



- focos : os pontos F1 e F2
- centro: o ponto O, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- semi-eixo maior: a
- semi-eixo menor: b
- semidistância focal: c
- vértices: os pontos A1, A2, B1, B2
- eixo maior: $|A_1A_2| = 2a$
- eixo menor: $|B_1B_2| = 2b$
- distância focal: $|F_1F_2| = 2c$

Relação fundamental

Na figura acima, aplicando o Teorema de Pitágoras ao tri6angulo OF2B2 , rectângulo em O, podemos escrever a seguinte relação fundamental:

a2 =b2 + c2

Excentricidade

Chamamos de excentricidade o número real e tal que:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Pela definição de elipse, 2c < 2a, então c < a e, consequentemente, 0 < e < 1.

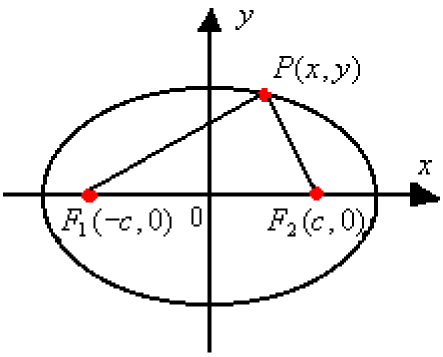
Observação: Quando os focos são muito próximos, ou seja, c é muito pequeno, a elipse se aproxima de uma circunferência.

Equações

Vamos considerar os seguintes casos:

a) elipse com centro na origem e eixo maior horizontal

Sendo c a semidistância focal, os focos da elipse são F1(-c, 0) e F2(c, 0):

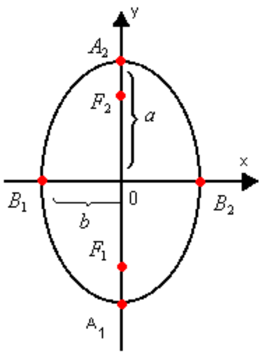


Aplicando a definição de elipse $(d_{F_1P} + d_{F_2P} = 2a)$, obtemos a equação da elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) elipse com centro na origem e eixo maior vertical

Nessas condições, a equação da elipse é:



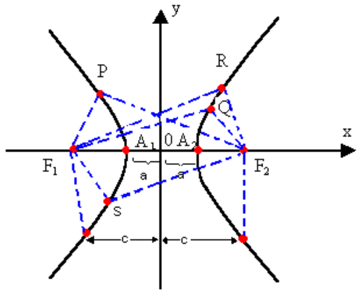
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Hipérbole

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, F1 e F2, e sendo 2a um número real menor que a distância entre F1 e F2, chamamos de hipérbole o conjunto dos pontos do plano α tais que o módulo da diferença das dist6ancias desses pontos a F1 e F2 seja sempre igual a 2a.

Por exemplo, sendo P, Q, R, S, F1 e F2 pontos de um mesmo plano e F1F2 = 2c, temos:

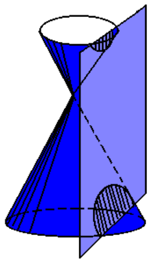
$$\begin{cases} |d_{F_1P} - d_{F_2P}| = 2a \\ |d_{F_1Q} - d_{F_2Q}| = 2a \\ |d_{F_1R} - d_{F_2R}| = 2a \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ |d_{F_1S} - d_{F_2S}| = 2a \end{cases}$$



A figura obtida é uma hipérbole.

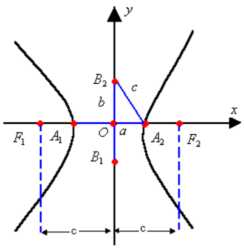
Observação:

Os dois ramos da hipérbole são determinados por um plano paralelo ao eixo de simetria de dois cones circulares rectos e opostos pelo vértice:



Elementos

Observe a hipérbole representada a seguir. Nela, temos os seguintes elementos:



- focos: os pontos F1 e F2
- vértices: os pontos A1 e A2
- centro da hipérbole: o ponto O, que é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$
- semi-eixo real: a
- semi-eixo imaginário: b
- semidistância focal: c
- distância focal: $|F_1F_2| = 2c$
- eixo real: $|A_1A_2| = 2a(\textit{contém os focos})$
- eixo imaginário: $|B_1B_2| = 2b$ (b > 0 e tal que $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ - relação fundamental)

Excentricidade

Chamamos de excentricidade o número real e tal que:

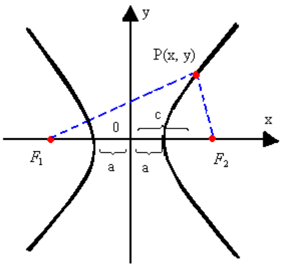
$$e = \frac{c}{a}$$

Como c > a, temos e > 1.

Equações

Vamos considerar os seguintes casos:

a) hipérbole com centro na origem e focos no eixo Ox



F1 (-c, 0)

F2 (c, 0)

Aplicando a definição de hipérbole:

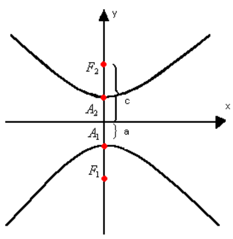
$$\left|d_{F_1P} - d_{F_2P}\right| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Obtemos a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy

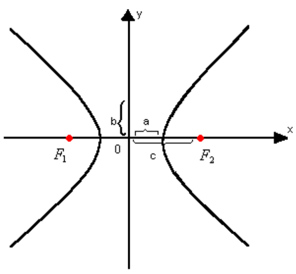
Nessas condições, a equação da hipérbole é:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole equilátera

Uma hipérbole é chamada equilátera quando as medidas dos semi-eixos real e imaginário são iguais:

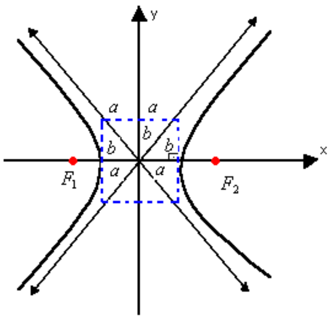


a = b

Assímptotas da hipérbole

Assímptotas são rectas que contêm as diagonais do rectângulo de lados 2a e 2b.

Quando o eixo real é horizontal, o coeficiente angular dessas rectas é $m = \pm \frac{b}{a}$; quando é vertical, o coeficiente é $m = \pm \frac{a}{b}$.



Equação

Vamos considerar os seguintes casos:

a) eixo real horizontal e C(0, 0)

As assímptotas passam pela origem e têm coeficiente angular $m = \pm \frac{b}{a}$; logo, suas equações são da forma:

$$y = \pm \frac{b}{a}.x$$

b) eixo vertical e C(0, 0)

As assímptotas passam pela origem e têm coeficiente angular $m = \pm \frac{a}{b}$; logo, suas equações são da forma:

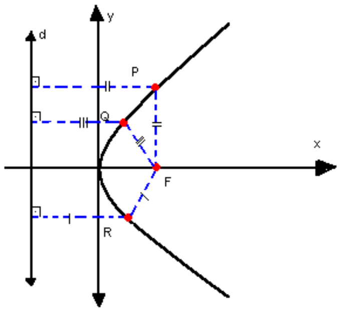
$$y = \pm \frac{a}{b}.x$$

Parábola

Dados uma reta d e um ponto F $(F \notin d)$, de um plano α, chamamos de parábola o conjunto de pontos do plano α equidistantes de F e d.

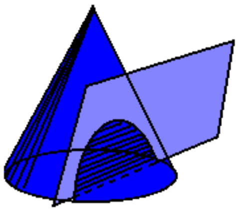
Assim, sendo, por exemplo, F, P, Q e R pontos de um plano α e d uma recta desse mesmo plano, de modo que nenhum ponto pertença a d, temos:

$$\begin{cases} d_{FP} = d_{Pd} \\ d_{FQ} = d_{Qd} \\ d_{FR} = d_{Rd} \end{cases}$$



Observações:

1ª) A parábola é obtida seccionando-se obliquamente um cone circular recto:



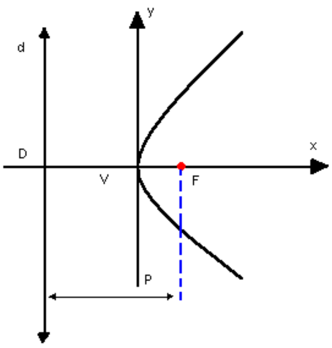
2ª) Os telescópios reflectores mais simples têm espelhos com secções planas parabólicas.

3ª) As trajectórias de alguns cometas são parábolas, sendo que o Sol ocupa o foco.

4ª) A superfície de um líquido contido em um cilindro que gira em torno de seu eixo com velocidade constante é parabólica.

Elementos

Observe a parábola representada a seguir. Nela, temos os seguintes elementos:



- foco: o ponto F
- diretriz: a reta d
- vértice: o ponto V
- parâmetro: p

Então, temos que:

- o vértice V e o foco F ficam numa mesma recta, o eixo de simetria e.

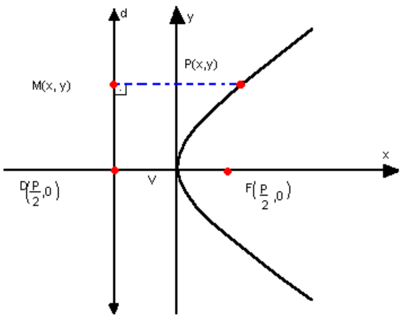
Assim, sempre temos $e \perp d$.

- DF =p
- V é o ponto médio de $\overline{DF}(DV = VF = \frac{P}{2})$

Equações

Vamos considerar os seguintes casos:

a) parábola com vértice na origem, concavidade para a direita e eixo de simetria horizontal



Como a recta d tem equação $x = -\frac{p}{2}$ e na parábola temos:

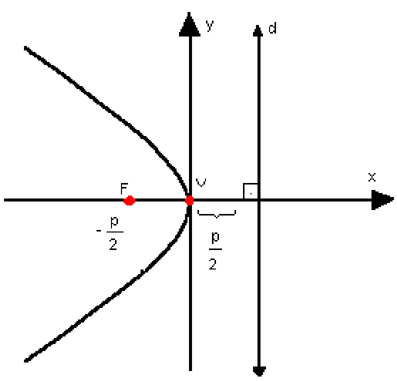
- $F(\frac{p}{2},0)$;
- P(x, y);
- dPF = dPd (definição);

obtemos, então, a equação da parábola:

$\boxed{y2 = 2px}$

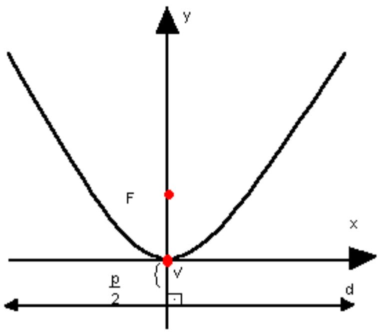
b) parábola com vértice na origem, concavidade para a esquerda e eixo de simetria horizontal

Nessas condições, a equação da parábola é:



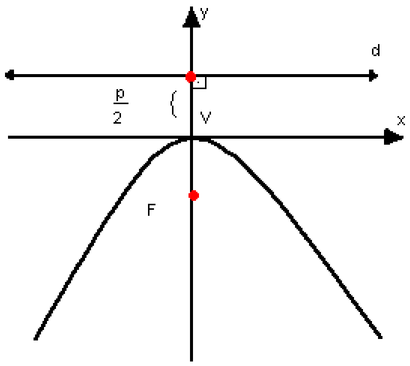
$\boxed{y2 = -2px}$

c) parábola com vértice na origem, concavidade para cima e eixo de simetria vertical



x2=2py

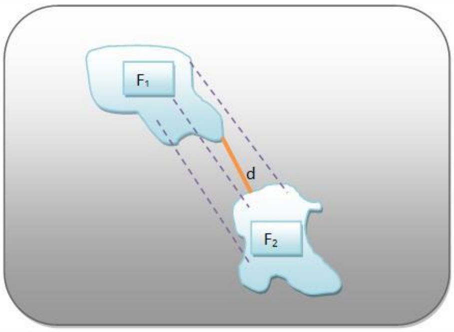
d) parábola com vértice na origem, concavidade para baixo e eixo de simetria vertical



x2= - 2py

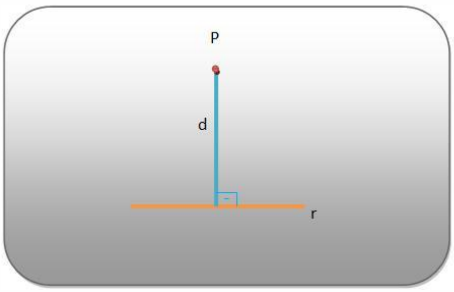
Lugares geométricos

Distância entre duas figuras
Considerando duas figuras planas F1 e F2, onde a distância (d) existente entre essas figuras é a medida do menor segmento de reta que se pode ter, pegando um ponto de cada figura.

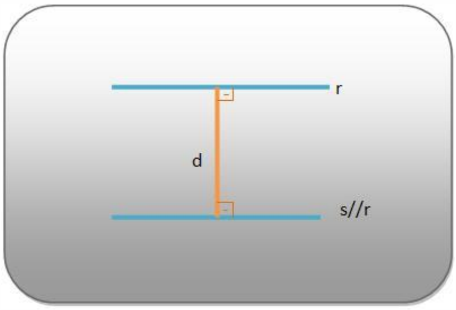


Exemplos

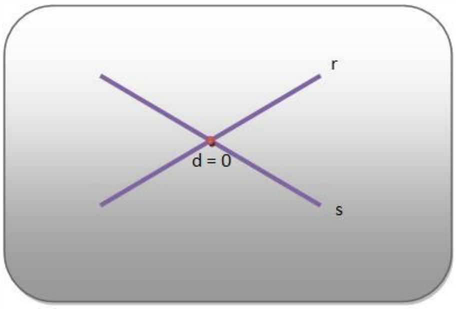
1) Ponto e reta



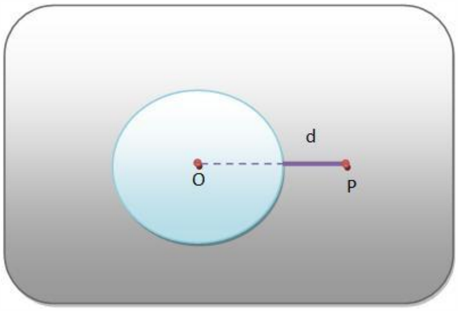
2) Retas paralelas



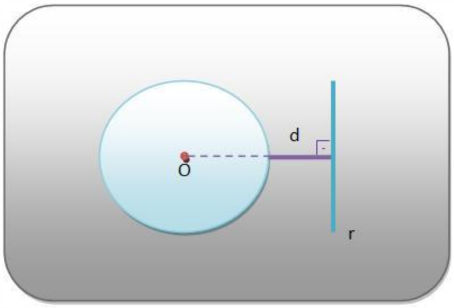
3) Retas concorrentes



4) Ponto e circunferência



5) Reta e circunferência:



Definição de lugar geométrico

Lugar geométrico é a figura ligada a todos os seus pontos que possuem uma determinada propriedade.

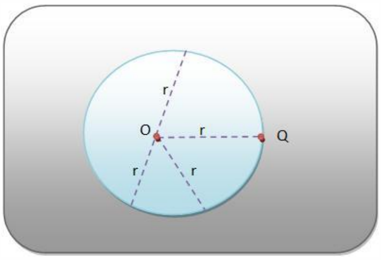
Vejamos os principais lugares geométricos.

Circunferência:
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de certo plano, onde as distâncias estão

estabelecidas por um ponto fixo O , que é o centro da circunferência , onde a constante r é a medida do raio.

Todos os pontos dessa circunferência estão a uma distância r do ponto O e qualquer ponto do plano que fica a uma distância r do ponto O faz parte da circunferência.

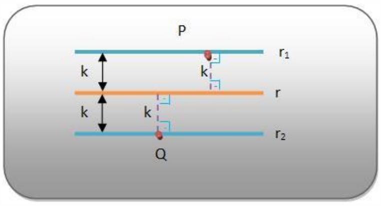
Vejamos:



Par de paralelas

O par de paralelas da reta r está distante de uma constante k , e também distanciam de uma constante k de uma reta r desse plano, sendo assim o elemento de uma das retas do par de paralelas.

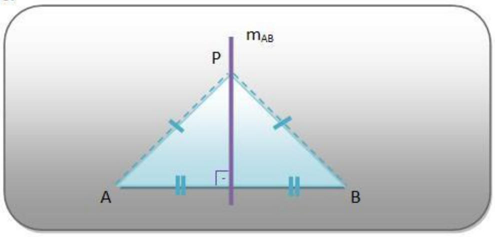
Vejamos:



Mediatriz

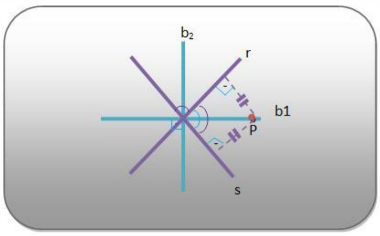
Mediatriz é o ponto que eqüidistam dos extremos de um segmento desse plano. Desta forma em qualquer ponto da mediatriz m_{AB} do segmento de reta $\overline{AB}$ da figura eqüidista de **A** e **B**, do mesmo jeito que qualquer ponto do plano que eqüidista de **A** e **B** pertence a m_{AB}.

Vejamos:



Par de retas perpendiculares
Par de retas perpendiculares é o ponto de um plano que equidistam de duas retas concorrentes desse plano, onde há um par de retas que são perpendiculares entre si e possuem as bissetrizes dos ângulos que são formados pelas concorrentes.

Vejamos:



Equação do Segundo Grau

A equação do segundo grau recebe esse nome porque é uma equação polinomial cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por:

ax2 + bx + c = 0

Numa equação do 2º grau, o x é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras a, b e c são chamadas de coeficientes da equação.

Os coeficientes são números reais e o coeficiente a tem que ser diferente de zero, pois do contrário passa a ser uma equação do 1º grau.

Resolver uma equação de segundo Grau, significa buscar valores reais de x, que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação.

Uma equação quadrática possui no máximo duas raízes reais.

Equações do 2º Grau Completas e Incompletas

As equações do 2º grau completas são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja a, b e c são diferentes de zero (a, b, c ≠ 0).

Por exemplo, a equação 5x2 + 2x + 2 = 0 é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero (a = 5, b = 2 e c = 2).

Uma equação quadrática é incompleta quando b = 0 ou c = 0 ou b = c = 0. Por exemplo, a equação 2x2 = 0 é incompleta, pois a = 2, b = 0 e c = 0

Exercícios Resolvidos

1) Determine os valores de x que tornam a equação 4x2 - 16 = 0 verdadeira.

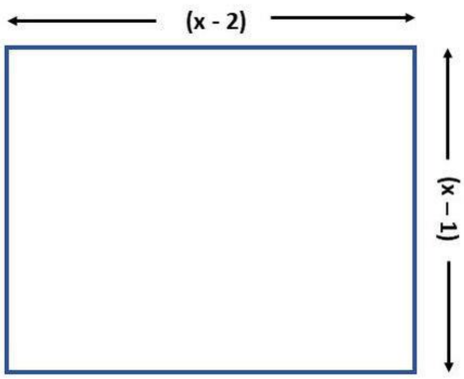
Solução:

A equação dada é uma equação incompleta do 2º grau, com b = 0. Para equações deste tipo, podemos resolver, isolando o x. Assim:

$4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$ Note que a raiz quadrada de 4 pode ser 2 e - 2, pois esses dois números elevados ao quadrado resultam em 4.

Assim, as raízes da equação 4x2 - 16 = 0 são x = - 2 e x = 2

2) Encontre o valor do x para que a área do retângulo abaixo seja igual a 2.



Solução:

A área do retângulo é encontrada multiplicando-se a base pela altura. Assim, devemos multiplicar os valores dados e igualar a 2.

(x - 2) . (x - 1) = 2

Agora vamos multiplicar todos os termos:

x . x - 1 . x - 2 . x - 2 . (- 1) = 2
x2 - 1x - 2x + 2 = 2
x2 - 3x + 2 - 2 = 0
x2 - 3x = 0

Após resolver as multiplicações e simplificações, encontramos uma equação incompleta do segundo grau, com c = 0.

Esse tipo de equação pode ser resolvido através da fatoração, pois o x se repete em ambos os termos. Assim, iremos colocá-lo em evidência.

x . (x - 3) = 0

Para o produto ser igual a zero, ou x = 0 ou (x - 3) = 0. Contudo, substituindo x por zero, as medidas dos lados ficam negativas, portanto, esse valor não será resposta da questão.

Então, temos que o único resultado possível é (x - 3) = 0. Resolvendo essa equação:

x - 3 = 0
x = 3

Desta forma, o valor do x para que a área do retângulo seja igual a 2 é x = 3.

Fórmula de Bhaskara

Quando uma equação do segundo grau é completa, usamos a Fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes da equação.

A fórmula é apresentada abaixo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$ Fórmula do Delta

Na fórmula de Bhaskara, aparece a letra grega Δ (delta), que é chamada de discriminante da equação, pois de acordo com o seu valor é possível saber qual o número de raízes que a equação terá.

Para calcular o delta usamos a seguinte fórmula:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ Passo a Passo

Para resolver uma equação do 2º grau, usando a fórmula de Bhaskara, devemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Identificar os coeficientes a, b e c.

Nem sempre os termos da equação aparecem na mesma ordem, portanto, é importante saber identificar os coeficientes, independente da sequência em que estão.

O coeficiente a é o número que está junto com o x2, o b é o número que acompanha o x e o c é o termo independente, ou seja, o número que aparece sem o x.

2º Passo: Calcular o delta.

Para calcular as raízes é necessário conhecer o valor do delta. Para isso, substituímos as letras na fórmula pelos valores dos coeficientes.

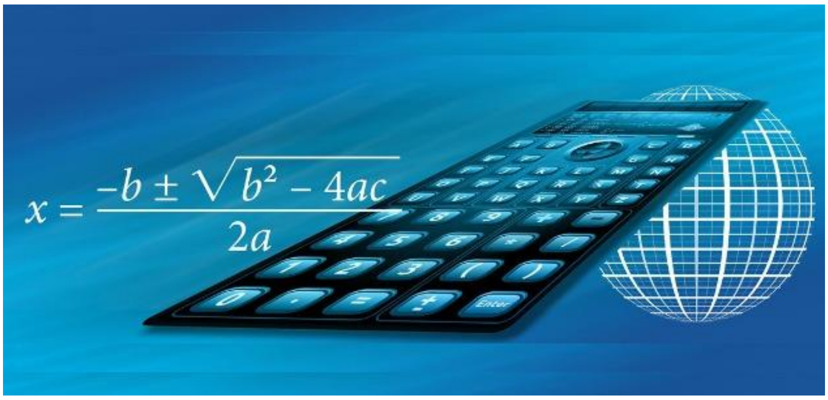
Podemos, a partir do valor do delta, saber previamente o número de raízes que terá a equação do 2º grau. Ou seja, se o valor de Δ for maior que zero (Δ > 0), a equação terá duas raízes reais e distintas.

Se ao contrário, delta for menor que zero (Δ < 0), a equação não apresentará raízes reais e se for igual a zero (Δ = 0), a equação apresentará somente uma raiz.

3º Passo: Calcular as raízes.

Se o valor encontrado para delta for negativo, não precisa fazer mais nenhum cálculo e a resposta será que a equação não possui raízes reais.

Caso o valor do delta seja igual ou maior que zero, devemos substituir todas as letras pelos seus valores na fórmula de Bhaskara e calcular as raízes.



Exercício Resolvido

Determine as raízes da equação 2x2 - 3x - 5 = 0

Solução:

Para resolver, primeiro devemos identificar os coeficientes, assim temos:

a = 2
b = - 3
c = - 5

Agora, podemos encontrar o valor do delta. Devemos tomar cuidado com as regras de sinais e lembrar que primeiro devemos resolver a potenciação e a multiplicação e depois a soma e a subtração.

Δ = (- 3)2 - 4 . (- 5) . 2 = 9 +40 = 49

Como o valor encontrado é positivo, encontraremos dois valores distintos para as raízes. Assim, devemos resolver a fórmula de Bhaskara duas vezes. Temos então:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2.2} = \frac{+3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2.2} = \frac{+3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Assim, as raízes da equação 2x2 - 3x - 5 = 0 são x = 5/2 e x = - 1.

Sistema de Equações do 2º Grau

Quando queremos encontrar valores de duas incógnitas diferentes que satisfaçam simultaneamente duas equações, temos um sistema de equações.

As equações que formam o sistema podem ser do 1º grau e do 2º grau. Para resolver esse tipo de sistema podemos usar o método da substituição e o método da adição.

Exercício Resolvido

Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 5 \\ y - 6x = 4 \end{cases}$$

Solução:

Para resolver o sistema, podemos utilizar o método da adição. Neste método, somamos os termos semelhantes da 1ª equação com os da 2ª equação. Assim, reduzimos o sistema para uma só equação.

$$\begin{array}{r} 3x^2 \cancel{-y} = 5 \\ + \cancel{y} - 6x = 4 \\ \hline 3x^2 - 6x = 9 \end{array}$$

Podemos ainda simplificar todos os termos da equação por 3 e o resultado será a equação x2 - 2x - 3 = 0. Resolvendo a equação, temos:

Δ = 4 - 4 . 1 . (- 3) = 4 + 12 = 16

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Depois de encontrar os valores do x, não podemos esquecer que temos ainda de encontrar os valores de y que tornam o sistema verdadeiro.

Para isso, basta substituir os valores encontrados para o x, em uma das equações.

y1 - 6. 3 = 4
y1 = 4 + 18
y1 = 22

y2 - 6 . (-1) = 4
y2 + 6 = 4
y2 = - 2

Portanto, os valores que satisfazem ao sistema proposto são (3, 22) e (- 1, - 2)