Problema simplificado

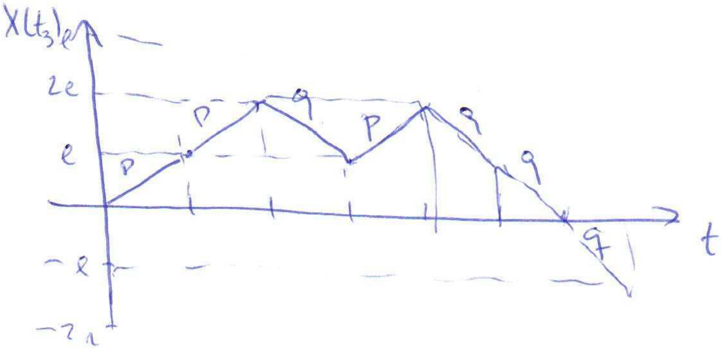
Bêbado dá passos de tamanho ℓ fixo com probabilidade do passo ser à direita p e do passo sair à esquerda q $(p+q=1)$. Se o bêbado inicia seu passeio na origem $x=0$, qual a probabilidade de encontrarmos o bêbado na posição $x = m\ell$? $(m = 0, 1, 2, \ldots,$ ou $\ldots, -2, -1)$. Isto é

$$P_N(x), \quad x = m\ell \qquad -N \le m \le N.$$

Denotemos por: $n_1 = \#$ passos à direita, $n_2 = \#$ passos à esquerda $\Big\} \; n_1 + n_2 = N$

$$N = n_1 + n_2, \quad x = (n_1 - n_2)\ell = (2n_1 - N)\ell$$

Assim basta termos duas informações (por ex. N, n_1) que temos a outra variável



Uma dada configuração $e_1 e_2 \cdots e_N$ com n_1 passos à direita e $n_2 = N - n_1$ passos à esquerda ocorrerá com probabilidade

$$\underbrace{p \cdot p \cdots p}_{n_1} \; \underbrace{q\,q\,q \cdots}_{n_2} = p^{n_1} q^{n_2}$$

Quantas configurações existem p/ dado n_1 com N? (n_1, N)?

$n_1 = 0 \rightarrow$ 1 configuração $p^0 q^N = q^N$

$n_1 = 1 \rightarrow \left.\begin{matrix} pqq\ldots q \\ qpq\ldots q \\ \vdots \\ p\ldots pq \end{matrix}\right\}$ N config. com prob. $p^1 q^{N-1} = N p q^{N-1}$

$n_1 = 2 \rightarrow \left.\begin{matrix} ppq\ldots q \\ pqpq\ldots q \\ \vdots \\ qq\ldots pp \end{matrix}\right\}$ 1º passo N possibilidades, 2º passo $(N-1)$ possibilidades (mas repetidos) $\rightarrow \dfrac{N(N-1)}{2} = \dfrac{N!}{(N-2)!\,2!}$

$n_1 = 3$ $\quad \left.\begin{matrix} 1^{\circ} \text{ passo } N \text{ possib.} \\ 2^{\circ} \text{ passo } (N-1) \\ 3^{\circ} \text{ ''} \;\; (N-2) \end{matrix}\right\}$ repet. $\rightarrow \dfrac{N(N-1)(N-2)}{3} = \dfrac{N!}{3!\,(N-3)!}$

$n_1 \; \forall \longrightarrow \dfrac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} = \dfrac{N!}{n_1!\,n_2!} = \dbinom{N}{n_1}$

Probabilidade de ter-se n_1 passos à direita em N passos é

$$\boxed{W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!}\, p^{n_1} q^{n_2}}$$

A probabilidade de estar na posição x será então:

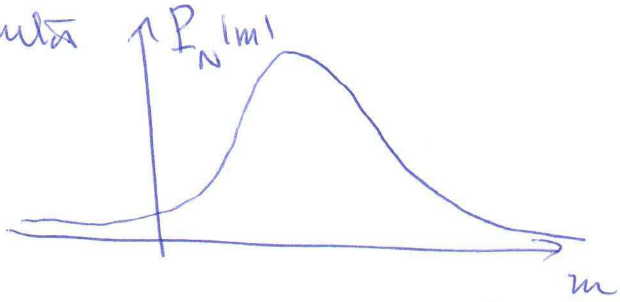
$$m = n_1 - n_2 \qquad n_1 = \frac{N+m}{2}, \quad n_2 = \frac{N-m}{2}$$
$$N = n_1 + n_2$$

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)!\left(\frac{N-m}{2}\right)!}\, p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}},$$

é claro que
$$\sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1) = 1 = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,n_2!}\, p^{n_1} q^{n_2} = \underbrace{(p+q)^N}_{\text{distr. binomial}}$$
$$= \sum_{n_1=0}^{N} \binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

repare que:
$$\underbrace{(p+q)(p+q)\cdots\cdots(p+q)}_{N \text{ passos}} = (p+q)^N = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,n_2!}\, p^{n_1} q^{n_2}\Big|_{n_2=N-n_1}$$

Temos então



Outra forma de se deduzir o resultado é:

$$(p+q)^N = \underbrace{(p+q)(p+q)\cdots(p+q)}_{N \text{ fatores}} = \sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1)$$
$$= \sum_{n_1=0}^{N} C_N(n_1)\, p^{n_1} q^{N-n_1}$$

Fazemos a expansão de $(p+q)^N$ em torno de $p=0$ $q=1$

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial p^{n_1}}(p+q)^N\Big|_{p=0,\,q=1} = n_1!\, C_N(n_1) = N(N-1)\cdots(N-(n_1-1))(p+q)^{N-n_1}\Big|_{\substack{p=0\\q=1}} = \frac{N!}{(N-n_1)!}$$

logo
$$C_N(n_1) = \frac{N!}{(N-n_1)!\,n_1!} \Rightarrow \boxed{W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}}$$

Cálculo de valores médios

$$\langle n_1\rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 W_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\, p^{n_1} q^{N-n_1} = p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\, p^{n_1} q^{N-n_1}$$

$$\langle n_1\rangle = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\Big|_{p+q=1} = pN(p+q)^{N-1} = Np \Rightarrow \boxed{\langle n_1\rangle = Np}$$

$$\langle n_2\rangle = \langle N - n_1\rangle = N - Np = N(1-p) = Nq \Rightarrow \boxed{\langle n_2\rangle = Nq}$$

$$\langle m\rangle = \langle n_1 - n_2\rangle = \boxed{N(p-q) = \langle m\rangle}$$

p/ $p = q = 1/2 \Rightarrow \langle m\rangle = 0$

$$\langle n_1^2\rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\, p^{n_1} q^{N-n_1} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\, p^{n_1} q^{N-n_1}$$

$$\langle n_1^2\rangle = p\frac{\partial}{\partial p}\, p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = p\frac{\partial}{\partial p}\left[pN(p+q)^{N-1}\right]\Big|_{p+q=1} =$$

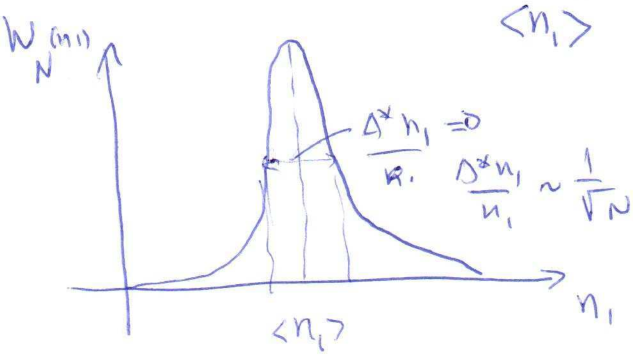
$$= pN(p+q)^{N-1} + p^2N(N-1)(p+q)^{N-2}\Big|_{p+q=1} = Np + p^2N(N-1)$$

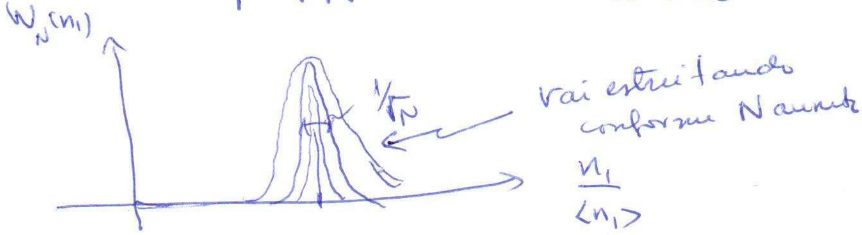
mas $\langle n_1\rangle^2 = N^2p^2 \Rightarrow \langle \Delta n_1^2\rangle = \langle n_1^2\rangle - \langle n_1\rangle^2 = Np + \cancel{N^2p^2} - Np^2 - \cancel{N^2p^2}$

$$= Np(1-p) = Npq$$

$$\langle \Delta n_1^2\rangle = Npq \Rightarrow \Delta^* n_1 = \sqrt{\langle \Delta n_1^2\rangle} = \sqrt{Npq}$$

Largura relativa $\dfrac{\Delta^* n_1}{\langle n_1\rangle} = \dfrac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\dfrac{q}{p}}\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ distribuição estreita qdo $N \to \infty$





Podemos expandir $W_N(n_1)$ em torno do ponto de máximo $\tilde{n}_1$. Para isto fazemos $n_1 = \tilde{n}_1 + \eta$ e expandimos $\ln W_N(n_1)$ em série de Taylor

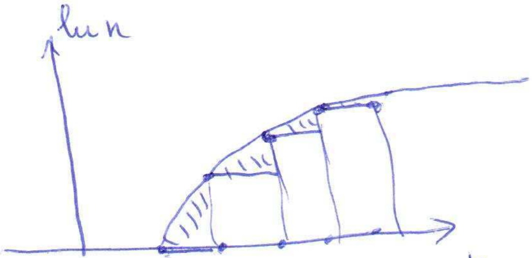
$$\ln W_N(n_1) = \ln W_N(\tilde{n}_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial n_1^2}\ln W_N(n_1)\Big|_{n_1=\tilde{n}_1}\eta^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial n_1^3}\ln W_N(n_1)\Big|_{n_1=\tilde{n}_1}\eta^3 + \dots$$

Calculemos as derivadas dos logarítmos acima. Para isto temos que saber como derivar-se fatoriais.

Parêntesis: Fórmula de Stirling

$$\ln n! = \ln n + \ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln(1) = \sum_{n=1}^{n} \ln n$$

mas veja a figura



se n for grande, a menos de pequenos erros (área achureada) temos

$$\sum_{n=1}^{n} \ln n \simeq \int_1^n \ln n \, dn = \left[n \ln n - n \right]_1^n = n \ln n - n - \ln 1 + 1 \simeq n \ln n - n$$

Então $\boxed{\ln n! = n \ln n - n \ \text{p/ } n \text{ grande} \equiv \text{Fórmula de Stirling}}$

então $\dfrac{d \ln n!}{dn} = \ln n + \cancel{1} - \cancel{1} = \ln n$

ou ainda $\dfrac{d \ln n!}{dn} = \dfrac{\ln(n+1)! - \ln(n!)}{1} = \ln(n+1) + \cancel{\ln n!} - \cancel{\ln n!} \simeq \ln n$

ou ainda $\dfrac{d \ln n!}{dn} = \dfrac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \dfrac{(n+1)\ln(\overset{\simeq n}{n+1}) - (\cancel{n}+1) - n \ln n + \cancel{n}}{1} = \dfrac{(n+1)\ln n - n \ln n}{1} = \ln$

Cálculo do máximo $\tilde{n}_1$: $\left. \dfrac{d \ln W_N(n_1)}{dn_1} \right|_{n_1 = \tilde{n}_1} = 0$

$$\frac{d}{dn_1} \Big[\underset{\downarrow \, 0}{\ln N!} - \underset{\downarrow \, -\ln n_1}{\ln n_1!} - \ln(N-n_1)! + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q \Big] = 0$$

$$-\ln n_1 - \ln(N-n_1)(-) + \ln p - \ln q \Big|_{n_1 = \tilde{n}_1} = \ln \left[\frac{N - \tilde{n}_1}{\tilde{n}_1} \frac{p}{q} \right] = 0$$

$$(N - \tilde{n}_1) p = \tilde{n}_1 q \Rightarrow Np = \tilde{n}_1 (p+q) = \tilde{n}_1 \Rightarrow \boxed{\tilde{n}_1 = Np = \langle n_1 \rangle}$$

$$\frac{d^2}{dn_1^2} \ln W_N(n_1) = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N-n_1} \Big|_{\tilde{n}_1} = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{Nq} = -\frac{1}{Npq}$$

e temos então a expansão:

$$\ln W_N(n_1) = \ln W_N(\tilde{n}_1) - \frac{1}{2Npq}\underbrace{(n_1-\tilde{n}_1)}_{\eta}^2 \quad \text{ou}$$

$$W_N(n_1) = W_N(\tilde{n}_1) \exp\left\{-\frac{(n_1-\langle n_1\rangle)^2}{2\langle\Delta n_1^2\rangle}\right\}$$

Podemos calcular $W_N(\tilde{n}_1)$ por normalização:

$$\sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1) = 1 = \int_0^N W_N(n_1)\,dn_1 \simeq \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{n}_1+\eta)\,d\eta$$

expande-se a integral p/ $-\infty$

assim $$\underset{W_N(\tilde{n}_1)}{\overset{\shortparallel}{\tilde{W}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-\eta^2}{2\langle\Delta n_1^2\rangle}\right\} d\eta = 1 \Longrightarrow$$

Parêntesis: $I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx \Rightarrow I^2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

coord polares $dx\,dy = \rho\,d\theta\,d\rho \Rightarrow I^2(a) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\infty} \rho\, e^{-a\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{a}$

$$\left.\frac{e^{-a\rho^2}}{-2a}\right|_0^{\infty}$$

logo $I(a) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

---

logo $$\tilde{W}\int \exp \frac{-\eta^2}{2\langle\Delta n_1^2\rangle} = \tilde{W}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1/2\langle\Delta n_1^2\rangle}} = \tilde{W}\sqrt{2\pi\langle\Delta n_1^2\rangle}$$

e $\tilde{W} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta n_1^2\rangle}}$ e assim

$$\boxed{W(n_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta n_1^2\rangle}}\, e^{-\frac{(n_1-\langle n_1\rangle)^2}{2\langle\Delta n_1^2\rangle}}}$$

$n_1 - n_2 = m = 2n_1 - N$

$n_1 = \dfrac{N+m}{2}$

$n_2 = \dfrac{N-m}{2}$

Distribuição Gaussiana de Probabilidades

$x = m\ell \qquad \Delta x = \Delta m\, \ell \leftarrow$ menor espaçamento é 2ℓ

Na escala macroscópica comprimento típico é $\xi \gg \ell \leftarrow$ (compr. microscópico)

Por exemplo $\ell = 10^{-8}$ m e $\xi = 10^{-6}$ m. Não queremos saber exatamente em que m estará mas o intervalo $\Delta x = \Delta m\, \ell$ que é da ordem de ξ.

$\underbrace{\overset{2\ell}{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}}_{dx}$ ———. Todos os P_m tais que os m pertençam ao intervalo em que x esta entre x e $x+dx$ serão e devemos somá-los. Como são praticamente iguais temos

$$\mathcal{P}(x)\,dx = P_m \cdot \frac{dx}{2\ell} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2\sqrt{Npq}}\, e^{-\frac{\left[\frac{N-m}{2} - \left\langle \frac{N-m}{2}\right\rangle\right]^2}{2Npq}}$$

$\frac{N-m}{2} \to n_1$, $\left\langle \frac{N-m}{2}\right\rangle \to \langle n_1\rangle$

$\frac{dx}{2\ell}$: # m no intervalo

Como $x = (n_1 - n_2)\ell = (2n_1 - N)\ell \Rightarrow \frac{x - \langle x\rangle}{2} = (n_1 - \langle n_1\rangle)\ell$

e temos

$$\mathcal{P}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{Npq\,\ell^2}}_{\equiv\, \sigma}}\, e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{8Npq\,\ell^2}}$$

$8Npq\,\ell^2 \to 2\sigma^2$

Assim

$$\boxed{\mathcal{P}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \sigma = 2\sqrt{Npq}\,\ell^2 \qquad \langle x\rangle = N(p-q)\ell}$$

Normalização: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x)\,dx = 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy$

$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}\,\sigma}} \cdot \sqrt{\pi}\,\cancel{\sqrt{2\sigma^2}} = 1$! $\leftarrow$ como deveria ser!

Calculo de $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, P(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int x \, e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$x - \langle x \rangle = y \Rightarrow x = y + \langle x \rangle, \quad dx = dy$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\overset{0}{\cancel{y}} + \langle x \rangle)\, e^{-y^2/2\sigma^2} dx = \langle x \rangle \;!$$ ← como deveria ser!

$$\langle (x-\langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\langle x \rangle)^2 \, e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2\sigma^2} dy$$

mas $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = -\frac{d}{da}\left(\sqrt{\pi}\, a^{-1/2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$

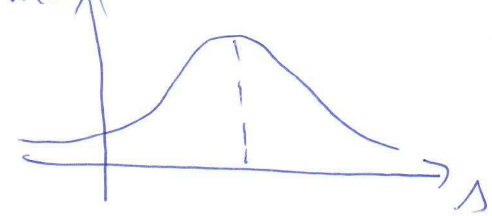
Assim

$$\langle (x-\langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\sigma} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}} (2\sigma^2)^{3/2} = \sigma^2 = 4Npq\,\ell^2$$ ← como deveria ser

* Pode-se generalizar o problema do caminho aleatório para dimensões arbitrárias, e em cada passo os mesmos terem uma distribuição individual também arbitrária.

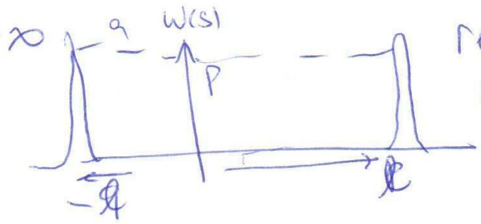
Calculo geral de valores médios no caminho aleatório

Podemos generalizar o exemplo anterior para a situação mais geral que o deslocamento de um passo qualquer tenha a distribuição $W(s)$



sendo $\int_{-\infty}^{\infty} W(s)\, ds = 1$

O caso



$W(s) = p\,\delta(s-\ell) + q\,\delta(s+\ell)$ → reproduz o anterior

A posição do bêbado para uma sequência de passos será:

$$x = s_1 + s_2 + \dots + s_N = \sum_{i=1}^{N} s_i$$

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle = N \langle s \rangle , \qquad \langle s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(s)\, s\, ds$$

Para uma dada sequência de passos $s_1, s_2, \dots, s_N$

$$x - \langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} (s_i - \langle s \rangle) = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i$$

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \Delta s_i \rangle = N \sum_{i=1}^{N} \langle \Delta s \rangle = N (\langle s - \langle s \rangle \rangle) = 0 \,!$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta s_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta s_j \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} (\Delta s_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \Delta s_i \Delta s_j \right\rangle$$

$$= N \langle (\Delta s)^2 \rangle + N(N-1) \overbrace{\langle \Delta s_i \rangle}^{=0} \langle \Delta s_j \rangle = N \langle (\Delta s)^2 \rangle$$

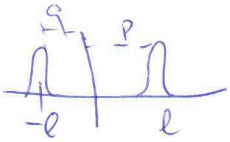
sendo $\langle (\Delta s)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \langle s \rangle)^2 W(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 W(s)\, ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} s W(s)\, ds \right]^2$

Assim temos

$$x = N \langle s \rangle , \quad \Delta^* x = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} \quad \text{tal que}$$

$$\frac{\Delta^* x}{\langle x \rangle} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \longleftarrow \text{pequeno q.do } N \text{ cresce}$$

Caso particular: O passo fixo de tamanho l

$W(s) \rightarrow$ 

$$\langle x \rangle = N \int s\, W(s)\, ds = N \left[\int_{-\infty}^{\infty} s \left[\delta(s-l) p + q\, \delta(s+l) \right] ds \right]$$

$$\langle x \rangle = N(p - q)$$

$$\langle s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s\, W(s)\, ds = pl - ql = l(p-q) , \qquad \langle s^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 W(s)\, ds = pl^2 + ql^2 = l^2$$

$$\langle (\Delta s)^2 \rangle = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2 = \underbrace{l^2 \cdot 1}_{(p+q)^2 = \cancel{p^2} + \cancel{q^2} + 2pq} - l^2 (p^2 + q^2 - 2pq) = 4pq\, l^2$$

① O caminho aleatório é soluç da equaç de difusão

A Eq. de difusão é $\dfrac{\partial P}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, D = coef. de difusão

No caso das caminhadas temos:

$$t = N\tau \quad [\tau \text{ escala de tempo}], \quad x = m\ell \leftarrow \text{escala de espaço}$$

Assim

$$P_{N+1}(m) = p P_N(m-1) + q P_N(m+1), \quad \text{se } p = q = 1/2$$

$$2P_{N+1}(m) = P_N(m-1) + P_N(m+1)$$

$$2\underbrace{\frac{\left[P_{N+1}(m) - P_N(m)\right]}{\tau}} = \frac{\ell^2}{\tau} \frac{\overbrace{\frac{\left[P_N(m-1) - P_N(m)\right]}{\ell}}^{-\frac{\partial P(t,x-1)}{\partial x}} + \overbrace{\frac{\left[P_N(m+1) - P_N(m)\right]}{\ell}}^{\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}}{\ell}$$

ou seja

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \underbrace{\frac{\ell^2}{2\tau}}_{D} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}} \text{ com } D = \frac{\ell^2}{2\tau}$$

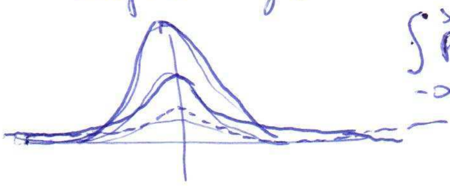
D = cte de difusão:

Tínhamos visto que: $P(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}$, $\langle x\rangle = 0$, $p = q = 1/2$

$$\langle x\rangle = 0 \quad \sigma^2 = \big(2\sqrt{\overset{t/\tau}{N}\,\underset{1/2}{p}\,\underset{1/2}{q}}\;\ell\big)^2 = \frac{t}{\tau}\ell^2 = 2\frac{\ell^2}{2\tau}t = 2Dt$$

Assim esperamos que a soluç da eq. de difusão seja

$$\boxed{P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}} e^{-x^2/4Dt}}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)\,dx = 1, \forall t$$

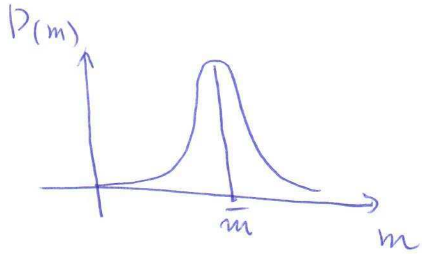
De fato $D\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{x}{2Dt} D P$, $D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{D P}{2Dt} + \frac{D x^2}{4D^2 t^2} P$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{P}{t} + \frac{x^2}{4Dt^2} P$$

Erro e Medidas

Se temos N_0 medidas independentes

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{N_0}$$

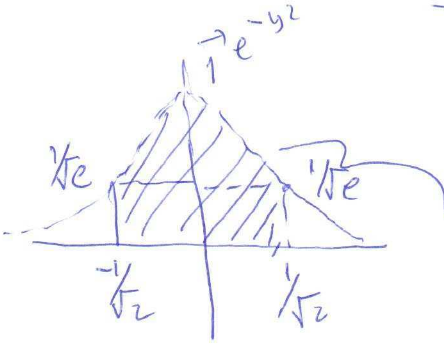


A medida é representada por $m = \bar{m} \pm \sigma = \bar{m}\left(1 \pm \frac{\sigma}{\bar{m}}\right)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{N_0}}$

O desvio padrão é tal que

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$$

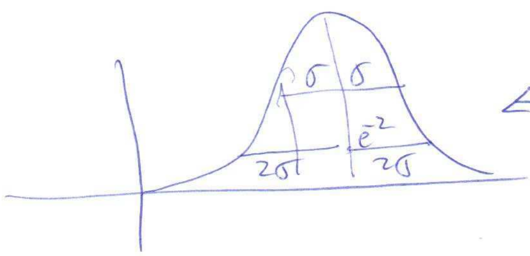
$$\text{área} = \frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx} = \frac{\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} e^{-y^2}\,dy}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy}_{\sim\sqrt{\pi}}} =$$



$$\frac{\text{área}}{\sqrt{\pi}} \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1+1/\sqrt{e}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+1/\sqrt{e}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = 0.64$$

Cálculo melhor $\quad 1 - \frac{1}{\pi} = 0.68 \sim 70\%$

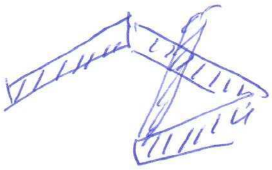
Se temos 2 desvios padrões



← 95%

Polímeros como caminhos aleatórios

Suponhamos o polímero como formado por N monômero de massas δm e comprimento δe



A massa do polímero é

$$M = N\delta m$$

O tamanho do polímero ≡ raio de giração $R_g = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{N(\delta e)^2}$

$R_g \simeq \delta e\sqrt{N}$ → logo a densidade do polímero seria

$$\frac{M}{V} \sim \frac{N\delta m}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{N}\,\delta e\right)^3} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\delta m}{\delta v}$$

Na realidade os polímeros possuem maior raio de giração (nos casos repulsivos) ou seja

$R_g \sim N^{\nu}$ e ν deve ser maior que $\frac{1}{2}$ ← caso do aleatório

pois os monômeros não permitem cruzamento (efeitos de exclusão) o que torna é diferentemente das configurações aleatórias,

$R_g \sim N^{\nu}$:

- $\nu = 3/5 > 1/2$ bom solvente
- $\nu = \frac{1}{2}$ viajante aleatório
- $\nu = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ solvente ruim (quase esfera sólida)