

## Пересчет координат

Спутниковые системы определяют координаты в общеземных системах: GPS - в WGS-84, ГЛОНАСС - в ПЗ-90. Используют же координаты в референционной, например в СК-42, или местной системе. Возникает необходимость пересчета координат из одной системы в другую. Общеземные геоцентрические координаты WGS-84 пересчитывают в геодезические широты  $B$ , долготы  $L$  и высоты  $H$ . Геодезические высоты трансформируют в ортометрические высоты  $H_g$ . По геодезическим широтам и долготам вычисляют плоские прямоугольные координаты, например, в проекции UTM. От вычисленных таким образом координат необходимо перейти к соответствующим координатам, применяемым в России. Переход может быть выполнен на любом этапе. Естественно в самом начале перейти от WGS-84 к ПЗ-90, затем на эллипсоид Красовского, вычислить геодезические координаты, нормальные высоты и плоские координаты Гаусса-Крюгера.

**Пересчет геоцентрических координат** Взаимосвязь между WGS-84 и ПЗ-90 устанавливают при помощи формул Гельмерта:

$$RWGS = DRO + (1+m)W.R_{пз},$$

$$RWGS = (X_{WGS}, Y_{WGS}, Z_{WGS})^T, DRO = (DXO, DYO, DZO)^T,$$

$$R_{пз} = (X_{пз}, Y_{пз}, Z_{пз})^T,$$

где  $RWGS$  и  $R_{пз}$  - векторы в соответствующих координатных системах,  $DRO$  - вектор

начала координатной системы ПЗ-90 в системе WGS-84;  $m$  - различие линейных масштабов в этих системах;  $W$  - матрица поворота координатных осей, зависит от трех малых углов  $w_X$ ,  $w_Y$ ,  $w_Z$ . Обычно угловые параметры не превышают  $1''$ . Поэтому матрицу  $W$ , где ее элементы в радианах, представляют в виде:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_Z & -w_Y \\ -w_Z & 1 & w_X \\ w_Y - w_X & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для пересчета координат надо знать семь параметров трансформирования:  $DXO$ ,  $DYO$ ,  $DZO$ ,  $m$ ,  $w_X$ ,  $w_Y$ ,  $w_Z$ . Их появление обусловлено точностью установки общеземных геодезических систем отсчета. Эти параметры многократно уточнялись. На момент подготовки учебного пособия параметры трансформирования официального статуса не имели. Для примера несколько их числовых значений приведено в таблице 11 (см. также: Параметры Земли 1990).

Параметры	ПЗ-90 WGS-84	ПЗ-90 WGS-84	СК-42 ПЗ-90	СК-42 ПЗ-90
$DXO$ , м	-0,3	0	+26,6	+25,00
$DYO$ , м	+2,2	0	-134,8	-141,00
$DZO$ , м	+1,0	+1	-77,3	-80,00
$m.10^6$	-0,06	0	-0,06	0,00
$w_X''$	-0,05	0	-0,17	0,00
$w_Y''$	-0,01	0	-0,39	-0,35
$w_Z''$	-0,07	-0,2	-0,83	-0,66

Формулу Гельмерта, учитывая, что  $W^{-1} = W^T$ , перепишем так, чтобы она была удобной для перехода от WGS-84 к ПЗ-90:

$$R_{пз} = (1 - m)W^T(R_{WGS} - DRO) \gg (1 - m)W^TR_{WGS} - DRO .$$

Если координаты не трансформировать, то возникнет погрешность:

$$|d p| < (D_{XO2} + D_{YO2} + D_{ZO2})^{1/2} + R_3(3m^2 + 2(w_{X2} + w_{Y2} + w_{Z2}))^{1/2},$$

где  $R_3$  - радиус Земли, а  $w_X, w_Y, w_Z$  выражены в радианах. В настоящее время, как следует из данных табл. 11, эта погрешность может достигать 10 м.

**Пересчет геоцентрических координат в квазигеоцентрические.** Связь координат референчных и общеземных систем устанавливается формулой Гельмерта (Пеллинен, 1978):

$$R = DR + (1+m)W.r,$$

$$r = (X_r, Y_r, Z_r)^T, R = (X_R, Y_R, Z_R)^T, DR = (DXO, DYO, DZO)^T,$$

где  $r$  и  $R$  - векторы соответственно в референчной и в общеземной системах координат,  $DR$  - вектор начала национальной системы в общеземной системе,  $m$  - разница в линейных масштабах систем;  $W$  - матрица поворота координатных осей от референчной системы к общеземной.

Ориентировочные значения всех семи параметров взаимосвязи референчной и общеземной систем приведены в таблице 11 (Базлов и Бовшин и др., 1995; Бойков и др., 1993; Пеллинен, 1992). Несколько другие значения даны в (Параметры Земли 1990).

С целью пересчета координат из общеземной в референчную систему уравнения связи должны быть записаны в виде:

$$r = (1 - m)W^T(R - DR) .$$

Предположим, определены координаты двух пунктов:  $R_A$  пункта А и  $R_B$  пункта В. Тогда уравнение связи для разности координат принимает следующий вид:

$$r_B - r_A = (1-m) W^T(R_B - R_A) .$$

В этой формуле нет линейных параметров  $DR$ . Вместе с ними исчезли и их погрешности.

Поэтому в относительных определениях имеет смысл трансформировать не координаты, а измеренные с базовой станции приращения координат.

**Пересчет координат в местную систему.** Если с помощью спутниковой системы позиционирования определены координаты трех - четырех опорных пунктов, то появляется возможность пересчитать координаты текущих точек в координатную систему окружающих пунктов. Пересчет тем точнее, чем меньше площадь объекта работ.

Для каждой опорной точки с известными GPS прямоугольными геоцентрическими координатами  $R$  в общеземной системе и вычисленными по геодезическим широтам, долготам и высотам координатам  $r$  в местной системе, используя преобразованные формулы трансформирования, можно составить следующие уравнения поправок  $v_i$ :

$$vX = DXO - Zr wY + Yr wZ + Xr m - (XR - Xr),$$

$$vY = DYO + Zr wX - Xr wZ + Yr m - (YR - Yr),$$

$$vZ = DZO - Yr wX + Xr wY + Zr m - (ZR - Zr).$$

В уравнениях 7 неизвестных параметров, образующих вектор:

$$t = (DXO, DYO, DZO, wX, wY, wZ, m)^T.$$

Чтобы его найти, нужны координаты в 2 системах минимум лоя 3 пунктов. Тогда будем иметь матричное уравнение поправок:

$$v = A t - L,$$

где в матрицу A собраны коэффициенты, стоящие в уравнениях поправок  $v_i$  перед искомыми параметрами трансформирования, а в вектор L - разности координат в общеземной и местной системах. Пусть P весовая матрица поправок v. Решая задачу по МНК находим параметры:

$$t = (ATPA)^{-1} \cdot ATPL.$$

Задачу можно упростить, исключив вектор DR. Для этого координаты некоторого опорного пункта A следует вычесть из соответствующих координат других опорных пунктов и составить следующего вида уравнения поправок:

$$vXi = - (Zri - ZrA)wY + (Yri - YrA)wZ + (Xri - XrA)m - [(Xri - Xr i) - (XRA - XrA)],$$

$$vYi = + (Zri - ZrA)wX - (Xri - XrA)wZ + (Yri - YrA)m - [(Yri - Yr i) - (YRA - YrA)],$$

$$vZi = - (Yri - YrA)wX + (Xri - XrA)wY + (Zri - ZrA)m - [(Zri - Zr i) - (ZRA - ZrA)].$$

Решив эти уравнения по МНК, определим вектор искоемых параметров

$$e = (wX, wY, wZ, m)^T$$

В России создана новая Государственная геодезическая сеть. На смену координатам СК-42 могут быть введены новые координаты на эллипсоиде Красовского СК-95. Чтобы перейти от общеземной к новой референцной системе достаточно будет к геоцентрическим координатам прибавить поправки (Базлов и др., 1996):

$$D X = -25,90 \text{ м}, \quad D Y = +130,94 \text{ м}, \quad D Z = +81,76 \text{ м}.$$

**Пересчет геодезических координат.** Геодезические широту B, долготу L и высоту H легко вычислить по трансформированным пространственным прямоугольным координатам X, Y, Z и по формулам раздела 2. Однако, чтобы найти X, Y, Z, надо иметь надежные параметры трансформирования. Кроме того, для отдельных регионов модель Гельмерта с 7 параметрами трансформирования может оказаться недостаточно точной. Поэтому применяют и более сложные модели трансформирования, например, полиномиальные:

$$B_r = B_{W0} + \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-s} a_{st} U^s V^t, \quad L_r = L_{W0} + \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-s} b_{st} U^s V^t,$$

$$U = a_u (B_{W0} - B_{W00}), \quad V = b_v (L_{W0} - L_{W00}),$$

$B_r$ ,  $L_r$  и  $B_W$ ,  $L_W$  - широты и долготы, отнесенные соответственно к референц-эллипсоиду и общеземному эллипсоиду,  $B_{W0}$ ,  $L_{W0}$  - средние для данного региона значения координат  $B_W$ ,  $L_W$ ,  $a_u$ ,  $b_v$  - коэффициенты пропорциональности, выбирают произвольно, но так, чтобы  $U$  и  $V$  стали небольшими величинами,  $a_{st}$ ,  $b_{st}$  - эмпирические коэффициенты. Их общее число равно  $(n+1)(n+2)$ . Для их определения, надо иметь не менее  $(n+1)(n+2)/2$  точек, для которых известны и  $B_r$ ,  $L_r$  и  $B_W$ ,  $L_W$ . Полиномиальные модели эффективно исключают разного рода систематические, свойственные только для данного региона, искажения, которые не возможно учесть иными, более простыми методами ( Featherstone, 1997).

### Пересчет геодезических координат по дифференциальным формулам в

географической практике иногда GPS измеряют геодезические координаты  $B$ ,  $L$ ,  $H$ . Их следует пересчитать из WGS-84 в СК-42. Это можно выполнить по дифференциальным формулам, учитывающим различия в размерах эллипсоидов, а также смещение начал и разворот осей координатных систем (Герасимов и др., 1993). В формулах геодезические координаты WGS-84 даны без индексов, а в СК-42 - с индексами  $r$ ; в формулах размерности и знаки параметров трансформирования изменены так, чтобы они соответствовали данным табл. 11. Формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} B_r = B &+ [e2N \sin B \cos B \, da/a + (1+N2/a2)N \sin B \cos B \, de2/2 + \\ &+ (DXo \cos L + DYo \sin L) \sin B - DZo \cos B]/(M+H) + \\ &+ (1 + e2 \cos 2B)(wX \sin L - wY \cos L)/r'' + \\ &+ me2 \sin B \cos B; \\ L_r = L &+ (DXo \sin L - DYo \cos L)/(N+H) \cos B - \\ &- (1 - e2) \operatorname{tg} B (wX \cos L + wY \sin L)/r'' + wZ/r''; \\ H_r = H &- a.da/N + N \sin 2B \, de2/2 - \\ &- (DXo \cos L + DYo \sin L) \cos B - DZo \sin B + \\ &+ e2N \sin B \cos B (wX \sin L - wY \cos L)/r'' - \\ &- (N + H - e2N \sin 2B)m; \end{aligned}$$

$da = a_r - a$ ;  $de2 = e_r^2 - e^2$ ,  $r''$  - число угловых секунд в радиане.

### Пересчет плоских прямоугольных координат.

Поясним суть решения задачи на примере пересчета плоских прямоугольных UTM координат, найденных при помощи GPS, в произвольную локальную систему.

Между двумя плоскими прямоугольными координатными системами существует следующая связь:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{лок}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_{\text{лок}} + m \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' - x_0' \\ y' - y_0' \end{pmatrix}_{\text{UTM}}$$

В формулах локальные координаты даны без штрихов, а координаты UTM - со штрихами.

Необходимо найти 6 неизвестных параметров трансформирования:  $x_0, y_0, x_0', y_0'$  -

координаты точки, относительно которой координатные оси развернуты на угол  $\gamma$ ,  $m$  различие линейных масштабов. Пусть для  $n > 1$  пунктов координаты известны в обеих системах. Примем

$$x_i' = [x']/n, y_i' = [y']/n.$$

Квадратными скобками обозначены по Гауссу суммы заключенных в них величин. Иными словами, в качестве  $x_0'$  принимается среднее из абсцисс, а в качестве  $y_0'$  - среднее из ординат опорных точек. Применяя МНК, получаем:

$$x_l = [x]/n, y_l = [y]/n,$$

$$C = m \cos \gamma = [Dx Dx' + Dy Dy'] / [(Dx'^2 + Dy'^2)],$$

$$S = m \sin \gamma = [Dx Dy' - Dx' Dy] / [(Dx'^2 + Dy'^2)],$$

$$m = (C^2 + S^2)^{1/2}, \operatorname{tg} \gamma = S/C,$$

где для  $i$ -ой опорной точки

$$Dx_i' = x_i' - x_l', Dy_i' = y_i' - y_l', Dx_i = x_i - x_l, Dy_i = y_i - y_l.$$

Этот метод можно использовать для пересчета прямоугольных координат UTM в координаты Гаусса-Крюгера. При этом для точек в пределах листа топографической карты, например масштаба 1:100 000, погрешности трансформирования останутся в пределах графической точности масштаба.

**Пересчет высот.** По координатам  $X, Y, Z$  определяют геодезические высоты  $H$ . В повседневной практике в России пользуются не геодезическими, а нормальными  $H_g$ . При этом

$$H_g = H - z,$$

где  $z$  - высота квазигеоида. Таким образом, для вычисления нормальных высот по геодезическим высотам нужны карты высот квазигеоида или гравиметрические определения. Другим путем решения задачи являются измерения спутниковой системой на ряде пунктов, нормальные высоты которых уже известны. Тогда можно образовать разности из высот для двух пунктов:

$$D H_g = D H - D z.$$

Как видно, разность нормальных высот отличается от разности геодезических высот на величину  $Dz$ . Неучет величин  $Dz$  приведет к погрешностям в передаче нормальных высот. Погрешности тем больше, чем больше расстояния между пунктами. Приближенно можно

полагать, что с каждым километром разности  $Dz$  изменяется на 1- 2 см. При расстояниях между пунктами 50 км эти погрешности могут превысить 1 м. Для учета изменений высот квазигеоида применяют методы интерполяции, например, по формуле (Непоклонов и др., 1996):

$$Dz = Ax + By + Cxy + D,$$

где  $x, y$  - плоские прямоугольные координаты,  $A, B, C, D$  - коэффициенты. Чтобы их вычислить, надо знать высоты  $H$  и  $H_g$  для 5 или большего числа пунктов. Достаточно прост способ среднего весового, восходящий к Гауссу. Пусть для ряда пунктов известны высоты  $H_{GPS}$  в местной системе и геодезические высоты  $H_{GPS}$ . Алгоритм пересчета следующий

1. Определяем веса измерений  $P_i = (1/S_i)q$ , где  $S_i$  - расстояние от текущей точки до  $i$ -го пункта с известными высотами в двух системах,  $q > 0$  (подбирается экспериментально).

2. Находим преобразованную высоту текущего пункта по формуле  $H_{ЛОК} = H_{GPS} + a \frac{\sum P_i (H_{ЛОК} - H_{GPS})_i}{\sum P_i}$ .

Статья была взята с сайта.

## Преобразования плоских прямоугольных координат

Выделяют три типа преобразования плоских прямоугольных координат: преобразование координат по Хельмерту, конформное преобразование, аффинное преобразование.

**Преобразование координат по Хельмерту.** В этом преобразовании по общему по всем направлениям масштабному коэффициенту меняются только длины линий, углы остаются неизменными. Это преобразование используется при вставке уравненной сети в более точную сеть исходных пунктов, при этом поставлено требование, чтобы эта сеть при трансформировании координат ее пунктов в другую систему сохранила свои первоначальные форму и размеры. Преобразование координат по Хельмерту в общем случае выполняется по формулам:

$$x = x_2 + m \cos \alpha dX - m \sin \alpha dY,$$

$$y = y_2 + m \sin \alpha dX + m \cos \alpha dY,$$

$$\text{где } dX = X - X_1, dY = Y - Y_1.$$

$x_2, y_2$  – координаты начального пункта ( $X_1, Y_1$ ) в новой системе координат;  
 $m$  – масштабный коэффициент, т.е. отношение длин линий в новой системе к линиям в преобразуемой системе;  
 $\alpha$  – угол разворота новой системы относительно преобразуемой;  
 $X, Y$  – преобразуемые координаты. За начальный пункт принимается либо один из пунктов, либо центр тяжести.

В прикладных задачах изысканий и проектирования обычно используется «упрощенная» формула:

$$x = x_0 + m \cos \alpha X - m \sin \alpha Y,$$

$$y = y_0 + m \sin \alpha X + m \cos \alpha Y,$$

т.е. за начальный пункт трансформации принимается начало координат преобразуемой системы.

**Конформное преобразование (название условное)** используется при установлении связи и выполнении преобразований государственной (СК-42, СК-95, СК-63) и местной систем координат. Расчет ведется по полным формулам, учитывающим кривизну поверхности относимости. Поэтому формулами конформного трансформирования целесообразно пользоваться в том случае, когда пункты местной сети трансформируются в государственную сеть и эти пункты определены точнее, чем пункты государственной геодезической сети.

Конформное преобразование координат из государственной системы в местную выполняется по формулам:

$$x = (x_0 + X') - m \cos \alpha Q_1 - m \sin \alpha (Q_2 - Q_3),$$

$$y = (y_0 + Y') - \sin \alpha Q_1 - m \cos \alpha (Q_2 - Q_3),$$

$$\text{где } X' = m \cos \alpha dX + m \sin \alpha dY,$$

$$Y' = m \cos \alpha dY - m \sin \alpha dX,$$

$$dX = X - X_0,$$

$$dY = Y - Y_0,$$

$$Q_1 = dX Y_0 (Y + dY) f,$$

$$Q_2 = Y_0$$

$$2 dY f,$$

$$Q_3 = Y_0 (dX_2 - dY_2) f.$$

Конформное преобразование координат из местной системы в государственную выполняется по формулам:

$$X = (X_0 + x') + Q'_1,$$

$$Y = (Y_0 + y') + Q'_2 - Q'_3,$$

$$\text{где } x' = \cos \alpha / m dx - \sin \alpha / m dy,$$

$$y' = \cos \alpha / m dy + \sin \alpha / m dx,$$

$$dx = x - x_0,$$

$$dy = y - y_0,$$

$$Q'_1 = x' Y_0 (2y' + Y_0) f,$$

$$Q'_2 = y' Y_0$$

$$2 f,$$

$$Q'_3 = Y_0 (x' + y') (x' - y').$$

Здесь:

$x_0, y_0, X_0, Y_0$  – координаты начального пункта соответственно в местной и государственной системах координат;

$m$  – масштабный коэффициент, т.е. соотношение длин линий в местной системе к линиям в государственной системе;

$\alpha$  – угол разворота местной системы относительно государственной;

$X, Y$  и  $x, y$  – преобразуемые координаты соответственно в государственной и местной системах;

$f = 1/R_0$ , где  $R_0$  – радиус кривизны эллипсоида в точке  $X_0, Y_0$ .

Поправка за высоту поверхности относимости в местной системе координат должна быть учтена в масштабном коэффициенте  $m$ . За начальный пункт принимается либо один из пунктов, либо центр тяжести, либо начало координат местной системы.

**Аффинное преобразование координат.** Преобразование координат из одной прямоугольной системы в другую производится по общим формулам аффинного преобразования. В этом преобразовании, в зависимости от положения пункта, меняются длины линий и углы. Формулы используются при вставке уравненной сети в менее точную сеть исходных пунктов. Аффинное преобразование координат из одной прямоугольной системы в другую производится по общим формулам аффинного преобразования:

$$x' = x_2 + a_1 dX + b_1 dY,$$

$$y' = y_2 + a_2 dX + b_2 dY,$$

$$\text{где } dX = x - x_1, dY = y - y_1.$$

Когда конфигурация сети представлена значительным числом пунктов или сеть вытянута, как, например, при линейных изысканиях, при линейном трансформировании возникают систематические погрешности. В таких случаях применяется нелинейное преобразование.

Нелинейное преобразование координат осуществляется по формулам:

$$X = X_0 + a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 k,$$

$$Y = Y_0 + a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 k.$$

Так как в приведенных выражениях восемь неизвестных, в трансформируемой сети должно быть не менее четырех пунктов, координаты которых известны в обеих системах (исходные пункты). Значение величины  $k$  выбирается в зависимости от конфигурации сети. Если сеть имеет форму, близкую к квадратной или округлой,  $k = \Delta x \Delta y$ . Для сети, вытянутой вдоль оси  $X$ ,  $k = \Delta x^2$ , вдоль оси  $Y$ ,  $k = \Delta y^2$ . Если сеть вытянута под углом  $45^\circ$  к осям координат,  $k = \Delta x \Delta y$ .

#### **Литература:**

- 1) <http://kartaplus.ru/sputpos13>
- 2) Кредо-Диалог «Трансформ 2.0» Минск 2008