Унификация посредством поиска путей с контекстно-свободными ограничениями в графе
Source-tracking unification

Екатерина Вербицкая

Лаборатория языковых инструментов JetBrains

16 ноября 2020

TLDR

Задачу унификации можно свести к
поиску путей с КС ограничениями в графе[1]

Путь — доказательство (не)унифицируемости термов

[1] Choppella, V., and Haynes, C. T. (2005). Source-tracking unification.

План докалада

- Что такое унификация
- Как задача унификации представима в виде графа
- Какой язык будем использовать в качестве ограничений
- Почему это работает
- Какую дополнительную информацию можно получить из пути

Унификация

Даны два терма t, s

Задача: найти подстановку на свободных переменных термов (унификатор) θ, такую что

$$t\theta = s\theta$$

Подстановка

Терм: $\mathcal{T} :: \mathcal{V} \mid \mathcal{F}^n\ \mathcal{T}_1 \ldots \mathcal{T}_n$

Подстановка: $\theta :: \mathcal{V} \to \mathcal{T}$

Применение подстановки $t\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_k \mapsto t_k\}$:
одновременно заменить свободные переменные x_i терма t на t_i

$$(f\ x\ a\ (g\ z)\ y)\{x \mapsto h\ a\ y, z \mapsto y\} = f\ (h\ a\ y)\ a\ (g\ y)\ y$$

Применение унификации

```
apply :: (a -> b) -> a -> b
apply f x = f x

f :: Int -> Int
f x = x + 1

apply_f :: ?
apply_f = apply f
```

Унифицируем `a -> b` и `Int -> Int`, получаем `a == Int`, `b == Int`

```
apply_f :: Int -> Int
```

Простой алгоритм унификации

Будем искать подстановку как множество уравнений $\mathcal{E} = \{t_i = s_i\}$

- Упрощение термов: $(f\ t_1 \ldots t_n = g\ s_1 \ldots s_m) \in \mathcal{E}$
  - Если f, g — различные константы, то $\mathcal{E} = \bot$
  - Иначе заменяем уравнение в $\mathcal{E}$ на множество $t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n$
- Переориентация: $(t = x) \in \mathcal{E}$
  - Если t — терм, x — переменная, заменяем в $\mathcal{E}$ уравнение на $x = t$
- Элиминация переменных: $(x = t) \in \mathcal{E}$, x входит в какое-то уравнение
  - Если x входит в t, $t \equiv x$, то удаляем уравнение из $\mathcal{E}$
  - Иначе, если x входит в t, то $\mathcal{E} = \bot$
  - Иначе, подставляем t вместо x во всех уравнениях в $\mathcal{E}$

Унификация: пример

$$\{node\ El\ T\ T = node\ 1\ (node\ 2\ emp\ emp)\ (node\ 2\ emp\ emp)\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp,\ T = node\ 2\ emp\ emp\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp, node\ 2\ emp\ emp = node\ 2\ emp\ emp\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp, 2 = 2, emp = emp, emp = emp\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp\}$$

Унификация: пример

$$\{node\ El\ \ T\ \ T = node\ 1\ (node\ 2\ emp\ emp)\ (node\ 3\ emp\ emp)\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp,\ T = node\ 3\ emp\ emp\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp, node\ 2\ emp\ emp = node\ 3\ emp\ emp\}$$

$$\{El = 1,\ T = node\ 2\ emp\ emp, 2 = 3, emp = emp, emp = emp\}$$

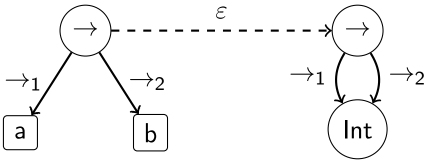
$$\perp$$

Чем плох простой алгоритм

- Не очень эффективный
- Не говорит, почему унификация не завершилась успехом

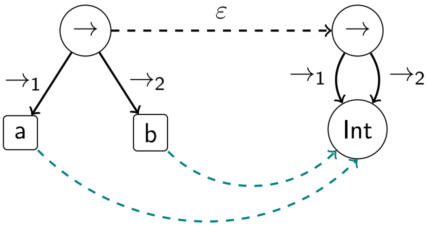
Граф унификации

$$a \to b \stackrel{?}{=} Int \to Int$$



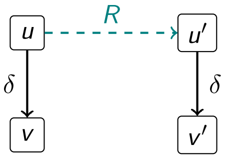
Граф унификации

$$a \to b \stackrel{?}{=} Int \to Int$$



Отношение эквивалентности на вершинах

Отношение на вершинах R *замкнуто вниз*, если для любой метки на ребре δ и двух вершин в отношении uRu' с ребрами $u \xrightarrow{\delta} v$ и $u' \xrightarrow{\delta} v'$ верно vRv'



Замыкание унификации отношения R это наименьшее замкнутое вниз отношение на вершинах, содержащее R

Отношение эквивалентности на вершинах

Отношение на вершинах R *замкнуто вниз*, если для любой метки на ребре δ и двух вершин в отношении uRu' с ребрами $u \xrightarrow{\delta} v$ и $u' \xrightarrow{\delta} v'$ верно vRv'

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[d, "\delta"'] & u' \arrow[d, "\delta"] \\
v \arrow[r, dashed, "R"] & v'
\end{tikzcd}$$

Замыкание унификации отношения R это наименьшее замкнутое вниз отношение на вершинах, содержащее R

Факторграф унификации

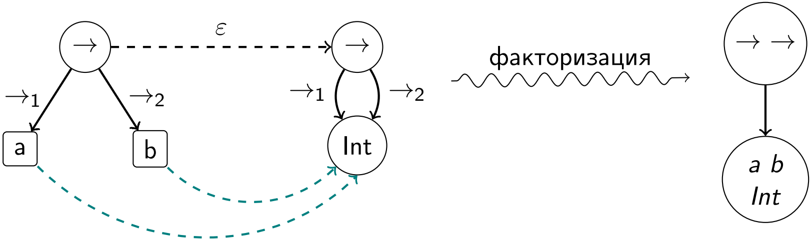
Вершины *равны*, если связаны ε-ребром

Факторизуем граф унификации по отношению эквивалентности на вершинах, которое построено как замыкание унификации отношения равенства вершин

Факторграф унификации

Вершины *равны*, если связаны ε-ребром

Факторизуем граф унификации по отношению эквивалентности на вершинах, которое построено как замыкание унификации отношения равенства вершин



Унификация невозможна, тогда и только тогда, когда в факторграфе есть цикл или вершина с разными функциональными символами

Большой пример

$$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$$

$$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} bool$$

$$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$$

$$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$$

$$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$$

Большой пример

$$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$$

$$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} bool$$

$$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$$

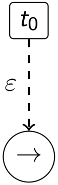
$$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$$

$$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$$

$$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$$



Большой пример

$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$

$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

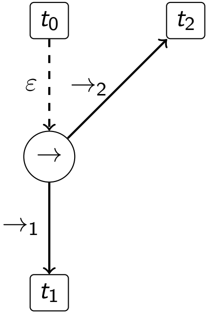
$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$

$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$

$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



Большой пример

$$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$$

$$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} bool$$

$$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$$

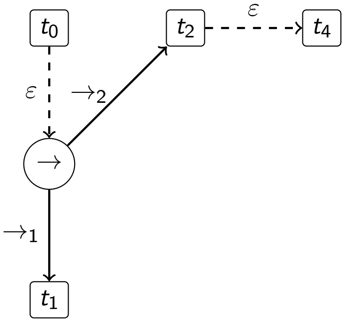
$$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$$

$$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$$

$$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$$



Большой пример

$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$

$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

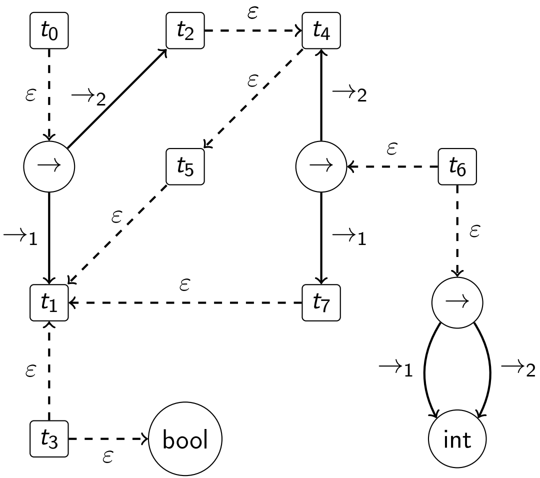
$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$

$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$

$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



Большой пример: $t_7 = int$

$$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$$

$$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} bool$$

$$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$$

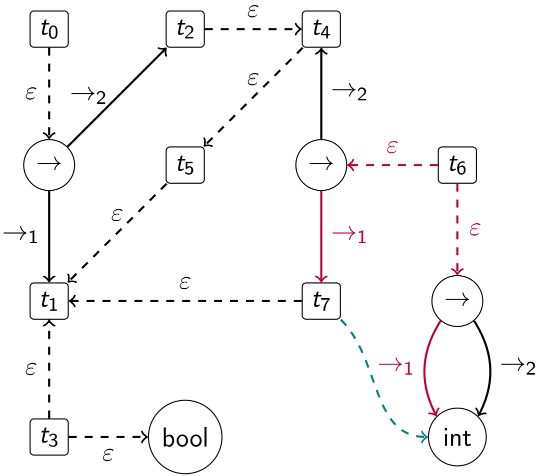
$$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$$

$$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$$

$$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$$



Большой пример: $t_4 = int$

$$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$$

$$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$$

$$t_3 \stackrel{?}{=} bool$$

$$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$$

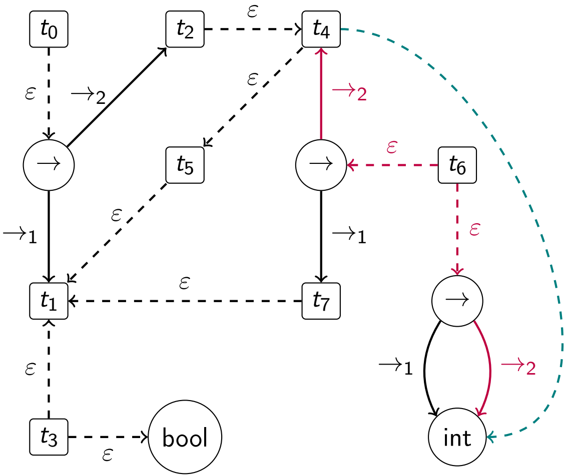
$$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$$

$$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$$

$$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$$

$$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$$



Большой пример: $t_7 = bool$

$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$

$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

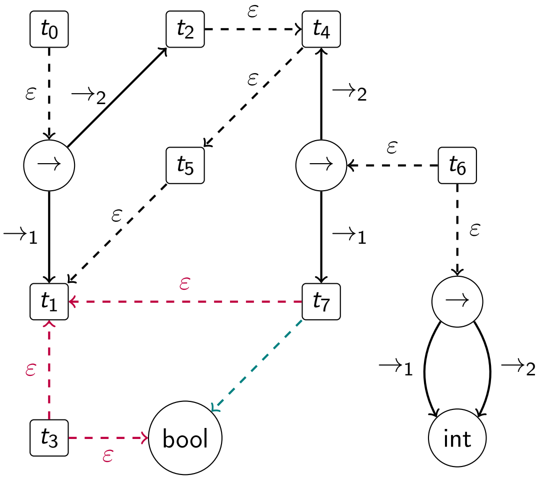
$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$

$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$

$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



Большой пример: $t_4 = bool$

$t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \to t_2$

$t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

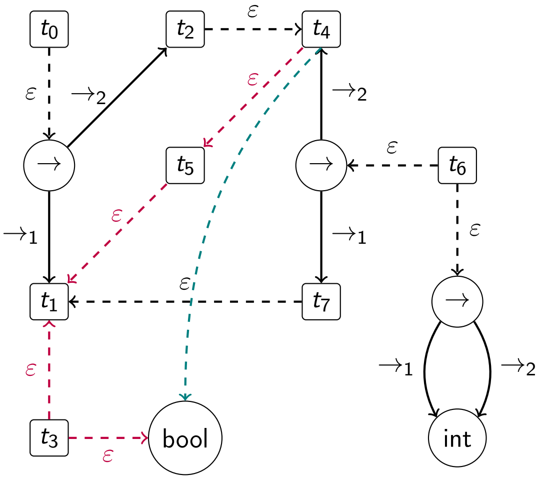
$t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \to t_4$

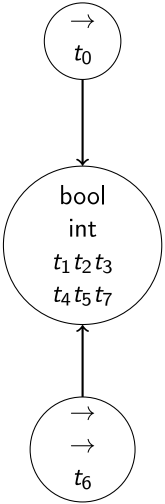
$t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

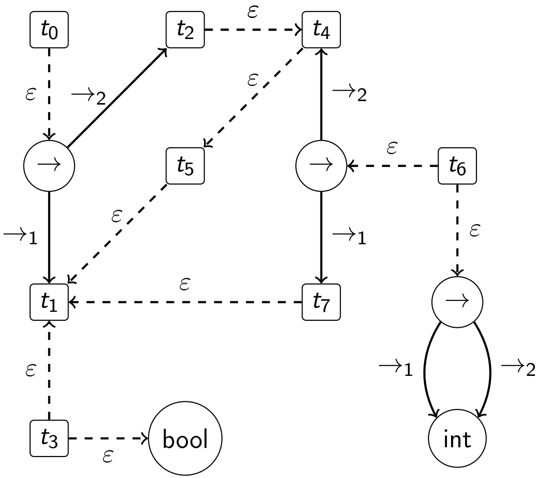
$t_6 \stackrel{?}{=} int \to int$

$t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



Факторграф для примера: унификация невозможна





Полудиков язык: соотношения отмены

$$\Sigma = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$$
$$\Sigma^{-1} = \{\delta_1^{-1}, \dots, \delta_n^{-1}\}$$
$$\Sigma \cap \Sigma^{-1} = \varnothing$$

$$\boldsymbol{S}(\Sigma) = \{\delta^{-1}\delta \approx \varepsilon \mid \delta \in \Sigma\}$$

$u \overset{\boldsymbol{S}(\Sigma)}{\approx} v$, если u можно получить из v применением равенств из $\boldsymbol{S}(\Sigma)$

Полудиков[2] язык

$\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l)$ — нормальная форма l относительно равенств из $\boldsymbol{S}(\Sigma)$

$$S(\Sigma, L) \stackrel{def}{=} \{l \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})^* \mid \mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l) \in L\}$$

$$S^0(\Sigma) = S(\Sigma, \varepsilon)$$
$$S^+(\Sigma) = S(\Sigma, \Sigma^+)$$
$$S^*(\Sigma) = S(\Sigma, \Sigma^*)$$

$S^0(\Sigma)$ — полудиков язык (semi-Dyck set)

[2] Определение полудикова языка может показаться неожиданным

Примеры строк полудикова языка

$$\Sigma = \{(, [\}$$
$$\Sigma^{-1} = \{),]\}$$

$$\varepsilon,\ ))((,\ ][][,\ )][()(\in S^0(\Sigma)$$
$$(),\ ))(,\ ])[(\notin S^0\Sigma$$

$$(,\ )[(,\ )(()[(\in S^*(\Sigma) \setminus S^0(\Sigma)$$
$$),\ )() \notin S^*(\Sigma)$$

Пути унификации: обращение ребер

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, "\delta"'] & u \\ v & v \arrow[u, "\delta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Пути унификации: обращение ребер

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, "\delta"'] & u \\ v & v \arrow[u, "\delta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, "\varepsilon"'] & u \\ v & v \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

Пути унификации

Путь унификации — такой путь p в графе $G \cup G^{-1}$, что нормальная форма его метки $\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l(p)) \in \Sigma^*$

G — граф унификации, G^{-1} — граф с обращенными ребрами

Путь унификации: пример

$$\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l(p^{-1}f^{-1}hr)) = \mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}((\rightarrow_1)^{-1}\rightarrow_1) = \varepsilon \in \Sigma^*$$

$a : t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \rightarrow t_2$

$b : t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$c : t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$d : t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

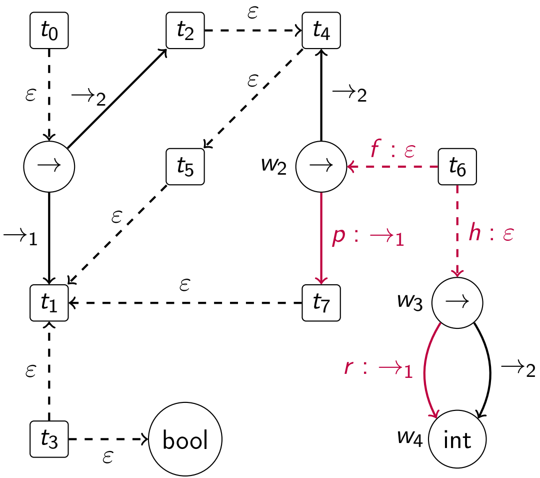
$e : t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$f : t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \rightarrow t_4$

$g : t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

$h : t_6 \stackrel{?}{=} int \rightarrow int$

$i : t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



$$\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l(s^{-1}f^{-1}hq)) = \mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}((\rightarrow_2)^{-1}\rightarrow_2) = \varepsilon \in \Sigma^*$$

$a : t_0 \stackrel{?}{=} t_1 \rightarrow t_2$

$b : t_2 \stackrel{?}{=} t_4$

$c : t_3 \stackrel{?}{=} bool$

$d : t_4 \stackrel{?}{=} t_5$

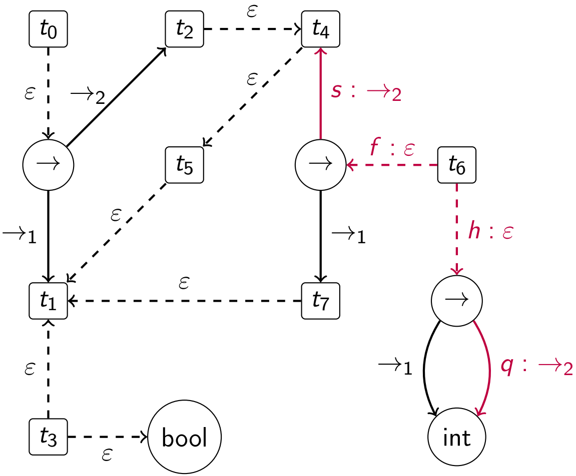
$e : t_3 \stackrel{?}{=} t_1$

$f : t_6 \stackrel{?}{=} t_7 \rightarrow t_4$

$g : t_5 \stackrel{?}{=} t_1$

$h : t_6 \stackrel{?}{=} int \rightarrow int$

$i : t_7 \stackrel{?}{=} t_1$



Путь унификации в факторграфе

Theorem

Если в графе унификации существует путь p из вершины u в вершину v, то в факторграфе существует путь из класса эквивалентности $[u]$ в класс эквивалентности $[v]$ с меткой $\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l(p))$

Theorem

Если в факторграфе унификации существует путь p' из класса эквивалентности $[u]$ в класс эквивалентности $[v]$, то в графе унификации существует путь p из u в вершину v с меткой, чья нормальная форма $\mu_{\boldsymbol{S}(\Sigma)}(l(p)) = p'$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{u} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\delta"'] & \boxed{u'} \arrow[d, "\delta"] \\
\boxed{v} \arrow[r, dashed] & \boxed{v'}
\end{tikzcd}$$

Критерий унифицируемости термов

Два терма унифицируются тогда и только тогда, когда между ними есть путь унификации, нормальная форма которого — ε

Два терма унифицируются тогда и только тогда, когда между ними есть путь унификации, метка которого в полудиковом языке $S^0(\Sigma)$

Логика над путями

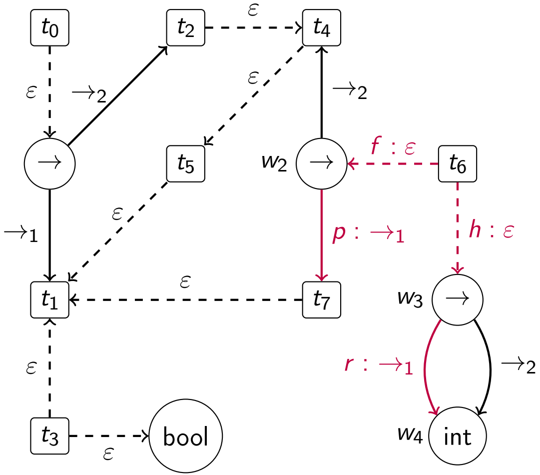
$$\frac{}{G \vdash c : u \xrightarrow{\eta} v}, c : u \xrightarrow{\eta} v \in E(G) \qquad \frac{}{G \vdash \varepsilon : u \xrightarrow{\varepsilon} u}, u \in V(G)$$

$$\frac{G \vdash p : v \xrightarrow{\varepsilon} u}{G \vdash p^{-1} : u \xrightarrow{\varepsilon} v} \qquad \frac{G \vdash p : u \xrightarrow{l} v' \quad G \vdash q : v' \xrightarrow{l'} v}{G \vdash pq : u \xrightarrow{ll'} v}$$

$$\frac{G \vdash p : u' \xrightarrow{\varepsilon} v'}{G \vdash b^{-1}pb' : u \xrightarrow{\varepsilon} v}, b : u' \xrightarrow{\delta} u \in G, b' : v' \xrightarrow{\delta} v \in G$$

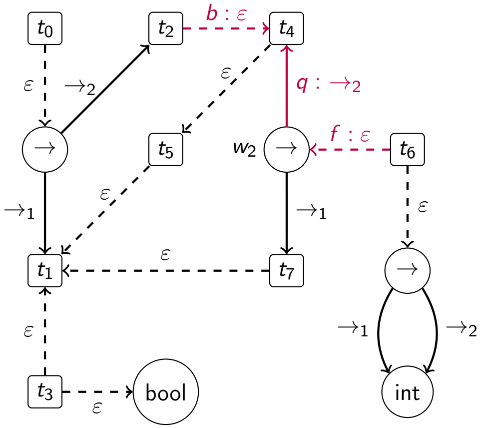
Вывод успешного пути

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{G \vdash f : t_6 \xrightarrow{\varepsilon} w_2}{G \vdash f^{-1} : w_2 \xrightarrow{\varepsilon} t_6} \qquad G \vdash h : t_6 \xrightarrow{\varepsilon} w_3}{G \vdash f^{-1}h : w_2 \xrightarrow{\varepsilon} w_3}}{G \vdash p^{-1}f^{-1}hr : t_7 \xrightarrow{\varepsilon} w_4}$$



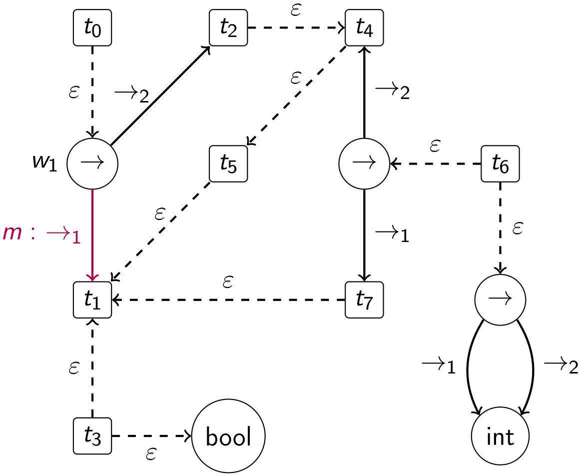
Вывод успешного пути

$$\dfrac{G \vdash f : t_6 \xrightarrow{\varepsilon} w_2 \qquad \dfrac{G \vdash q : w_2 \xrightarrow{\to_2} t_4 \qquad \dfrac{G \vdash b : t_2 \xrightarrow{\varepsilon} t_4}{G \vdash b^{-1} : t_4 \xrightarrow{\varepsilon} t_2}}{G \vdash qb^{-1} : w_2 \xrightarrow{\to_2} t_2}}{G \vdash fqb^{-1} : t_6 \xrightarrow{\to_2} t_2}$$



Вывод неуспешного пути

$$\dfrac{G \vdash m : w_1 \xrightarrow{\to_1} t_1 \qquad \dfrac{G \vdash m : w_1 \xrightarrow{\to_1} t_1}{G \vdash m^{-1} : t_1 \xrightarrow{\to_1^{-1}} w_1}}{G \vdash mm^{-1} : w_1 \xrightarrow{\to_1 \to_1^{-1}} w_1}$$



Алгоритмы унификации через поиск путей

- Один алгоритм ищет кратчайшие пути, работает за $O(n^3)$
- Второй алгоритм интегрируется в стандартный алгоритм унификации, работает на константу хуже и строит не самые маленькие доказательства унифицируемости (но и не самые плохие)