

飞行力学大作业

2018 年 12 月 1 日

学号	姓名	联系方式	分工
DY1805102	张启明	gyzhangqm@126.com	程序编写，报告书写
SY1805308	李玉格		运动建模，小扰动线化

目录

1	飞机运动建模	3
1.1	推导飞机的质心动力学方程	3
1.1.1	风轴系质心动力学方程	3
1.1.2	体轴系质心动力学方程	4
1.2	推导飞机的转动动力学方程	5
1.3	推导飞机的质心运动学方程	7
1.3.1	风轴系质心运动学方程	7
1.3.2	体轴系质心运动学方程	8
1.4	推导飞机的转动运动学方程	8
1.4.1	风轴系转动运动学方程	8
1.4.2	体轴系转动运动学方程	9
1.5	飞机的6自由度全量运动方程组	9
1.5.1	风轴系6自由度全量运动方程组	9
1.5.2	体轴系6自由度全量运动方程组	10
2	小扰动线性化	11
2.1	基准方程与扰动方程	11
2.2	纵向小扰动线性化方程	14
2.3	横侧小扰动线性化方程	14
3	F16飞机运动时域响应	15
3.1	飞机全量运动方程组	15
3.2	纵向配平	17
3.3	零输入全量运动方程时域响应	18
3.4	小扰动线性化方程组	18
3.5	时域响应	20
3.5.1	升降舵单位阶跃输入时域响应	20
3.5.2	副翼单位阶跃输入时域响应	21
3.5.3	纵向模态激励响应	22
3.5.4	横向模态激励响应	25
4	附录：计算程序说明	29

1 飞机运动建模

1.1 推导飞机的质心动力学方程

出发点是力方程(1.1)和动系中加速度表达式(1.2):

$$f = ma_C \quad (1.1)$$

$$a_M = a_{OM} + \ddot{r}'_M + \tilde{\omega}_M r'_M + 2\tilde{\omega}_M \dot{r}'_M + \tilde{\omega}_M \tilde{\omega}_M r'_M \quad (1.2)$$

接下来分风轴系和体轴系两种情况

1.1.1 风轴系质心动力学方程

力方程(1.1)在风轴系下写作:

$$f_W = ma_{C_W} \quad (1.3)$$

将动系中加速度表达式(1.2)在地面坐标系中表达:

$$\begin{aligned} a_{C_E} &= \cancel{a_{O_E}} + \dot{r}'_E + \cancel{\tilde{\omega}_E^E r'_E} + 2\tilde{\omega}_E^E \dot{r}'_E + \cancel{\tilde{\omega}_E^E \tilde{\omega}_E^E r'_E} \\ &= \dot{r}'_E + 2\tilde{\omega}_E^E \dot{r}'_E \\ &= \dot{V}_E^E + 2\tilde{\omega}_E^E \dot{r}'_E \end{aligned} \quad (1.4)$$

使用旋转矩阵将质心加速度转换到风轴坐标系下:

$$\begin{aligned} a_{C_W} &= T_{WE} a_{C_E} \\ &= T_{WE} (\dot{V}_E^E + 2\tilde{\omega}_E^E V_E^E) \\ &= T_{WE} \dot{V}_E^E + 2T_{WE} \tilde{\omega}_E^E V_E^E \\ &= \dot{V}_W^E + (\tilde{\omega}_W^W - \tilde{\omega}_W^E) V_W^E + 2(T_{WE} \tilde{\omega}_E^E T_{EW})(T_{WE} V_E^E) \\ &= \dot{V}_W^E + (\tilde{\omega}_W^W - \tilde{\omega}_W^E) V_W^E + 2\tilde{\omega}_W^E V_W^E \\ &= \dot{V}_W^E + (\tilde{\omega}_W^W + \tilde{\omega}_W^E) V_W^E \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中

$$V_W^E = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{x_W} \\ W_{y_W} \\ W_{z_W} \end{bmatrix}, \quad \omega_W^W = \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix}, \quad \omega_W^E = \begin{bmatrix} p_W^E \\ q_W^E \\ r_W^E \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

当风速为零($\mathbf{W} = 0$)时:

$$\begin{aligned} a_{C_W} &= \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(r_W + r_W^E) & q_W + q_W^E \\ -(r_W + r_W^E) & 0 & -(p_W + p_W^E) \\ q_W + q_W^E & -(p_W + p_W^E) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V(r_W^E + r_W) \\ -V(q_W^E + q_W) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

力 f_W 分为可控力 A_W 和重力 mg_W :

$$f_W = A_W + mg_W \quad (1.8)$$

可控力分为气动力和推力:

$$A_W = \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D \\ C \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x_W} \\ T_{y_W} \\ T_{z_W} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

风轴系下重力:

$$g_W = T_{WV}g_V = T_{WV} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\sin \theta_W \\ \cos \theta_W \sin \phi_W \\ \cos \theta_W \cos \phi_W \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

将式(1.16)(1.8)(1.9)(1.10)带入到(1.5)中, 得

$$\begin{cases} T_{x_W} - D - mg \sin \theta_W = m\dot{V} \\ T_{y_W} - C + mg \cos \theta_W \sin \phi_W = mV(r_W^E + r_W) \\ T_{z_W} - L + mg \cos \theta_W \cos \phi_W = -mV(q_W^E + q_W) \end{cases} \quad (1.11)$$

当忽略地球转动时, r_W^E 和 q_W^E 均为零, 则有:

$$\begin{cases} T_{x_W} - D - mg \sin \theta_W = m\dot{V} \\ T_{y_W} - C + mg \cos \theta_W \sin \phi_W = mVr_W \\ T_{z_W} - L + mg \cos \theta_W \cos \phi_W = -mVq_W \end{cases} \quad (1.12)$$

1.1.2 体轴系质心动力学方程

力方程(1.1)在体轴系下写作:

$$f_B = ma_{C_B} \quad (1.13)$$

使用旋转矩阵将风轴系下加速度转换到体轴坐标系下:

$$\begin{aligned} a_{C_B} &= T_{BE}a_{C_E} \\ &= T_{BE}[\dot{V}_W^E + (\tilde{\omega}_W^W + \tilde{\omega}_W^E)V_W^E] \\ &= \dot{V}_B^E + (\tilde{\omega}_B + \tilde{\omega}_B^E)V_B^E \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中

$$V_B^E = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}, \quad \omega_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \omega_B^E = \begin{bmatrix} p_B^E \\ q_B^E \\ r_B^E \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

当风速为零($\mathbf{W} = 0$)时:

$$\begin{aligned} a_{C_B} &= \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(r + r_B^E) & q + q_B^E \\ -(r + r_B^E) & 0 & -(p + p_B^E) \\ q + q_B^E & -(p + p_B^E) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{u} + (q + q_B^E)w - (r + r_B^E)v \\ \dot{v} + (r + r_B^E)u - (p + p_B^E)w \\ \dot{w} + (p + p_B^E)w - (q + q_B^E)u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

体轴系中的外力 f_B :

$$f_B = A_B + mg_B \quad (1.17)$$

可控力分为气动力和推力:

$$A_B = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

体轴系中重力:

$$g_B = T_{BV}g_V = T_{BV} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

将式(1.16)(1.17)(1.18)(1.19)带入到(1.13)中, 得

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta &= m[\dot{u} + (q + q_B^E)w - (r + r_B^E)v] \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= m[\dot{v} + (r + r_B^E)u - (p + p_B^E)w] \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= m[\dot{w} + (p + p_B^E)w - (q + q_B^E)u] \end{cases} \quad (1.20)$$

当忽略地球转动时, p_B^E 、 r_B^E 、 q_B^E 为零, 则有:

$$\begin{cases} X - mg \sin \theta &= m(\dot{u} + qw - rv) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(\dot{v} + ru - pw) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(\dot{w} + pw - qu) \end{cases} \quad (1.21)$$

1.2 推导飞机的转动动力学方程

出发点是动量矩定理:

$$G = \dot{h} \quad (1.22)$$

一般变形体在 F_I 上的角动量为:

$$h_I = \int R_I \times V_I dm = \int R_I \times \dot{R}_I dm = \int \tilde{R}_I \dot{R}_I dm \quad (1.23)$$

将角动量 h_I 转换到 F_B 上得:

$$\begin{aligned}
h_B &= T_{BI}h_I \\
&= \int T_{BI}\tilde{R}_I\dot{R}_I dm \\
&= \int T_{BI}\tilde{R}_IT_{IB}T_{BI}\dot{R}_I dm \\
&= \int \tilde{R}_B(\dot{R}_B + \tilde{\omega}_B R_B) dm \quad (\because T_{BI}\dot{R}_I = \dot{R}_B + \tilde{\omega}_B R_B) \quad (1.24) \\
&= \int \tilde{R}_B\dot{R}_B dm + \int \tilde{R}_B\tilde{\omega}_B R_B dm \\
&= \int \tilde{R}_B\dot{R}_B dm - \int \tilde{R}_B\tilde{R}_B\omega_B dm \quad (\because \tilde{\omega}R = -\tilde{R}\omega) \\
&= \int \tilde{R}_B\dot{R}_B dm + J_B\omega_B
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_B &= - \int \tilde{R}_B\tilde{R}_B dm \\
&= \int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} dm \\
&= \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm \\
&= \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (1.25)
\end{aligned}$$

对于变形分量 $\int \tilde{R}_B\dot{R}_B dm$, 这里只考虑一个发动机的转子系统

$$\begin{aligned}
h_B^r &= \int \tilde{R}_B\dot{R}_B dm \\
&= \int \tilde{R}_B\tilde{\omega}_B^r R_B^r dm \\
&= - \int \tilde{R}_B\tilde{R}_B^r \omega_B^r dm \\
&= -\omega_B^r \int (\tilde{R}_B' + \tilde{R}_B^r) \tilde{R}_B^r dm \\
&= -\omega_B^r \tilde{R}_B' \int \tilde{R}_B^r dm - \omega_B^r \int \tilde{R}_B^r \tilde{R}_B^r dm \\
&= J_B^r \omega_B^r \quad (1.26)
\end{aligned}$$

在下文计算中将单转子发动机带来的附加动量矩视为一个常数矢量。

将惯性系下的动量矩定理(1.22)变换到体轴系中:

$$\begin{aligned}
G_B &= T_{BI}G_I = T_{BI}\dot{h}_I = \dot{h}_B + \tilde{\omega}_B h_B \\
&= \cancel{\dot{h}_B}^0 \omega_B + J_B \dot{\omega}_B + h_B^r + \tilde{\omega}_B J_B \tilde{\omega}_B + \tilde{\omega}_B \cancel{h_B^r}^0 \quad (1.27) \\
&= J_B \dot{\omega}_B + h_B^r + \tilde{\omega}_B J_B \tilde{\omega}_B
\end{aligned}$$

其中

$$G_B = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}, \quad h_B^r = \begin{bmatrix} h_x^r \\ h_y^r \\ h_z^r \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

将式(1.27)进行标量展开得：

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & -I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & -I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_x^r \\ h_y^r \\ h_z^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zy} \\ -I_{xy} & -I_y & -I_{yz} \\ -I_z & -I_{yz} & -I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

考虑飞机有对称面，即 $I_{xy} = I_{yz} = 0$ ，则式(2.12)可化为：

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx} (\dot{r} + pq) - (I_y - I_z) qr - r h_y^r + q h_z^r \\ M = I_y \dot{q} - I_{zx} (r^2 - p^2) - (I_z - I_x) rp + r h_x^r - p h_z^r \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx} (\dot{p} + qr) - (I_x - I_y) pq - q h_x^r + p h_y^r \end{cases} \quad (1.30)$$

下文F16发动机带来的附加动量矩在只在体轴系Ox方向有分量，那么：

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx} (\dot{r} + pq) - (I_y - I_z) qr \\ M = I_y \dot{q} - I_{zx} (r^2 - p^2) - (I_z - I_x) rp + r h^r \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx} (\dot{p} + qr) - (I_x - I_y) pq - q h^r \end{cases} \quad (1.31)$$

这便是在平面假设下，体轴系中飞机的转动动力学方程。在风轴系中，用风轴系数代替体轴系数，得到的风轴系转动动力学方程具有一样的形式。

1.3 推导飞机的质心运动学方程

由速度矢量三角形 $V^E = V + W$ 出发，推导飞机的质心运动学方程。分为体轴系和风轴系两种情况。

1.3.1 风轴系质心运动学方程

由 $V^E = V + W$ 出发，可知 $V_W^E = V_W + W_W$ ，牵连垂直坐标系中的分量为：

$$V_V^E = T_{VW}(V_W + W_W) \quad (1.32)$$

其中

$$V_W = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_W = \begin{bmatrix} W_{Wx} \\ W_{Wy} \\ W_{Wz} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

当忽略地球曲率时，可认为 F_v 平行于 F_E ，假设大气相对于地球静止，也就是 $W = 0$ ，则风轴系中的质心位置坐标如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_E = V \cos \theta_W \cos \phi_W \\ \dot{y}_E = V \cos \theta_W \sin \phi_W \\ \dot{z}_E = -V \sin \theta_W \end{cases} \quad (1.34)$$

1.3.2 体轴系质心运动学方程

$$V^E = V_V^E = V + W = T_{VB} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + T_{VB} T_{BW} \begin{bmatrix} W_{xW} \\ W_{yW} \\ W_{zW} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

其中转换矩阵

$$T_{VB} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

$$T_{BW} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

当忽略地球曲率时，可认为 F_v 平行于 F_E ，假设大气相对于地球静止，也就是 $W = 0$ ，则体轴系中的质心位置坐标如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = T_{VB}(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

1.4 推导飞机的转动运动学方程

1.4.1 风轴系转动运动学方程

在风轴系上 ω^W 的分量为：

$$\omega^W = \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix} + T_x(\phi_W) T_y(\theta_W) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_W \end{bmatrix} + T_x(\phi_W) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_W \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

可得

$$\begin{cases} p_W = \dot{\phi}_W - \dot{\psi}_W \sin \theta_W \\ q_W = \dot{\theta}_W \cos \phi_W + \dot{\psi}_W \cos \theta_W \sin \phi_W \\ r_W = \dot{\psi}_W \cos \theta_W \cos \phi_W - \dot{\theta}_W \sin \phi_W \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi}_W = p_W + \tan \theta_W (q_W \sin \phi_W + r_W \cos \phi_W) \\ \dot{\theta}_W = q_W \cos \phi_W - r_W \sin \phi_W \\ \dot{\psi}_W = (q_W \sin \phi_W + r_W \cos \phi_W) / \cos \theta_W \end{cases} \quad (1.41)$$

1.4.2 体轴系转动运动学方程

在体轴系上 ω^B 的分量为：

$$\omega^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + T_x(\phi)T_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + T_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

可得

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta \end{cases} \quad (1.44)$$

1.5 飞机的6自由度全量运动方程组

在无风，具有对称面的刚体飞机，发动机的推力在体轴系Ox方向有分量，发动机带来的附加动量矩在体轴系Ox方向有分量的条件下，根据以上推导，可以汇总飞机的6自由度全量运动方程组如下：

1.5.1 风轴系6自由度全量运动方程组

质心动力学方程 (1.34)

$$\begin{cases} T_{xW} - D - mg \sin \theta_W = m\dot{V} \\ T_{yW} - C + mg \cos \theta_W \sin \phi_W = mVr_W \\ T_{zW} - L + mg \cos \theta_W \cos \phi_W = -mVq_W \end{cases}$$

转动运动学方程 (1.41)

$$\begin{cases} \dot{\phi}_W = p_W + \tan \theta_W (q_W \sin \phi_W + r_W \cos \phi_W) \\ \dot{\theta}_W = q_W \cos \phi_W - r_W \sin \phi_W \\ \dot{\psi}_W = (q_W \sin \phi_W + r_W \cos \phi_W) / \cos \theta_W \end{cases}$$

转动动力学方程 (1.31)

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx} (\dot{r} + pq) - (I_y - I_z) qr \\ M = I_y \dot{q} - I_{zx} (r^2 - p^2) - (I_z - I_x) rp + rh^r \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx} (\dot{p} + qr) - (I_x - I_y) pq - qh^r \end{cases}$$

质心运动学方程 (1.34)

$$\begin{cases} \dot{x}_E = V \cos \theta_W \cos \phi_W \\ \dot{y}_E = V \cos \theta_W \sin \phi_W \\ \dot{z}_E = -V \sin \theta_W \end{cases}$$

1.5.2 体轴系6自由度全量运动方程组

质心动力学方程 (1.21)

$$\begin{cases} X_A + T_x - mg \sin \theta = m(\dot{u} + qw - rv) \\ Y_A + T_y + mg \cos \theta \sin \phi = m(\dot{v} + ru - pw) \\ Z_A + T_z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w} + pw - qu) \end{cases}$$

转动运动学方程 (1.44)

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta \end{cases}$$

转动动力学方程 (1.31)

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - I_{zx} (\dot{r} + pq) - (I_y - I_z) qr \\ M = I_y \dot{q} - I_{zx} (r^2 - p^2) - (I_z - I_x) rp + rh^r \\ N = I_z \dot{r} - I_{zx} (\dot{p} + qr) - (I_x - I_y) pq - qh^r \end{cases}$$

质心运动学方程 (1.38)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = T_{VB}(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

2 小扰动线性化

2.1 基准方程与扰动方程

设基准运动为对称定常直线水平飞行，对刚体飞机全量运动方程组进行小扰动线性化处理。其中力和力矩用下面导数形式表示：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X = X_u \cdot \Delta u + X_w \cdot w + X_q \cdot q + X_{\Delta \delta_T} \cdot \Delta \delta_T + X_{\Delta \delta_e} \cdot \Delta \delta_e \\ \Delta Y = Y_v \cdot v + Y_p \cdot p + Y_r \cdot r + Y_{\delta_a} \cdot \delta_a + Y_{\delta_r} \cdot \delta_r \\ \Delta Z = Z_u \cdot \Delta u + Z_w \cdot w + Z_q \cdot q + Z_{\Delta \delta_T} \cdot \Delta \delta_T + Z_{\Delta \delta_e} \cdot \Delta \delta_e \\ \Delta L = L_v \cdot v + L_p \cdot p + L_r \cdot r + L_{\delta_a} \cdot \delta_a + L_{\delta_r} \cdot \delta_r \\ \Delta M = M_u \cdot \Delta u + M_w \cdot w + M_q \cdot q + M_{\Delta \delta_T} \cdot \Delta \delta_T + M_{\Delta \delta_e} \cdot \Delta \delta_e \\ \Delta N = N_v \cdot v + N_p \cdot p + N_r \cdot r + N_{\delta_a} \cdot \delta_a + N_{\delta_r} \cdot \delta_r \end{array} \right. \quad (2.1)$$

线性化方程形式为

$$\dot{x} = Ax + Bc \quad (2.2)$$

式中 A 为状态矩阵， B 为控制矩阵。

纵向方程组状态变量 $x = [\Delta u, w, q, \Delta \theta]^T$ ，控制变量 $c = [\Delta \delta_T, \Delta \delta_e]^T$ 。

横侧向方程组状态变量 $x = [v, p, r, \phi]^T$ ，控制变量 $c = [\delta_a, \delta_r]^T$ 。

各变量均采用国际单位制：

- 速度 m/s ；
- 角度 rad ；
- 角速度 rad/s

取机体坐标系进行简化。质心运动学方程与其他方程解耦，可以单独求解。基准运动为定常平飞，则飞行状态满足：

表 1: 定直平飞飞行状态

	基准运动	扰动运动	时间导数
速度	$\begin{cases} u_0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u = u_0 + \Delta u \\ v = \Delta v \\ w = \Delta w \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{u} = \Delta \dot{u} \\ \dot{v} = \Delta \dot{v} \\ \dot{w} = \Delta \dot{w} \end{cases}$
角速度	$\begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} p = \Delta p \\ q = \Delta q \\ r = \Delta r \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{p} = \Delta \dot{p} \\ \dot{q} = \Delta \dot{q} \\ \dot{r} = \Delta \dot{r} \end{cases}$
角度	$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \phi = \Delta \phi \\ \theta = \theta_0 + \Delta \theta \\ \psi = \Delta \psi \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{\phi} = \Delta \dot{\phi} \\ \dot{\theta} = \Delta \dot{\theta} \\ \dot{\psi} = \Delta \dot{\psi} \end{cases}$
位置	$\begin{cases} x_{E0} \\ y_{E0} \\ z_{E0} \end{cases}$	$\begin{cases} x_E = x_{E0} + \Delta x_E \\ y_E = y_{E0} + \Delta y_E \\ z_E = z_{E0} + \Delta z_E \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x}_E = \Delta \dot{x}_E \\ \dot{y}_E = \Delta \dot{y}_E \\ \dot{z}_E = \Delta \dot{z}_E \end{cases}$

将表1中基准状态带入体轴系质心动力学方程(1.21)和转动动力学方程(1.31), 可得平衡状态方程

$$\begin{cases} X_0 - mg \sin \theta_0 = 0 \\ Y_0 = 0 \\ Z_0 + mg \cos \theta_0 = 0 \\ L_0 = 0 \\ M_0 = 0 \\ N_0 = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

将表1中扰动状态带入体轴系质心动力学方程(1.21)和转动动力学方程(1.31), 考虑到平衡方程(2.3), 并忽略二阶及以上小量, 可得扰动方程:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta X - mg \cos \theta_0 \Delta \theta = m \Delta \dot{u} \\ m \Delta \dot{v} = \Delta Y + mg \cos \theta_0 \Delta \phi - m u_0 \Delta r \\ m \Delta \dot{w} = \Delta Z - mg \sin \theta_0 \Delta \theta + u_0 \Delta q \\ \Delta L = I_x \Delta \dot{p} - I_{zx} \Delta \dot{r} \\ \Delta M = I_y \Delta \dot{q} \\ \Delta N = I_z \Delta \dot{r} - I_{zx} \Delta \dot{p} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta X - mg \cos \theta_0 \Delta \theta = m \Delta \dot{u} \\ m \dot{v} = \Delta Y + mg \cos \theta_0 \phi - m u_0 r \\ m \dot{w} = \Delta Z - mg \sin \theta_0 \Delta \theta + m u_0 q \\ \Delta L = I_x \dot{p} - I_{zx} \dot{r} \\ \Delta M = I_y \dot{q} \\ \Delta N = I_z \dot{r} - I_{zx} \dot{p} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

最终可以写成:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{u} = \frac{\Delta X}{m} - g \cos \theta_0 \Delta \theta \\ \dot{v} = \frac{\Delta Y}{m} + g \cos \theta_0 \phi - u_0 r \\ \dot{w} = \frac{\Delta Z}{m} - g \sin \theta_0 \Delta \theta + u_0 q \\ \dot{p} = \frac{I_z \Delta L + I_{zx} \Delta N}{I_x I_z - I_{zx}^2} \\ \dot{q} = \frac{\Delta M}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{I_{zx} \Delta L + I_x \Delta N}{I_x I_z - I_{zx}^2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

将力与力矩的线化公式(2.1)代入公式(2.6)可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{u} = \frac{X_u}{m} \cdot \Delta u + \frac{X_w}{m} \cdot w + \frac{X_q}{m} \cdot q - g \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta + \frac{X_{\Delta \delta_T}}{m} \cdot \Delta \delta_T + \frac{X_{\Delta \delta_e}}{m} \cdot \Delta \delta_e \\ \dot{v} = \frac{Y_v}{m} \cdot v + \frac{Y_p}{m} \cdot p + \left(\frac{Y_r}{m} - u_0 \right) \cdot r + g \cos \theta_0 \cdot \phi + \frac{Y_{\delta_a}}{m} \cdot \delta_a + \frac{Y_{\delta_r}}{m} \cdot \delta_r \\ \dot{w} = \frac{Z_u}{m} \cdot \Delta u + \frac{Z_w}{m} \cdot w + \left(\frac{Z_q}{m} + u_0 \right) \cdot q - g \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta + \frac{Z_{\Delta \delta_T}}{m} \cdot \Delta \delta_T + \frac{Z_{\Delta \delta_e}}{m} \cdot \Delta \delta_e \\ \dot{p} = \frac{I_z L_v + I_{zx} N_v}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot v + \frac{I_z L_p + I_{zx} N_p}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot p + \frac{I_z L_r + I_{zx} N_r}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot r \\ + \frac{I_z L_{\delta_a} + I_{zx} N_{\delta_a}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot \delta_a + \frac{I_z L_{\delta_r} + I_{zx} N_{\delta_r}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot \delta_r \\ \dot{q} = \frac{M_u}{I_y} \cdot \Delta u + \frac{M_w}{I_y} \cdot w + \frac{M_q}{I_y} \cdot q + \frac{M_{\Delta \delta_T}}{I_y} \cdot \Delta \delta_T + \frac{M_{\Delta \delta_e}}{I_y} \cdot \Delta \delta_e \\ \dot{r} = \frac{I_{zx} L_v + I_x N_v}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot v + \frac{I_{zx} L_p + I_x N_p}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot p + \frac{I_{zx} L_r + I_x N_r}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot r \\ + \frac{I_{zx} L_{\delta_a} + I_x N_{\delta_a}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot \delta_a + \frac{I_{zx} L_{\delta_r} + I_x N_{\delta_r}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \cdot \delta_r \end{array} \right. \quad (2.7)$$

同样地, 将表1中基准状态带入体轴系质心运动学方程(1.38)和转动运动学方程(1.44), 可得平衡状态方程, 将扰动状态带入可得扰动方程, 扰动方程减去

平衡方程并忽略二阶及以上小量可得六个运动学方程的线化形式：

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + r \tan \theta_0 \\ \Delta \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = r \sec \theta_0 \\ \Delta \dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_0 - u_0 \sin \theta \Delta \theta + w \sin \theta_0 \\ \Delta \dot{y}_E = u_0 \psi \cos \theta_0 + v \\ \Delta \dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_0 - u_0 \Delta \theta \cos \theta_0 + w \cos \theta_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 纵向小扰动线化方程

可以将(2.7和2.8)线化方程形式写为

$$\dot{x} = Ax + Bc \quad (2.9)$$

线化后的动力学方程和运动学方程纵、横向互不耦合。

纵向方程组状态变量 $x = [\Delta u, w, q, \Delta \theta]^T$ ，控制变量 $c = [\Delta \delta_T, \Delta \delta_e]^T$ 。

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & \frac{X_q}{m} & -g \sin \theta_0 \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & \frac{Z_q}{m} + u_0 & -g \cos \theta_0 \\ \frac{M_u}{I_y} & \frac{M_w}{I_y} & \frac{M_q}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_{\Delta \delta_T}}{m} & \frac{X_{\Delta \delta_e}}{m} \\ \frac{Z_{\Delta \delta_T}}{m} & \frac{Z_{\Delta \delta_e}}{m} \\ \frac{M_{\Delta \delta_T}}{I_y} & \frac{M_{\Delta \delta_e}}{I_y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_T \\ \Delta \delta_e \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_0 - u_0 \sin \theta \Delta \theta + w \sin \theta_0 \\ \Delta \dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_0 - u_0 \Delta \theta \cos \theta_0 + w \cos \theta_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3 横侧小扰动线化方程

横侧向方程组状态变量 $x = [v, p, r, \phi]^T$ ，控制变量 $c = [\delta_a, \delta_r]^T$ 。

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r}{m} - u_0 & g \cos \theta_0 \\ \frac{I_z L_v + I_{zx} N_v}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_z L_p + I_{zx} N_p}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_z L_r + I_{zx} N_r}{I_x I_z - I_{zx}^2} & 0 \\ \frac{I_{zx} L_v + I_x N_v}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_{zx} L_p + I_x N_p}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_{zx} L_r + I_x N_r}{I_x I_z - I_{zx}^2} & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\Delta \delta_a}}{m} & \frac{Y_{\Delta \delta_r}}{m} \\ \frac{I_z L_{\delta_a} + I_{zx} N_{\delta_a}}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_z L_{\delta_r} + I_{zx} N_{\delta_r}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \\ \frac{I_{zx} L_{\delta_a} + I_x N_{\delta_a}}{I_x I_z - I_{zx}^2} & \frac{I_{zx} L_{\delta_r} + I_x N_{\delta_r}}{I_x I_z - I_{zx}^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = r \sec \theta_0 \\ \Delta \dot{y}_E = u_0 \psi \cos \theta_0 + v \end{cases} \quad (2.13)$$

3 F16飞机运动时域响应

3.1 飞机全量运动方程组

飞机建模数据

表 2: 惯性数据 (SI单位制)

质量(kg)	转动惯量(kg · m ²)			
M	I_x	I_y	I_z	I_{xz}
9298.644	12874.847	75673.624	85552.113	1331.413

表 3: 机翼几何尺寸 (SI单位制)

翼展 $b(m)$	机翼面积 $S(m^2)$	平均气动弦 $\bar{c}(m)$
9.144	27.871	3.450

参考重心位置 $X_{cgr} = 0.35\bar{c}$ 。

发动机转动惯量 $h_B^r = 216.9309kg \cdot m^2/s$ ，发动机推力根据表格插值得到： $T = f(throttle, H, M)$ ，其中马赫数定义为飞行速度与当地声速之比 $M = V_t/a$ 。

某飞行高度下的大气密度和声速可以通过USSA76大气密度模型计算得到： $\rho, a = f(H)$ 。

表 4: 气动模型

体轴系	X轴	Y轴	Z轴
力系数	$C_x(\alpha, \delta_e)$	$C_y(\beta, \delta_a, \delta_r)$	$C_z(\alpha, \beta, \delta_e)$
力矩系数	$C_l(\alpha, \beta)$	$C_m(\alpha, \delta_e)$	$C_n(\alpha, \beta)$
力矩控制导数	$C_{l\delta_a}(\alpha, \beta), C_{l\delta_r}(\alpha, \beta)$		$C_{n\delta_a}(\alpha, \beta), C_{n\delta_r}(\alpha, \beta)$
阻尼导数	$C_{xq}(\alpha)$	$C_{yr}(\alpha), C_{yp}(\alpha)$	$C_{zq}(\alpha)$
	$C_{lr}(\alpha), C_{lp}(\alpha)$	$C_{mq}(\alpha)$	$C_{nr}(\alpha), C_{np}(\alpha)$

已知攻角 α 、侧滑角 β 、升降舵偏角 δ_e 、方向舵偏角 δ_r 、副翼偏角 δ_a ，气动系数根据附件表格提供的数据插值得到(表4)，进而进算出体轴系下的(气动)力与

(气动) 力矩:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S C_x^t + T & C_x^t &= C_x + \frac{\bar{c}}{2V_T} C_{xq} \cdot q \\
Y &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S C_y^t & C_y^t &= C_y + \frac{b}{2V_T} C_{yr} \cdot r + \frac{b}{2V_T} C_{yp} \cdot p \\
Z &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S C_z^t & C_z^t &= C_z + \frac{\bar{c}}{2V_T} C_{zq} \cdot q \\
L &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S \bar{c} C_l^t & C_l^t &= C_l + \frac{b}{2V_T} C_{lr} \cdot r + \frac{b}{2V_T} C_{lp} \cdot p + C_{l\delta_a} \cdot \delta_a + C_{l\delta_r} \cdot \delta_r \\
M &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S \bar{c} C_m^t & C_m^t &= C_m + \frac{\bar{c}}{2V_T} C_{mq} \cdot q \\
N &= \frac{1}{2}\rho V_T^2 S \bar{c} C_n^t & C_n^t &= C_n + \frac{b}{2V_T} C_{nr} \cdot r + \frac{b}{2V_T} C_{np} \cdot p + C_{n\delta_a} \cdot \delta_a + C_{n\delta_r} \cdot \delta_r
\end{aligned} \tag{3.1}$$

这里需要说明的有两点，一是在计算 C_l^t 和 C_n^t 时， δ_a 和 δ_r 也是需要无量纲化的，分别用舵偏角的最大值进行无量纲化($\delta_{a,max} = 20^\circ, \delta_{r,max} = 30^\circ$)。二是表中的气动系数是作用在名义重心 $X_{cgr} = 0.35\bar{c}$ 处的，如果F-16实际的重心 $X_{cg} \neq X_{cgr}$ 那么力矩分量 M 需要添加 $Z(X_{cgr} - X_{cg})$ ，力矩分量 N 需要添加 $-Y(X_{cgr} - X_{cg})$ 。

体轴系下状态矢量为:

$$\mathbf{X} = [u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, \psi, x_E, y_E, z_E]^T \tag{3.2}$$

有些状态变量相互关联，在平地球情况下，有9个独立的状态数:

$$\mathbf{X} = [u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, z_V]^T \tag{3.3}$$

其中 (u, v, w) 可以用 (V_T, α, β) 代替。

操纵面位置有:

$$\mathbf{U} = [\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_T]^T \tag{3.4}$$

平地球、体轴系6DOF方程 $f(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0$ 写成 $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ 的形式，给定某时刻的状态变量，通过6DOF方程可以求出该时刻状态变量对时间的导数。

质心动力学方程

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= X/m - qw + rv - g \sin \theta \\
\dot{v} &= Y/m - ru + pw + g \cos \theta \sin \phi \\
\dot{w} &= Z/m - pv + qu + g \cos \theta \cos \phi
\end{aligned} \tag{3.5}$$

转动运动学方程

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\
\dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
\dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.6}$$

转动动力学方程

$$\begin{aligned}
\Gamma &= I_x I_z - I_{xz}^2 \\
\dot{p} &= \{I_{xz}(I_x - I_y + I_z)pq - [I_z(I_z - I_y) + I_{xz}^2]qr + I_z L + I_{xz}N + I_{xz}qh^r\}/\Gamma \\
\dot{q} &= [(I_z - I_x)pr - I_{xz}(p^2 - r^2) + M - rh^r]/I_y \\
\dot{r} &= \{(I_x - I_y)I_x + I_{xz}^2)pq - I_{xz}(I_x - I_y + I_z)qr + I_{xz}^2 L + I_x N + I_x qh^r\}/\Gamma
\end{aligned} \tag{3.7}$$

质心运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = T_{VB}(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.2 纵向配平

以某定直平飞状态作为基准运动状态，完成纵向力和力矩的配平，得到迎角、配平升降舵偏角和配平油门的大小。

在配平时，质心运动学方程不需求解。稳态飞行要求：

$$[\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T = 0 \tag{3.9}$$

$$[\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_T]^T = \text{constant} \tag{3.10}$$

定直平飞状态约束：

$$[\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = 0 \quad (\because [p, q, r]^T = 0) \tag{3.11}$$

方位角 ψ 可自由指定，也令其为0作为约束。

配平，相当于是满足(3.9)和(3.11)的条件下，求解6DOF方程，得到状态变量和操纵面位置。

具体数值算法实现上，本文将求解该非线性方程组的问题，转化为最优化为题：

$$\text{minimize} \quad \phi(\dot{\mathbf{X}}) = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 \tag{3.12a}$$

$$\text{subject to} \quad f(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0 \tag{3.12b}$$

$$[\phi, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = 0 \tag{3.12c}$$

$$[\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_T]^T = \text{constant} \tag{3.12d}$$

$$\text{给定 } V_T = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, z_E \tag{3.12e}$$

本文采用SIMPLEX算法求解上述最优化问题。具体的计算程序（Fortran语言）见附录，第五组飞行状态是 $V_T = 130m/s$, $H = 1000m$ 条件下，计算结果为：

$$\begin{aligned}\text{配平攻角 } \alpha_{\text{trim}} &= 3.9854^\circ \\ \text{配平升降舵偏角 } \delta_{e,\text{trim}} &= -0.605^\circ \\ \text{油门开度 } \delta_{T,\text{trim}} &= 0.123 \\ \text{推力 } T &= 8519.19 \text{ N}\end{aligned}$$

此时的状态变量为：

$$\begin{aligned}u &= 129.6856 \text{ m/s} \\ v &= 0 \text{ m/s} \\ w &= 9.0353 \text{ m/s} \\ \phi &= 0^\circ \\ \theta &= 3.9854^\circ \\ \psi &= 0^\circ \\ p &= 0 \text{ rad/s} \\ q &= 0 \text{ rad/s} \\ r &= 0 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

说明：本文的配平算法具有普适性，可以用来配平定直平飞、稳定盘旋、稳定爬升和稳定滚转等稳态状态。其实这里配平定直平飞状态，通过求解铅垂面内的三自由度模型更为方便。

3.3 零输入全量运动方程时域响应

在外界输入为零情况下飞机，显然飞机将继续保持该定直平飞的状态。数值求解得到的结果，也是各个状态变量均为水平直线（除了方位坐标 x_E ）。

3.4 小扰动线化方程组

本文的小扰动线化方程通过两种方式得到。一种是上文通过对飞机6DOF非线性状态方程进行线化处理，得到特定飞行条件下的线性时不变状态方程。这里采用数值线化的方法。

对状态方程 $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ 在稳态点 $(\mathbf{X}_e, \mathbf{U}_e)$ 附近进行一阶泰勒展开：

$$\dot{\mathbf{X}} + \delta\dot{\mathbf{X}} \approx f(\mathbf{X}_e, \mathbf{U}_e) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \delta\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \delta\mathbf{U} \quad (3.13)$$

由于稳态条件：

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}_e, \mathbf{U}_e) = 0 \quad (3.14)$$

所以

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \delta\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \delta\mathbf{U} \quad (3.15)$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ 可以通过数值中心差分的方式计算，这样，上式可以写成线性时不变状态方程的形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.16)$$

具体到我们小组的飞行状态，对于纵向状态变量 $\mathbf{x} = [\Delta u, w, q, \Delta \theta]^T$ ，控制变量 $\mathbf{u} = [\Delta \delta_T, \Delta \delta_e]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.9628E-02 & 0.4190E-01 & -0.8613E+01 & -0.9783E+01 \\ -0.9561E-01 & -0.7932E+00 & 0.1181E+03 & -0.6816E+00 \\ -0.2890E-03 & 0.4148E-02 & -0.8326E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.1000E+01 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.7110E+01 & 0.4086E-01 \\ 0.0000E+00 & -0.2141E+00 \\ 0.0000E+00 & -0.1146E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} 矩阵4个特征值如下：

$$\Lambda = \text{diag}(-1.513685, -0.121847 + 0.134943i, -0.121847 - 0.134943i, 0.121962)$$

相应的特征向量为：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.036555 & 0.866106 + 0.000000i & 0.866106 - 0.000000i & -0.956607 \\ -0.999305 & 0.049928 + 0.497105i & 0.049928 - 0.497105i & 0.291098 \\ 0.006100 & 0.000473 + 0.002811i & 0.000473 - 0.002811i & 0.001554 \\ -0.004030 & 0.009732 - 0.012293i & 0.009732 + 0.012293i & 0.012745 \end{bmatrix}$$

对于横向状态变量 $\mathbf{x} = [v, p, r, \phi]^T$ ，控制变量 $\mathbf{u} = [\Delta \delta_a, \Delta \delta_r]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.2483E+00 & 0.9084E+01 & -0.1288E+03 & 0.9783E+01 \\ -0.1790E+00 & -0.2783E+01 & 0.6348E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.4360E-01 & -0.4234E-01 & -0.3686E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.1000E+01 & 0.6967E-01 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.2958E-01 & 0.8075E-01 \\ -0.4839E+00 & 0.8387E-01 \\ -0.2041E-01 & -0.4069E-01 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} 矩阵4个特征值如下：

$$\Lambda = \text{diag}(-0.365721 + 2.636124i, -0.365721 - 2.636124i, -2.653124, -0.015255)$$

相应的特征向量为：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.998423 + 0.000000i & 0.998423 - 0.000000i & 0.500149 & 0.497925 \\ -0.036066 + 0.034843i & -0.036066 - 0.034843i & -0.809755 & -0.017619 \\ -0.000541 - 0.017095i & -0.000541 + 0.017095i & -0.024553 & 0.063558 \\ 0.014389 + 0.011699i & 0.014389 - 0.011699i & 0.305853 & 0.864708 \end{bmatrix}$$

3.5 时域响应

基于全量运动方程，计算时域响应，即将方程 $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ 对时间积分，得到状态变量随时间的变化。

基于小扰动方程，计算时域响应，即将方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ 对时间积分，得到状态变量随时间的变化。

本文采用四阶Runge-Kutta进行积分。最大推进时间取5s，因为老师给定飞行器重心 $x_{cg} = 0.35\bar{c}$ 处，气动力作用点也是该点。时间过长飞行器就不稳定（大概在6s左右飞行器攻角超出插值范围，大概在10左右飞行器高度就到海平面以下，超出插值范围）。

3.5.1 升降舵单位阶跃输入时域响应

这里为了方便对比，只给出纵向状态变量 $\mathbf{x} = [\Delta u, w, q, \Delta\theta]^T$ 的时域响应：

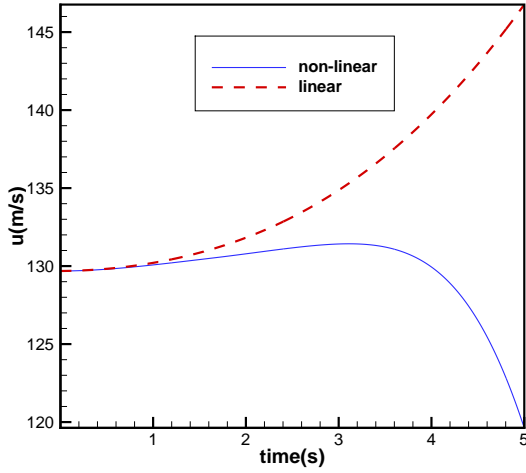


图 1: 纵向 u 时域响应

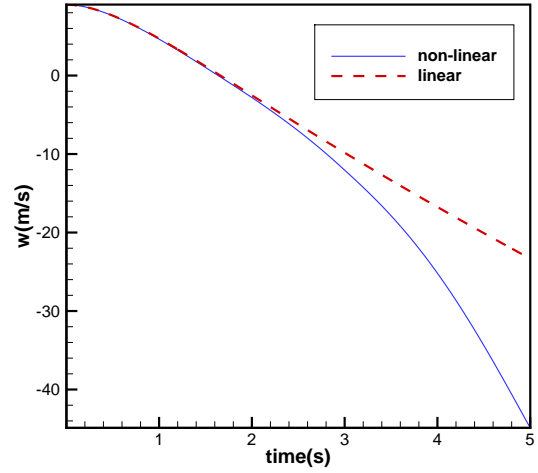


图 2: 纵向 w 时域响应

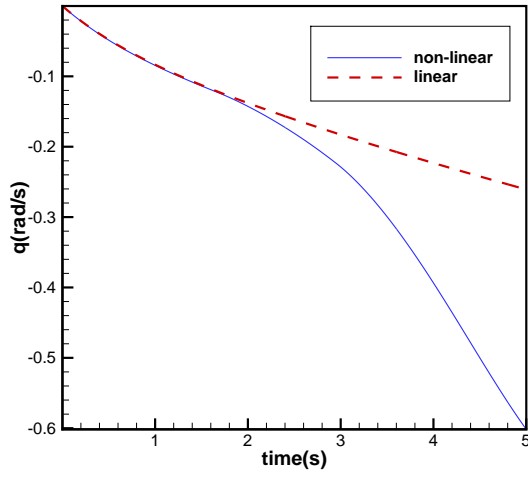


图 3: 纵向 q 时域响应

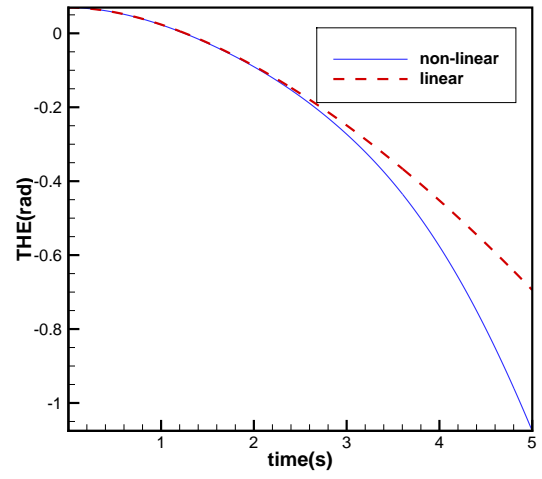


图 4: 纵向 θ 时域响应

3.5.2 副翼单位阶跃输入时域响应

这里为了方便对比，只给出横向状态变量 $\mathbf{x} = [v, p, r, \phi]^T$ 的时域响应:

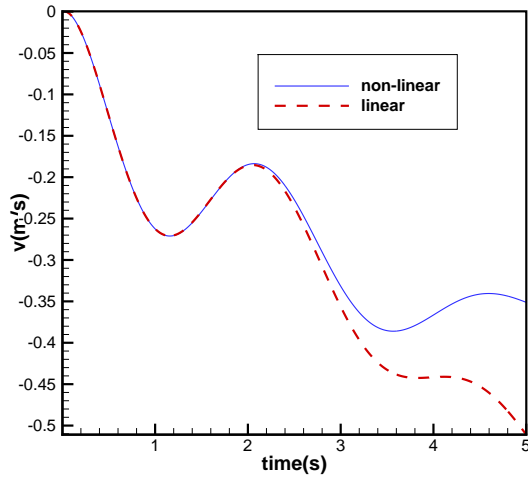


图 5: 横向 v 时域响应

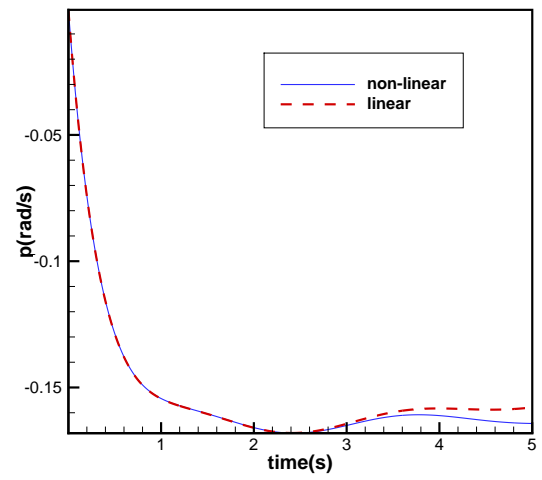


图 6: 横向 p 时域响应

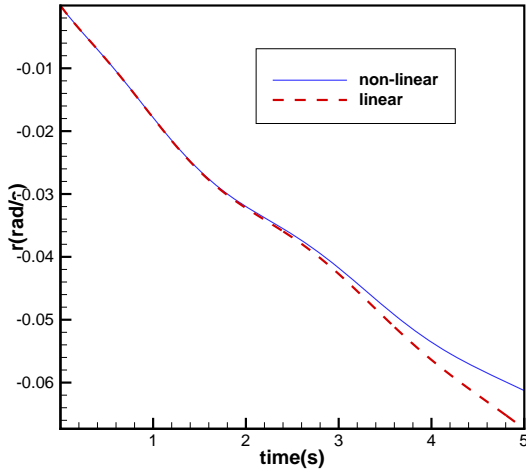


图 7: 横向 r 时域响应

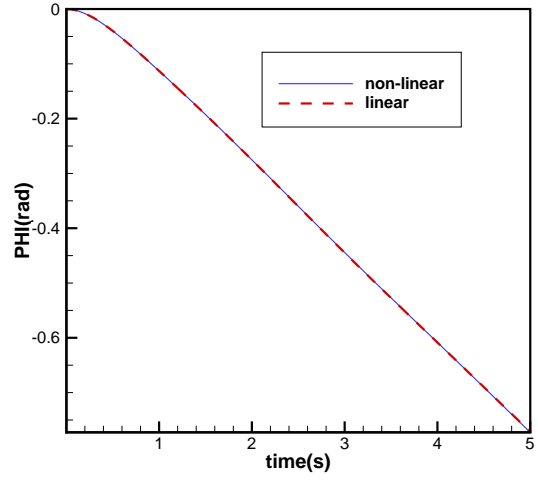


图 8: 横向 ϕ 时域响应

从计算结果可以看出，在短时间内，线性小扰动方程和全量运动方程得到的结果是比较一致的。但随着时间推进，两种方式算出来的结果出现差别。原因主要在于：小扰动方程只在状态偏离平衡态小范围内适用，当时间总够长后，状态变量偏离平衡态比较大，这时候小扰动方程就不再适用。其次，由于时间推进的时候，油门开度 $throttle$ 保持不变，但推力随着飞行高度而发生变化 $T = f(throttle, H, M)$ ；大气密度和声速随着飞行高度发生变化 $\rho, a = f(H)$ 。这样纵横向并不能完全解耦。或者由于本文采用数值微分的方式计算纵横解耦的模态，这种方式并没有把高阶小量直接扔掉，也会带来一定的影响。

3.5.3 纵向模态激励响应

将特征向量实部作为状态变量初始值，计算时域响应。

对于纵向状态变量，矩阵 \mathbf{A} 有四个特征值，其中 -1.513685 和 $-0.121847 \pm 0.134943i$ 的实部小于零，其模态激励为稳定的， 0.121962 实部大于零，其模态激励为发散的。很容易看出长周期模态和短周期模态，两种模态的周期相差在一个数量级以上。长周期模态的阻尼小，周期长，飞行员容易抑制长周期震荡。具体结果如下：

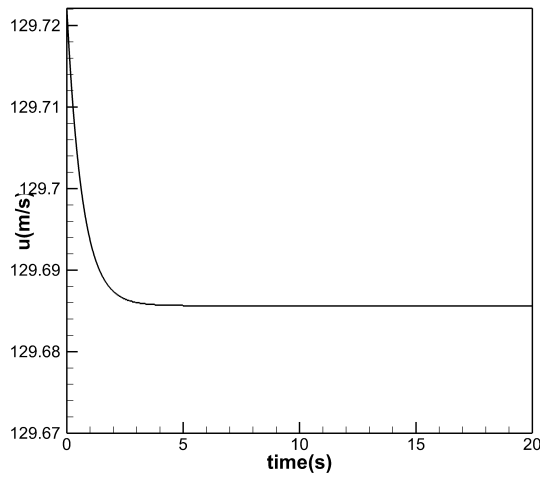


图 9: 纵向 $\lambda = -1.513685$ 时域响应(u)

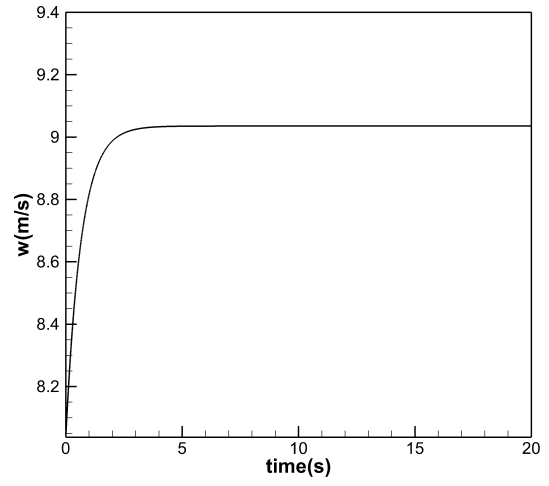


图 10: 纵向 $\lambda = -1.513685$ 时域响应(w)

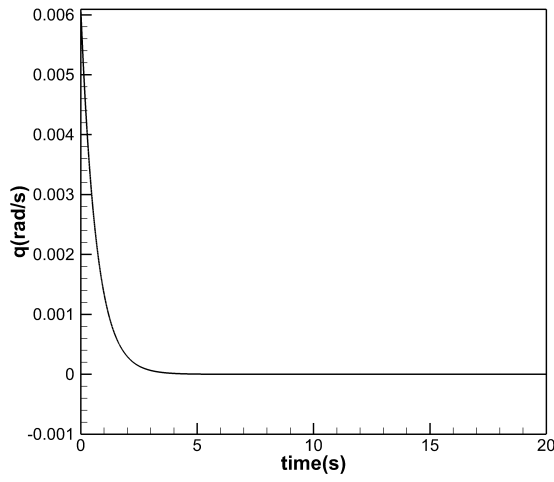


图 11: 纵向 $\lambda = -1.513685$ 时域响应(q)

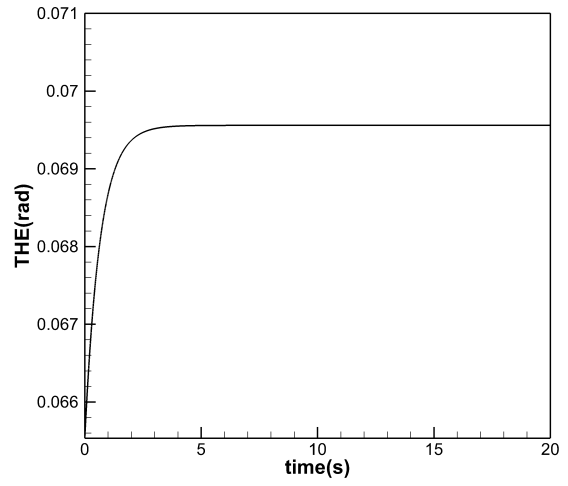


图 12: 纵向 $\lambda = -1.513685$ 时域响应(θ)

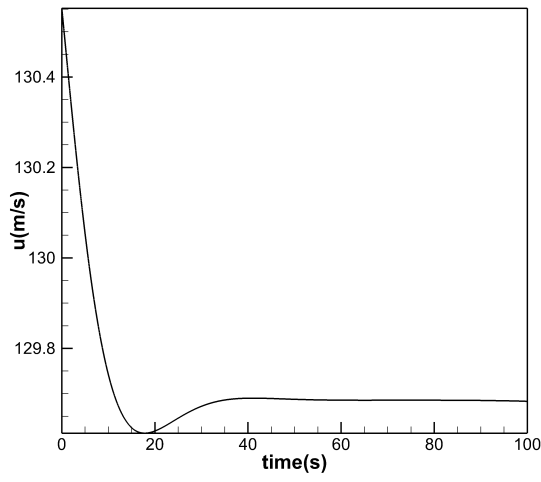


图 13: 纵向 $\lambda = -0.121847 \pm 0.134943i$ 时
域响应(u)

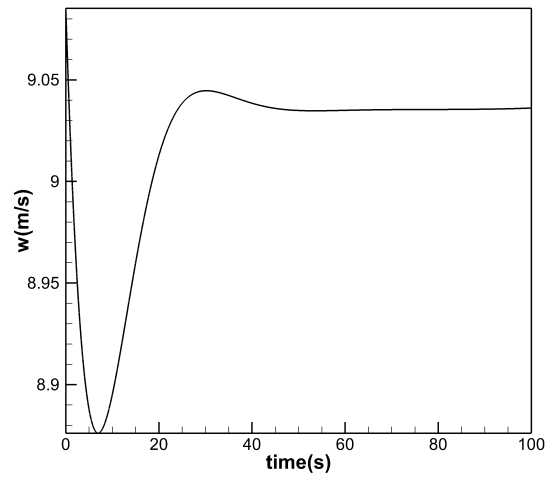


图 14: 纵向 $\lambda = -0.121847 \pm 0.134943i$ 时
域响应(w)

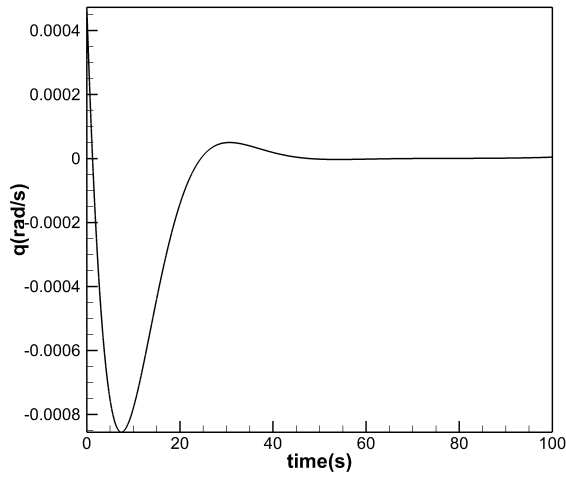


图 15: 纵向 $\lambda = -0.121847 \pm 0.134943i$ 时
域响应(q)

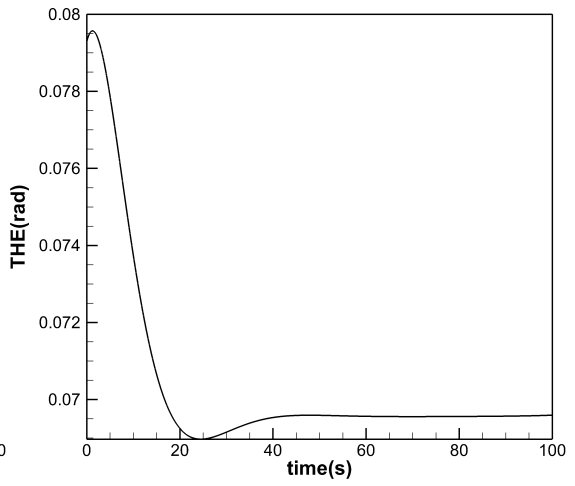


图 16: 纵向 $\lambda = -0.121847 \pm 0.134943i$ 时
域响应(θ)

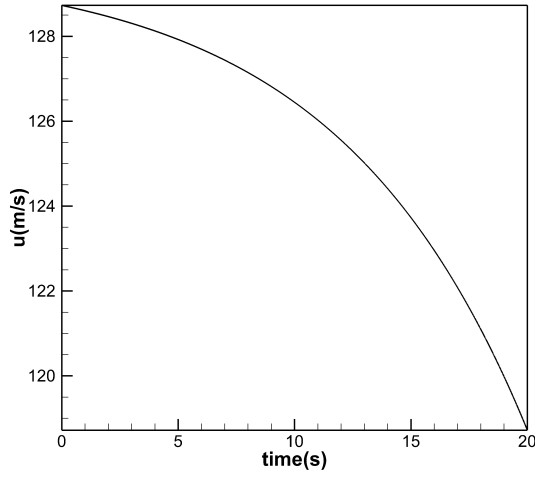


图 17: 纵向 $\lambda = 0.121962$ 时域响应(u)

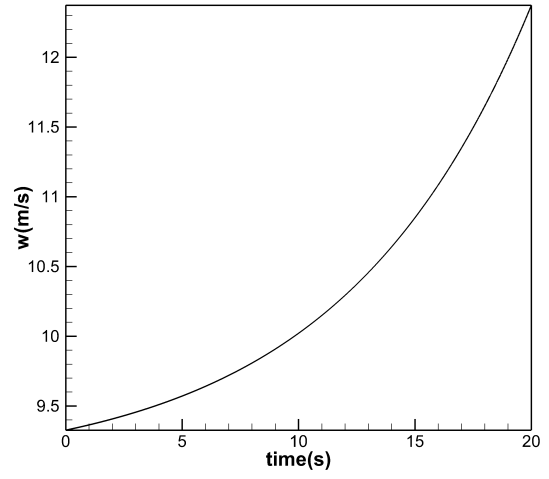


图 18: 纵向 $\lambda = 0.121962$ 时域响应(w)

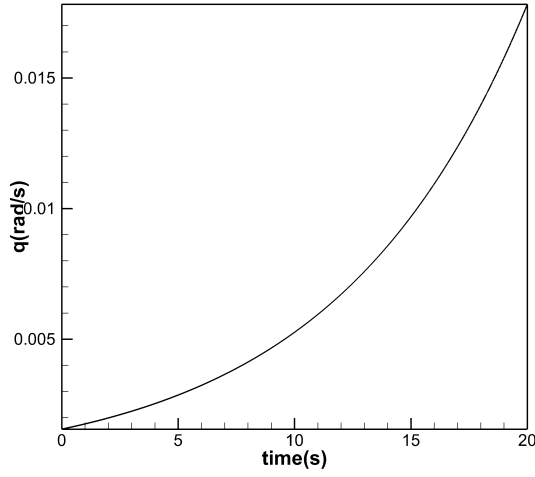


图 19: 纵向 $\lambda = 0.121962$ 时域响应(q)

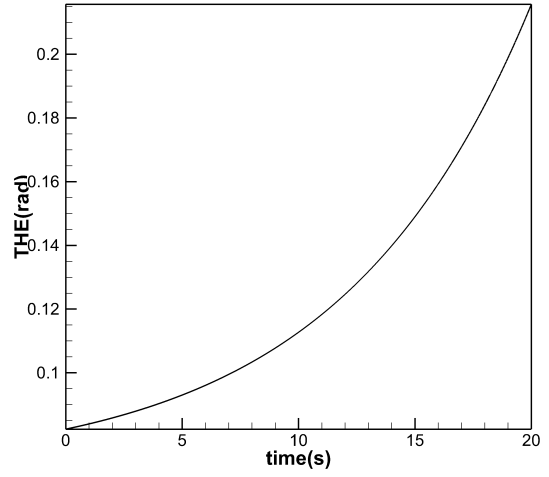


图 20: 纵向 $\lambda = 0.121962$ 时域响应(θ)

3.5.4 横向模态激励响应

对于纵向状态变量，矩阵 \mathbf{A} 有四个特征值： $-0.365721 \pm 2.636124i$ ， -2.653124 ， -0.015255 ，实部均小于零，各个特征值对应的模态激励都是稳定的。其中共轭特征值对应荷兰滚模态，大的负特征根对应滚转衰减模态，小的负特征根对应螺旋模态。具体结果如下：

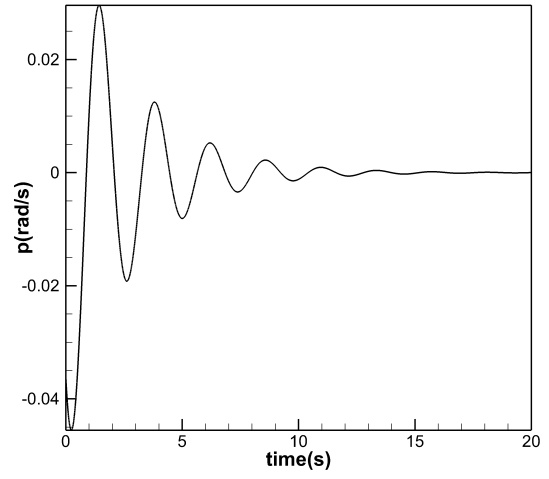
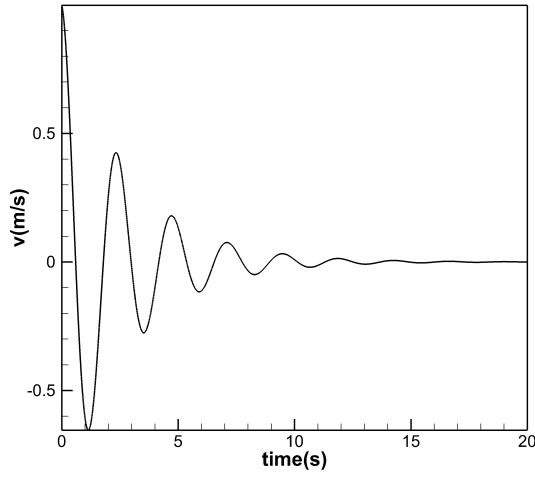


图 21: 横向 $\lambda = -0.365721 \pm 2.636124i$ 时域响应(v) 图 22: 横向 $\lambda = -0.365721 \pm 2.636124i$ 时域响应(p)

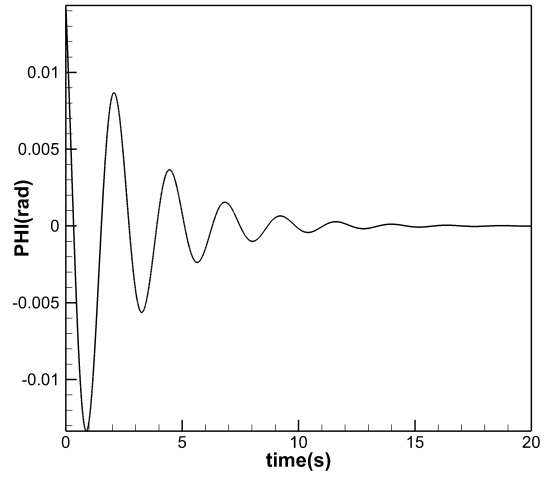
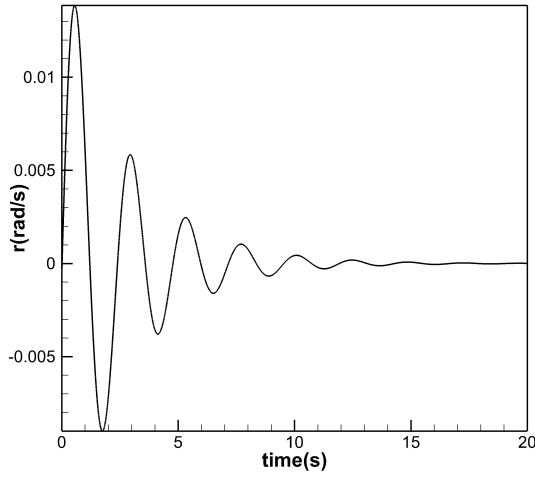


图 23: 横向 $\lambda = -0.365721 \pm 2.636124i$ 时域响应(r) 图 24: 横向 $\lambda = -0.365721 \pm 2.636124i$ 时域响应(ϕ)

荷兰滚模态涉及到所有变量，是带有一定侧滑的滚转和偏航复合运动。该特征值表明，荷兰滚模态的周期比较短，振荡阻尼也很小，这给飞行员在突风条件下着陆造成困难。

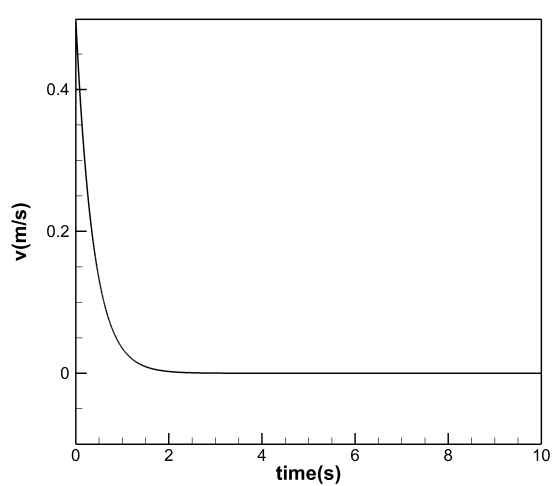


图 25: 纵向 $\lambda = -2.653124$ 时域响应(v)

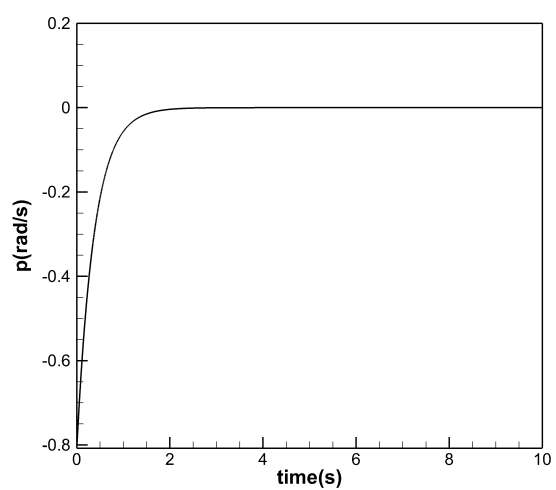


图 26: 横向 $\lambda = -2.653124$ 时域响应(p)

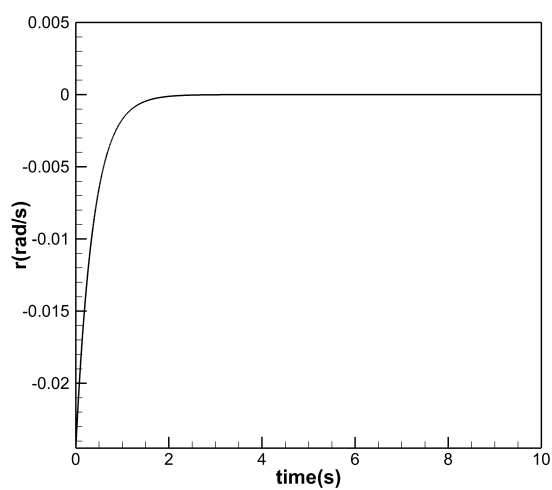


图 27: 横向 $\lambda = -2.653124$ 时域响应(r)

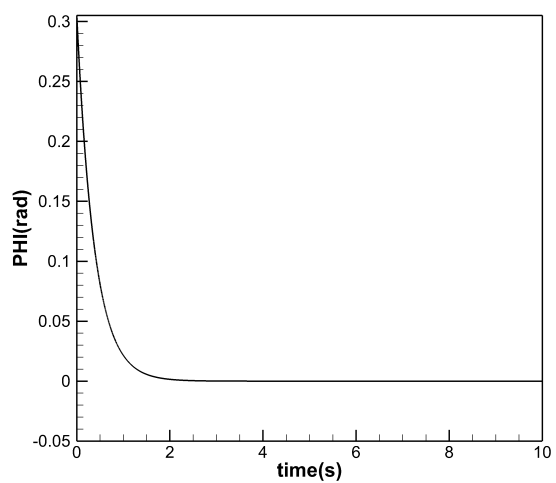


图 28: 横向 $\lambda = -2.653124$ 时域响应(ϕ)

滚转衰减模态是简单的指数稳定模态，时间常数比较小，很快就达到了稳定。

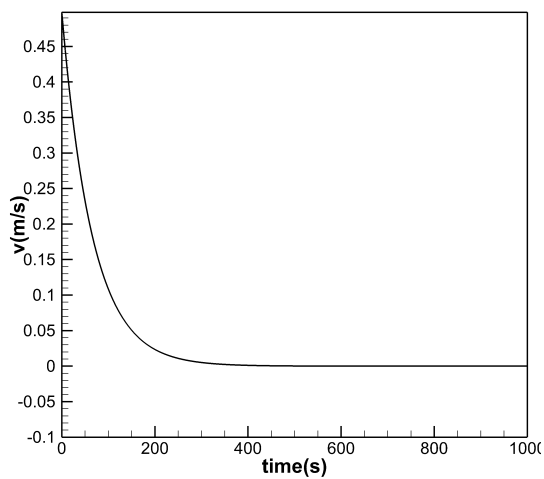


图 29: 横向 $\lambda = -0.015255$ 时域响应(v)

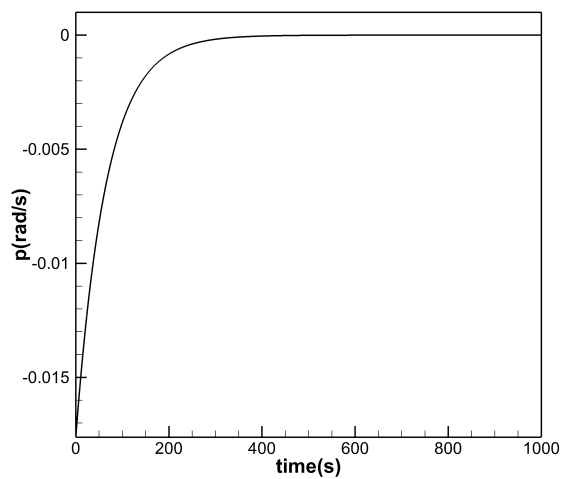


图 30: 横向 $\lambda = -0.015255$ 时域响应(p)

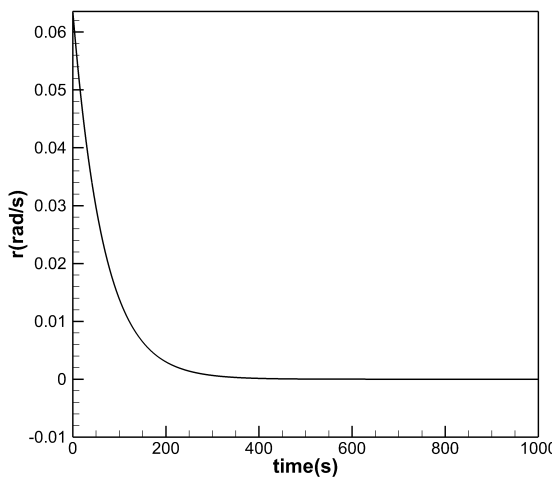


图 31: 横向 $\lambda = -0.015255$ 时域响应(r)

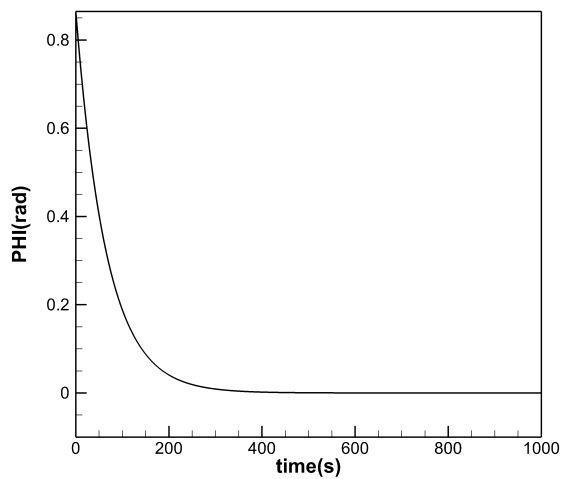


图 32: 横向 $\lambda = -0.015255$ 时域响应(ϕ)

螺旋模态也是一个指数稳定模态，区别在于它的时间常数更大，需要相当长的时间才达到稳态。

4 附录：计算程序说明

本文计算程序基于《飞机控制与仿真》课本 [1] 上的部分代码，全部采用Fortran语言，除了计算矩阵特征值和特征向量调用Lapack库中的DGEEV子程序，其余程序均由本人完成。计算结果的正确性已经验证，与文献 [2] 中的Matlab与Simulation低保真度仿真结果完全一致。

本程序包含代码如下：

```
/src
├── main.f
├── aero.f
├── calAB.f
├── dq.f
├── dq1.f
├── eig.f
├── jacob.f
├── rk4.f
└── trim.f
```

具体子程序说明如下：

```
1      program main !主程序
```

```
1      SUBROUTINE F16_AERO (CX,CY,CZ,CL,CM,CN,
2          $                  VT,ALPHA,BETA,P,Q,R,
3          $                  EL,AIL,RDR,XCG)
4          !根据状态变量和控制变量计算气动系数
```

```
1      SUBROUTINE JACOB (FN,F,X,XD,V,IO,JO,ABC,NR,NC)
2      SUBROUTINE calAB(X,XD,U,Alongitudinal,Blongitudinal
3      &                  ,Alateral,Blateral )
4          !采用数值微分的方法计算小扰动方程中的矩阵
```

```
1      SUBROUTINE F(X,XD)
2          !给定状态变量，根据全量运动方程计算对时间的导数XX
```

```
1      subroutine computeEig(AA,N)
2          !计算矩阵的特征值与特征向量并打印到屏幕AA
```

```
1          !采用阶龙格库塔推进一个时间步长4
2      SUBROUTINE RK4(F,DT,XX,NX)
```

```
1          !配平程序
2      SUBROUTINE TRIMMER (NV, COST)
```

参考文献

- [1] Stevens L B , Lewis L F . Aircraft control and simulation. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2003.
- [2] Richard S. Russell. Non-linear F-16 Simulation using Simulink and Matlab. http://www.aem.umn.edu/~balas/darpa_sec/SEC.Software.html, June 2003.