Lista 3 de Análise de Regressão

Alex dos Santos Lima, RA:230560

15 de Setembro de 2021

Listas com exercícios da quinta edição do livro-texto: "*Kutner, Nachtsheim, Neter and Li (2005).***Applied Linear Statistical Models. Fifth Edition, McGraw-Hill**" (KNNL2005)

5.4; 5.6; 5.10; 5.29; 5.31

5.4) **Flavor deterioration.** The results shown below were obtained in a small-scale experiment to study the relation between ^oF of storage temperature (X) and number of weeks before flavor deterioration of a food product begins to occur (Y).

i	1	2	3	4	5
X_i :	8.00	4.00	0.00	-4.00	-8.00
Y_i :	7.80	9.00	10.20	11.00	11.70

Assume that first-order regression model (2.1) is applicable. Using matrix methods, find (1) $Y'Y$, (2) $X'X$, (3)$X'Y$

5.6) Refer to **Airfreight breakage** Problem *1.21.* Using matrix methods, find (1) $Y'Y$, (2) $X'X$, (3) $X'Y$.

5.10) Find the inverse of each of the following matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 10 \\ 10 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Check in each case that the resulting matrix is indeed the inverse.

5.29) Consider the least squares estimator **b** given in *(5.60).* Using matrix methods, show the **b** is an unbiased estimador.

5.31) Obtain an expression for the variance-covariance matrix of the fitted values $\hat{Y}_i, i = 1, ..., n$, in terms of the hat matrix.

Resolvendo os exercícios logo abaixo e fazendo as traduções

5.4) **A deterioração do sabor.** Os resultados mostrados abaixo foram obtidos numa pequena experiência para estudar a relação entre ^oF da temperatura de armazenamento (X) e o número de semanas antes da deterioração do sabor de um produto alimentar começar a ocorrer (Y).

Resolução:

i	1	2	3	4	5
X_i :	8.00	4.00	0.00	-4.00	-8.00
Y_i :	7.80	9.00	10.20	11.00	11.70

Assumir que o modelo de regressão de primeira ordem (2.1) é aplicável. Utilizando métodos de matriz, encontrar (1) $Y'Y$, (2) $X'X$, (3)$X'Y$

Utilizando os métodos de matriz, para encontrar (1) $Y'Y$, (2) $X'X$, (3)$X'Y$:

Onde matriz X e Y é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -4 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 7.80 \\ 9.00 \\ 10.20 \\ 11.00 \\ 11.70 \end{bmatrix}$$

O cálculo da (1) $Y'Y$ é:

$$Y'Y = \begin{bmatrix} 7.80 & 9.00 & 10.20 & 11.00 & 11.70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.80 \\ 9.00 \\ 10.00 \\ 11.00 \\ 11.70 \end{bmatrix} = 503.77$$

O cálculo da (2) $X'X$, é:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -4 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 160 \end{bmatrix}$$

O cálculo da (3)$X'Y$, é:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.80 \\ 9.00 \\ 10.00 \\ 11.00 \\ 11.70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.7 \\ -39.2 \end{bmatrix}$$

5.6) Consultar **Quebra do frete aéreo** Problema *1.21*. Usando métodos de matriz, encontrar (1) $Y'Y$, (2) $X'X$, (3) $X'Y$.

Resolução:

Usando a consulta em **Quebra do frete aéreo** do Problema *1.21*.

Table 1: Consultar Quebra do frete aéreo Problema 1.21

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Xi	1.00	0.00	2.00	0.00	3.00	1.00	0.00	1.00	2.00	0.00
Yi	16.00	9.00	17.00	12.00	22.00	13.00	8.00	15.00	19.00	11.00

As matrizes são X e Y definida loga abaixo.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 17 \\ 12 \\ 22 \\ 13 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

O cálculo de (1) $Y'Y$ é:

$$Y'Y = \begin{bmatrix} 16.00 & 9.00 & \dots & 19.00 & 11.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16.00 \\ 9.00 \\ \vdots \\ 19.00 \\ 11.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2194 \end{bmatrix}$$

O cálculo de (2) $X'X$ é:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

O cálculo de (3) $X'Y$ é:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 17 \\ 12 \\ 22 \\ 13 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142 \\ 182 \end{bmatrix}$$

5,10) Encontrar o inverso de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 10 \\ 10 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Verificar em cada caso que a matriz resultante é de facto a inversa.

Resolução:

Vamos encontrar a inversa da matriz resultante em A. Onde queremos chegar em A^{-1}

Cálculando o determinante de A :

$$det(A) = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -10$$

Cálculo da matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,(A)} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos encontrar a inversa da matriz resultante em B. Onde queremos chegar em B^{-1}

Cálculando o determinante de B :

$$det(B) = 184$$

Cálculo da matriz inversa de B

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$= ... =$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 184 & 0 & 0 & 20 & -16 & 20 \\ 0 & 184 & 0 & 64 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & 184 & -44 & 26 & 2 \end{array}\right]$$
$$B^{-1} = \frac{1}{184}\begin{bmatrix} 20 & -16 & 20 \\ 64 & 4 & -28 \\ -44 & 26 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{46} & \frac{-2}{23} & \frac{5}{46} \\ \frac{8}{23} & \frac{1}{46} & \frac{-7}{46} \\ \frac{-11}{46} & \frac{13}{92} & \frac{1}{92} \end{bmatrix}$$

5.29) Considerar o estimador de mínimos quadrados **b** dado em *(5.60)*. Utilizando métodos de matriz, mostrar que **b** é um estimador imparcial.

Resolução:

Para a estimação de regressão do coeficiente da normal da equação em *(5.59)* pelo metado da matriz, vamos pronunciar a existencia da inversa em $X'X$ (assumindo a sua existencia) então temos:

$$(X'X)^{-1}X'Xb = (X'X)^{-1}X'Y$$

Vamos encontrar primeiro, desde $(X'X)^{-1}X'X = I$ e $Ib = b$ logo seguie em *(5.60)*

$$b_{2,1} = (X'X)^{-1}_{2,2}X'Y_{2,1}$$

O estimadores de b_0 e b_1 em **b** são algums valores de predição do conjunto de dados dentro da matriz X. Logo temos que cálcular o valor esperado em **b** sendo, *E(**b**)*

$$E = E[(X'X)^{-1}X'Y] = (X'X)^{-1}XE[Y] = (X'X)^{-1}X'X\beta$$

Portanto,

$$E\left[b\right] = \beta$$

5.31) Obter uma expressão para a matriz de variância-covariância dos valores ajustados $\hat{Y}_i, i = 1, ..., n$, em termos da matriz do chapéu.

Resolução:

A variância-covariância da matria e em (5.79) cada derivada da média (5.46). Desde que $e = (I - H)Y$, vamos obter

$$\sigma^2(e) = [I - H]\sigma^2(Y)[I - H]'$$

Agora $\sigma^2(Y) = \sigma^2(\epsilon) = \sigma^2 I$ para a normal de erro do modelo em (5.56a). Também, $(I - H)' = I - H$ por causa da simetria da matriz. Uma vez,

$$\sigma^2(e) = \sigma^2[I - H]I[I - H]' = \sigma^2[I - H][I - H]'$$

Vemos do fato que a matriz $I - H$ é idenpotente, vamos conhecer que $(I - H)(I - H) = I - H$ e vamos obter o seguinte resultado.

$$\sigma^2(\hat{Y}) = H\sigma^2(Y)H' = H\sigma^2 IH = \sigma^2 H$$

Código usado para resover a lista

Leitura do conjunto de dados para questão 5.4)

```
i <-c(1:5)
Xi<-c(8, 4,0,-4,-8)
Yi <-c(7.8, 9.0, 10.2, 11.0, 11.7)
dados <- cbind(i, Xi, Yi)
tdados<- t(dados)
```

Código para questão 5.4)

Do enunicado da quetão

```
i <-c(1:5)
Xi<-c(8, 4,0,-4,-8)
Yi <-c(7.8, 9.0, 10.2, 11.0, 11.7)
```

Matrizes para fazer os cálculos

```
X = data.frame(X=1, X1=Xi)
Yi = as.matrix(Yi)
```

Para fazer cálcular em (1)

```
YtY<- t(as.matrix(Yi))%*%as.matrix(Yi)
```

Para fazer cálcular em (2)

```
XtX = t(as.matrix(X))%*%as.matrix(X)
```

Para fazer cálcular em (3)

```
XtY= t(as.matrix(X)) %*% as.matrix(Yi)
```

Código para resolver a questão 5.6)

Usando os dados do Problema 1.21

```
i <- c(1:10)
Xi <- c(1,  0,  2,  0,  3,  1, 0,  1,  2,  0)
Yi <- c(16, 9, 17, 12, 22, 13, 8, 15, 19, 11)
```

Matriz de desenho de X e Y

```
Y <- as.matrix(Yi)
matriz <- cbind(i, Xi, Yi)
```

Código para resolver a (1) da questão 5.6)

```
X <- as.matrix(data.frame(X1=1, X2=Xi))
YtY <- t(as.matrix(Yi))%*%as.matrix(Yi)
```

Código para (2) da questão 5.6)

```
X <- as.matrix(data.frame(X1=1, X2=Xi))
XtX= t(X) %*% X
```

Código para (3) da questão 5.6)

```
X <- as.matrix(data.frame(X1=1, X2=Xi))
XtY= t(X) %*% Y
```