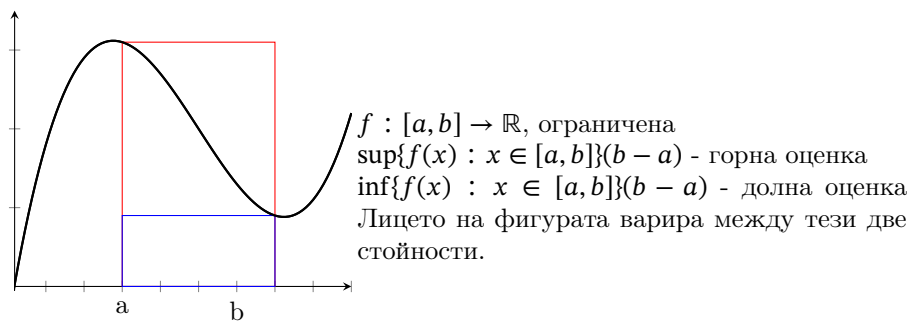


DIS 2 Лекция 1

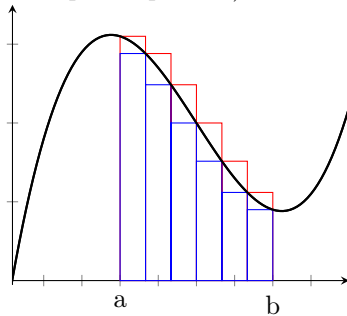
hornyta

28 февруари 2023 г.

1 Определен интеграл



Правим подразбиване на интервала $[a, b]$ $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (което е крайна редица)



Разглеждаме $[x_{i-1}, x_i]$

$$M_j := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_j := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Суми на Дарбу

$$S_f(\tau) := \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \text{Голяма сума на Дарбу за } f \text{ при подр. } \tau$$

$$s_f(\tau) := \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) - \text{Малка сума на Дарбу за } f \text{ при подр. } \tau$$

Лема 1

Ако $\tau^* \subseteq \tau$, то $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau)$ и $s_f(\tau^*) \leq s_f(\tau)$
 τ^*, τ - 2 подразбивания, където τ^* е "по-фино" от τ (τ^* съдържа всичките елементи на τ)

Доказателство: (б.о.о) τ^* се получава от τ с прибавяне на една точка

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\tau^* : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x^* < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\begin{aligned} S_f(\tau) - S_f(\tau^*) &= \\ \sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &- \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x^*, x_i]} f \cdot (x_i - x^*) \\ &- \sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \\ &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_j - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x^*, x_i]} f \cdot (x^* - x_i) \geq \\ &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_j - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x^* - x_i) = 0 \end{aligned}$$

□

Лема 2

τ_1, τ_2 произволни подразбивания на $[a, b]$. Тогава $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$.

Доказателство: Съществува τ^* , такова че $\tau^* \supseteq \tau_1, \tau^* \supseteq \tau_2$. По Лема 1 $s_f(\tau^*) \leq s_f(\tau_1)$ и $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2)$, следователно

$$s_f(\tau_1) \leq s_f(\tau^*) \leq S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2) \quad \square$$

$$[s_f(\tau_1); S_f(\tau_1)] \cap [s_f(\tau_2); S_f(\tau_2)] = \emptyset, \forall \tau_1, \tau_2 - \text{подразбивания на } [a, b]$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ограничена

$$\int_a^b f := \inf \{ S_f(\tau) : \tau - \text{подразбиване на } [a, b] \}$$

$$\int_a^b f := \sup \{ s_f(\tau) : \tau - \text{подразбиване на } [a, b] \}$$

От Лема 2 $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2), \forall \tau_1, \tau_2$ подразбивания на $[a, b]$. Следователно $\int_a^b f \leq S_f(\tau_2), \forall \tau_2$ подразбиване на $[a, b]$ и $\int_a^b f \leq \bar{J}_a^b f \leq$.

Интегруемост по Риман

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича нтегруема по Риман ако е ограничена и $\int_a^b f = \bar{J}_a^b f$. В този случай числото $\int_a^b f = \bar{J}_a^b f$ се нарича Риманов интеграл по f в $[a, b]$ и се бележи $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x) dx$

Функция на Дирихле

Критерий за Интегруемост

Твърдим, че:

f е интегрируема по Риман

$$\stackrel{1}{\iff}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau_1, \tau_2 \text{ - подр. на } [a, b] : S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \epsilon$$

$$\stackrel{2}{\iff}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau \text{ - подр. на } [a, b] : S_f(\tau) - s_f(\tau) < \epsilon$$

$$\iff$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau \text{ - подр. на } [a, b] : \sum_{i=0}^n w(f, [x_{i-1}, x])$$

$\stackrel{1}{\implies}$ Фиксираме $\epsilon > 0$

$$\int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} = \bar{J}_a^b f + \frac{\epsilon}{2} > \bar{J}_a^b f \Rightarrow \exists \tau_1 \text{ подр. на } [a, b], S_f(\tau_1) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f \Rightarrow \exists \tau_2 \text{ подр. на } [a, b], s_f(\tau_2) < \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}$$

$$S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) = \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}$$

$$S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \epsilon$$

$\stackrel{1}{\iff}$ Допускаме противното

$$\forall \tau_1, \tau_2 : S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) \geq \bar{J}_a^b f - \int_a^b f > 0$$

$$(\stackrel{2}{\Longleftarrow}) \tau_1 := \tau, \tau_2 := \tau$$

$$(\stackrel{2}{\Longrightarrow}) \text{ Фиксираме } \epsilon > 0, \tau_1, \tau_2 \rightarrow Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$$

$$\tau \geq \tau_1, \tau \geq \tau_2 \Rightarrow Sf(\tau) - sf(\tau) \leq Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$$

□

Осцилация

$f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ограничена. Осцилация (колебание) на $f(x)$ върху $[a, b]$:

$$w(f, [a, b]) = \sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f$$

Диаметър на τ

$$d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in 1, \dots, n\}$$

Непрекъснатите функции са интегрируеми

Доказателство: $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрекъсната.

От Вайерщрас \rightarrow ограничена. Нека $\epsilon > 0$

От Кантор следва $\exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta : f(x') - f(x'') < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

Взимаме $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ такова, че $d(\tau) < \delta$. Тогава:

$$Sf(\tau) - sf(\tau) = \sum_{i=1}^n w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_{i-1}, x_i) \leq_*$$

Разглеждаме

$$[x_{i-1}, x_i], x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\leq_* \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2(b-a)} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \square$$