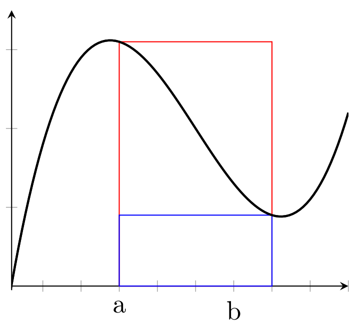
DIS 2 Лекция 1

hornyta

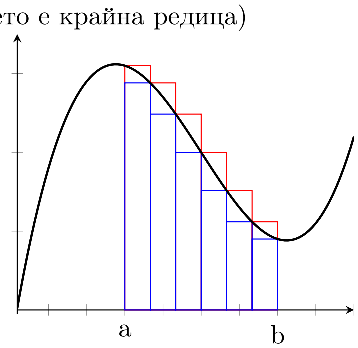
1 март 2023 г.

1 Определен интеграл



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ограничена
$\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}(b-a)$ - горна оценка
$\inf\{f(x) : x \in [a,b]\}(b-a)$ - долна оценка
Лицето на фигурата варира между тези две стойности.

Правим подразбиване на интервала $[a,b]\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (което е крайна редица)



Разглеждаме $[x_{i-1}, x_i]$

$$M_j := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_j := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Суми на Дарбу

$S_f(\tau) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$ - Голяма сума на Дарбу за f при подр. τ
$s_f(\tau) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$ - Малка сума на Дарбу за f при подр. τ

Лема 1

Ако $\tau^* \subseteq \tau$, то $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau)$ и $s_f(\tau^*) \leq s_f(\tau)$
τ^*, τ - 2 подразбивания, където τ^* е "по-фино"от τ (τ^* съдържа всичките елементи на τ)

Доказателство: (б.о.о) τ^* се получава от τ с прибавяне на една точка

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\tau^* : a = x_o < x_1 < \dots < x_{i-1} < x^* < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\begin{aligned}
&S_f(\tau) - S_f(\tau^*) = \\
&\sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&- \sup_{[x_{i-1},x^*]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x^*,x_i]} f \cdot (x_i - x^*) \\
&- \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \\
&= \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_j - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1},x^*]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x^*,x_i]} f \cdot (x^* - x_i) \geq \\
&= \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_j - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x^* - x_i) = 0
\end{aligned}$$

□

Лема 2

τ_1, τ_2 произволни подразбивания на $[a, b]$. Тогава $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$.

Доказателство: Съществува τ^*, такова че $\tau^* \supseteq \tau_1, \tau * \supseteq \tau_2$. По Лема 1 $s_f(\tau^*) \leq s_f(\tau_1)$ и $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2)$, следователно

$$s_f(\tau_1) \leq s_f(\tau^*) \leq S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2) \square$$

$$[s_f(\tau_1); S_f(\tau_1)] \cap [s_f(\tau_2); S_f(\tau_2)] = \emptyset, \forall \tau_1, \tau_2 \text{ - подразбивания на } [a, b]$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ограничена

$\bar{\int}_a^b f := inf\{S_f(\tau) : \tau - \text{ подразбиване на } [a, b]\}$

$\underline{\int}_a^b f := sup\{s_f(\tau) : \tau - \text{ подразбиване на } [a, b]\}$

От Лема 2 $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2), \forall \tau_1, \tau_2$ подразбивания на $[a, b]$. Следователно $\underline{\int_a^b} f \leq S_f(\tau_2), \forall \tau_2$ подразбиване на $[a, b]$ и $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq$.

Интегруемост по Риман

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ се нарича нтегруема по Риман ако е ограничена и $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. В този случай числото $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ се нарича Риманов интеграл по f в $[a, b]$ и се бележи $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\,dx$

Функция на Дирихле

Критерий за Интегруемост

Твърдим, че:

$$f \text{ е интегрируема по Риман}$$
$$\overset{1}{\iff}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau_1, \tau_2 \text{ - подр. на } [a, b] : Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$$
$$\overset{2}{\iff}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau \text{ - подр. на } [a, b] : Sf(\tau) - sf(\tau) < \epsilon$$
$$\iff$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau \text{ - подр. на } [a, b] : \textstyle\sum_{i=0}^{n} w(f, [x_{i-1}, x])$$

$(\overset{1}{\Longrightarrow})$ Фиксираме $\epsilon > 0$

$\int_a^b + \frac{\epsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2} > \overline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_1$ подр. на $[a, b], Sf(\tau_1) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$

$\int_a^b - \frac{\epsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_2$ подр. на $[a, b], sf(\tau_2) < \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}$

$Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) = \int_a^b + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b + \frac{\epsilon}{2}$

$Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$

$(\overset{1}{\Longleftarrow})$ Допускаме противното

$\forall \tau_1, \tau_2 : Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$

$(\overset{2}{\Longleftarrow}) \tau_1 := \tau, \tau_2 := \tau$

$(\overset{2}{\Longrightarrow})$ Фиксираме $\epsilon > 0$, $\tau_1, \tau_2 \rightarrow Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$

$\tau \geq \tau_1, \tau \geq \tau_2 \Rightarrow Sf(\tau) - sf(\tau) \leq Sf(\tau_1) - sf(\tau_2) < \epsilon$

$\square$

Осцилация

$f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ограничена. Осцилация(колебание) на $f(x)$ върху $[a, b]$:

$$w(f, [a, b]) = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

Диаметър на τ

$d(\tau) := max\{x_i - x_{i-1} : i \in 1, \dots, n\}$

Интегруемост на функции

Твърдение

Непрекъснатите функции са интегруеми.

Доказателство: $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрекъсната.
От Вайерщрас $\rightarrow$ ограничена. Нека $\epsilon > 0$
От Кантор следва $\exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta : f(x') - f(x'') < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$
Взимаме $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ такова, че $d(\tau) < \delta$. Тогава:

$$Sf(\tau) - sf(\tau) = \sum_{i=1}^{n} w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_{i-1}, x_i) \leq_*$$

Разглеждаме

$$[x_{i-1}, x_i], x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\leq_* \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \square$$

Твърдение

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и има краен брой точки на прекъсване, Тогава f е интегруеми.

<u>Доказателство:</u> $y_1, y_2, \dots, y_k$ - точки на прекъсване на f и $\eta > 0$

$$C = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (y_i - \eta, y_i + \eta)$$

Обединение на краен брой затворени интервали и f е непрекъсната върху C

Кантор $\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in C : |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

$$\text{Нека } \tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ е разбиване}$$

$$\text{такова, че} \Rightarrow \begin{cases} [x_{i-1}, x_i] \subset C, \text{тогава} x_i - x_{i-1} < \delta \\ [x_{i-1}, x_i] = [y_j - \eta, y_j + \eta] \cap [a, b], j \in 1, \dots, k \end{cases}$$

Пресичаме с $[a, b]$ за да се застраховаме, че няма да излезем от интервала

$$Sf(\tau) - sf(\tau) = \sum_{i=1}^{n} w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i, x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset C}^{n} w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i, x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{k} w(f, [y_j - \eta, y_j + \eta] \cap [a, b]) 2\eta$$

$$\leq M - m \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)} \underbrace{\sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset C}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{\leq b-a} + (M - m) 2\eta k$$

$$Sf(\tau) - sf(\tau) \leq \frac{\epsilon}{\cancel{4(b-a)}} \cancel{(b-a)} + (M - m) 2\eta k < \epsilon$$

Трябваше да изберем $\eta < \frac{\epsilon}{4k(M-m)}$ $\square$