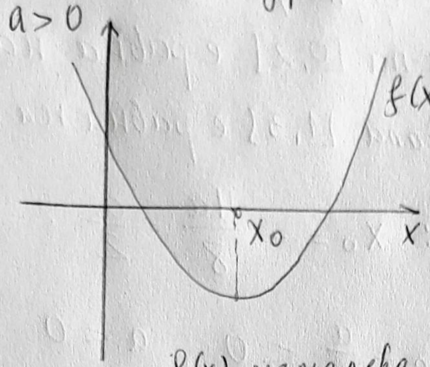
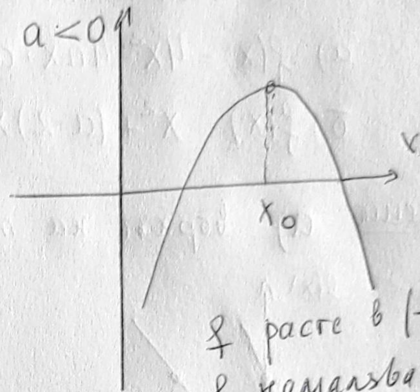
A2-1

Квадратна функция $f(x) = ax^2 + bx + c$



$f(x)$ намалява в $(-\infty, x_0)$
расте в (x_0, ∞)
$f(x_0)$ най-малка ст.



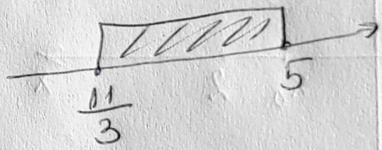
f расте в $(-\infty, x_0)$
f намалява в (x_0, ∞)
$f(x_0)$ - най-голяма ст.

1. Реалните числа x и y са такива, че $x + y = a - 1$ и $xy = a^2 - 7x + 14$. Да се намери най-голямата и най-малка стойности на ф-ята $f(a) = x^2 + y^2$.

Решение. x, y корени на кв. ур. $x^2 - (a-1)x + a^2 - 7a + 14 = 0$ (ф-ли на Виет). Корените са реални числа, ако $D \geq 0$.

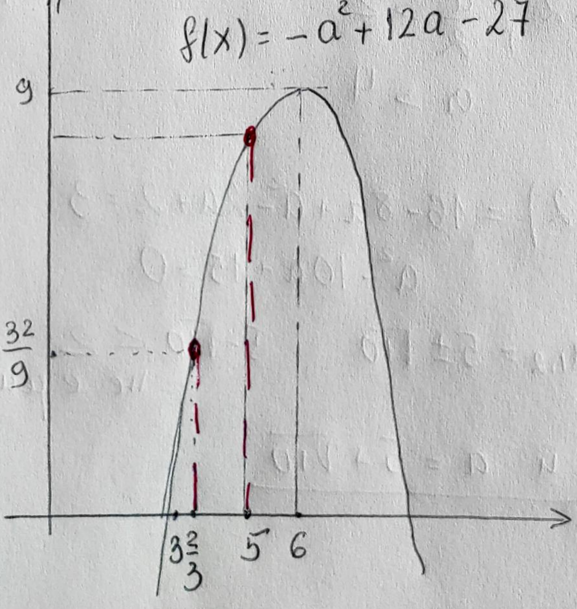
$D = (a-1)^2 - 4(a^2 - 7a + 14) = -3a^2 + 26a - 55 \geq 0 \iff$

$3a^2 - 26a + 55 \leq 0 \Rightarrow D_1 = 13^2 - 3.55 = 4 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{13 \pm 2}{3}$



$f(a) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy =$
$= (a-1)^2 - 2(a^2 - 7a + 14)$

$f(x) = -a^2 + 12a - 27 \quad a_0 = -\frac{12}{-2} = 6$



f е растяща за $x \in (-\infty, 6)$, т.е. растяща в $[3\frac{2}{3}, 5]$

$\Rightarrow f_{\text{н.м.ст.}}(3\frac{2}{3}) = \frac{32}{9}$

$f_{\text{н.г.ст.}}(5) = 8$

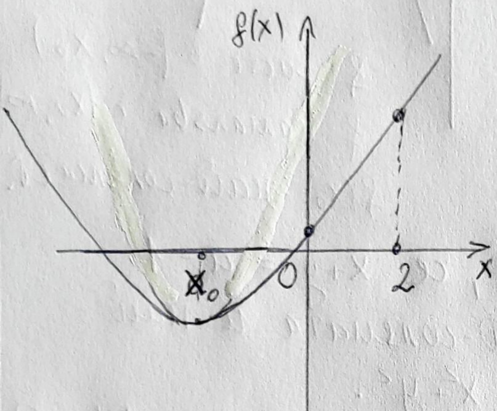
A2-2

(2) За се намерят стойностите на реалния параметър $\underline{\underline{a}}$, за които най-малката стойност на функцията:

а) $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ в и-ла $[0, 2]$ е равна на 3;

б) $f(x) = x^2 + (a-2)x - a$ в интервала $[1, 3]$ е равна на -4.

Решение а) върхът на параболата: $x_0 = -\dfrac{-4a}{8} = \dfrac{a}{2}$.



1 сл. $x_0 = \dfrac{a}{2} < 0$, $a < 0$

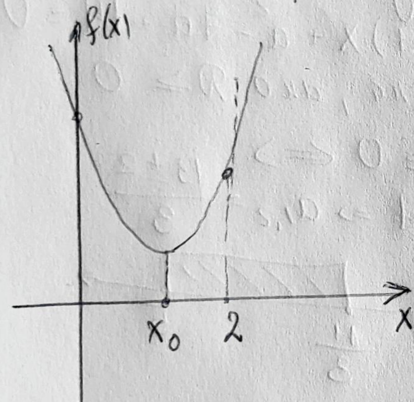
$f(x)$ е растяща в $[0, 2]$

$f_{н.м.ст.}(0) = a^2 - 2a + 2 = 3$

$a^2 - 2a - 1 = 0$

$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$,

$1 + \sqrt{2} > 0$ само $a = 1 - \sqrt{2}$ е реш.

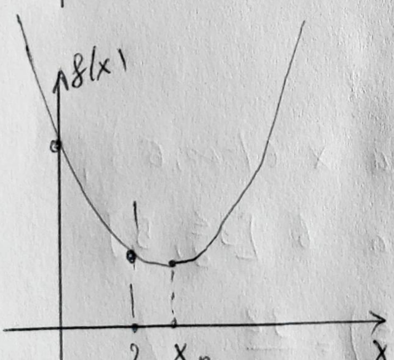


2 сл. $x_0 = \dfrac{a}{2} \in [0, 2] \Rightarrow a \in [0, 4]$

$f_{н.м.ст.}\left(\dfrac{a}{2}\right) = 4 \cdot \dfrac{a^2}{4} - 4a \cdot \dfrac{a}{2} + a^2 - 2a + 2 = 3$

$-2a = 1$

$a = -\dfrac{1}{2} \notin [0, 4]$ не е р.



3 сл. $x_0 > 2$, $\dfrac{a}{2} > 2$

$a > 4$

$f_{н.м.ст.}(2) = 16 - 8a + a^2 - 2a + 2 = 3$

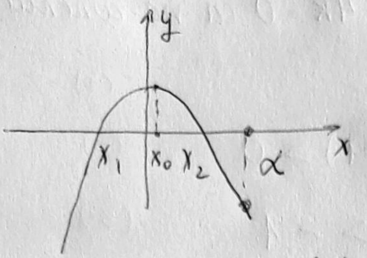
$a^2 - 10a + 15 = 0$

$a_{1,2} = 5 \pm \sqrt{10}$, $5 - \sqrt{10} < 2$ не е реш.

Отг. $a = 1 - \sqrt{2}$ и $a = 5 + \sqrt{10}$

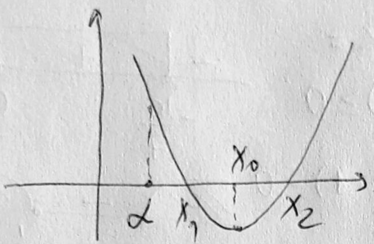
А2-3

Разположение на корените на квадратния тричлен



1) $x_1; x_2 < \alpha \iff \begin{cases} D \geq 0 \\ a f(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$



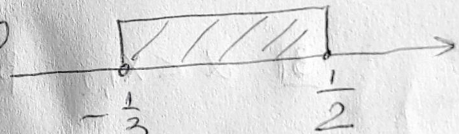
2) $x_1; x_2 > \alpha \iff \begin{cases} D \geq 0 \\ a f(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \alpha \end{cases}$

Задачи

1) За кои стойности на парам. k корените на ур. $kx^2 - 2(k-1)x + 7k - 3 = 0$ са по-малки от 2.

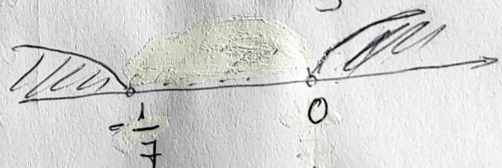
Решение. $x_{1,2} < 2 \iff \begin{cases} ① \; D \geq 0 \\ ② \; k f(2) > 0 \\ ③ \; -\frac{-2(k-1)}{2k} < 2 \end{cases}$

① $D = (k-1)^2 - k(7k-3) = -6k^2 + k + 1 \geq 0$



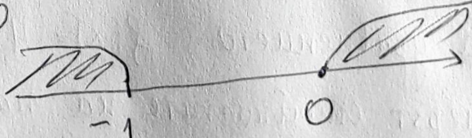
② $k(4k - 4(k-1) + 7k - 3) > 0$

$k(7k+1) > 0$

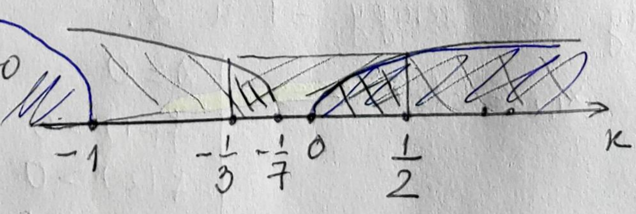


③ $\frac{k-1}{k} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-k-1}{k} < 0$

$\frac{k+1}{k} > 0$



Сечението



Отг. $k \in (0, \frac{1}{2}]$

172-4

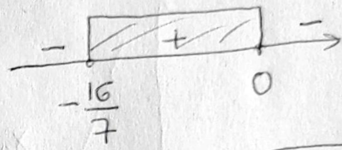
② За кои стойности на параметъра $\underline{\underline{k}}$ корените на уравнението $(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ са по-големи от -1?

Решение

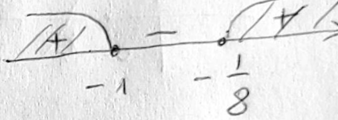
$$\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} D \geq 0 & (1) \\ (k+1)f(-1) > 0 & (2) \\ \dfrac{3k}{2(k+1)} > -1 & (3) \end{cases}$$

(1) $D = 9k^2 - 4(1+k).4k = -7k^2 - 16k =$

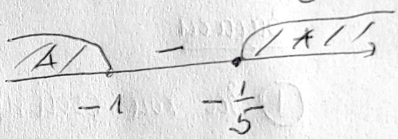
$= -k(7k+16) \geq 0$



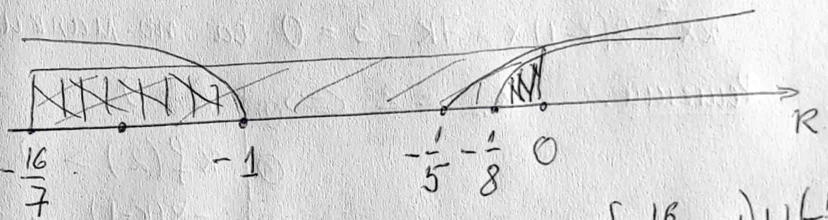
(2) $(k+1)(1+k+3k+4k) > 0 \iff (k+1)(8k+1) > 0$



(3) $\dfrac{3k+2k+1}{2(k+1)} > 0 \iff \dfrac{5k+1}{2(k+1)} > 0$



Сечение:



Отг. $k \in \left[-\frac{16}{7}, -1\right) \cup \left(-\frac{1}{8}, 0\right]$

3) $\alpha < x_{1,2} < \beta \iff \begin{cases} D \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases}$

③ За уравнението $f(x) = 4x^2 - (3k+1)x - k - 2 = 0$ да се намерят стойностите на параметъра $\underline{\underline{k}}$, за които корените му са между -1 и 2.

Решение: $x_{1,2} \in (-1, 2) \iff \begin{cases} D \geq 0 & (1) \\ f(-1) > 0 & (2) \\ f(2) > 0 & (3) \\ -1 < \dfrac{3k+1}{8} < 2 & (4) \end{cases}$

A3-5

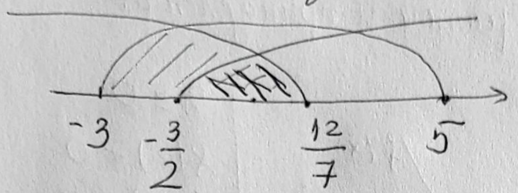
(1) $D = 9k^2 + 6k + 1 + 16k + 32 \geq 0 \iff 9k^2 + 22k + 33 \geq 0 \quad \forall x \quad (D < 0)$

(2) $f(-1) = 4 + 3k + 1 - k - 2 > 0 \iff 2k + 3 > 0 \Rightarrow k > -\frac{3}{2}$

(3) $f(2) = 16 - 6k - 2 - k - 2 > 0 \iff 7k - 12 < 0 \Rightarrow k < \frac{12}{7}$

(4) $-1 < \frac{3k+1}{8} < 2 \iff -9 < 3k < 15$

$-3 < k < 5$



Отг. $k \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{12}{7}\right)$ //

За упражнения:

За кои стойности на параметъра:

а) корените на уравнението $2x^2 - 4(k+2)x + k^2 + 1 = 0$ са по-малки от $\frac{1}{2}$; $((-\infty, -7])$

б) корените на ур. $4x^2 + (k-1)x + 25 = 0$ са по-големи от 1; $((-28, -19))$

в) корените на ур. $(2k+3)x^2 + (k-1)x + 4 = 0$ принадлежат на интервала $(-2, 0)$.

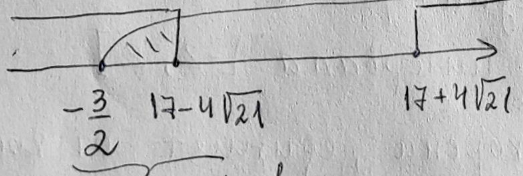
<u>Упътване</u> в) $x_{1,2} \in (-2, 0) \iff$
$$\begin{cases} D \geq 0 & (1) \\ (2k+3)f(-2) > 0 & (2) \quad (k > -3) \\ (2k+3)f(0) > 0 \Rightarrow 4(2k+3) > 0 \\ -2 < -\frac{k-1}{2(2k+3)} < 0 \end{cases}$$

$k > -\frac{3}{2}$

$D = (k-1)^2 - 16(2k+3) \geq 0$

$k^2 - 34k - 47 \geq 0$

$k_{1,2} = 17 \pm \sqrt{336} = 17 \pm 4\sqrt{21}$



$\underbrace{-\frac{3}{2} \quad 17-4\sqrt{21}}_{\text{сравняване}}$

A2-6

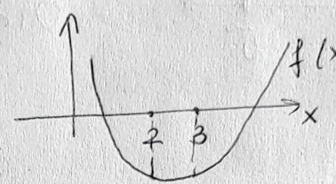
Общи задачи

1) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които корените на ур.

а) $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ са реални и единият е по-малък от 2, а другият е по-голям от 3;

б) $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ са реални и принадлежат на интервала $(1, 3)$.

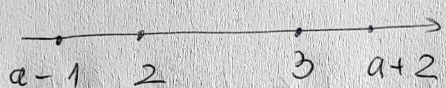
Реш. а) $D \geq 0$



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(2) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases}$$

$D = (2a+1)^2 - 4(a^2+a-2) =$

$= 9 = 3^2 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2a+1 \pm 3}{2}$ ↗ $a+2$, ↘ $a-1$



$$\begin{cases} a > 1 \\ a < 3 \end{cases}$$

Отг. $a \in (1, 3)$

б) Отг. $a \in \left[2, \dfrac{11}{5}\right)$

2) Дадено е уравнението $f(x) = mx^2 - (m+1)x + 2 - m = 0$.
За кои стойности на реалния параметър m:

а) ур. има реални корени, които принадлежат на интервала $(-2, 2)$;

б) ур. има поне един корен в и-ла $[-2, 2]$;

в) ур. няма корен в интервала $[-2, 2]$

г) ур. има два корена, единият от които е по-малък от m, а другият е по-голям от m.

A2-7

$mx^2-(m+1)x+2-m=0$

Решение

а) Ако $m=0 \Rightarrow x=2 \notin (-2,2)$

Нека $m\neq 0$, $x_{1,2}\in(-2,2) \Leftrightarrow \begin{cases} D\geq 0 & (1 \\ mf(-2)>0 & (2 \\ mf(2)>0 & (3 \\ -2<\frac{m+1}{2m}<2 & (4 \end{cases}$

(1) $D=(m+1)^2-4m(2-m)=$

$=5m^2-6m+1\geq 0$

$m_{1,2}=\frac{3\pm 2}{5} \nearrow 1, \searrow \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}$ $\quad$ 1

(2) $m(4m+2m+2+2-m)>0$

$m(5m+4)>0$

$-\frac{4}{5}$ $\quad$ 0

$\Big\}\ (-\infty,-\frac{4}{5}) \cup [1,$

(3) $m(4m-2m-2+2-m)>0$

$m^2>0 \quad \forall m\neq 0$

(4) $\begin{cases} \frac{m+1+4m}{2m}>0 \\ \frac{m+1-4m}{2m}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5m+1}{m}>0 \\ \frac{3m-1}{m}>0 \end{cases}$

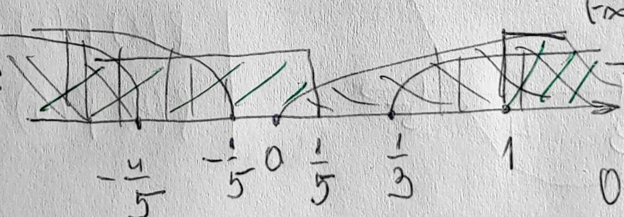
$-\frac{1}{5}$ $\quad$ 0

0 $\quad$ $\frac{1}{3}$

$\Downarrow$

$(-\infty,-\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{3},\infty)$

Сечение:



Отг. $(-\infty,-\frac{4}{5})\cup[1,$

б) Възможни са следните случаи:

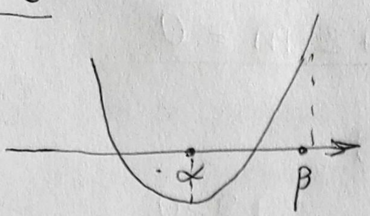
1) $x=-2$ е корен $(\in[-2,2]) \Rightarrow f(-2)=0 \Rightarrow 5m+4=$

$m=-$

2) $x=2$ е корен — " — $\Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow m=0$

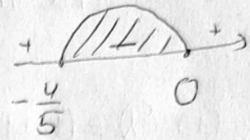
3) ур. има един корен в $(-2,2)$

A2-8



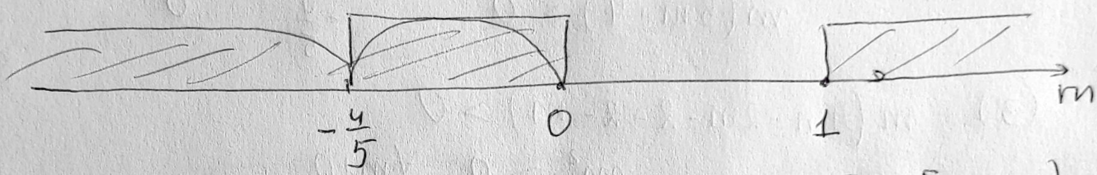
$f(x)$ има само един корен в $(\alpha, \beta) \iff f(\alpha) f(\beta) < 0$

$\Rightarrow f(-2) f(2) < 0 \iff (5m+4)m < 0$



4) има два корена в $(-2, 2) \iff$ | ⓐ $m \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup [1, \infty)$

Обединение на четирите случая:



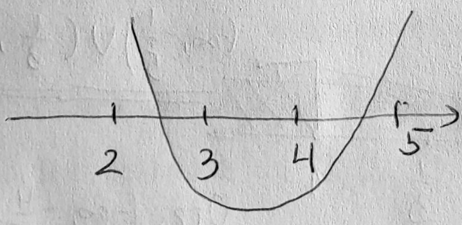
Отг. $m \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

в) няма корен в $[-2, 2] \Rightarrow$ логич. отрицание на сл. б)

$m \in (0, 1)$

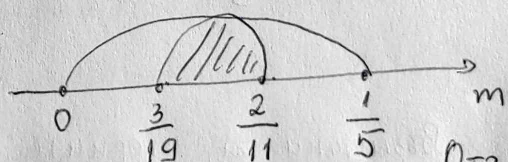
(в това число и $D < 0$, т.е. няма р.к.)

г)



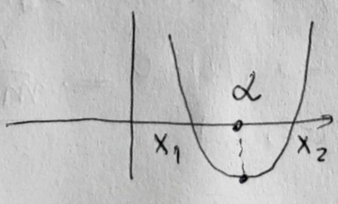
$$\begin{cases} f(2) f(3) < 0 & (1) \\ f(4) f(5) < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} m(5m-1) < 0 \\ (11m-2)(19m-3) < 0 \end{cases}$$



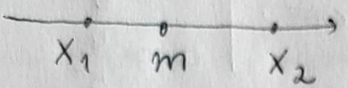
Отг. $m \in \left(\frac{3}{19}, \frac{2}{11}\right)$

д)



$x_1 < \alpha < x_2 \iff a f(\alpha) < 0$

A2-9



$D \ge 0$

$\Longleftrightarrow \ m f(m) < 0$

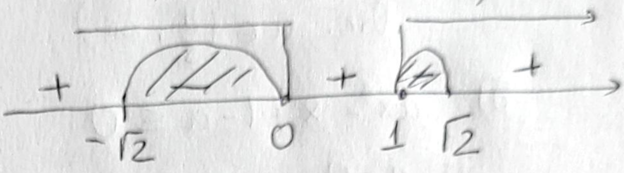
$m(m^3-m^2-m+2-m) < 0$

$m(m-1)(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2}) < 0$

$m^3-m^2-2m+2=$

$=m^2(m-1)-2(m-1)=$

$=(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})(m-1)$



Отг. $m \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (1, \sqrt{2})$

③ Да се намерят стойностите на реалния пар. a, за които

а) всяко число от интервала $[0, 1]$ е решение на нерав.

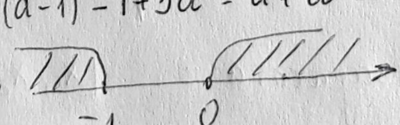
$x^2-2(a-1)x+1-3a < 0$;

б) всяко решение на неравенството $ax^2-x+1-a \le 0$ принадлежи на интервала $[0, 1]$.

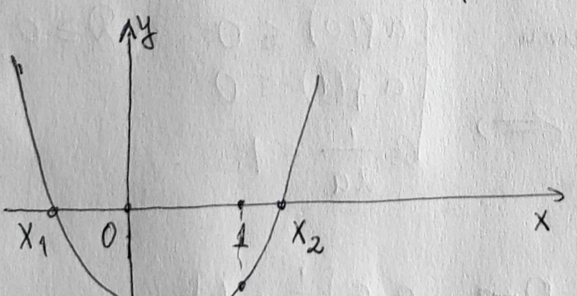
Решение а) при $D \le 0$ н-вото няма реш, и след. не е реш.

$D = (a-1)^2-1+3a = a^2+a \le 0$

Нека $D > 0$;



$\Rightarrow \exists\ x_1$ и x_2



Решенията на нер.: (x_1, x_2)

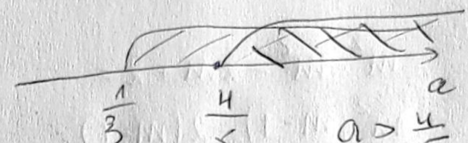
и за да е изп. условието на зад.:

$x_1 < 0 < 1 < x_2$

$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) < 0 \end{array} \right.$! (ако $a > 0$ и $\exists\ \alpha : f(\alpha) < 0$ $\Rightarrow D > 0$) !

<u>A2-10</u>

$$\iff \left| \begin{array}{l} 1-3a<0 \\ 1-2a+2+1-3a<0 \\ \quad 4<5a \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} a>\frac{1}{3} \\ a>\frac{4}{5} \end{array} \right.$$



$a>\frac{4}{5}$

Отг. $a\in\left(\frac{4}{5},\infty\right)$

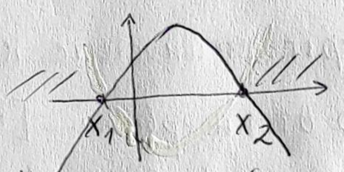
б) $ax^2-x+1-a\le 0$

1) $a=0$ $\quad -x\le -1$

$x\ge 1 \qquad [1,\infty)\not\subset[0,1]$

2) $a\ne 0 \quad D=1-4a(1-a)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\ge 0$

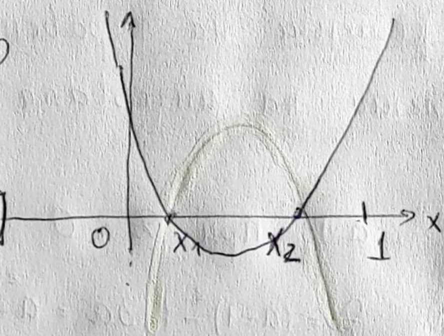
2а) Ако $a<0$



решението на н-вото: $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)\not\subset[0,1]$

2б) Нека $a>0$

Решението на н-вото е $[x_1,x_2]$



Условието на задачата: $[x_1,x_2]\subset[0,1]$

$\iff x_{1,2}\in[x_1,x_2]$ или $\left| \begin{array}{l} af(0)\le 0 \\ af(1)\le 0 \\ 0\le\frac{1}{2a}\le 1 \end{array} \right.$ $(D\ge 0)$

$$\left| \begin{array}{l} f(0)\ge 0 \Rightarrow a\le 1 \\ f(1)\ge 0 \quad 0\ge 0 \\ a\ge\frac{1}{2} \end{array} \right. \iff$$

Отг. $a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

Заб. $x_{1,2}=\frac{1\pm(2a-1)}{2a}$ $\nearrow x_1=2a$, $\searrow x_2=\frac{1-a}{a}$ при $a>0$

$0\le 2a\le 1$

$0\le\frac{1-a}{a}\le 1$

Разположение на корените на квадратния тричлен - общи задачи

(1) За кои стойности на реалния пар. $\underline{a}$ неравенството

а) $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ е изпълнено за $\forall x \in (-\infty, 0)$;

б) $x^2 - 2ax + 1 > 0$ е изпълнено за $\forall x \in (0, \infty)$;

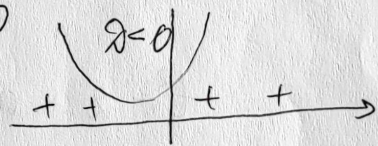
в) $x^4 + ax^3 + (a+3)x^2 + ax + 1 > 0$ е изпълнено за $\forall x$.

<u>Решения</u> а) 1 сл. $a = 0$: $-4x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$ ок $a=0$ е реш.

2 сл. $a \neq 0$ 2а) $a < 0$

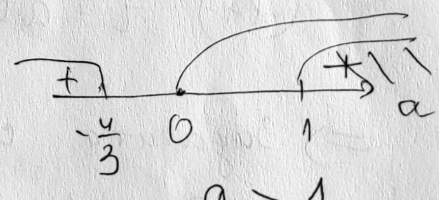
Ако нер. има реш., то то ще бъде краен и-л $\Rightarrow$ този сл. не е реш.

2б) $a > 0$: ако $D = 4 - 3a^2 - a < 0$ реш. а) е $\forall x$



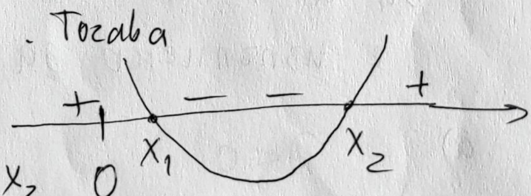
$D < 0 \iff 3a^2 + a - 4 > 0$

$a_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{6}$ $\nearrow -\frac{4}{3}$, $\searrow 1$



$a > 1$

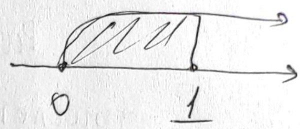
Ако $D \geq 0 \Rightarrow a \in (0, 1]$. Тогава кв. тричлен има два корена и нека : $x_1 \leq x_2$



За да е изпълнено усл. на под. а) трябва $x_1 > 0$ и $x_2 > 0 \iff \begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

А2-12

$$\left| \begin{array}{l} \frac{3a+1}{4} > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$a \in (0, 1]$

Окончателно: $a \in [0, \infty)$

б) за упражнение – отг. $a \in [-\infty, 1)$

в) Ако $x=0$ е реш. ОК $(1>0)$

Нека $x \neq 0$: $\underline{x^4} + \underline{a}x^3 + (a+3)x^2 + \underline{a}x + \underline{1} > 0 \quad \Big| : x^2 \neq 0$

$x^2 > 0$

(*) $$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) + a\left(x+\frac{1}{x}\right) + a + 3 > 0$$

Искаме (*) да е изпълнено за $\forall x$

Полагаме $t = x + \frac{1}{x} \;\Big|^2 \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

При $x>0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

При $x<0$: $x + \frac{1}{x} \leq -2$

$\left(\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0\right)$ $x>0$

и аналогично $x<0$

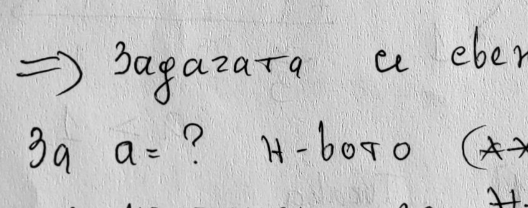
$$t^2 - 2 + at + a + 3 > 0$$

(**) $$t^2 + at + a + 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Задачата се свежда до:

За $a = ?$ н-вото (**) е изпълнено за $\forall t \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

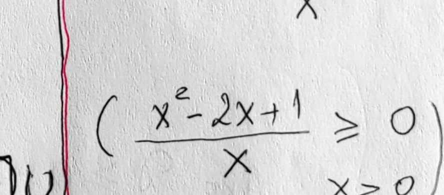
а) $D < 0$



Н-вото е изп. за $\forall t$

или

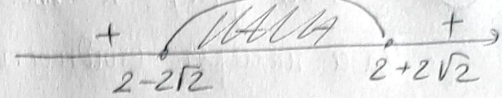
б) $D \geq 0$



A2-13

$f(t) = t^2 + at + a + 1 > 0$

а) $D = a^2 - 4a - 4 < 0$

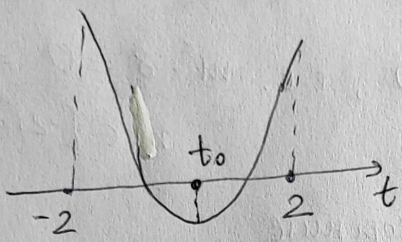


$a_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

$a \in (2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ (1)

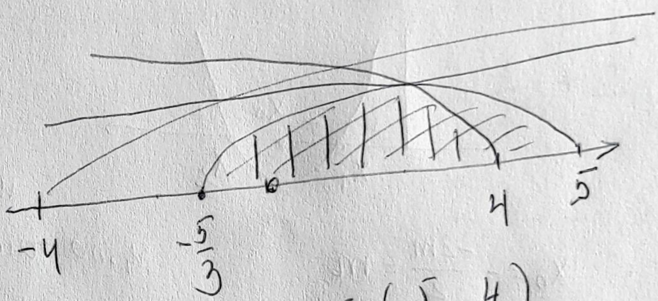
б) $D \geq 0$: $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}, \infty)$

$t_1; t_2 \in (-2, 2) \iff$

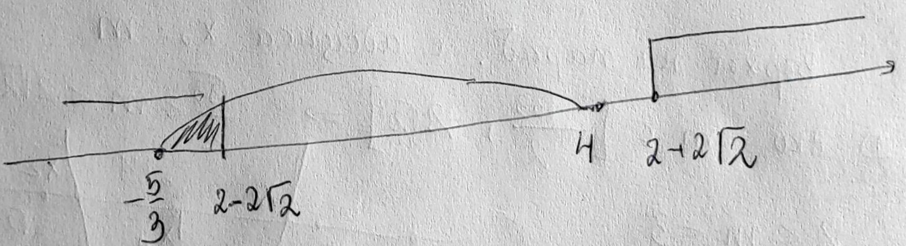


$$\begin{cases} f(2) > 0 \Rightarrow 4 + 2a + a + 1 > 0 \\ f(-2) > 0 \Rightarrow 4 - 2a + a + 1 > 0 \\ -2 < -\frac{a}{2} < 2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a > -\frac{5}{3} \\ a < 5 \\ a < 4 \\ a > -4 \end{cases}$$



$a \in \left(-\frac{5}{3}, 4\right)$



(2)

$\left(\frac{5}{3} \overset{?}{>} 2\sqrt{2}-2\right)$

Обединението на (1) и (2):

Отг. $a \in \left(-\frac{5}{3}, 2+2\sqrt{2}\right)$ //