Yet Another CFPQ: $O(n^3)$

Arseniy Terekhov

October 2019

1 Идея

Если посмотреть на исходный алгоритм, то можно понять, что мы делаем настолько много лишних операций, что это выливается в ненужный $O(n^2)$. Если немного аккуратнее вычислять произведения матриц и более точно считать асимтотику, все итерации алгоритма "свернуться"в одно перемножение матриц.

2 Алгоритм

Пускай у нас есть граф (V, E, L), где L - отображение, сопостовляющее рёбрам терминалы. Так же у нас есть грамматика (Σ, N, P, S). Я предполагаю то, что в процессе будет строится матрица с той самой экзотической операцией умножения двух нетерминальных множеств.

Давайте за A_i обозначим обозначим следующие матрицы:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 = \{a_{ij} = \{n \in N : n \to L(E_{ij}) \in P\}\} & \\ \mathrm{A}_i = (\sum_{j=1}^{i-1} A_j)^2 & \text{i} > 1 \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что A_i не стремятся к транзитивному замыканию, к нему стремятся их частичные суммы. То есть критерий остановки следующий:

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j = \sum_{j=1}^{i} A_j$$

Давайте распишем итерации получения A_i:

- A_1 база
- $A_2 = A_1^2$
- $A_3 = (A_1 + A_2)^2 = A_1^2 + A_1 * A_2 + A_2 * A_1 + A_2^2$
- $A_4 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 = (A_1 + A_2)^2 + (A_1 + A_2) * A_3 + A_3 * (A_1 + A_2) + A_3^2$

- $A_n = (A_1 + A_2 + ... + A_{n-2} + A_{n-1})^2 = (A_1 + A_2 + ... + A_{n-2})^2 + (A_1 + A_2 + ... + A_{n-2}) * A_{n-1} + A_{n-1} * (A_1 + A_2 + ... + A_{n-2}) + A_{n-1}^2$

Теперь заметим, что первые квадраты в левой части повторяются и на самом деле уже посчитаны на предыдущем шаге. Так же за B_i обозначим частичные суммы A_i, которые можно считать итеративно:

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} A_i = B_{i-1} + A_i$$

С этими наблюдениями сумма превращается в красотень:

- A_1 база
- $A_2 = A_1^2$
- $A_3 = (A_1 + A_2)^2 = A_2 + B_1 * A_2 + A_2 * B_1 + A_2^2$
- $A_4 = (A_1 + A_2 + A_3)^2 = A_3 + B_2 * A_3 + A_3 * B_2 + A_3^2$
- $A_n = (A_1 + A_2 + ... + A_{n-2} + A_{n-1})^2 = A_{n-1} + B_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-1} * B_{n-2} + A_{n-1}^2$

Ну и собственно ответ на задачу - последняя B_n.

3 Асимптотика

Мы знаем, что в худшем случае кол-во итераций может быть n^2. Давайте посчитаем асимптотику получения матрицы A_{n^2}. Понятно, что если мы посчитем A_{n^2}, то и посчитаем все предыдущие.

Давайте за $SMM(A, B)$ обозначим функцию асимптотики перемножения двух разряженных матриц. Есть простое утверждение, что

$$O(SMM(A, B)) = O(|A| * n) = O(|B| * n)$$

где $|A|$ - кол-во элементов в матрице А. Оно следует из того, что каждый элемент левой матрицы может принимать участие в O(n) бинарных операциях. При этом это грубая оценка.

На самом деле мы хотим, чтобы A_i попарно не пересекались (поэлементно). Поэтому предыдущее определение нам не совсем подходит. Давайте немного переопределим A_i:

$$A_i = (\sum_{j=1}^{i-1} A_j)^2 / \sum_{j=1}^{i-1} A_i$$

Таким образом A_i попарно не пересекаются, то есть

$$\forall k, l \forall i, j A_{kij} \cap A_{kij} = \emptyset$$

Так же B_i не меняются, а все прошлые выводы остаются верными (просто тогда итерации выглядят уж очень страшно, поэтому я не стал добавлять это определение в начало).

За $O(A_i)$ я обозначаю функцию кол-ва итераций, необходимых для получения A_i.

$$O(A_{n^2}) = O(A_{n^2-1}) + O(SMM(B_{n^2-2}, A_{n^2-1})) + O(SMM(A_{n^2-1}, B_{n^2-2})) + O(SMM(A_{n^2-1}, A_{n^2-1}))$$

$$= O(A_1) + O(SMM(A_1, A_1)) +$$

$$\sum_{i=3}^{n^2} (O(SMM(B_{i-2}, A_{i-1})) + O(SMM(A_{i-1}, B_{i-2})) + O(SMM(A_{i-1}, A_{i-1})))$$

$$= O(n^2) + |A_1| * O(n) + \sum_{i=3}^{n^2} |A_{i-1}| * O(n) + |A_{i-1}| * O(n) + |A_{i-1}| * O(n)$$

$$= O(n^2) + |A_1| * O(n) + \sum_{i=2}^{n^2-1} |A_i| * O(n)$$

$$= O(n^2) + \sum_{i=1}^{n^2-1} |A_i| * O(n)$$

$$= O(n^2) + O(n) * \sum_{i=1}^{n^2-1} |A_i|$$

$$= O(n^2) + O(n) * O(n^2) * |N|$$

$$= O(n^3)$$

В предпоследнем переходе использовался факт того, что все A_i попарно не пересекаются, а значит, сумма сумм их элементов меньше, чем $n^2 * |N|$. Единственное, стоит сказать, что операция разности множеств может быть сделана во время вычисления A_i:

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-1} * B_{n-2} + A_{n-1}^2$$

В момент вычисления A_n мы уже знаем B_{n-1}. Так что можно просто не записывать те результирующие нетерминалы в A_n, если они уже есть в B_{n-1}.

Ну и так же совсем очевидно, что на вычисление всех B_n тратиться хотя бы $O(n^3)$ времни.

4 Заключение

Это очень черный черновик, но основные моменты раскрыты.