Теория автоматов и формальных языков

За пределами контекстно-свободных языков

Автор: Григорьев Семён

Санкт-Петербургский государственный университет

29 мая 2020

Слегка контекстно-зависимые языки (Mildly context sensitive)

Выйти за пределы КС языков, но сохранить “хорошие свойства”

- Полиномиальное время синтаксического анализа (для фиксированной грамматики)
- Невыразимость “слишком сложных структур”
- Полулинейность
- ...

Multiple Context-Free Grammars

Больше информации в презентациях Sylvain Salvati

Определение

m-MCFG(r) это четвёрка $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$

- Σ — *терминальный алфавит*
- N — *нетерминальные символы. Максимальный ранг (арность, местность) равен* m
- S — *стартовый нетерминальный симовл ранга 1*
- P — *множество правил вида*

$$A(s_1, \dots, s_k) \leftarrow B_1(x_1^1, \dots, x_{k_1}^1), \dots, B_n(x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$$

  - A — *нетерминал ранга* k, B_i — *нетерминалы ранга* k_i, $n \leq r$
  - *Все* x_j^i *попарно различны (переменные)*
  - $s_i \in (\Sigma \cup X)^*, X = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} x_j^i$

Пример (КС грамматики)

$$S \to aSb$$
$$S \to \varepsilon$$

$$S(axb) \leftarrow S(x)$$
$$S(\varepsilon) \leftarrow$$

Пример (КС грамматики)

$$S \to aSb$$
$$S \to \varepsilon$$

$$S \to aSbS$$
$$S \to \varepsilon$$

$$S(axb) \leftarrow S(x)$$
$$S(\varepsilon) \leftarrow$$

$$S(ax_1 bx_2) \leftarrow S(x_1), S(x_2)$$
$$S(\varepsilon) \leftarrow$$

Пример

$$
\begin{aligned}
S(x_1 y_1 x_2 z_2) &\leftarrow P(x1, x2), Q(y_1, y_2) \\
P(ax_1, bx_2) &\leftarrow P(x_1, x_2) \\
P(\varepsilon, \varepsilon) &\leftarrow \\
Q(cx_1, dx_2) &\leftarrow Q(x_1, x_2) \\
Q(\varepsilon, \varepsilon) &\leftarrow
\end{aligned}
$$

Пример

$$
\begin{aligned}
S(x_1 y_1 x_2 z_2) &\leftarrow P(x1, x2), Q(y_1, y_2)\\
P(ax_1, bx_2) &\leftarrow P(x_1, x_2)\\
P(\varepsilon, \varepsilon) &\leftarrow\\
Q(cx_1, dx_2) &\leftarrow Q(x_1, x_2)\\
Q(\varepsilon, \varepsilon) &\leftarrow
\end{aligned}
$$

$$L = \{a^n c^m b^n d^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$$

Расширения MCFG

1. **PMCFG** (parallel MCFG)

$$A(x, ax) \leftarrow B(x)$$

2.

$$A(x) \leftarrow B(x), C(x)$$

3. **simpleLMG**

$$A(x, x) \leftarrow B(x), C(x)$$

Расширения MCFG

1. **PMCFG** (parallel MCFG)

$$A(x, ax) \leftarrow B(x)$$

2.

$$A(x) \leftarrow B(x), C(x)$$

3. **simpleLMG**

$$A(x, x) \leftarrow B(x), C(x)$$

$MCFL \subsetneq PMCFL \subsetneq simpleLMG = P$
$\{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \in PMCFL - MCFL$
$S(xx) \leftarrow S(x)$
$S(a) \leftarrow$

Разновидности MCFG

- **Неудаляющая —**
  $\forall i \in \{i, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$ x_j^i используется в $s_1, \ldots, s_k$

Разновидности MCFG

- **Неудаляющая —**
$\forall i \in \{i, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$ x_j^i используется в $s_1, \ldots, s_k$
- **Непереставляющая —** $\forall i \in \{i, \ldots, n\}, j, k \in \{1, \ldots, k_i\}$, если$j < k$, то x_j^i встречается в $s_1, \ldots, s_k$ перед x_k^i

Разновидности MCFG

- **Неудаляющая —** $\forall i \in \{i, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}$ x_j^i используется в $s_1, \dots, s_k$
- **Непереставляющая —** $\forall i \in \{i, \dots, n\}, j, k \in \{1, \dots, k_i\}$, если$j < k$, то x_j^i встречается в $s_1, \dots, s_k$ перед x_k^i
- **Well-nested —** неудаляющая, непереставляющая и

$$\forall i, i' \in \{i, \dots, n\}, i \neq i',$$
$$j \in \{1, \dots, k_i - 1\}, j \in \{1, \dots, k_{i'} - 1\},$$
$$s_1 \cdots s_k \notin (\Sigma \cup X)^* x_j^i (\Sigma \cup X)^* x_{j'}^{i'} (\Sigma \cup X)^* x_{j+1}^i (\Sigma \cup X)^* x_{j'+1}^{i'} (\Sigma \cup X)^*$$

Пример well-nested MCFG

- ✔ $A(\colorbox{pink}{$x_1$}, \colorbox{yellow}{$z_1, z_2$}, \colorbox{pink}{$x_2$}, \colorbox{green}{$y_1, y_2, y_3$}, \colorbox{pink}{$x_3$}) \leftarrow B(x_1, x_2, x_3), C(y_1, y_2, y_3), D(z_1, z_2)$
- ✖ $A(\colorbox{yellow}{$z_1$}, \colorbox{pink}{$x_1$}, \colorbox{green}{$y_1$}, \colorbox{pink}{$x_2$}, \colorbox{yellow}{$z_2$}, \colorbox{green}{$y_2$}, \colorbox{pink}{$x_3$}, \colorbox{green}{$y_3$}) \leftarrow B(x_1, x_2, x_3), C(y_1, y_2, y_3), D(z_1, z_2)$

Лемма о накачке

Теорема (genaral MCFG)

$$\forall L \in m\text{-}MCFG\ \exists n \geq 1\ \underline{\exists z} \in L(|z| \geq n)$$
$$\exists\ \textit{разбиение}\ z = u_1 v_1 w_1 s_1 u_2 \ldots u_m v_m w_m s_m u_{m+1}, \Sigma|v_j s_j| \geq 1$$
$$\forall i \geq 0 : z_i = u_1 v_1^i w_1 s_1^i u_2 \ldots u_m v_m^i w_m s_m^i u_{m+1} \in L$$

Лемма о накачке

Теорема (genaral MCFG)

$$\forall L \in m\text{-}MCFG\ \exists n \geq 1\ \underline{\exists z} \in L(|z| \geq n)$$
$$\exists\ \textit{разбиение}\ z = u_1 v_1 w_1 s_1 u_2 \ldots u_m v_m w_m s_m u_{m+1}, \Sigma|v_j s_j| \geq 1$$
$$\forall i \geq 0 : z_i = u_1 v_1^i w_1 s_1^i u_2 \ldots u_m v_m^i w_m s_m^i u_{m+1} \in L$$

Теорема (well-nested MCFG)

$$\forall L \in m\text{-}wnMCFG\ \exists n \geq 1\ \underline{\forall z} \in L(|z| \geq n)$$
$$\exists\ \textit{разбиение}\ z = u_1 v_1 w_1 s_1 u_2 \ldots u_m v_m w_m s_m u_{m+1}, \Sigma|v_j s_j| \geq 1$$
$$\forall i \geq 0 : z_i = u_1 v_1^i w_1 s_1^i u_2 \ldots u_m v_m^i w_m s_m^i u_{m+1} \in L$$

Иерархии внутри MCFL

Теорема

$(m * (k-1))$-$MCFL(r-k) \subseteq m$-$MCFL(r)$ *если* $1 \leq k \leq r-2$

Иерархии внутри MCFL

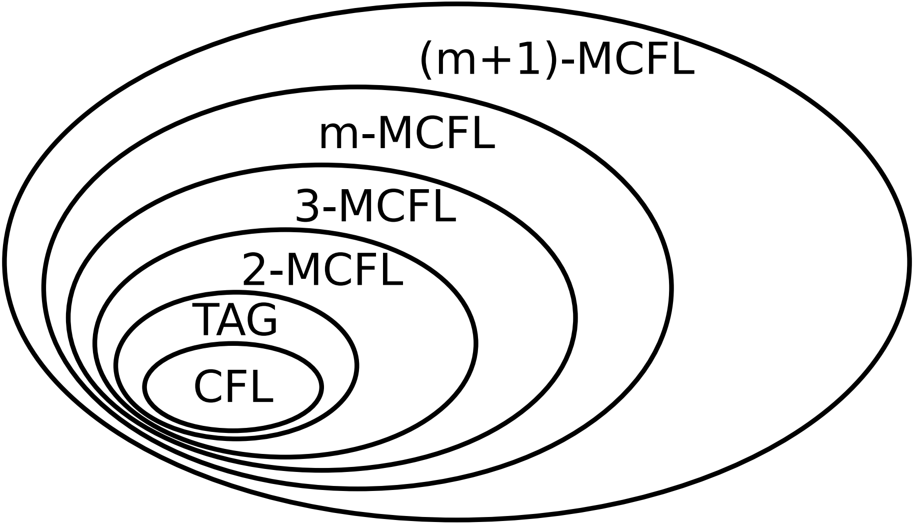
Теорема

$(m*(k-1))$-$MCFL(r-k) \subseteq m$-$MCFL(r)$ *если* $1 \leq k \leq r-2$

Теорема (Seki et al)

$L_{m+1} = \{a_1^n b_1^n \cdots a_{m+1}^n b_{m+1}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *является* $(m+1)$-$MCFL(1)$, *но не является* m-$MCFL(r)$ *ни для какого* r

Иерархия по m



Иерархия для $m = 1$

Теорема

1-MCFL = CFL

Иерархия для $m = 1$

Теорема

1-MCFL = CFL

Теорема

1-MCFL(1) $\subsetneq$ 1-MCFL(2)

Иерархия для $m = 1$

Теорема

1-MCFL $=$ *CFL*

Теорема

1-MCFL(1) $\subsetneq$ *1-MCFL(2)*

Теорема

1-MCFL$(r) =$ *1-MCFL*$(r+1)$, $r \geq 2$

Иерархия для $m = 2$

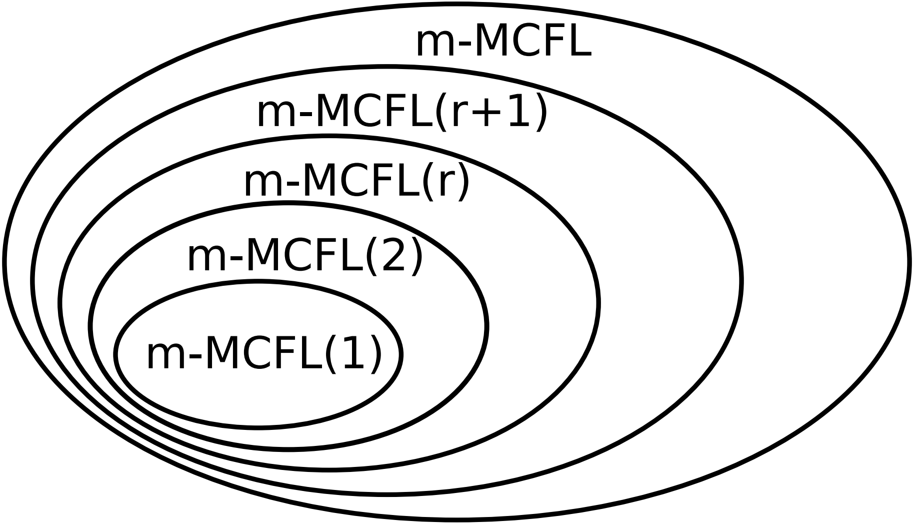
Теорема (Ramow, Satta)

2-MCFL(2) = 2-MCFL(3)

Теорема

Если $m > 2$ или $r > 2$, то m-MCFL(r) $\subsetneq$ m-MCFL(r+1)

Иерархия по r



MIX

- $mix = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$ — контекстно-свободный язык
- $MIX = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b = |\omega|_c\}$ — MCFL? Хотелось верить, что нет
  - MIX is a 2-MCFL and the word problem in $\mathbb{Z}^2$ is solvedby a third-order collapsible pushdown automaton, Sylvain Salvati, 2011

MIX

- $mix = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$ — контекстно-свободный язык
- $MIX = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b = |\omega|_c\}$ — MCFL? Хотелось верить, что нет
  - MIX is a 2-MCFL and the word problem in $\mathbb{Z}^2$ is solvedby a third-order collapsible pushdown automaton, Sylvain Salvati, 2011
- $O_2 = \{\omega \in \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_{\overline{a}} \wedge |w|_b = |w|_{\overline{b}}\}$
- $O_n = \{\omega \in \{a_1, \overline{a_1}, a_2, \overline{a_2}, \ldots, a_n, \overline{a_n}\}^* \mid |\omega|_{a_1} = |\omega|_{\overline{a_1}} \wedge |w|_{a_2} = |w|_{\overline{a_2}} \wedge \cdots \wedge |w|_{a_n} = |w|_{\overline{a_n}}\}$
- $MIX_n = \{\omega \in \{a_1, \ldots, a_n\}^* \mid |\omega|_{a_1} = |\omega|_{a_2} = \cdots = |\omega|_{a_n}\}$

MIX

- $mix = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$ — контекстно-свободный язык
- $MIX = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b = |\omega|_c\}$ — MCFL? Хотелось верить, что нет
  - MIX is a 2-MCFL and the word problem in $\mathbb{Z}^2$ is solvedby a third-order collapsible pushdown automaton, Sylvain Salvati, 2011
- $O_2 = \{\omega \in \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_{\overline{a}} \wedge |w|_b = |w|_{\overline{b}}\}$
- $O_n = \{\omega \in \{a_1, \overline{a_1}, a_2, \overline{a_2}, \ldots, a_n, \overline{a_n}\}^* \mid |\omega|_{a_1} = |\omega|_{\overline{a_1}} \wedge |w|_{a_2} = |w|_{\overline{a_2}} \wedge \cdots \wedge |w|_{a_n} = |w|_{\overline{a_n}}\}$
- $MIX_n = \{\omega \in \{a_1, \ldots, a_n\}^* \mid |\omega|_{a_1} = |\omega|_{a_2} = \cdots = |\omega|_{a_n}\}$
- MIX_n регулярно эквивалентен O_n (существует алгоритм построения грамматики одного языка по грамматике другого)
  - O_n is an n-MCFL, Sylvain Salvati, 2018

Направления развития

- Уточнение внутренних иерархий
- Сопоставление с другими классами и иерархиями
- Представимость языков
  - Ваианты леммы о накачке
  - Представимость конкретных языков
    - Многомерный язык Дика: Towards a 2-Multiple Context-Free Grammar for the 3-Dimensional Dyck Language, Konstantinos Kogkalidis, Orestis Melkonian, 2019
    - Шафл языков Дика: Context-sensitive data-dependence analysis via linear conjunctive language reachability, Qirun Zhang, Zhendong Su et al, 2017

Граммтики и искуственные нейронные сети

- Учёт синтаксической структуры при синтезе: Grammar variational autoencoder, Kusner M. J., Paige B., Hernandez-Lobato J. M., 2017
- Восстановление синтаксической структуры: End-to-end Graph-based TAG Parsing with Neural Networks, Jungo Kasai, Robert Frank et al, 2018
- Извлечение грамматик: Distributional Learning of Context-Free and Multiple Context-Free Grammars, Alexander Clark, Ryo Yoshinaka, 2019