

Теория автоматов и формальных языков

Регулярные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

13 сентября 2016г.

- Формальные языки повсюду. Язык — множество строк над алфавитом
- Существует множество способов описать язык
- Задачи теории формальных языков
 - ▶ Как представить язык?
 - ▶ Какие есть характеристики у разных представлений языка?
 - ▶ Как определить, принадлежит ли строка данному языку?

В предыдущей серии

- Формальная грамматика
 - ▶ \langle Терминалы, Нетерминалы, Правила, Стартовый нетерминал \rangle
 - ▶ Однозначность (любая строка имеет единственный вывод) и неоднозначность
- Вывод: транзитивное и рефлексивное замыкание отношения выводимости
 - ▶ Левосторонний (на каждом шаге заменяем самый левый нетерминал) и правосторонний
- Дерево вывода
 - ▶ Дерево: листья соответствуют терминалам, внутренние вершины — нетерминалам; для каждого внутреннего узла существует правило грамматики, правая часть которого совпадает с метками детей узла
- Контекстно-свободная грамматика
 - ▶ все правила имеют вид $A \rightarrow \alpha$

Конечный автомат — $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

- $Q \neq \emptyset$ — конечное множество состояний
- Σ — Конечный входной алфавит
- δ — отображение типа $Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний

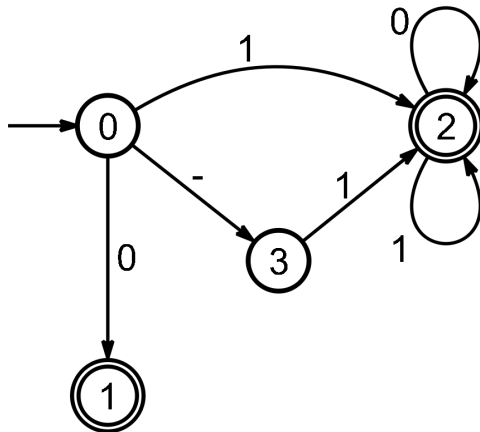
КА называется **полным**, если существует переход из каждого состояния по каждому символу алфавита

- Обычно добавляют "дьявольскую" вершину, она же сток.

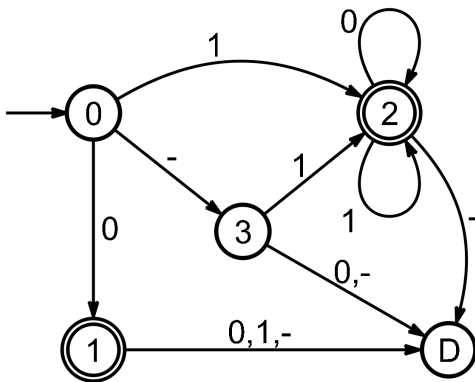
Пример конечного автомата

$Q = \{0, 1, 2, 3\}, \Sigma = \{0, 1, -\}, q_0 = 0, F = \{1, 2\}$

$\delta(0, 0) = 1; \delta(0, 1) = 2; \delta(0, -) = 3; \delta(3, 1) = 2; \delta(2, 0) = 2; \delta(2, 1) = 2$



Пример полного конечного автомата

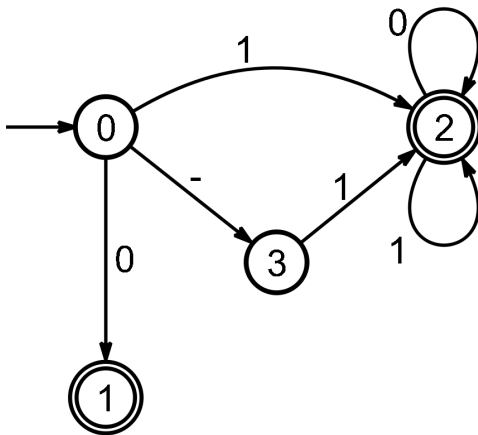


Путь в конечном автомате

- Путь — кортеж $\langle q_0, e_1, q_1, \dots, e_n, q_n \rangle$
 - ▶ $n \geq 0$
 - ▶ $\forall i. e_i = \langle q_{i-1}, w_i, q_i \rangle \in \delta$
 - ▶ q_0 — **начало** пути
 - ▶ q_n — **конец** пути
 - ▶ w_1, w_2, \dots, w_n — **метка** пути
 - ▶ n — **длина** пути
- Путь **успешен**, если q_0 — начальное состояние, а $q_n \in F$
- Состояние q **достижимо** из состояния p , если существует путь из состояния p в состояние q

Пример пути

$\langle 0, \langle 0, ' - ', 3 \rangle, 3, \langle 3, ' 1 ', 2 \rangle, 2, \langle 2, ' 1 ', 2 \rangle, 2, \langle 2, ' 0 ', 2 \rangle, 2 \rangle$ — успешный путь с меткой “-110” длины 4



Такт работы КА (шаг)

- **Конфигурация (Мгновенное описание) КА** — $\langle q, \omega \rangle$, где $q \in Q, \omega \in \Sigma^*$
- **Такт работы** — бинарное отношение \vdash : если $\langle p, x, q \rangle \in \Delta$ и $\omega \in \Sigma^*$, то $\langle p, x\omega \rangle \vdash \langle q, \omega \rangle$
- Бинарное отношение \vdash^* — рефлексивное, транзитивное замыкание \vdash

- Цепочка ω **распознается** КА, если \exists успешный путь с меткой ω
- **Язык, распознаваемый конечным автоматом:**
 $\{\omega \in \Sigma^* \mid \exists p \text{ — успешный путь с меткой } \omega\}$

Теорема

Рассмотрим конечный автомат $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Слово $\omega \in \Sigma^$ принадлежит языку $L(M) \Leftrightarrow \exists q \in F. \langle q_0, \omega \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon \rangle$.*

Обобщаем функцию перехода:

- $\delta'(q, \varepsilon) = q$
- $\delta'(q, xa) = \delta(\delta'(q, x), a)$, где $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

Теорема

Цепочка ω *распознается* КА $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \Leftrightarrow \exists p \in F. \delta'(q_0, \omega) = p$

Язык, распознаваемый конечным автоматом:

$$\{\omega \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. \delta'(q_0, \omega) = p\}$$

Свойство конкатенации строк

Теорема

$$\langle q_1, \alpha \rangle \vdash^* \langle q_2, \varepsilon \rangle, \langle q_2, \beta \rangle \vdash^* \langle q_3, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle q_1, \alpha\beta \rangle \vdash^* \langle q_3, \varepsilon \rangle$$

- Конечные автоматы A_1 и A_2 эквивалентны, если распознают один и тот же язык
- Как проверить что автоматы эквиваленты?

Проверка на эквивалентность автоматов

- Запустить одновременный обход в ширину двух автоматов
- Каждый переход должен приводить в терминальные или нетерминальные вершины в обоих автоматах соответственно

- **Минимальный конечный автомат** — автомат, имеющий наименьшее число состояний, распознающий тот же язык, что и данный

Классы эквивалентности

Отношение эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение

- $xRx; xRy \Leftrightarrow yRx; xRy, yRz \Rightarrow xRz$

Теорема

$\forall R$ — отношение эквивалентности на множестве S

Можно разбить S на k непересекающихся подмножеств $I_1 \dots I_k$, т.ч.

$$aRb \Leftrightarrow a, b \in I_j$$

Множества $I_1 \dots I_k$ называются **классами эквивалентности**

Эквивалентные состояния

- $\omega \in \Sigma^*$ различает состояния q_i и q_j , если
$$\delta'(q_i, \omega) = t_1, \delta'(q_j, \omega) = t_2 \Rightarrow (t_1 \notin F \Leftrightarrow t_2 \in F)$$
- q_i и q_j эквивалентны ($q_i \sim q_j$), если
$$\forall \omega \in \Sigma^*. \delta'(q_i, \omega) = t_1, \delta'(q_j, \omega) = t_2 \Rightarrow (t_1 \in F \Leftrightarrow t_2 \in F)$$
 - Является отношением эквивалентности

Лемма

$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle, p_1, p_2, q_1, q_2 \in Q, q_i = \delta(p_i, c)$
 $\omega \in \Sigma^*$ различает q_1 и q_2 . Тогда $c\omega$ различает p_1 и p_2

Доказательство

$$\delta'(p_i, c\omega) = \delta'(\delta(p_i, c), \omega) = \delta'(q_i, \omega) = t_i$$

TLDR: разбиваем состояния на классы эквивалентности, которые делаем новыми состояниями

Алгоритм минимизации КА

Q — очередь; *marked* — таблица размером $n \times n$ (n — количество состояний КА).

Помечаем в таблице пары неэквивалентных состояний и кладем их в очередь

Алгоритм минимизации КА

- Если автомат не полный — дополнить дьявольской вершиной
- Строим отображение δ^{-1} — обратные ребра
- Находим все достижимые из стартового состояния
- Добавляем в Q и отмечаем в *marked* пары состояний, различимые ε
- Можем пометить пару (u, v) , если $\exists c \in \Sigma. (\delta(u, c), \delta(v, c))$. Для этого, пока $Q \neq \emptyset$:
 - ▶ Извлекаем (u, v) из Q
 - ▶ $\forall c \in \Sigma$ перебираем $(\delta^{-1}(u, c), \delta^{-1}(v, c))$ — если пара не помечена, помечаем и кладем в очередь
- В момент опустошения Q непомеченные пары являются эквивалентными
- За проход по таблице выделяем классы эквивалентности
- За проход по таблице формируем новые состояния и переходы

Алгоритм минимизации КА

- Стартовое состояние — класс эквивалентности, которому принадлежит стартовое состояние исходного КА
- Конечные состояния — классы эквивалентности, которым принадлежат конечные состояния исходного КА

Алгоритм минимизации КА: корректность

- Пусть в результате применения алгоритма к КА A получили КА A_{min} . Покажем, что этот автомат минимальный и единственный с точностью до изоморфизма
- Пусть $\exists A'$. A' и A эквивалентны, но количество состояний A' меньше, чем у A_{min}
- Стартовые состояния $s \in A_{min}$ и $s' \in A'$ эквивалентны (КА допускают один язык)
- $\triangleleft \alpha = a_1 a_2 \dots a_k, a_i \in \Sigma : \langle s, \alpha \rangle \vdash^* \langle u, \varepsilon \rangle; \langle s', \alpha \rangle \vdash^* \langle u', \varepsilon \rangle$
- $\triangleleft \langle s, a_1 \rangle \vdash^* \langle l, \varepsilon \rangle; \langle s', a_1 \rangle \vdash^* \langle l', \varepsilon \rangle. s, s'$ эквивалентны $\Rightarrow l, l'$ эквивалентны
- Аналогично для всех $a_i \Rightarrow u, u'$ эквивалентны
- $\Rightarrow \forall q$ — состояние $A_{min} \exists q'$ — эквивалентное состояние A'
- Состояний A' меньше, чем состояний $A_{min} \Rightarrow 2$ состояниям A_{min} соответствует 1 состояние $A' \Rightarrow$ они эквивалентны. Но по построению A_{min} в нем не может быть эквивалентных состояний. Противоречие

Недетерминированный конечный автомат — $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

- $Q \neq \emptyset$ — конечное множество состояний
- Σ — Конечный входной алфавит
- δ — отображение типа $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний

- **Конфигурация (Мгновенное описание) КА** — $\langle q, \omega \rangle$, где $q \in Q, \omega \in \Sigma^*$
- **Такт работы** — бинарное отношение \vdash : если $q \in \delta(p, x)$ и $\omega \in \Sigma^*$, то $\langle p, x\omega \rangle \vdash \langle q, \omega \rangle$
- Бинарное отношение \vdash^* — рефлексивное, транзитивное замыкание \vdash
- **НКА допускает слово α** , если $\exists t \in F. \langle s, \alpha \rangle \vdash^* \langle t, \varepsilon \rangle$
- **Язык НКА** $L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \exists t \in F. \langle s, \omega \rangle \vdash^* \langle t, \varepsilon \rangle\}$
- **ДКА** — частный случай НКА

Алгоритм, определяющий допустимость слова

- $R(\alpha) = \{p | \langle s, \alpha \rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon \rangle\}$
- $R(\varepsilon) = \{q_0\}$
- $R(\alpha c) = \{q | q \in \delta(p, c), p \in R(\alpha)\}$
- НКА допускает слово $\alpha \Leftrightarrow \exists t \in F. t \in R(\alpha)$

Построение ДКА по НКА: алгоритм Томпсона

- Помещаем в *Queue* множество $\{q_0\}$
- Пока очередь не пуста, выполняем:
 - ▶ $q = \text{Queue.pop}()$
 - ▶ Строим множество $q' = \{t = \delta(s, c) \mid s \in q, c \in \Sigma\}$. Если $q' \notin \text{Queue}$, добавить его в очередь. Каждое такое множество — новая вершина ДКА; добавляем переходы по соответствующим символам
 - ▶ Если во множестве есть хотя бы одна вершина, являющаяся терминальной в данном НКА, то соответствующая вершина ДКА будет конечной
- Результат: $\langle \Sigma, Q_d, q_{d0} \in Q_d, F_d \subset Q_d, \delta_d : Q_d \times \Sigma \rightarrow Q_d \rangle$
 - ▶ $Q_d = \{q_d \mid q_d \subset 2^Q\}$
 - ▶ $q_{d0} = \{q_0\}$
 - ▶ $F_d = \{q \in Q_d \mid \exists p \in F : p \in q\}$
 - ▶ $\delta_d(q, c) = \{\delta(a, c) \mid a \in q\}$

Эквивалентность языков, распознаваемых ДКА и НКА

Теорема

ДКА и НКА распознают один и тот же класс языков

Доказательство.

\Rightarrow : очевидно

\Leftarrow : Рассмотрим произвольный НКА и покажем, что алгоритм Томпсона строит по нему эквивалентный ДКА.

$\forall q \in q_d, \forall c \in \Sigma, \forall p \in \delta(q, c). p \in \delta_d(q_d, c)$

Рассмотрим $\langle q_0, w_1 w_2 \dots w_m \rangle \vdash \langle u_1, w_2 \dots w_m \rangle \vdash^* \langle u_m, \varepsilon \rangle, u_m \in F$

$\forall i. u_i \in u_{d_i}$, где $(q_{d_0}, w_1 w_2 \dots w_m) \vdash (u_{d_1}, w_2 \dots w_m) \vdash^* (u_{d_m}, \varepsilon)$

$\Rightarrow u_m \in u_{d_m}$

