Теория автоматов и формальных языков

Регулярные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

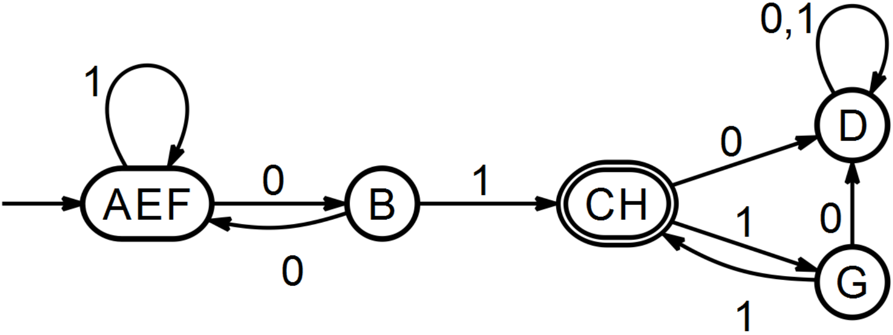
20 сентября 2016г.

В предыдущей серии

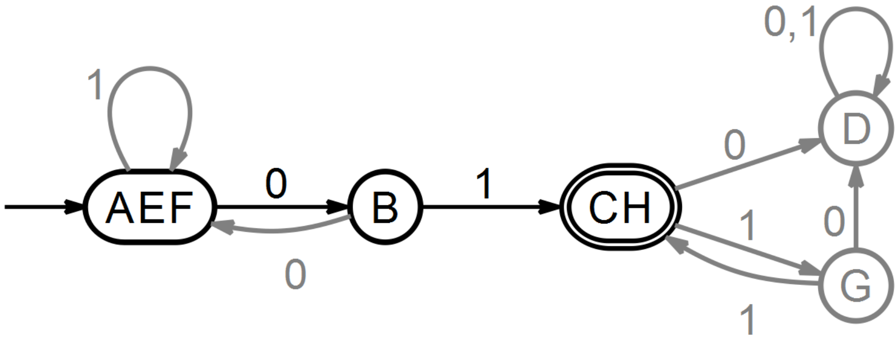
Конечный автомат — $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$

- $Q \neq \emptyset$ — конечное множество состояний
- Σ — Конечный входной алфавит
- δ — функция переходов
  - Детерминированный КА: отображение типа $Q \times \Sigma \to Q$
  - Недетерминированный КА: отображение типа $Q \times \Sigma \to 2^Q$
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний

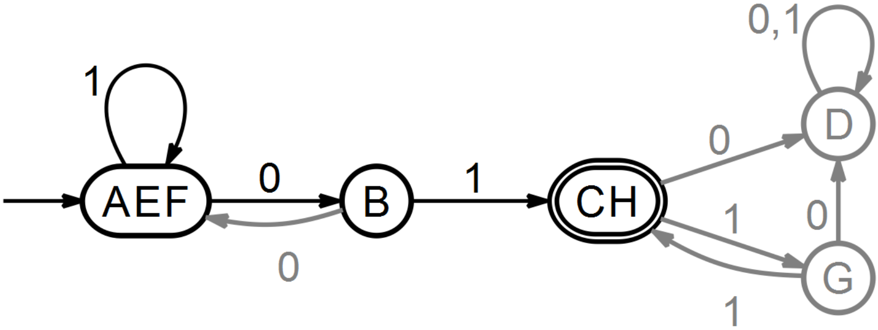
В предыдущей серии: ДКА



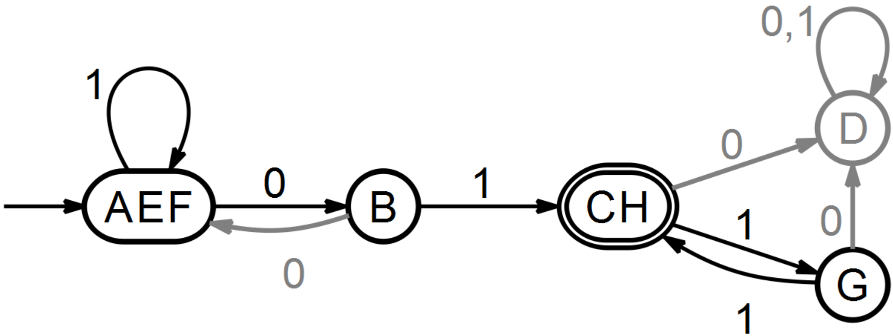
В предыдущей серии: распознание слова ДКА



В предыдущей серии: распознание слова ДКА

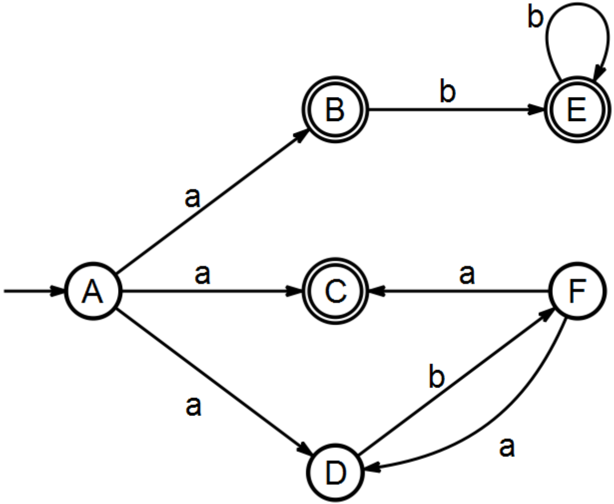


В предыдущей серии: распознание слова ДКА



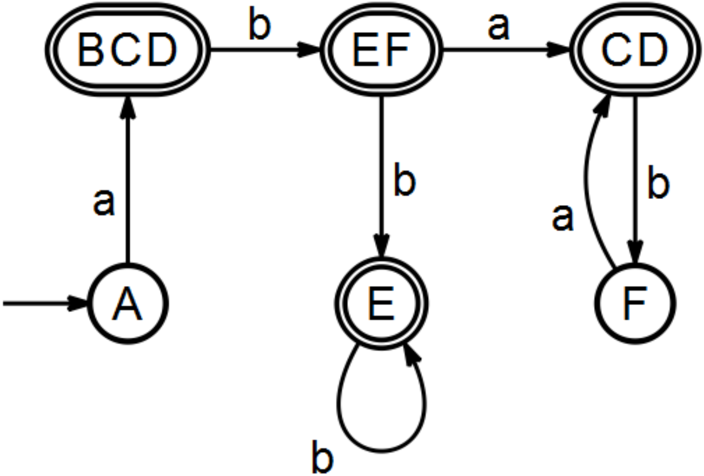
Слово распознается за $O(n)$

В предыдущей серии: распознание слова НКА

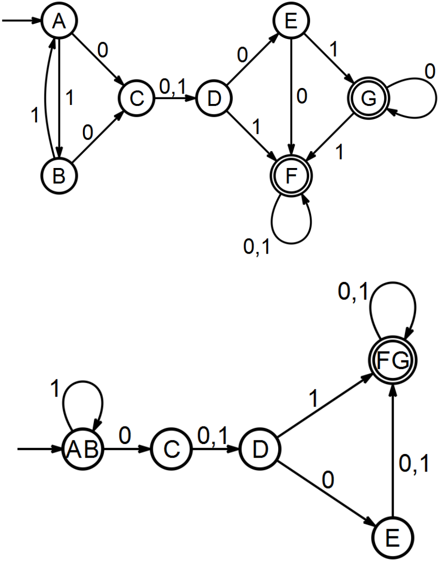


Слово распознается за ...

В предыдущей серии: детерминизация



В предыдущей серии: минимизация



Произведение автоматов

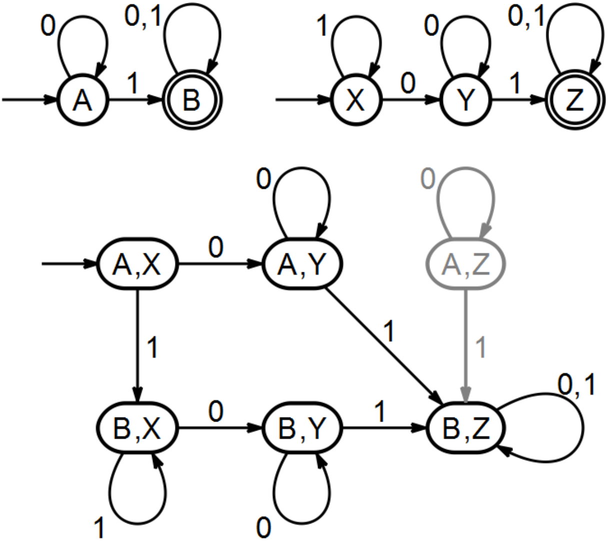
$A_1 = \langle \Sigma_1, Q_1, q_{1_0}, \delta_1, F_1 \rangle$ и $A_2 = \langle \Sigma_2, Q_2, q_{2_0}, \delta_2, F_2 \rangle$ — КА

Произведением автоматов назовем $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$, где

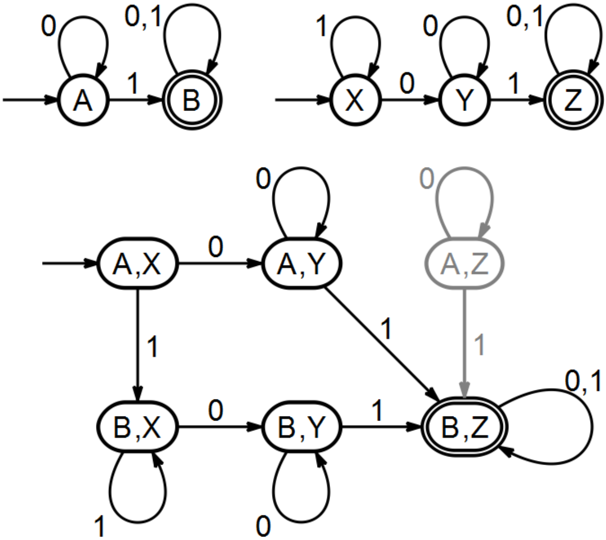
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = (q_{1_0}, q_{2_0})$
- $F \subseteq Q$
  - $F = F_1 \times F_2$ — распознает **произведение** языков
  - $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$ — распознает **объединение** языков
  - $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$ — распознает **разность** языков
- $\delta((q_1, q_2), c) = (\delta_1(q_1, c), \delta_2(q_2, c))$

Интуиция: ищем пути в двух автоматах одновременно

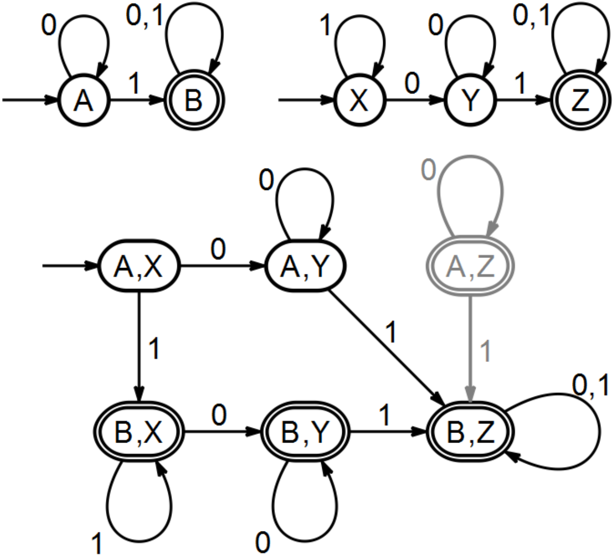
Произведение автоматов: пример



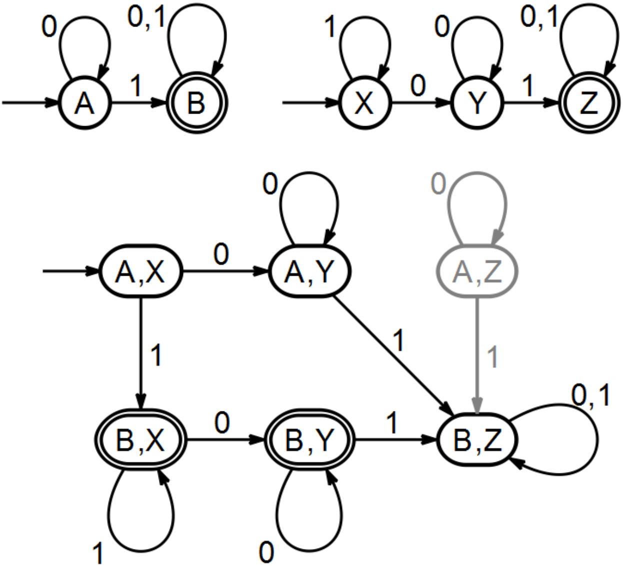
Пересечение языков



Объединение языков



Разность языков



Замкнутость автоматных языков относительно операций

Автоматные языки замкнуты относительно операций

- Объединения
- Пересечения
- Разности
- Дополнения

Регулярное множество (регулярный язык)

Регулярное множество в алфавите Σ определяется итеративно:

- $\varnothing$ — регулярное множество в алфавите Σ
- $\{a\}$ — регулярное множество в алфавите Σ для каждого $a \in \Sigma$
- $\{\varepsilon\}$ — регулярное множество в алфавите Σ
- Если P и Q — регулярные множества в алфавите Σ, то регулярны
  - $P \cup Q$ (объединение)
  - PQ (конкатенация, $\{pq | p \in P, q \in Q\}$)
  - P^* (итерация: $P^* = \{\varepsilon\} \cup P \cup PP \cup PPP \cup \dots$)
- Ничто другое не является регулярным множеством в алфавите Σ
- Множество всех регулярных языков обозначим $\mathbb{R}$

Примеры регулярных языков

- Все конечные языки
  - $\{-2147483648, -2147483647, \ldots, 2147483647\}$ — все 32-разрядные целые числа
- $L_a = \{a^k \mid k - odd\}$
- $L_b = \{b^l \mid l - even\}$
- $L_{ab} = \{a^k b^l \mid k - odd, l - even\} = L_a L_b$
- $L = \{a^*\} = L_a^*$

Регулярное выражение

Регулярное выражение — способ записи регулярного множества

- $\varnothing$ — обозначает $\varnothing$
- a — обозначает $\{a\}$
- ε — обозначает $\{\varepsilon\}$
- Если p и q обозначают P и Q, то:
  - $p|q$ обозначает $P \cup Q$
  - pq обозначает PQ
  - p^* обозначает P^*

Примеры регулярных выражений

- $-2147483648| - 2147483647| \dots |2147483647$ — все 32-разрядные целые числа
- $a(aa)^* : L_a = \{a^k \mid k - odd\}$
- $(bb)^* : L_b = \{b^l \mid l - even\}$
- $a(aa)^*(bb)^* : L_{ab} = \{a^k b^l \mid k - odd, l - even\} = L_a L_b$
- $a^* : L = \{a^*\} = L_a^*$

Замкнутость регулярных языков относительно операций

Регулярные языки замкнуты ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \Rightarrow A \diamond B \in \mathbb{R}$) относительно операций:

- Конкатенации ($L_1 L_2$), объединения ($L_1 \cup L_2$), итерации (L^*)
- Пересечения ($L_1 \cap L_2$), дополнения ($\neg L$), разности ($L_1 \setminus L_2$)
- Обращения ($L_{rev} = \{a_m, a_{m-1}, \ldots a_1 \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in L\}$)
- Гомоморфизма цепочек (операция сохраняющая ε и конкатенацию)
- Обратного гомоморфизма цепочек

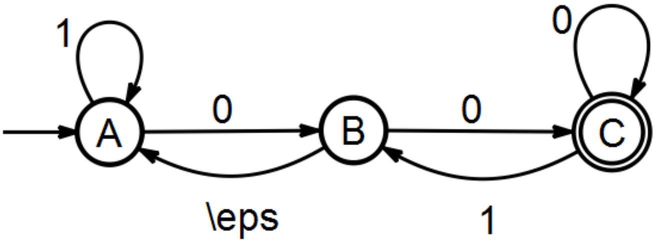
Теорема Клини

Теорема

Классы автоматных и регулярных языков эквивалентны

НКА с ε-переходами: почему бы и нет?

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \to 2^Q$

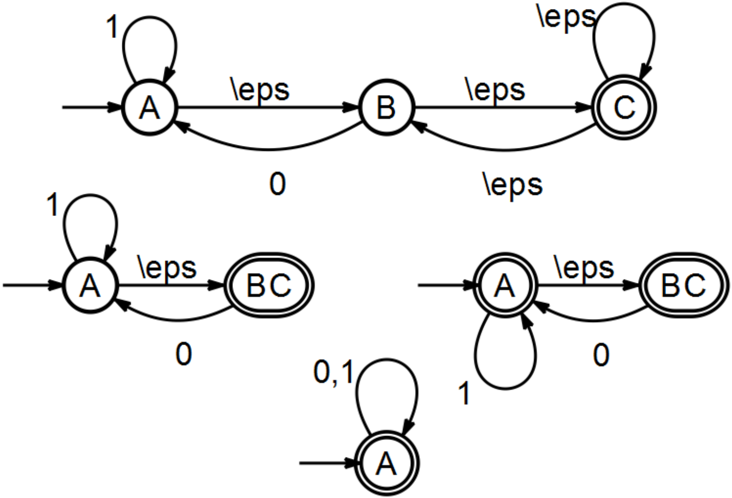


Ничего не поломалось?

Эквивалентность НКА с ε-переходами и НКА без ε-переходов

- НКА без ε-переходов — частный случай НКА с ε-переходами
- В обратную сторону — можно построить ε-замыкание
  - Транзитивное замыкание: для каждого подграфа, состоящего только из ε-переходов, делаем ε-замыкание
  - Добавление терминальных состояний: для ε-перехода из состояния u в v, где v — терминальное, добавляем u в терминальные
  - Добавление ребер: $\forall u, v, c, w. \delta(u, \varepsilon) = v, \delta(v, c) = w$, добавим переход $\delta(u, c) = w$
  - Устранение ε-переходов

ε-замыкание



Теорема Клини: доказательство $\Leftarrow$

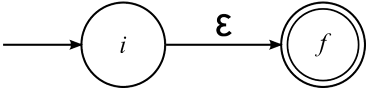
Теорема

Классы автоматных и регулярных языков эквивалентны

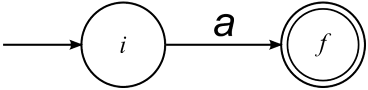
Доказательство.

$\Leftarrow$: Построим по регулярному выражению КА (НКА с ε-переходами) $\square$

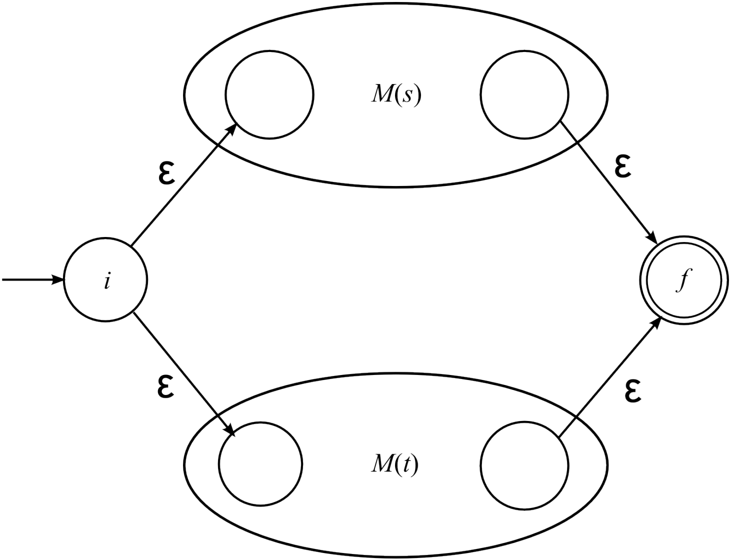
Построение КА по РВ: ε



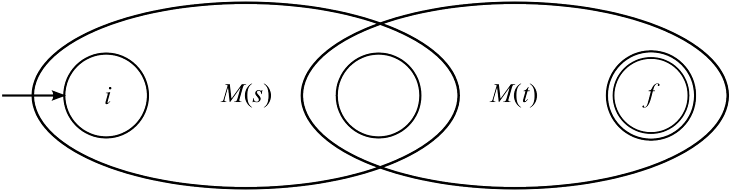
Построение КА по РВ: символ



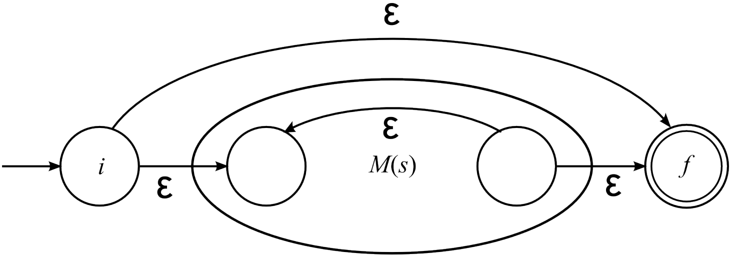
Построение КА по РВ: объединение $p|q$



Построение КА по РВ: конкатенация *pq*



Построение КА по РВ: итерация p^*



Теорема Клини: доказательство $\Rightarrow$

Теорема

Классы автоматных и регулярных языков эквивалентны

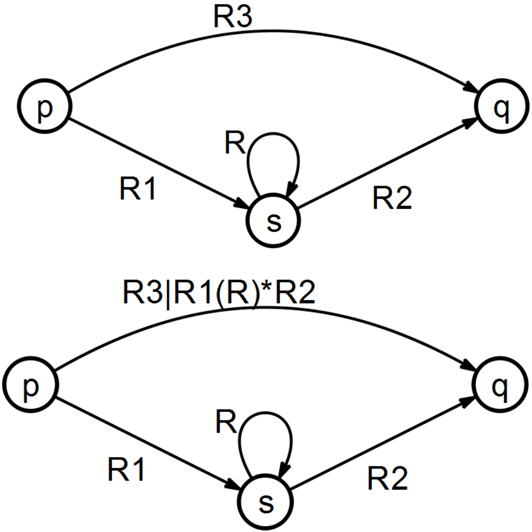
Доказательство.

$\Rightarrow$: Построим регулярное выражение по конечному автомату методом исключения состояний

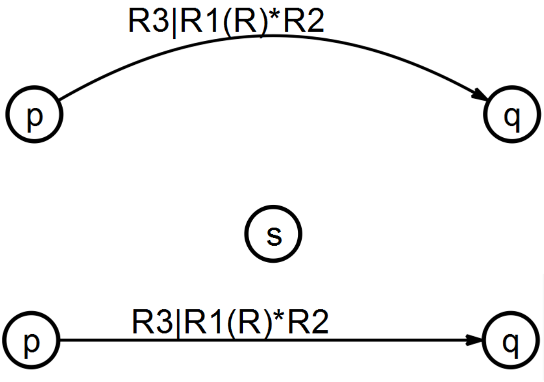
Идея: на ребрах пишем регулярные выражения, соответсвующие путям между вершинами, последовательно исключаем состояния

$\square$

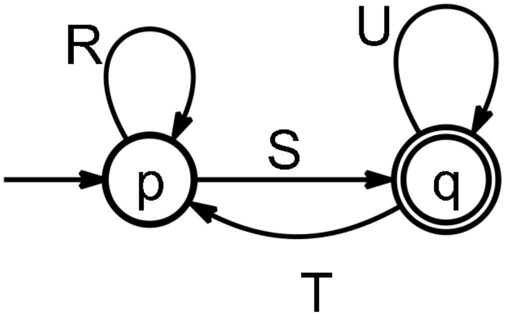
Исключение состояния s



Исключение состояния s: удаление ребер и вершины

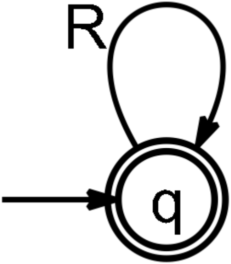


Исключение состояний: последний шаг



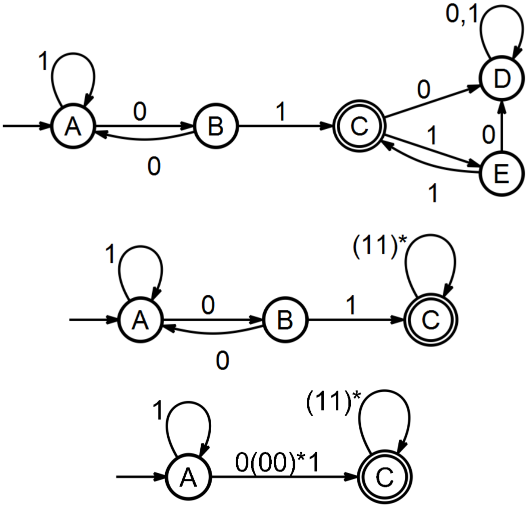
$(R^*|SU^*T)^*SU^*$

Исключение состояний: последний шаг



R^*

Исключение состояний: пример



$1^*0(00)^*1(11)^*$

Свойства регулярных выражений

- $a|a = a$
- $a|\varnothing = a$
- $a|b = b|a$
- $a|(b|c) = (a|b)|c$
- $a(bc) = (ab)c$
- $\{\varepsilon\}a = a\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
- $\varnothing a = a\varnothing = \varnothing$
- $a(b|c) = ab|ac$
- $(a|b)c = ac|bc$
- $\{\varepsilon\}|aa^* \subseteq a^*$
- $\{\varepsilon\}|a^*a \subseteq a^*$
- $ab \subseteq b \Rightarrow a^*b \subseteq b$
- $ab \subseteq a \Rightarrow ab^* \subseteq a$

Регулярная грамматика

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \rightarrow aB$ или $A \rightarrow a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \rightarrow Ba$ или $A \rightarrow a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to aB$ или $A \to a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to Ba$ или $A \to a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Теорема

Пусть L — формальный язык.
$\exists G_r$ — праволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_r) \Leftrightarrow \exists G_l$ — леволинейная грамматика, т.ч. $= L(G_l)$

Регулярная грамматика

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to aB$ или $A \to a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to Ba$ или $A \to a$, где $A, B \in V_N, a \in V_T$

Теорема

Пусть L — формальный язык.
$\exists G_r$ — праволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_r) \Leftrightarrow \exists G_l$ — леволинейная грамматика, т.ч. $= L(G_l)$

Регулярная грамматика — праволинейная или леволинейная грамматика

Резюме

- ДКА, НКА, НКА с ε-переходами, регулярные выражения — все эти формализмы задают один класс (регулярных) языков и эквивалентны друг другу
- Проверка принадлежности слова регулярному языку осуществляется за $O(n)$ и не требует дополнительной памяти
- Класс регулярных языков обладает хорошими свойствами, прост и нагляден