Построение представления группы по машине Тьюринга

Максим Шамрай

JetBrains Research, Programming Languages and Tools Lab
Санкт-Петербургский Государственный Университет

14.12.2019

Мотивация

$$R \subset CF \subset Conj \subseteq Bool$$

- Кроме всем известной иерархии Хомского, есть довольно много классов формальных языков
- И не все они имеют свою лемму о накачке
- В последнее время все чаще прибегают к смежным дисциплинам для исследования языков
- Мы предлагаем построить группу по языку, чтобы в дальнейшем можно было применять аппарат теории групп для исследований

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

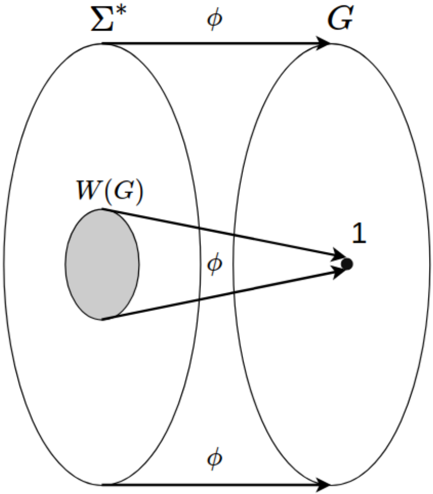
$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\epsilon, a, a^2, b, ab, a^2 b\} = S_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = C_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Проблема слов

$G = \langle A \mid R \rangle$, $\Sigma = A \cup A^{-1}$
$\phi : \Sigma^* \to G$
$W(G) = \phi^{-1}(1)$

- $W(G)$ – регулярна $\iff$ G – конечна (Anisimov)
- $W(G)$ – контекстно-свободна $\iff$ $\exists H < G$ – конечного идекса (Muller–Schupp)



Цель и задачи

Цель: Создать инструмент, с помощью которого можно будет смотреть на формальные языки как на группы

Задачи:

1. Реализовать алгоритм построения группы по машине Тьюринга
2. Доказать корректность алгоритма

Построение группы (0)

Mark V. Sapir, Jean-Camille Birget and Eliyahu Rips "Isoperimetric and Isodiametric Functions of Groups" (2002)

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M, тогда существует конечно представленная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \to (A \cup A^{-1})^+$ такое что: $u \in L \iff K(u) = 1_G$

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M', удовлетворяющей теореме 2, существует S-машина, которая симулирует M'

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

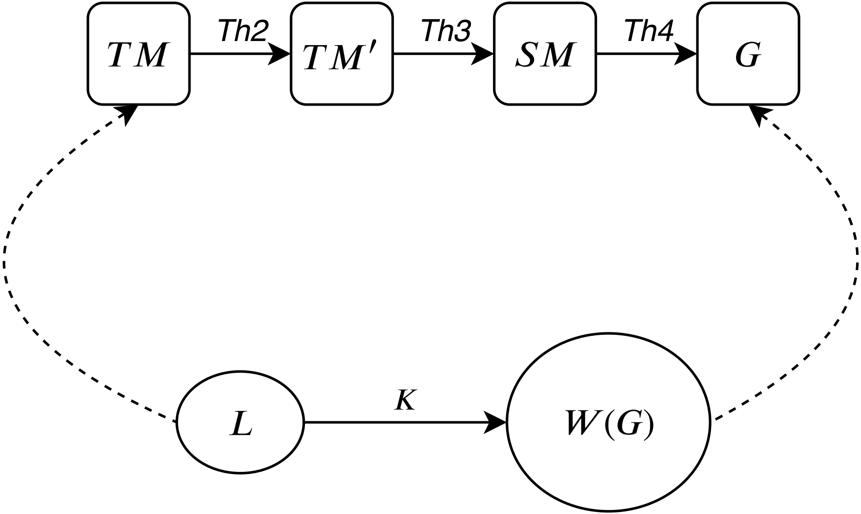
Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M', удовлетворяющей теореме 2, существует S-машина, которая симулирует M'

Теорема 4

Для любой S-машины, удовлетворяющей теореме 3, существует соответствующая конечно представленная группа

Построение группы (2)



- Реализован алгоритм
- Проведен ряд экспериментов
- Найдена более свежая статья
- Рассматривается возможность формальной верификации алгоритма