

Разбиение графов

Чернов Андрей, 371 группа

Бисекция (bisection)

Разбиение графа на два подграфа с выполнением следующих условий:

- 1) Число вершин в подграфах равны* – для графов без весов вершин; сумма весов вершин подграфов равна* – для графов с весами
- 2) Сумма весов удаленных ребер минимальна

* При невозможности равенства, наиболее близкое к нему положение.

Задачи

- На языке C++ реализовать последовательный и параллельный алгоритм Кернигана-Лина
- На языке C++ реализовать алгоритм Фидуччи-Маттейсеса
- Сравнить эффективности алгоритмов при работе на произвольных графов с различными числами вершин

Алгоритм Кернигана-Лина

В простейшем виде алгоритм предназначен для бисекции графа с $2n$ вершинами.

Сложность $O(n^2 * \log(n))$ или $O(n^3)$ (в зависимости от модификации)

Алгоритм Кернигана-Лина

- 1) Выполнить произвольное разбиение графа на 2 равных подграфа.
- 2) Посчитать $D(v)$ для вершин. $D(v) = \sum e_i - \sum e_n$, где e_i – веса убранных инцидентных вершине ребер, e_n – веса не убранных инцидентных вершине ребер.
- 3) Посчитать $g(v_1, v_2)$, где v_1 и v_2 принадлежат разным подграфам. $g(v_1, v_2) = D(v_1) + D(v_2) - 2 * e(v_1, v_2)$, где $e(v_1, v_2)$ – вес ребра между вершинами v_1 и v_2 .
- 4) Выбрать v_1 и v_2 из разных подграфов с максимальной g .

Алгоритм Кернигана-Лина

- 5) Поменять выбранные вершины местами и зафиксировать их.
- 6) Менять и фиксировать вершины, пока не зафиксированных не останется.
- 7) Посчитать G для всех образовывавшихся разбиений. $G_k = g_1 + g_2 + \dots + g_k$
- 8) Найти максимальное G .
- 9) Если G больше 0, взять разбиение на котором оно образовалось, расфиксировать вершины и повторить.

Параллельный алгоритм Кернигана-Лина

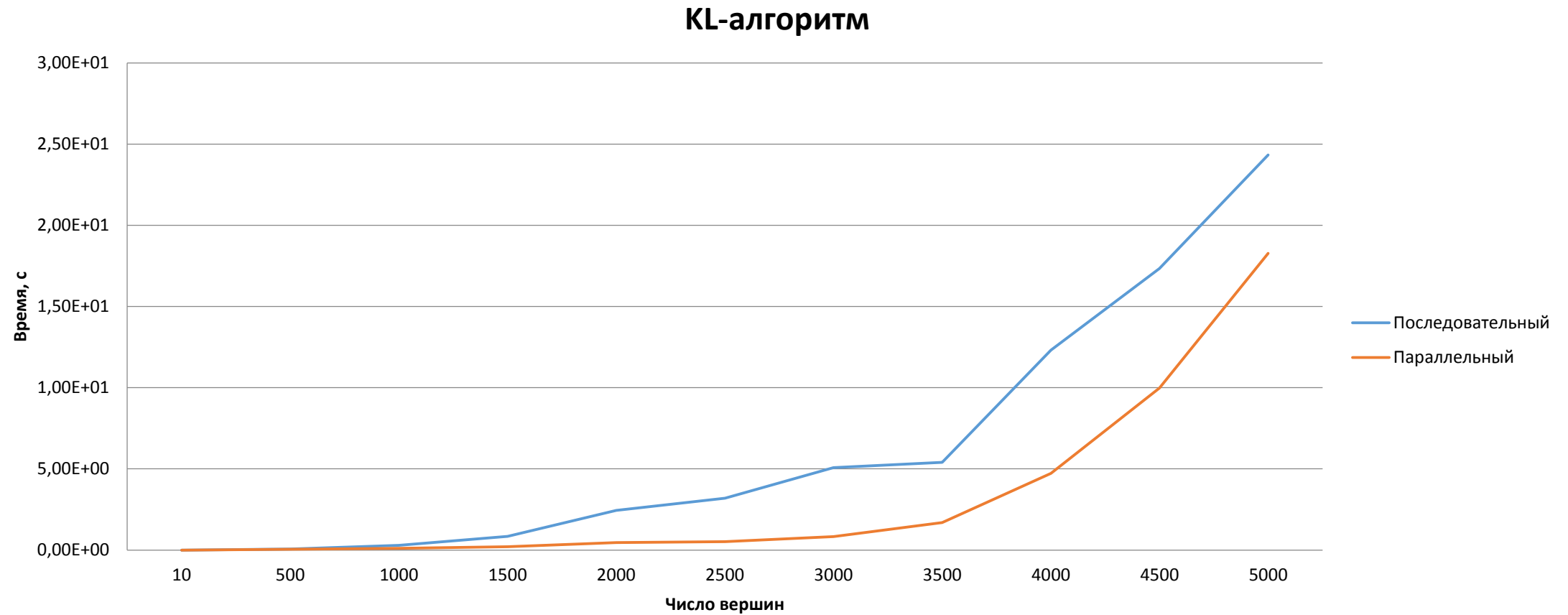
Шаги, выполняемые в параллели:

- Просчет V для незафиксированных вершин
- Просчет g для всех незафиксированных вершин из разных подграфов

Шаги, выполняемые последовательно:

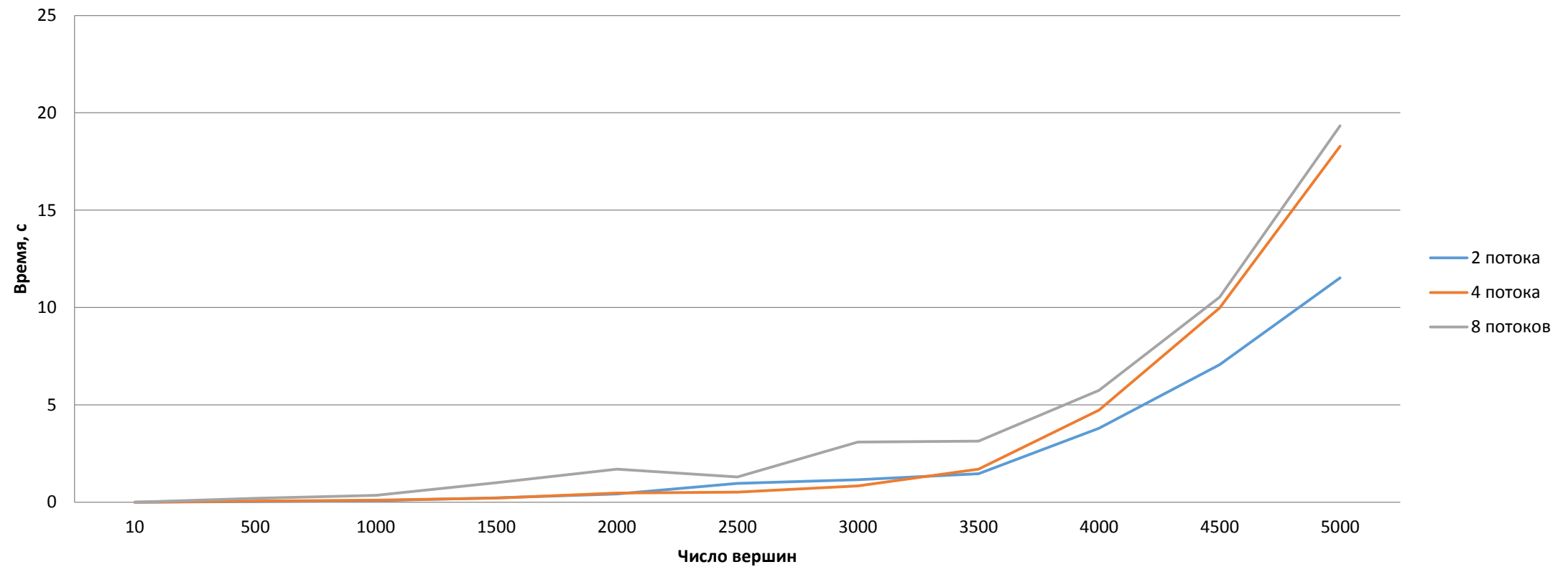
- Начальное разбиение
- Выбор максимального G и переход на следующий шаг

Результаты



Результаты

Параллельный KL-алгоритм



Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса

В простейшем виде алгоритм предназначен для разбиения графа на 2 примерно равных части.

Равенство частей определяется введенным критерием баланса.

Сложность $O(n)$

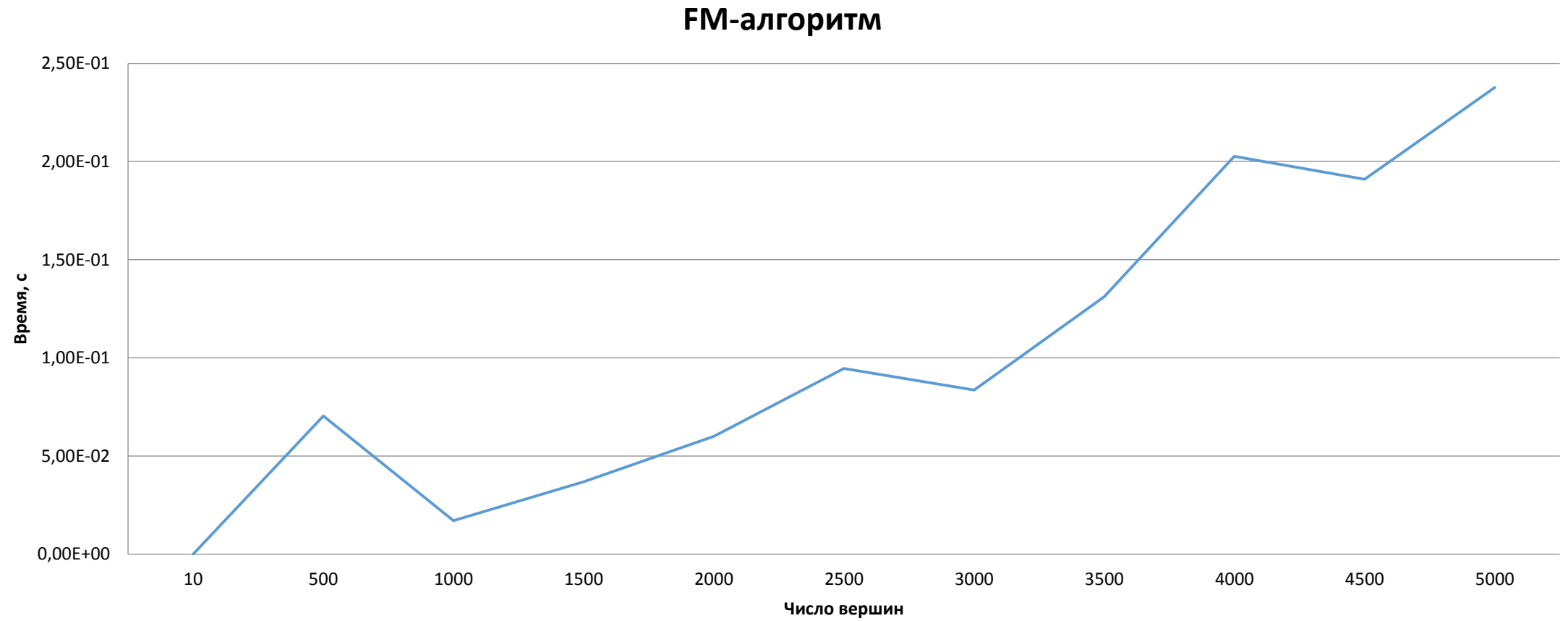
Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса

- 1) Выполнить произвольное разбиение графа на 2 равных подграфа.
- 2) Посчитать $D(v)$ для вершин. $D(v) = \sum e_i - \sum e_n$, где e_i – веса убранных инцидентных вершине ребер, e_n – веса не убранных инцидентных вершине ребер.
- 3) Найти вершину с максимальным D , такую, чтобы ее перемещение в другой подграф не нарушало критерий баланса.
- 4) Переместить и зафиксировать выбранную вершину.

Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса

- 5) Выбирать и перемещать вершины, пока все не будут зафиксированы.
- 6) Посчитать G для всех образовавшихся разбиений. $G_k = g_1 + g_2 + \dots + g_k$
- 7) Найти максимальное G .
- 8) Если G больше 0, взять разбиение на котором оно образовалось, расфиксировать вершины и повторить.

Результаты



Список литературы

- B. W. Kernighan, S. Lin, An efficient heuristic procedure for partitioning graphs
- C. M. Fiduccia, R. M. Mattheyses, A Linear-Time Heuristic for Improving Network Partitions
- A. K. Rajan, D. Bhaiya, VLSI Partitioning using Parallel Kernighan-Lin Algorithm
- Y. Wang, J. Owens, Large-Scale Graph Processing Algorithms on the GPU