Теория графов. Лекции. Заметки.

Семён Григорьев

22 марта 2020 г.

Содержание

1 Лекция 1: Разреженные матрицы

1.1 Форматы разреженных матриц

Важно то, что их дофига. И разные хороши для разных задач.

Рассмотрм матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В ней всего 15 ненулевыз элементов (NNZ(M) = 15). Попробуем представить её в разных форматах.

Покоординатный (COO). Часто он же *triple store*. Просто коллекция троек вида (строка, столбец, значение) только для ненулевых элементов.

$$M_{COO} = [(0,0,1);(0,4,3);(0,6,9);(1,2,2);(1,5,-1);(2,3,7);(3,1,6);(3,7,5);(4,1,3);\\ (4,2,4);(5,4,2);(5,6,8);(6,2,-3);(2,7,-7);(7,4,-4)]$$

Потратили $3 * NNZ(M)$ памяти.

Формат простой. Можно предварительно сортировать по столбцам или строкам. Достаточно просто удалять и добавлять элементы. Не самый оптимальный по доступу и по дополнительной памяти.

Compressed row storage (CRS). Заведём 3 массива: *val* для хранения значений, *col_id* для хранения номера столбца, *row_ptr* для указателя на начало строки в *col_id*.

$$M_{CRS} = (val, col\_id, row\_ptr)$$

val	1	3	9	2	-1	7	6	5	3	4	2	8	-3	-7	-4
col_id	0	4	6	2	5	3	1	7	1	2	4	6	2	7	4

row_ptr	0	3	5	6	8	10	12	14

Потратили $2*NNZ(M)+n$ памяти. Сложнее построить, сложно удалять и добавлять. Достаточно просто последовательно обходить, лучше по памяти и по обращению к элементу. Наиболее часто встречается в современных библиотеках.

Compressed column storage (CCS) и **compressed dioganal storage (CDS).** Вариации на тему CRS. Второй — для диоганальных матриц.

Блочный CRS (CCS, CDS). Когда мы знаем, что матрица имеет блочную структуру, а каждый блок — разреженная матрица. Пример — результат тензорного произведения.

Quad-tree.

Предположим, что $n = 2^k$. Если это не так, то выравниваем нулями. После этого строим рекурсивно дерево: дели матрицу на 4 блока, корень — это текущая матрица, листья — 4 полученных блока.

Если в блоке все элементы нули, то сразу рисуем лист типа *(этот блок — ноль)*, иначе продолжаем разбиение. И так до тех пор пока не получатся блоки из одного элемента.

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right], M_{(0,1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

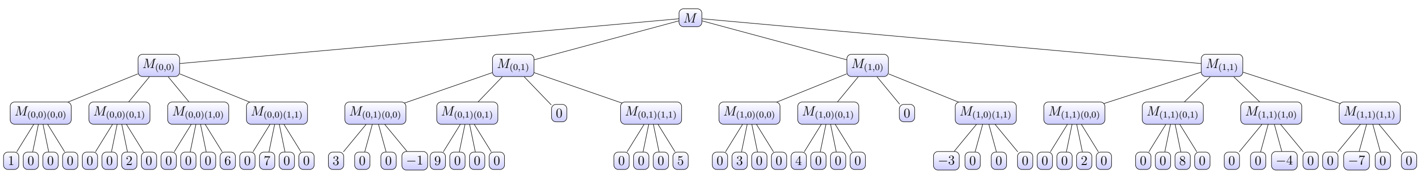
$$M_{(1,0)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{(0,0)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(0,0)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right], M_{(0,0)(1,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 6 \end{array}\right], M_{(0,0)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{(0,1)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right], M_{(0,1)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(0,1)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$M_{(1,0)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(1,0)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(1,0)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{(1,1)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 8 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(1,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$



Относительно сложно построить, легко разделить на части (хорошо для распределённых вычислений), достаточно быстрый доступ к элементу, простой рекурсивный алгоритм перемножения.

Часто используется в композиции с CRS или другими форматами: до какого-то момента строим дередо, а потом в листьях храним сравнительно большие подматрицы в CRS.

1.2 Умножение разреженных матриц

Временная сложность оценивается относительно количества ненулевых элементов (NNZ) либо во входных матрицах, либо в выходной матрице, либо и там и там.