

Теория автоматов и формальных языков

Контекстно-свободные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

23 октября 2019

В предыдущей серии

- Регулярные выражения, регулярные грамматики и конечные автоматы задают класс регулярных языков
- Класс регулярных языков замкнут относительно теоретико-множественных операций, конкатенации, итерации, гомоморфизма цепочек
- Определение принадлежности слова языку осуществляется за $O(n)$ операций
- Однако класс регулярных языков достаточно узок, ни один используемый в промышленности язык программирования не является регулярным
 - ▶ Лемма о накачке для доказательства нерегулярности языка
 - ▶ Язык правильных скобочных последовательностей, язык палиндромов не являются регулярными

Контекстно-свободная грамматика

Четверка $\langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- V_T — алфавит терминальных символов (терминалов)
- V_N — алфавит нетерминальных символов (нетерминалов)
 - ▶ $V_T \cap V_N = \emptyset$
 - ▶ $V ::= V_T \cup V_N$
- P — конечное множество правил вида $A \rightarrow \alpha$
 - ▶ $A \in V_N$
 - ▶ $\alpha \in V^*$
- S — начальный нетерминал грамматики, $S \in V_N$

Пример: арифметические выражения

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid N$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

Вывод в грамматике

- **Отношение выводимости:**

$$\forall \alpha, \gamma, \delta \in V^*, A \in V_N : A \rightarrow \alpha \in P : \gamma A \delta \Rightarrow \gamma \alpha \delta$$

- **Вывод** — транзитивное, рефлексивное замыкание отношения выводимости ($\xRightarrow{*}, \xRightarrow{+}, \xRightarrow{k}$)
- **Левосторонний (правосторонний) вывод** — на каждом шаге заменяем самый левый (правый) нетерминал
 - ▶ Если не специфицируется, подразумевается левосторонний вывод
- По сути, правила грамматики рассматриваются как правила переписывания

Пример вывода

Построим левосторонний вывод цепочки $2 + 3 * 4$ в грамматике

$$\langle \{0, 1, \dots, 9, +, *\}, \{E, N\}, P, E \rangle$$

$$E \rightarrow E + N \mid E * N \mid N$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} * N \Rightarrow \underline{E} + N * N \Rightarrow \underline{N} + N * N \Rightarrow 2 + N * N \stackrel{2}{\Rightarrow} 2 + 3 * 4$$

Существование левостороннего вывода

Теорема

Если для цепочки ω существует некоторый вывод $S \xRightarrow{*} \omega$,
то существует и левосторонний вывод для этой цепочки $S \xRightarrow{*}_l \omega$

Доказательство.

Докажем более общее утверждение:

если существует $A \xRightarrow{*} \omega$, то существует $A \xRightarrow{*}_l \omega$, где $A \in V_N$.

Доказываем по индукции по длине вывода k

$k = 1$: $A \Rightarrow \omega$ — тривиально.

$k \mapsto k + 1$: $\triangleleft A \Rightarrow \alpha \xRightarrow{*} \omega$.

Обозначим $\alpha = B_1 B_2 \dots B_m \xRightarrow{*} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m = \omega$; $\forall i : B_i \xRightarrow{l_i} \omega_i, l_i \leq n$

По индукционному предположению $\forall i : B_i \xRightarrow{*}_l \omega_i$

\Rightarrow : $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_m \xRightarrow{*}_l \omega_1 B_2 \dots B_m \xRightarrow{*}_l \omega$ — левосторонний вывод

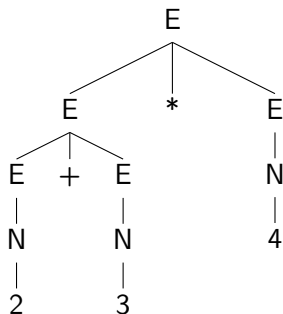
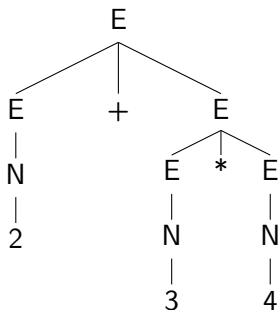


Единственность вывода

Не всегда (левосторонний) вывод единственен:
2 вывода строки $2 + 3 * 4$

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid N$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$



Однозначность грамматики

- Грамматика называется **однозначной**, если для *любого* слова языка существует *единственный* (левосторонний) вывод
- Грамматика называется **неоднозначной**, если *существует* слово языка, такое что для него *существует несколько* (левосторонних) выводов

Однозначность грамматики

- Грамматика называется **однозначной**, если для *любого* слова языка существует *единственный* (левосторонний) вывод
- Грамматика называется **неоднозначной**, если *существует* слово языка, такое что для него *существует несколько* (левосторонних) выводов
- По однозначной грамматике можно тривиальным образом построить неоднозначную: продублировать правило

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow a$$

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow a$$

- Не существует общего алгоритма преобразования неоднозначной грамматики в однозначную

Примеры однозначной и неоднозначной грамматики

Неоднозначная грамматика

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid N$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

Однозначная грамматика

$$E \rightarrow E + N \mid E * N \mid N$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

Проверка однозначности грамматики неразрешима

Теорема

Не существует алгоритма, определяющего по произвольной грамматике, что она является неоднозначной

Доказательство.

Сведение решения проблемы соответствий Поста к нашей задаче □

Проблема соответствий Поста

Даны списки $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$, где $\forall i : a_i, b_i \in \Sigma^*$.
Существует ли непустая последовательность (i_1, \dots, i_k) ,
удовлетворяющая условию $a_{i_1} \dots a_{i_k} = b_{i_1} \dots b_{i_k}$, где $\forall j : 1 \leq i_j \leq n$?

Проверка однозначности грамматики неразрешима

Теорема

Не существует алгоритма, определяющего по произвольной грамматике, что она является неоднозначной

Доказательство.

◁ алфавит $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\} \sqcup \{z_1, \dots, z_n\}$, где a_i, b_i из ПСП

◁ грамматику:

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow a_i A z_i \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b_i B z_i \mid \varepsilon$$

Если грамматика неоднозначна, то существует выводимое слово вида:

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} z_{i_k} z_{i_{k-1}} \dots z_{i_1} = \omega = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k} z_{i_k} z_{i_{k-1}} \dots z_{i_1}$$

Если бы умели решать ПСП, то мы могли бы проверить грамматику на однозначность, но ПСП неразрешима, а значит и проверка на однозначность неразрешима



- Язык называется **контекстно-свободным**, если для него *существует* контекстно-свободная грамматика
- Язык, задаваемый КС грамматикой $\langle V_T, V_N, P, S \rangle$:
 $\{\omega \in V_T^* \mid S \xRightarrow{*} \omega\}$
- КС язык называется **существенно неоднозначным**, если для него не существует однозначной грамматики
 - ▶ $\{0^a 1^b 2^c \mid a = b \text{ либо } b = c\}$ доказательство в книге Ахо Ульмана

Теорема

Существует алгоритм, определяющий, является ли язык, порождаемый КС грамматикой, пустым

Доказательство.

Для доказательства потребуется следующая лемма



Лемма

Теорема

Если в данной грамматике выводится некоторая цепочка, то существует цепочка, дерево вывода которой не содержит ветвей длиннее m , где m — количество нетерминалов грамматики

Доказательство.

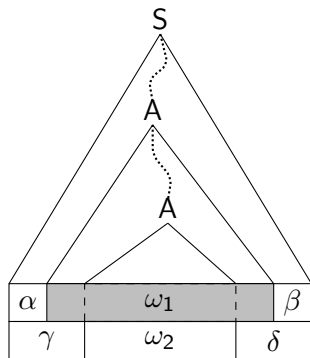
Рассмотрим дерево вывода цепочки ω . Если в нем есть 2 узла, соответствующих одному нетерминалу A , обозначим их n_1 и n_2 . Предположим, n_1 расположен ближе к корню дерева, чем n_2 ; $A_{n_1} \xrightarrow{*} \alpha\omega_1\beta$; $A_{n_2} \xrightarrow{*} \gamma\omega_2\delta$. При этом ω_2 является подцепочкой ω_1 . Заменим в изначальном дереве узел n_1 на n_2 . Полученное дерево является деревом вывода $\alpha\omega_2\delta$. Повторяем процесс замены одинаковых нетерминалов до тех пор, пока в дереве не останутся только уникальные нетерминалы.

В полученном дереве не может быть ветвей длины большей, чем m . По построению оно является деревом вывода. □

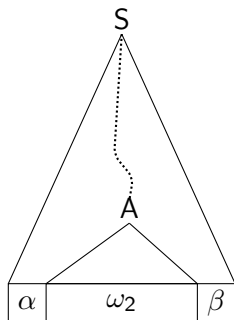
Лемма

Теорема

Если в данной грамматике выводится некоторая цепочка, то существует цепочка, дерево вывода которой не содержит ветвей длиннее m , где m — количество нетерминалов грамматики



\Rightarrow



Алгоритм проверки пустоты КС языка

Доказательство.

Строим коллекцию деревьев, представляющих вывод в грамматике.

- 1 Инициализируем коллекцию деревом из одного узла S
- 2 Добавляем в коллекцию дерево, полученное применением единственного правила грамматики из какого-нибудь дерева из коллекции, если его в нем еще нет, и самая длинная ветвь не длиннее m
- 3 Если после окончания построения коллекции в ней существует дерево, являющееся деревом вывода некоторой цепочки терминалов, значит, язык не пуст



Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Продуктивный нетерминал: нетерминал, для которого существует цепочка терминалов, выводимая из него ($\exists \omega \in V_T^* : A \xRightarrow{*} \omega$)

Непродуктивный нетерминал: нетерминал, не являющийся продуктивным

Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle : L(G) \neq \emptyset$ можно построить эквивалентную грамматику, каждый нетерминал которой продуктивен

Доказательство.

Удаляем из грамматики все нетерминалы $A : L(A) = \emptyset$, а также правила, использующие их.

Полученную грамматику обозначаем G_1 .

Докажем, что $L(G) = L(G_1)$.

Очевидно, $L(G_1) \subseteq L(G)$.

Докажем от противного, что $L(G) \subseteq L(G_1)$.

Предположим, что $\exists \omega \in L(G)$, но $\omega \notin L(G_1)$. Тогда $S \xRightarrow{*} \alpha_1 A \alpha_2 \xRightarrow{*} \omega$, где $A \in V_N \setminus V_{N_1}$, но тогда $\exists \gamma \in V_T^* : A \xRightarrow{*} \gamma$. Противоречие □

Упрощение КС грамматики: приведение

Теорема

Для любой КС грамматики, порождающей непустой язык, можно построить эквивалентную, для каждого нетерминала A которой существует вывод вида $S \xRightarrow{*} \omega_1 A \omega_3 \xRightarrow{*} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Доказательство.

Будем рассматривать грамматику без непродуктивных нетерминалов $G_1 = \langle V_{N_1}, V_T, P_1, S \rangle$.

Верно: если существует $S \xRightarrow{*} \alpha_1 A \alpha_3, \alpha_i \in V^*$, то $S \xRightarrow{*} \alpha_1 A \alpha_3 \xRightarrow{*} \omega_1 A \omega_3 \xRightarrow{*} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Строим множество нетерминалов, встречающихся в выводах: добавляем сначала S , потом добавляем нетерминалы, встречающиеся в правой части правил для нетерминалов из множества. Завершаем процесс, когда больше ничего не добавить. Обозначаем полученное множество V_{N_2} , удаляем все правила грамматики, содержащие нетерминалы из $V_{N_1} \setminus V_{N_2}$

Упрощение КС грамматики: приведение

Доказательство.

Получили грамматику $G_2 = \langle V_{N_2}, V_T, P_2, S \rangle$.

Докажем: $L(G_2) = L(G_1)$

$L(G_2) \subseteq L(G_1)$, так как $P_2 \subseteq P_1$

Докажем: $L(G_1) \subseteq L(G_2)$. Пусть $S \xRightarrow[G_1]{*} \omega$. Все нетерминалы, встречающиеся в этом выводе содержатся в V_{N_2} , соответственно используются только правила из $P_2 \Rightarrow S \xRightarrow[G_2]{*} \omega$

Так как все нетерминалы V_{N_2} продуктивны, то $S \xRightarrow{*} \omega_1 A \omega_3 \xRightarrow{*} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$



Грамматика G_2 называется **приведенной**, ее нетерминалы — **достижимыми**

Недостижимые и непродуктивные нетерминалы называются **бесполезными**

Упрощение КС грамматики: удаление цепных правил

Правило называется **цепным**, если оно имеет вид $A \rightarrow B$; $A, B \in V_N$.

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ можно построить эквивалентную, не содержащую цепных правил

Доказательство.

Строим новое множество правил P_1 .

Включаем в него все нецепные правила P .

Затем добавляем в P_1 правила вида $A \xRightarrow{*} \alpha$, если $A \xRightarrow{*} B$, где $A, B \in V_N$ и $B \rightarrow \alpha$ — нецепное правило из P .

Замечание: достаточно проверять только цепные выводы длины меньшей, чем V_N

Обозначим полученную грамматику за $G_1 = \langle V_N, V_T, P_1, S \rangle$, докажем $L(G_1) = L(G)$ □

Упрощение КС грамматики: удаление цепных правил

Доказательство.

Очевидно $L(G_1) \subseteq L(G)$

Покажем $L(G) \subseteq L(G_1)$. Пусть $\omega \in L(G)$. Рассмотрим левосторонний вывод $S \xRightarrow{G} \alpha_0 \xRightarrow{G} \alpha_1 \xRightarrow{G} \dots \xRightarrow{G} \alpha_n = \omega$.

Предположим $\alpha_i \xRightarrow{G} \alpha_{i+1}$ — первый шаг, выполняемый посредством цепного правила в выводе; $\forall k \in [i..j] : \alpha_k \xRightarrow{G} \alpha_{k+1}$ — посредством цепного правила; $\alpha_j \xRightarrow{G} \alpha_{j+1}$ — посредством нецепного правила

Тогда $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = \dots = |\alpha_j|$, и на каждом шаге заменяется один и тот же нетерминал. Тогда $\alpha_i \xRightarrow{G_1} \alpha_{j+1}$ посредством правила из

$P_1 \setminus P \rightarrow \omega \in L(G_1)$



Нормальная форма Хомского

КС грамматика находится в **нормальной форме Хомского**, если все ее правила имеют вид:

$$A \rightarrow BC$$

$$A, B, C \in V_N$$

$$A \rightarrow a$$

$$A \in V_N, a \in V_T$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

S — стартовый нетерминал

Нормальная форма Хомского

Теорема

Для любой КС грамматики можно построить эквивалентную в нормальной форме Хомского

- ① Удаляем непродуктивные нетерминалы
- ① Удаляем цепные правила. Теперь $\forall A \rightarrow B : B \in V_T$
- ② Заменяем каждое правило $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n$ на $A \rightarrow C_1 C_2 \dots C_n$
 - ▶ Если $B_i \in V_N$, $C_i = B_i$,
 - ▶ Если $B_i \in V_T$, добавляем также правило $C_i \rightarrow B_i$,
- ③ Заменяем правило $A \rightarrow C_1 C_2 \dots C_n$ на множество правил:

$$A \rightarrow C_1 D_1$$

$$D_1 \rightarrow C_2 D_2$$

...

$$D_{n-3} \rightarrow C_{n-2} D_{n-2}$$

$$D_{n-2} \rightarrow C_{n-1} C_n$$

Полученная грамматика находится в НФХ и эквивалентна данной

Пример приведения в НФХ

$$G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S \rangle, \text{ где } P :$$

$$S \rightarrow bA \mid aB$$

$$A \rightarrow a \mid aS \mid bAA$$

$$B \rightarrow b \mid bS \mid aBB$$

- $S \rightarrow bA \Rightarrow S \rightarrow C_1A; C_1 \rightarrow b$
- $S \rightarrow aB \Rightarrow S \rightarrow C_2B; C_2 \rightarrow a$
- $A \rightarrow aS \Rightarrow A \rightarrow C_3S; C_3 \rightarrow a$
- $A \rightarrow bAA \Rightarrow A \rightarrow C_4D_1; C_4 \rightarrow b; D_1 \rightarrow AA$
- $B \rightarrow bS \Rightarrow B \rightarrow C_5S; C_5 \rightarrow b$
- $B \rightarrow aBB \Rightarrow B \rightarrow C_6D_2; C_6 \rightarrow a; D_2 \rightarrow BB$

Еще немного упростим

$$S \rightarrow bA \mid aB$$

$$A \rightarrow a \mid aS \mid bAA$$

$$B \rightarrow b \mid bS \mid aBB$$

$$S \rightarrow C_bA \mid C_aB$$

$$A \rightarrow a \mid C_aS \mid C_bD_1$$

$$B \rightarrow b \mid C_bS \mid C_aD_2$$

$$D_1 \rightarrow AA$$

$$D_2 \rightarrow BB$$

$$C_a \rightarrow a$$

$$C_b \rightarrow b$$

Алгоритм приведения в НФХ

- ❶ Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
 - ▶ добавляется новое правило $S_0 \rightarrow S$, $S_0 \notin V_N$, S_0 делается новым стартовым
- ❷ Избавиться от неодиначных терминалов в правых частях
 - ▶ новое правило $C_c \rightarrow c$
- ❸ Удалить длинные правила (длины больше 2)
- ❹ Удалить непродуктивные правила (ε -правила)
 - ▶ Если $A \rightarrow \varepsilon$, то A — ε -правило
 - ▶ Если $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$, $\forall i : X_i$ — ε -правило, то A — ε -правило
 - ▶ Заменяем $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ на множество правил, где каждое из ε -правил опущено во всех возможных комбинациях, удаляем те, которые выводят ε
- ❺ Удалить цепные правила
 - ▶ Для каждой пары правил $A \rightarrow B$; $B \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ добавить правило $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$, цепное правило удалить

Порядок действий при приведении в НФХ

Порядок **важен!**

- ❶ Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
 - ❷ Избавиться от неодинокных терминалов в правых частях
 - ❸ Удалить длинные правила (длины больше 2)
 - ❹ Удалить непродуктивные правила (ϵ -правила)
 - ❺ Удалить цепные правила
- 1 шаг порождает новые цепные правила, поэтому его нельзя выполнять после 5 шага
 - Если выполнить 4 шаг перед 3 шагом, то произойдет экспоненциальный взрыв грамматики
 - 5 шаг приводит к квадратичному возрастанию размера грамматики
 - Наиболее эффективны порядки 1, 2, 3, 4, 5 и 1, 3, 4, 5, 2

Увеличение размера грамматики при нормализации

Порядок **важен!**

- ❶ Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
 - ▶ Увеличение на 1
- ❷ Избавиться от неодинокных терминалов в правых частях
 - ▶ Увеличение на $|V_T|$ правил
- ❸ Удалить длинные правила (длины больше 2)
 - ▶ Увеличение не более, чем в 2 раза (для правил длины $k \geq 3$ порождается $k - 1$ новых правил)
- ❹ Удалить непродуктивные правила (ϵ -правила)
 - ▶ Увеличение не более, чем в 3 раза
- ❺ Удалить цепные правила
 - ▶ Увеличение не более, чем в $O(n^2)$ (цепных правил не больше n^2 , где n — число нетерминалов)

Итого: **полиномиальное** увеличение размеров грамматики при правильном порядке действий

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \rightarrow a$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \rightarrow a$?

$$A \rightarrow a \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \omega = a$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \rightarrow BC$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \rightarrow BC$?

$$A \rightarrow BC \xRightarrow{*} \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \omega_1, \omega_2 : \omega = \omega_1 \omega_2 \\ B \xRightarrow{*} \omega_1 \\ C \xRightarrow{*} \omega_2 \end{cases}$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \rightarrow BC$?

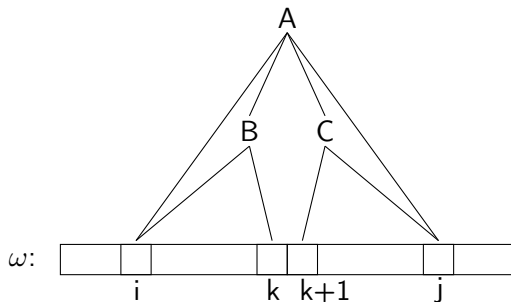
$$A \rightarrow BC \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \omega_1, \omega_2 : \omega = \omega_1 \omega_2 \\ B \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega_1 \\ C \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega_2 \end{cases}$$

Или:

$$A \rightarrow BC \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \exists k \in [0 \dots |\omega|] : \begin{cases} B \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega[0 \dots k] \\ C \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega[k+1 \dots |\omega|] \end{cases}$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

- Алгоритм синтаксического анализа, работающий с грамматиками в НФХ
- Динамическое программирование



- Дано: строка ω длины n , грамматика $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ в НФХ
- Используем трехмерный массив d булевых значений размером $|V_N| \times n \times n$, $d[A][i][j] = \text{true} \Leftrightarrow A \xRightarrow{*} \omega[i \dots j]$
- Инициализация: $i = j$
 - ▶ $d[A][i][i] = \text{true}$, если в грамматике есть правило $A \rightarrow \omega[i]$
 - ▶ $d[A][i][i] = \text{false}$, иначе
- Динамика. Предполагаем, d построен для всех нетерминалов и пар $\{(i', j') \mid j' - i' < m\}$
 - ▶ $d[A][i][j] = \bigvee_{A \rightarrow BC} \bigvee_{k=i}^{j-1} d[B][i][k] \wedge d[C][k][j]$
- В конце работы алгоритма в $d[S][0][n]$ записан ответ, выводится ли ω в данной грамматике