

Теория автоматов и формальных языков

Parsing expression grammar

Автор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

1 ноября 2016г.

- Нисходящий анализ
- Множество *FIRST*
- Множество *FOLLOW*
- Удаление левой рекурсии
- Факторизация грамматики
- *LL(1)*-таблица
- *LL(1)* синтаксический анализ

- Преимущества $LL(1)$ синтаксического анализа
 - ▶ Прост и понятен
 - ▶ Разбор за $O(n)$, где n — длина входной строки
 - ▶ Применим для многих практически полезных задач (с оговорками)
- Недостатки $LL(1)$ синтаксического анализа
 - ▶ Необходимость преобразовывать грамматику
 - ▶ Достаточно небольшой класс языков, которые действительно можно разобрать синтаксическим анализатором

Dangling else problem

- Грамматика для условного оператора *if*
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \mid \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \mid a$
- $\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a$

Dangling else problem

- Грамматика для условного оператора *if*
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \mid \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \mid a$
- $\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a$
 - ▶ $\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ (\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a)$
 - ▶ $\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ (\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a) \ \underline{\text{else}} \ a$

Dangling else problem

- Грамматика для условного оператора *if*
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ \underline{\text{else}}\ S \mid \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S \mid a$
- Факторизуем
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ S' \mid a$
 - ▶ $S' \rightarrow \underline{\text{else}}\ S \mid \varepsilon$
- Строим $LL(1)$ -таблицу

N	FIRST	FOLLOW	a	b	if	then	else	\$
E	{ b }	{ $\underline{\text{then}}$ }		b				

Dangling else problem

- Грамматика для условного оператора *if*
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ \underline{\text{else}}\ S \mid \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S \mid a$
- Факторизуем
 - ▶ $E \rightarrow b$
 - ▶ $S \rightarrow \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ S' \mid a$
 - ▶ $S' \rightarrow \underline{\text{else}}\ S \mid \varepsilon$
- Строим $LL(1)$ -таблицу

N	FIRST	FOLLOW	a	b	if	then	else	\$
E	$\{b\}$	$\{\underline{\text{then}}\}$		b				
S	$\{\underline{\text{if}}, a\}$	$\{\$, \underline{\text{else}}\}$	a		$\underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ S'$			

Dangling else problem

- Грамматика для условного оператора *if*
 - $E \rightarrow b$
 - $S \rightarrow \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \mid \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \mid a$
- Факторизуем
 - $E \rightarrow b$
 - $S \rightarrow \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ S' \mid a$
 - $S' \rightarrow \underline{\text{else}} \ S \mid \varepsilon$
- Строим $LL(1)$ -таблицу

N	FIRST	FOLLOW	a	b	if	then	else	\$
E	$\{b\}$	$\{\underline{\text{then}}\}$		b				
S	$\{\underline{\text{if}}, a\}$	$\{\$, \underline{\text{else}}\}$	a		$\underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ S'$			
S'	$\{\underline{\text{else}}\}$	$\{\$, \underline{\text{else}}\}$					$\underline{\text{else}} \ S$ ε	ε

Две записи в одной ячейке!

Как бороться с dangling else problem

- Приоритет $S' \rightarrow \underline{else} S$ перед $S' \rightarrow \varepsilon$
- Изменить синтаксис
 - ▶ Добавить endif выражение
 - ▶ Запретить if сразу после then
 - ▶ Обязать использовать скобки, если есть else
 - ▶ Обязать использовать ветку else
 - ▶ Использовать разные ключевые слова для выражений:
if E then S else и if E do S
- ...

Как бороться с dangling else problem

- Приоритет $S' \rightarrow \underline{\text{else}} S$ перед $S' \rightarrow \varepsilon$
- Изменить синтаксис
 - ▶ Добавить endif выражение
 - ▶ Запретить if сразу после then
 - ▶ Обязать использовать скобки, если есть else
 - ▶ Обязать использовать ветку else
 - ▶ Использовать разные ключевые слова для выражений:
if E then S else и if E do S
- ...
- Использовать другой формализм, в котором нет неоднозначностей!

Parsing Expression Grammars

- PEG G — четверка (V, T, P, p_S) , где
 - ▶ V — конечное множество нетерминалов
 - ▶ T — алфавит (конечное множество терминалов)
 - ▶ P — функция из V в выражения (parsing expression)
 - ▶ p_S — стартовое выражение

Parsing Expression Grammars

- PEG G — четверка (V, T, P, p_S) , где
 - ▶ V — конечное множество нетерминалов
 - ▶ T — алфавит (конечное множество терминалов)
 - ▶ P — функция из V в выражения (parsing expression)
 - ▶ p_S — стартовое выражение
- Parsing expression
 - ▶ Пустая строка ε
 - ▶ Терминал a
 - ▶ Нетерминал A
 - ▶ Последовательность $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — parser expression
 - ▶ Упорядоченный выбор p_1 / p_2 , где p_1, p_2 — parser expression
 - ▶ 0-или-больше p^* , где p — parser expression
 - ▶ Предикат $!p$, где p — parser expression

Пример Parsing Expression Grammars

- $E \rightarrow b$
- $S \rightarrow \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ \underline{\text{else}}\ S\ /\ \underline{\text{if}}\ E\ \underline{\text{then}}\ S\ /\ a$

- С помощью фрагмента PEG разбираем (“матчим”) *префикс* строки — пока это возможно
- Неразобраный суффикс матчим следующим фрагментом PEG

Пример Parsing Expression Grammars

- $E \rightarrow b$
- $S \rightarrow \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \ / \ \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ / \ a$
- $S (\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(\underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \ / \ \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ / \ a) (\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(\underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S) (\underline{\text{if}} \ b \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S) (\underline{b} \ \underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(\underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S) (\underline{\text{then}} \ a \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(S \ \underline{\text{else}} \ S) (\underline{a} \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(\underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ \underline{\text{else}} \ S \ / \ \underline{\text{if}} \ E \ \underline{\text{then}} \ S \ / \ a) (\underline{a} \ \underline{\text{else}} \ a) \rightarrow \dots$
 $(\underline{\text{else}} \ S) (\underline{\text{else}} \ a) \rightarrow$
 $(S) (\underline{a}) \rightarrow \dots$
 $() (\underline{\quad}) \rightarrow \text{— Успех}$

В чем разница между PEG и CFG?

- Выбор упорядочен!
 - ▶ Если получилось разобрать первой альтернативой, то вторая не рассматривается вообще
 - ▶ Как следствие, принципиально не бывает неоднозначностей

Формальнее: отношение PEG

$$G[p] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')$$

- Выражение p парсит строку xy , съедая x и оставляя y , возвращая x' как результат
- Если справа *fail*, значит, распарсить строку не удалось

Операционная семантика PEG: пустая строка

$$\overline{G[\varepsilon] \quad x \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} (x, \varepsilon)}$$

$$\overline{G[a] \quad ax \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (x, a)}$$

$$\frac{}{G[a] \quad ax \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} (x, a)}$$

$$\frac{}{G[b] \quad ax \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} \text{fail}}, \quad b \neq a$$

$$\overline{G[a] \quad ax \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} (x, a)}$$

$$\overline{G[b] \quad ax \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} \text{fail}}, \quad b \neq a$$

$$\overline{G[a] \quad \varepsilon \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} \text{fail}}$$

$$\frac{G[P(A)] \quad xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[A] \quad xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, A[x'])}$$

$$\frac{G[P(A)] \quad xy \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[A] \quad xy \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, A[x'])}$$

$$\frac{G[P(A)] \quad x \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[A] \quad x \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}$$

Операционная семантика PEG: последовательность

$$\frac{G[p_1] \ xyz \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (yz, x') \quad G[p_2] \ yz \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (z, y')}{G[p_1 p_2] \ xyz \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (z, x'y')}$$

Операционная семантика PEG: последовательность

$$\frac{G[p_1] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \quad G[p_2] \ yz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, y')}{G[p_1 \ p_2] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, x'y')}$$

$$\frac{G[p_1] \ xy \xrightarrow{\text{PEG}} (y, x') \quad G[p_2] \ y \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}{G[p_1 \ p_2] \ xy \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}$$

Операционная семантика PEG: последовательность

$$\frac{G[p_1] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \quad G[p_2] \ yz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, y')}{G[p_1 p_2] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, x'y')}$$

$$\frac{G[p_1] \ xy \xrightarrow{\text{PEG}} (y, x') \quad G[p_2] \ y \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}{G[p_1 p_2] \ xy \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}$$

$$\frac{G[p_1] \ x \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}{G[p_1 p_2] \ x \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}$$

$$\frac{G[p_1] \quad xy \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} (y, x')}{G[p_1 / p_2] \quad xy \stackrel{\text{PEG}}{\leadsto} (y, x')}$$

$$\frac{G[p_1] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[p_1 / p_2] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}$$

$$\frac{G[p_1] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail} \quad G[p_2] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[p_1 / p_2] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}$$

$$\frac{G[p_1] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[p_1 / p_2] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}$$

$$\frac{G[p_1] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail} \quad G[p_2] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[p_1 / p_2] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}$$

$$\frac{G[p_1] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail} \quad G[p_2] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[p_1 / p_2] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}$$

$$\frac{G[p] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[!p] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (x, \varepsilon)}$$

$$\frac{G[p] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[!p] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (x, \varepsilon)}$$

$$\frac{G[p] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y, x')}{G[!p] \ xy \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}$$

$$\frac{G[p] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \mathbf{fail}}{G[p^*] \ x \overset{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (x, \varepsilon)}$$

$$\frac{G[p] \ x \xrightarrow{\text{PEG}} \text{fail}}{G[p^*] \ x \xrightarrow{\text{PEG}} (x, \varepsilon)}$$

$$\frac{G[p] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \quad G[p^*] \ yz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, y')}{G[p^*] \ xyz \xrightarrow{\text{PEG}} (z, x'y')}$$

Преимущества и недостатки PEG

- Преимущества

- ▶ Никаких неоднозначностей
- ▶ Наглядность
- ▶ Синтаксический анализатор и спецификация языка — по сути одно и то же
- ▶ Синтаксический анализ за $O(n)$

- Недостатки

- ▶ Жадность: разбирается наиболее большой префикс
 - ★ PEG a^*a не может разобрать ничего
- ▶ Никто не знает, какой именно класс языков можно распознать
 - ★ Все регулярные языки распознаются
 - ★ Все $LL(k)$ языки распознаются
 - ★ Не все КС языки распознаются
 - ★ Язык палиндромов $S \rightarrow xSx/x$ не распознается
 - ★ Язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ — не КС — распознается
- ▶ Проблемы с левой рекурсией

Еще примеры: арифметические выражения

$$\begin{aligned} Expr &\rightarrow Sum \\ Sum &\rightarrow Product ((+ / -) Product)^* \\ Product &\rightarrow Value ((* / /) Value)^* \\ Value &\rightarrow [0 - 9] / (Expr) \end{aligned}$$

Еще примеры: вложенные комментарии

Begin → (
End → *)
C → *Begin N* End*
N → *C (!Begin!End Z)*
Z → *any single character*

Еще примеры: не КС язык

$$S \rightarrow \&(A c) a^+ B !.$$

$$A \rightarrow a A? b$$

$$B \rightarrow b B? c$$

Борьба с левой рекурсией: ограниченная левая рекурсия

- A^n имеет не более n леворекурсивных вызовов A , A^0 всегда завершается ошибкой

$$E^0 ::= \text{fail}$$

$$E^1 ::= E^0 + n/n = \perp + n/n = n$$

$$E^2 ::= E^1 + n/n = n + n/n$$

$$E^3 ::= E^2 + n/n = (n + n/n) + n/n$$

...

$$E^n ::= E^{n-1} + n/n$$

- Ищем значение n для каждого леворекурсивного нетерминала
- Подбирается такая граница, чтобы префикс, обработанный правилом, имел максимальную длину
- Промежуточные значения сохраняются в табличку L
 - ▶ $L[(A, x) \rightarrow X](B, y) = L(B, y)$, если $B \neq A$ или $y \neq x$
 - ▶ $L[(A, x) \rightarrow X](A, x) = X$

Обработка леворекурсивного нетерминала

$$\frac{\begin{array}{l} (A, xyz) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto \mathbf{fail}] \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \\ G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto (yz, x')] \xrightarrow{\text{INC}} (z, (xy)') \end{array}}{G[A] \quad xyz \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} (z, A[(xy)'])}$$

Обработка леворекурсивного нетерминала

$$\frac{(A, xyz) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto \mathbf{fail}] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (yz, x') \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto (yz, x')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (z, (xy)')}{G[A] \quad xyz \quad \mathcal{L} \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (z, A[(xy)'])}$$

$$\frac{(A, x) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad x \quad \mathcal{L}[(A, x) \mapsto \mathbf{fail}] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \mathbf{fail}}{G[A] \quad x \quad \mathcal{L} \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \mathbf{fail}}$$

Обработка леворекурсивного нетерминала

$$\frac{(A, xyz) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto \mathbf{fail}] \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto (yz, x')] \xrightarrow{\text{INC}} (z, (xy)')}{G[A] \quad xyz \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} (z, A[(xy)'])}$$

$$\frac{(A, x) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad x \quad \mathcal{L}[(A, x) \mapsto \mathbf{fail}] \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}{G[A] \quad x \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\mathcal{L}(A, xy) = \mathbf{fail}}{G[A] \quad xy \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}$$

Обработка леворекурсивного нетерминала

$$\frac{(A, xyz) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto \mathbf{fail}] \xrightarrow{\text{PEG}} (yz, x') \quad G[P(A)] \quad xyz \quad \mathcal{L}[(A, xyz) \mapsto (yz, x')] \xrightarrow{\text{INC}} (z, (xy)')}{G[A] \quad xyz \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} (z, A[(xy)'])}$$

$$\frac{(A, x) \notin \mathcal{L} \quad G[P(A)] \quad x \quad \mathcal{L}[(A, x) \mapsto \mathbf{fail}] \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}{G[A] \quad x \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\mathcal{L}(A, xy) = \mathbf{fail}}{G[A] \quad xy \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\mathcal{L}(A, xy) = (y, x')}{G[A] \quad xy \quad \mathcal{L} \xrightarrow{\text{PEG}} (y, A[x'])}$$

$$\frac{G[P(A)] \ xyzw \ \mathcal{L}[(A, xyzw) \mapsto (yzw, x')] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (zw, (xy)') \quad G[P(A)] \ xyzw \ \mathcal{L}[(A, xyzw) \mapsto (zw, (xy)')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (xyz)')}{G[P(A)] \ xyzw \ \mathcal{L}[(A, xyzw) \mapsto (yzw, x')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (xyz)')}, \text{ where } y \neq \varepsilon$$

$$\frac{G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (y z w, x')] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (z w, (x y)') \quad G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (z w, (x y)')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (x y z)')}{G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (y z w, x')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (x y z)')}, \text{ where } y \neq \varepsilon$$

$$\frac{G[P(A)] \ x \ \mathcal{L} \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \text{fail}}{G[P(A)] \ x \ \mathcal{L} \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}(A, x)}$$

$$\frac{G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (y z w, x')] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (z w, (x y)') \quad G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (z w, (x y)')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (x y z)')}{G[P(A)] \ x y z w \ \mathcal{L}[(A, x y z w) \mapsto (y z w, x')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (w, (x y z)')}, \text{ where } y \neq \varepsilon$$

$$\frac{G[P(A)] \ x \ \mathcal{L} \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} \mathbf{fail}}{G[P(A)] \ x \ \mathcal{L} \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}(A, x)}$$

$$\frac{G[P(A)] \ x y z \ \mathcal{L}[(A, x y z) \mapsto (z, (x y)')] \stackrel{\text{PEG}}{\rightsquigarrow} (y z, x')}{G[P(A)] \ x y z \ \mathcal{L}[(A, x y z) \mapsto (z, (x y)')] \stackrel{\text{INC}}{\rightsquigarrow} (z, (x y)')}$$