Построение представления группы по машине Тьюринга

Шамрай Максим

Лаборатория языковых инструментов

14.12.2019

Мотивация

$$R \subset CF \subset Conj \subseteq Bool$$

- Кроме всем известной иерархии Хомского, есть довольно много классов формальных языков
- И не все они имеют свою лемму о накачке
- В последнее время все чаще прибегают к смежным дисциплинам для исследования языков
- Мы предлагаем построить группу по языку, чтобы в дальнейшем можно было применять аппарат теории групп для исследований

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы, где A — множество образующих, R — множество определяющих отношений

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\varepsilon, a, a^2, b, ab, a^2b\} = Sym_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = C_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M, тогда существует конечно заданная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \to (A \cup A^{-1})^+$ такое что: $u \in L \iff K(u) = 1_G$

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы, где A — множество образующих, R — множество определяющих отношений

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\varepsilon, a, a^2, b, ab, a^2 b\} = Sym_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = C_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M, тогда существует конечно заданная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \to (A \cup A^{-1})^+$ такое что: $u \in L \iff K(u) = 1_G$

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы, где A — множество образующих, R — множество определяющих отношений

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\varepsilon, a, a^2, b, ab, a^2 b\} = Sym_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = C_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M, тогда существует конечно заданная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \to (A \cup A^{-1})^+$ такое что: $u \in L \iff K(u) = 1_G$

Цели

1. Реализовать алгоритм построения группы по машине Тьюринга, основываясь на доказательстве предыдущей теоремы
2. Доказать корректность алгоритма

Построение группы (0)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M', удовлетворяющей теореме 2, существует S-машина, которая симулирует M'

Теорема 4

Для любой S-машины, удовлетворяющей теореме 3, существует соответствующая конечно представленная группа

Построение группы (0)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M', удовлетворяющей теореме 2, существует S-машина, которая симулирует M'

Теорема 4

Для любой S-машины, удовлетворяющей теореме 3, существует соответствующая конечно представленная группа

Построение группы (0)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

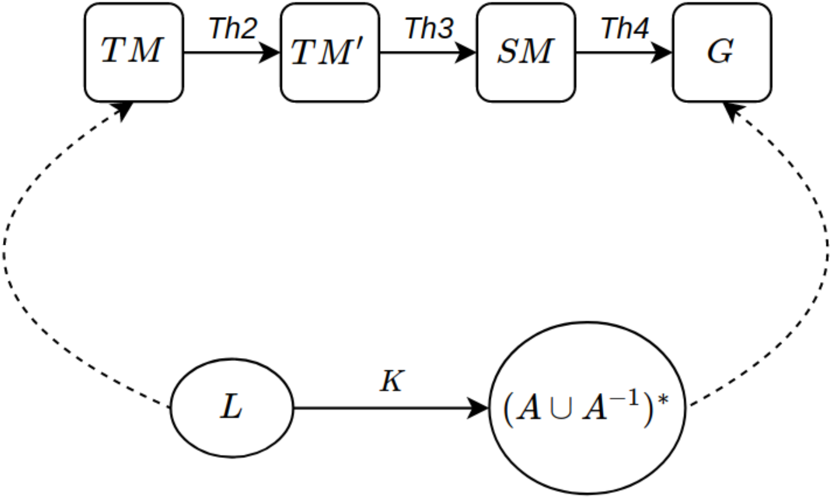
Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M', удовлетворяющей теореме 2, существует S-машина, которая симулирует M'

Теорема 4

Для любой S-машины, удовлетворяющей теореме 3, существует соответствующая конечно представленная группа

Построение группы (1)



Результаты и дальнейшие действия

- На данный момент алгоритм уже реализован
- Был проведен ряд экспериментов
- Найдена более свежая статья, где присутствуют похожие преобразования
- Рассматривается возможность формальной верификации алгоритма