

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Длинное название образовательного учреждения
«АББРЕВИАТУРА»



На правах рукописи

Азимов Рустам Шухратуллович

**Алгоритмы выполнения навигационных запросов к
графам с использованием операций линейной алгебры**

Специальность **XX.XX.XX** —

«Технология обработки, хранения и переработки злаковых, бобовых культур,
крупяных продуктов, плодоовощной продукции и виноградарства»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
уч. степень, уч. звание
Фамилия Имя Отчество

Город — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Список литературы	10
Глава 1. Обзор	11
1.1 Теория графов и линейная алгебра	11
1.2 Формальные языки и грамматики	11
1.3 Постановка задачи вычисления КС-запросов к графам	12
1.4 Существующие алгоритмы вычисления КС-запросов к графам . .	12
1.5 Используемые инструменты	13
1.6 Выводы	13
Глава 2. Подход к вычислению КС-запросов к графам с использованием операций линейной алгебры	15
Глава 3. Семейство алгоритмов вычисления КС-запросов с использованием матричного умножения	16
3.1 Алгоритмы	16
3.2 Корректность алгоритмов	16
3.3 Пример	17
Глава 4. Семейство алгоритмов вычисления КС-запросов не требующих трансформации входной грамматики	18
4.1 Алгоритмы	18
4.2 Корректность алгоритмов	18
4.3 Пример	19
Глава 5. Эксперименты, ограничения, обсуждение	20
5.1 Экспериментальное исследование	20
5.2 Ограничения	20
Глава 6. Сравнение и соотнесение	22

Заключение	23
Список сокращений и условных обозначений	24
Словарь терминов	26
Список рисунков	27
Список таблиц	28
Приложение А. Примеры вставки листингов программного кода	29
Приложение Б. Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами	35
Б.1 Подраздел приложения	35
Б.2 Ещё один подраздел приложения	37
Б.3 Использование длинных таблиц с окружением <i>longtabu</i>	41
Б.4 Форматирование внутри таблиц	44
Б.5 Стандартные префиксы ссылок	46
Б.6 Очередной подраздел приложения	47
Б.7 И ещё один подраздел приложения	47
Приложение В. Чертёж детали	48

Введение

В современном мире происходит значительный рост данных, которые требуют анализа. Графы используются в качестве структуры данных для представления больших объемов информации в компактной и удобной для анализа форме во многих областях, например, в биоинформатике, в графовых базах данных, при статическом анализе программ. При этом оказывается необходимым выявлять сложные зависимости между вершинами графа, которые выражаются путями между ними. Поэтому очень важен широкий класс задач, посвященный поиску путей в графах. Чтобы описать свойства искомых путей в графе, необходимо задать определенные ограничения на них. Данные ограничения формулируются в виде запроса к графу, а ответом на запрос является информация о существовании путей, удовлетворяющих данным ограничениям между каждой парой вершин. Кроме того, в некоторых областях, в качестве доказательства существования таких путей необходимо предъявить все или хотя бы один из них.

Для описания ограничений на пути в помеченном графе естественно выделять пути с помощью формальных грамматик (регулярные выражения, контекстно-свободные грамматики) над алфавитом, содержащим метки на ребрах этого графа. В настоящее время активно исследуются ограничения в виде контекстно-свободных (КС) грамматик, так как они позволяют описывать более широкий класс запросов (КС-запросов), чем регулярные выражения. Однако большинство существующих алгоритмов вычисления КС-запросов имеют низкую производительность на больших графах, что затрудняет их применение на практике.

Одним из распространённых способов улучшения производительности алгоритмов на графах является их формулирование в терминах операций линейной алгебры над матрицами и векторами. Для тех алгоритмов, которые позволяют найти такую формулировку, имеется возможность применить широкий класс оптимизаций, например, разреженное представление матриц и параллельное вычисление. Кроме того, данные алгоритмы зачастую просты в реализации, так как позволяют использовать существующие реализации для вычисления операций над матрицами. Таким образом, формулирование раз-

личных алгоритмов на графах в терминах операций линейной алгебры над матрицами и векторами является перспективным направлением.

Однако возможность использования операций линейной алгебры в задачах поиска путей с КС-ограничениями в графах в настоящее время не исследована. Таким образом, для КС-ограничений актуальна разработка и исследование свойств алгоритмов поиска путей, использующих различные операции линейной алгебры.

Множество работ посвящены формулированию классических алгоритмов на графах в терминах операций линейной алгебры. Например, такая формулировка была найдена для таких алгоритмов, как поиск в ширину, алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана-Форда, поиск наибольшего паросочетания в двудольном графе и т.д. Кроме того, существует стандарт GraphBLAS, который определяет базовые строительные блоки для графовых алгоритмов на языке линейной алгебры. GraphBLAS основан на том, что разреженная матрица может использоваться для представления графов в виде матрицы смежности или матрицы инцидентности. Однако формулировка в терминах операций линейной алгебры для алгоритмов вычисления КС-запросов на графах в настоящее время не найдена.

Существует классическое исследование Лесли Вэлианта, посвященное синтаксическому анализу КС-грамматик с использованием матричных операций. Однако изложенный в нём алгоритм позволяет производить анализ только над строками, что эквивалентно анализу частного случая графов — линейных помеченных графов. Кроме того, существуют исследования Филиппа Брэдфорда посвященные поиску кратчайших путей в графе с КС-ограничениями. Алгоритмы, представленные в данных исследованиях предназначены для частного случая КС-грамматик и/или частного случая графов. Таким образом, данные алгоритмы не применимы к поиску путей с произвольными КС-ограничениями в произвольных графах.

Задаче поиска путей с КС-ограничениями в произвольных графах посвящены работы Семёна Григорьева, Джелле Хеллингса, Сяованга Чжана, Сиро Медейроса. В данных исследованиях используются подходы, основанные на различных алгоритмах синтаксического анализа (LR, LL, GLL, CYK). Однако, данные алгоритмы сформулированы не в терминах операций линейной алгебры над матрицами и векторами. Впервые вопросом о возможности нахождения матричного алгоритма вычисления КС-запросов к графам задался Яннакакис

в своем исследовании о применимости методов из теории графов в теории баз данных. Он указывал на то, что алгоритм Вэлианта может быть расширен для работы с графами без циклов, однако сомневался в возможности расширения до произвольных графов.

Таким образом, на текущий момент не существует алгоритма вычисления произвольных КС-запросов к произвольным графам, выраженного через операции линейной алгебры. Поэтому необходимо дальнейшее исследование возможности разработки таких алгоритмов.

Целью данной работы является разработка алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующих операции линейной алгебры.

Достижение поставленной цели обеспечивается решением следующих **задач**:

1. Разработать подход к вычислению КС-запросов к графам, использующий операции линейной алгебры.
2. Разработать семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующих предложенный подход и позволяющих предоставлять искомые пути.
3. Разработать семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующий предложенный подход и не требующего преобразований входной КС-грамматики.
4. Провести экспериментальное исследование разработанных алгоритмов.

Научная новизна:

1. Подход, предложенный в диссертации, отличается от подходов, использованных в работах Семёна Григорьева, Сяованга Чжана, Джелле Хеллингса, Филиппа Брэдфорда и Сиро Медейроса активным использованием матричных операций в процессе вычисления запросов. Это позволяет применять широкий класс оптимизаций для вычисления матричных операций и дает возможность автоматически распараллеливать вычисления за счёт существующих решений.
2. Задача вычисления КС-запросов к графам впервые сведена к вычислению операций линейной алгебры и получены соответствующие алгоритмы.
3. Алгоритмы, предложенный в диссертации, отличается от алгоритмов, предложенных в работах Семёна Григорьева, Сяованга Чжана, Джелле Хеллингса, Филиппа Брэдфорда и Сиро Медейроса возможностью

работать с произвольными КС-грамматиками без необходимости приводить их в нормальную форму. Таким образом, удаётся избежать значительного увеличения размеров входной грамматики, от которой напрямую зависит временная сложность данных алгоритмов.

4. Экспериментальное исследование алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующих операции линейной алгебры проводится впервые и позволяет судить о применимости на практике разработанных алгоритмов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость диссертационного исследования заключается в разработке подхода к вычислению КС-запросов к графам, использующего операции линейной алгебры, в разработке формальных алгоритмов, использующих данный подход, а также в формальном доказательстве завершаемости и корректности разработанных алгоритмов.

Полученные в ходе исследования реализации могут быть использованы для интеграции с такими графовыми базами данных, как RedisGraph. Это добавит возможность вычислять КС-запросы к этим базам данных.

Методология и методы исследования. Методология исследования основана на подходе использования операций линейной алгебре при анализе графов, который начал активно развиваться с 2013 года в связи с созданием стандарта GraphBLAS. Данный стандарт определяет базовые строительные блоки для графовых алгоритмов на языке линейной алгебры. GraphBLAS основан на том, что разреженная матрица может использоваться для представления графов в виде матрицы смежности или матрицы инцидентности. На текущий момент множество классических алгоритмов из теории графов были сформулированы в терминах линейной алгебры.

Однако для большинства задач анализа графов такая формулировка ещё не найдена. Одной из таких задач является поиск путей в графе с ограничениями в виде КС-грамматик. Данная задача использует подход к анализу строк с помощью теории формальных языков и грамматик, который начал активно развиваться в 50-х годах 20-го века в связи с изучением естественных языков (работы Н. Хомского). В последствии этот подход получил широкое распространение в различных областях, в том числе и связанных с анализом графов. При этом основными элементами данного подхода являются алфавит и грамматика исследуемого языка, выступающего в качестве ограничения на искомые пути

в графе. Решаемые в связи с этим задачи связаны с поиском эффективных алгоритмов нахождения путей, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Доказательство завершаемости и корректности предложенного алгоритма проводится с применением линейной алгебры, теории формальных языков, теории графов и теории сложности алгоритмов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан подход к вычислению КС-запросов к графам, использующий операции линейной алгебры.
2. Разработано семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующих предложенный подход и позволяющих предоставлять искомые пути. Доказана завершаемость и корректность предложенных алгоритмов.
3. Разработано семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующий предложенный подход и не требующего преобразований входной КС-грамматики. Доказана завершаемость и корректность предложенных алгоритмов.
4. Проведено экспериментальное исследование разработанных алгоритмов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность и обоснованность результатов исследования опирается на использование формальных методов исследуемой области, выполнение формальных доказательств и инженерные эксперименты.

Основные результаты работы были доложены на ряде международных научных конференций: GRADES'18, GRADES'20, ADBIS'20, SIGMOD'21(еще не приняли). А также разработка предложенных алгоритмов была поддержана грантом РНФ №18-11-00100 и грантом РФФИ №19-37-90101.

Публикации. Все результаты диссертации изложены в 7 [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7] научных работах, которые содержат основные результаты работы. Из них 2 работы [6; 7] индексируются ВАК и 6 работ [1; 2; 3; 4; 5; 6] индексируются Scopus. Работы [1; 2; 3; 4; 6; 7] написаны в соавторстве. В [1; 6; 7] Р. Азимову принадлежит разработка алгоритма, доказательство его корректности и завершаемости, реализация алгоритма, работа над текстом. В [2] Р. Азимову принадлежит разработка алгоритма, доказательство его корректности и завершаемости, работа над текстом. В [3; 4] Р. Азимову принадлежит работа над

доказательствами корректности и завершаемости алгоритма, работа над текстом.

Список литературы

- [1] Azimov R. Context-Free Path Querying by Matrix Multiplication / Azimov R., Grigorev S. // In Proceedings of the 1st Joint International Workshop on Graph Data Management Experiences & Systems (GRADES) and Network Data Analytics (NDA) (GRADES-NDA'18)
- [2] Azimov R. Context-Free Path Querying with Single-Path Semantics by Matrix Multiplication / Terekhov A., Khoroshev A., Azimov R., Grigorev S. // In Proceedings of the 3rd Joint International Workshop on Graph Data Management Experiences & Systems (GRADES) and Network Data Analytics (NDA) (GRADES-NDA'20)
- [3] Azimov R. Context-Free Path Querying by Kronecker Product / Orachev E., Epelbaum I., Azimov R., Grigorev S. // In Proceedings of the 24th European Conference on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'20)
- [4] Azimov R. Context-Free Path Querying by Kronecker Product большая версия / Orachev E., Epelbaum I., Azimov R., Grigorev S. // In Proceedings of the (SIGMOD'21)
- [5] Azimov R. Ненаписанная работа матричный алгоритм по всем путям
- [6] Azimov R. Path Querying with Conjunctive Grammars by Matrix Multiplication / Azimov R., Grigorev S. // Programming and Computer Software. – 2019. – Vol. 45. – №. 7. – pp. 357-364.
- [7] Азимов Р. Ш. Синтаксический анализ графов с использованием конъюнктивных грамматик / Азимов Р., Григорьев С. // Труды ИСП РАН, 2018, том 1 вып. 2, с. 3-4.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 48 страниц, включая 0 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 0 наименований.

Глава 1. Обзор

В данной главе введены основные термины и определения, используемые в работе, а также рассмотрены основные алгоритмы вычисления КС-запросов к графам и используемые в ходе исследования инструменты.

1.1 Теория графов и линейная алгебра

В данном разделе вводится ряд обозначений, а также представляется основная информация об активно развивающемся направлении в решении задач из теории графов с помощью операций линейной алгебры.

Стандарт GraphBLAS. Графы представлены в виде матриц смежности. Используются практические результаты для вычисления операций над разреженными матрицами.

Операции над матрицами и соответствующие им трансформации графов. Транспонирование, поэлементное сложение/умножение, обычное умножение.

Определение полукольца. Матричное умножение на полукольце. Ключевая идея GraphBLAS.

Таблица стандартных полуколец в GraphBLAS.

Представление матриц в GraphBLAS. CSR, CSC.

Таблица классических алгоритмов на графах с классической и матричными сложностями.

Конечные автоматы.

Рекурсивные автоматы.

Произведение Кронекера.

1.2 Формальные языки и грамматики

В данном разделе вводится ряд обозначений, а также представляется основная информация из теории формальных языков.

Алфавит

Цепочка символов

Язык

Грамматика

Вывод цепочки

Язык порождаемый грамматикой

Дерево вывода цепочки

Одним из распространённых способов классификации грамматик является иерархия по Хомскому. Грамматики типа 0 1 2 3. КС-грамматика.

Нормальная форма хомского для КС-грамматик.

1.3 Постановка задачи вычисления КС-запросов к графам

В данном разделе вводится формальная постановка задачи вычисления КС-запросов к графам.

Хеллингс, контекстно-свободные отношения R_A . Выделим три возможных семантики запросов и приведем формальные постановки задачи вычисления КС-запросов для них.

Постановка задачи с реляционной семантикой запросов.

Постановка задачи с семантикой запросов одного пути.

Постановка задачи с семантикой запросов всех путей.

1.4 Существующие алгоритмы вычисления КС-запросов к графам

В данном разделе рассмотрены основные алгоритмы вычисления КС-запросов к графам.

Алгоритм Вэлианта, как вычисление КС-запросов для линейных графов. Может быть обобщён до ациклических. Временная сложность.

Брэдфорд. Кратчайшие пути, языки Дика, определенный вид графа. Временная сложность.

Hellings/китайцы. Для всех семантик, всех графов. Временная сложность.

GLL, все семантики, все графы. Временная сложность.

Бразильцы. Все графы. Временная сложность.

1.5 Используемые инструменты

В данном разделе рассмотрены инструменты, используемые в ходе исследования.

GraphBLAS/SuiteSparse, на языке Си. Разреженные матрицы, их формат, вычисление операций на цпу.

RedisGraph графовая база данных. Разреженные матрицы, их формат. Выразительность языка запросов.

CFPQ_data созданный датасет. Описать какие графы RDF и запросы к ним. Таблица.

1.6 Выводы

На основе проведённого обзора можно сделать следующие выводы, обосновывающие необходимость проведения исследования в области вычисления КС-запросов к графам.

- Проблема вычисления КС-запросов к графам актуальна в нескольких областях: графовые базы данных, биоинформатика, статический анализ программ.
- Формулирование алгоритмов на графах в терминах операций линейной алгебры перспективное направление для улучшения производительности при работе с большими графами.
- Не проводилось исследований о возможности формулировки алгоритмов вычисления КС-запросов к графам в терминах операций линейной алгебры.

Обзор также позволяет выявить следующие подходы, технологии и средства.

- Для построения алгоритма КС-запросов к графам с использованием операций линейной алгебры целесообразно придерживаться стандарта GraphBLAS.
- Представление матриц должно быть разреженным.
- Для вычисления на цпу можно использовать реализацию SuiteSparse.
- В качестве хранилища данных можно использовать RedisGraph.
- В качестве датасета для экспериментального исследования можно использовать CFPQ_data.

Глава 2. Подход к вычислению КС-запросов к графам с использованием операций линейной алгебры

Метод?

Шаг 1. Определяем полукольцо.

Шаг 2. Инициализируем матрицы основываясь на входной грамматике, графе и полукольце из шага 1.

Шаг 3. Выполняем проводим итерацию основываясь на полукольце из шага 1.

Шаг 4. Если хотя бы одна матрица изменилась, то переходим к шагу 3, иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. По полученным матрицам строим контекстно-свободные отношения R_A , которые являются результатом при реляционной семантике запросов.

Глава 3. Семейство алгоритмов вычисления КС-запросов с использованием матричного умножения

В данной главе изложены алгоритмы вычисления КС-запросов к графам с использованием матричного умножения и различных семантик запросов. Также сформулированы и доказаны утверждения о корректности изложенных алгоритмов. Кроме того, работа данных алгоритмов продемонстрирована на примере.

3.1 Алгоритмы

В данном разделе изложены алгоритмы вычисления КС-запросов к графам с использованием стандартных операций над булевыми матрицами и различных семантик запросов.

Определяем полукольцо.

Показываем переход к булевым матрицам. Обычное булево матричное умножение и сложение.

Приводим базовый алгоритм для реляционной семантики запросов.

Вводим PathIndex. Определяем полукольцо.

Приводим алгоритм для одного пути.

И алгоритм получения этого пути.

Приводим все тоже самое для семантики всех путей.

3.2 Корректность алгоритмов

В данном разделе сформулированы и доказаны утверждения о корректности и завершаемости изложенных алгоритмов. Также представлены оценки временной сложности данных алгоритмов.

Теорема. Завершаемость всех алгоритмов.

Теорема. Корректность базового алгоритма.

Теорема. Оценка временной сложности базового алгоритма.

Теорема. Корректность алгоритма одного пути.

Теорема. Корректность алгоритма получения пути.

Теорема. Оценка временной сложности алгоритма одного пути и алгоритма получения пути.

Теорема. Корректность алгоритма всех путей.

Теорема. Корректность алгоритма получения всех путей.

Теорема. Оценка временной сложности алгоритма всех путей и алгоритма получения путей.

3.3 Пример

В данном разделе работа изложенных алгоритмов продемонстрирована на примере, основанном на КС-языке правильных вложенных скобочных последовательностей.

Грамматика, граф.

Достигается худший случай.

Работа базового алгоритма, картинки матриц. Результат.

Работа алгоритма одного пути. PathIndexes. Картинки матриц. Результат.

Работа алгоритма всех путей. Картинки матриц. Результат.

Глава 4. Семейство алгоритмов вычисления КС-запросов не требующих трансформации входной грамматики

В данной главе изложены алгоритмы вычисления КС-запросов к графам, который не требует трансформации входной КС-грамматики, а также использует операции линейной алгебры и различные семантики запросов. Также сформулированы и доказаны утверждения о корректности изложенных алгоритмов. Кроме того, работа данных алгоритмов продемонстрирована на примере.

4.1 Алгоритмы

В данном разделе изложены алгоритмы вычисления КС-запросов к графам, который не требует трансформации входной КС-грамматики, а также использует операции линейной алгебры и различные семантики запросов.

Строим по грамматике рекурсивный автомат.

Определяем полукольцо. Показываем переход к булевым матрицам. Произведение Кронекера.

Приводим алгоритм для реляционной семантики запросов.

Приводим алгоритм для одного пути.

И алгоритм получения этого пути.

Приводим все тоже самое для семантики всех путей.

4.2 Корректность алгоритмов

В данном разделе сформулированы и доказаны утверждения о корректности и завершаемости изложенных алгоритмов. Также представлены оценки временной сложности данных алгоритмов.

Теорема. Завершаемость всех алгоритмов.

Теорема. Корректность алгоритма для реляционной семантики запросов.

Теорема. Оценка временной сложности алгоритма для реляционной семантики запросов.

Теорема. Корректность алгоритма одного пути.

Теорема. Корректность алгоритма получения пути.

Теорема. Оценка временной сложности алгоритма одного пути и алгоритма получения пути.

Теорема. Корректность алгоритма всех путей.

Теорема. Корректность алгоритма получения всех путей.

Теорема. Оценка временной сложности алгоритма всех путей и алгоритма получения путей.

4.3 Пример

В данном разделе работа изложенных алгоритмов продемонстрирована на примере, основанном на КС-языке правильных вложенных скобочных последовательностей.

Грамматика, граф.

Достигается худший случай.

Работа базового алгоритма, картинки матриц. Результат.

Работа алгоритма одного пути. Картинки матриц. Результат.

Работа алгоритма всех путей. Картинки матриц. Результат.

Глава 5. Эксперименты, ограничения, обсуждение

Завершаемость и корректность предложенных алгоритмов формально доказаны выше, однако их производительность требует экспериментальной оценки. При этом основной интерес представляет оценка на входных данных, близких к реальным. Вместе с этим необходимо рассмотреть границы применимости полученных в работе результатов. Таким образом, в данной главе решаются следующие задачи.

Оценка производительности проводилась на реальных и на синтетических данных. Краткое описание экспериментов приведено в таблице.

Таблица эксперимент и что исследовалось. 1) Сравнение между матричными реализациями. 2) Сравнение лучших матричных с GLL и бразильцами.

Далее приводятся детальные описания экспериментов.

5.1 Экспериментальное исследование

Характеристики системы.

Описание реализаций.

Использованный датасет CFPQ_data.

Сравнение матричных реализаций. Таблица, обсуждение.

Сравнение лучших матричных с GLL и бразильцами. Таблица. Обсуждение.

Выводы.

5.2 Ограничения

Используемые подходы и алгоритмы имеют ряд ограничений.

Пользуемся разреженностью реальных графов.

В случае когда грамматика нужна в нормальной форме, зависим от её разрастания.

Зависим от реализованных матричных операций. Функционала библиотек.

Большая временная сложность при определенном графе и грамматике.

Глава 6. Сравнение и соотнесение

В данной главе представлено сравнение полученных результатов с основными существующими решениями в области вычисления КС-запросов к графам. Описание существующих решений представлено в разделе 1.4 данной работы.

В качестве алгоритмов, с которыми производилось сравнение, выбраны следующие: GLL, Hellings, Bradford, бразилыцы.

Для сравнения алгоритмов были выбраны критерии, представленные в таблице.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан подход к вычислению КС-запросов к графам, использующий операции линейной алгебры.
2. Разработано семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующих предложенный подход и позволяющих предоставлять искомые пути. Доказана завершаемость и корректность предложенных алгоритмов.
3. Разработано семейство алгоритмов вычисления КС-запросов к графам, использующий предложенный подход и не требующего преобразований входной КС-грамматики. Доказана завершаемость и корректность предложенных алгоритмов.
4. Проведено экспериментальное исследование разработанных алгоритмов.

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помощь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудятину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список сокращений и условных обозначений

a_n	b_n	$\left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\}$	коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям
$\hat{\mathbf{e}}$			единичный вектор
E_0			амплитуда падающего поля
a_n	b_n	$\left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\}$	коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям ещё раз, но без окружения minirage нет вертикального выравнивания по центру.
j			тип функции Бесселя
k			волновой вектор падающей волны
			и снова коэффициенты разложения Ми в дальнем поле соответствующие электрическим и магнитным мультиполям,
a_n	b_n	$\left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\}$	теперь окружение minirage есть и добавлено много текста, так что описание группы условных обозначений значительно превысило высоту этой группы... Для отбивки пришлось добавить дополнительные отступы.
L			общее число слоёв
l			номер слоя внутри стратифицированной сферы
λ			длина волны электромагнитного излучения в вакууме
n			порядок мультиполя
$\mathbf{N}_{e1n}^{(j)}$	$\mathbf{N}_{o1n}^{(j)}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N}_{e1n}^{(j)} \\ \mathbf{N}_{o1n}^{(j)} \end{array} \right\}$	сферические векторные гармоники
$\mathbf{M}_{o1n}^{(j)}$	$\mathbf{M}_{e1n}^{(j)}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}_{o1n}^{(j)} \\ \mathbf{M}_{e1n}^{(j)} \end{array} \right\}$	
μ			магнитная проницаемость в вакууме
r, θ, φ			полярные координаты
ω			частота падающей волны
BEM			boundary element method, метод граничных элементов
CST MWS			Computer Simulation Technology Microwave Studio программа для компьютерного моделирования уравнений Максвелла
DDA			discrete dipole approximation, приближение дискретных диполей

FDFD	finite difference frequency domain, метод конечных разностей в частотной области
FDTD	finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FEM	finite element method, метод конечных элементов
FIT	finite integration technique, метод конечных интегралов
FMM	fast multipole method, быстрый метод многополюсника
FVTD	finite volume time-domain, метод конечных объёмов во временной области
MLFMA	multilevel fast multipole algorithm, многоуровневый быстрый алгоритм многополюсника
MoM	method of moments, метод моментов
MSTM	multiple sphere T-Matrix, метод Т-матриц для множества сфер
PSTD	pseudospectral time domain method, псевдоспектральный метод во временной области
TLM	transmission line matrix method, метод матриц линий передач

Словарь терминов

TeX : Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнудом

панграмма : Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

Список рисунков

Список таблиц

1	Наименование таблицы средней длины	37
2	Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.	42
3	Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования	45
4	Стандартные префиксы ссылок	47

Приложение А

Примеры вставки листингов программного кода

Для крупных листингов есть два способа. Первый красивый, но в нём могут быть проблемы с поддержкой кириллицы (у вас может встречаться в комментариях и печатаемых сообщениях), он представлен на листинге [А.1](#). Второй

Листинг А.1: Программа „Hello, world“ на C++

```

5 | #include <iostream>
   | using namespace std;
   |
   | int main() //кириллица в комментариях при xelatex и luaLatex и
   | мееет проблемы с пробелами
   | {
   |     cout << "Hello, world" << endl; //latin letters in
   |     commentaries
   |     system("pause");
   |     return 0;
10| }

```

не такой красивый, но без ограничений (см. листинг [А.2](#)).

Листинг А.2: Программа „Hello, world“ без подсветки

```

#include <iostream>
using namespace std;

int main() //кириллица в комментариях
{
    cout << "Привет, мир" << endl;
}

```

Можно использовать первый для вставки небольших фрагментов внутри текста, а второй для вставки полного кода в приложении, если таковое имеется.

Если нужно вставить совсем короткий пример кода (одна или две строки), то выделение линейками и нумерация может смотреться чересчур громоздко.

В таких случаях можно использовать окружения `lstlisting` или `Verb` без `ListingEnv`. Приведём такой пример с указанием языка программирования, отличного от заданного по умолчанию:

```
|fibs = 0 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

Такое решение — со вставкой нумерованных листингов покрупнее и вставок без выделения для маленьких фрагментов — выбрано, например, в книге Эндрю Таненбаума и Тодда Остина по архитектуре

Наконец, для оформления идентификаторов внутри строк (функция `main` и тому подобное) используется `lstinline` или, самое простое, моноширинный текст (`\texttt`).

Пример [A.3](#), иллюстрирующий подключение переопределённого языка. Может быть полезным, если подсветка кода работает криво. Без дополнительного окружения, с подписью и ссылкой, реализованной встроенным средством.

Листинг A.3: Пример листинга с подписью собственными средствами

```
## Caching the Inverse of a Matrix

## Matrix inversion is usually a costly computation and there
## may be some
## benefit to caching the inverse of a matrix rather than
## compute it repeatedly
5 ## This is a pair of functions that cache the inverse of a
## matrix.

## makeCacheMatrix creates a special "matrix" object that can
## cache its inverse

makeCacheMatrix <- function(x = matrix()) {#кириллица в коммента
10   rиях npx xelatex u luaLatex имеет проблемы с пробелами
    i <- NULL
    set <- function(y) {
        x <- y
        i <- NULL
    }
15   get <- function() x
    setSolved <- function(solve) i <- solve
    getSolved <- function() i
    list(set = set, get = get,
20       setSolved = setSolved,
        getSolved = getSolved)
```

```

}

25 ## cacheSolve computes the inverse of the special "matrix"
    returned by
    ## makeCacheMatrix above. If the inverse has already been
    calculated (and the
    ## matrix has not changed), then the cachesolve should retrieve
    the inverse from
    ## the cache.

30 cacheSolve <- function(x, ...) {
    ## Return a matrix that is the inverse of 'x'
    i <- x$getSolved()
    if(!is.null(i)) {
        message("getting cached data")
35         return(i)
    }
    data <- x$get()
    i <- solve(data, ...)
    x$setSolved(i)
40     i
}

```

Листинг A.4 подгружается из внешнего файла. Приходится загружать без окружения дополнительного. Иначе по страницам не переносится.

Листинг A.4: Листинг из внешнего файла

```

# Analysis of data on Course Project at Getting and Cleaning
  data course of Data Science track at Coursera.

# Part 1. Merges the training and the test sets to create one
  data set.
# 3. Uses descriptive activity names to name the activities in
  the data set
5 # 4. Appropriately labels the data set with descriptive variable
   names.

if (!file.exists("UCI HAR Dataset")) {
    stop("You need 'UCI HAR Dataset' folder full of data")
}
10

```

```

library(plyr) # for mapvalues

15 #getting common data
features <- read.csv("UCI HAR Dataset/features.txt", sep=" ",
  header = FALSE,
                        colClasses = c("numeric", "character"))
activity_labels <- read.csv("UCI HAR Dataset/activity_labels.txt",
  sep="",
                        header = FALSE, colClasses = c("
numeric", "character"))

20 #getting train set data
subject_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/subject_train.
  txt",
                        header = FALSE, colClasses = "numeric",
                        col.names="Subject")
y_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/y_train.txt", header
  = FALSE,
                        colClasses = "numeric")
25 x_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/X_train.txt", sep="",
  header = FALSE,
                        colClasses = "numeric", col.names=features$V2
                        , check.names = FALSE)

activity_train <- as.data.frame(mapvalues(y_train$V1, from =
  activity_labels$V1,
30                                     to = activity_labels$
V2))
names(activity_train) <- "Activity"

35 #getting test set data
subject_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/subject_test.txt"
  ,
                        header = FALSE, colClasses = "numeric",
                        col.names="Subject")
y_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/y_test.txt", header =
  FALSE,
                        colClasses = "numeric")
40 x_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/X_test.txt", sep="",
  header = FALSE,

```



```

        colClasses = "numeric", col.names=features$V2,
        check.names = FALSE)

activity_test <- as.data.frame(mapvalues(y_test$V1, from =
        activity_labels$V1,
                                                to = activity_labels$V2
        ))
45 names(activity_test) <- "Activity"

# Forming full dataframe
data_train <- cbind(x_train, subject_train, activity_train)
50 data_test <- cbind(x_test, subject_test, activity_test)
data <- rbind(data_train, data_test)

# Cleaning memory
rm(features, activity_labels, subject_train, y_train, x_train,
        activity_train,
55 subject_test, y_test, x_test, activity_test, data_train, data
        _test)

# Part 2. Extracts only the measurements on the mean and
        standard deviation for each measurement.

60 cols2match <- grep("(mean|std)", names(data))

# Excluded gravityMean, tBodyAccMean, tBodyAccJerkMean,
        tBodyGyroMean,
# tBodyGyroJerkMean, as these represent derivations of angle
data, as
# opposed to the original feature vector.
65

# Subsetting data frame, also moving last columns to be first
Subsetted_data_frame <- data[, c(562, 563, cols2match)]

# Part 5. From the data set in step 4, creates a second,
independent tidy data set
70 # with the average of each variable for each activity and each
subject.

library(dplyr) # for %>% and summarise_each

```

```
75 tidydata <- Subsetted_data_frame %>% group_by(Subject,Activity)
    %>%
        summarise_each(funs(mean))

write.table(tidydata, "tidydata.txt", row.names=FALSE)
```

Приложение Б

Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами

Б.1 Подраздел приложения

Вот размещается длинная таблица:

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)

продолжение следует

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars kick	0	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.2 Ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения! Конвынёры витюпырата но нам, тебиквьюэ мэнтётюм позтюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вэниам льебэравичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт.

Пример длинной таблицы с записью продолжения по ГОСТ 2.105:

Таблица 1 — Наименование таблицы средней длины

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
mars kick	0	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс
mars kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)
			1: генерация белого шума
mars kick	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$)

Продолжение таблицы 1

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Б.3 Использование длинных таблиц с окружением *longtabu*

В таблице 2 более книжный вариант длинной таблицы, используя окружение `longtabu` и разнообразные `toprule` `midrule` `bottomrule` из пакета `booktabs`. Чтобы визуально таблица смотрелась лучше, можно использовать следующие параметры: в самом начале задаётся расстояние между строчками с помощью `arraystretch`. Таблица задаётся на всю ширину, `longtabu` позволяет делить ширину колонок пропорционально — тут три колонки в пропорции 1.1:1:4 — для каждой колонки первый параметр в описании `X[]`. Кроме того, в таблице убраны отступы слева и справа с помощью `@{}` в преамбуле таблицы. К первому и второму столбцу применяется модификатор

`>\setlength{\baselineskip}{0.7\baselineskip}`,

который уменьшает межстрочный интервал в для текста таблиц (иначе заголовки второго столбца значительно шире, а двухстрочное имя сливается с окружающими). Для первой и второй колонки текст в ячейках выравнивается по центру как по вертикали, так и по горизонтали — задаётся буквами `m` и `c` в описании столбца `X[]`.

Так как формулы большие — используется окружение `alignedat`, чтобы отступ был одинаковый у всех формул — он сделан для всех, хотя для большей части можно было и не использовать. Чтобы формулы занимали поменьше места в каждом столбце формулы (где надо) используется `\textstyle` — он делает дроби меньше, у знаков суммы и произведения — индексы сбоку. Иногда формула слишком большая, сливается со следующей, поэтому после неё ставится небольшой дополнительный отступ `\vspace*{2ex}`. Для штрафных функций — размер фигурных скобок задан вручную `\Big\{`, т. к. не умеет `alignedat` работать с `\left` и `\right` через несколько строк/колонок.

В примечании к таблице наоборот, окружение `cases` даёт слишком большие промежутки между вариантами, чтобы их уменьшить, в конце каждой строчки окружения использовался отрицательный дополнительный отступ `\[-0.5em]`.

Таблица 2 — Тестовые функции для оптимизации, D — размерность. Для всех функций значение в точке глобального минимума равно нулю.

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D \lfloor x_i + 0.5 \rfloor^2$
зашумлённая квартиче- ская	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D ix_i^4 + rand[0,1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2}\right) -$ $-\exp\left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i/\sqrt{i}) + 1$
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] + \right.$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$

продолжение следует

(продолжение)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $+ \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] +$ $+ (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \left. \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$
сфера	$[-100, 100]^D$	$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Schwefel 2.22	$[-10, 10]^D$	$f_2(x) = \sum_{i=1}^D x_i + \prod_{i=1}^D x_i $
Schwefel 1.2	$[-100, 100]^D$	$f_3(x) = \sum_{i=1}^D \left(\sum_{j=1}^i x_j \right)^2$
Schwefel 2.21	$[-100, 100]^D$	$f_4(x) = \max_i \{ x_i \}$
Rosenbrock	$[-30, 30]^D$	$f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$
ступенчатая	$[-100, 100]^D$	$f_6(x) = \sum_{i=1}^D [x_i + 0.5]^2$
зашумлённая квартиче- ская	$[-1.28, 1.28]^D$	$f_7(x) = \sum_{i=1}^D i x_i^4 + rand[0, 1)$
Schwefel 2.26	$[-500, 500]^D$	$f_8(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \sin \sqrt{ x_i } +$ $+ D \cdot 418.98288727243369$
Rastrigin	$[-5.12, 5.12]^D$	$f_9(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
Ackley	$[-32, 32]^D$	$f_{10}(x) = -20 \exp \left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2} \right) -$ $- \exp \left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i) \right) + 20 + e$
Griewank	$[-600, 600]^D$	$f_{11}(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos(x_i / \sqrt{i}) + 1$

продолжение следует

(окончание)

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
штрафная 1	$[-50, 50]^D$	$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D} \left\{ 10 \sin^2(\pi y_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (y_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})] + \right.$ $\left. + (y_D - 1)^2 \right\} + \sum_{i=1}^D u(x_i, 10, 100, 4)$
штрафная 2	$[-50, 50]^D$	$f_{13}(x) = 0.1 \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{D-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] + \right.$ $\left. + (x_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_D)] \right\} +$ $+ \sum_{i=1}^D u(x_i, 5, 100, 4)$
Примечание — Для функций f_{12} и f_{13} используется $y_i = 1 + \frac{1}{4}(x_i + 1)$ и $u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m, & x_i > a \\ 0, & -a \leq x_i \leq a \\ k(-x_i - a)^m, & x_i < -a \end{cases}$		

Б.4 Форматирование внутри таблиц

В таблице 3 пример с чересстрочным форматированием. В файле `userstyles.tex` задаётся счётчик `\newcounter{rowcnt}` который увеличивается на 1 после каждой строчки (как указано в преамбуле таблицы). Кроме того, задаётся условный макрос `\altshape` который выдаёт одно из двух типов форматирования в зависимости от чётности счётчика.

В таблице 3 каждая чётная строчка — синяя, нечётная — с наклоном и слегка поднята вверх. Визуально это приводит к тому, что среднее значение и среднеквадратичное изменение группируются и хорошо выделяются взглядом в таблице. Сохраняется возможность отдельные значения в таблице выделить цветом или шрифтом. К первому и второму столбцу форматирование не применяется по сути таблицы, к шестому общее форматирование не применяется для наглядности.

Так как заголовок таблицы тоже считается за строчку, то перед ним (для первого, промежуточного и финального варианта) счётчик обнуляется, а в `\altshape` для нулевого значения счётчика форматирования не применяется.

Таблица 3 — Длинная таблица с примером чересстрочного форматирования

	Итера- ции	JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)
f1	1500	1.8E-60 (8.4E-60)	1.3E-54 (9.2E-54)	2.5E-28 (3.5E-28)	4.5E-20 (6.9E-20)	9.8E-14 (8.4E-14)	9.6E-42 (2.7E-41)

продолжение следует

(окончание)

	Итера- ции	JADE++	JADE	jDE	SaDE	DE/rand /1/bin	PSO
f2	2000	1.8E-25 (8.8E-25)	3.9E-22 (2.7E-21)	1.5E-23 (1.0E-23)	1.9E-14 (1.1E-14)	1.6E-09 (1.1E-09)	9.3E-21 (6.3E-20)
f3	5000	5.7E-61 (2.7E-60)	6.0E-87 (1.9E-86)	5.2E-14 (1.1E-13)	9.0E-37 (5.4E-36)	6.6E-11 (8.8E-11)	2.5E-19 (3.9E-19)
f4	5000	8.2E-24 (4.0E-23)	4.3E-66 (1.2E-65)	1.4E-15 (1.0E-15)	7.4E-11 (1.8E-10)	4.2E-01 (1.1E+00)	4.4E-14 (9.3E-14)
f5	3000	8.0E-02 (5.6E-01)	3.2E-01 (1.1E+00)	1.3E+01 (1.4E+01)	2.1E+01 (7.8E+00)	2.1E+00 (1.5E+00)	2.5E+01 (3.2E+01)
f6	100	2.9E+00 (1.2E+00)	5.6E+00 (1.6E+00)	1.0E+03 (2.2E+02)	9.3E+02 (1.8E+02)	4.7E+03 (1.1E+03)	4.5E+01 (2.4E+01)
f7	3000	6.4E-04 (2.5E-04)	6.8E-04 (2.5E-04)	3.3E-03 (8.5E-04)	4.8E-03 (1.2E-03)	4.7E-03 (1.2E-03)	2.5E-03 (1.4E-03)
f8	1000	3.3E-05 (2.3E-05)	7.1E+00 (2.8E+01)	7.9E-11 (1.3E-10)	4.7E+00 (3.3E+01)	5.9E+03 (1.1E+03)	2.4E+03 (6.7E+02)
f9	1000	1.0E-04 (6.0E-05)	1.4E-04 (6.5E-05)	1.5E-04 (2.0E-04)	1.2E-03 (6.5E-04)	1.8E+02 (1.3E+01)	5.2E+01 (1.6E+01)
f10	500	8.2E-10 (6.9E-10)	3.0E-09 (2.2E-09)	3.5E-04 (1.0E-04)	2.7E-03 (5.1E-04)	1.1E-01 (3.9E-02)	4.6E-01 (6.6E-01)
f11	500	9.9E-08 (6.0E-07)	2.0E-04 (1.4E-03)	1.9E-05 (5.8E-05)	7.8E-04 (1.2E-03)	2.0E-01 (1.1E-01)	1.3E-02 (1.7E-02)
f12	500	4.6E-17 (1.9E-16)	3.8E-16 (8.3E-16)	1.6E-07 (1.5E-07)	1.9E-05 (9.2E-06)	1.2E-02 (1.0E-02)	1.9E-01 (3.9E-01)
f13	500	2.0E-16 (6.5E-16)	1.2E-15 (2.8E-15)	1.5E-06 (9.8E-07)	6.1E-05 (2.0E-05)	7.5E-02 (3.8E-02)	2.9E-03 (4.8E-03)

Б.5 Стандартные префиксы ссылок

Общепринятым является следующий формат ссылок: <prefix>:<label>. Например, \label{fig:knuth}; \ref{tab:test1}; label={lst:external1}. В таблице 4 приведены стандартные префиксы для различных типов ссылок.

Таблица 4 — Стандартные префиксы ссылок

Префикс	Описание
ch:	Глава
sec:	Секция
subsec:	Подсекция
fig:	Рисунок
tab:	Таблица
eq:	Уравнение
lst:	Листинг программы
itm:	Элемент списка
alg:	Алгоритм
app:	Секция приложения

Для упорядочивания ссылок можно использовать разделительные символы. Например, `\label{fig:scheemes/my_scheeme}` или `\label{lst:dtts/linked_list}`.

Б.6 Очередной подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Б.7 И ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

Перв. примен.		Приложение В			
Справ. №					
Подп. и дата		Инв. № дубл.		Инв. № подл	
Взам. инв. №		Инв. инв. №		Инв. инв. №	
Подп. и дата		Подп. и дата		Подп. и дата	
Инв. № подл		Инв. № подл		Инв. № подл	
Изм.		Лист		№ докум.	
Разраб.		Автор		Подп.	
Пров.				Дата	
Т.Контр.					
Н.Контр.					
Утв.					
Вакуум				Сферический куб	
Лит.				Масса	
Лист 1				Листов 1	
Масштаб				0 з.	
2:1					
РАН					

30.00 mm

30.00 mm

28.07 °

20.00 mm

4.00 mm

10.00 mm

13.00 mm

10.00 mm

R2.00 mm

A1 (3:1)

В - В