Теория автоматов и формальных языков

Контекстно-свободные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

4 октября 2016г.

В предыдущей серии

- Регулярные выражения, регулярные грамматики и конечные автоматы задают класс регулярных языков
- Класс регулярных языков замкнут относительно теоретико-множественных операций, конкатенации, итерации, гомоморфизма цепочек
- Определение принадлежности слова языку осуществляется за $O(n)$ операций
- Однако класс регулярных языков достаточно узок, ни один используемый в промышленности язык программирования не является регулярным
  - Лемма о накачке для доказательства нерегулярности языка
  - Язык правильных скобочных последовательностей, язык палиндромов не являются регулярными

Контекстно-свободная грамматика

Четверка $\langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- V_T — алфавит терминальных символов (терминалов)
- V_N — алфавит нетерминальных символов (нетерминалов)
  - $V_T \cap V_N = \emptyset$
  - $V ::= V_T \cup V_N$
- P — конечное множество правил вида $A \to \alpha$
  - $A \in V_N$
  - $\alpha \in V^*$
- S — начальный нетерминал грамматики, $S \in V_N$

Пример: арифметические выражения

$$\begin{array}{rcl} E & \to & E + E \,|\, E * E \,|\, N \\ N & \to & 0 \,|\, 1 \,|\, \ldots \,|\, 9 \end{array}$$

Вывод в грамматике

- **Отношение выводимости**:
  $\forall \alpha, \gamma, \delta \in V^*, A \in V_N : A \to \alpha \in P. \gamma A \delta \Rightarrow \gamma \alpha \delta$
- **Вывод** — транизитивное, рефлексивное замыкание отношения выводимости ($\stackrel{*}{\Rightarrow}, \stackrel{+}{\Rightarrow}, \stackrel{k}{\Rightarrow}$)
- **Левосторонний (правосторонний) вывод** — на каждом шаге заменяем самый левый (правый) нетерминал
  - Если не специфицируется, подразумевается левосторонний вывод
- По сути, правила грамматики рассматриваются как правила переписывания

Пример вывода

Построим левосторонний вывод цепочки $2 + 3 * 4$ в грамматике $\langle\{0, 1, \ldots, 9, +, *\}, \{E, N\}, P, E\rangle$

$$\begin{array}{lcl} E & \to & E + N \mid E * N \mid N \\ N & \to & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$E \Rightarrow E * N \Rightarrow E + N * N \Rightarrow N + N * N \Rightarrow 2 + N * N \overset{2}{\Rightarrow} 2 + 3 * 4$$

Существование левостороннего вывода

Теорема

Если для цепочки ω существует некоторый вывод $S \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, то существует и левосторонний вывод для этой цепочки $S \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$

Доказательство.

Докажем более общее утверждение: если существует $A \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, то существует $A \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$, где $A \in V_N$.

Доказываем по индукции по длине вывода k

$k = 1 : A \Rightarrow \omega$ — тривиально.

$k \to k+1 : \lhd A \Rightarrow \alpha \overset{*}{\Rightarrow} \omega.$

Обозначим $\alpha = B_1 B_2 \ldots B_m \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m = \omega; \forall i. B_i \overset{l_i}{\Rightarrow} \omega_i, l_i \leq n$

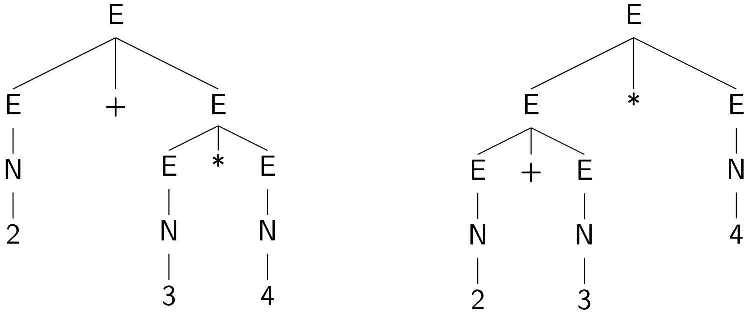
По индукционному предположению $\forall i.\, B_i \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega_i$

$\Rrightarrow: A \Rightarrow B_1 B_2 \ldots B_m \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega_1 B_2 \ldots B_m \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$ — левосторонний вывод $\square$

Единственность вывода

Не всегда (левосторонний) вывод единственен: 2 вывода строки $2 + 3 * 4$

$$
\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & E + E \mid E * E \mid N \\
N & \rightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9
\end{array}
$$



Однозначность грамматики

- Грамматика называется **однозначной**, если для *любого* слова языка существует *единственный* (левосторонний) вывод
- Грамматика называется **неоднозначной**, если *существует* слово языка, такое что для него *существует несколько* (левосторонних) выводов

- По однозначной грамматике можно тривиальным образом построить неоднозначную: продублировать правило
  - $S \to A; A \to a$
  - $S \to A|B; A \to a; B \to a$
- Не существует общего алгоритма преобразования неоднозначной грамматики в однозначную

Примеры однозначной и неоднозначной грамматики

- Неоднозначная грамматика

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E + E \,|\, E * E \,|\, N \\ N & \rightarrow & 0 \,|\, 1 \,|\, \ldots \,|\, 9 \end{array}$$

- Однозначная грамматика

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E + N \,|\, E * N \,|\, N \\ N & \rightarrow & 0 \,|\, 1 \,|\, \ldots \,|\, 9 \end{array}$$

Проверка однозначности грамматики — неразрешимая задача

- Проверка однозначности грамматик сводится к задаче соответствий Поста
- Задача соответствий Поста: Даны списки $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$, где $\forall i.\, a_i \in \Sigma^*$ и $b_i \in \Sigma^*$.Существует ли непустая последовательность $(i_1, \ldots, i_k)$, удовлетворяющая условию $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = b_{i_1} \ldots b_{i_k}$, где $\forall j.\, 1 \le i_j \le n$

Контекстно-свободный язык

- Язык называется **контекстно-свободным**, если для него *существует* контекстно-свободная грамматика
- Язык, задаваемый КС грамматикой $\langle V_T, V_N, P, S\rangle$:
  $\{\omega \in V_T^* | S \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega\}$
- КС язык называется **существенно неоднозначным**, если для него не существует однозначной грамматики

Пустота КС языка

Теорема

Существует алгоритм, определяющий, является ли язык, порождаемый КС грамматикой, пустым

Доказательство.

Для доказательства потребуется следующая лемма □

Лемма

Теорема

Если в данной грамматике выводится некоторая цепочка, то существует цепочка, дерево вывода которой не содержит ветвей длиннее m, где m — количество нетерминалов грамматики

Доказательство.

Рассмотрим дерево вывода цепочки ω. Если в нем есть 2 узла, соответствующих одному нетерминалу A, обозначим их n_1 и n_2. Предположим, n_1 расположен ближе к корню дерева, чем n_2; $A_{n_1} \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha\omega_1\beta$; $A_{n_2} \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma\omega_2\delta$. При этом ω_2 является подцепочкой ω_1. Заменим в изначальном дереве узел n_1 на n_2. Полученное дерево является деревом вывода $\alpha\omega_2\delta$. Повторяем процесс замены одинаковых нетерминалов до тех пор, пока в дереве не останутся только уникальные нетерминалы.
В полученном дереве не может быть ветвей длины большей, чем m. По постороению оно является деревом вывода. □

Алгоритм проверки пустоты КС языка

Доказательство.

Строим коллекцию деревьев, представляющих вывод в грамматике.

1. Инициализируем коллекцию деревом из одного узла S
2. Добавляем в коллекцию дерево, полученное применением единственного правила грамматики из какого-нибудь дерева из коллекции, если его в нем еще нет, и самая длинная ветвь не длиннее m
3. Если после окончания построения коллекции в ней существует дерево, являющееся деревом вывода некоторой цепочки терминалов, значит, язык не пуст

□

Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Продуктивный нетерминал: нетерминал, для которого существует цепочка терминалов, выводимая из него ($\exists \omega \in V_T^*.\, A \overset{*}{\Rightarrow} \omega$)
Непродуктивный нетерминал: нетерминал, не являющийся продуктивным

Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle : L(G) \neq \varnothing$, можно постороить эквивалентную грамматику, каждый нетерминал которой продуктивен

Доказательство.

Удаляем из грамматики все нетерминалы $A : L(A) = \varnothing$, а также правила, использующие их. Полученную грамматику обозначаем G_1.
Докажем, что $L(G) = L(G_1)$. Очевидно, $L(G_1) \subseteq L(G)$.
Докажем от противного, что $L(G) \subseteq L(G_1)$. Предположим, что $\exists \omega \in L(G)$, но $\omega \notin L(G_1)$. Тогда $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_2 \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, где $A \in V_N \setminus V_{N_1}$, но тогда $\exists \gamma \in V_T^*. A \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$. Противоречие $\square$

Упрощение КС грамматики: приведение

Теорема

Для любой КС грамматики, порождающей непустой язык, можно постороить эквивалентную, для каждого нетерминала A которой существует вывод вида $S \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Доказательство.

Будем рассматривать грамматику без непродуктивных нетерминалов $G_1 = \langle V_{N_1}, V_T, P_1, S \rangle$.

Верно: если существует $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_3, \alpha_i \in V^*$, то

$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Строим множество нетерминалов, встречающихся в выводах: добавляем сначала S, потом добавляем нетерминалы, встречающиеся в правой части правил для нетерминалов из множества. Завершаем процесс, когда больше ничего не добавить. Обозначаем полученное множество V_{N_2}, удаляем все правила грамматики, содержащие нетерминалы из $V_{N_1} \setminus V_{N_2}$

Упрощение КС грамматики: приведение

Доказательство.

Получили грамматику $G_2 = \langle V_{N_2}, V_T, P_2, S \rangle$.
Докажем: $L(G_2) = L(G_1)$
$L(G_2) \subseteq L(G_1)$, так как $P_2 \subseteq P_1$
Докажем: $L(G_1) \subseteq L(G_2)$. Пусть $S \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} \omega$. Все нетерминалы, встречающиеся в этом выводе содержатся в V_{N_2}, соответственно используются только правила из $P_2 \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} \omega$
Так как все нетерминалы V_{N_2} продуктивны, то
$S \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

□

Грамматика G_2 называется **приведенной**, ее нетерминалы — **достижимыми**
Недостижимые и непродуктивные нетерминалы называются **бесполезными**

Упрощение КС грамматики: удаление цепных правил

Правило называется **цепным**, если оно имеет вид $A \to B; A, B \in V_N$.

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ можно построить эквивалентную, не содержащую цепных правил

Доказательство.

Строим новое множество правил P_1. Включаем в него все нецепные правила P. Затем добавляем в P_1 правила вида $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, если $A \overset{*}{\Rightarrow} B$, где $A, B \in V_N$ и $B \to \alpha$ — нецепное правило из P.
Замечание: достаточно проверять только цепные выводы длины меньшей, чем V_N
Обозначим полученную грамматику за $G_1 = \langle V_N, V_T, P_1, S\rangle$, докажем $L(G_1) = L(G)$ $\square$

Доказательство.

Очевидно $L(G_1) \subseteq L(G)$

Покажем $L(G) \subseteq L(G_1)$. Пусть $\omega \in L(G)$. Рассмотрим левосторонний вывод $S \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_0 \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_1 \underset{G}{\Rightarrow} \ldots \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_n = \omega$.

Предположим $\alpha_i \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{i+1}$ — первый шаг, выполняемый посредством цепного правила в выводе; $\forall k \in [i..j].\, \alpha_k \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{k+1}$ — посредством цепного правила; $\alpha_j \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{j+1}$ — посредством нецепного правила

Тогда $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = \cdots = |\alpha_j|$, и на каждом шаге заменяется один и тот же нетерминал. Тогда $\alpha_i \underset{G_1}{\Longrightarrow} \alpha_{j+1}$ посредством правила из $P_1 \setminus P \Rightarrow \omega \in L(G_1)$ $\square$

Нормальная форма Хомского

КС грамматика находится в **нормальной форме Хомского**, если все ее правила имеют вид $A \to BC$, или $A \to a$, где $A, B, C \in V_N, a \in V_T$

Теорема

Для любой КС грамматики можно построить эквивалентную в нормальной форме Хомского

1. Удаляем цепные правила. Теперь $\forall A \to B.\, B \in V_T$
2. Заменяем правило $A \to B_1 B_2 \ldots B_n$ на $A \to C_1 C_2 \ldots C_n$, где $C_i = B_i$, если $B_i \in V_N$, или $C_i \to B_i$, если $B_i \in V_T$
3. Заменяем правило $A \to C_1 C_2 \ldots C_n$ на множество правил $A \to C_1 D1, D1 \to C_2 D_2, \ldots, D_{n-3} \to C_{n-2} D_{n-2}, D_{n-2} \to C_{n-1} C_n$

Полученная грамматика находится в НФХ и эквивалентна данной

Пример приведения в НФХ

$G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S \rangle$, где P:

$$\begin{array}{lclclcl} S & \rightarrow & bA & | & aB & & \\ A & \rightarrow & a & | & aS & | & bAA \\ B & \rightarrow & b & | & bS & | & aBB \end{array}$$

- $S \rightarrow bA \Mapsto S \rightarrow C_1A;\ C_1 \rightarrow b$
- $S \rightarrow aB \Mapsto S \rightarrow C_2B;\ C_2 \rightarrow a$
- $A \rightarrow aS \Mapsto A \rightarrow C_3S;\ C_3 \rightarrow a$
- $A \rightarrow bAA \Mapsto A \rightarrow C_4D_1;\ C_4 \rightarrow b;\ D_1 \rightarrow AA$
- $B \rightarrow bS \Mapsto B \rightarrow C_5S;\ C_5 \rightarrow b$
- $B \rightarrow aBB \Mapsto B \rightarrow C_6D_2;\ C_6 \rightarrow a;\ D_2 \rightarrow BB$

Еще немного упростим

$$
\begin{array}{rcllll}
S & \rightarrow & bA & \mid & aB & \\
A & \rightarrow & a & \mid & aS & \mid \quad bAA \\
B & \rightarrow & b & \mid & bS & \mid \quad aBB
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcllll}
S & \rightarrow & C_bA & \mid & C_aB & \\
A & \rightarrow & a & \mid & C_aS & \mid \quad C_bD_1 \\
B & \rightarrow & b & \mid & C_bS & \mid \quad C_aD_2 \\
D_1 & \rightarrow & AA & & & \\
D_2 & \rightarrow & BB & & & \\
C_a & \rightarrow & a & & & \\
C_b & \rightarrow & b & & &
\end{array}
$$

Алгоритм приведения в НФХ

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
   - добавляется новое правило $S_0 \to S, S_0 \notin V_N, S_0$ делается новым стартовым
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
   - новое правило $C_c \to c$
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
   - Если $A \to \varepsilon$, то A — ε-правило
   - Если $A \to X_1 X_2 \dots X_n, \forall i. X_i$ — ε-правило, то A — ε-правило
   - Заменяем $A \to X_1 X_2 \dots X_n$ на множество правил, где каждое из ε-правил опущено во всех возможных комбинациях, удаляем те, которые выводят ε
5. Удалить цепные правила
   - Для каждой пары правил $A \to B; B \to X_1 X_2 \dots X_n$ добавить правило $A \to X_1 X_2 \dots X_n$, цепное правило удалить

Порядок действий при приведении в НФХ

Порядок **важен**!

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
5. Удалить цепные правила

- 1 шаг порождает новые цепные правила, поэтому его нельзя выполнять после 5 шага
- Если выполнить 4 шаг перед 3 шагом, то произойдет экспоненциальный взрыв грамматики
- 5 шаг приводит к квадратичному возрастанию размера грамматики
- Наиболее эффективны порядки $1, 2, 3, 4, 5$ и $1, 3, 4, 5, 2$

Увеличение размера грамматики при нормализации

Порядок **важен**!

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
   - Увеличение на 1
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
   - Увеличение на $|V_T|$ правил
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
   - Увеличение не более, чем в 2 раза (для правил длины $k \geq 3$ порождается $k - 1$ новых правил)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
   - Увеличение не более, чем в 3 раза
5. Удалить цепные правила
   - Увеличение не более, чем в $O(n^2)$ (цепных правил не больше n^2, где n — число нетерминалов)

Итого: **полиномиальное** увеличение размеров грамматики при правильном порядке действий

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \to a$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \to a$?

$A \Rightarrow a \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \omega = a$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \to BC$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \to BC$?

$$A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \exists \omega_1, \omega_2 . \, \omega = \omega_1 \omega_2; B \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1; C \overset{*}{\Rightarrow} \omega_2$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

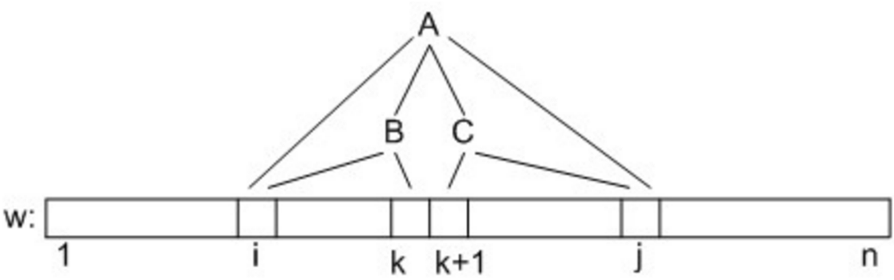
Что значит $A \to BC$?

$A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \exists \omega_1, \omega_2 . \, \omega = \omega_1 \omega_2; B \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1; C \overset{*}{\Rightarrow} \omega_2$

Или $A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \exists k \in [1 \ldots |\omega|]. \, B \overset{*}{\Rightarrow} \omega[1 \ldots k]; C \overset{*}{\Rightarrow} \omega[k+1 \ldots |\omega|]$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

- Алгоритм синтаксического анализа, работающий с грамматиками в НФХ
- Динамическое программирование



CYK

- Дано: строка ω длины n, грамматика $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ в НФХ
- Используем трехмерный массив d булевых значений размером $|V_N| \times n \times n$, $d[A][i][j] = true \Leftrightarrow A \stackrel{*}{\Rightarrow} \omega[i \dots j]$
- Инициализация: $i = j$
  - $d[A][i][i] = true$, если в грамматике есть правило $A \to \omega[i]$
  - $d[A][i][i] = false$, иначе
- Динамика. Предполагаем, d построен для всех нетерминалов и пар $\{(i', j') \,|\, j' - i' < m\}$
  - $d[A][i][j] = \bigvee_{A \to BC} \bigvee_{k=i}^{j-1} d[B][i][k] \wedge d[C][k][j]$
- В конце работы алгоритма в $d[S][0][n]$ записан ответ, выводится ли ω в данной грамматике