Разбиение графов

Чернов Андрей, 371 группа

Разбиение графа (graph partition)

Представление графа G в виде непересекающихся множеств подмножеств его вершин.

Разрез графа (graph-cut)

Разбиение графа на 2 подграфа так, что сумма удаленных ребер наименьшая.

Данная проблема эквивалентна нахождению максимального потока (по теореме Форда-Фалкерсона).

Бисекция (bisection)

Разбиение графа на два подграфа с выполнением следующих условий:

1) Число вершин в подграфах равны* – для графов без весов вершин; сумма весов вершин подграфов равна* – для графов с весами

2) Сумма весов удаленных ребер минимальна

* При невозможности равенства, наиболее близкое к нему положение.

k-разбиение графа (k-partition)

Аналог бисекции для разбиения на k подграфов.

Кластеризация (clusterization)

Разбиение графа на подграфы с учетом некоторой метрики, например модульности (modularity).

Алгоритм Кернигана-Лина (Kernighan-Lin)

В простейшем виде алгоритм предназначен для бисекции графа с 2n вершинами, однако он может быть адаптирован для решения еще некоторого ряда сходных задач.

Алгоритм Кернигана-Лина

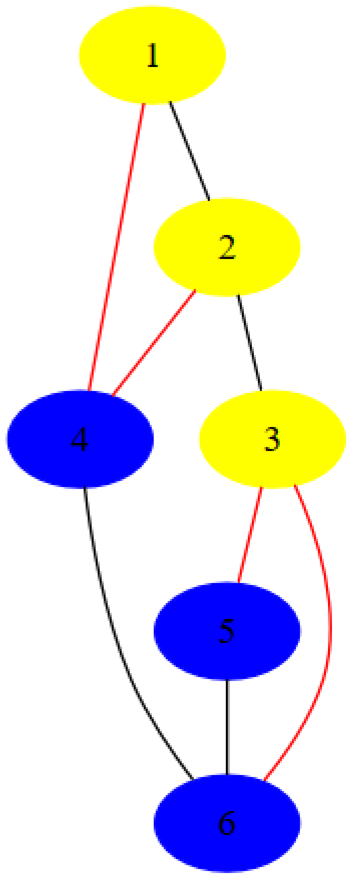
$D(v) = \Sigma e_i - \Sigma e_n$, где e_i – веса убранных инцидентных вершине ребер, e_n – веса не убранных инцидентных вершине ребер.

$g(v_1, v_2) = D(v_1) + D(v_2) - 2*e(v_1, v_2)$, где $e(v_1, v_2)$ – вес ребра между вершинами v_1 и v_2.

$G_k = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$

Алгоритм Кернигана-Лина

1) Выполнить произвольное разбиение графа на 2 равных подграфа.



Алгоритм Кернигана-Лина

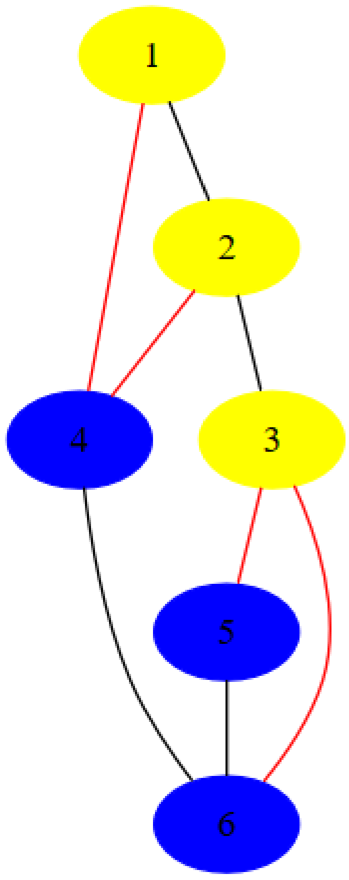
2) Посчитать D(v) для вершин:

- v(1) = 1 - 1 = 0
- v(2) = 1 - 2 = -1
- v(3) = 2 - 1 = 1
- v(4) = 2 - 1 = 1
- v(5) = 1 - 1 = 0
- v(6) = 1 - 2 = -1

3) Выбрать v_1 и v_2 из разных подграфов с максимальной g:

g_1 = g(3, 4) = 1 + 1 – 2*0 = 2

4) Поменять местами 3 и 4, зафиксировать их



Алгоритм Кернигана-Лина

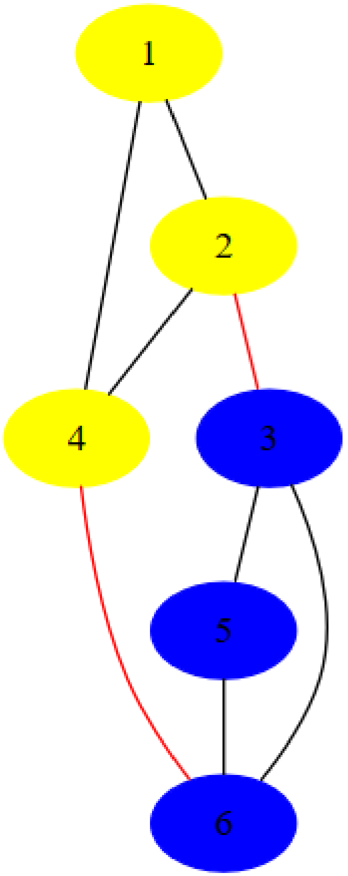
5) Посчитать D(v) для незафиксированных вершин:

- v(1) = 0 - 2 = -2
- v(2) = 1 - 2 = -1
- v(5) = 0 - 2 = 0
- v(6) = 1 - 2 = -1

6) Выбрать v_1 и v_2 из разных подграфов с максимальной g:

$g_2 = g(2, 6) = -1 + (-1) – 2*0 = -2$

7) Поменять местами 2 и 6, зафиксировать их



Алгоритм Кернигана-Лина

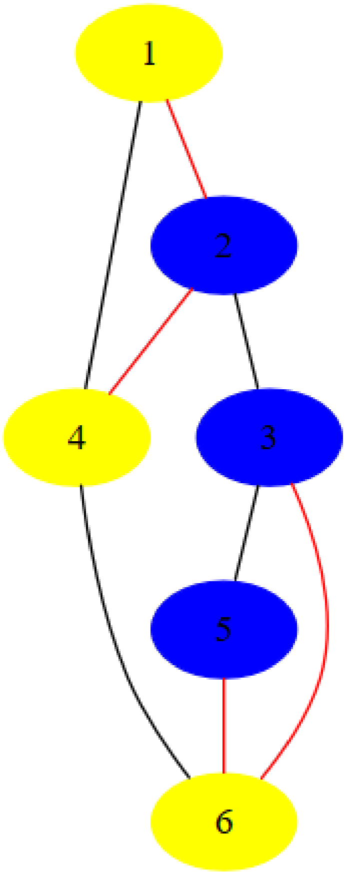
8) Посчитать D(v) для незафиксированных вершин:

- v(1) = 1 - 1 = 0
- v(5) = 1 - 1 = 0

9) Выбрать v_1 и v_2 из разных подграфов с максимальной g:

g_3 = g(1, 5) = 0 + 0 – 2*0 = -2

10) Поменять местами 1 и 5, зафиксировать их

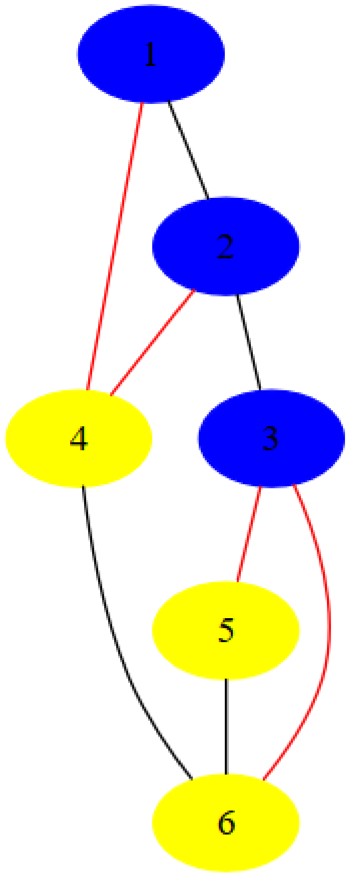


Алгоритм Кернигана-Лина

11) Когда зафиксированных вершин не осталось, посчитать все G:

- $G_1 = g_1 = 2$
- $G_2 = g_1 + g_2 = 2 - 2 = 0$
- $G_3 = g_1 + g_2 + g_3 = 2 - 2 + 0 = 0$

12) Выбрать максимальное G. Так как оно больше 0, то продолжаем шаг, взяв граф полученный после выбранного G.

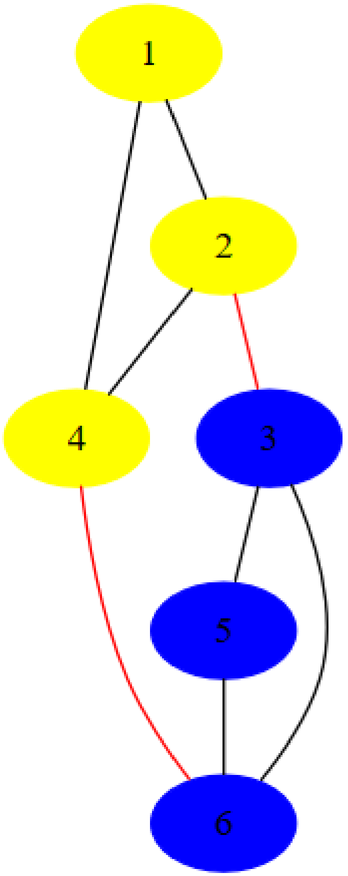


Алгоритм Кернигана-Лина

13) Все вершины снова незафиксированы. Повторяем предыдущие шаги.

…

Останавливаемся либо когда максимальная G<=0, либо разбиение после максимального G то же, что и начальное на данном шаге.



Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин

Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин
  - Добавить «фальшивую» вершину, не соединенную ни с одной вершиной графа

Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин
  - Добавить «фальшивую» вершину, не соединенную ни с одной вершиной графа
- Разбиение графа с весами вершин

Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин
  - Добавить «фальшивую» вершину, не соединенную ни с одной вершиной графа
- Разбиение графа с весами вершин
  - Вершина с весом n превращается в клику из n вершин, связи между ними имеют очень большой вес

Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин
  - Добавить «фальшивую» вершину, не соединенную ни с одной вершиной графа
- Разбиение графа с весами вершин
  - Вершина с весом n превращается в клику из n вершин, связи между ними имеют очень большой вес
- Несбалансированное разбиение графа

Модификации алгоритма Кернигана-Лина

- Разбиение графов с нечетным числом вершин
  - Добавить «фальшивую» вершину, не соединенную ни с одной вершиной графа
- Разбиение графа с весами вершин
  - Вершина с весом n превращается в клику из n вершин, связи между ними имеют очень большой вес
- Несбалансированное разбиение графа
  - Добавить «фальшивые» соединенные вершины с большими весами ребер между ними

Алгоритма Кернигана-Лина для k-разбиения

1. k – степень двойки
    - Рекурсивно разбиваем каждый из подграфов, пока их число не достигнет необходимого

Алгоритма Кернигана-Лина для k-разбиения

1. k – степень двойки
   - Рекурсивно разбиваем каждый из подграфов, пока их число не достигнет необходимого
2. k – не степень двойки
   - Производим случайное разбиение графа на k подграфов. Далее, применяем обычный алгоритм Кернигана-Лина для всех пар.

Параллельный алгоритм Кернигана-Лина

Шаги, выполняемые в параллели:

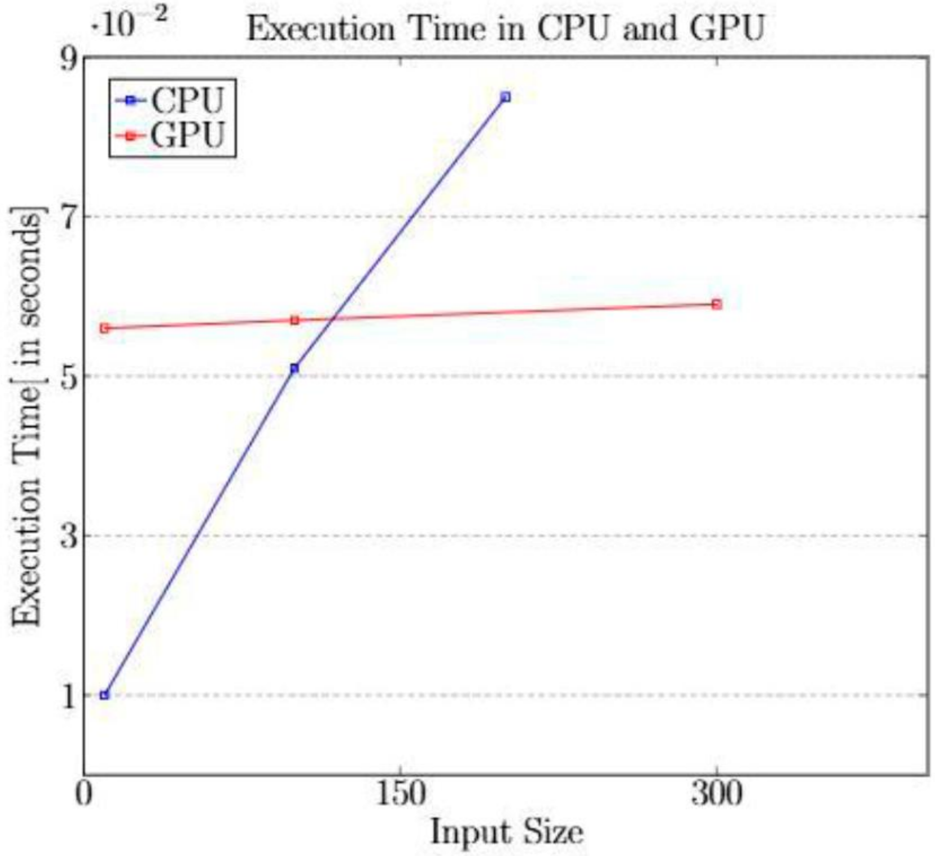
- Просчет V для незафиксированных вершин
- Просчет g для всех незафиксированных фершин из разных подграфов

Шаги, выполняемые последовательно:

- Начальное разбиение
- Выбор максимального G и переход на следующий шаг

Сравнение алгоритма на CPU и GPU

Time Complexity of KL algorithm		
Input Size	Execution Time in CPU (seconds)	Execution Time In GPU (seconds)
10*10	0.01	0.056
100*100	0.076	0.058
300*300	0.828	0.059
500*500	2.852	0.059
800*800	10.003	0.060
1000*1000	18.76	0.060
2000*2000	24.36	0.062



A. K. Rajan, D. Bhaiya, VLSI Partitioning using Parallel Kernighan-Lin Algorithm

Другие варианты

Другие варианты

(1) **Until** graph is small enough
    graph := coarsen(graph)

(2) Partition graph

(3) **Until** graph = original graph
    graph := uncoarsen(graph)
    partition := uncoarsen(partition)
    locally refine partition if desired

Y. Wang, J. Owens, Large-Scale Graph Processing Algorithms on the GPU

Укрупнение графа

Укрупнение графа $G = (V, E)$ с весами ребер ω и весами вершин ζ – отображение $\pi: G \to G'$ такое, что:

1. $G' = (V', E')$ с весами ребер ω' и весами вершин ζ':
2. $\pi(V) = V'$
3. $\pi(E) = \{\{\pi(u), \pi(v)\} \mid \{u, v\} \in E\} = E'$
4. Для $v' \in V'$: $\zeta'(v') = \sum_{v \in V,\, \pi(v) = v'} \zeta(v)$
5. Для $e' \in E'$: $\omega'(e') = \sum_{\substack{\{u, v\} \in E, \\ \{\pi(u), \pi(v)\} = e'}} \omega(\{u, v\})$

Параллельный алгоритм укрупнения

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	7	2	4	7	4	15	4	2	15	9

Параллельный алгоритм укрупнения

v	2	8	3	5	7	1	4	10	6	9
μ	2	2	4	4	4	7	7	9	15	15

Параллельный алгоритм укрупнения

v	2	8	3	5	7	1	4	10	6	9
μ	2	2	4	4	4	7	7	9	15	15
i	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0

Параллельный алгоритм укрупнения

v	2	8	3	5	7	1	4	10	6	9
μ	2	2	4	4	4	7	7	9	15	15
i	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0

v’	1’	2’	3’	4’	5’
π^{-1}	1	3	6	8	9

Параллельный алгоритм укрупнения

Algorithm 2 Parallel coarsening algorithm on the GPU, given a graph G with $V = (1, 2, \ldots, |V|)$ and a map $\mu : V \to \mathbf{N}$, this algorithm creates a graph coarsening π, G' compatible with μ.

$\rho \leftarrow V$
$(\rho, \mu) \leftarrow$ **parallel_sort_by_key**(ρ, μ)
$\mu \leftarrow$ **parallel_adjacent_not_equal**(μ)
$\pi^{-1} \leftarrow$ **parallel_copy_index_if_nonzero**(μ)
$V' \leftarrow (1, 2, \ldots, |\pi^{-1}|)$
append$(\pi^{-1}, |V| + 1)$
$\mu \leftarrow$ **parallel_inclusive_scan**(μ)
$\pi \leftarrow$ **parallel_scatter**(ρ, μ)
for $v' \in V'$ **parallel do** {Sum vertex weights.}
    $\zeta'(v') \leftarrow 0$
    for $i = \pi^{-1}(v')$ **to** $\pi^{-1}(v' + 1) - 1$ **do**
        $\zeta'(v') \leftarrow \zeta'(v') + \zeta(\rho(i))$
for $v' \in V'$ **parallel do** {Copy neighbours.}
    $V'^{\omega'}_{v'} \leftarrow \emptyset$
    for $i = \pi^{-1}(v')$ **to** $\pi^{-1}(v' + 1) - 1$ **do**
        for $(u, \omega) \in V^{\omega}_{\rho(i)}$ **do**
            append$(V'^{\omega'}_{v'}, (\pi(u), \omega))$
for $v' \in V'$ **parallel do** {Compress neighbours.}
    $V'^{\omega'}_{v'} \leftarrow$ **compress_neighbours**$(V'^{\omega'}_{v'})$

B. O. Fagginger Auer, R. H. Bisseling, Graph Coarsening and Clustering on the GPU

Параллельный алгоритм укрупнения

Для новых вершин v’ вычисляем их вес – складываем веса вершин, из которых они состоят.

Для всех вершин v и их соседей u составляем список соседей, состоящий из пар (π(u), ω), добавляя его в v’.

Для укрупненного графа и вершины v’ сжимаем список соседей, у которых первый элемент пары совпадает:

$(u_1, \omega_1), (u_1, \omega_2), (u_1, \omega_3), \ldots \rightarrow (u_1, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots)$

Разбиение укрупненного графа

У укрупненного графа есть веса вершин – алгоритм Кернигана-Лина не подойдет.

Разбиение укрупненного графа

У укрупненного графа есть веса вершин – алгоритм Кернигана-Лина не подойдет.

Использовать другой алгоритм разбиения:

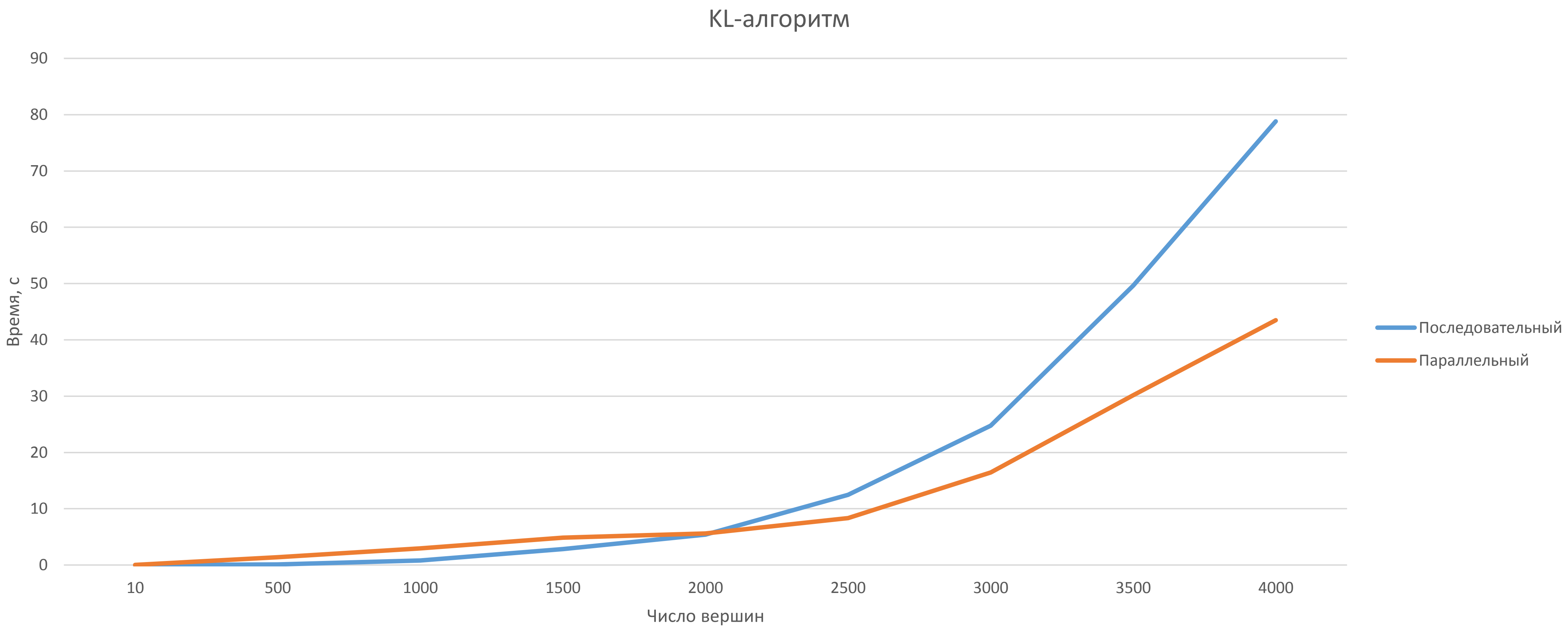
1. Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса
2. Алгоритм спектрального разбиения
3. …

Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (Fiduccia-Mattheyses)

Вводим критерий баланса.

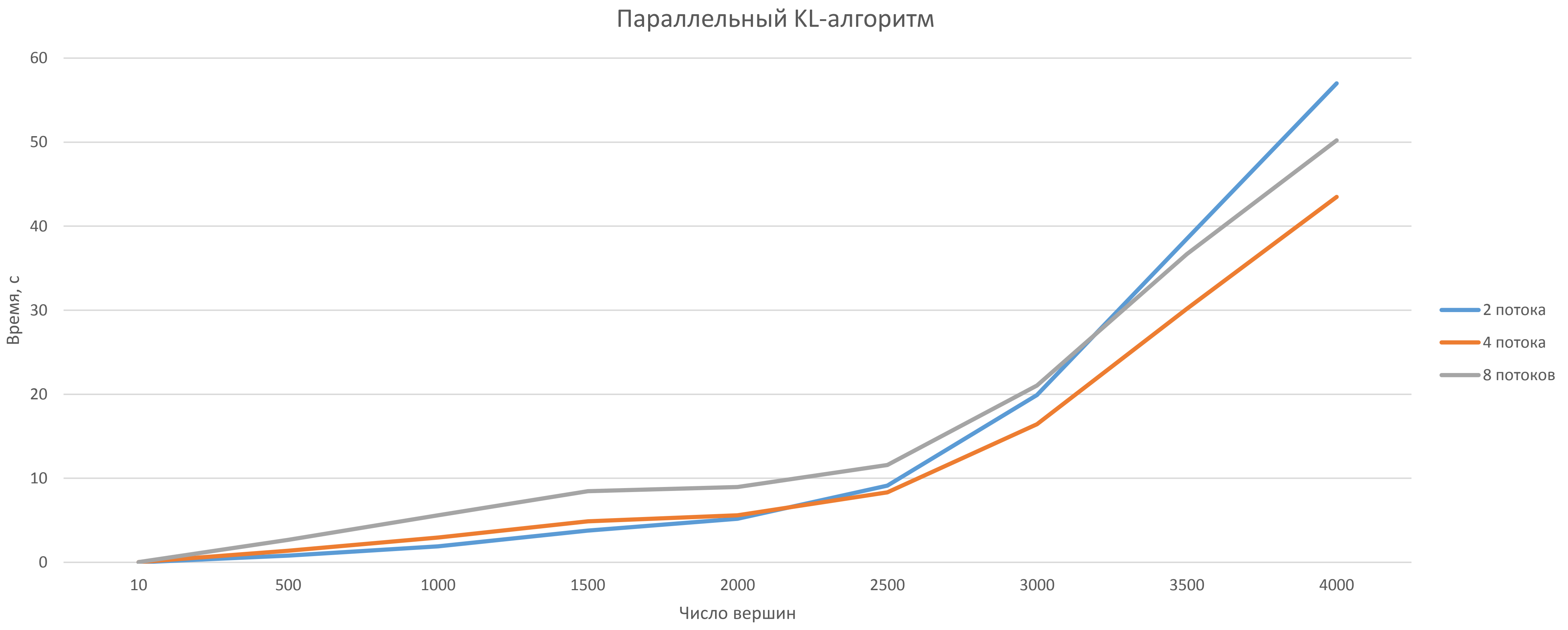
Вместо замены используем перемещение одной вершины в противоположный подграф – выполняем, если после этого будет выполняться условие баланса. Какую ячейку передвигать выбираем по максимальной D(V).

Результаты

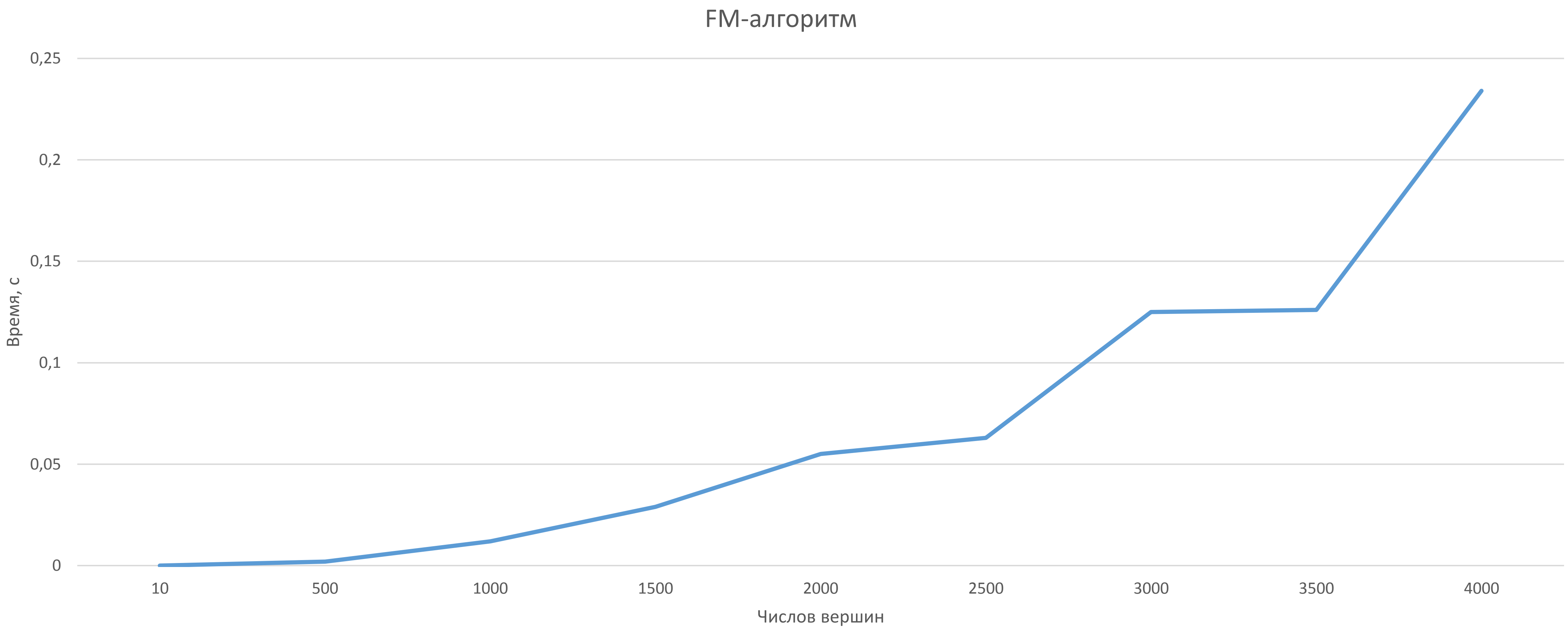


KL-алгоритм
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Время, с
10
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Число вершин
Последовательный
Параллельный

Результаты


Параллельный KL-алгоритм
60
50
40
30
20
10
0
Время, с
10
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Число вершин
2 потока
4 потока
8 потоков

Результаты



FM-алгоритм
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
Время, с
10
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Числов вершин

Список литературы

- B. W. Kernighan, S. Lin, An efficient heuristic procedure for partitioning graphs
- C. M. Fiduccia, R. M. Mattheyses, A Linear-Time Heuristic for Improving Network Partitions
- B. O. Fagginger Auer, R. H. Bisseling, Graph Coarsening and Clustering on the GPU
- B. Hendrickson, R. Leland, A multilevel algorithm for partitioning graphs
- A. K. Rajan, D. Bhaiya, VLSI Partitioning using Parallel Kernighan-Lin Algorithm
- Y. Wang, J. Owens, Large-Scale Graph Processing Algorithms on the GPU