Теория автоматов и формальных языков

Регулярные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

сентября 2016г.

Регулярная грамматика

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to \omega B$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to B\omega$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Регулярная грамматика

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to \omega B$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to B\omega$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Теорема

Пусть L — формальный язык.
$\exists G_r$ — праволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_r) \Leftrightarrow \exists G_l$ — леволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_l)$

Регулярная грамматика

Праволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to \omega B$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Леволинейная грамматика — грамматика, все правила которой имеют следующий вид:

- $A \to B\omega$ или $A \to \omega$, где $A, B \in V_N, \omega \in V^*$

Теорема

Пусть L — формальный язык.
$\exists G_r$ — праволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_r) \Leftrightarrow \exists G_l$ — леволинейная грамматика, т.ч. $L = L(G_l)$

Регулярная грамматика — праволинейная или леволинейная грамматика

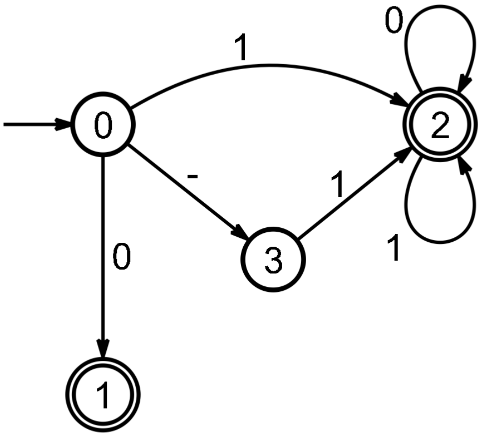
Конечный автомат

Конечный автомат — $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

- $Q \neq \emptyset$ — конечное множество состояний
- Σ — Конечный входной алфавит
- δ — отображение типа $Q \times \Sigma \to Q$
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний

Пример конечного автомата

$Q = \{0, 1, 2, 3\}, \Sigma = \{0, 1, -\}, q_0 = 0, F = \{1, 2\}$
$\delta(0, 0) = 1; \delta(0, 1) = 2; \delta(0, -) = 3; \delta(3, 1) = 2; \delta(2, 0) = 2; \delta(2, 1) = 2$



Распознавание слова конечным автоматом

- Обобщаем функцию перехода:
  - $\delta'(q, \varepsilon) = q$
  - $\delta'(q, xa) = \delta(\delta'(q, x), a)$, где $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$
- Цепочка ω **распознается** конечным автоматом $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, если $\exists p \in P . \delta'(q, \omega) = p$
- **Язык, распознаваемый конечным автоматом**: $\{\omega \in \Sigma^* \mid \exists p \in F . \delta'(q_0, \omega) = p\}$

Минимальный конечный автомат

- Конечные автоматы A_1 и A_2 **эквивалентны**, если распознают один и тот же язык
- **Минимальный конечный автомат** — автомат, имеющий наименьшее число состояний, распознающий тот же язык, что и данный

Классы эквивалентности

Отношение эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение

- $xRx; xRy \Leftrightarrow yRx; xRy, yRz \Rightarrow xRz$

Теорема

$\forall R$ — отношение эквивалентности на множестве S
Можно разбить S на k непересекающихся подмножеств $I_1 \ldots I_k$, т.ч.
$aRb \Leftrightarrow a, b \in I_j$

Множества $I_1 \ldots I_k$ называются **классами эквивалентности**

Эквивалентные состояния

- $\omega \in \Sigma^*$ различает состояния q_i и q_j, если $\delta'(q_i, \omega) = t_1, \delta'(q_j, \omega) = t_2 \Rightarrow (t_1 \notin F \Leftrightarrow t_2 \in F)$
- q_i и q_j **эквивалентны** $(q_i \sim q_j)$, если $\forall \omega \in \Sigma^*. \delta'(q_i, \omega) = t_1, \delta'(q_j, \omega) = t_2 \Rightarrow (t_1 \in F \Leftrightarrow t_2 \in F)$
  - Является отношением эквивалентности

Теорема

$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle, p_1, p_2, q_1, q_2 \in Q, q_i = \delta(p_i, c)$. $\omega \in \Sigma^*$ различает q_1 и q_2. Тогда $c\omega$ различает p_1 и p_2