



Построение представления группы по машине Тьюринга

Максим Шамрай

JetBrains Research, Programming Languages and Tools Lab
Санкт-Петербургский Государственный Университет

14.12.2019

$$R \subset CF \subset Conj \subseteq Bool$$

- Кроме всем известной иерархии Хомского, есть довольно много классов формальных языков
- И не все они имеют свою лемму о накачке
- В последнее время все чаще прибегают к смежным дисциплинам для исследования языков
- Мы предлагаем построить группу по языку, чтобы в дальнейшем можно было применять аппарат теории групп для исследований

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

Связь с теорией групп

Пусть Σ — конечный алфавит, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\epsilon, a, a^2, b, ab, a^2b\} = S_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = C_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

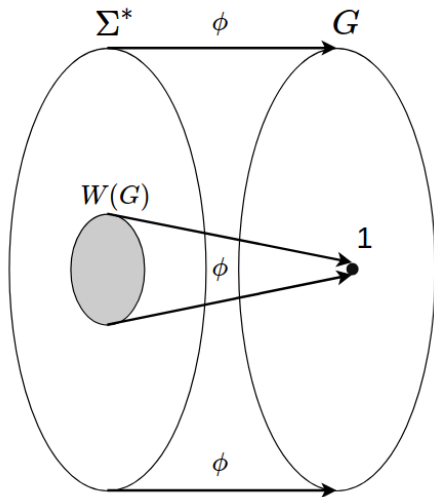
Проблема слов

$$G = \langle A \mid R \rangle, \Sigma = A \cup A^{-1}$$

$$\phi : \Sigma^* \rightarrow G$$

$$W(G) = \phi^{-1}(1)$$

- $W(G)$ – регулярна $\iff G$ – конечна (Anisimov)
- $W(G)$ – контекстно-свободна $\iff \exists H < G$ – конечного индекса (Muller–Schupp)



Цель: Создать инструмент, с помощью которого можно будет смотреть на формальные языки как на группы

Задачи:

- 1 Реализовать алгоритм построения группы по машине Тьюринга
- 2 Доказать корректность алгоритма

Построение группы (0)

Mark V. Sapir, Jean-Camille Birget and Eliyahu Rips "Isoperimetric and Isodiametric Functions of Groups" (2002)

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M , тогда существует конечно представленная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \rightarrow (A \cup A^{-1})^+$ такое что:

$$u \in L \iff K(u) = 1_G$$

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M' , удовлетворяющей теореме 2, существует S -машина, которая симулирует M'

Построение группы (1)

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует симметричная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте
- Добавляется лента, алфавитом которой являются команды

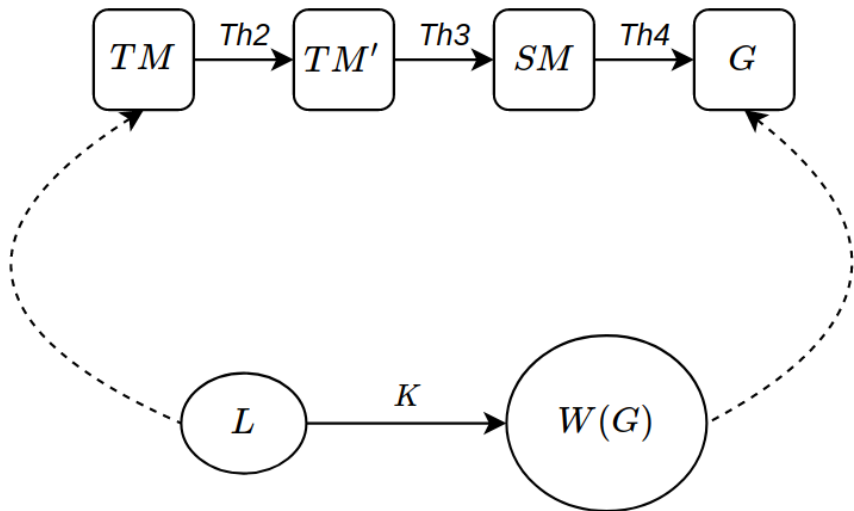
Теорема 3

Для любой машины Тьюринга M' , удовлетворяющей теореме 2, существует S -машина, которая симулирует M'

Теорема 4

Для любой S -машины, удовлетворяющей теореме 3, существует соответствующая конечно представленная группа

Построение группы (2)



Результаты и дальнейшие действия

- Реализован алгоритм
- Проведен ряд экспериментов
- Найдена более свежая статья
- Рассматривается возможность формальной верификации алгоритма