Содержание

1 Введение

В данной работе обобщается метод Лагерра на методы более высокого порядка. В главе 2 описывается класс методов и доказывается глобальная сходимость для полиномов с вещественными нулями. В главе 3 обсуждается метод 4 порядка нашего класса. В 4 главе - метод порядка 3.303.

2 Класс глобально сходящихся методов

Мы ищем корни многочлена $f(x)$ степени n только с действительными корнями $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Для действительных чисел $x_1, \cdots x_m$, которые не являются корнями уравнения, и заданных неотрицательных целых чисел $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ выполняется условие: $r = (\gamma_1 + 1) + (\gamma_2 + 1) + \cdots + (\gamma_{m-1} + 1) + \gamma_m \leqq n$. C - класс всех многочленов степени не выше n с действительными корнями $\rho_1, \cdots, \rho_l, l \leqq n$. Зададим условие при котором многочлен $P(x)$ из класса C, будет находиться близко к многочлену $f(x)$ и его корням:

$$f^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad \text{и} \quad \text{для каждого } i, k = 0, 1, 2, \cdots, \gamma_i \tag{2.1}$$

Перепишем (2.1), используя обозначения Мейли. Для этого определим:

$$S_1(f, x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{2.2}$$

и для $k \geqq 2$

$$S_k(f, x) = -\frac{d}{dx} \frac{S_{k-1}(f, x)}{k - 1} \qquad (2.3$$

Обозначим $S_k(f, x_i)$ при $1 \leqq k \leqq \gamma_i$ как $S_{k,i}$. Определим также:

$$F_i = F(x_i) = \frac{f(x_i)}{f(x_m)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.4}$$

Пусть разность i-го приближения и последнего равна: $\Delta_i = x_i - x_m, i = 1, 2, \cdots, m$. А обратное соотношение корня и приближения равно $\lambda_j = 1/(x_m - \rho_j), j = 1, 2, \cdots, n$, где $\rho_j, j = 1, 2, \cdots, n$, - неопределенные корни многочлена из C.

Также можно переписать уравнение (2.1) в виде:

$$\prod_{j=1}^{n} (\Delta_i \lambda_j + 1) = F_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m - 1 \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda_j}{(1 + \Delta_i \lambda_j)} \right]^k = S_{k,i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad k = 1, 2, \cdots, \gamma_i \tag{2.6}$$

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_m$ - это начальный набор приближений к корню $f(x)$, и $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ - фиксированы, тогда процедура итераций следующая:

- (1) Если $f'(x_m)/f(x_m)$ неотрицательно, выберите решение (2.5)-(2.6) так, чтобы λ_1 был максимальным.
- (2) Если $f'(x_m)/f(x_m)$ отрицательно, выберите решение (2.5)-(2.6) так, чтобы λ_1 был минимальным.
- (3) Для λ_1^* из (1) или (2) используйте $\lambda_1^* = 1/(x_m - \rho_1)$ для нахождения $x_{m+1} = \rho_1 = x_m - 1/\lambda_1^*$. x_{m+1} - это наше следующее приближение к корню $f(x)$.
- (4) Повторяйте для $j = 1, 2, \cdots$, используя $x_{m+j}, \cdots, x_{j+1}$, а не $x_m, \cdots, x_1$, для вычисления x_{m+j+1}.

Решение (2.5)-(2.6) с минимальным или максимальным λ_1, если учесть, что p_j - это число повторений конкретного значения λ_j, то (2.5)-(2.6) переписываются в виде:

$$\prod_{j=1}^{r} (\Delta_i \lambda_j + 1)^{p_j} = F_1, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{r} p_j \left[\frac{\lambda_j}{(1 + \Delta_i \lambda_j)} \right]^k = S_{k,1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad k = 1, 2, \cdots, \gamma_i \tag{2.8}$$

где $\sum_{j=1}^{r} p_j = n$. Предполагая, что $p_1 = 1$:

$$1 + \sum_{j=2}^{r} p_j = n \tag{2.9}$$

Если мы подбираем $f(x)$ и его первые две производные при некотором x_1, то есть если $m = 1$ и $\gamma_1 = 2$, то наш метод - это метод Лагерра.

Обсудим порядок сходимости. Если $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ фиксированы при $\gamma_m \geqq 2$ и $\gamma_m \geqq \gamma_{m-1} \geqq \cdots \geqq \gamma_1 \geqq 0$ и если r_1 - простой нуль многочлена $f(x)$ с единственными вещественными нулями, то порядок сходимости метода из нашего класса не меньше p, где p - положительный вещественный корень из

$$z^m - (\gamma_m + 1) z^{m-1} - (\gamma_{m-1} + 1) z^{m-2} - \cdots - (\gamma_1 + 1) = 0 \tag{2.10}$$

3 Метод четвертого порядка

Рассмотрим метод в нашем классе с $m = 1$ и $\gamma_1 = 3$, то есть метод, соответствующий функции $f(x)$ и её первым трём производным в точке x_1. Сначала отметим, что, учитывая $\gamma_m = \gamma_1 = 3$ и $r = 3$, (2.7)-(2.9) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
1 + p_2 + p_3 &= n, \\
\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 &= S_{1,1} \equiv S_1, \\
\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 &= S_{2,1} \equiv S_2, \\
\lambda_1^3 + p_2\lambda_2^3 + p_3\lambda_3^3 &= S_{3,1} \equiv S_3
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Полагая $p_2 = 1$ и $p_3 = q = n-2$, мы можем решить (3.1). Если мы определим $w_j = \lambda_j - S_1/n$ $j = 1, 2, 3$, (3.1) эквивалентно

$$
\begin{aligned}
w_1 + w_2 + qw_3 &= 0, \\
w_1^2 + w_2^2 + qw_3^2 &= B, \\
w_1^3 + w_2^3 + qw_3^3 &= C
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $C = S_3 - 3S_2S_1/n + 2S_1^3/n^2$ и $B = S_2 - S_1^2/n$. Определим $L = B/(n \cdot (n-1))$ и $M = C/(n \cdot (n-1) \cdot (n-2))$, а также $z = -(n-1) \pm w_1/\sqrt{L}$ и $v = 1 \pm w_3/\sqrt{L}$, где знак $\pm$ согласуется со знаком S_1.

Выражая результаты через v и z, мы получаем:

$$v^3 - 3v^2 + 2\left[1 - \frac{M}{(\pm L\sqrt{L})}\right] = 0 \tag{3.3}$$

$$2z^2 + 2nz + 2(n-2)vz + (n-2)(n-1)v^2 = 0 \tag{3.4}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{S_1}{n} \pm (n-1)\sqrt{L} \pm z\sqrt{L} \tag{3.5}$$

Чтобы найти λ_1 для нашего алгоритма, нам нужно решить кубическое уравнение (3.3) для v, квадратное уравнение (3.4) для z и использовать (3.5) для нахождения λ_1.

Для многочлена $f(x)$ с корнями степени $n > 3$, подходящий λ_1 соответствует выбору наименьшего неотрицательного корня (3.3) и наибольшего соответствующего z в (3.4). Эти действительные корни существуют.

4 Метод порядка 3.303

В данном разделе рассматривается метод с $m = 2, \gamma_2 = 2$ и $\gamma_1 = 0$. Рассмотрим общие итерации из главы 2, предполагая, что $f(x)$ имеет только вещественные корни и $f(x_i) \neq 0, i = 1, 2, \cdots, m$, рассмотрим следующие предположения:

1. (4.1) $x_1, x_2, \cdots, x_m$ таковы, что интервал, образованный $x_1, x_2, \cdots, x_m$, не содержит корней $f(x)$
2. (4.2) Если $S_{m,1} > 0$, то $x_1, x_2, \cdots, x_m$ упорядочены по убыванию, и если $S_{m,1} < 0$, то $x_1, x_2, \cdots, x_m$ упорядочены по возрастанию.

Тогда на основе этого получаем:

$$1 + \Delta_i \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{4.3}$$

Если $m = 2, \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 0$, допустим, что $f(x)$ не имеет корней между x_1 и x_2 как в (4.1). Тогда (2.6)-(2.8) и (4.3) принимают вид

$$1 + p_2 + p_3 = n, \tag{4.4}$$

$$\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 = S_{1,2} \equiv S_1, \tag{4.5}$$

$$\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 = S_{2,2} \equiv S_2, \tag{4.6}$$

$$(1 + \Delta_1\lambda_1)(1 + \Delta_1\lambda_2)^{p_2}(1 + \Delta_1\lambda_3)^{p_3} = F_1, \tag{4.7}$$

$$1 + \Delta_1\lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4.8}$$

При $m = 2, \gamma_2 = 2, \gamma_1 = 0$ и при условии (4.1) решение задачи (4.4)-(4.7) удовлетворяет с $p_2 = 1, p_3 = n - 2 = q$. Получаем:

$$\begin{gathered} w_1 + w_2 + qw_3 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 + qw_3^2 = B \\ (\Delta_1 w_1 + u)(\Delta_1 w_2 + u)(\Delta_1 w_3 + u)^q = F_1 \end{gathered} \tag{4.9}$$

где $B = S_2 - S_1^2/n$, и $u = 1 + \Delta_1 S_1/n$. Удобно ввести обозначения $L = B/(n \cdot (n-1))$, $L_1 = \Delta_1^2 L$, $D = (n-1) + u/\sqrt{L_1}$ и $E = -1 + u/\sqrt{L_1}$, и положить $z = -(n-1) \pm w_1/\sqrt{L}$, а также $v = 1 \pm w_3/\sqrt{L}$, где $\pm$ согласуется со знаком S_1 и Δ_1. Решая (4.9) для w_3 и затем w_1, и выражая наши результаты через v и z, мы получаем:

$$\left(\sqrt{L_1}\right)^n \left[(n-2)(n-1)v^2 - 2(n-2)Dv + 2DE\right](v+E)^{n-2} - 2F_1 = 0 \tag{4.10}$$

$$2z^2 + 2nz + 2(n-2)vz + (n-2)(n-1)v^2 = 0 \tag{4.11}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{S_{1,2}}{n} \pm (n-1)\sqrt{L} \pm z\sqrt{L} \tag{4.12}$$

Чтобы определить λ_1 для нашего алгоритма, мы должны решить уравнение n-ой степени (4.10), квадратное уравнение (4.11) для z, и использовать (4.12), чтобы найти λ_1.

Для полинома $f(x)$ степени $n > 3$, имеющего только вещественные корни, если выполнены условия (4.1) и (4.2), то λ_1, подходящее для нашего алгоритма, соответствует выбору наименьшего неотрицательного корня (4.10) и наибольшего корня (4.11).

Мы отмечаем, не предоставляя деталей, что если $n = 3$, то любой выбор корней в (4.10)-(4.11) приведет к λ_1, такому что на шаге (3) нашего алгоритма точно выбирается корень $f(x)$.

Теперь (4.10) - это уравнение n-го порядка относительно v, и сложно или невозможно найти явную формулу для его решения. Однако уравнение, эквивалентное (4.10), можно эффективно решить методом итерации Коши. Для описания этого мы переписываем (4.10) как

$$s(v) = (n-2)(n-1)v^2 - 2(n-1)Dv - 2(v+E)\left[D - \frac{F_1}{\sqrt{L_1}\left(\sqrt{L_1}v + \sqrt{L_1}E\right)^{n-1}}\right] = 0 \qquad (4.13)$$

Мы можем найти первый неотрицательный корень $\bar{v}$ уравнения (4.10), найдя первый неотрицательный корень уравнения (4.14) методом итерации Коши. Если у $f(x)$ есть только вещественные корни, то можно показать, что $s'(v)s''(v) < 0$ для $0 < v \leqq \bar{v}$. Таким образом, начиная с $v = 0$, итерация Коши гарантированно сходится к $\bar{v}$.

5 Заключение

В данной работе был обобщен метод Лагерра на методы более высокого порядка, которые обладают теми же желательными свойствами глобальной сходимости, что и метод Лагерра для полиномов с вещественными нулями. Был описан подход к выводу метода Лагерра, который используется для получения многих обобщений метода Лагерра.