Уравнение малых поперечных колебаний стержня

Рассмотрим уравнение малых поперечных колебаний стержня

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(R^2\rho\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(ER^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f.$$

Предположим, что все коэффициенты постоянны, а источник f отсутствует. Тогда уравнение малых поперечных колебаний стержня имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-R^2\rho\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+ER^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{1}$$

Рассмотрим компактную схему, которая аппроксимирует уравнение (1) по шаблону, (изображенном на Рис. 1)

$$d(u_{m+2}^n+u_{m-2}^n)+a(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1}+u_{m-1}^{n-1})+$$
$$+c(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n)+bu_m^n+u_m^{n-1}+u_m^{n+1}=0, \tag{2}$$

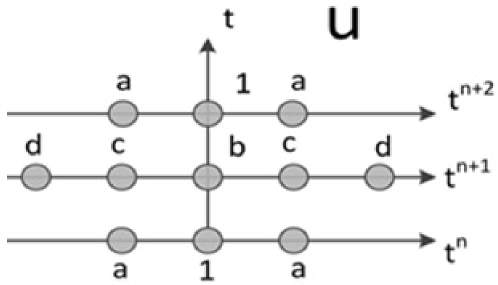

Рис. 1

где коэффициенты $a=\frac{3}{12\mu+4}-\frac{1}{2}$, $b=\frac{9\nu}{3\mu+1}-2$, $c=1-\frac{12\nu+3}{6\mu+2}$, $d=\frac{3\nu}{6\mu+2}$ и безразмерные параметры $\nu=\frac{C\tau^2}{h^4}$, $\mu=\frac{D}{h^2}$, $D=R^2$, $C=\frac{ER^2}{\rho}$.

После Z-преобразования уравнения (2), найдем фундаментальную систему решений. Получаем характеристическое уравнение четвертого порядка

$$dz\lambda^4+(a(z^2+1)+cz)\lambda^3+(z^2+1+bz)\lambda^2+(a(z^2+1)+cz)\lambda+dz=0.$$

Делим обе его части на λ^2 для того, чтобы свести к возвратному уравнению.

$$dz\lambda^2+(a(z^2+1)+cz)\lambda+(z^2+1+bz)+(a(z^2+1)+cz)\lambda^{-1}+dz\lambda^{-2}=$$
$$=dz(\lambda^2+\lambda^{-2})+(a(z^2+1)+cz)(\lambda+\lambda^{-1})+(z^2+1+bz)=$$
$$=dz(\lambda+\lambda^{-1})^2+(a(z^2+1)+cz)(\lambda+\lambda^{-1})+(z^2+1+bz-2dz)=0.$$

Поделим также получившееся уравнение на z^2.

$$dz^{-1}(\lambda+\lambda^{-1})^2+(a(1+z^{-2})+cz^{-1})(\lambda+\lambda^{-1})+(1+z^{-2}+bz^{-1}-2dz^{-1})=0.$$

Сделаем замены $z^{-1}=\omega$ и $\lambda+\lambda^{-1}=\eta$:

$$d\omega\eta^2+(a(1+\omega^2)+c\omega)\eta+(1+\omega^2+b\omega-2d\omega)=0,$$
$$d\omega\eta^2+(a(1+\omega^2)+c\omega)\eta+(\omega^2+(b-2d)\omega+1)=0,$$

$$\eta^2+\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{d\omega}\eta+\frac{\omega^2+(b-2d)\omega+1}{d\omega}=0. \qquad (3)$$

Корни уравнения (3) имеют вид

$$\eta_{1,2}(\omega)=-\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{d\omega}\right)^2-4\frac{\omega^2+(b-2d)\omega+1}{d\omega}}. \qquad (4)$$

Разложение в ряд Тейлора функции $\boldsymbol{\eta_{1,2}(\omega)}$

При $\omega\to 0$ справедливы асимптотические оценки

$$\eta_{1,2}(\omega)=-\frac{a}{2d\omega}-\frac{c}{2d}-\frac{a\omega}{2d}\\ \pm\frac{a}{2d\omega}\left(1+\left(\frac{c}{a}-\frac{2d}{a^2}\right)\omega+\left(\frac{4d^2}{a^2}-\frac{2d^2}{a^4}-\frac{2bd}{a^2}+\frac{2cd}{a^3}+\frac{4cd^2}{a^3}\right)\omega^2+\underline{O}(\omega^2)\right).$$

$$\eta_1(\omega)=-\frac{1}{a}+\left(\frac{2d}{a}-\frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}-\frac{d}{a^3}\right)\omega+\underline{O}(\omega^2).$$

$$\eta_2(\omega)=-\frac{a}{d\omega}+\frac{1}{a}-\frac{c}{d}+\left(-\frac{1}{ad}-\frac{2d}{a}+\frac{b}{a}-\frac{c}{a^2}+\frac{d}{a^3}\right)\omega+\underline{O}(\omega^2).$$

Здесь и далее предполагаем, что ветвь $\eta_1(\omega)$ берется из $\eta_{1,2}(\omega)$ со знаком плюс при вещественных ω, в то время как $\eta_2(\omega)$ – со знаком минус. Функция $\eta_1(\omega)$ стремится к константе, а $\eta_2(\omega)$ – к бесконечности при $\omega\to 0$.

В уравнении (4) преобразуем выражение под квадратным корнем:

$$\eta_{1,2}(\omega)=-\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a(1+\omega^2)+c\omega)^2}{d^2\omega^2}-\frac{d\omega(4\omega^2+4(b-2d)\omega+4)}{d^2\omega^2}},$$

$$\eta_{1,2}(\omega)=-\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a(1+\omega^2)+c\omega)^2-d\omega(4\omega^2+4(b-2d)\omega+4)}{d^2\omega^2}}.$$

Под квадратным корнем раскроем скобки:

$$\eta_{1,2}(\omega)=-\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega}\\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(1+\omega^2)^2+2ac(1+\omega^2)\omega+c^2\omega^2-4d\omega^3-4(bd-2d^2)\omega^2-4d\omega}{d^2\omega^2}},$$

$$\eta_{1,2}(\omega)\\ =-\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega}\\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\omega^4+2a^2\omega^2+a^2+2ac\omega+2ac\omega^3+c^2\omega^2-4d\omega^3-4(bd-2d^2)\omega^2-4d\omega}{d^2\omega^2}}.$$

В выражении под квадратным корнем приведем подобные:

$$\eta_{1,2}(\omega) = -\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\omega^4 + (2ac-4d)\omega^3 + \left(2a^2+c^2-4(bd-2d^2)\right)\omega^2 + (2ac-4d)\omega + a^2}{d^2\omega^2}},$$

$$\eta_{1,2}(\omega) = -\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{2d\omega} \pm \frac{1}{2d\omega}\sqrt{a^2\omega^4 + (2ac-4d)\omega^3 + \left(2a^2+c^2-4(bd-2d^2)\right)\omega^2 + (2ac-4d)\omega + a^2},$$

$$\eta_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2d\omega}\Big[-a(1+\omega^2) - c\omega \pm \sqrt{a^2\omega^4 + (2ac-4d)\omega^3 + (2a^2+c^2+8d^2-4bd)\omega^2 + (2ac-4d)\omega + a^2}\Big]. \quad (5)$$

Упростим выражение (5). Для этого разложим подкоренное выражение на множители. Рассмотрим выражение под квадратным корнем

$$a^2\omega^4 + (2ac-4d)\omega^3 + (2a^2+c^2+8d^2-4bd)\omega^2 + (2ac-4d)\omega + a^2$$

и найдем его корни:

$$a^2\omega^4 + (2ac-4d)\omega^3 + (2a^2+c^2+8d^2-4bd)\omega^2 + (2ac-4d)\omega + a^2 = 0.$$

Поделим обе части уравнения на ω^2:

$$a^2\omega^2 + (2ac-4d)\omega + (2a^2+c^2+8d^2-4bd) + (2ac-4d)\omega^{-1} + a^2\omega^{-2} = 0,$$

$$a^2(\omega^2+\omega^{-2}) + (2ac-4d)(\omega+\omega^{-1}) + (2a^2+c^2+8d^2-4bd) = 0,$$

$$a^2(\omega+\omega^{-1})^2 + (2ac-4d)(\omega+\omega^{-1}) + (c^2+8d^2-4bd) = 0.$$

Сделаем замену $\omega + \omega^{-1} = \varepsilon$. Продолжая, получаем

$$a^2\varepsilon^2 + (2ac-4d)\varepsilon + c^2 + 8d^2 - 4bd = 0, \quad (6)$$

Корни уравнения (6) имеют вид

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-(2ac-4d)}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2}\sqrt{(2ac-4d)^2 - 4a^2(c^2+8d^2-4bd)}.$$

Упростим выражение для чисел $\varepsilon_{1,2}$. Для этого преобразуем выражение под корнем:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{4d-2ac}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2}\sqrt{4a^2c^2 - 16acd + 16d^2 - 4a^2c^2 - 32a^2d^2 + 16a^2bd} =$$

$$= \frac{4d-2ac}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2}\sqrt{-16acd + 16d^2 - 32a^2d^2 + 16a^2bd} =$$

$$= \frac{2d-ac}{a^2} \pm \frac{2}{a^2}\sqrt{-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd}.$$

Значение ε_1 берется из $\varepsilon_{1,2}$ со знаком плюс перед корнем, а значение ε_2 – со знаком минус.

Утверждение

Для любых ν и μ и коэффициентов a, b, c, и d, которые через них выражаются согласно уравнению (2), выполняется $\varepsilon_2 = \frac{2d-ac}{a^2} - \frac{2}{a^2}\sqrt{-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd} = 2$.

Доказательство

Покажем, что действительно выполняется $\varepsilon_2 = 2$. Подставим выражение ε_2:

$$\frac{2d - ac}{a^2} - \frac{2}{a^2}\sqrt{-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd} = 2.$$

Умножим обе части на a^2 и перенесем квадратный корень в правую часть:

$$2d - ac - 2\sqrt{-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd} = 2a^2,$$

$$2d - ac - 2a^2 = 2\sqrt{-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(2d - ac - 2a^2)^2 = 4(-acd + d^2 - 2a^2d^2 + a^2bd)$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$4a^4 + 4a^3c + a^2c^2 - 8a^2d - 4acd + 4d^2 = -4acd + 4d^2 - 8a^2d^2 + 4a^2bd,$$

$$4a^4 + 4a^3c + a^2c^2 - 4a^2bd - 8a^2d + 8a^2d^2 = 0,$$

$$4a^2 + 4ac - 4bd + c^2 - 8d + 8d^2 = 0.$$

Вспомним, чему равны коэффициенты a, b, c, d:

$$a = \frac{3}{12\mu + 4} - \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{9\nu}{3\mu + 1} - 2, \qquad c = 1 - \frac{12\nu + 3}{6\mu + 2}, \qquad d = \frac{3\nu}{6\mu + 2}.$$

Подставим их в получившееся выражение, получаем:

$$4\left(\frac{3}{12\mu + 4} - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{12\mu + 4} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{12\nu + 3}{6\mu + 2}\right) - 4\left(\frac{9\nu}{3\mu + 1} - 2\right)\frac{3\nu}{6\mu + 2} + \left(1 - \frac{12\nu + 3}{6\mu + 2}\right)^2 + 8\frac{3\nu}{6\mu + 2}\left(\frac{3\nu}{6\mu + 2} - 1\right) = 0.$$

Упростим выражения в скобках:

$$4\left(\frac{1 - 6\mu}{12\mu + 4}\right)^2 + 4\frac{1 - 6\mu}{12\mu + 4} \cdot \frac{6\mu - 12\nu - 1}{6\mu + 2} - 4\frac{9\nu - 6\mu - 2}{3\mu + 1} \cdot \frac{3\nu}{6\mu + 2} + \left(\frac{6\mu - 12\nu - 1}{6\mu + 2}\right)^2 + 8\frac{3\nu}{6\mu + 2} \cdot \frac{3\nu - 6\mu - 2}{6\mu + 2} = 0.$$

Внесем коэффициенты перед скобками внутрь:

$$\left(\frac{1 - 6\mu}{6\mu + 2}\right)^2 + \frac{1 - 6\mu}{3\mu + 1} \cdot \frac{6\mu - 12\nu - 1}{6\mu + 2} - 2\frac{9\nu - 6\mu - 2}{3\mu + 1} \cdot \frac{3\nu}{3\mu + 1} + \left(\frac{6\mu - 12\nu - 1}{6\mu + 2}\right)^2 + 2\frac{3\nu}{3\mu + 1} \cdot \frac{3\nu - 6\mu - 2}{3\mu + 1} = 0.$$

Вынесем из-под каждой дроби коэффициенты так, чтобы все знаменатели оказались одинаковыми:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1 - 6\mu}{3\mu + 1}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 6\mu}{3\mu + 1} \cdot \frac{6\mu - 12\nu - 1}{3\mu + 1} - 2\frac{9\nu - 6\mu - 2}{3\mu + 1} \cdot \frac{3\nu}{3\mu + 1} + \frac{1}{4}\left(\frac{6\mu - 12\nu - 1}{3\mu + 1}\right)^2 + 2\frac{3\nu}{3\mu + 1} \cdot \frac{3\nu - 6\mu - 2}{3\mu + 1} = 0,$$

Умножим обе части на $4(3\mu+1)^2$

$$(1-6\mu)^2+2(1-6\mu)(6\mu-12\nu-1)-24\nu(9\nu-6\mu-2)+(6\mu-12\nu-1)^2+24\nu(3\nu-6\mu-2) = 0.$$

Приведем подобные:

$$1-12\mu+36\mu^2+(12\mu-24\nu-2-72\mu^2+144\nu\mu+12\mu)+(-216\nu^2+144\nu\mu+48\nu)+36\mu^2 + 144\nu^2+1-144\nu\mu-12\mu+24\nu+24\nu(3\nu-6\mu-2)=0,$$

$$1-12\mu+36\mu^2+12\mu-24\nu-2-72\mu^2+144\nu\mu+12\mu-216\nu^2+144\nu\mu+48\nu+36\mu^2+144\nu^2 + 1-144\nu\mu-12\mu+24\nu+72\nu^2-144\nu\mu-48\nu=0,$$

$$-72\nu^2+144\nu\mu+48\nu+72\nu^2-144\nu\mu-48\nu=0,$$

$$0=0.$$

Конец доказательства.

<u>**Следствие**</u>***:***

Корни уравнения (6), согласно теореме Виета, имеют вид

$$\varepsilon_1=\frac{-2ac+4d}{a^2}-2,\quad \varepsilon_2=2.$$

Вернемся в выражению (5) для $\eta_{1,2}(\omega)$. Поскольку $\varepsilon_2=2$, то корни подкоренного выражения имеют вид

$$\omega_1=\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2-4},\qquad \omega_2=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2-4},\qquad \omega_{3,4}=1,$$

Таким образом, можно переписать выражение (5) в виде

$$\eta_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm\sqrt{a^2(1-\omega)^2(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\right].$$

Вынесем квадраты из-под квадратного корня и раскроем скобки:

$$\eta_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm a(1-\omega)\sqrt{\omega^2-(\omega_1+\omega_2)\omega+\omega_1\omega_2}\right].$$

Вынесем из-под квадратного корня $\omega_1\omega_2$

$$\eta_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm a(1-\omega)\sqrt{\omega_1\omega_2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}-\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2}\omega+1}\right]$$

Обратим внимание на то, что по теореме Виета (для выражения под квадратным корнем в (5)) выполняется $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4=\omega_1\omega_2=1>0$, а значит выражение $\omega_1\omega_2=\sqrt{\omega_1\omega_2}=1$. Также можно заметить, что $\omega_1+\omega_2=\varepsilon_1$ Таким образом, имеем выражение для $\eta_{1,2}(\omega)$

$$\eta_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm a(1-\omega)\sqrt{\omega^2-\varepsilon_1\omega+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm a(1-\omega)(\omega^2-\varepsilon_1\omega+1)\cdot(\omega^2-\varepsilon_1\omega+1)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Воспользуемся формулой для производящей функции многочленов Лежандра. Получаем

$$\eta_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2d\omega}\left[-a(1+\omega^2)-c\omega\pm a(1-\omega)(\omega^2-\varepsilon_1\omega+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\omega^n\right]. \qquad (7)$$

Особенности функций $\boldsymbol{\eta_{1,2}(\omega)}$

Рассмотрим особенности функций $\eta_{1,2}(\omega)$ на комплексной плоскости, а именно – точки ветвления, которые из формулы (4) достигаются при

$$\left(\frac{a(1+\omega^2)+c\omega}{d\omega}\right)^2-4\frac{\omega^2+(b-2d)\omega+1}{d\omega}=0. \qquad (7a)$$

Числитель в уравнении (7a) равен нулю:

$$a^2(1-\omega)^2(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)=0.$$

Как было отмечено ранее, корни ω_1 и ω_2 равны

$$\omega_1=\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2-4}, \qquad \omega_2=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2-4}.$$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$\varepsilon_1^2-4=\left(\frac{-2ac+4d}{a^2}-2\right)^2-4.$$

Раскроем скобки. Получаем:

$$\left(\frac{-2ac+4d}{a^2}\right)^2-\frac{-8ac+16d}{a^2}+4-4=\frac{(4d-2ac)^2}{a^4}-\frac{-8ac+16d}{a^2}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(4d-2ac)^2+8a^3c-16a^2d}{a^4}=\frac{16d^2-16acd+4a^2c^2+8a^3c-16a^2d}{a^4}.$$

Подставляя выражения для параметров a, c и d, получаем

$$\frac{16d^2-16acd+4a^2c^2+8a^3c-16a^2d}{a^4}=\frac{576\nu(36\mu^2-12\mu+1+36\nu)}{(6\mu-1)^4}.$$

Группируя, получаем

$$\frac{576\nu((6\mu-1)^2+36\nu)}{(6\mu-1)^4},$$

что всегда больше нуля для положительных параметров ν и μ. Это значит, что корни ω_1 и ω_2 всегда вещественны и $\omega_1\cdot\omega_2=1$, то есть один по модулю всегда больше единицы, другой – меньше. Это значит, что у функции $\eta_{1,2}(\omega)$ всегда есть точка ветвления внутри единичной окружности на комплексной плоскости.

Разложение в ряд Тейлора функций $\boldsymbol{\lambda(\omega)}$

Ранее была указана замена $\lambda+\lambda^{-1}=\eta$. Решим его относительно λ:

$$\lambda+\lambda^{-1}=\eta,$$

$$\lambda^2-\eta\lambda+1=0. \qquad (8)$$

Поскольку имеется два значения для η, уравнение (8) имеет четыре корня:

$$\lambda_{1,2,3,4}(\omega) = \frac{\eta_{1,2}(\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta_{1,2}^2(\omega)}{4} - 1}. \tag{9}$$

Для определенности, обозначим

$$\lambda_1(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)}{2} - \sqrt{\frac{\eta_1^2(\omega)}{4} - 1},$$

$$\lambda_2(\omega) = \frac{\eta_2(\omega)}{2} - \sqrt{\frac{\eta_2^2(\omega)}{4} - 1},$$

$$\lambda_3(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2(\omega)}{4} - 1},$$

$$\lambda_4(\omega) = \frac{\eta_2(\omega)}{2} + \sqrt{\frac{\eta_2^2(\omega)}{4} - 1}.$$

Разложение в ряд Тейлора функций $\boldsymbol{\lambda_{1,3}(\omega)}$

Как отмечалось ранее, при $\omega \to 0$ справедливо $\eta_1(\omega) \to -\frac{1}{a} = \text{const}$. Таким образом, для разложения квадратного корня в выражениях для $\lambda_{1,3}(\omega)$ необходимо представить $\eta_1(\omega)$ как

$$\eta_1(\omega) = -\frac{1}{a} + r(\omega),$$

где $r(\omega)$ – остаточное разложение $\eta_1(\omega)$ в ряд Тейлора, причем $r(\omega) \to 0$ при $\omega \to 0$. Получаем выражение для $\lambda_{1,3}(\omega)$:

$$\lambda_{1,3}(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{a} + r(\omega)\right)^2 - 1}.$$

Преобразуем полученное выражение. Раскроем скобки под квадратным корнем и приведем подобные.

$$\lambda_{1,3}(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(r^2(\omega) - \frac{2r(\omega)}{a} + \frac{1}{a^2}\right) - 1} =$$

$$= \frac{\eta_1(\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2(\omega)}{4} - \frac{r(\omega)}{2a} + \frac{1}{4a^2} - 1}.$$

Вынесем из под квадратного корня множитель $\frac{1}{4a^2} - 1$. При любых $D > 0,\ h > 0$ множитель положителен: $\frac{1}{4a^2} - 1 > 0 \Longrightarrow 1 - 4a^2 > 0$.

$$\lambda_{1,3}(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1 - 4a^2} r^2(\omega) - \frac{2a}{1 - 4a^2} r(\omega) + 1}.$$

Требуется разложить второй квадратный корень с $r(\omega) \to 0$ при $\omega \to 0$. Для этого сделаем замену

$$\zeta(\omega)=\frac{a}{\sqrt{1-4a^2}}r(\omega),\quad \zeta^2(\omega)=\frac{a^2}{1-4a^2}r^2(\omega).$$

Тогда получаем выражение

$$\lambda_{1,3}(\omega)=\frac{\eta_1(\omega)}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}-1}\cdot\sqrt{\zeta^2(\omega)-\frac{2}{\sqrt{1-4a^2}}\zeta(\omega)+1}=$$

$$=\frac{\eta_1(\omega)}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}-1}\cdot\left(\zeta^2(\omega)-\frac{2}{\sqrt{1-4a^2}}\zeta(\omega)+1\right)\cdot\left(\zeta^2(\omega)-\frac{2}{\sqrt{1-4a^2}}\zeta(\omega)+1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся формулой для производящей функции многочленов Лежандра. Получаем

$$\lambda_{1,3}(\omega)=\frac{\eta_1(\omega)}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}-1}\cdot\left(\zeta^2(\omega)-\frac{2}{\sqrt{1-4a^2}}\zeta(\omega)+1\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-4a^2}}\right)\zeta^n.$$

Теперь подставим $r(\omega)$ обратно вместо $\zeta(\omega)$. Получаем итоговое разложение:

$$\lambda_{1,3}(\omega)=\frac{\eta_1(\omega)}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}-1}\cdot\left(\frac{a^2}{1-4a^2}r^2(\omega)-\frac{2a}{1-4a^2}r(\omega)+1\right)$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-4a^2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{1-4a^2}}\right)^n r^n(\omega). \tag{10}$$

Разложение в ряд Тейлора функций $\boldsymbol{\lambda_{2,4}(\omega)}$

В выражении для $\lambda_{2,4}(\omega)$ имеется функция $\eta_2(\omega)$, которая стремится к бесконечности при $\omega\to 0$. Поэтому для разложения $\lambda_{2,4}(\omega)$ необходимо сначала вынести член, стремящийся к бесконечности, из-под квадратного корня.

$$\lambda_{2,4}(\omega)=\frac{\eta_2(\omega)}{2}\pm\sqrt{\frac{\eta_2^2(\omega)}{4}-1}=\frac{\eta_2(\omega)}{2}\pm\frac{\eta_2(\omega)}{2}\sqrt{1-\frac{4}{\eta_2^2(\omega)}}.$$

Воспользуемся разложением квадратного корня. Тогда получаем

$$\lambda_{2,4}(\omega)=\frac{\eta_2(\omega)}{2}\pm\frac{\eta_2(\omega)}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(1-2n)n!^2}\cdot\frac{1}{\eta_2^{2n}(\omega)}.$$

Заметим, что из уравнения (3) и теоремы Виета следует, что

$$\eta_1(\omega)\cdot\eta_2(\omega)=\frac{\omega^2+(b-2d)\omega+1}{d\omega},$$

а значит

$$\frac{1}{\eta_2(\omega)}=\frac{d\omega}{\omega^2+(b-2d)\omega+1}\eta_1(\omega).$$

Тогда можно переписать выражение для $\lambda_{2,4}(\omega)$

$$\lambda_{2,4}(\omega)=\frac{\eta_2(\omega)}{2}\pm\frac{\eta_2(\omega)}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(1-2n)n!^2}\cdot(\omega^2+(b-2d)\omega+1)^{-2n}\cdot\left(d\omega\eta_1(\omega)\right)^{2n}.$$

Разложим на простейшие рациональную функцию $(\omega^2+(b-2d)\omega+1)^{-1}$. Для этого найдем корни $w_{1,2}$ знаменателя:

$$\omega^2+(b-2d)\omega+1=0,$$

$$w_{1,2}=\frac{-b+2d\pm\sqrt{(b-2d)^2-4}}{2},$$

или для определенности

$$w_1=\frac{-b+2d-\sqrt{(b-2d)^2-4}}{2},$$

$$w_2=\frac{-b+2d+\sqrt{(b-2d)^2-4}}{2}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и разложим дробь на две простые

$$\frac{1}{\omega^2+(b-2d)\omega+1}=\frac{A}{\omega-w_1}+\frac{B}{\omega-w_2},$$

где

$$A=\frac{1}{w_1-w_2},\quad B=\frac{1}{w_2-w_1},$$

или проще

$$A=-\frac{1}{\sqrt{(b-2d)^2-4}},\quad B=\frac{1}{\sqrt{(b-2d)^2-4}},$$

Продолжая, имеем разложение для дроби $(\omega^2+(b-2d)\omega+1)^{-1}$:

$$\frac{1}{\omega^2+(b-2d)\omega+1}=\frac{A}{\omega-w_1}+\frac{B}{\omega-w_2}=\frac{-A}{w_1}\frac{1}{1-\frac{\omega}{w_1}}+\frac{-B}{w_2}\frac{1}{1-\frac{\omega}{w_2}}=$$

$$=\frac{-A}{w_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{w_1}\right)^n+\frac{-B}{w_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{w_2}\right)^n$$

Внося все под одну сумму, получаем

$$\frac{1}{\omega^2+(b-2d)\omega+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-A}{w_1^{n+1}}+\frac{-B}{w_2^{n+1}}\right)\omega^n.$$

Учитывая, что $A=-B$, упростим запись :

$$\frac{1}{\omega^2+(b-2d)\omega+1}=A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{w_2^{n+1}}-\frac{1}{w_1^{n+1}}\right)\omega^n.$$

Таким образом, разложение для $\lambda_{2,4}(\omega)$ имеет вид

$$\lambda_{2,4}(\omega)=\frac{\eta_2(\omega)}{2}\left(1\pm\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A^{2n}(2n)!\,d^{2n}}{(1-2n)n!^2}\omega^{2n}\cdot\eta_1^{2n}(\omega)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{w_2^{k+1}}-\frac{1}{w_1^{k+1}}\right)\omega^k\right)^{2n}\right]\right).\quad(11)$$

Граничное условие ИЗК

При малых ω имеем $|\lambda_2| \le |\lambda_1| < 1 < |\lambda_3| \le |\lambda_4|$. Поскольку у нас имеется уравнение 4-го порядка, то нужно поставить по 2 независимых граничных условия на каждой границе. Пусть P_j, Q_j, R_j и S_j многочлены заданных степеней, $j = 1, 2$. На левом краю граничное условие должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} P_1(\omega) + Q_1(\omega)\lambda_3 + R_1(\omega)\lambda_3^2 + S_1(\omega)\lambda_3^3 = O(\omega^{M_1}) \\ P_1(\omega) + Q_1(\omega)\lambda_4 + R_1(\omega)\lambda_4^2 + S_1(\omega)\lambda_4^3 = O(\omega^{M_1})' \end{aligned} \quad (12)$$

причем $P_1(0) = 1$, $Q_1(0) = 0$, $M_1 = \deg P_1 + \deg Q_1 + \deg R_1 + \deg S_1$, и

$$\begin{aligned} P_2(\omega) + Q_2(\omega)\lambda_3 + R_2(\omega)\lambda_3^2 + S_2(\omega)\lambda_3^3 = O(\omega^{M_2}) \\ P_2(\omega) + Q_2(\omega)\lambda_4 + R_2(\omega)\lambda_4^2 + S_2(\omega)\lambda_4^3 = O(\omega^{M_2})' \end{aligned} \quad (13)$$

причем $P_2(0) = 0$, $Q_2(0) = 1$, $M_2 = \deg P_2 + \deg Q_2 + \deg R_2 + \deg S_2$.

Первое граничное условие позволяет вычислить решение в точке на границе, а второе – в точке, ближайшей к границе. Степени многочленов задают число моментов времени, в которые учитываются значения решения в соответствующей точке, отстоящей от границы на 0, 1, 2 и 3 шага h.