В.А.Гордин

Дороги, которые мы выбираем

Интерполяция, аппроксимация, оптимизация

Простейшие примеры

Пусть известно положение точки на прямой $\mathbb{R}$ в моменты времени $t = j\tau$, где шаг τ равен 1 мин. Значения ее координаты будем обозначать $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$. Нужно оценить положение этой точки в остальные, не кратные τ моменты времени. Разумеется, эта задача (она и называется задачей интерполяции от лат. *inter–polis* — «разглаженный, подновлённый, обновлённый; преобразованный») имеет много разнообразных решений. Пусть функция $f(t)$ - какое-то решение задачи интерполяции, т. е. при всех $j \in \mathbb{Z}$ функция f принимает заданные значения: $f(t_j) = x_j$. Например, функция f - ломаная, построенная по значениям $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

Рис.1. Два различных решения задачи интерполяции. Здесь узлы интерполяции расположены в точках $t_j = 9j$.

Задача интерполяции относится к числу самых распространенных практических задач. Например, она возникает, когда нужно по результатам некоторого множества измерений восстановить физический процесс или физическое поле - промежуточные значения функции времени и/или пространственных координат (или и времени, и пространственных координат). Ведь не можем же мы проводить измерения везде и всегда непрерывно по времени и по пространству! А значения искомой функции в промежуточные моменты времени или в промежуточных точках нам, бывает, нужны.

Или нужно выбрать значение какого-то параметра. Например, нужно оценить силу натяжения r_* тетивы лука, для попадания в мишень. Мы стреляем, натягивая ее различными способами N раз. Каждый раз мы измеряем силу натяжения $\{r_j\}_{j=1}^{N}$ и дальность полета стрелы $\{s_j\}_{j=1}^{N}$. Нужно определить дальность полета s и при промежуточных значениях силы натяжения r. Остальные параметры задачи (например, угол стрельбы, вес и оперение стрелы) предполагаем одинаковыми.

В задачах подобного рода приходится делать интерполяцию. Но какой алгоритм, какое решение задачи интерполяции надлежит выбрать?

Замечание. В рассмотренном примере при построении алгоритма нужно решить: интерполируем мы функцию $r(s)$ или обратную к ней функцию $s(r)$? Аналогичный вопрос может возникнуть и в других задачах интерполяции.

Задача аппроксимации ставится иначе. Предположим, что нужно выкопать колодец для трех хозяев. Известно расположение их хозяйств – это три точки на плоскости $\{\vec{W}_j\}_{j=1}^{3}$, где $\vec{W}_j = \langle x_j, y_j \rangle \in \mathbb{R}^2$. Все хозяева хотят иметь колодец поближе. Но постановка задачи приближения к ним этого общего колодца – точки $\vec{W}_* \in \mathbb{R}^2$ может быть различной.

1. Максимальное из трех расстояний от колодца до хозяйства должно быть минимальным:

$$\max_{j=1,2,3} \left| \vec{W}_j - \vec{W}_* \right| \to \min_{\vec{W}_* \in \mathbb{R}^2}.$$

2. Сумма трех расстояний должна быть минимальной:

$$\max_{j=1,2,3} \sum_{j=1}^{3} \left| \vec{W}_j - \vec{W}_* \right| \to \min_{\vec{W}_* \in \mathbb{R}^2}.$$

3. Сумма трех квадратов расстояний должна быть минимальной:

$$\max_{j=1,2,3} \sum_{j=1}^{3} \left| \vec{W}_j - \vec{W}_* \right|^2 \to \min_{\vec{W}_* \in \mathbb{R}^2}.$$

В случае 1 решение задачи (при условии, что все три точки не лежат на одной прямой) дает центр окружности, проходящей через точки $\{\vec{W}_j\}_{j=1}^{3}$.

К.1.1. Докажите это утверждение. Как решать задачу, если точки лежат на одной прямой или если хозяйств (точек) больше, чем три?

К.1.2. Как решать задачу, если все точки расположены не на плоскости, а в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

В случае 3 перепишем минимизируемую функцию двух переменных в координатном виде:

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{3}\left|\vec{W}_j-\vec{W}_*\right|^2=\sum_{j=1}^{3}\left[(x_j-x)^2+(y_j-y)^2\right],$$

где *x, y* – координаты искомой точки (колодца) $\vec{W}_*\in\mathbb{R}^2$. Необходимое условие минимума этой гладкой функции – равенство нулю производных по *x, y* (точка называется стационарной или критической, если в ней все первые производные функции обращаются в нуль):

$$x=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}x_j,\ y=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}y_j\ .$$

К.1.3. Как решать задачу, если важность хозяйств различна, и нужно минимизировать функцию $\max\limits_{j=1,2,3}\sum_{j=1}^{3}a_j\left|\vec{W}_j-\vec{W}_*\right|^2\to\min\limits_{\vec{W}_*\in\mathbb{R}^2}$, где веса – положительные числа a_j - заданы?

К.1.4. Как решать такую задачу, если точек не три, а пять, и не на плоскости, а в трехмерном пространстве?

В случае 2 задачу тоже можно переписать в координатном виде:

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{3}\left|\vec{W}_j-\vec{W}_*\right|=\sum_{j=1}^{3}\sqrt{(x_j-x)^2+(y_j-y)^2}\,, \qquad (0.1)$$

однако, функция f уже не будет гладкой на всей плоскости. На Рис.1.2 показаны изолинии функции f для примера, в котором $\vec{W}_1=\langle 0,0\rangle$, $\vec{W}_2=\langle 3,0\rangle$, $\vec{W}_3=\langle 1,1\rangle$.

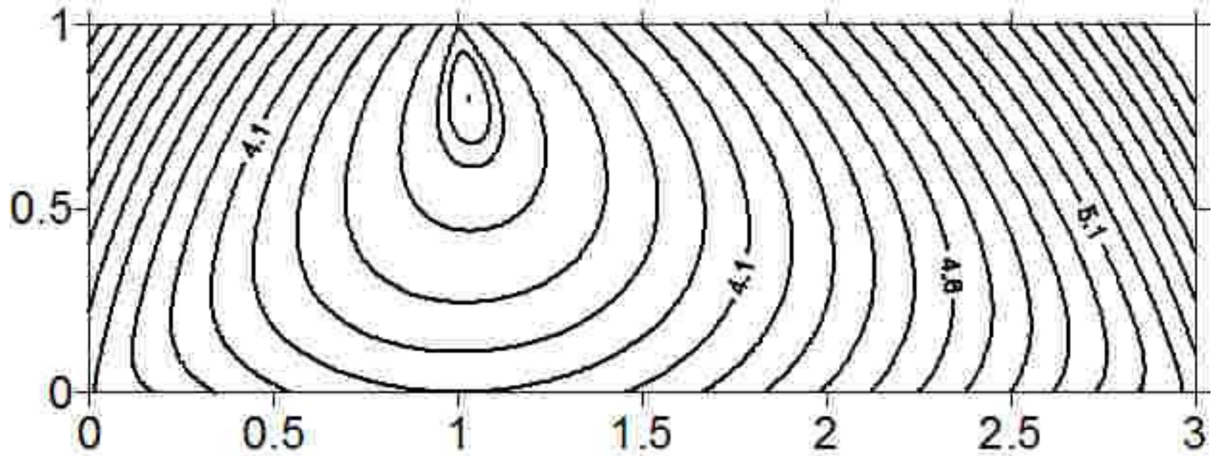


Рис.1.2. Изолинии функции f. Здесь точки $\vec{W}_1=\langle 0,0\rangle$, $\vec{W}_2=\langle 3,0\rangle$, $\vec{W}_3=\langle 1,1\rangle$.

К.1.5. В каких точках эта функция f не гладкая?

Задачу минимизации функции (0.1) мы решили с помощью компьютера. На Рис.1.2. через точку строгого минимума не может проходить изолиния. Минимум достигается в точке, указанной на рисунке.

Замечание. Если из оптимальной точки провести лучи в $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3$, то все углы$=120^\circ$ (проверьте!). Это следует из теоремы Ферма – Вивиани – Торричелли – Штейнера.

К.1.6. Верно ли, что в тех точках, где f гладкая, там изолиния - гладкая кривая?

К.1.7. Постройте на компьютере изолинии функции

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{3} j\left|\vec{W}_j-\vec{W}_*\right|=\sum_{j=1}^{3} j\sqrt{(x_j-x)^2+(y_j-y)^2}$$, где $\vec{W}_1=\langle 0,0\rangle,\ \vec{W}_2=\langle 3,0\rangle,\ \vec{W}_3=\langle 1,1\rangle$.

Определите, использовав эти изолинии, точку, в которой достигается минимум этой функции.

2. Что такое функция и ее график?

Функция на множестве A со значениями во множестве B или, что то же самое, отображение из A в B – правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие единственный элемент множества B. В школьных примерах обычно оба эти множества – либо вещественная прямая $\mathbb{R}$, либо часть этой прямой. Например, функция $f: x \mapsto 5x$ ставит в соответствие каждому числу его же, умноженное на 5. Обычная школьная запись этого факта: $y(x)=5x$. В этом примере у отображения f имеется обратное - $f^{-1}: x \mapsto x/5$.

У отображения прямой в прямую $f: x \mapsto 2x^2$ (школьная запись: $y(x)=2x^2$) обратного отображения не существует. Если у положительное число, то y него имеется два прообраза

– квадратных корня разных знаков из $y/2$. Если y – отрицательное число, то у него вовсе не существует прообраза.

У отображения прямой в прямую $f: x \mapsto \sin x$ (школьная запись: $y(x) = \sin x$) обратного отображения также не существует. Но если рассматривать это отображение как отображение отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ на отрезок $[-1,1]$, то обратное отображение существует и называется арксинусом.

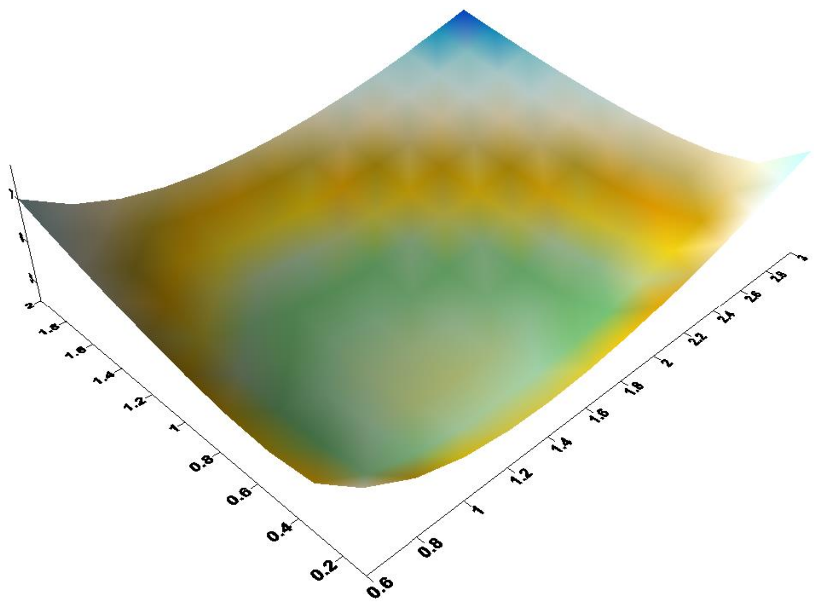


Рис.2.1. Пример графика числовой функции двух числовых переменных

Бывают функции и на других множествах. Например, распределение температуры в шаре D^3 задает отображение множества точек шарика во множество вещественных чисел. Если температура измеряется в градусах Кельвина[1], то (по физическим причинам) множество B можно ограничить неотрицательными вещественными числами $\mathbb{R}_+$.

Графиком функции называется подмножество декартова произведения $A \times B$, состоящее из точек вида $\langle x, y(x) \rangle$. График однозначно строится по функции, но и функция однозначно восстанавливается по графику. Примеры графиков, когда $A = B = \mathbb{R}$ приведены на **Рис.1**.1. В таких случаях график представляет собой кривую на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Предположим, что нас интересует температура в двумерной области, например, на плоскости. Или изменение температуры в точках одномерного стержня со временем. В обоих случаях речь идет о функции двух переменных: $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{R}$ или $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2,\ B = \mathbb{R}$; см. **Рис.2**.1.

В случае температуры на шаре D^3 график представляет собой трехмерную поверхность в четырехмерном цилиндре $D^3 \times \mathbb{R}$. Если в каждой точке шара D^3 задан вектор, т. е. если мы рассматриваем векторное поле (например, скорость течения жидкости или газа) внутри этого шара, то график векторного поля – трехмерная поверхность в $D^3 \times \mathbb{R}^3$. К сожалению, нарисовать эти графики на двумерном листе бумаги мы не можем.

К.1.8. Пусть температура в моменты времени $t \in [0,3]$ на отрезке $x \in [0,2]$ задается формулой $T = t\sin(\pi x)$. Постройте график функции *T(t,x)* на прямоугольнике $[0,2] \times [0,3]$.

[1] У.Томсон (1824 -1907). Барон, лорд Кельвин Ларгский с 1892г.

1. Непрерывные и гладкие функции. Примеры и контрпримеры

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_*, если для любой сходящейся последовательности аргументов $x_n \to x_*$ последовательность значений функции тоже сходится: $f(x_n) \to f(x_*)$. Мы здесь предполагаем, что читатель уже знаком с понятием сходимости последовательности точек на прямой, т. е. чисел. Для других множеств A и B понятие сходимости последовательности точек еще нужно определить.

К.2.1. Пусть множество А состоит из трех точек, расстояние между которыми равно 1, т.е. на А задана метрика. Докажите, что любая функция на А со значениями в $\mathbb{R}$ непрерывна.

К.2.2. Докажите, что любое отображение из А в А непрерывно.

К.2.3. На прямой $\mathbb{R}$ определим функцию Хевисайда[2]: $\chi(x) = \begin{Bmatrix} 0 \Leftarrow x < 0 \\ 1/2 \Leftarrow x = 0 \\ 1 \Leftarrow x > 0 \end{Bmatrix}$. В каких точках она непрерывна?

Последовательность точек на плоскости $\langle x_n, y_n \rangle$ называется сходящейся к точке $\langle x_*, y_* \rangle$, если сходятся обе последовательности координат: $x_n \to x_*$ и $y_n \to y_*$.

---

[2] О.Хевисайд (1850 – 1925).

К.2.4. Докажите, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для сходимости последовательности точек на плоскости.

1) $|x_n - x_*| + |y_n - y_*| \to 0$;

2) $|x_n - x_*|^2 + |y_n - y_*|^2 \to 0$;

3) $|x_n - x_*|^4 + |y_n - y_*|^4 \to 0$;

4) $|x_n - x_*| + |y_n - y_*|^2 \to 0$;

5) $\max\left[|x_n - x_*|,\ |y_n - y_*|\right] \to 0$.

К.2.5. На плоскости $\mathbb{R}^2$ используем полярные координаты $\langle r, \varphi \rangle$, $r \in \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим на плоскости числовую функцию $f(r, \varphi) = r$. Докажите, что она непрерывна во всех точках плоскости.

К.2.5. Рассмотрим на плоскости числовые функции $f(r, \varphi) = \varphi$, $f(r, \varphi) = r \sin \varphi$ и $f(r, \varphi) = \sin \varphi$. В каких точках плоскости они непрерывны?

3. Кривые, гладкие и не очень. Снежинка фон Коха

Непрерывной кривой на плоскости называется непрерывное отображение (или иногда образ этого отображения) прямой $s \in \mathbb{R}$ в плоскость $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ - отображение $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Рассмотрим, например, отображение

$$x(s) = a + bs, \;\; y(s) = c + ds, \;\; s \in \mathbb{R}, \qquad (3.1)$$

где a, b, c, d – константы. Такое отображение задает частный вид кривой - прямую, если и только если $b^2 + d^2 > 0$. В противном случае отображение g задает не кривую, а точку. Другими словами, такое отображение g – константа.

Если ровно одно из двух чисел b и d в формулах (1) равно нулю, то отображение $s \mapsto \langle x(s), y(s) \rangle$ задает кривую. Пусть, например, $b=0,$ $d \neq 0$. Тогда можно выразить переменное x через переменное y: $s = (y-c)/d \Rightarrow x = a + b(y-c)/d = a = const,$ т. е. прямая (частный случай кривой) здесь вертикальна. а вот выразить y через переменную x не получится.

Образ отображения $x = \cos(s),$ $y = \sin(s)$ определяет единичную окружность на плоскости.

К.3.1. Докажите, что график непрерывной числовой функции числового аргумента задает непрерывную кривую, но не всякую кривую на плоскости можно представить в виде графика непрерывной функции.

Далее мы будем предполагать, что читателю известны понятие производной от функции и понятие гладкой (дифференцируемой) функции. Например, функция одного вещественного переменного $f(x) = |x|$ непрерывна везде, а гладкой (дифференцируемой) эта функция является не во всех точках – только кроме $x=0$.

К.3.2. Докажите, что функция $f(x) = |x|^{2/3}$ обладает всеми этими же свойствами. Верны ли все эти утверждения для функции $f(x) = |x|^{3/2}$?

Длину гладкой кривой – графика функции $y=y(x)$ на отрезке $[a,b]$ можно вычислить по формуле: $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$. Это следствие теоремы Пифагора[3] и определения интеграла. Эту формулу можно использовать и при наличии у функции $y=y(x)$ конечного числа изломов.

На **Рис.1**.1. длины синей и зеленой кривых разные. Зеленая кривая – решение задачи интерполяции, обладающее дополнительным условием: минимум длины графика.

Это дополнительное условие иногда практически полезно. В других же задачах критерий для выбора варианта интерполяции может быть совсем иным.

Длину гладкой кривой общего вида $\vec{g}(s)=\langle x(s),y(s)\rangle,\ s\in[c,d]$ можно вычислить по формуле $L=\int_c^d\sqrt{x'^2(s)+y'^2(s)}\,ds.$

К.3.3. Вычислите таким способом длину окружности радиуса 1.

К.3.4. Пусть гладкая кривая $\vec{g}(s)$ разными способами разбита на несколько кусков и вычислена сумма их длин. Докажите, что эта сумма не зависит от способа разбиения.

К.3.5. Пусть параметр s – гладкая функция параметра t: $s=s(t)$. Докажите, что длина гладкой кривой не зависит от параметризации, т. е., что

$$\int_p^q\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(t)+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(t)}\;dt=\int_{s(p)}^{s(q)}\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2(s)+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2(s)}\;ds.$$

[3] Пифагор (ок. 570 до н. э.- ок. 500 до н.э.). Впрочем, теорема Пифагора была известна и в древней Месопотамии. Отец Пифагора был купцом из финикийского города Тир, получивший гражданство греческого острова Самоса. Известно, что Пифагор общался с халдеями, персами и египтянами.

Если кривая $\vec{g}(s)$ негладкая в нескольких точках, то можно разбить ее на несколько кусков с концами в точках негладкости, для каждого куска вычислить длину и затем сложить результаты.

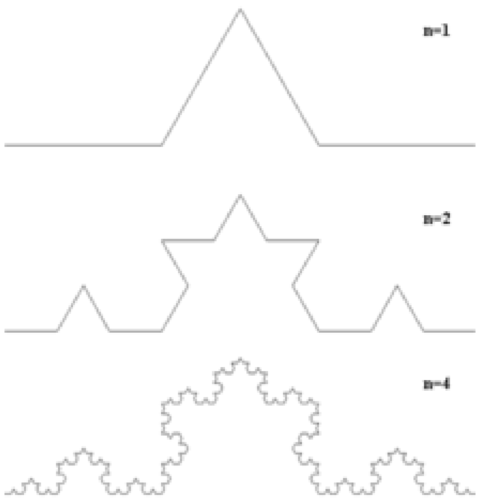
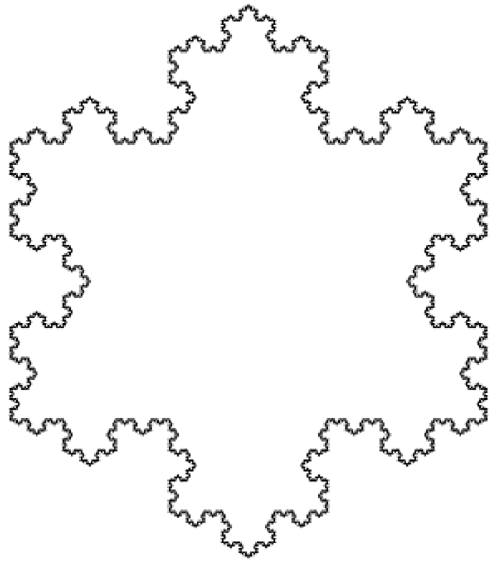
	

Рис.3.1а. Кривая фон Коха[4] (предел ломаных линий при $n \to \infty$) имеет бесконечную длину, поскольку $(4/3)^n \to \infty$	**Рис.3.1б.** Снежинка фон Коха

Если точек негладкости кривой $\vec{g}(s)$ бесконечно много, то определение ее длины уже не такое простое.

---

[4] Н.Ф.Х. фон Кох (1870 – 1924).

Пусть отрезок $[a,b]$ который пробегает параметр кривой s разбит на N частей: $\{s_j\}_{j=0}^{N}$, $s_0 = a$, $s_N = b$. Кривую можно аппроксимировать (приблизить) ломаной, соединив точки плоскости $\vec{e}_j = \langle x_j, y_j \rangle$ и $\vec{e}_{j+1} = \langle x_{j+1}, y_{j+1} \rangle$ хордами. Сумма длин хорд $\sum_{j=0}^{N-1} |\vec{e}_{j+1} - \vec{e}_j|$ не больше длины кривой. Способов разбиения отрезка $[a,b]$ при различных N бесконечно много. Назовем длиной кривой точную верхнюю грань (супремум) длин всех ломаных, аппроксимирующих данную кривую. Этот супремум может оказаться и бесконечным.

Рис.3.2. Тающий лед на московском пруду. Длина береговой линии весьма извилиста. Ее числовая оценка существенно зависит от масштаба, в котором описана эта линия.

К.3.6. Пусть треугольники на Рис.3а не равносторонние, а с тупым углом. Можно ли подобрать угол так, чтобы длина соответствующей предельной кривой была конечна?
К.3.7. Пусть треугольники на Рис.3а не равносторонние, а с тупым углом, зависящим от номера n. Можно ли подобрать последовательность этих углов так, чтобы длина соответствующей предельной кривой была конечна?
К.3.8. Предложите формулу для описания винтовой линии в трехмерном пространстве и вычислите длину ее отрезка (скажем, одного витка).

4. Алгебра многочленов, связь между корнями многочлена и его коэффициентами. Интерполяция методом Лагранжа

Как известно, через любые две точки на плоскости (и в пространстве) можно провести ровно одну прямую. Это ведь тоже задача интерполяции. Через любую ли тройку точек на плоскости можно провести параболу? Пусть заданы три различные точки x_1, x_2, x_3 на оси абсцисс и три произвольные (можно и совпадающие) значения y_1, y_2, y_3 на оси ординат. Оказывается, всегда существует и притом единственная кривая, задаваемая уравнением $y = ax^2 + bx + c$, которая решает задачу интерполяции, т. е. $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c\,, \\
y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c\,, \\
y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c\,.
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

Действительно, систему (4.1) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел a, b, c.

Те, кто знает про правило Крамера[5] и определитель Вандермонда[6], могут немедленно заключить, что такая система имеет единственное решение. А значит, имеет единственное решение задача интерполяции по трем точкам. Те, кто с этими понятиями пока не знаком, могут решить эту систему уравнений методом исключения.

К.4.1. При каких входных данных (узлах интерполяции x_1, x_2, x_3 и значениях y_1, y_2, y_3) коэффициент a=0, т. е. парабола превращается в прямую?

Замечание. Если значения y_1, y_2, y_3 различны, то помимо построенной параболы $y=y(x)$, можно построить еще и параболу $x=x(y)$, которая также будет решать ту же задачу интерполяции. Однако полученные кривые на плоскости <x, y> будут, как правило, разные.

К.4.2. Предложите алгоритм интерполяции кубической параболой $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ значений, заданных в четырех узлах.

К.4.3. При каких входных данных (узлах интерполяции x_1, x_2, x_3 и значениях y_1, y_2, y_3) построенные таким образом кривые $y=y(x)$ и $x=x(y)$ совпадают?

А нельзя ли построить искомый интерполяционный многочлен, не решая системы уравнений относительно коэффициентов?

---

[5] Г.Крамер (1704 – 1752).

[6] А.-Т. Вандермонд (1735 -1796).

Есть два известных способа это сделать, метод Ньютона[7] и метод Лагранжа[8].

Мы здесь рассмотрим метод Лагранжа. Сначала рассмотрим самый простой случай: все три интерполяционные значения y_1, y_2, y_3 - нулевые. Здесь ответ очевиден $a=b=c=0$.

Затем рассмотрим случай $y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0.$ Два последние условия можно интерпретировать так: x_2, x_3 - корни параболы. По теореме Виета[9] искомый квадратный многочлен имеет вид $p(x-x_2)(x-x_3)$, где параметр p пока неизвестен.

Замечание. Вообще, всякий многочлен определяется своими корнями с точностью до постоянного множителя. Например, кубический многочлен **К.4.2.** можно определить, и притом однозначно, если заданы его корни x_1, x_2, x_3 и известен старший коэффициент a. Действительно, многочлен можно представить в виде произведения $y(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$ Отсюда следуют формулы для коэффициентов многочлена: $b = -a(x_1 + x_2 + x_3),\ c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),\ d = -ax_1x_2x_3.$

---

[7] И.Ньютон (1642 – 1727). Возведен в рыцарское достоинство в 1705г – впервые в истории Англии - за научные заслуги. Подробнее, например, https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD,_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA#CITEREF.D0.9A.D0.B0.D1.80.D1.86.D0.B5.D0.B2_.D0.92._.D0.9F.1987

[8] Ж.Л.Лагранж (1736-1813).

[9] Франсуа Виет сеньор де ля Биготье (1540 —1603) – автор современной символической алгебры. Среди прочих его рекордов - выполнение поручения короля Генриха IV - Виет сумел расшифровать переписку испанских агентов во Франции. Поскольку в те времена в математику верили не слишком, Виет был обвинён испанским королём Филиппом II в использовании чёрной магии.

Вернемся к задаче интерполяции. Здесь, помимо обоих корней x_2, x_3 квадратного многочлена, известно его значение в дополнительной точке x_1. Чтобы определить неизвестный коэффициент *p*, подставим в искомый квадратный многочлен значение переменной $x = x_1$. Получаем

$$p(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ ,$$

и искомая парабола имеет вид:

$$Y_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \, .$$

Такой многочлен будем называть базисным. Аналогично определяются квадратные базисные многочлены $Y_2(x), Y_3(x)$ для задачи интерполяции со значениями $\langle 0,1,0 \rangle$ и $\langle 0,0,1 \rangle$.

Теперь понятно, как будет выглядеть формула для параболы при произвольных интерполяционных значениях y_1, y_2, y_3:

$$y(x) = y_1 Y_1(x) + y_2 Y_2(x) + y_3 Y_3(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \qquad (4.2)$$

Такую формулу легко запрограммировать. Легко ее обобщить (сделайте это!) и на случай интерполяции многочленом порядка n по интерполяционным значениям в n+1 различных узлах интерполяции.

Итак, мы имеем уже два решение задачи интерполяции: в классе ломаных и в классе многочленов.

Формулу (4.2) можно интерпретировать еще одним, геометрическим способом: мы раскладываем вектор $y(x)$ по трем базисным векторам с коэффициентами разложения y_1, y_2, y_3. Только это не наше физическое пространство, а линейное пространство многочленов степени не выше 2. Действительно, такие многочлены можно складывать друг и с другом и умножать на числа – буду получаться снова многочлены степени не выше 2.

Такое линейное пространство имеет размерность 3 – столько у нас свободных параметров: a, b, c. Оказывается, это очень удобный язык для решения многих алгебраических задач.

К.4.4. Образуют ли многочлены, степень которых в точности равна 2, трехмерное пространство?

К.4.5. Образуют ли многочлены, степень которых не превосходит 3, четырехмерное пространство?

К.4.6. Пусть узлы интерполяции комплексны, например, $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = i.$ Для данных интерполяции $y_1 = i,\ y_2 = -i,\ y_3 = 1$ постройте интерполирующий квадратный многочлен. Постройте на комплексной плоскости изолинии вещественной и мнимой частей этого многочлена $y(x)$. Так для этих же данных интерполяции постройте квадратный многочлен $x=x(y)$.

Замечание. Многочлены ненулевой степени неограниченно растут на бесконечности. Если истинная функция от x ограничена, то погрешность интерполяции многочленом при $x \to \infty$ также будет стремиться к бесконечности. Интерполяция на внешние точки $x \notin [x_1, x_n]$ называется экстраполяцией от лат. *extrā* — вне, снаружи, за, кроме и лат. *polire* — приглаживаю, выправляю, изменяю, меняю. Экстраполяцией, в частности, являются попытки предсказать будущее или восстановить прошлое. Если имеется какая-то модель явления, то такая попытка может быть эффективной. Например, если мы точно знаем, что функция – константа, то для ее экстраполяции достаточно знать ее в одной точке. Если известно, что функция линейна – в двух. Если функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, то (при некоторых ограничениях на правую часть) столько чисел, каков порядок уравнения. Проблема обычно в том, что и про функцию наши знания неточны, и результаты измерений содержат погрешности. К этим проблемам мы будем далее неоднократно возвращаться.

Если явление, которое описывает функция *y(t)*, связано с какими-то периодическими явлениями, это можно попробовать использовать при выборе метода интерполяции. Например, если речь идет о температуре воздуха в какой-то точке планеты, как функции времени, можно при интерполяции на произвольный момент времени t_* использовать функцию y следующего вида:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t), \qquad (4.3)$$

где частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 1$ сутки.

Если для модели (4.3) известны значения функции y в пять различных моментов времени $\{t_j\}_{j=1}^{5}$: $y(t_j) = y_j$, то можно составить и решить (сделайте это!) систему из пяти линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_1, c_1.

Такой выбор базисных функций в (4.3) позволяет учесть, как периодическое изменение в течение суток притока тепла от Солнца, так и совершенно не периодическое во времени изменение погоды. Этот выбор целесообразен, если интервал времени, на котором предполагается интерполяция, примерно соизмерим с сутками. Если этот интервал существенно меньше суток (например, 1 час), то периодичность не успеет проявиться, и два последних слагаемых в формуле стоит отбросить.

Если же интервал много больше суток, то, возможно, стоит вместо T = 1 сутки, выбрать период T = 1 год, а, напротив, коэффициенты a_1 и a_2 положить равными нулю.

Замечание. В других задачах, например, при описании уровня моря в данной точке, стоит период связать с приливами. Здесь притяжение Луны «важнее» притяжения Солнца, хотя иногда они могут «объединить усилия» (такое явление называется сизигиями).

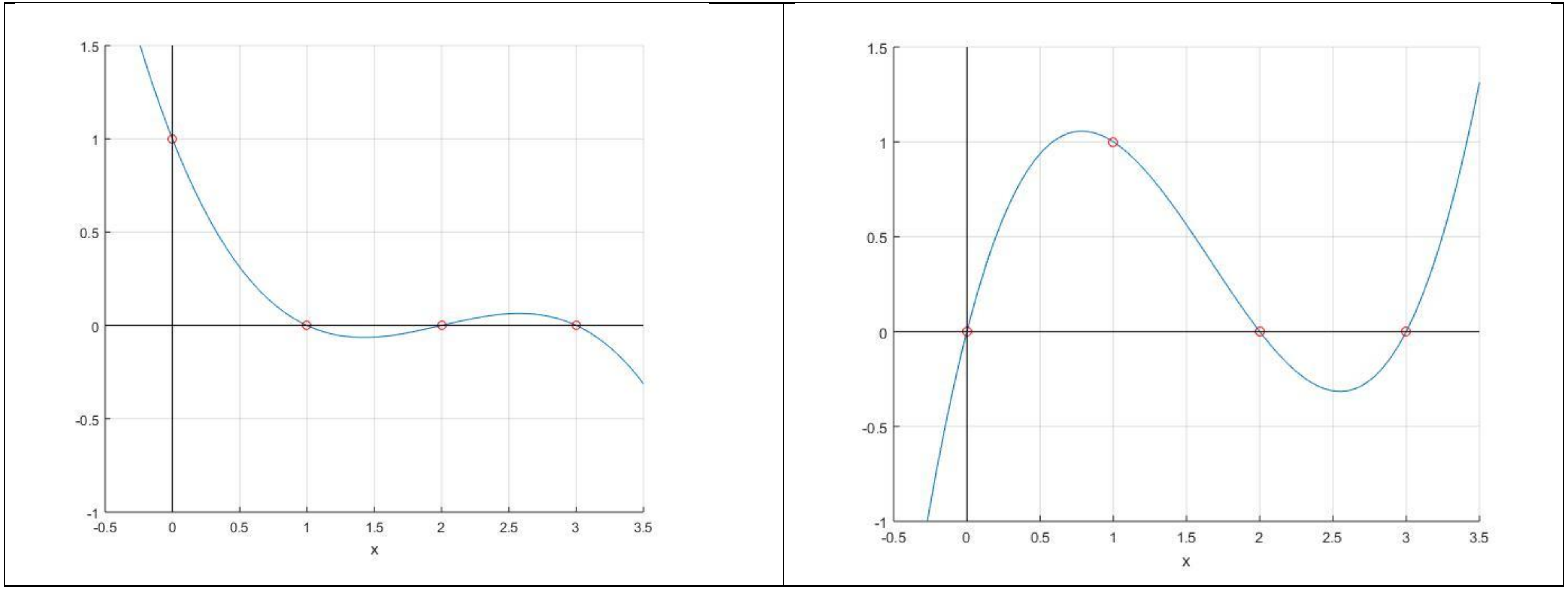
Приливные явления наблюдаются и в атмосфере – в отличие от морских их глазом не заметить, а вот обработкой длинных рядов наблюдений – можно. Впервые это сделал Лаплас. Приливы в атмосфере много меньше изменений при обычной смене погоды. Поэтому и нужны длительные измерения, чтобы выявить слабый, но периодический сигнал на фоне шума большей амплитуды.

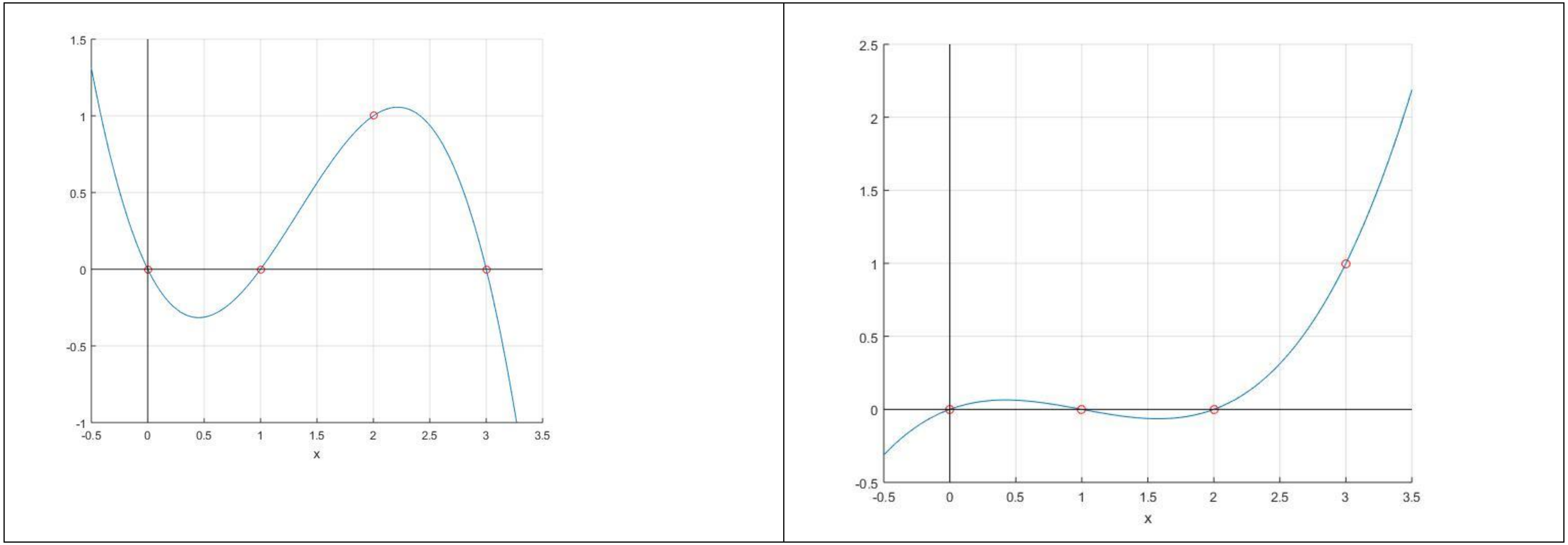
Увеличение точности спутниковых наблюдений за высотой поверхности Земли позволили выявить и в этом твердом объекте периодическую волну (амплитуда составляет десятки сантиметров), бегущую вслед за Луной, см. подробнее, например, [горд-10].

Если в интересующем нас интервале имеется большее количество моментов наблюдения $\{t_j\}_{j=1}^{M}$, то в формуле (4.3) можно увеличить степень многочлена или добавить следующие гармоники:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + c_2 \cos(2\omega t),$$

если мы полагаем желательным более аккуратное описание именно периодической части процесса.





Если количество моментов наблюдения $\{t_j\}_{j=1}^{M}$ еще больше, то вместо интерполяции может оказаться предпочтительным метод наименьших квадратов.

Как построить 1-й базисный многочлен $P_1(t)$? Он обращается в нуль при $t = 1, 2, 3$. Значит, по теореме Э.Безу (1730-1783) $P_1(t)$ делится на $(t-1)(t-2)(t-3)$.

Поскольку $\deg P_1(t) = 3$, можем представить: $P_1(t) = \mathrm{C}(t-1)(t-2)(t-3)$, $C = const$.

Поскольку $P_1(0) = 1$, можем вычислить константу:

$1 = P_1(0) = \mathrm{C}(0-1)(0-2)(0-3), \Rightarrow C = 1/(0-1)(0-2)(0-3).$

В общем случае формула Ж.Л.Лагранжа (1736-1813) для базисного многочлена с номером j на сетке $\{t_i\}_{i=0}^{n}$:

$$P_j(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{i=n}(t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{i=n}(t_j - t_i)}, \ \deg P_j(t) = n.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot P_j(t) \qquad (3)$$

принимает в произвольном узле t_j значение f_j, т. е. условия интерполяции выполнены. Формула (3) аналогична формуле (1) – мы представляем искомый интерполяционный многочлен в виде линейной комбинации базисных многочленов.

Лемма. Интерполяционный многочлен степени n единственен. Предположим противное, существует многочлен $Q(t)$, $\deg Q \le n$, который также является интерполяционным. Тогда разность $P(t) - Q(t)$ обращается в нуль во всех узлах $\{t_i\}_{i=0}^{n}$.

По теореме Безу эта разность делится на многочлен $D(t) = \prod\limits_{i=0}^{i=n}(t - t_i)$. Но степень разности не больше n, а $\deg D = n+1$. Это возможно только если разность – нулевой многочлен, т. е. P=Q, ч. т. д.

Вопрос. Каков общий вид интерполяционных многочленов степени n+1 на такой сетке? Пусть P и Q два интерполяционных многочлена для одного набора. Тогда разность $P(t)-Q(t)$ обращается в нуль во всех узлах $\{t_i\}_{i=0}^n$. Но, в отличие от ситуации леммы, это многочлен более высокой степени. По теореме Безу он делится на многочлен $D(t)$.

Интерполяционный многочлен можно построить и используя разложение многочлена (2) по базису из мономов. Запишем условия интерполяции:

$$P(t_0) = a_n t_0^n + a_{n-1} t_0^{n-1} + \ldots + a_0 = f_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$P(t_n) = a_n t_n^n + a_{n-1} t_n^{n-1} + \ldots + a_0 = f_n.$$

Получена СЛАУ порядка n+1 относительно коэффициентов многочлена $\{a_i\}_{i=0}^n$.

Существуют стандартные компьютерные программы решения таких задач.

Неформальные вопросы.

1. Что будет, если данные интерполяции $\{f_i\}_{i=0}^n$ известны с погрешностями?

2. Что делать, если данных интерполяции больше, чем допустимая степень многочлена?

3. Какие еще варианты интерполяции помимо кусочно-линейных и многочленов возможны?

4. Если построен интерполяционный многочлен $P_n(t)$ для значений $\{f_i\}_{i=0}^n$ в узлах интерполяции $\{t_i\}_{i=0}^n$, а потом мы провели еще измерение в дополнительной точке t_{n+1}, то можно ли использовать $P_n(t)$ для построения нового многочлена? Или все заново?

Ответ на вопрос №4. Многочлен $P_n(t)$ в новой точке принимает какое-то значение $P_n(t_{n+1})$. Вычислим невязку $q_* = f_{n+1} - P_n(t_{n+1})$. Многочлен $D(t) = \prod_{i=0}^{i=n}(t - t_i)$ не портит интерполяцию во всех старых узлах – он там равен нулю. Новый интерполяционный многочлен равен

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + q_* \frac{\prod_{i=0}^{i=n}(t - t_i)}{\prod_{i=0}^{i=n}(t_{n+1} - t_i)}.$$

Вопрос №1. Пусть n=0. Пусть известно, что истинная функция – константа по t. По числу f_0 проводим константу. Если $f_0 = f_0^* + \varepsilon_0$, где первое слагаемое истинное значение, а второе – ошибка измерения, то при всех значениях аргумента $f(t)$ ошибка равна ε_0.

Пусть n=1. Пусть известно, что истинная функция – линейна по t. По числам f_0, f_1 строим линейную функцию $f(t) = f(a)\dfrac{(t-b)}{(a-b)} + f(\mathrm{b})\dfrac{(t-a)}{(b-a)}$. Если $f_j = f_j^* + \varepsilon_j$, $j = 0,1$, где первое слагаемое истинное значение, а второе – ошибка измерения, то ошибка после интерполяции зависит от t:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(a)\frac{(t-b)}{(a-b)} + \varepsilon(\mathrm{b})\frac{(t-a)}{(b-a)}.$$

Будем предполагать, что $|\varepsilon_j| \le \varepsilon_*$. Поскольку внутри отрезка $t \in [a,b]$ обе дроби положительны, внутри отрезка погрешность максимальна при $sign(\varepsilon_a) = sign(\varepsilon_b)$ и равна ε_*. Вне отрезка $[a,b]$ (т. е. при экстраполяции) погрешность максимальна при $sign(\varepsilon_a) \ne sign(\varepsilon_b)$. Например, при $t<a$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_* \frac{(t-b)}{(a-b)} - \varepsilon_* \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{-\varepsilon_*}{(b-a)}\left[2t-a-b\right].$$

<u>Задача</u>. Постройте график $|\varepsilon(t)|$ максимально возможной погрешности интерполяции.

А если узлов интерполяции 3, а не 2? При экстраполяции погрешность растет по мере удаления от отрезка квадратично, а не линейно.

А внутри отрезка? Предположим, что узлы расположены в точках 0, 1, 2. Пусть $\varepsilon_0 = \varepsilon,\ \varepsilon_1 = -\varepsilon, \varepsilon_2 = -\varepsilon$. Построим параболу по этим трем значениям. Облегчим себе вычисления. Поскольку в двух узлах t=1, t=2 значения параболы одинаковые, то ее вершина расположена посередине – при t=1,5. Ищем остальные два коэффициента:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon[a(t-1{,}5)^2 + b], \Rightarrow 2{,}25a + b = 1$$

$$0{,}25a + b = -1 \Rightarrow a = 1,\ b = -1{,}25.$$

Следовательно, при t=1,5 погрешность больше, чем ε, а именно 1,25ε.

Коэффициент L увеличения погрешности ошибок измерения при интерполяции называется константой Лебега (1875-1941). Итак, при трех узлах L=1,25.

А если узлов интерполяции 4?

Устойчивость интерполяционного многочлена по отношению к различным шумам в исходных данных

Предположим, что исходные данные для интерполяции измерены с погрешностями: мы имеем $\left\{y_j+\varepsilon_j\right\}_{j=0}^{N}$, где $\left\{y_j\right\}_{j=0}^{N}$ - истинные значения, а $\left\{\varepsilon_j\right\}_{j=0}^{N}$ - ошибки измерений.

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\left(y_j+\varepsilon_j\right)\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right]=\sum_{j=1}^{N}\left[y_j\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right]+\sum_{j=1}^{N}\left[\varepsilon_j\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right]=P(x)+F(x).$$

Насколько велика погрешность интерполяционного многочлена – второго слагаемого $F(x,\vec{\varepsilon})$?

Предположим, что $\forall j \ \left|\varepsilon_j\right|\leq 1$. Ищем погрешность – модуль второго слагаемого для какой-то точки x при наихудшем раскладе погрешностей ε_j. Величины $\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}$ заданы. Ищем наихудший расклад погрешностей ε_j при $\forall j \ \left|\varepsilon_j\right|\leq 1$. Знаки $\eta_k=sign\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}$ известны. Наихудшие варианты: $\varepsilon_k=\eta_k\Rightarrow F(x,\vec{\varepsilon}(x))=\sum_{k=0}^{N}\left|\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right|$ и

$$\varepsilon_k=-\eta_k\Rightarrow F(x,\vec{\varepsilon}(x))=-\sum_{k=0}^{N}\left|\prod_{k\neq j}^{N}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right|$$

Следовательно, нужно изучить функцию $|F(x,\vec{\varepsilon}(x))|$ - это уже не многочлен, поскольку $\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}(x)$, - где максимум F на нашем отрезке $[a,b]$?

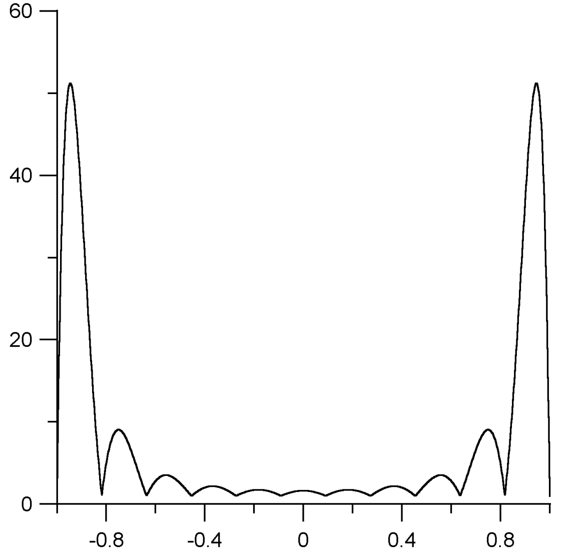
Всякому вектору $\left\{\varepsilon_j\right\}_{j=0}^N$ мы ставим в соответствие многочлен *F(x)* - какова норма этого линейного отображения

$$\vec{\varepsilon}\mapsto F(x,\vec{\varepsilon}) \quad ?$$

Норма эта называется константой Лебега и характеризует устойчивость интерполяционной формулы к шумам $\left\{\varepsilon_j\right\}_{j=0}^N$.

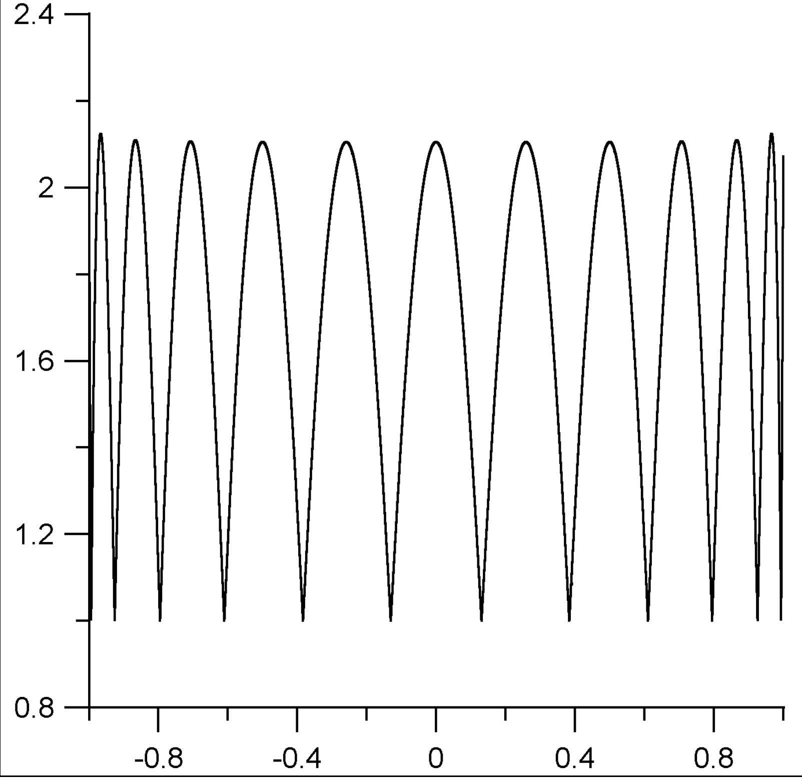
Итак, нам нужно найти $L=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x,\vec{\varepsilon}(x))|$. Константа Лебега характеризует интерполяционную формулу, а не уровень шумов. Если про шумы известно только $\forall j \ \ \left|\varepsilon_j\right|\le A$, то максимальная по x и по $\left\{\varepsilon_j\right\}_{j=0}^N$ ошибка равна AL.

Для того чтобы вычислить L построим график $|F(x,\vec{\varepsilon}(x))|$.



На этом рисунке видим, что для равноудаленных узлов интерполяции при N=11 (12 узлов) константа Лебега превышает 50. Но в середине отрезка [-1,1] ошибка интерполяции из-за шумов в данных невелика. За пределами отрезка [-1,1] ошибка экстраполяции сильно растет. Что же делать, если нужна интерполяция на всем отрезке?

Если расположить узлы не равномерно, а слегка сгустив их к краям, то константу Лебега можно заметно уменьшить →



Узлы – корни многочлена Чебышёва. $T_n\left(x\right)=\arccos[n\cos(x)]$. →

5. Алгебра рациональных функций и интерполяция.

Многочлены можно складывать друг с другом и умножать на число – степень не повысится. А значит, многочлены степени не выше заданного n образуют ($n+1$)-мерное пространство, которое мы будем обозначать P^n. Иначе обстоит дело с умножением. Если перемножить два многочлена положительных степеней n и m, то получится многочлен степени $n+m$. Другими словами, пространство P^n не замкнуто относительно умножения на другие многочлены. Но если рассмотреть пространство всех многочленов (т. е. без ограничения степени) P^∞, то можно и складывать их, и умножать друг на друга – при этом действии мы не выйдем за пределы бесконечномерного (докажите!) пространства P^∞.

А вот если попробовать поделить многочлен на многочлен, то, как правило, многочлен не получится.

К.5.1. Докажите, что при делении многочлена $p(x)$ степени $n \geq 1$ на многочлен (x-a), где a=const, в остатке получается число, равное $p(a)$.

К.5.2. Докажите, что многочлен $p(x)$ степени $n \geq 1$ делится на многочлен (x-a), где a=const, тогда и только тогда, когда число a – корень многочлена $p(x)$.

К.5.3. Докажите, что многочлен $p(x)$ степени $n \geq 1$ делится на многочлен $q(x)$ степени $m \leq n$, тогда и только тогда, когда все корни многочлена q являются (с учетом кратностей этих корней) корнями многочлена p.

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, причем знаменатель отличен от тождественного нуля. Для данной функции R многочлены могут быть разными – можно умножить и числитель и знаменатель на ненулевой многочлен $r(x)$ – функция R от этого не изменится. Удобно среди различных представлений функции $R(x)$ выбрать самое простое. Для этого предположим, что ежели у многочленов $p(x)$ и $q(x)$ имеется общий корень a, то мы сократим числитель и знаменатель на множитель $(x\text{-}a)$.

Поскольку и числитель, и знаменатель можно умножать на ненулевое число, будем предполагать, что коэффициент многочлена q при старшей степени переменного x равна 1. Теперь многочлены p и q определяются по заданной рациональной функции R уже однозначно. Многочлены – частный случай рациональных функций (если знаменатель тождественно равен 1).

У многочлена q могут иметься нули, а значит, $R(x)$ принимает в этих точках бесконечное значение. Такие точки будем называть полюсами функции R.

Если сложить две рациональные функции или умножить на число, то снова получится рациональная функция, т. е. множество всех рациональных функций $\mathbb{Q}[x]$ образует линейное пространство. Мало этого, если умножить их друг на друга или даже поделить (при условии, что делитель не равен тождественно нулю), то получим снова рациональную функцию[10].

---

[10] Такая структура (если выполнены дополнительные предположения о свойствах этих алгебраических операций, см., например [курош]) называется полем. А аналогичная алгебраическая структура, но без возможности деления (например P^{∞}) называется кольцом. Укажите другие алгебраические структуры, где определены операции сложения, вычитания, умножения, (и возможно деления).

В отличие от случая многочленов, при сложении рациональных функций степени числителя и знаменателя могут возрастать. Поэтому при ограничении на степени числителя и (или) знаменателя ни линейного пространства, ни кольца не получается.

Попробуем решить задачу интерполяции, рассмотренную в предыдущем параграфе, но с помощью рациональной функции $R(x)=\frac{a+bx}{c+x}$. Условия $R(x_j)=y_j$, j=1, 2, 3 можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a,b,c числителя и знаменателя:

$$
\begin{aligned}
a+bx_1 &= y_1\left(x_1+c\right),\\
a+bx_2 &= y_2\left(x_2+c\right),\\
a+bx_3 &= y_3\left(x_3+c\right).
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

В предыдущем параграфе мы доказали, что задача интерполяции многочленом на прямой (или на комплексной плоскости) всегда имеет единственное решение, т. е. определитель Вандермонда соответствующей системы линейных алгебраических уравнений всегда отличен от нуля. В случае же рациональной интерполяции ситуация иная. Система может оказаться вырожденной и данным интерполяции $\vec{y}=\langle y_1,y_2,y_3\rangle$ может тогда соответствовать бесконечно много наборов коэффициентов $\langle a,b,c\rangle$ или ни одного набора.

Например, нулевым данным $\vec{y}=\langle y_1,y_2,y_3\rangle$ при такой рациональной интерполяции соответствуют нулевые значения неизвестных a и b, но произвольное значение c.

К.5.4. Вычислите определитель Δ матрицы системы (5.1) относительно неизвестных $\langle a,b,c\rangle$:

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & -x_1y_1 \\ 1 & x_2 & -x_2y_2 \\ 1 & x_3 & -x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что множество таких $\vec{y}=\langle y_1,y_2,y_3\rangle$, обнуляющих этот определитель $\Delta=0$, образует двумерное подпространство. Получите уравнение для этого подпространства.

К.5.5. Пусть определитель $\Delta\neq 0$, и поэтому решение задачи о построении рационального интерполянта R со степенями числителя и знаменателя не выше 1 имеет единственное решение. В какой точке находится полюс R?

Тут уместно задать вопрос: какими достоинствами и недостатками обладает рациональная интерполяция по сравнению с полиномиальной? В какой ситуации она предпочтительней? Здесь очень важна априорная информация об истинной функции, которую мы пытаемся восстановить по данным интерполяции.

Предположим, например, что нужно построить интерполяцию при условии, что одно из интерполяционных значений, скажем y_3, бесконечно (такую задачу в классе многочленов не решить), а два первых – обыкновенные числа. Тогда в точке x_3 располагается полюс искомой рациональной функции R, откуда $c=-x_3$. Теперь для коэффициентов числителя получаем два линейных уравнения:

$$a+bx_1=y_1\left(x_1-x_3\right),$$
$$a+bx_2=y_2\left(x_2-x_3\right).$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a, b всегда имеет единственное решение.

Если нужно обеспечить два полюса и одно обычное условие интерполяции, то нужно изменить класс рациональных функций, в котором мы ищем интерполянт – при таком же числе неизвестных коэффициентов $\langle a,b,c\rangle$ в знаменателе надлежит иметь многочлен второго порядка, а в числителе – нулевого. И эта задача будет иметь единственное решение.

Замечание. Обратим внимание на важное отличие полиномиальной и рациональной интерполяций. Пусть имеется два произвольных набора данных $\left\{y_j^{'}\right\}_{j=1}^{n}$ и $\left\{y_j^{''}\right\}_{j=1}^{n}$ в одних и тех же узлах $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{n}$. Пусть многочлены *y'(x)* и *y''(x)* – многочлены степени не выше (n-1), - решения соответствующих задач полиномиальной интерполяции. Тогда именно многочлен *y(x)= y'(x)+y''(x)* - решение задачи интерполяции для набора $\left\{y_j\right\}_{j=1}^{n}$, $y_j=y'_j+y''_j$ при всех j=1,…,n.

В случае же рациональной интерполяции с ненулевой степенью многочлена в знаменателе это утверждение уже неверно (Проверьте!).

Другое применение именно рациональных интерполянтов – класс задач, где среди узлов интерполяции имеется и $x_1 = \infty$. Если при этом $y_1 = 0$, то для выполнения этого условия интерполяции необходимо и достаточно выбрать степень числителя рациональной функции строго меньше степени знаменателя. Если же $y_1 \neq 0$, то степени эти должны быть равны. Например, для функции $R(x) = \dfrac{a+bx}{c+x}$ мы получаем условие $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = b = y_1$. Два остальные коэффициента R надлежит находить из условий интерполяции в других, конечных точках. Такая функция *R* не может быть ограничена на всей прямой – у нее полюс при *x*=-*c*. Если же нужно построить именно ограниченную рациональную функцию (все полюса – нули знаменателя – лежат вне вещественной прямой), то можно использовать другую рациональную функцию, например, *R*= $\dfrac{a+bx^2}{c+x^2}$ - при положительном коэффициенте *c* такая функция ограничена и непрерывна.

Случай, когда поведение интерполянта при $x \to \infty$ описывается более точно, будет рассмотрен в параграфе $?.

Замечание. Для интерполянтов – рациональных функций мы не можем задать по-разному асимптотические значения при $x \to \pm\infty$.

Если необходимо построить функцию, имеющую при $x \to \pm\infty$ различные пределы, то может оказаться полезным добавить к рациональной функции *R(x)* слагаемое $arctg(x)$ или $arctg(kx),\ k = const$.