Интерполяция Эрмита

Задача: построить кубический многочлен *P(x)*, который принимает в точках *a*, *b* заданные значения + его производные принимают там заданные значения – итого 4 условия на 4 коэффициента. Такую форму принимает, например, изогнутая металлическая линейка, если на ее краях заданы и ее высоты, и ее наклоны.

Пусть сначала *P(b)=0, P'(b)=0*. Базисные многочлены, которые во второй точке имеют кратный ноль, суть $\frac{c(x-a)(x-b)^2}{h^3}+\frac{d(x-b)^2}{h^2}$, $c,d=const$, $h=b-a$.

Приравняем в первой точке функцию и производную: $d=P(a)$; $\frac{c}{h}-\frac{2d}{h}=P'(a)\Rightarrow$

$c=P'(a)h+2P(a)$. Аналогично можно построить кубический многочлен, у которого в левой точке двукратный корень, а п правой точке – заданные значения функции и производной. Их сумма решает задачу интерполяции.

После приведения подобных *при* $P(a),P'(a),P(b),P'(b)$ получаем:

$$P(x)=P'(a)\frac{(x-a)(x-b)^2}{h^2}+P(a)\left[\frac{2(x-a)(x-b)^2}{h^3}+\frac{(x-b)^2}{h^2}\right]+$$

$$+P'(b)\frac{(x-a)^2(x-b)}{h^2}+P(b)\left[\frac{2(x-a)^2(b-\mathrm{x})}{h^3}+\frac{(x-a)^2}{h^2}\right].$$

Упражнение. Постройте график кубического многочлена при $a=0,\ b=1,\ P(a)=-2,\ P'(a)=3,\ P(b)=-4,\ P'(b)=5.$

Сплайны

Пусть задана сетка на отрезке $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\ldots x_{N-1}<x_N=b.$

Сплайном степени n и дефекта k называется функция, которая

- 1) совпадает с каким-то многочленом степени n на каждом подотрезке $[x_j, x_{j+1}]$;
- 2) $(n\text{-}k)$-я ее производная непрерывна в узлах сетки. Следующие могут рваться.

Пример: кусочно-линейная непрерывная функция (ломаная) есть сплайн степени 1 и дефекта 1. Рассмотрим сейчас кубические сплайны дефекта 1. Значит, вторая производная должна быть непрерывна и в узлах сетки.

Вторая производная кубического многочлена для подотрезка $\left[x_1, x_2\right]$ при $x = x_1$:

$$P''(x_1) = -4P'(x_1)/h_{12} + P(x_1)[-4-2]/(h_{12})^2 - 2P'(x_2)/h_{12} + P(x_2)[4+2]/(h_{12})^2.$$

Вторая производная кубического многочлена для подотрезка $\left[x_0, x_1\right]$ при $x = x_1$:

$$P''(x_1) = 2P'(x_0)/h_{01} + 4P'(x_1)/h_{01} + 6\left[P(x_0) - P(x_1)\right]/(h_{01})^2.$$

Поскольку вторая производная в узле x_1 непрерывна, эти два выражения равны. Имеем линейное соотношение между 6 величинами: $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $P(x_1)$, $P'(x_1)$, $P(x_2)$, $P'(x_2)$.

Аналогичное соотношение дает любой внутренний узел сетки $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{N-1}$.

Если решается задача интерполяции, то значения самой функции во всех узлах сетки $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{N}$ уже заданы. Нужно вычислить значения $m_j = P'\left(x_j\right)$, $j = 0,...,N$. Линейное соотношение в точке можно записать в виде:

$$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = c_1, \text{ где } \lambda_1 = \frac{h_{01}}{h_{01} + h_{12}} < 1,\ \mu_1 = 1 - \lambda_1 < 1,\ c_1 = 3\lambda_1 \frac{y_1 - y_0}{h_{01}} - 3\mu_1 \frac{y_1 - y_2}{h_{12}}$$

Если значения m_0, m_1 найдены, то, как мы знаем, на подотрезке $\left[x_0, x_1\right]$ можно построить интерполяцию Эрмита. Если значения m_1, m_2 найдены, то на подотрезке $\left[x_1, x_2\right]$ построим интерполяцию Эрмита…

Объединение этих «кусочков» многочленов и даст на всем отрезке $[a,b]$ кубический сплайн дефекта 1.

Непрерывность второй производной сплайна дает N-1 линейное уравнение для N+1 неизвестной величины $\left\{m_j\right\}_{j=0}^{N}$. Если добавить еще 2 линейных уравнения (первое и последнее), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка N+1.

$$\begin{pmatrix} * & * & & & & * \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \dots & \vdots \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ * & & & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

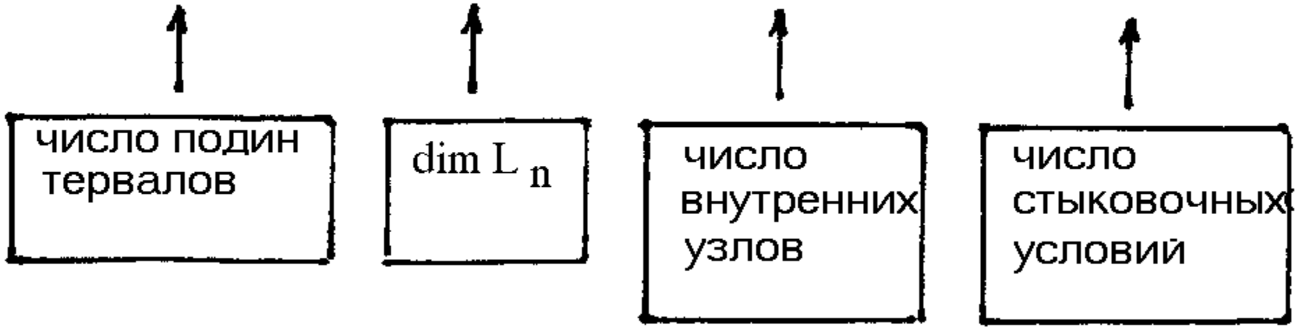
Коэффициенты недостающих уравнений помечены *. Эти два уравнения называются граничными условиями для сплайна. Трехдиагональная матрица у этой системы.

Например, условия нулевых производных на краях: $\mu_0 = \lambda_N = 0,\ c_0 = c_N = 0.$

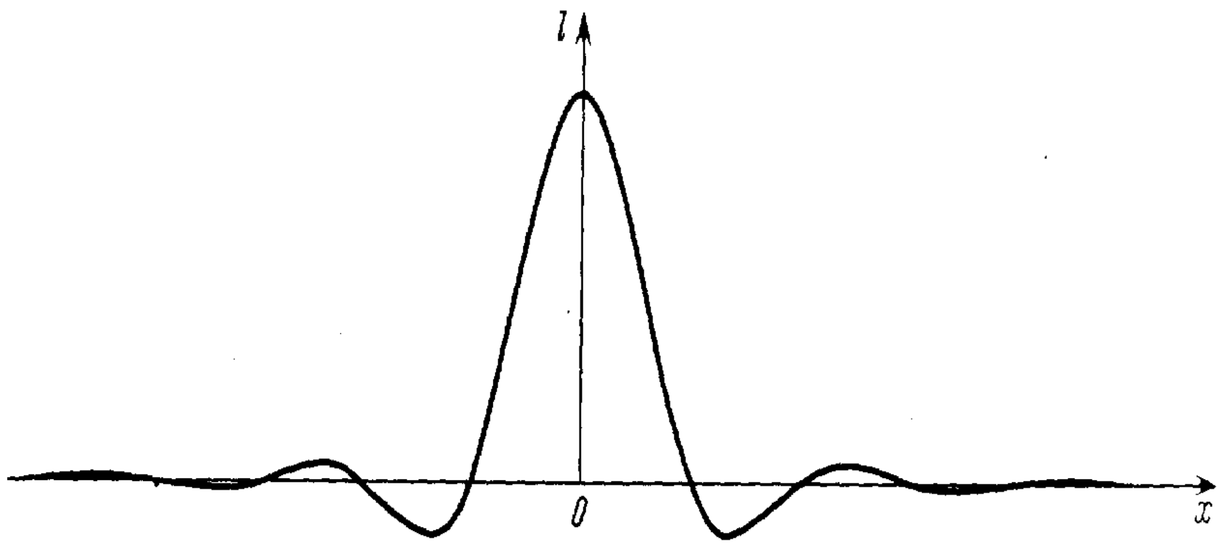
Если «не подведут» эти два уравнения, то в матрице системы доминирует главная диагональ. В каждой строке на диагонали стоит 2, а сумма остальных элементов равна 1. По теореме Гершгорина все собственные числа этой матрицы лежат в круге с центром в точке 2 и с радиусом 1. Значит, нуль не является собственным числом, матрица невырождена и система имеет единственное решение. Если не подведут граничные условия.

Размерность пространства сплайнов степени *n* дефекта *k* при *N+1* узле

$$d = N \times (n+1) - (N-1) \times (n-k+1) = \mathbf{n+1+k(N-1)}$$



Здесь L_n - пространство многочленов степени не выше n. В частности, для кубических многочленов n=3, и для дефекта 1 получаем d=N+3. Условия интерполяции заданы в N+1 узлах сетки. Нужно 2 дополнительных граничных условия.

Базисный сплайн (в одном узле 1, в остальных – 0) на равномерной сетке вдали от границ имеет график	

Замечания. Вместо задачи интерполяции можно использовать сплайны для дифференцирования функций, известных только на дискретной сетке.

Можно решать обратную задачу (интегрирования), если предположить, что известны значения производных $\left\{m_j\right\}_{j=0}^{N}$, а нужно найти значения функции $\left\{y_j\right\}_{j=0}^{N}$. Как известно, первообразная находится с точностью до константы. Можно, например, положить $y_0=0$. Второе условие можно взять не локальным. Например, дополнить СЛАУ соотношением $Q\left\{m_0,m_1,...,m_N\right\}=y_N$, где Q – квадратурная формула высокого порядка, например, квадратурная формула Гаусса.

Производные сплайна

Многочлен обычно обозначают *P*, а сплайн *S*. Пусть все m_j найдены. Укажем явную формулу для первой производной кубического сплайна на подотрезке $\left[x_j, x_{j+1}\right]$:

$$\frac{dS}{dx}(x) = m_j \frac{(x_{j+1}-x)(2x_j + x_{j+1} - 3x)}{h_{j+1}^2} -$$

$$-m_{j+1}\frac{(x-x_j)(2x_{j+1}+x_j-3x)}{h_{j+1}^2} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^3}6(x-x_j)(x_{j+1}-x).$$

Вторая производная сплайна:

$$\frac{d^2S}{dx^2}(x) = -2m_j\frac{(2x_{j+1}+x_j-3x)}{h_{j+1}^2} - 2m_{j+1}\frac{(2x_j+x_{j+1}-3x)}{h_{j+1}^2} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^3}6(x_j+x_{j+1}-2x).$$

Знать набор $\left\{m_j\right\}_{j=0}^N$ удобнее, чем все *4N* коэффициентов многочленов на всех подотрезках.

<u>Упражнения.</u> 1.Определите скачок третьей производной во внутренних узлах сетки.

2. Какие коэффициенты $\mu_0, \lambda_N, c_0, c_N$ отвечают условиям непрерывности третьей производной в крайних внутренних узлах сетки x_1 и x_{N-1} ?

Теорема Биркгофа – де Бура. Сходимость сплайна при h→0

Пусть $f \in C^3_{[a,b]}$. Пусть $G_h = \{x_j\}_{j=1}^{N}$ - сетка на отрезке, с шагом, не превосходящим h.

Пусть S – интерполяционный сплайн, построенный по значениям $y_j = f(x_j)$ для всех $j = 0,\ldots,N$. Насколько велика норма погрешности интерполяции $\|f - S\|_C$? Здесь норма чебышёвская: $\|\varphi\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi|$.

Конечно, при заданной сетке всегда можно подобрать такую функцию *f*, что норма погрешности интерполяции будет велика. Но если, напротив, зафиксировать *f*, и взять последовательность сеток G_h, $h \to 0$, то можно доказать оценку: $\|f - S\|_C = O\left(h^3\right)$.

Для производных теорема Биркгофа – де Бура (без док.) также утверждает, что

$$\left\|d_x^i f - d_x^i S\right\|_C = O\left(h^{3-i}\right),\ i = 1,2,3.$$

Предполагается: граничные условия для интерполяционного сплайна «разумные».

Если функция *f* еще более гладкая, порядок сходимости в теореме можно еще увеличить.