

Циклы. Предельные циклы и их устойчивость

Цикл – замкнутая траектория автономной системы дифференциальных уравнений.

Например, пусть $d_t x = \partial_y H$, $d_t y = -\partial_x H$, $H = H(x, y)$. У такой **гамильтоновой системы** диффузов функция (**гамильтониан**) H – первый интеграл. В окрестности максимума или минимума гамильтониана H его изолинии по лемме Морса замкнуты. Это циклы гамильтоновой системы.

Предельным циклом называется такой цикл, что в его окрестности нет других циклов.

Пример. $d_t x = y + \varepsilon x(R - r)$, $d_t y = -x + \varepsilon y(R - r)$, $\varepsilon = \text{const}$, $R = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда $rd_t r = \varepsilon r^2(R - r) \sim d_t r = \varepsilon r(R - r)$.

Задача. Решить это ОДУ.

При $\varepsilon > 0$ эта система имеет **устойчивый предельный цикл**, поскольку радиус будет стремиться к R . При $\varepsilon < 0$ это **неустойчивый предельный цикл**. При $\varepsilon = 0$ все окружности – циклы. Т.е. предельного цикла у этой системы нет.

Динамика угловой координаты не зависит от параметра ε . При $\varepsilon = 0$ уравнение $d_t^2 x = -x \Rightarrow T = 2\pi$. Угловая скорость равна 1.