Логистические модели и отрицательная обратная связь.

Модификации (нелинейные) модели Мальтуса $d_t x = k(x)x$

Простейший вариант: $k(x)=a-bx$ - логистическое уравнение.

Функция $xk(x)$ в правой части уравнения имеет два корня: неустойчивый $x=0$ и устойчивый $x=a/b$ – предельная численность. Заменой переменных делаем коэффициенты единицами. Добавим постоянный отлов: $d_t x = x - x^2 - c$

При $c<1/4$ имеется две стационарные точки – решения квадратного уравнения. Легко проверить, что верхнее значение устойчиво. При $c=1/4$ происходит бифуркация, и при $c>1/4$ популяция за конечное время истребляется.

Выловить хочется побольше. Рыбаки подходят к опасному бифуркационному значению c и… Лучше не жесткий план отлова, а мягкий: $Q(x) = \vartheta x$ в зависимости от численности популяции x. Например: $d_t x = x - x^2 - \vartheta x$. Стационарные решения: $x=0$ и устойчивый $x_* = 1 - \vartheta$ предельная численность. Отлов $Q(x_*) = x_* \vartheta = (1-\vartheta)\vartheta$ максимален при

$$\vartheta_{opt} = 1/2. \quad Q\left(\vartheta_{opt}\right) = 1/4.$$

Но, если ошибиться и взять немного другое ϑ, то немного уменьшится отлов, но не произойдет истребления популяции рыбы.

Нединамический (жесткий) план отлова

Фазовый портрет и графики при нединамическом плане отлова.

- При слабом возмущении оптимального плана есть шанс уничтожить популяцию.

См. В.И.Арнольд. Жесткие и мягкие математические модели. М., МЦНМО, 2008.

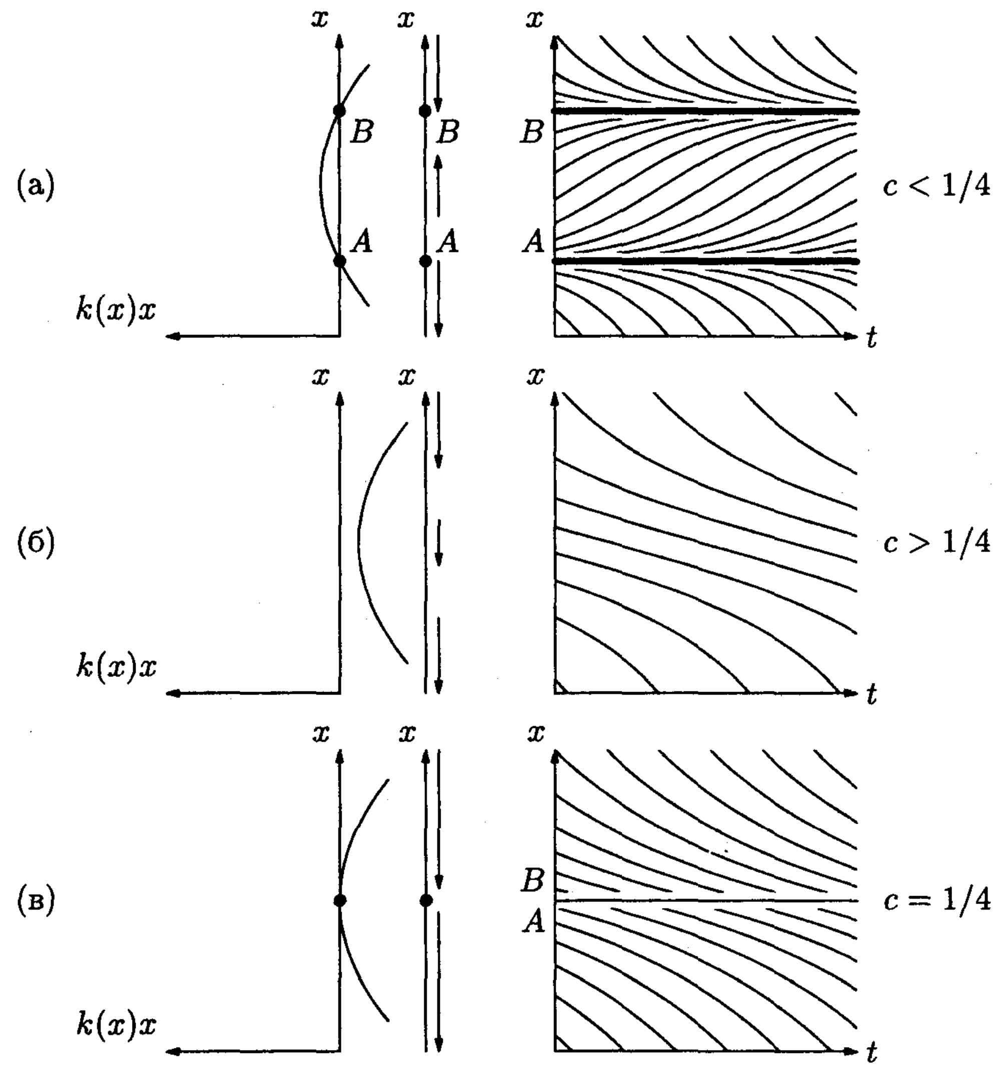

Рис. 6. Недолов (а), перелов (б), и оптимизация (в) рыболовства.