

## ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ТОЧЕК ПОКОЯ

Рассмотрим, линейную однородную систему

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$$

где  $a_{ij}$  – числа и  $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ . Это автономная система. Мы знаем, что вид ее решения зависит от характеристических корней матрицы  $\mathbf{A}$ . Изучив все возможные случаи решений, мы получим следующие расположения траекторий в окрестности точки покоя  $O(0; 0)$ :

1) Если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  – рисунок 1. Точка покоя асимптотически устойчива. Точку покоя при таком расположении траекторий называют **устойчивым узлом**.

2) Если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  – рисунок 2. Точка покоя неустойчива. Ее называют **неустойчивым узлом**.

3) Если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  – рисунок 3. Точка покоя неустойчива. Ее называют **седлом**.

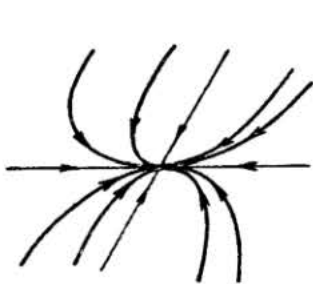


Рисунок 1

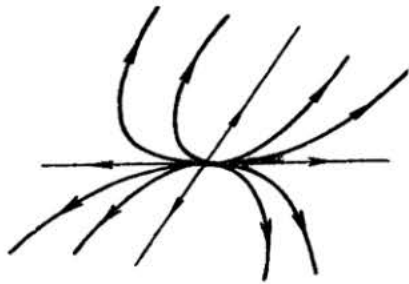


Рисунок 2

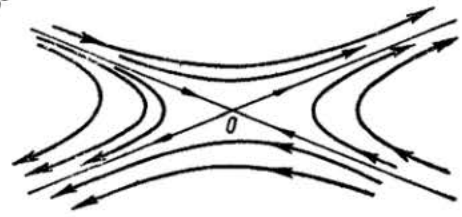


Рисунок 3

4) Если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ),  $\alpha < 0$  – рисунок 4. Точка покоя асимптотически устойчива. Ее называют **устойчивым фокусом**.

5) Если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ),  $\alpha > 0$  – рисунок 5. Точка покоя неустойчива. Ее называют **неустойчивым фокусом**.

6) Если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ),  $\alpha = 0$  – рисунок 6. Точка покоя устойчива. Ее называют **центром**.



Рисунок 4



Рисунок 5

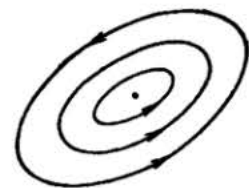


Рисунок 6

7) Если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  – рисунок 7 или 8. Точка покоя асимптотически устойчива. При таком расположении траекторий, как на рисунке 7, ее называют **устойчивым вырожденным узлом**. Если траектории располагаются как на рисунке 8 – **диркритическим узлом**.

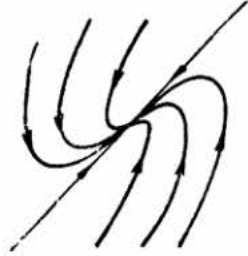


Рисунок 7

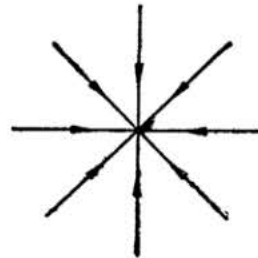


Рисунок 8

8) Если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  – рисунок 9 или 10. Точка покоя неустойчива. Ее называют **неустойчивым вырожденным узлом**.

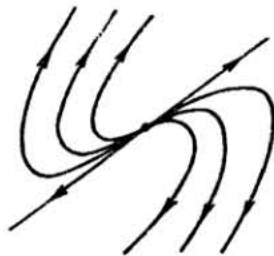


Рисунок 9

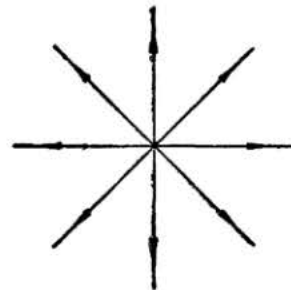


Рисунок 10

Итак, мы исчерпали все возможности, поскольку случай  $\lambda_1 = 0$  (или  $\lambda_2 = 0$ ) исключен условием  $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ .