

Дифференциальное уравнение – маятник без трения

Уравнение автономное, второго порядка: $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x$. $\omega^2 = \frac{g}{L}$.

Тогда умножим на $\frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\omega^2 \sin x \frac{dx}{dt} = \omega^2 \frac{d(\cos x)}{dt}$$

или $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \omega^2 \cos x = C$

C – первый интеграл уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(\omega^2 \cos x + C)}$$

Это уравнение можно интегрировать методом разделения переменных. Но **интеграл** (он называется **эллиптическим**) не берется в элементарных функциях.

Возможны два режима:

колебательный $\omega^2 > |C|$

и вращательный $\omega^2 < |C|$

