Система «жертвы-хищники» - ур-ния Лотки - Вольтерра

Количество особей популяции жертв $x=x(t)$ при наличии хищников $y=y(t)$ (корм без ограничений) изменяется со временем: $d_t x = x(\alpha - \beta y)$

Количество особей популяции хищников $y=y(t)$ при наличии жертв $x=x(t)$ изменяется со временем: $d_t y = y(-\gamma + \delta x)$

Получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений.

Стационарные точки системы – там, где правые части обращаются в нуль: $\vec{e}_1 =< 0,0 >;\ \vec{e}_2 =< x_*, y_* >;\ x_* = \gamma / \delta, y_* = \alpha / \beta$

Оси квадранта инвариантны: $\Leftarrow x_0 = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0,\ y(t) = y_0 e^{-\gamma t},$

$\Leftarrow y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0,\ x(t) = x_0 e^{\alpha t}.$

Линеаризуем систему в окрестности стационарной точки $\vec{e}_2$, т. е. сделаем замену $u = x - x_*,\ v = y - y_*$ в нашей системе. Поскольку исходную систему рассматриваем в малой окрестности стационарн. точки, то в новой системе $<u,v>$ - в окрестности начала координат.

Малость означает, что мы собираемся пренебречь квадратичными членами по сравнению с членами первого порядка по $<u,v>$.

Уравнения Лотки – Вольтерра - 2

Пренебрегая $O(uv)$, получим $d_t u = x_*(-\beta v),\ d_t v = y_*(\delta u)$

Характеристическое уравнение

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & -\gamma\beta/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix} - \lambda E\right] = 0 = \lambda^2 + \alpha\gamma \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$$

Следовательно, общее решение линеаризованного уравнения:

$$u = C\sin(\omega t + \varphi),\ C,\varphi = const,\ \omega = \sqrt{\alpha\gamma};\ v = C_1\cos(\omega t + \varphi),$$

<u>Вывод</u>: период малых колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$C_1 = \frac{-C\delta}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

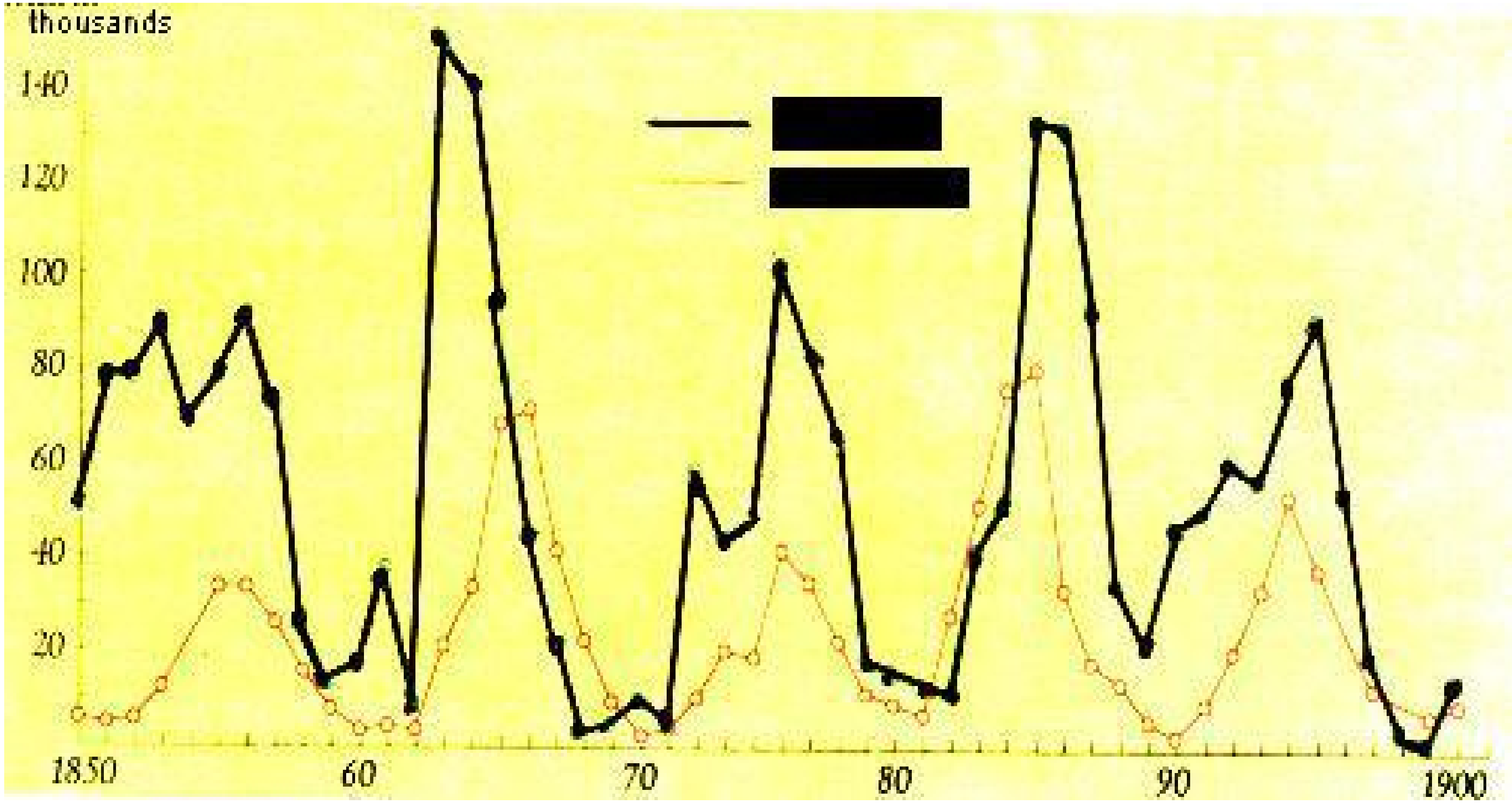
<u>Решения</u>: $x = x_* + C\sin(\omega t + \varphi),\ y = y_* + C_1\cos(\omega t + \varphi).$

А как обстоит дело с большими отклонениями от стационарного решения ?

По линеаризованной системе здесь нельзя сказать, устойчива точка или нет.

Вернемся к нелинейной системе, найдем первый интеграл.

Система «жертвы-хищники» - динамика добычи шкурок в Канаде



Уравнения Лотки – Вольтерра – 3

Построим первый интеграл нелинейной системы.

$$d_t x = x(\alpha - \beta y) \quad d_t y = y(-\gamma + \delta x) \qquad \Rightarrow \quad \delta d_t x + \beta d_t y = \alpha\delta x - \beta\gamma y.$$

$$d_t \ln(x) = \alpha - \beta y, \ d_t \ln(y) = -\gamma + \delta x \Rightarrow \gamma d_t \ln(x) + \alpha d_t \ln(y) = -\beta\gamma y + \alpha\delta x.$$

Вычитая уравнения $\quad d_t \left[\delta x + \beta y - \ln(x^{\gamma} y^{\alpha}) \right] = 0$

Функция $V(x, y) = \left[\delta x + \beta y - \ln(x^{\gamma} y^{\alpha}) \right] -$ *первый интеграл.*

Эта функция определена при строго положительных аргументах и имеет единственную стационарную точку $: \langle x_*, y_* \rangle$.

Уравнения Лотки – Вольтерра – 3b

$$d_t x = x(\alpha - \beta y)$$
$$d_t y = y(-\gamma + \delta x)$$

Другой способ построения первого интеграла системы

Свести ее (по теореме о неявной функции) к одному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-\gamma + \delta x)}{x(\alpha - \beta y)}$$

где переменные разделяются:

$$\int \frac{(\alpha - \beta y)dy}{y} = \int \frac{(-\gamma + \delta x)dx}{x}$$

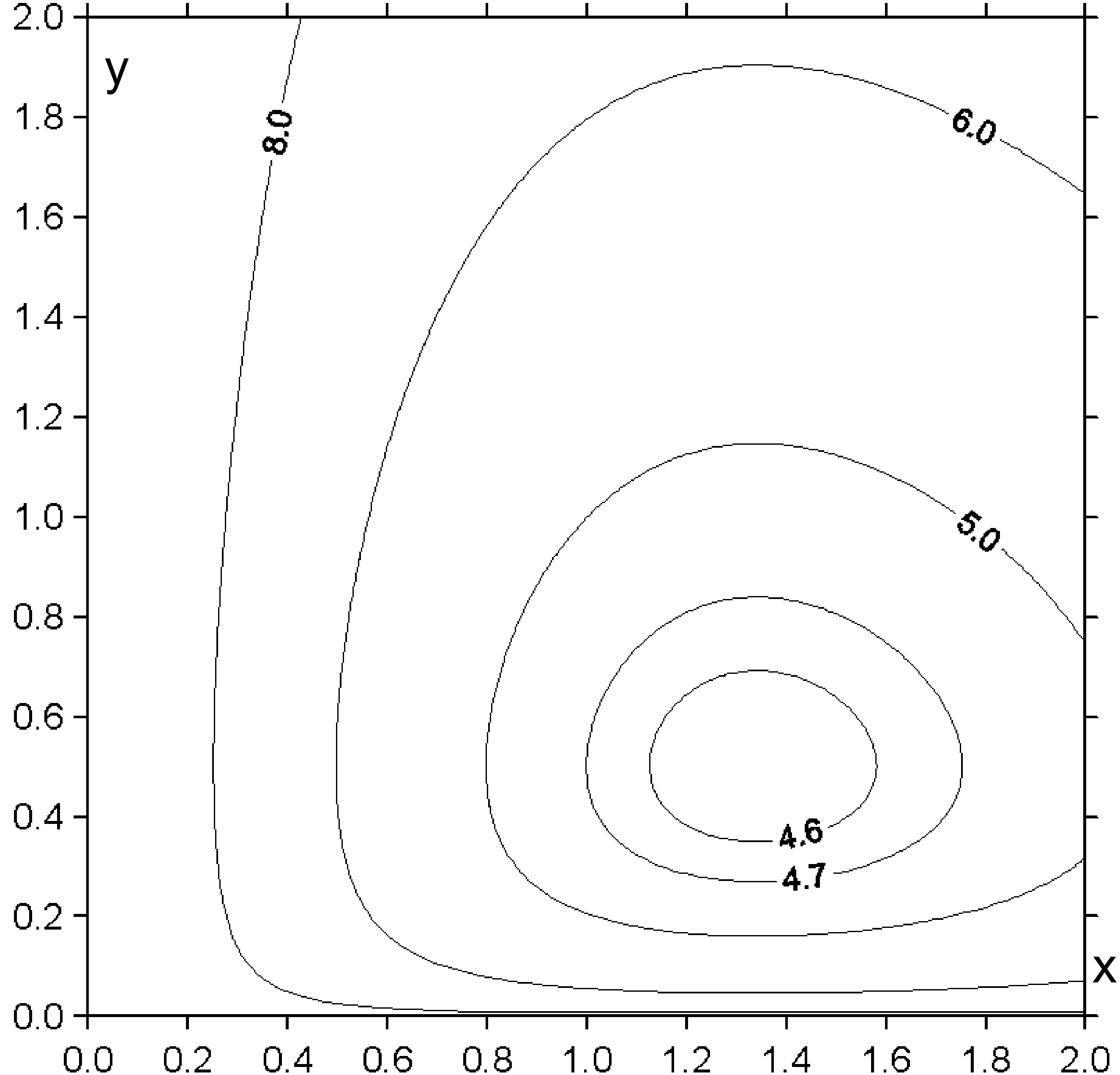
- получаем тот же первый интеграл *V*.

Первый интеграл для системы Лотки - Вольтерра

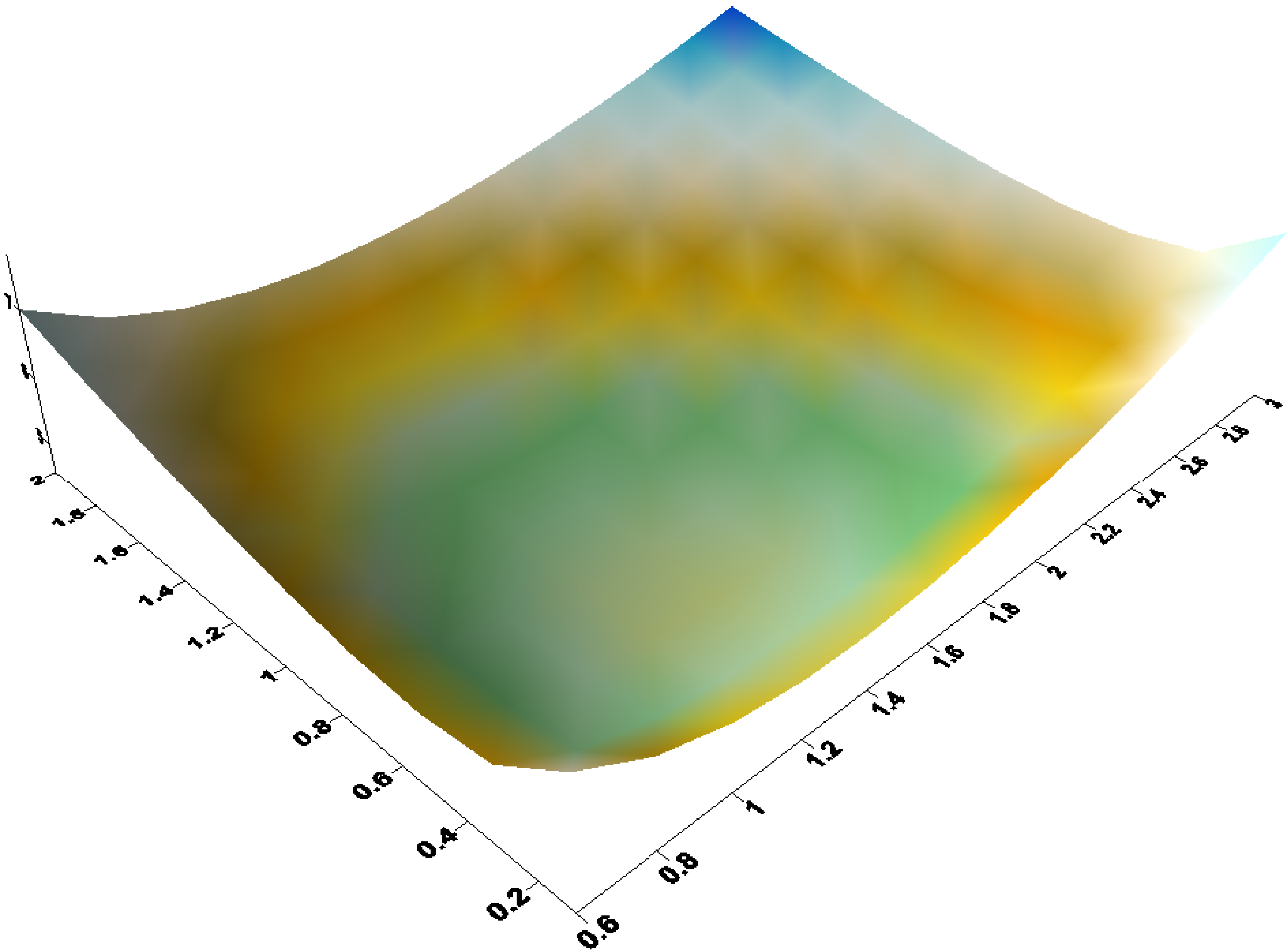
Изолинии первого интеграла *V(x,y)* при

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4.$$

На границе квадранта значения интеграла *V(x,y)* бесконечны.



Первый интеграл для системы Лотки - Вольтерра



Два вида конкурируют за ресурсы

Уравнения содержат произвольную функцию $F(N_1, N_2)$ двух переменных – потребление ресурса, когда численность первой популяции N_1, второй N_2:

$$d_t N_1 = N_1 \cdot \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, N_2\right)\right)$$

$$d_t N_2 = N_2 \cdot \left(\varepsilon_2 - \gamma_2 F\left(N_1, N_2\right)\right)$$

Функция F – растущая по обоим аргументам до бесконечности. Из системы можно вывести, что решения при любых временах не превзойдут величин M_1, M_2: $F(M_1, 0) > \varepsilon_1 / \gamma_1, F(0, M_2) > \varepsilon_2 / \gamma_2$ если они в начальный момент их не превышали. Далее

$$d_t \ln N_1 = \varepsilon_1 - \gamma_1 F,\ \ d_t \ln N_2 = \varepsilon_2 - \gamma_2 F \Rightarrow d_t \ln[N_2^{\gamma_1} / N_1^{\gamma_2}] = \varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2$$

Два вида конкурируют за ресурсы

Логарифм растет или убывает (правая часть равна нулю – случай маловероятный) линейно. Следовательно, одна из численностей ограничена, а вторая – убывает. Результат зависит от знака правой части – константы $\mu = \varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2$, а не от конкретных начальных условий и конкретного вида функции $F(N_1, N_2)$.

Допустим, исчез второй вид. Тогда динамика первого определяется уравнением $d_t N_1 = N_1 \cdot \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right)\right)$. Решение определяется методом разделения переменных, а предельное значение сразу – из уравнения $\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_{1*}, 0\right) = 0$

Мораль: в модели хищники и жертвы решение периодично, а при конкуренции за жизненно важный ресурс с вероятностью 1 кто-то вымрет.

Недостатки этих моделей: детерминированность, неучет внешних факторов,
Непрерывность вместо дискретности, неучет распределения популяций по возрастам.