Простейшая модель газо- и гидро-динамики – уравнение Бейтмана - Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{число Рейнольдса } \mathrm{Re}=\frac{UL}{D},$$

где $u=u(t,x)$ - скорость, D - коэффициент вязкости, $x\in[0,2\pi]$, периодичность по x.

Для компактной аппроксимации перепишем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f=-u^2/2 .$$

С помощью замены Форсайта – Флорина – Коула – Хопфа получаем из решения $\sin(2\pi x)\exp(-4\pi^2 Dt)$ для обычного уравнения диффузии точное решение уравнения (2):

$$u_0(x)=\frac{-2D\cos(x)}{2\exp(Dt)+\sin(x)}.$$

На нем оценим погрешности различных разностных схем. Компактная поправка (при очень маленьких D - со сглаживанием) и тут подавляет осцилляции. Аппроксимируем дифференциальное уравнение (2) с условием периодичности на сетке $x_j=jh,\ h=1/N,\ j=0,...,N;\ t=n\tau$, где τ - шаг по времени, $\tau=T/M$, h - шаг по пространству; $\forall n \quad u_0^n=u_N^n$.

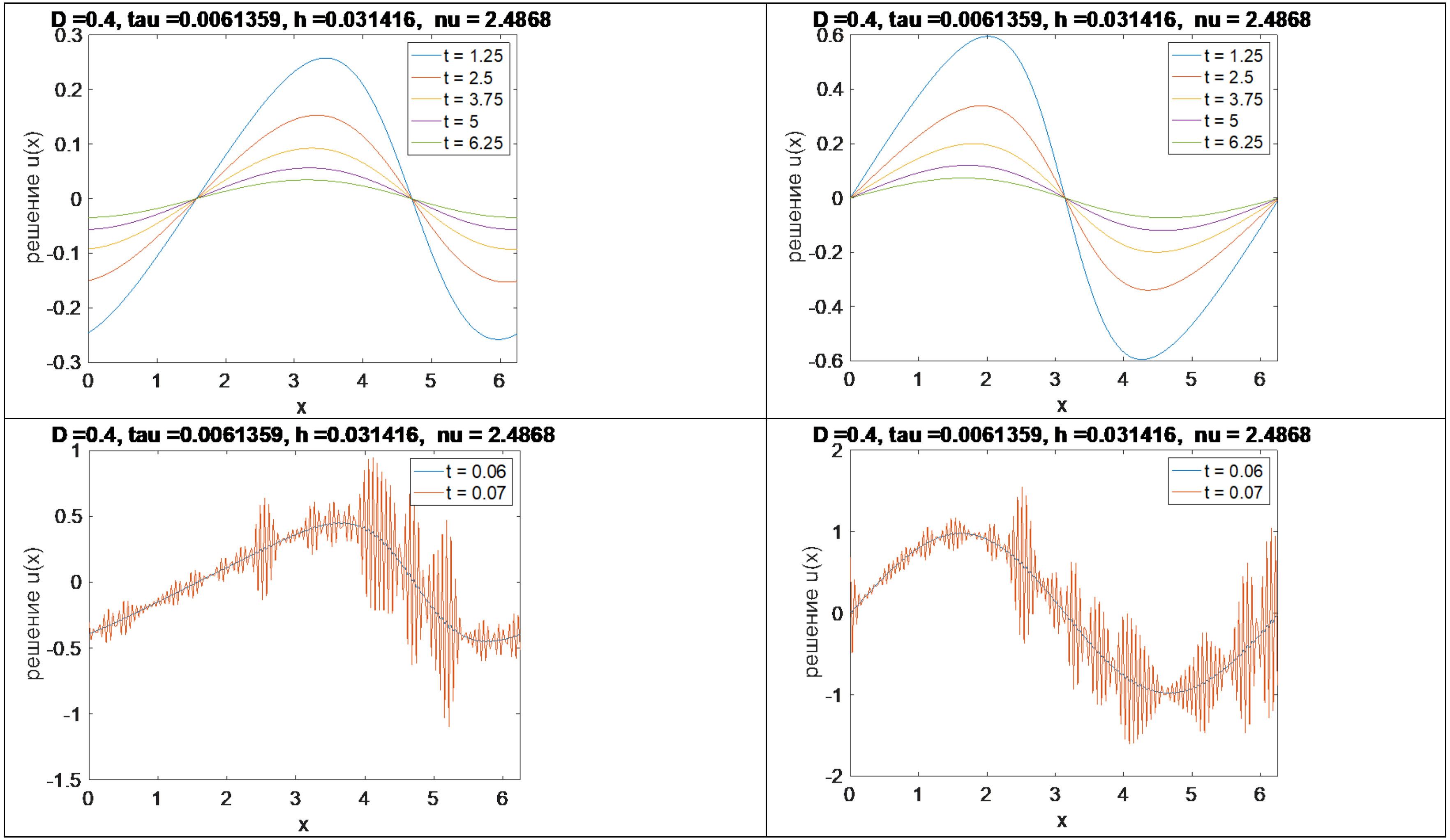

Рис 7. Решение компактной схемы после АБ для τ = 0.006, h = 0.03, D = 0,4, $\nu = D\tau h^{-2}$ в разные моменты времени. 8а) начальное условие для аналитического решения (2) уравнения Б-Б: $u_0(x) = \dfrac{-2D\cos(x)}{2+\sin(x)}$; 8б) $u_0(x) = \sin(x)$; 8в) решение по явной схеме для начального условия 8а); 8г) решение по явной схеме для начального условия 8б)

Результаты (погрешности разностного решения) при использовании различных явных схем для вычисления первого приближения довольно близки. В окрестности градиентной катастрофы осцилляции эффективно подавляются а) несколькими последовательными линеаризациями; б) использованием сглаживающих операторов (иногда односторонних) в окрестности скачка решения.

Уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского - Пискунова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(u), D = const > 0, \phi(u) = u(1-u), \tag{3}$$

где $u = u(t, x)$ - относительная плотность распределения числа особей с доминантным геном, $x \in R$.

Тестовые функции схемы - мономы $x^{2m}t^k, m \le 2, k \le 2$.

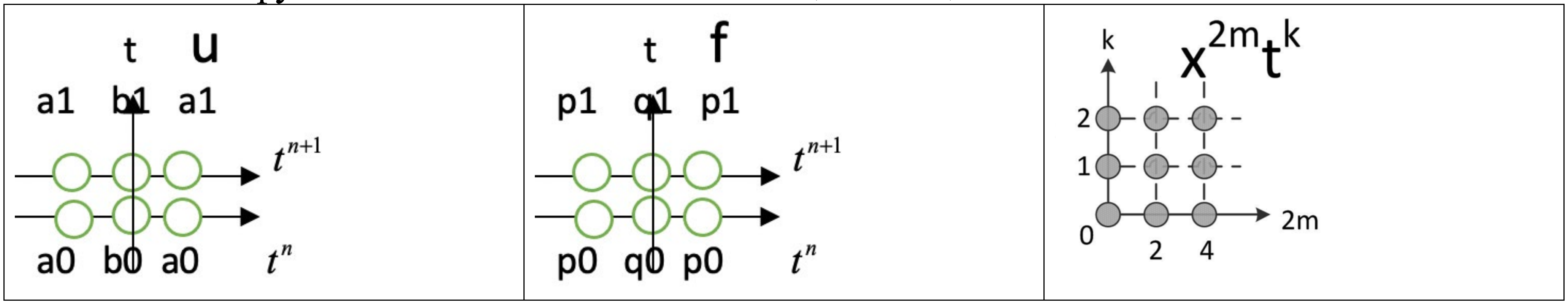

Рис 8. Шаблоны для решения u и правой части f компактной схемы и диаграмма Ньютона тестовых функций $u_{m,k}$

Таблица 2. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (5)

№	u	f	Уравнение
1	1	0	$2a_0 + b_0 + 2a_1 + b_1 = 0$
2	t	1	$(2a_1 + b_1)\tau = 2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1$
3	t^2	$2t$	$(2a_1 + b_1)\tau^2 = 2\tau(2p_1 + q_1)$
4	x^2	-2V	$(2a_0 + 2a_1)h^2 = -2V(2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1)$
5	x^4	$-12Vx^2$	$(2a_0 + 2a_1)h^4 = -12V(2p_0 + 2p_1)h^2$
6	x^2t	$x^2 - 2Vt$	$2a_1h^2\tau = (2p_0 + 2p_1)h^2 - 2V\tau(2p_0 + q_0)$
7	x^2t^2	$2x^2t - 2Vt^2$	$2a_1h^2\tau^2 = 2(2p_0)h^2\tau - 2V\tau^2(2p_0 + q_0)$
		нормировочное	$p_0 = -1$

Решение «локальной» СЛАУ: $a_1 = c_1 = 12\nu - 2$, $b_1 = -24\nu - 20$, $a_0 = c_0 = 12\nu + 2$, $b_0 = -24\nu + 20$, $p_0 = p_1 = r_0 = r_1 = -\tau$, $q_0 = q_1 = -10\tau$.

На каждом шаге для решения системы (4), будем использовать явные схемы: Адамса – Бэшфорда или Эйлера, а затем применять компактную корректировку.

Явная схема АБ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор $u_j^{n+1/2} = u_j^n + \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{\tau u_j^n(1-u_j^n)}{2}$.
- Корректор $\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n + \nu(u_{j-1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j+1}^{n+1/2}) + \tau u_j^{n+1/2}(1-u_j^{n+1/2})$.
- Явная схема Эйлера (первый порядок точности) состоит из одного шага:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \nu(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \tau u_j^n(1-u_j^n).$$

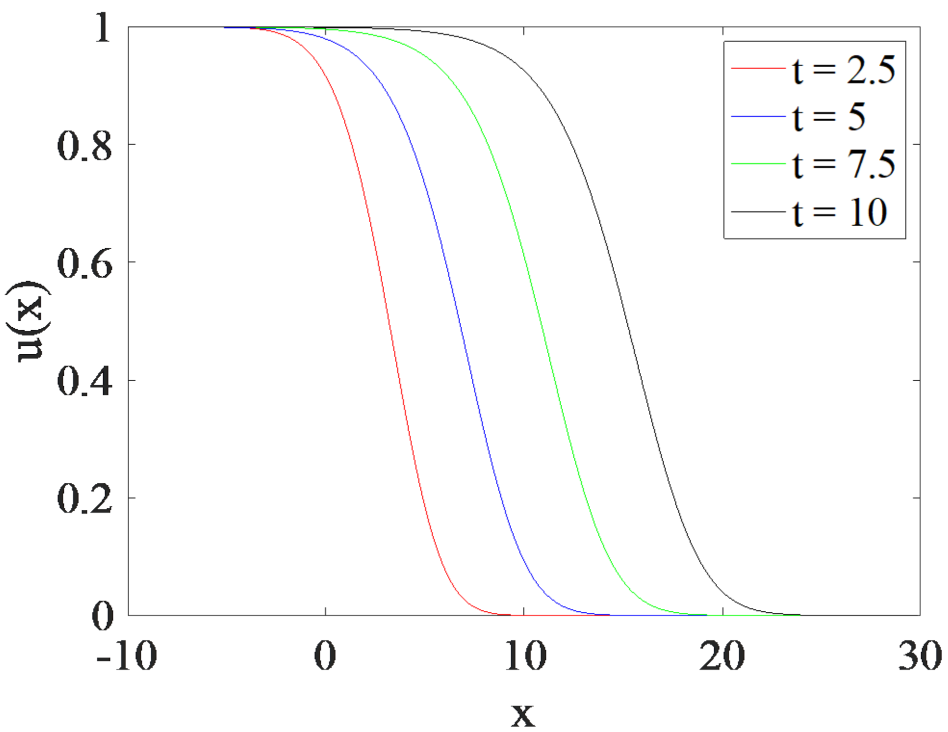

Рис. 9 График точного решения (3) уравнения ФКПП, *D = 1, T* = 10

$x \in [-10, 30]$

График ведет себя как “бегущая волна”.

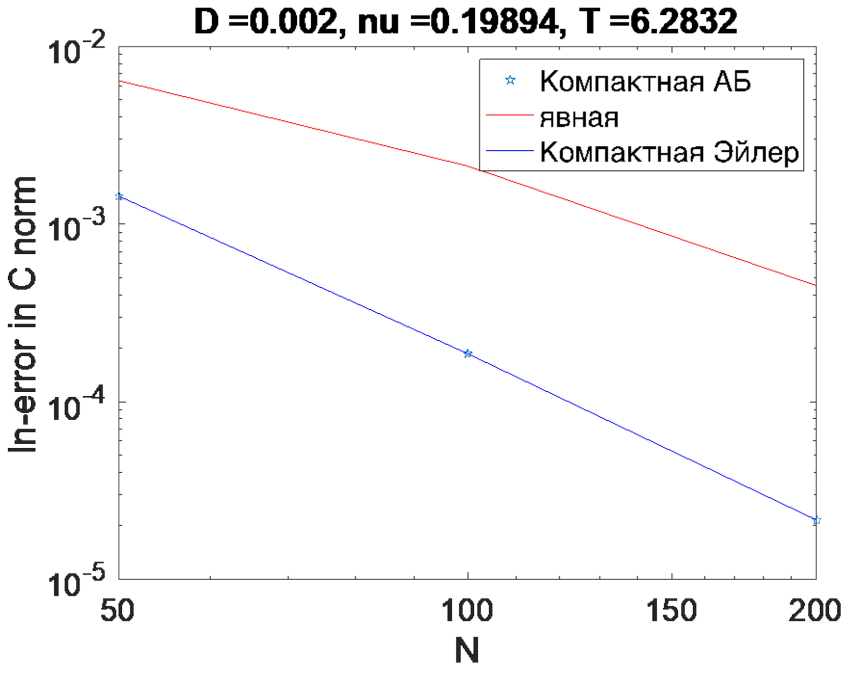

Рис 10. C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения N в log-системе до $T = 2\pi$. Параметры для мелкой сетки D = $0{,}004, h = \pi/(2*400)$, $\tau = 2\pi/4096$

Начальное условие. $u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-10, 0] \\ cos^2 x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$

Порядки точности:
1,8 (Явная АБ)/3,02(Компактная &АБ)/
3,02(Компактная & Эйлер)

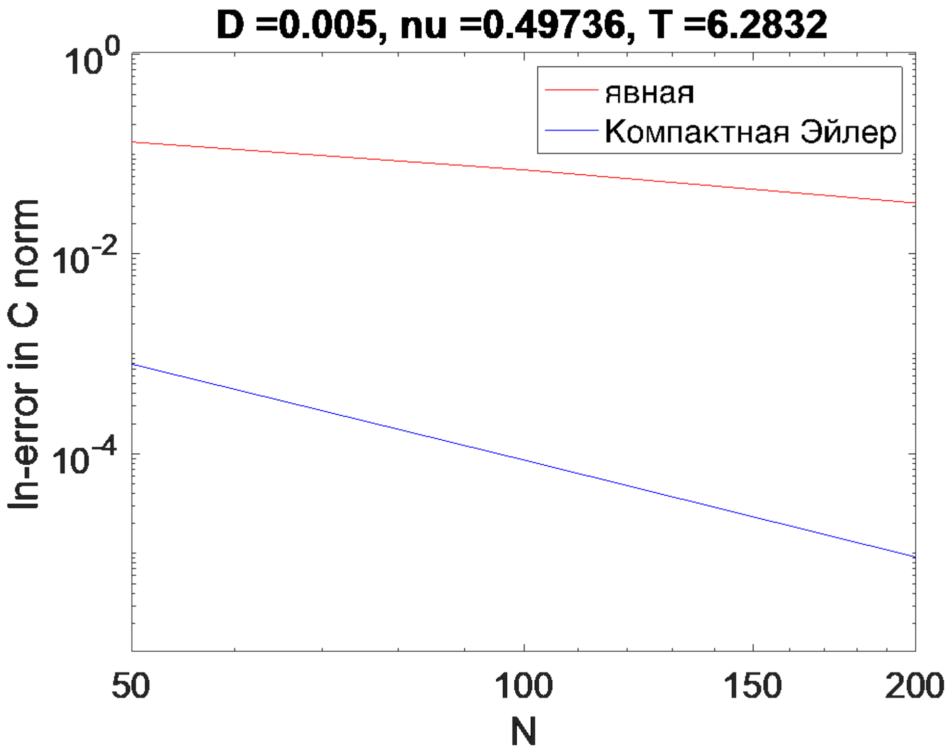

Рис 11. С-норма погрешности схем в зависимости от разрешения N в **ln**-системе до $T = 2\pi$. Параметры для мелкой сетки $D = 0{,}002, h = 2\pi/400$, $\tau = 2\pi/4096$

Начальное условие. $u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-10, 0] \\ cos^2 x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$

Порядки точности:
1,05(Явная АБ)/3,4(Компактная & АБ)

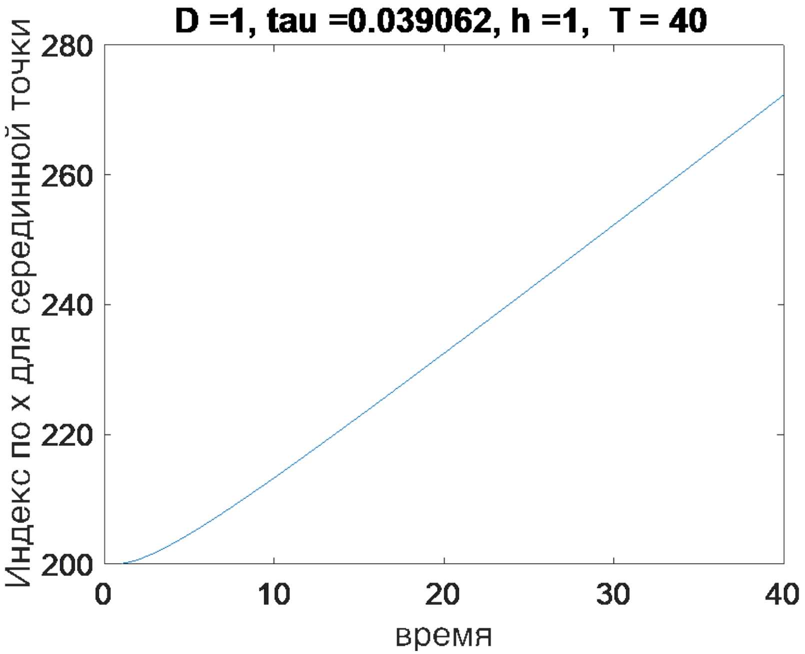

Рис 12. Оценка скорости бегущей волны по серединной точке профиля от времени до $T = 40$. Параметры D $= 1$, $h = 400/400$, $\tau = 40/1024$

Начальное условие. $u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-200, 0] \\ cos(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 200] \end{cases}$

Серединная координата двигается со скоростью 2.

Важный критерий точности аппроксимации – точность, с которой воспроизводится известная из теории (см., например, [КПП]) скорость перемещения волны. Будем оценивать ее по скорости перемещения со временем точки, в которой решение u принимает значение ½. Пусть $J=J(t)$ – индекс, такой что $u(J) > 1/2 > u(J+1)$. Определим $x_{1/2}$ формулой $x_{0.5} = \dfrac{1/2 - u(J)}{u(J+1) - u(J)} h + (J-2)h$.

Компактная схема имеет порядок точности много больший чем у явной схемы. Явная схема условно устойчива. При $\nu < 0.5$ устойчива, при $\nu > 0.5$ неустойчива.

Таблица 3. Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров уравнения ФКПП для $u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-10, 0] \\ cosx, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$

Схема явная/компактная	Норма	Параметры	Порядок
АБ	C	$D = 0{,}0002,\ T = 2\pi,\ \nu = 0{,}02$	1,67/1,91
АБ	C	$D = 0{,}005,\ T = 2\pi,\ \nu = 0{,}5$	1/3,4
Эйлер	C	$D = 0{,}002,\ T = 2\pi,\ \nu = 0{,}2$	1,9/3,02

Граница устойчивости компактной схемы: $\nu < 2$ до $T = 2\pi$.
Граница устойчивости схемы АБ: $\nu < 0{,}5$ $T = 2\pi$.