Домашнее задание № 5

по майнору «Прикладная математика. Искусство и ремесло вычислений», 4 семестр.

Профессор НИУ ВШЭ **В.А.Гордин**

Разослано: 25 января

Полный балл: до исхода 6 февраля

Половинный балл: до 11 февраля

Решение прислать на почту shadrin.dmitry2010@yandex.ru

Тема письма: ДЗ 5 – <Имя Фамилия>

Параметр k – номер студента в списке

Решения сопровождать подробным словесным комментарием – это считается частью работы.

Задача 5.1

Сгенерируйте облако $N = 10\,000$ векторов – точек $(X, Y, Z)_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$, где $X_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{k+1}\right)$, $Y_i \sim \mathcal{N}(0, k+1)$ и $Z_i = X_i + Y_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Здесь $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – нормальное распределение со средним значением μ и дисперсией σ^2.

Постройте численные оценки естественных ортогональных составляющих (ЕОС) этого облака, используя первые n реализаций $(X, Y, Z)_i$, $i = 1, \dots, n$, где $n = 1000q$, $q = 1, 2, \dots, 10$. Покажите (нужно придумать, как это и визуализировать, и оценить), что при увеличении n, ЕОС стабилизируются. Укажите двумерное подпространство, наилучшим образом приближающее данное облако.

Задача 5.2

На плоскости располагаются 6 метеостанций с координатами $\vec{z}_i = (x_i, y_i)$:

i	x_i	y_i
1	0	$10k$
2	$5k$	$5k$
3	0	$5k$
4	$-8k$	$2k$
5	$-k$	$-\ln k$
6	k	$-k^2$

Пусть известна корреляционная функция «температуры»:

$$K\left(\vec{z}_i, \vec{z}_j\right) = \exp\left(-\frac{\left|\vec{z}_i - \vec{z}_j\right|^2}{k^2}\right).$$

Вычислите коэффициенты для метода оптимальной интерполяции и оцените этим способом температуру в точке $\vec{z}_0 = (0, 0)$, если температура T_i на станции i равна

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
T_i	$10+k$	$8+k$	$1+2k$	20	k	k

На координатной плоскости постройте все эти семь точек и укажите интерполяционный вес и температуру в каждой из них.

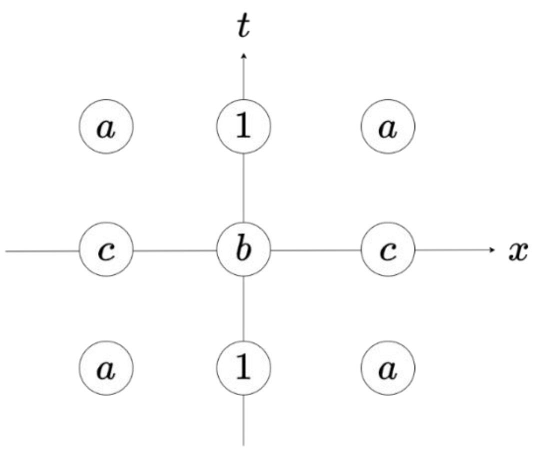
Задача 5.3

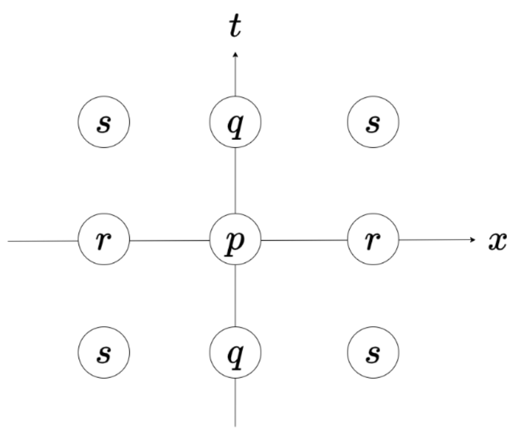
Для однородного волнового уравнения

$$\partial_t^2 u = k^2 \partial_x^2 u$$

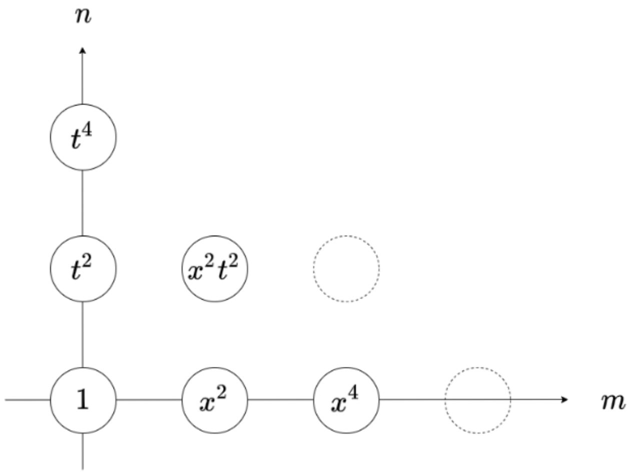
на окружности (т.е. с периодическими граничными условиями) длины $L = 2\pi$ построить компактную разностную схему для решения задачи Коши. Провести численный эксперимент с начальными условиями $u(0,x) = \sin x$, $u(\tau, x) = \sin(x + k\tau)$, где τ - шаг по времени, и со временем интегрирования $T = 1$. Убедиться в том, что схема имеет 4-й порядок точности при $\tau, h \to 0$, $\frac{\tau}{h} = \mathrm{const}$ – некоторая фиксированная константа, которую нужно выбрать так чтобы схема была устойчивой. Для этого рассмотрите полученное решение $u(t,x)$ и точное решение волнового уравнения: $u_{ref}(t,x) = \sin(x + kt)$ (полученное по формуле Даламбера) и сравните C-норму на сетке от погрешности $\max\limits_x \left| u(T,x) - u_{ref}(T,x) \right|$ при разном количестве точек сетки по пространству $N = 12, 25, 50, 100, 200$. График нормы ошибки в зависимости от N рисовать в логарифмических координатах.

В качестве шаблонов компактной схемы для решения u и правой части f использовать следующую аппроксимацию:





В качестве тестовых функций для нахождения коэффициентов схемы использовать показанные на диаграмме Ньютона мономы – тестовые функции



Так как неизвестных коэффициентов семь, необходимо выбрать седьмую тестовую функцию. Проверьте, что соответствующая СЛАУ 7-го порядка невырожденная. Рассмотрите два варианта: x^4t^2 и x^6. После определения коэффициентов нужно составить компактную разностную схему, т.е. алгоритм перехода к решению на следующем шаге по времени. На каждом шаге по времени нужно решать трехдиагональную СЛАУ порядка N. С помощью преобразования Фурье оценить устойчивость схемы, а потом подтвердить эту оценку на численном эксперименте.