

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + D|z|^2 z = 0, \quad z = u + iv, \quad D = \text{const} \quad (5)$$

описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью.

Разобьём это комплексное уравнение на систему двух вещественных уравнений:

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial t} + i\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D(u^2 + v^2)(u + iv) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Im} : \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u, v)$$

$$\text{Re} : \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(u, v)$$

$$f(u, v) = -v(u^2 + v^2)D$$

$$g(u, v) = u(u^2 + v^2)D$$

Составим схему для системы:

$$\begin{aligned}
 & au_{j-1}^{n+1} + bu_j^{n+1} + au_{j+1}^{n+1} - au_{j-1}^n - bu_j^n - au_{j+1}^n + cv_{j-1}^{n+1} + dv_j^{n+1} + cv_{j+1}^{n+1} + cv_{j-1}^n + dv_j^n + cv_{j+1}^n = \\
 & = pf_{j-1}^{n+1} + qf_j^{n+1} + pf_{j+1}^{n+1} + pf_{j-1}^n + qf_j^n + pf_{j+1}^n \\
 & \boxed{Cv_{j-1}^{n+1} + D_1 v_j^{n+1} + Cv_{j+1}^{n+1} - Cv_{j-1}^n - D_1 v_j^n - Cv_{j+1}^n} + Au_{j-1}^{n+1} + Bu_j^{n+1} + Au_{j+1}^{n+1} + Au_{j-1}^n + Bu_j^n + Au_{j+1}^n = \\
 & = Pg_{j-1}^{n+1} + Qg_j^{n+1} + Pg_{j+1}^{n+1} + Pg_{j-1}^n + Qg_j^n + Pg_{j+1}^n
 \end{aligned} \quad (6)$$

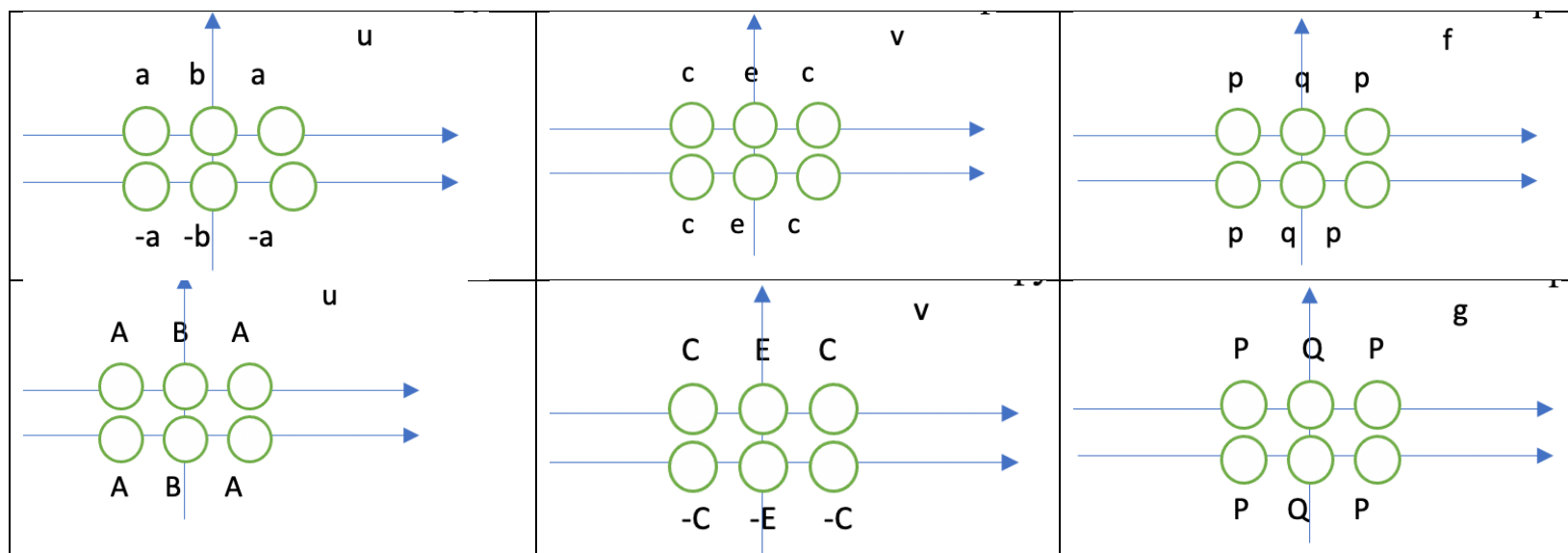


Рис 18. Шаблоны для решения u, v и правой части f, g компактной схемы и

Таблица 5. Пары тестовых функций и соответствующие уравнения «локальной» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (6).

u	v	f	g	Уравнение
$t - \tau/2$	0	1	0	$(2a + b)\tau = (4p + 2q)$ $(2A + B)\tau - \tau/2(4A + 2B) = 0$
$x^2(t - \tau/2)$	0	x^2	$-2(t - \tau/2)$	$2ah^2\tau = 4ph^2$ $2Ah^2\tau - \tau/2(4A)h^2 = 0$
1	0	0	0	$0 = 0$ $(4A + 2B) = 0$
x^2	0	0	-2	$(-a - a + a + a)h^2 = 0$ $4Ah^2 = 2(4P + 2Q)$
$(t - \tau/2)^2$	0	$2(t - \tau/2)$	0	$\tau^2(2a + b) - \tau^2(2a + b) + \tau^2/4(0) = 2 * 0$ $\tau^2(2A + B) - \tau^2(2A + B) + \tau^2/4(0) = 0$
0	$t - \tau/2$	0	1	$2c + e - \tau/2(4c + 2e) = 0$ $(2C + E)\tau = (4P + 2Q)$
0	$x^2(t - \tau/2)$	$2(t - \tau/2)$	x^2	$2ch^2\tau - \tau/2h^2(4c + 2e) = 0$ $2Ch^2\tau = 4Ph^2$
0	1	0	0	$4c + 2e = 0$ $0 = 0$
0	x^2	2	0	$4ch^2 = 2(4p + 2q)$ $h^2(c + c - c - c) = 0$
0	$(t - \tau/2)^2$	0	$2(t - \tau/2)$	$\tau^2(2c + e) - \tau^2(2c + e) + \tau^2/4(4c + 2e) = 0$ $\tau^2(2C + E) - \tau^2(2C + E) + \tau^2/4(0) = 0$

Будем пробовать разные значения параметров.

В первом уравнении $b=1$, a – параметр,

$$c = \frac{E\tau + 2Ea\tau}{2h^2}, e = -\frac{E\tau + 2Ea\tau}{h^2}, p = -\frac{a\tau}{2}, q = -\frac{\tau}{2}$$

Во втором уравнении $E=1$, C – параметр, $A = -\frac{E\tau + 2Ec\tau}{2h^2}, B = \frac{E\tau + 2Ec\tau}{h^2}, p = \frac{c\tau}{2}, q = \frac{\tau}{2}$

Результат явной схемы всегда обозначаем $\left\{\tilde{u}_j^{n+1}\right\}_{j=0}^{N-1}, \left\{\tilde{v}_j^{n+1}\right\}_{j=0}^{N-1}$. Будем искать решение системы (6) в виде малой поправки к решению, полученному по явной схеме: $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^N, \{\delta_j\}_{j=1}^N$ к $\tilde{u}_j^{n+1}, \tilde{v}_j^{n+1}$. Подставим $u_j^{n+1} = \tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j, v_j^{n+1} = \tilde{v}_j^{n+1} + \delta_j$ в нелинейную систему (6) и оставим только линейные по $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^N, \{\delta_j\}_{j=1}^N$ слагаемые:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{j-1}^{n+1}(a - 2p\tilde{u}_{j-1}^{n+1}\tilde{v}_{j-1}^{n+1}) + \varepsilon_j^{n+1}(b - 2q\tilde{u}_j^{n+1}\tilde{v}_j^{n+1}) + \varepsilon_{j+1}^{n+1}(a - 2p\tilde{u}_{j+1}^{n+1}\tilde{v}_{j+1}^{n+1}) + \\ & + \delta_{j-1}^{n+1}(c - p((\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^2 + 3(\tilde{v}_{j-1}^{n+1})^2)) + \delta_j^{n+1}(e - q((\tilde{u}_j^{n+1})^2 + 3(\tilde{v}_j^{n+1})^2)) + \delta_{j+1}^{n+1}(c - p((\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^2 + 3(\tilde{v}_{j+1}^{n+1})^2)) = F_j, j = 0, \dots, N-1, \\ & F_j = -a\tilde{u}_{j-1}^{n+1} - b\tilde{u}_j^{n+1} - a\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + au_{j-1}^n + bu_j^n + au_{j+1}^n - c\tilde{v}_{j-1}^{n+1} - e\tilde{v}_j^{n+1} - c\tilde{v}_{j+1}^{n+1} - cv_{j-1}^n - ev_j^n - cv_{j+1}^n + \\ & \oplus p((\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^2\tilde{v}_{j-1}^{n+1} + (\tilde{v}_{j-1}^{n+1})^3) \oplus q((\tilde{u}_j^{n+1})^2\tilde{v}_j^{n+1} + (\tilde{v}_j^{n+1})^3) \oplus p((\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^2\tilde{v}_{j+1}^{n+1} + (\tilde{v}_{j+1}^{n+1})^3) \oplus p((u_{j-1}^n)^2 + (v_{j-1}^n)^2)v_{j-1}^n \oplus \\ & \oplus q((u_j^n)^2 + (v_j^n)^2)v_j^n \oplus p((u_{j+1}^n)^2 + (v_{j+1}^n)^2)v_{j+1}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{j-1}^{n+1}(\boxed{C} - P((\tilde{v}_{j-1}^{n+1})^2 + 3(\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^2)) + \varepsilon_j^{n+1}(\boxed{E} - Q((\tilde{v}_j^{n+1})^2 + 3(\tilde{u}_j^{n+1})^2)) + \varepsilon_{j+1}^{n+1}(\boxed{C} - P((\tilde{v}_{j+1}^{n+1})^2 + 3(\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^2)) + \\
& + \delta_{j-1}^{n+1}(\boxed{A} - 2P\tilde{u}_{j-1}^{n+1}\tilde{v}_{j-1}^{n+1}) + \delta_j^{n+1}(\boxed{B} - 2Q\tilde{u}_j^{n+1}\tilde{v}_j^{n+1}) + \delta_{j+1}^{n+1}(\boxed{A} - 2P\tilde{u}_{j+1}^{n+1}\tilde{v}_{j+1}^{n+1}) = F_j, j = 0, \dots, N-1, \\
& \boxed{F_j} = \boxed{-A\tilde{v}_{j-1}^{n+1} - B\tilde{v}_j^{n+1} - A\tilde{v}_{j+1}^{n+1} - Av_{j-1}^n - Bv_j^n - Av_{j+1}^n} - \boxed{C\tilde{u}_{j-1}^{n+1} - E\tilde{u}_j^{n+1} - C\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + Cu_{j-1}^n + Eu_j^n + Cu_{j+1}^n} + \\
& + P((\tilde{v}_{j-1}^{n+1})^2\tilde{u}_{j-1}^{n+1} + (\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^3) + Q((\tilde{v}_j^{n+1})^2\tilde{u}_j^{n+1} + (\tilde{u}_j^{n+1})^3) + P((\tilde{v}_{j+1}^{n+1})^2\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + (\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^3) + P((u_{j-1}^n)^2 + (v_{j-1}^n)^2)u_{j-1}^n + \\
& + Q((u_j^n)^2 + (v_j^n)^2)u_j^n + P((u_{j+1}^n)^2 + (v_{j+1}^n)^2)u_{j+1}^n
\end{aligned}$$

Построим графики первых интегралов в зависимости от разных параметров а для коэффициентов компактной схемы.

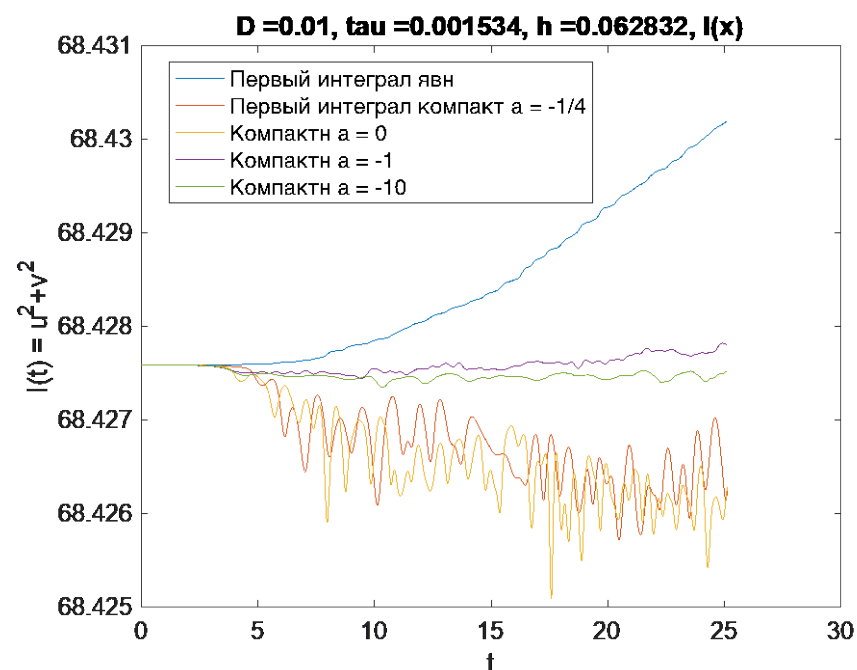
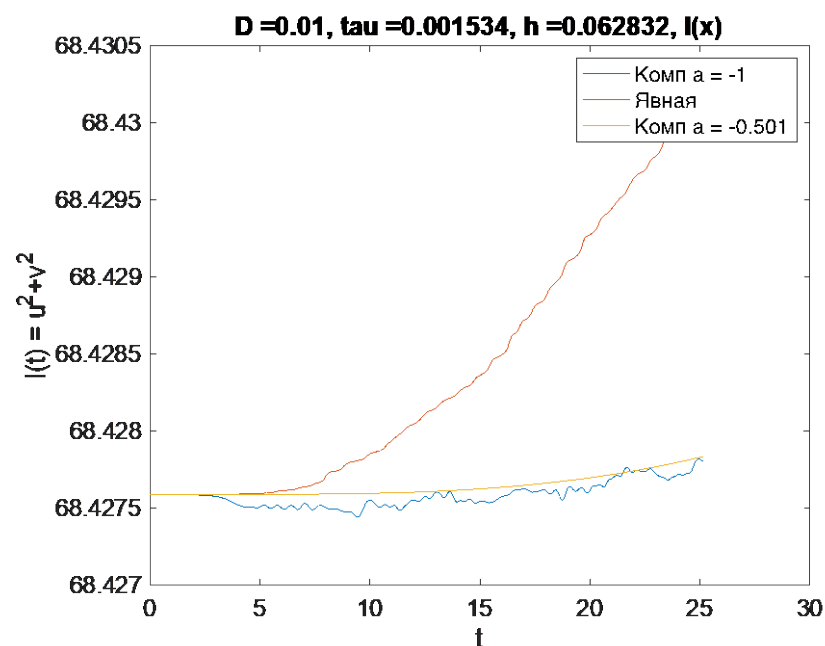


Рис 19. А) График первого интеграла для явной схемы и компактной в зависимости от разных значений параметра, $a = c$. Явная схема МК. $N = 100$, $L = 2 \cdot \pi$

Б) Аналогично 19А), но с другими параметрами

Компактные методы а) позволяют получать существенно более точные решения при тех же вычислительных затратах, б) позволяют расширить область устойчивости разностной схемы, в) позволяют эффективно бороться с нарушениями монотонности типа «вычислительной пилы».

Применимы к широкому классу эволюционных уравнения в частных производных.

Работа подготовлена в ходе проведения исследования (№ 20-04-021) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в 2020 — 2022 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Литература

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. «Мир».: 1973.

С.К. Годунов, В. С. Рябенский. Разностные схемы. “Наука”, 1977.

В.А.Гордин. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М., ФИЗМАТЛИТ, 1-е изд. 2010, 2-е изд. 2012-2013.

В.А.Гордин. *Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать.* «Издательский дом ВШЭ», М., 2016.

V.A. Gordin, E.A. Tsymbalov. Compact difference scheme for parabolic and Schrodinger-type equations with variable coefficients. J. Comp. Phys. V.375, pp.1451-1468, 2018.

В.А.Гордин. Компактные разностные схемы для аппроксимации дифференциальных соотношений. «Математическое моделирование» 2019, 31(7), стр.58-74.

В.А.Гордин. Компактные разностные схемы для слабо нелинейных задач и граничные условия, имитирующие задачу Коши. Океанологические исследования, 2019, Т. 47, №1, СС. 32–37.