Компактная схема для уравнения Эйлера – Хопфа

Уравнение $u_t + uu_x = 0$ или $u_t + (u^2/2)_x = 0$ (1) можно записать в виде линейного соотношения: $u_t = f_x$ с подстановкой $f = -u^2/2$. Явная схема Эйлера:

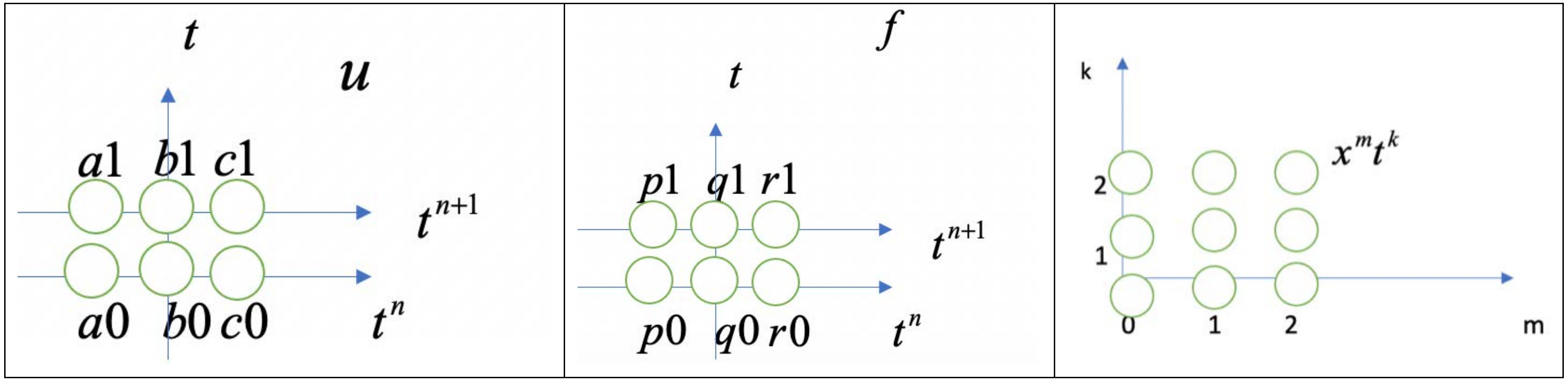
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau \frac{\left(u_{j-1}^n\right)^2 - \left(u_{j+1}^n\right)^2}{4h} \qquad (2).$$

Реализовать легко. Но она неустойчива и имеет 1 порядок аппроксимации по времени.

Компактная схема для линейного соотношения на двух (для u и f) шаблонах 3×2:

$$a_1 = 1;\ b_1 = 4;\ c_1 = 1;\ a_0 = -1;\ b_0 = -4;\ c_0 = -1;$$

$$p_1 = -3\tau/(2h);\ q_1 = 0;\ r_1 = 3\tau/(2h);\ p_0 = -3\tau/(2h);\ q_0 = 0;\ r_0 = 3\tau/(2h).$$



Это решение получается из СЛАУ:

№	u_{km}	f_{km}	Уравнение
1	1	0	$a_0 + b_0 + c_0 + a_1 + b_1 + c_1 = 0$
2	0	1	$p_0 + q_0 + r_0 + p_1 + q_1 + r_1 = 0$
3	0	t	$(p_1 + q_1 + r_1)\tau = 0$
4	t	x	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
5	t^2	$2tx$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau^2 = 2h\tau(r_1 - p_1)$
6	x	0	$(\mathrm{c}_0 + \mathrm{c}_1 - a_0 - a_1)h = 0$
7	x^2	0	$(c_0 + c_1 + a_0 + a_1)h^2 = 0$
8	tx	$x^2/2$	$(c_1 - a_1)\tau h = (r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2/2$
9	t x^2	$x^3/3$	$(c_1 + a_1)h^2\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h^3/3$
10	x t^2	tx^2	$(c_1 - a_1)h\tau^2 = \tau h^2(r_1 + p_1)$
11	x^2t	$2tx^3/3$	$(c_1 + a_1)h^2\tau^2 = 2\tau(r_1 - p_1)h^3/3$
12	Нормировочное условие		$p_1 = -3\tau/(2h)$

Замечание. Однородная часть СЛАУ вырождена. Наше решение получается, если дополнительно предположить кососимметрию коэффициентов: $p_j = -r_j,\ \ j = 0{,}1.$

Итак, компактная схема дает соотношение в произвольной точке сетки:

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} = -a_0 u_{j-1}^{n} - b_0 u_j^{n} - c_0 u_{j+1}^{n} + p_1 f_{j-1}^{n+1} + q_1 f_j^{n+1} + r_1 f_{j+1}^{n+1} + p_0 f_{j-1}^{n} + q_0 f_j^{n} + r_0 f_{j+1}^{n},\ j = 1,\dots,N-1$$

Подставим вместо *f* ее представление $f = -u^2/2$:

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} = -a_0 u_{j-1}^{n} - c_0 u_{j+1}^{n} - b_0 u_j^{n} - p_0 \frac{(u_{j-1}^{n})^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^{n})^2}{2} -$$
$$- p_1 \frac{(u_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(u_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^{n})^2}{2},\quad j = 1,\dots,N-1. \tag{3}$$

Схема точная, но как решить нелинейную (квадратичную) систему алгебраических уравнений? Линеаризация! Пусть

$$u_j^{n+1} = \tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j, \tag{4}$$

где первое слагаемое получено по явной схеме Эйлера (2), а второе – малая поправка к первому слагаемому. При подстановке в (3) квадратами малых величин $\{\varepsilon_j\}$ пренебрегаем.

Тогда получаем из (3) СЛАУ относительно малых поправок $\left\{\varepsilon_j\right\}$, где в левой части трехдиагональная матрица с элементами: $a_1 + p_1\tilde{u}_{j-1}^{n+1}$, $b_1 + q_1\tilde{u}_j^{n+1}$, $c_1 + r_1\tilde{u}_{j+1}^{n+1}$.

При достаточно малых шагах по времени τ в такой матрице будет доминировать главная диагональ.

После определения неизвестных $\left\{\varepsilon_j\right\}$ подставляем их в формулу (4). Теперь можно снова делать шаг по явной схеме Эйлера.

Замечание 1. Малость $\left\{\varepsilon_j\right\}$ необходимо контролировать на каждом шаге. Если они не слишком малы, стоит сделать вторую итерацию для нахождения второй поправки.

Замечание 2. При приближении решения к моменту градиентной катастрофы, следует опасаться вычислительных осцилляций решения. При возникновении «пилы» нужно применять к решению оператор сглаживания.

Замечание 3. Вместо схемы Эйлера на первом шаге можно использовать Лакса – Вендроффа или Мак-Кормака. Они условно устойчивы и поточнее, чем Эйлер.

Замечание 4. В уравнении Эйлера – Хопфа $f = -u^2 / 2$. Для другого вида f будут другие уравнения. Но метод линеаризации и применения компактной схемы остается применимым.