Семинар 4, неделя 14

08 December 2022 12:21

Волновое уравнение

$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \qquad x \in [0, L]$

где c - скорость распространение волны, L - длина струны.

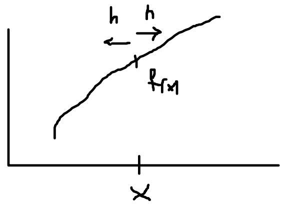
Начальные условия:

$u(0,x) = \sin\frac{2\pi x}{L}, \qquad \partial_t u(0,x) = 0.$

Граничные условия:

- Условия Дирихле: $u(t,0) = 0, u(t,L) = 0$;
- Условия Неймана: $\partial_x u(t,x)\big|_{x=0} = 0, \partial_x u(t,x)\big|_{x=L} = 0$;
- Периодические условия: $u(t,0) = u(t,L)$.

Схема leap-frog (явная схема)



$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

$\approx f''(x) \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} =$

$= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

Применим эту аппроксимация к волновому уравнению $\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x)$.

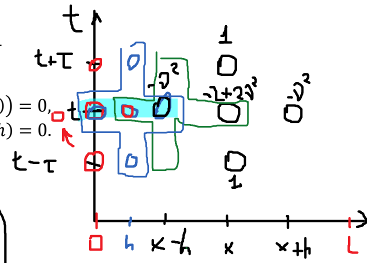
Пусть шаг по времени это $\tau > 0$, и шаг по пространству это $h > 0$.

$\frac{u(t+\tau,x) - 2u(t,x) + u(t-\tau,x)}{\tau^2} = c^2 \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2}$

Введем безразмерный параметр $\nu = \frac{c\tau}{h}$ и перенесем всё в левую часть:

$u(t+\tau,x) - 2u(t,x) + u(t-\tau,x) - \nu^2\big(u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)\big) = 0,$

$u(t+\tau,x) + (-2+2\nu^2)u(t,x) + u(t-\tau,x) - \nu^2 u(t,x+h) - \nu^2 u(t,x-h) = 0.$



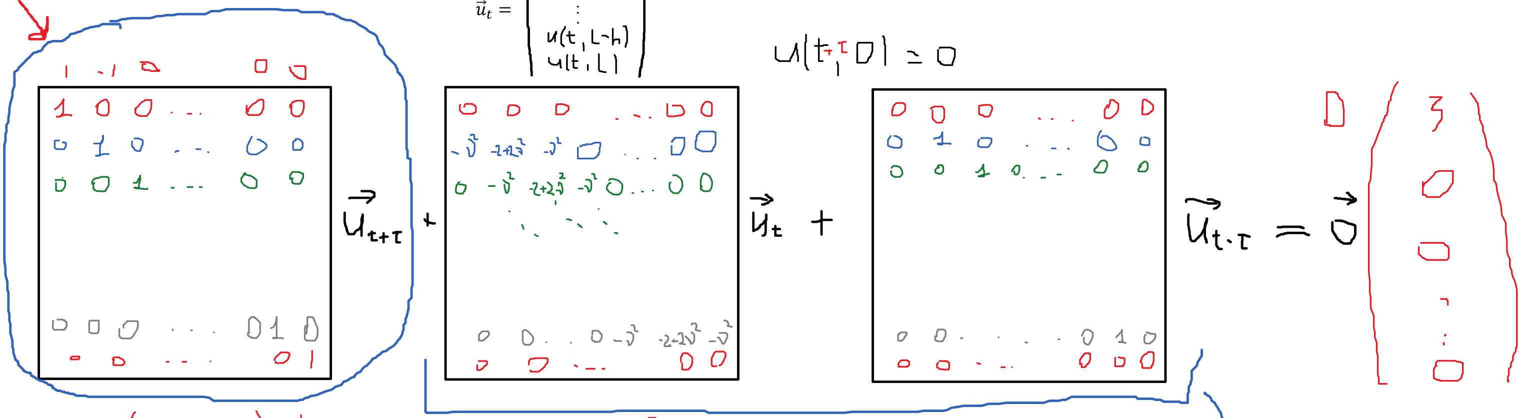
$u = 0$

Начальные условия:

$u(0,x_i) = \sin\frac{2\pi x_i}{L}, \qquad u(\tau,x_i) = \sin\frac{2\pi x_i}{L}.$

$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} u(t,0) \\ u(t,h) \\ u(t,2h) \\ \vdots \\ u(t,L-h) \\ u(t,L) \end{pmatrix}$

$u(t,\tau,0) = 0$



$u(t+\tau,0) - u(t+\tau,h) = 0$

$u(t+\tau,0) + 0 + 0 = 0 \ (3)$