Уравнение неразрывности и уравнение переноса

Уравнение неразрывности (закон сохранения)	Уравнение переноса
$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0 \Rightarrow \partial_t \rho + u \partial_x \rho = -\rho \partial_x u$	$\partial_t \rho + u \partial_x \rho = 0$
Уравнение характеристик: $d_t x = u(t,x), \quad d_t \rho = -\rho \partial_x u$ $\ln(\rho / \rho_0) = -\int_0^t \partial_x u(s,\, x(s))\, ds$	Изолинии: $\rho(t,x) = C \Rightarrow$ ур. характеристик: $\partial_t \rho + \partial_x \rho d_t x = 0$ $d_t x = -\partial_t \rho / \partial_x \rho = u(t,x), \quad d_t \rho = 0$

Если *u* – заданная функция, это линейные уравнения в частных производных 1 порядка

Пример 1. *u*=const. Уравнения совпадают. Решение уравнения характеристик: $x = x_0 + ut$.

Решение уравнений в частных производных – бегущая волна: $\rho = \rho(x - ut)$.

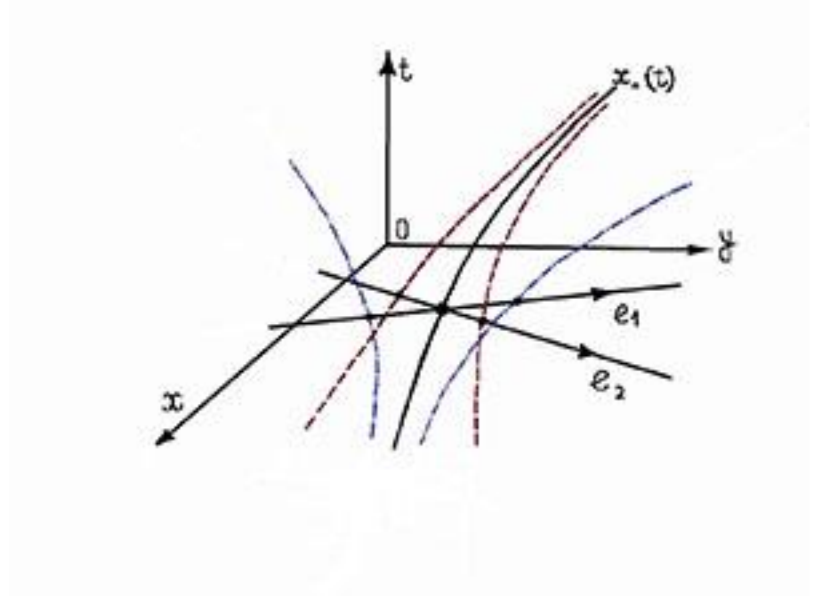
Пример 2. $u = ax + b$. $d_t x = ax + b \Rightarrow x = C\exp(at) - b/a = x_0 \exp(at) + b/a\left[\exp(at) - 1\right]$, $C = x_0 + b/a$

При *a*>0 характеристики разбегаются, *u'*=*a* >0. Для уравнения неразрывности плотность вдоль характеристик падает, а для ур. переноса – сохраняется. При *a*<0 плотность растет.

В многомерном случае $d_t\vec{x}=\vec{u}(t,\vec{x})$, $\quad d_t\rho=-\rho\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}u=-\rho\; div\vec{u}$ - уравнение Лиувилля – Остроградского.

Важный случай течений: несжимаемые: $div\vec{u}\equiv 0$.

Тогда и для уравнения неразрывности плотность вдоль характеристик не меняется.



Пример несжимаемого течения. Это не исключает возможности сближения или расхождения характеристик. Нулю равна только сумма трех слагаемых.

Коричневые характеристики сближаются со временем, а синие – разбегаются. Объем при этом со временем сохраняется

Возможна модель: стратифицированная жидкость. В такой модели плотность переменна, но движение жидкости происходит только вдоль изоповерхностей плотности.

Постоянная плотность: $\rho = \rho_0 = const$. Из уравнения неразрывности следует несжимаемость.

Выше рассмотрено следствие из закона сохранения массы. А что следует из закона сохранения (или изменения) импульса в силу закона Ньютона.

Предположим, что силы на данный маленький объем вещества не действуют. Тогда на отрезке $[x, x+\Delta x]$ импульс $q(t,x)\Delta x$ за время Δt изменяется за счет переноса импульса через границы. Здесь q – плотность импульса.

По такому же рассуждению получаем уравнение в частных производных: $\partial_t q + \partial_x (qu) = 0$. Если учесть, что $q = \rho u$, то получим по правилу Лейбница:

$$u\partial_t \rho + \rho \partial_t u + u \partial_x (\rho u) + (\rho u)\partial_x u = 0. \qquad (2)$$

Умножим уравнение неразрывности на u и вычтем из (2).

Получаем: $\rho \partial_t u + (\rho u)\partial_x u = 0 \Rightarrow \partial_t u + u\partial_x u = 0$ - уравнение движения. Так меняется со временем скорость, если на этот участок не действуют никакие силы. А если действуют? Нужно добавить силу в правую часть уравнения (2).

Если внутренние силы связаны только с давлением, то получаем замкнутую систему 4 уравнений в частных производных

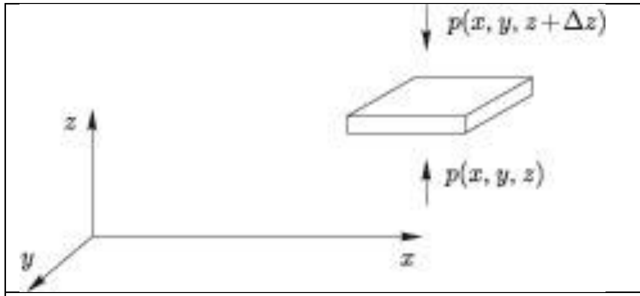
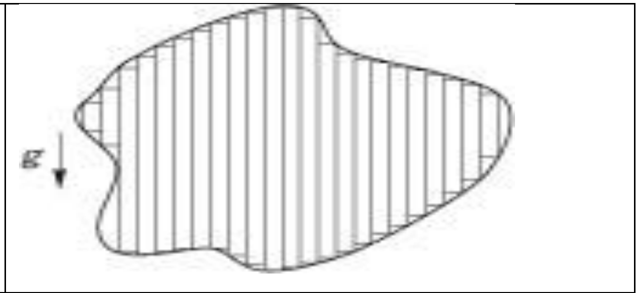
$div\,\vec{u} = 0$ $\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u + \rho^{-1}\partial_x p = 0$ $\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + \rho^{-1}\partial_y p = 0$ $\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w + \rho^{-1}\partial_z p = 0$	Если учесть еще и силу тяжести, то в правую часть последнего уравнения движения нужно добавить -*g*. $\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w + \rho^{-1}\partial_z p = -g$ Это и для сжимаемых сред (атмосфера).

Оператор $\partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ дифференцирования вдоль траекторий называется (в зависимости от контекста) адвективной или конвективной или полной производной и обозначается d_t.

Уравнение гидростатики и закон Архимеда

Если в последнем уравнении движения конвективные члены малы, то получается уравнение гидростатики:

$$\partial_z p = -g\rho. \qquad (3)$$

	
Давление среды на пластинку толщиной Δz	Воображаемое разбиение тела для доказательства закона Архимеда

В природе не всегда гидростатика выполняется. Иначе бы полет был невозможен.

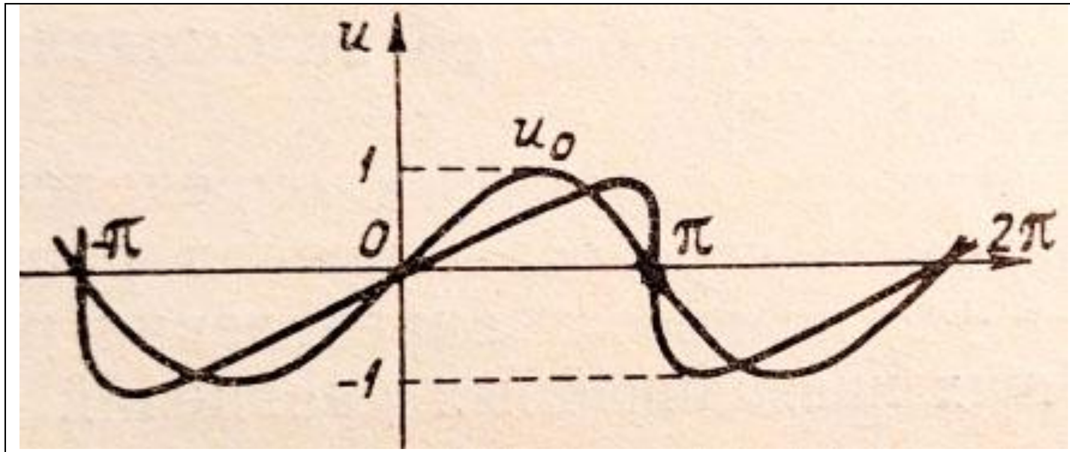
Уравнение вида $\partial_t \rho + u\partial_x \rho = f(t, x, \rho)$ называется полулинейным.

Для такого уравнения характеристики $d_t x = u$ не пересекаются, а вдоль характеристик для ρ нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение $d_t \rho = f$.

Если же и коэффициент u зависит от неизвестной функции ρ, то уравнение называется квазилинейным. Простейший пример: уравнение Эйлера – Хопфа, где $u = \rho$. Уравнение для характеристик $d_t x = u$ в общем случае нужно решать совместно с уравнением $d_t \rho = f$. В случае уравнения Эйлера – Хопфа получаем

$$d_t x = u,\ d_t u = 0. \qquad (4)$$

Для квазилинейных уравнений характеристики могут пересечься! Даже для уравнения Эйлера – Хопфа.



Если будем следить за решением урчп $\rho(t,x)$ с ростом времени t, то увидим, что в некоторых точках график решения становится все круче; производная решения стремится к бесконечности. Поэтому такое явление называется градиентной катастрофой. Похожее явление наблюдаем при цунами: задние частицы с самого начала быстрее, и они догоняют передних. А в силу второго уравнения системы (4) скорости частиц не меняются. Так какая же скорость u будет в точке пересечения характеристик: большая или маленькая. Конфликт.

Непрерывное решение дифференциального уравнения перестает существовать. Дальше образуется скачок в решении.

Нужно вернуться к выводу дифференциального уравнения – там мы предполагали гладкость решения, а его уже нет!

Дальше точка скачка движется по некоторому закону. Амплитуда скачка может меняться.

Литература

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений М.: ``Наука'', 1984.

Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. ``Успехи математических наук'', 1959, Т.14, №2, Стр. 87-158.

Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: ``Наука'', 1981, Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2003.

Уизем Г.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: ``Мир'', 1977.