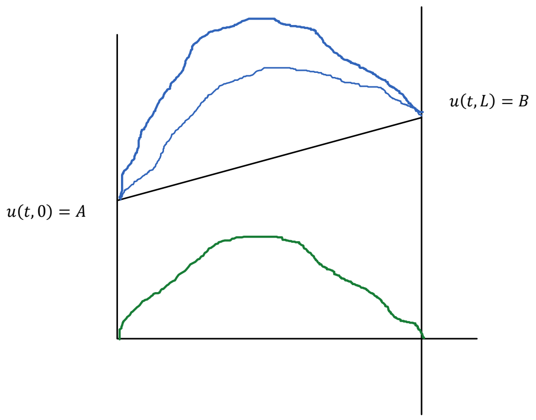
Семинар 2, неделя 5

06 October 2022 13:00



Постановка задачи

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$\partial_t u(t,x) - D\partial_x^2 u(t,x) = 0, \qquad D > 0, \qquad (1)$

на отрезке $x \in [0, L]$ с нулевыми граничными условиями Дирихле

$u(t,0) = u(t,L) = 0$

и начальным распределением температуры

$u(0,x) = u_0(x)$

Метод Фурье

Собственные функции оператора второй производной

$d_x^2 u = z \cdot u, \qquad x \in [0, L]$

Будем искать решение уравнения в виде $u(x) = C\, e^{\lambda x}$:

$C\, \lambda^2 e^{\lambda x} = zC\, e^{\lambda x} \to \lambda^2 = z \to \lambda = \pm\sqrt{z}.$

Значит, собственные функции оператора второй производной есть:

$u(x) = C_1 e^{\sqrt{z}x} + C_2 e^{-\sqrt{z}x}.$

Учтем граничные условия:

$u(0) = u(L) = 0$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{z}L} + C_2 e^{-\sqrt{z}L} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1\left(e^{\sqrt{z}L} - e^{-\sqrt{z}L}\right) = 0 \end{cases}, \qquad e^{\sqrt{z}L} - e^{-\sqrt{z}L} = 0$$

$e^{2\sqrt{z}L} = 1 \to e^{2\sqrt{z}L} = e^{2\pi k i}, \qquad \sqrt{z} = \frac{\pi k i}{L}$

Тогда, собственные функции оператора второй производной на отрезке $x \in [0, L]$ с граничными условиями Дирихле есть:

$u(x) = C_1\left(e^{\frac{\pi k i}{L}x} - e^{-\frac{\pi k i}{L}x}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$

$u(x) = \sin\frac{\pi k}{L}x, \qquad k \geq 1$

Константа C_1 нам тут не интресна, потому что мы ищем лишь собственные функции.

Решение уравнения теплопроводности методом Фурье

Будем искать решение уравнения теплопроводности

$\partial_t u(t,x) - D\partial_x^2 u(t,x) = 0$

в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Подставим это в уравнение теплопроводности:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) + D\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = 0, \qquad (2)$$

Базис:

$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \dots$

Ортогональный базис:

$$\left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx$$

$$= \begin{cases} k \neq m: \ \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{\pi(k-m)}{L}x\right) - \cos\left(\frac{\pi(k+m)}{L}x\right)\right] dx = 0 \\ k = m: \ \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx = \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^L dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \end{cases}$$

Значит, равенство нулю в (2) достигается тогда, когда равные нулю каждый k член:

$\dot{a}_k(t) + D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t) = 0, \qquad \dot{a}_k(t) = -D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t)$

$a_k(t) = C_k \cdot e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}$

Поэтому решение уравнения теплопроводности имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Константы C_k определяются из начального условия $u(0,x) = u_0(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = u_0(x).$$

Умножим скалярно на $\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle$$

$$C_m \frac{L}{2} = \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx,$$

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx = \frac{\left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle}$$

Ищем решение в виде:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Умножим его скалярно на $\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$:

$$\left\langle u, \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = a_m(t) \cdot \frac{L}{2}$$